القســـم : 03 ريـــاضيات — المـــــوسم الدراســـي : 2023 / 2022

الفرض الأول للفـــصل الأول في مادة الرياضيات — **المــــدة : ساعـــة واحدة**

مسألة :

- لتكن الدالة f المعرفة على $D_f =]-\infty, -4] \cup [2, +\infty[$ بـ : $f(x) = \sqrt{x^2+2x-8}$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1)- بين أن المستقيم الذي معادلته: $x = -1$ هو محور تناظر لـ (C_f).

2)- أحسب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -4} \left[\dfrac{f(x)-f(-4)}{x+4}\right]$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} \left[\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\right]$. ماذا نستنتج ؟

- فسر النتيجتين بيانيا .

3)- أحسب : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

4)- أحسب : $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x)+x+1]$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)-x-1]$. فسر النتيجتين بيانيا .

5)- ادرس اتجاه تغير الدالة f على D_f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

6)- أنشئ (C_f).

7)- لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $g(x) = \sqrt{|x^2+2x-8|}$ ، (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ)- بين أن (Cg) يطابق (C_f) على مجال D_1 يطلب تعيينه .

ب)- بين أنه على مجال D_2 يطلب تعيينه (Cg) هو نصف دائرة يطلب تعيين مركزها W و نصف قطرها r.

جـ)- انشئ (Cg) في نفس المعلم السابق .

بالـتوفـــيق و النـــجاح في شـــهادة البكالوريا2023 — الأستاذة : بن زادي

الإجابـة النـموذجية + سلـم التنقيـط :

1)- من أجل كل x من D_f ، $-2-x \in D_f$: نبرهن أن : $f\left(-2-x\right)=f\left(x\right)$

$$f\left(-2-x\right)=\sqrt{(-2-x)^2+2(-2-x)-8}=\sqrt{x^2+4x+4-4-2x-8}=f\left(x\right)$$

ومنه : المستقيم الذي معادلته: $x=-1$ هو محور تناظر لـ (C_f). ....(01 ن)

2)-

$$\lim_{x \underset{<}{\to} -4}\left[\frac{f(x)-f(-4)}{x+4}\right]=\lim_{x \underset{<}{\to} -4}\frac{\sqrt{x^2+2x-8}}{x+4}=\lim_{x \underset{<}{\to} -4}\frac{x^2+2x-8}{(x+4)\sqrt{x^2+2x-8}}$$

$$\lim_{x \underset{<}{\to} -4}\left[\frac{f(x)-f(-4)}{x+4}\right]=\lim_{x \underset{<}{\to} -4}\frac{\left(x+4\right)\left(x-2\right)}{\left(x+4\right)\sqrt{x^2+2x-8}}=\lim_{x \underset{<}{\to} -4}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-8}}$$

$\begin{cases}\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -4}\left(x-2\right)=-6\\ \lim\limits_{x \underset{<}{\to} -4}\sqrt{x^2+2x-8}=0^+\end{cases}$ و منه : $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -4}\left[\frac{f(x)-f(-4)}{x+4}\right]=-\infty$ ....(01.5ن)

f غير قابلة للإشتقاق من اليسار عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=-4$. ....(0.5 ن)

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 2}\left[\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right]=\lim_{x \underset{>}{\to} 2}\frac{\sqrt{x^2+2x-8}}{x+4}=\lim_{x \underset{>}{\to} 2}\frac{x^2+2x-8}{(x-2)\sqrt{x^2+2x-8}}$$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 2}\left[\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right]=\lim_{x \underset{>}{\to} 2}\frac{\left(x+4\right)\left(x-2\right)}{\left(x-2\right)\sqrt{x^2+2x-8}}=\lim_{x \underset{>}{\to} 2}\frac{x+4}{\sqrt{x^2+2x-8}}$$

$\begin{cases}\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 2}\left(x+4\right)=6\\ \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 2}\sqrt{x^2+2x-8}=0^+\end{cases}$ و منه : $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 2}\left[\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right]=+\infty$ ....(01.5ن)

f غير قابلة للإشتقاق من اليمين عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=2$ . ...(0.5 ن)

التفسير البياني : .... (01ن) (01ن)

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي معادلته : $x=-4$ عند النقطة $A\left(-4,0\right)$.

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي معادلته : $x=2$ عند النقطة $B\left(2,0\right)$.

3)- من أجل كل من D_f : $f(x)=\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}\right)}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} -x\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}\right)}=+\infty$ .... (01ن)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}\right)}=+\infty$ .... (01ن)

4)- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x+1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-8-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x-8}-(x+1)}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x+1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-9}{\sqrt{x^2+2x-8}-(x+1)}=0$ .... (01ن)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x-1\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-8-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x-8}+(x+1)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x-1\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-9}{\sqrt{x^2+2x-8}+(x+1)}=0$ .... (01ن)

التفسير البياني : .... (01ن) (01ن)

(C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (T_2) معادلته : $y=-x-1$ بجوار $-\infty$.

(C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (T_1) معادلته : $y=x+1$ بجوار $+\infty$.

5)- f قابلة للإشتقاق على D_f : $f'(x)=\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x-8}}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-8}}$ .... (01ن)

$f'(x)=0$ يكافئ : $x=-1$.

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖		‖	$+$	

f متزايدة تماما على المجال : $]2,+\infty[$. f متناقصة تماما على المجال : $]-\infty,-4[$ . ... (01ن)

- جدول تغيرات الدالة f : ....(01ن)

x	$-\infty$ -4	-4 2	2 $+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$+\infty \searrow 0$		$0 \nearrow +\infty$

7)- على المجال $D_1 = \left]-\infty,-4\right] \cup \left[2,+\infty\right[$: $g(x) = f(x)$ ، (Cg) يطابق (C_f)................(01ن)

على المجال $D_2 = \left[-4,2\right]$: $g(x) = \sqrt{-x^2-2x+8} = y \quad (y \geq 0)$

$-x^2-2x+8 = y^2 \quad (y \geq 0)$ ، $x^2+y^2+2x = 8 \quad (y \geq 0)$

و منه $(x+1)^2 + y^2 = 9$: (Cg) هو نصف دائرة مركزها $w(-1,0)$ و نصف قطرها $r = 3$ . .....(01ن)

6)- إنشاء (C_f) و (Cg):..(02ن)