

البَّحَار فِي الأَعْدَاد وَ الْحِسَاب

3TM

رياضيات
تقني رياضي

الشعب:

- درس شامل لكل من " القسمة في $\mathbb{Z}$ - الموافقات في $\mathbb{Z}$ - التعداد - الأعداد الأولية "
- و مدعم بتطبيقات محلولة لكل عنصر
- تمارين نموذجية بالحل المفصل
- تمارين من بكالوريات سابقة بالحل المفصل

2	مقدمة
3	1 القسم في $\mathbb{Z}$
3	I القسم في $\mathbb{Z}$
4	II القسم الإقليدية في $\mathbb{Z}$
7	2 الموافقات في $\mathbb{Z}$
7	I تعاريف و خواص
9	II حل معادلات من الشكل $ax + by = c$
10	III التعداد
14	3 الأعداد الأولية
14	I الأعداد الأولية
15	II المضاعف المشترك الأصغر لعددین $PPCM$
18	III مبرهنة بيزو
19	IV مبرهنة غوص
21	4 تمارین محلولة
21	I التمارین
30	II حلول التمارین

مقدمة

الحمد لله الذي علم بالقلم ، و الصلاة و السلام على خير المعلمين ، سيدنا محمد صلى الله عليه و على آله الطيبين و بعد :

☀ في بداية الزمن و قبل إختراع الإنسان للكتابة ، كان العدد هو مفتاح كل شيء ، تأمل الإنسان السماء و راقب حركة الأفلاك و من هذه الحركة تعلم الأعداد و الحساب و القياس ، في رحلتنا في هذا الكتاب أسألك أن نجر معا في عالم الأعداد و الحساب ، أطلب الإذن بالصحبة ، في فصولنا الأربعة سنكتشف معا :

• الفصل الأول : القسمة في $\mathbb{Z}$.

• الفصل الثاني : الموافقات في $\mathbb{Z}$.

• الفصل الثالث : التعداد .

• الفصل الرابع : الأعداد الأولية .

☀ و في كل فصل من فصول هذا الكتاب يوجد الكثير من التطبيقات المحلولة

لترسيخ الأفكار الأساسية ، بالإضافة إلى التمارين المرفقة بالحلول في كل فصل .

☀ أتمنى أن أكون قد أسهمت بمجهودي المتواضع في إعداد هذا الكتاب

لخدمة طلاب البكالوريا في الشعب العلمية و أسأل الله عز و جل أن يوفقنا لما فيه الخير و يجعل هذا العمل خالصا لوجهه الكريم و الله الموفق و المستعان .

بحار عاشور

القسمة في $\mathbb{Z}$

1

I القسمة في $\mathbb{Z}$

تعريف

* نقول عن عدد صحيح غير معدوم a يقسم العدد الصحيح b إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح k حيث $b = ka$.

* نقول كذلك a قاسم للعدد b أو نقول b مضاعف للعدد a ونكتب $a | b$ ونقرأ a يقسم b .

أمثلة:

- 2 يقسم 2024 لأن $2024 = 2 \times 1012$ ، ونكتب $2 | 2024$ وأيضا : $1012 | 2024$.
- -3 يقسم 1962 لأن $1962 = (-3) \times (-654)$ ، ونكتب $-3 | 1962$ وأيضا : $-654 | 1962$.

خواص

1. a, b, c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة، إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن a يقسم c
2. a و b عددان صحيحان و a غير معدوم، إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح m ، a يقسم mb
3. a و b عددان صحيحان و a غير معدوم، إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح غير معدوم m ، ma يقسم mb
4. a, b, c ثلاثة أعداد صحيحة و a غير معدوم، إذا كان a يقسم العددين b و c فإنه من أجل كل عددين صحيحين m و n ، a يقسم $mb + nc$

تطبيق 1

- عين في كل حالة الأعداد الصحيحة n حيث :

$$3n+8 \text{ يقسم } n+6$$

$$n+1 \text{ يقسم } 4$$

$$13 \text{ يقسم } n+2$$

الحل

- 1/ لدينا 13 يقسم $n+2$ معناه يوجد عدد صحيح k حيث : $n+2 = 13k$ أي $n = 13k - 2$
- 2/ لدينا $n+1$ يقسم 4 معناه : $n+1 \in \{4; 2; 1; -1; -2; -4\}$ و منه : $n \in \{3; 1; 0; -2; -3; -5\}$
- 3/ لدينا $3n+8$ يقسم $n+6$ ، فحسب الخاصية "2" فإن : $3n+8$ يقسم $3(n+6) = 3n+18$ ،
و حسب الخاصية "4" فإن : $3n+8$ يقسم $(3n+18) - (3n+8) = 10$ معناه :
 $n \in \{-1; -2; -3; -6\}$ إذن : $3n+8 \in \{10; 5; 2; 1; -1; -2; -5; -10\}$

القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$

II

مبرهنة

a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم، توجد ثنائية وحيدة (q, r) من الأعداد الصحيحة حيث $0 \leq r < b$ و $a = bq + r$
نسمي عملية البحث عن الثنائية (q, r) بالقسمة الإقليدية للعدد a على العدد b ويسمى q و r بهذا الترتيب
حاصل وباقي القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b .

القاسم المشترك الأكبر لعددین طبيعیین PGCD

a و b عددان طبيعيان غير معدومان، D_a و D_b مجموعتا قواسم a و b على الترتيب
 $D_a \cap D_b$ هي مجموعة القواسم المشتركة للعددین a و b
يسمى أكبر عنصر من المجموعة $D_a \cap D_b$ بالقاسم المشترك الأكبر للعددین a و b ونرمز له بـ $PGCD(a, b)$

ملاحظات :

$PGCD(1, a) = 1$ و $PGCD(a, a) = a$ *
 $PGCD(0, a) = a$ و a غير معدوم.

خوارزمية إقليدس :

a و b عددان طبيعيان غير معدومان حيث $a > b$ ، بقسمة a على b نحصل على $a = bq_1 + r_1$ و $0 \leq r_1 < b$
حيث q_1 و r_1 عددان طبيعيان

• إذا كان $r_1 = 0$ (أي b يقسم a) فإن $PGCD(a, b) = b$

• إذا كان $r_1 \neq 0$ فإن $PGCD(a, b) = PGCD(b, r_1)$

نقسم b على r_1 نحصل على $b = r_1q_2 + r_2$ و $0 \leq r_2 < r_1$ حيث q_2 و r_2 عددان طبيعيان

• إذا كان $r_2 = 0$ (أي r_1 يقسم b) فإن $PGCD(a, b) = PGCD(b, r_1) = r_1$

• إذا كان $r_2 \neq 0$ فإن $PGCD(a, b) = PGCD(b, r_1) = PGCD(r_1, r_2)$

نقسم r_1 على r_2 نحصل على $r_1 = r_2 q_3 + r_3$ و $0 \leq r_3 < r_2$ حيث r_3 و q_3 عددان طبيعيين

- نواصل هكذا حتى نجد باقيا معدوما، ونسمي r_n آخر باق غير معدوم وعليه :

$$PGCD(a, b) = PGCD(b, r_1) = PGCD(r_1, r_2) = \dots = PGCD(r_n, 0)$$

- هذه الطريقة لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين تسمى خوارزمية إقليدس

خواص

1. a و b عددان طبيعيين غير معدومان حيث $a \geq b$ ، r باق قسمة a على b

$$PGCD(a, b) = PGCD(b, r)$$

2. القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين a و b هو آخر باق غير معدوم في سلسلة قسمة خوارزمية إقليدس

3. a و b عددان طبيعيين غير معدومين، k عدد طبيعي غير معدوم، لدينا

$$PGCD(ka, kb) = kPGCD(a, b)$$

4. إذا كان $PGCD(a; b) = d$ ، فإن $d \mid a$ و $d \mid b$ أيضا : $\begin{cases} a = da' \\ b = db' \\ PGCD(a'; b') = 1 \end{cases}$

تطبيق 2

1. عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 82 و 1399 ، ماذا تستنتج ؟

2. عين مجموعة القواسم المشتركة للعددين 150 و 108 .

3. عين كل الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية الغير معدومة التي تحقق : $\begin{cases} a + b = 54 \\ PGCD(a; b) = 9 \end{cases}$

الحل

1. باستعمال خوارزمية إقليدس :

$$1399 = 82 \times 17 + 5$$

$$82 = 5 \times 16 + 2$$

$$5 = 2 \times 2 + 1$$

$$2 = 2 \times 1 + 0$$

نلاحظ أن آخر باقي غير معدوم هو 1 ، و منه $PGCD(82; 1399) = 1$ ،
 • نستنتج أن العددين 82 و 1399 أوليان فيما بينهما

2. بإستعمال خوارزمية إقليدس :

$$150 = 108 \times 1 + 42$$

$$108 = 42 \times 2 + 24$$

$$42 = 24 \times 1 + 18$$

$$24 = 18 \times 1 + 6$$

$$18 = 6 \times 3 + 0$$

نلاحظ أن آخر باقي غير معدوم هو 6 ، و منه $PGCD(150; 108) = 6$ ،
 إذن مجموعة القواسم المشتركة للعددين 150 و 108 هي مجموعة قواسم العدد 6 و هي : $D_6 = \{1; 2; 3; 6\}$

3. لدينا $PGCD(a; b) = 9$ و منه : $\begin{cases} 9 | a \\ 9 | b \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} a = 9a' \\ b = 9b' \end{cases}$ حيث $PGCD(a'; b') = 1$

و لدينا : $a + b = 54$ ، تكافئ : $9a' + 9b' = 54$ ، تكافئ : $a' + b' = 6$ ،
 إذن : $(a'; b') = \{(1; 5), (5; 1)\}$ " تذكر أن a' و b' أوليان فيما بينهما "
 و بالتالي : $(a; b) = \{(9; 45), (45; 9)\}$

تمديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين

a و b عددان صحيحان غير معدومان، القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو العدد الطبيعي الوحيد d حيث :

$$d = PGCD(|a|, |b|)$$

ملاحظة :

a و b عددان صحيحان غير معدومان، إذا كان b يقسم a فإن : $PGCD(a, b) = |b|$

I تعاريف و خواص

تعريف

n عدد طبيعي غير معدوم
القول أن عددين صحيحين a و b متوافقان بترديد n يعني a و b لهما نفس الباقي في القسمة على n
ونرمز $a \equiv b[a]$ ونقرأ a يوافق b بترديد n

"أو نقول أن العددين a و b متوافقان بترديد n إذا وفقط إذا كان $a - b$ من مضاعفات n في $\mathbb{Z}$ "
أمثلة:

- لدينا $10 \equiv 6[4]$
لأن $10 = 4 \times 2 + 2$ و $6 = 4 \times 1 + 2$ ، إذن لهما نفس الباقي 2
- أيضا : $24 \equiv 3[7]$ ، $-20 \equiv 1[7]$ ، $13 \equiv -11[8]$

خواص

1. n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1 ($n \geq 2$) ، كل عدد صحيح a يوافق باقي قسمته على n بترديد n
2. n عدد طبيعي غير معدوم. من أجل كل عدد صحيح a لدينا : $a \equiv a[n]$
3. n عدد طبيعي غير معدوم ، a و b عدنان صحيحان ، إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن : $b \equiv a[n]$
4. n عدد طبيعي غير معدوم ، a ، b و c أعداد صحيحة ، إذا كان $a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n]$ فإن $a \equiv c[n]$
5. n عدد طبيعي غير معدوم ، a ، b و c أعداد صحيحة ، إذا كان $a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$ فإن : $a + c \equiv b + d[n]$
6. n عدد طبيعي غير معدوم ، a ، b و c أعداد صحيحة ، إذا كان $a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$ فإن : $ac \equiv bd[n]$
7. n عدد طبيعي غير معدوم ، a و b عدنان صحيحان ، من أجل كل عدد صحيح k إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن : $ka \equiv kb[n]$
8. n عدد طبيعي غير معدوم ، a و b عدنان صحيحان. من أجل كل عدد صحيح k إذا كان $ka \equiv kb[n]$ و $PGCD(k, n) = 1$ فإن : $a \equiv b[n]$

9. n و p عددان طبيعيين غير معدومين a و b عددان صحيحان
إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $a^p \equiv b^p[n]$

تطبيق 3

1. عين باقي قسمة 5817 على 251 ، ثم استنتج باقي قسمة -5817 على 251

2. عين العدد الطبيعي n الذي يحقق : $n - 5 \equiv 2[11]$

3. عين العدد الصحيح x الذي يحقق : $4x + 1 \equiv 4[11]$

الحل

1. لدينا : $5817 = 251 \times 23 + 44$ ، ومنه العدد 44 هو باقي قسمة 5817 على 251 .

لدينا : $5817 \equiv 44[251]$ نضرب في -1 نجد $-5817 \equiv -44[251]$ "الخاصية 7"

و نعلم أن $251 \equiv 0[251]$ ومنه : $0 \equiv 251[251]$ "الخاصية 3"

إذن لدينا : $\begin{cases} -5817 \equiv -44[251] \\ 0 \equiv 251[251] \end{cases}$ ، ومنه حسب "الخاصية 5" نحصل على : $-5817 \equiv 207[251]$

2. لدينا : $n - 5 \equiv 2[11]$ ، ومنه : $n \equiv 2 + 5[11]$ "الخاصية 2 ثم 5"

ومنه : $n \equiv 7[11]$ ، إذن : $n = 11k + 7$ مع $k \in \mathbb{N}$

3. لدينا : $4x + 1 \equiv 4[11]$ ومنه : $4x \equiv 4 - 1[11]$ ومنه : $4x \equiv 3[11]$ ، نضرب الطرفين في 3 نجد :

$12x \equiv 9[11]$ ، وبما أن $12 \equiv 1[11]$ فإن : $x \equiv 9[11]$ ، إذن : $x = 11k + 9$ مع $k \in \mathbb{Z}$

أو بطريقة أخرى : x عدد صحيح يمكن أن يوافق كل بواقي القسمة على 11 ، بتطبيق "الخاصية 7"
نلخص الحالات في الجدول :

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	[11]
$4x \equiv$	0	4	8	1	5	9	2	6	10	3	7	[11]

مما سبق لدينا : $4x \equiv 3[11]$ و من الجدول الحالة التي تحقق هي : $x \equiv 9[11]$

إذن : $x = 11k + 9$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

تطبيق 4

1. عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5

2. استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^{4039} على 5

1. تعيين بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 :
- نلاحظ أن بواقي القسمة تشكل متتالية دورية و دورها 4
- " أي دور القسمة هو من الشكل $4k$ مع $k \in \mathbb{N}$ "
- | | |
|-------------------|---------|
| $3^0 \equiv 1[5]$ | $n = 0$ |
| $3^1 \equiv 3[5]$ | $n = 1$ |
| $3^2 \equiv 4[5]$ | $n = 2$ |
| $3^3 \equiv 2[5]$ | $n = 3$ |
| $3^4 \equiv 1[5]$ | $n = 4$ |
- نلخص هذه الموافقات في الجدول الآتي:

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$3^n \equiv$	1	3	4	2	[5]

2. إستنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^{4039} على 5 :
- لدينا : $4039 = 4 \times 1009 + 3$ هي من الشكل $4k+3$ إذن من الجدول $3^n \equiv 2[5]$
- و منه باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^{4039} على 5 هو 2 .

II حل معادلات من الشكل $ax + by = c$

مبرهنة

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $ax + by = c$ ذات المجهول (x, y) ، حيث a ، b و c أعداد طبيعية

المعادلة تقبل حلول إذا وفقط إذا كان a و b أوليين فيما بينهما أو c يقبل القسمة على $\text{PGCD}(a, b)$

تطبيق 5

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $5x - 8y = 3$ ذات المجهول (x, y)

1. تأكد أن $(7, 4)$ حل للمعادلة .
2. أثبت أنه إذا كان (x, y) حلا للمعادلة فإن $5x \equiv 3[8]$.
3. عين الأعداد الصحيحة x حيث : $5x \equiv 3[8]$.
4. أثبت أن كل حلول المعادلة هي من الشكل $(8k+7, 5k+4)$ ، حيث k عدد صحيح .

الحل

1. المعادلة تقبل حلول لأن : $PGCD(7,4) = 1$ أي 7 و 4 أوليين فيما بينهما .

• التأكد أن (7,4) حل للمعادلة :

لدينا : $5 \times 7 - 8 \times 4 = 3$ وبالتالي (7,4) حل للمعادلة .

2. (x, y) حلا للمعادلة معناه $5x - 8y = 3$ و منه : $5x = 8y + 3$

إذن : $5x \equiv 3[8]$.

3. لدينا : $5x \equiv 3[8]$ ، و x عدد صحيح يمكن أن يوافق كل بواقي القسمة على 8 نلخص الحالات في الجدول :

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	[8]
$5x \equiv$	0	5	2	7	4	1	6	3	[8]

و من الجدول الحالة التي تحقق $5x \equiv 3[8]$ هي : $x \equiv 7[8]$

إذن : $x = 8k + 7$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

4. وجدنا من السؤال السابق أن : $x = 8k + 7$ ، نبحث الآن عن y :
حلا للمعادلة معناه : $5x - 8y = 3$ ، و منه :

$$8y = 5x - 3 = 5(8k + 7) - 3 = 40k + 35 - 3 = 40k + 32$$

بالقسمة على 8 نجد : $y = 5k + 4$ ، إذن حلول المعادلة هي من الشكل $(8k + 7, 5k + 4)$ حيث k عدد صحيح .

III التعداد

III

مبرهنة

x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1 ، كل عدد طبيعي a أكبر من أو يساوي x يكتب بطريقة وحيدة على الشكل

$$a = qx^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + \dots + r_i x^i + \dots + r_2 x^2 + r_1 x + r_0$$

حيث :

$$0 < q < x \quad \text{و} \quad 0 \leq r_i < x \quad \text{مع} \quad i \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}$$

أمثلة :

• إذا كان : $x = 2$ و $a = 29$ فإن :

$$29 = 16 + 8 + 4 + 1 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1$$

حيث :

$$q = 1, r_3 = 1, r_2 = 1, r_0 = 1, n = 4$$

• أيضا إذا كان : $x = 4$ و $a = 43$ فإن : $a = 2 \times 4^2 + 2 \times 4^1 + 3$

قاعدة

التعداد ذو الأساس x

x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1 ، يعتمد التعداد ذو الأساس x على الإصطلاحين التاليين :

1. إذا كان $a < x$ (a عدد طبيعي) a يمثل برمز وحيد يسمى رقبا .

2. إذا كان $a \geq x$ (a عدد طبيعي) من المبرهنة a ينشر بطريقة وحيدة وفق العدد x :

$$a = qx^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + \dots + r_2x^2 + r_1x + r_0$$

حيث $0 < q < x$ و $0 \leq r_\alpha < x$ مع $\alpha \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}$

• يمثل العدد a كما يلي $a = \overline{qr_{n-1}r_{n-2}\dots r_1r_0}$

• الكتابة $a = \overline{qr_{n-1}r_{n-2}\dots r_1r_0}$ هي كتابة العدد a في النظام ذي الأساس x . إذا كان $x = 10$ ،

نكتب $a = qr_{n-1}r_{n-2}\dots r_1r_0$ ويسمى النظام العشري.

أمثلة :

• النظام العشري : هو النظام الذي أساسه 10 و أرقامه هي : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

• النظام الثنائي : هو النظام الذي أساسه 2 و أرقامه هي : 0, 1

فتثلا :

$$29 = 16 + 8 + 4 + 1$$

$$= 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1$$

إذن العدد 29 يكتب $\overline{11101}$ في النظام ذو الأساس 2

تطبيق 6

1. a عدد طبيعي يكتب $\overline{643}^8$ في النظام ذو الأساس 8 ، أكتب a في النظام العشري .
2. b عدد طبيعي يكتب $\overline{1723}^4$ في النظام ذو الأساس 4 ، أكتب b في النظام العشري .

الحل

1. لدينا : $a = 6 \times 8^2 + 4 \times 8 + 3 \times 8^0 = 419$ ، و منه a يكتب 419 في النظام العشري .
2. لدينا : $b = 1 \times 4^3 + 3 \times 4^2 + 0 \times 4^1 + 2 \times 4^0 = 114$ ، و منه b يكتب 114 في النظام العشري .

طريقة

الإنتقال من الأساس x إلى الأساس y

N عدد طبيعي مكتوب في نظام أساسه x لكتابته في نظام أساسه y

1- نحول N من النظام الذي أساسه x إلى النظام العشري

2- نحول N من النظام العشري إلى النظام الذي أساسه y

تطبيق 7

a عدد طبيعي يكتب $\overline{643}^8$ في النظام ذو الأساس 8

1. أكتب a في النظام ذي الأساس 2 بطريقتين :

- أ/ بالمرور بالنظام العشري .
- ب/ مباشرة .

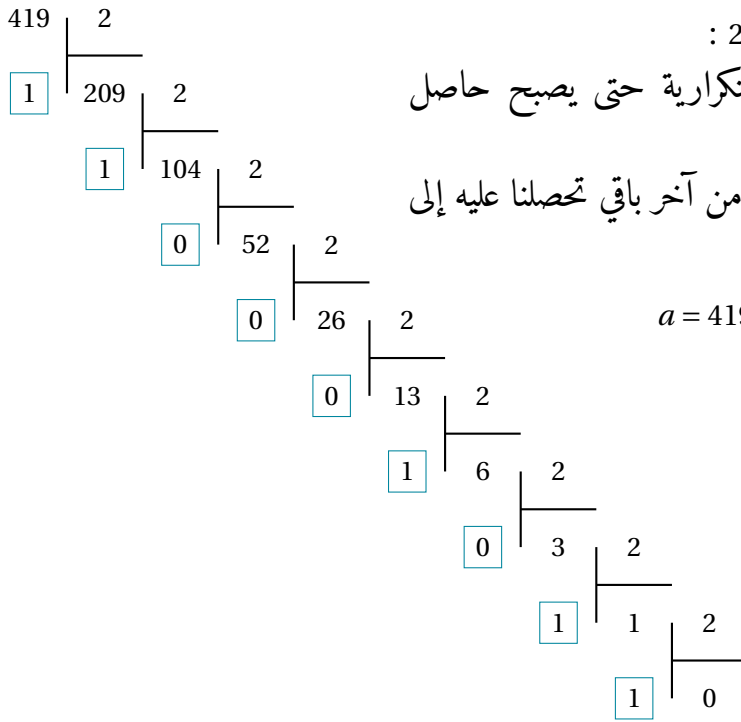
2. أكتب a في النظام ذي الأساس 4 مباشرة .

الحل

1.

أ/ بالمرور بالنظام العشري :

من التطبيق السابق a يكتب 419 في النظام العشري .



لكاتبه 419 في النظام ذي الأساس 2 :

• نقوم بعملية القسمة الإقليدية التكرارية حتى يصبح حاصل القسمة معدوم

• نقوم بترتيب بواقي القسمة الناتجة من آخر باقي تحصلنا عليه إلى أول باقي

فينتج في الأخير : $a = 419 = \overline{110100011}^2$

ب/ مباشرة : لدينا :

$$\begin{aligned} a = \overline{643}^8 &= 6 \times 8^2 + 4 \times 8 + 3 \\ &= 3 \times 2 \times (2^3)^2 + 2^2 \times 2^3 + 3 \\ &= 3 \times 2^7 + 2^5 + 3 \\ &= (2 + 1) \times 2^7 + 2^5 + 2 + 1 \\ &= 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2 + 1 \end{aligned}$$

ومنه :

$$a = 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2 + 0 \times 2 + 0 \times 2 + 1 \times 2 + 1$$

إذن a يكتب $a = \overline{110100011}^2$ في النظام ذي الأساس 2 .

2. كتابة a في النظام ذي الأساس 4 مباشرة : لدينا :

$$\begin{aligned} a = \overline{643}^8 &= 6 \times 8^2 + 4 \times 8 + 3 \\ &= 6 \times (2 \times 4)^2 + 4 \times 4 \times 2 + 3 \\ &= (2 + 4) \times 4^3 + 4^2 \times 2 + 3 \\ &= 4^4 + 2 \times 4^3 + 2 \times 4^2 + 3 \end{aligned}$$

ومنه :

$$a = 1 \times 4^4 + 2 \times 4^3 + 2 \times 4^2 + 0 \times 4 + 3$$

إذن a يكتب $a = \overline{12203}^4$ في النظام ذي الأساس 4 .

I الأعداد الأولية

تعريف

نقول عن العدد الطبيعي n عدد أولي معناه أن n يقبل قاسمين بالضبط في $\mathbb{N}$: 1 و n نفسه .

ملاحظات :

- العدد 0 غير أولي لأنه يقبل عدد غير منته من القواسم .
- العدد 1 غير أولي لأنه يقبل قاسم واحد فقط هو 1 .
- العدد 2 هو العدد الزوجي الوحيد الأولي .
- 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 هي الأعداد الأولية الأصغر من 20 .

خواص

1. كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 يقبل على الأقل قاسما أوليا .
2. كل عدد طبيعي n غير أولي وأكبر تماما من 1 يقبل قاسما أوليا a حيث $a \leq \sqrt{n}$.
3. مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية .

طريقة : لمعرفة إذا ما كان عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 أوليا أم لا ، نقوم بحساب $\sqrt{n}$.

- إذا كان $\sqrt{n}$ عددا طبيعيا أي n مربع تام فإن n غير أولي .
- إذا كان $\sqrt{n}$ غير طبيعي نقسم n على الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{n}$ على الترتيب .
 - إذا وجدنا أحد البواقي معدوما نتوقف ونقرّ أن n غير أولي .
 - إذا كانت كل البواقي غير معدومة نقرّ أن n أولي .

- في كل حالة أذكر إن كان العدد أوليا أم لا :

341 ، 3

149 ، 2

961 ، 1

الحل

1. لدينا : $\sqrt{961} = 31$ و منه : 961 مربع تام و بالتالي 961 غير أولي .
2. لدينا : $\sqrt{149} \approx 12.20$ و منه الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{149}$ هي : 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 و 149 لا يقبل القسمة على 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 و منه 149 عدد أولي .
3. لدينا : $\sqrt{341} \approx 18.46$ و منه الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{341}$ هي : 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 و لكن $341 = 11 \times 31$ أي 341 يقبل القسمة على 11 و بالتالي 341 غير أولي .

II المضاعف المشترك الأصغر لعددین PPCM

تعريف

a و b عددان طبيعيين غير معدومين M_a مجموعة مضاعفات a ، M_b مجموعة مضاعفات b ،
 $M_a \cap M_b$ هي مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين a و b
يسمى أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $M_a \cap M_b$ المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b ونرمز له ب : $PPCM(a; b)$.

أمثلة :

- مجموعة مضاعفات 3 هي : $M_3 = \{0; 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; \dots\}$
- مجموعة مضاعفات 6 هي : $M_6 = \{0; 6; 12; 18; 24; 30; 36; 42; \dots\}$
- إذن : $M_3 \cap M_6 = \{0; 6; 12; 18; 24; \dots\}$ ، و بالتالي : $PPCM(3; 6) = 6$.

a و b عددان طبيعيين غير معدومين و k عدد صحيح غير معدوم ، لدينا :

1. $PPCM(a; a) = a$ ، $PPCM(1; a) = a$ ، $PPCM(0; a) = 0$.

2. إذا كان b يقسم a فإن $PPCM(a, b) = a$.

3. $PPCM(ka; kb) = k \times PPCM(a; b)$.

4. إذا كان a يقسم c و b يقسم c فإن $PPCM(a; b)$ يقسم c .

نتيجة مهمة : " تمديد المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين "

a و b عددان صحيحان غير معدومين

المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو أصغر عدد طبيعي m غير معدوم حيث : $m = PPCM(|a|, |b|)$.

حساب القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر والعلاقة بينهما :

• لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماماً من 1 .

نقوم بتحليل العددين a و b إلى جداء عوامل أولية ثم نأخذ العوامل المشتركة مرة واحدة و بأصغر أس ونحسب جداءها .

• لإيجاد المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماماً من 1 .

نقوم بتحليل العددين a و b إلى جداء عوامل أولية ثم نأخذ العوامل المشتركة و غير المشتركة مرة واحدة و بأكبر أس ونحسب جداءها .

• a و b عددان طبيعيين كلاهما أكبر تماماً من 1 ، إذن : $PGCD(a; b) \times PPCM(a; b) = a \times b$.

تطبيق 9

-أوجد القاسم المشترك الأكبر ثم المضاعف المشترك الأصغر للعددين : 154 و 48 .

الحل

أولا نقوم بتحليل العددين : 154 و 48 إلى جداء عوامل أولية :

طريقة: لتحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية نتبع ما يلي :

1. نقسم العدد المعطى على أصغر عدد أولي يكون قاسما له.
2. نقسم حاصل القسمة على أصغر عدد أولي يكون قاسما له .
3. نكرر عمليات القسمة حتى يكون الحاصل يساوي 1 .
4. نكتب جداء كل هذه القواسم و باستعمال خواص القوى نبسط هذا الجداء .

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \text{لدينا :} \quad \text{ومنه: } 48 = 2^4 \times 3 \quad \text{و أيضا :} \quad \begin{array}{r|l} 154 & 2 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \quad \text{ومنه: } 154 = 2 \times 7 \times 11$$

- القاسم المشترك الأكبر للعددين 154 و 48 هو: $PGCD(154; 48) = 2$
- المضاعف المشترك الأصغر للعددين 154 و 48 هو: $PGCD(154; 48) = 2^4 \times 3 \times 7 \times 11 = 3696$

تطبيق 10

-عين كل الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية و التي تحقق : $\begin{cases} a^2 - b^2 = 60 \\ 2PPCM(a; b) = a \times b \end{cases}$

الحل

لدينا : $2PPCM(a; b) = a \times b$ ومنه : $PGCD(a; b) = 2$

إذن : $\begin{cases} 2 \mid a \\ 2 \mid b \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a = 2a' \\ b = 2b' \end{cases}$ حيث : $PGCD(a'; b') = 1$

لدينا $a^2 - b^2 = 60$ ومنه : $4a'^2 - 4b'^2 = 60$ ومنه : $a'^2 - b'^2 = 15$ أي : $(a' + b')(a' - b') = 1 \times 15 = 3 \times 5$

و بما أن : a' و b' عددين طبيعيين فإن : $a' + b' > a' - b'$

إذن : $\begin{cases} a' + b' = 15 \\ a' - b' = 1 \end{cases}$ بالجمع نجد $2a' = 16$ أي : $a' = 8$ ثم نعوض في إحدى المعادلتين فنجد : $b' = 7$

أو : $\begin{cases} a' + b' = 5 \\ a' - b' = 3 \end{cases}$ بالجمع نجد $2a' = 8$ أي : $a' = 4$ ثم نعوض في إحدى المعادلتين فنجد : $b' = 1$

إذن : $(a'; b') \in \{(8; 7), (4; 1)\}$ و بالتالي : $(a; b) \in \{(16; 14), (8; 2)\}$

مبرهنة

يكون عدنان صحيحان a و b أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد عدنان صحيحان u و v بحيث:
 $au + bv = 1$

أمثلة:

من أجل $a=3$ و $b=2$ ، $PGCD(a,b)=1$ لدينا :

$$3 \times (-1) + 2 \times 2 = 1 \quad , \quad 3 \times 1 + 2 \times (-1) = 1$$

نلاحظ أن الثنائية (u,v) ليست وحيدة .

خواص

1. إذا كان d القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين a و b فإنه يوجد عدنان صحيحان u و v بحيث:
 $au + bv = d$
2. إذا كان a عددا أوليا فإن a أولي مع كل الأعداد التي لا يقسمها .
3. إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a أولي مع جدائهما $b \times c$.
4. إذا كان $PGCD(a;b)=1$ فإن : $PGCD(a;b^n)=1$ مع $n \in \mathbb{N}^*$.
5. إذا كان $PGCD(a;b)=1$ فإن : $PGCD(a^n;b^n)=1$ مع $n \in \mathbb{N}^*$.

تطبيق 11

ليكن n عددا طبيعيا . (السؤالين مستقلين عن بعضهما)

1. أثبت أن العددين $A=2n+1$ و $B=9n+4$ أوليان فيما بينهما .
2. برهن أن العددين $n+2$ و $2n^2+5n+3$ أوليان فيما بينهما .

الحل

1. لدينا : $A = 2n + 1$ و منه : $9A = 18n + 9$ (1)

أيضا : $B = 9n + 4$ و منه : $2B = 18n + 8$ (2)

بطرح (2) من (1) نجد : $9A - 2B = 1$ ، إذن حسب مبرهنة بيزو فإن A و B عددان أوليان فيما بينهما .

2. لدينا : $2n^2 + 5n + 3 = (2n + 3)(n + 1)$

• بما أن $2(n + 2) - (2n + 3) = 1$ فإن حسب مبرهنة بيزو العددين $n + 2$ و $2n + 3$ أوليين فيما بينهما

• بما أن $(n + 2) - (n + 1) = 1$ فإن حسب مبرهنة بيزو العددين $n + 2$ و $n + 1$ أوليين فيما بينهما

في الأخير : بما أن $n + 2$ أولي مع العددين $2n + 3$ و $n + 1$ فإن $n + 2$ أولي مع $(2n + 3)(n + 1)$

و بالتالي $n + 2$ و $2n^2 + 5n + 3$ أوليان فيما بينهما .

مبرهنة غوص

IV

مبرهنة

a ، b و c أعداد صحيحة غير معدومة
إذا كان a يقسم الجداء bc وكان a أوليا مع b فإن a يقسم c .

خواص

1. a و b عددان طبيعيين غير معدومين و p عدد أولي
إذا كان p يقسم الجداء ab فإن p يقسم a أو p يقسم b .

2. a ، b ، c أعداد طبيعية غير معدومة
إذا كان a مضاعف لـ b و c وكان c و b أوليان فيما بينهما فإن a مضاعف للجداء bc .

1. أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 342 و 258 .
2. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $57x = 43y$ ذات المجهول $(x; y)$.
3. تحقق أن الثنائية $(-3; -4)$ حل للمعادلة $57x - 43y = 1$ ذات المجهول $(x; y)$.
4. استنتج في $\mathbb{Z}^2$ مجموعة حلول المعادلة $342x - 258y = 6$ ذات المجهول $(x; y)$.

الحل

1. لدينا باستخدام خوارزمية إقليدس :

$$342 = 258 \times 1 + 84$$

$$258 = 84 \times 3 + 6$$

$$84 = 6 \times 14 + 0$$

فإن آخر باقي غير معدوم هو 6 إذن : $PGCD(342; 258) = 6$

2. لدينا : $57x = 43y$ و بما أن x و y عددين صحيحين فإن 43 يقسم $57x$ و كون 43 أولي مع 57 ،

فحسب غوص 43 يقسم x و منه : $x = 43k$ مع $k \in \mathbb{Z}$ ، ثم بتعويض $x = 43k$ في المعادلة $57x = 43y$ نجد : $y = 57k$

إذن مجموعة حلول المعادلة هي : $\{(43k; 57k)\}$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

3. لدينا : $57(-3) - 43(-4) = -171 + 172 = 1$ و منه : $(-3; -4)$ حل للمعادلة $57x - 43y = 1$.

4. لدينا : $342x - 258y = 6$ نقسم الطرفين على 6 نجد : $57x - 43y = 1$

$$\text{إذن : } \begin{cases} 57x - 43y = 1 \\ 57(-3) - 43(-4) = 1 \end{cases} \text{ بالطرح نجد } 57(x+3) - 43(y+4) = 0$$

$$\text{و منه : } 57(x+3) = 43(y+4)$$

لدينا : $\begin{cases} 43 \mid 57(x+3) \\ PGCD(57; 43) = 1 \end{cases}$ فحسب غوص نجد $43 \mid (x+3)$ و منه $x+3 = 43k$ أي $x = 43k - 3$

ولدينا : $\begin{cases} 57 \mid 43(y+4) \\ PGCD(57; 43) = 1 \end{cases}$ فحسب غوص نجد $57 \mid (y+4)$ و منه $y+4 = 57k$ أي $y = 57k - 4$

إذن مجموعة حلول المعادلة هي : $\{(43k - 3; 57k - 4)\}$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

تمارين محلولة

4

التمارين

I

التمرين 1:

إضغط على "1" للإنتقال للحل

1. أحسب $PGCD(182; 126)$.
2. باستعمال خوارزمية إقليدس ، جد عددين صحيحين α و β يحققان : $182\alpha + 126\beta = 14$.
3. عين في كل حالة من الحالات التالية الثنائيات $(a; b)$ من $\mathbb{N}^2$ التي تحقق :

$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1575 \\ PGCD(a; b) = 5 \end{cases} / 3$	$\begin{cases} a \times b = 360 \\ PGCD(a; b) = 6 \end{cases} / 2$	$\begin{cases} a + b = 96 \\ PGCD(a; b) = 12 \end{cases} / 1$
--	--	---

التمرين 2:

إضغط على "2" للإنتقال للحل

- a و b عددان طبيعيين غير معدومين .
- نضع : $x = 7a - 5b$ و $y = 4a - 3b$.

1. برهن أن : $PGCD(|x|; |y|) = PGCD(a; b)$.
2. عين كل الثنائيات من الأعداد الطبيعية $(\alpha; \beta)$ التي تحقق :

$$\begin{cases} (7\alpha - 5\beta)(4\alpha - 3\beta) = 1300 \\ PGCD(\alpha; \beta) = 5 \end{cases}$$

التمرين 3:

إضغط على "3" للإنتقال للحل

1. أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 7^n على 9.
2. ماهو باقي قسمة العدد $6568^{1962} + 16^{1445} - 5 \times 8^{2024}$ على 9 ؟
3. عين الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها : $25^{3n} + 25^n - 5 \equiv 0 [9]$.

التمرين 4:

إضغط على "4" للانتقال للحل

في النظام ذي الأساس 9 يكتب عدد طبيعي n كما يلي : $n = \overline{1271x}^9$.

1. عين قيمة x حتى يكون n قابلا للقسمة على 8.
2. عين قيمة x حتى يكون n قابلا للقسمة على 11.
3. عين عددين طبيعيين x و y بحيث يكون العدد $n = 27x85y$ ، المكتوب في النظام العشري ، قابلا للقسمة على 3 و 11 .

التمرين 5:

إضغط على "5" للانتقال للحل

1. عين الأعداد الصحيحة x حيث : $7x \equiv -19 [9]$.
2. استنتج في $\mathbb{Z}^2$ مجموعة حلول المعادلة : $7x - 9y = -19 \dots (1)$ ذات المجهول $(x; y)$.
3. من بين حلول المعادلة (1) عين تلك التي تحقق : $x \equiv 0 [y]$.
4. نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب $\overline{2\alpha 5}^7$ في النظام العد ذي الأساس 7 ، ويكتب $\overline{1\beta 3}^9$ في نظام العد ذي الأساس 9 .
- عين α و β ، ثم أكتب العدد n في نظام العشري .

التمرين 6:

إضغط على "6" للانتقال للحل

بكالوريا 2012 تقني رياضي

1. أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 9^n على 11 .
2. ماهو باقي قسمة العدد 2011^{2012} على 11 ؟
3. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد $4 \times 9^{15n+1} + 4 \times 2011^{10n} + 2011^{2012}$ يقبل القسمة على 11
4. عين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون $(2011^{2012} + 2n + 2)$ مضاعفا للعدد 11 .

التمرين 7:

إضغط على "7" للإنتقال للحل

بكالوريا 2009 رياضيات

x عدد طبيعي أكبر من 1 و y عدد طبيعي .
 $A = \overline{5566}^x$ عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس x بالشكل : $A = \overline{5566}^x$

1. أ/ أنشر العبارة $(x+1)(5x^2+6)$ ثم أوجد علاقة تربط بين x و y إذا علمت أن
 $A = (5x^2+6)(2+2y)$

ب/ أحسب x و y إذا علمت أن x عدد أولي أصغر من 12 ، ثم أكتب تبعا لذلك العدد A في النظام العشري .

2. أ/ عين الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584 .

ب/ عين الأعداد الطبيعية a و b حيث $a > b$ التي تحقق : $\begin{cases} a+b=32 \\ a^2+b^2=584 \end{cases}$

التمرين 8:

إضغط على "8" للإنتقال للحل

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $5x - 3y = 2 \dots (1)$

1. بين أن المعادلة (1) تقبل حلا في $\mathbb{Z}^2$.

2. أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن $x \equiv 1 [3]$.

3. استنتج حلول المعادلة (1) .

4. أ/ بين إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن : $PGCD(x; y) = PGCD(x; 2)$.

ب/ استنتج القيم الممكنة لـ $PGCD(x; y)$.

ج/ عين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (1) التي تحقق : $PGCD(x; y) = 2$

التمرين 9:

إضغط على "9" للإنتقال للحل

بكالوريا 2010 تقني رياضي

نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب في نظام العد ذي الأساس 7 كما يلي : $n = \overline{11\alpha 00}^7$ حيث $\alpha \in \mathbb{N}$

1. عين α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3 .

2. عين α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5 .

3. استنتج قيمة α التي تجعل n قابلا للقسمة على 15 .
4. نأخذ $\alpha = 4$. أكتب العدد n في النظام العشري .

إضغط على "10" للإنتقال للحل

التمرين 10:

بكالوريا 2008 رياضيات

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $3x - 21y = 78$

1. أ/ بين أن (E) تقبل حولا في $\mathbb{Z}^2$.
ب/ أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x, y) من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 5[7]$
ج/ استنتج حلول المعادلة (E) .
2. أ/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 .
ب/ عين الثنائيات (x, y) من $\mathbb{N}^2$ التي هي حلول للمعادلة (E) وتحقق: $5^x + 5^y \equiv 3[7]$

إضغط على "11" للإنتقال للحل

التمرين 11:

بكالوريا 2013 رياضيات

1. n عدد طبيعي . نعتبر العددين الصحيحين α و β حيث: $\alpha = 2n^3 - 14n + 2$ و $\beta = n + 3$.
أ/ بين أن: $PGCD(\alpha; \beta) = PGCD(\beta; 10)$.
ب/ ماهي القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha; \beta)$ ؟
ج/ عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $PGCD(\alpha; \beta) = 5$.
2. أ/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11 .
ب/ عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[10] \end{cases}$

إضغط على "12" للإنتقال للحل

التمرين 12:

بكالوريا 2011 تقني رياضي

من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$

1. تحقق أن $4 \equiv -3[7]$ ثم بين أن $A_3 \equiv 6[7]$.

2. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعددين 2^n و 3^n على 7 .
3. بين أنه إذا كان n فرديا فإن A_{n+1} يقبل القسمة على 7 ثم إستنتج باقي القسمة للعدد A_{2011} على 7 .
4. ماهو باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{1432} على 7 ؟

إضغط على "13" للإنتقال للحل

التمرين 13:

1. أ/ أنشر العبارة $(n+3)(3n^2-9n+16)$ مع $n \in \mathbb{N}$.
إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون العدد $3n^3-11n+48$ قابلا للقسمة على $n+3$.
ب/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3n^2-9n+16$ هو عدد طبيعي غير معدوم .
2. لتكن a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة . بين أن $PGCD(a; b) = PGCD(bc-a; b)$.
3. بين أن $PGCD(3n^3-11n; n+3) = PGCD(48; n+3)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 .
4. أ/ عين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد الطبيعي 48 .
ب/ إستنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $A = \frac{3n^3-11n}{n+3}$ عددا طبيعيا .

إضغط على "14" للإنتقال للحل

التمرين 14:

بكالوريا 2013 رياضيات

1. أ/ عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق : $2n+27 \equiv 0 [n+1]$.
ب/ عين الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية حيث : $(b-a)(a+b) = 24$.
ج/ إستنتج طريقة لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$.
2. α و β عددان طبيعيان مكتوبان في النظام ذي الأساس 5 على الشكل : $\alpha = \overline{10141}_5$ و $\beta = \overline{3403}_5$.
أ/ أكتب العددين α و β في النظام العشري .
ب/ عين الثنائية $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق : $\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ \alpha a - \beta b = 9 \end{cases}$.
3. أ/ عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 2013 و 1434 ، ثم استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 671 و 478 .

ب/ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية : $2013x - 1434y = 27$.

إضغط على "15" للانتقال للحل

التمرين 15:

بكالوريا 2015 تقني رياضي

1. عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على 13 .
2. إستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $42 \times 138^{2015} + 2014^{2037} - 3$ على 13 .
3. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $(5n+1) \times 64^n - 5^{2n-3} \equiv (5n+6)8^{2n} [13]$ ،
4. عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n حتى تكون $(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv 0 [13]$.

إضغط على "16" للانتقال للحل

التمرين 16:

بكالوريا 2012 تقني رياضي

نسمي (S) الجملة التالية : $\left\{ \begin{array}{l} x \equiv 3 [15] \\ x \equiv 6 [7] \end{array} \right.$ ، حيث x عدد صحيح .

1. بين أن العدد 153 حل للجملة (S) .
2. إذا كان x_0 حل ل (S) ، بين أن : $(x \text{ حل ل } (S))$ يكافئ $\left(\begin{array}{l} x - x_0 \equiv 3 [15] \\ x - x_0 \equiv 6 [7] \end{array} \right)$.
3. حل الجملة (S) .
4. يريد مكتبي وضع عدد من الكتب في علب ، فإذا استعمل علبا تتسع ل 15 كتابا بقي لديه 3 كتب ، وإذا استعمل علبا تتسع ل 7 كتب بقي لديه 6 كتب .
إذا علمت أنّ عدد الكتب التي بحوزته محصورة بين 500 و 600 كتابا ، ما عدد هذه الكتب ؟

إضغط على "17" للانتقال للحل

التمرين 17:

بكالوريا 2012 رياضيات

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية : $2011x - 1432y = 31 \cdots (1)$.

1. أ/ بين أن العدد 2011 أولي .
- ب/ باستعمال خوارزمية إقليدس ، عين حلا خاصا $(x_0; y_0)$ للمعادلة (1) ، ثم حل المعادلة (1) .

2. أ/ عيّن تبعا لقيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 ، ثم جد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7 .
- ب/ عيّن قيم العدد الطبيعي n والتي من أجلها يكون : $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0 [7]$.
3. N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\alpha\beta\gamma}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث : α ، β و γ بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما و $(\beta; \gamma)$ حل للمعادلة (1) .
- عيّن α ، β و γ ثم أكتب N في النظام العشري.

التمرين 18: إضغط على "18" للانتقال للحل

بكالوريا 2016 تقني رياضي

- نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x; y)$: $6x - 7y = 19$ ، حيث x و y عدنان صحيحان .
1. جد الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E) حيث $x_0 = y_0$ ، ثم حل المعادلة (E) .
2. استنتج قيم العدد الصحيح λ التي تحقق $\begin{cases} \lambda \equiv 24 [7] \\ \lambda \equiv 5 [6] \end{cases}$ ، ثم عيّن باقي قسمة العدد λ على 42 .
3. عيّن جميع الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) حيث : $|x + y - 1| \leq 13$.
4. أ/ أدرس بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 .
- ب/ عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة : $\begin{cases} n - 5^n \equiv 2020 [7] \\ n \equiv 1437 [6] \end{cases}$.

التمرين 19: إضغط على "19" للانتقال للحل

بكالوريا 2014 رياضيات

- نعتبر المعادلة (E) : $2013x - 1962y = 54$ ، حيث x و y عدنان صحيحان .
1. أ/ أحسب $PGCD(2013; 1962)$.
- ب/ استنتج أن المعادلة (E) تقبل حولا .
- ج/ بين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 0 [6]$.
- د/ استنتج حلا خاصا $(x_0; y_0)$ حيث $74 < x_0 < 80$ ، ثم حل المعادلة (E) .
2. نرمز بالرمز d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x; y)$ حل للمعادلة (E) .
- أ/ ماهي القيم الممكنة للعدد d .

$$\bullet \begin{cases} 671a - 654b = 18 \\ PGCD(a; b) = 18 \end{cases} : \text{حيث } b \text{ و } a \text{ عددين طبيعيين}$$

إضغط على "20" للانتقال للحل

التمرين 20:

بكالوريا 2019 تقني رياضي

1. نعتبر المعادلة ذات المجهول $(x; y)$: $5x - 3y = 1 \dots (E)$ ، حيث x و y عددان صحيحان .

أ/ تحقق أن الثنائية $(6n+2; 10n+3)$ حل للمعادلة (E) حيث n عدد طبيعي .

ب/ - استنتج أن العددين $6n+2$ و $10n+3$ أوليان فيما بينهما .

2. نضع : $a = 10n+3$ و $b = 6n+2$ وليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

أ/ بين أن $d = 1$ أو $d = 41$.

ب/ بين أنه إذا كان $d = 41$ فإن : $n \equiv 12 [41]$.

3. ليكن العددان الطبيعيان : $A = 20n^2 + 36n + 9$ و $B = 6n^2 + 19n + 15$.

أ/ بين أن العددين A و B يقبلان القسمة على $2n+3$.

ب/ جد بدلالة n و حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

إضغط على "21" للانتقال للحل

التمرين 21:

بكالوريا 2015 رياضيات

1. أ/ عين حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 .

ب/ إستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد : $1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53}$ على 7 .

2. أ/ بين أن العدد 89 أولي .

ب/ عين كل القواسم الطبيعية للعدد 7832 .

ج/ بين أن العددين 981 و 977 أوليان فيما بينهما .

3. x و y عددان طبيعيين غير معدومين قاسمهما المشترك الأكبر هو 2 .

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8 [22] \end{cases} : \text{عين } x \text{ و } y \text{ علما أن :}$$

4. a, b, c أعداد طبيعية غير معدومة حيث a أولي مع b و a أولي مع c .

أ/ - باستعمال مبرهنة بيزو، برهن أن a أولي مع $b \times c$.

ب/ باستعمال الإستدلال بالتراجع، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم a ،
 $PGCD(a; b^n) = 1$.

ج/ استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 1962^{1954} و 1954^{1962} .

التمرين 22: إضغط على "22" للإنتقال للحل

بكالوريا 2023 تقني رياضي

1. أ/ عين حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.

ب/ إستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 1444^{2023} على 7.

ج/ عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $1962n + 1444^{3n+1} \equiv 0 [7]$

2. نعتبر المعادلة $7x - 6y = 4 \dots (E)$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

تحقق أن الثنائية $(4; 4)$ حل للمعادلة (E) ثم استنتج مجموعة حلولها.

3. عين الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الطبيعية حلول المعادلة (E) و التي تحقق $2^{3x} + 2^y \equiv 3 [7]$.

التمرين 23: إضغط على "23" للإنتقال للحل

بكالوريا 2023 رياضيات

1. نعتبر المعادلة $16x + 361y = 818 \dots (E)$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

أ/ تحقق أن الثنائية $(6; 2)$ حل للمعادلة (E) ثم استنتج مجموعة حلولها.

ب/ عين كل الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الطبيعية حلول المعادلة (E) التي تحقق $|x + 23y| \leq 4$.

2. P عدد طبيعي يكتب $5\alpha\beta 0$ في نظام التعداد الذي أساسه 7 و يكتب $\beta\alpha 87$ في نظام التعداد الذي

أساسه 9، حيث α و β عدداً طبيعياً.

عين α و β ثم اكتب P في النظام العشري.

3. أ/ حل العدد 2023 إلى جداء عوامل أولية ثم عين الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2023

ب/ نضع: $d = PGCD(a; b)$ و $m = PPCM(a; b)$

عين كل الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق: $m^2 + 3d^2 = 2023$

إضغط على "1" للعودة إلى التمرين

حل التمرين 1:

1. لدينا باستخدام خوارزمية إقليدس :

$$182 = 126 \times 1 + 56$$

$$126 = 56 \times 2 + 14$$

$$56 = 14 \times 4 + 0$$

فإن آخر باقي غير معدوم هو 14 إذن : $PGCD(182; 126) = 14$

2. من خوارزمية إقليدس لدينا : $182 = 126 \times 1 + 56$ و منه : $182 - 126 = 56$ (1)...

و $126 = 56 \times 2 + 14$ و منه : $126 - 56 = 14$ (2)...

و بتعويض (1) في (2) نجد :

$$126 - 2(182 - 126) = 14$$

$$126 - 2 \times 182 + 2 \times 126 = 14 \quad \text{تكافئ}$$

$$182(-2) + 126(3) = 14 \quad \text{تكافئ}$$

بالمطابقة مع $182\alpha + 126\beta = 14$ ، نجد : $\alpha = -2$ و $\beta = 3$.

3. 1/ في الحالة : $\begin{cases} a + b = 96 \\ PGCD(a; b) = 12 \end{cases}$

لدينا : $PGCD(a; b) = 12$ و منه : $\begin{cases} 12 | a \\ 12 | b \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} a = 12a' \\ b = 12b' \end{cases}$ حيث : $PGCD(a'; b') = 1$

و لدينا : $a + b = 96$ تكافئ : $12a' + 12b' = 96$ أي : $a' + b' = 8$.

إذن : $(a'; b') \in \{(1; 7), (3; 5), (5; 3), (7; 1)\}$

و بالتالي : $(a; b) \in \{(12; 84), (36; 60), (60; 36), (84; 12)\}$.

2/ في الحالة : $\begin{cases} a \times b = 360 \\ PGCD(a; b) = 6 \end{cases}$

لدينا : $PGCD(a; b) = 6$ و منه : $\begin{cases} 6 | a \\ 6 | b \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} a = 6a' \\ b = 6b' \end{cases}$ حيث : $PGCD(a'; b') = 1$

و لدينا : $a \times b = 360$ تكافئ : $36a' \times b' = 360$ أي : $a' \times b' = 10$.

إذن : $(a'; b') \in \{(1; 10), (10; 1), (2; 5), (5; 2)\}$

و بالتالي : $(a; b) \in \{(6; 60), (60; 6), (12; 30), (30; 12)\}$.

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1575 \\ PGCD(a; b) = 5 \end{cases} \quad /3 \text{ في الحالة :}$$

$$\text{لدينا : } PGCD(a; b) = 5 \text{ ومنه : } \begin{cases} 5 | a \\ 5 | b \end{cases} \text{ ومنه : } \begin{cases} a = 5a' \\ b = 5b' \end{cases} \text{ حيث : } PGCD(a'; b') = 1$$

$$\text{و لدينا : } a^2 - b^2 = 1575 \text{ تكافئ : } 36a' \times b' = 360 \text{ تكافئ : } 25a'^2 - 25b'^2 = 1575$$

$$\text{تكافئ : } a'^2 - b'^2 = 63 \text{ تكافئ : } (a' - b')(a' + b') = 1 \times 63 = 7 \times 9 \text{ ، حيث } a' + b' > a' - b' \text{ ،}$$

$$\text{إذن } \begin{cases} a' + b' = 63 \\ a' - b' = 1 \end{cases} \text{ بالجمع نجد } 2a' = 64 \text{ أي } a' = 32 \text{ ثم نعوض في إحدى المعادلتين فنجد } b' = 31$$

$$\text{أو } \begin{cases} a' + b' = 9 \\ a' - b' = 7 \end{cases} \text{ بالجمع نجد } 2a' = 16 \text{ أي } a' = 8 \text{ ثم نعوض في إحدى المعادلتين فنجد } b' = 1$$

$$\text{إذن : } (a'; b') \in \{(32; 31), (8; 1)\} \text{ و بالتالي : } (a; b) \in \{(160; 155), (40; 5)\}$$

حل التمرين 2:

إضبط على "2" للعودة إلى التمرين

$$1. \text{ لنبرهن أن : } PGCD(|x|; |y|) = PGCD(a; b)$$

- ليكن d القاسم المشترك للعددين a و b

$$\text{ومنه : } \begin{cases} d | a \\ d | b \end{cases} \text{ و } \begin{cases} d | 7a \\ d | 5b \end{cases} \text{ و } \begin{cases} d | 4a \\ d | 3b \end{cases} \text{ وحسب خواص القسمة لدينا :}$$

$$\begin{cases} d | 4a - 3b \\ d | 3b - 4a \end{cases} \text{ و } \begin{cases} d | 7a - 5b \\ d | 5b - 7a \end{cases} \text{ ومنه : } \begin{cases} d | |x| \\ d | |y| \end{cases}$$

- ليكن d القاسم المشترك للعددين x و y " لاحظ أن $a = 4x - 7y$ و $b = 3x - 5y$ "

$$\text{ومنه : } \begin{cases} d | x \\ d | y \end{cases} \text{ و } \begin{cases} d | 4x \\ d | 7y \end{cases} \text{ و } \begin{cases} d | 3x \\ d | 5y \end{cases} \text{ وحسب خواص القسمة لدينا :}$$

$$\text{إذن : } \begin{cases} d | 4x - 7y \\ d | 3x - 5y \end{cases} \text{ وبالتالي : } \begin{cases} d | a \\ d | b \end{cases}$$

إذن القواسم المشتركة للعددين a و b هي نفسها القواسم المشتركة للعددين $|x|$ و $|y|$

$$\text{إذن : } PGCD(|x|; |y|) = PGCD(x; y) = PGCD(a; b)$$

$$2. \text{ لدينا : } \begin{cases} (7\alpha - 5\beta)(4\alpha - 3\beta) = 1300 \\ PGCD(\alpha; \beta) = 5 \end{cases} \dots (*) \text{ نضع : } x = 7\alpha - 5\beta \text{ و } y = 4\alpha - 3\beta$$

و حسب السؤال الأول لدينا : $PGCD(\alpha; \beta) = PGCD(x; y) = 5$

و منه الجملة (*) تصبح : $\begin{cases} xy = 1300 \\ PGCD(x; y) = 5 \end{cases}$

لدينا : $PGCD(x; y) = 5$ و منه : $\begin{cases} 5 \mid x \\ 5 \mid y \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} x = 5x' \\ y = 5y' \end{cases}$ حيث : $PGCD(x'; y') = 1$

و $x', y' \in \mathbb{Z}^*$

و لدينا: $xy = 1300$ تكافئ : $25x'y' = 1300$ تكافئ :

$$xy = 52 = 1 \times 52 = (-1) \times (-52) = (4) \times (13) = (-4) \times (-13)$$

إذن : $(x'; y') \in \{(1; 52), (52; 1), (-1; -52), (-52; -1), (4; 13), (13; 4), (-4; -13), (-13; -4)\}$

وبالتالي : $(x; y) \in \{(5; 260), (260; 5), (-5; -260), (-260; -5), (20; 65), (65; 20), (-20; -65), (-65; -20)\}$

و بما أن α و β عددين طبيعيين فإن : $(\alpha; \beta) \in \{(755; 1005), (1285; 1800), (95; 120), (265; 375)\}$

إضغط على "3" للعودة إلى التمرين

حل التمرين 3:

1. تعيين بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9 :

$$7^0 \equiv 1[9] \quad n = 0$$

نلاحظ أن بواقي القسمة تشكل متتالية دورية و دورها 3

$$7^1 \equiv 7[9] \quad n = 1$$

" أي دور القسمة هو من الشكل $3k$ مع $k \in \mathbb{N}$ "

$$7^2 \equiv 4[9] \quad n = 2$$

$$7^3 \equiv 1[9] \quad n = 3$$

نلخص هذه الموافقات في الجدول الآتي:

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$	
$3^n \equiv$	1	7	4	[9]

2. تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد $6568^{1962} + 16^{1445} - 5 \times 8^{2024}$ على 9 :

لدينا : $6568 \equiv 7[9]$ و $16 \equiv 7[9]$ و $8 \equiv -1[9]$

ومنه :

$$6568^{1962} + 16^{1445} - 5 \times 8^{2024} \equiv 7^{1962} + 7^{1445} - 5(-1)^{2024} [9]$$

$$\equiv 7^{3 \times 654} + 7^{3 \times 481 + 2} - 5 [9]$$

$$\equiv 1 + 4 - 5 [9]$$

$$\equiv 0 [9]$$

3. لدينا : $25^{3n} + 25^n - 5 \equiv 0 [9]$ تكافئ : $7^{3n} + 7^n - 5 \equiv 0 [9]$ ، لأن : $25 \equiv 7 [9]$

تكافئ : $1 + 7^n - 5 \equiv 0 [9]$ و منه : $7^n \equiv 4 [9]$

إذن : $n = 3k + 2$ مع $k \in \mathbb{N}$.

حل التمرين 4:

إضغط على "4" للعودة إلى التمرين

لدينا : $n = \overline{1271x}^9 = 1 \times 9^4 + 2 \times 9^3 + 7 \times 9^2 + 1 \times 9^1 + x \times 9^0$ حيث : $0 \leq x \leq 8$ و منه : $n = 6561 + 1458 + 567 + 9 + x$ أي : $n = 8595 + x$ 1. n يقبل القسمة على 8 معناه $8595 + x \equiv 0 [8]$ و منه $3 + x \equiv 0 [8]$ أي : $x \equiv 5 [8]$ و بما أن : $0 \leq x \leq 8$ فإن : $x = 5$.2. n يقبل القسمة على 11 معناه $8595 + x \equiv 0 [11]$ و منه $4 + x \equiv 0 [11]$ أي : $x \equiv 7 [11]$ و بما أن : $0 \leq x \leq 8$ فإن : $x = 7$.3. لدينا : $n = 27x85y$ في النظام العشري أي : $0 \leq x \leq 9$ و $0 \leq y \leq 9$ و منه : $n = 2 \times 10^5 + 7 \times 10^4 + x \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + y \times 10^0$ و منه : $n = 200000 + 70000 + 1000x + 800 + 50 + y$ أي : $n = 270850 + 1000x + y$ n يقبل القسمة على 3 معناه $270850 + 1000x + y \equiv 0 [3]$ و منه $1 + x + y \equiv 0 [3]$ أي : $x + y \equiv 2 [3]$ و بالتالي : $(x; y) \in \{(1;4), (4;1), (4;7), (7;4), (8;0), (0;8)\}$ n يقبل القسمة على 11 معناه $270850 + 1000x + y \equiv 0 [11]$ و منه $8 + 10x + y \equiv 0 [11]$ أي : $x - y \equiv 8 [11]$ و بالتالي : $(x; y) \in \{(8;0), (0;3), (1;4), (2;5), (3;6), (4;7)\}$ من (1) و (2) يتبين أن : $(x; y) \in \{(1;4), (4;7), (8;0)\}$

حل التمرين 5:

إضغط على "5" للعودة إلى التمرين

1. لدينا : $7x \equiv -19 [9]$ و منه : $7x \equiv 8 [9]$ نضرب الطرفين في 4 نجد : $28x \equiv 32 [9]$ و منه : $x \equiv 5 [9]$ ، أي : $x = 9k + 5$ مع $k \in \mathbb{Z}$.2. لدينا : $7x - 9y = -19$ و منه $7x = 9y - 19$ و منه $7x \equiv -19 [9]$ و منه حسب السؤال السابق ينتج : $x = 9k + 5$ ، و بتعويض x في المعادلة (1) نحصل على : $y = 7k + 6$.و منه حلول المعادلة (1) هي : $(x; y) \in \{(9k + 5; 7k + 6)\}$ مع : $k \in \mathbb{Z}$.

3. لدينا : $x \equiv 0 [y]$ معناه : $y | x$ أي : $7k+6 | 9k+5$ و منه : $7k+6 | 9(7k+6) - 7(9k+5)$

إذن : $7k+6 | 19$ و منه : $7k+6 \in \{-19; -1; 1; 19\}$ و منه : $7k \in \{-25; -7; -5; 13\}$

أي $k = -1$ و بالتالي : $(x; y) \in \{(-4; -1)\}$

4. لدينا : $n = \overline{2\alpha 5^7} = \overline{1\beta 3^9}$ و منه : $2 \times 7^2 + \alpha \times 7 + 5 = 1 \times 9^2 + \beta \times 9 + 3$ و بالتالي : $7\alpha - 9\beta = -19$

و حسب الأسئلة السابقة فإن : $(\alpha; \beta) = (9k+5; 7k+6)$ مع : $\begin{cases} 0 \leq \alpha < 7 \\ 0 \leq \beta < 9 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} 0 \leq 9k+5 < 7 \\ 0 \leq 7k+6 < 9 \end{cases}$

و منه : $k = 0$ إذن : $\alpha = 5$ و $\beta = 6$ و أيضا : $n = 138$.

إضغط على "6" للعودة إلى التمرين

حل التمرين 6:

$$9^0 \equiv 1[11] \quad n = 0$$

$$9^1 \equiv 9[11] \quad n = 1$$

$$9^2 \equiv 4[11] \quad n = 2$$

$$9^3 \equiv 3[11] \quad n = 3$$

$$9^4 \equiv 5[11] \quad n = 4$$

$$9^5 \equiv 1[11] \quad n = 5$$

1. دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 11 :

نلاحظ أن بواقي القسمة تشكل متتالية دورية و دورها 5

" أي دور القسمة هو من الشكل $5k$ مع $k \in \mathbb{N}$ "

نلخص هذه الموافقات في الجدول الآتي:

n	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$	
$9^n \equiv$	1	9	4	3	5	[11]

2. تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد 2011^{2012} على 11 :

لدينا : $2011 \equiv 9[11]$ و منه : $2011^{2012} \equiv 9^{2012}[11]$ أي : $2011^{2012} \equiv 9^{5 \times 402 + 2}[11]$

و حسب الجدول نجد : $2011^{2012} \equiv 4[11]$ إذن باقي القسمة الإقليدية للعدد 2011^{2012} على 11 هو 4 .

3. لنبرهن أن العدد $4 \times 9^{15n+1} + 4 \times 2011^{10n} + 2011^{2012}$ يقبل القسمة على 11 :

لدينا : $9^{15n+1} = 9^{5 \times (3n)} \times 9 \equiv 9[11]$ و منه : $4 \times 9^{15n+1} \equiv 36[11]$ أي : $4 \times 9^{15n+1} \equiv 3[11]$

و $2011 \equiv 9[11]$ و منه :

$$\begin{aligned} 2011^{10n} &\equiv 9^{10n}[11] \\ &\equiv 9^{5 \times (2n)}[11] \\ &\equiv 1[11] \end{aligned}$$

أي : $4 \times 2011^{10n} \equiv 4 [11]$ إذن :

$$4 \times 9^{15n+1} + 4 \times 2011^{10n} + 2011^{2012} \equiv 3 + 4 + 4 [11] \equiv 11 [11] \equiv 0 [11]$$

و بالتالي العدد $4 \times 9^{15n+1} + 4 \times 2011^{10n} + 2011^{2012}$ يقبل القسمة على 11 .

4. نفرض أن $(2011^{2012} + 2n + 2)$ مضاعفا للعدد 11 أي :

$$2011^{2012} + 2n + 2 \equiv 0 [11]$$

$$4 + 2n + 2 \equiv 0 [11] \quad \text{تكافئ}$$

$$2(n + 3) \equiv 0 [11] \quad \text{تكافئ}$$

$$n + 3 \equiv 0 [11] \quad \text{حسب غوص}$$

$$n \equiv -3 [11] \quad \text{تكافئ}$$

و منه : $n \equiv 8 [11]$ أي : $n = 11k + 8$ مع $\mathbb{N}$.

إضغط على "7" للعودة إلى التمرين

حل التمرين 7:

1.

أ/ نشر العبارة $(5x^2 + 6)(x + 1)$ ثم إيجاد العلاقة بين x و y :

$$\text{لدينا : } (5x^2 + 6)(x + 1) = 5x^3 + 5x^2 + 6x + 6 = A$$

$$\text{لدينا : } A = (5x^2 + 6)(2 + 2y) \text{ و منه : } 5x^3 + 5x^2 + 6x + 6 = (5x^2 + 6)(2 + 2y)$$

$$\text{و منه : } (5x^2 + 6)(x + 1) = (5x^2 + 6)(2 + 2y) \text{ أي : } x + 1 = 2 + 2y \text{ إذن : } x = 2y + 1$$

ب/ حساب x و y :

$$\text{لدينا : } x = 2y + 1 \text{ و منه } x \equiv 1 [2] \text{ و كون } x > 6 \text{ و } x \text{ عدد أولي أقل من 12 فإن : } x \in \{7; 11\}$$

$$\text{و بالتالي : } (x; y) = (7; 3) \text{ أو } (x; y) = (11; 5)$$

$$\text{- من أجل : } x = 7 \text{ فإن : } A = 5 \times 7^3 + 5 \times 7^2 + 6 \times 7 + 6 = 2008$$

$$\text{- من أجل : } x = 11 \text{ فإن : } A = 5 \times 11^3 + 5 \times 11^2 + 6 \times 11 + 6 = 7332$$

2.

أ/ تعيين الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584 :

نحلل العدد 584 إلى جداء عوامل أولية :

لدينا : $\begin{array}{r|l} 584 & 2 \\ 292 & 2 \\ 146 & 2 \\ 73 & 2 \\ 1 & 73 \end{array}$ ومنه : $584 = 2^3 \times 73$ و منه الأعداد التي مربعاتها تقسم العدد 584 هي 1 و 2 .

ب/ لدينا : $\begin{cases} a+b=32 \dots (1) \\ a^2+b^2=584 \dots (2) \end{cases} (*)$

بتربيع طرفي المعادلة (1) نجد : $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 1024 \dots (3)$

و بتعويض (2) في (3) نحصل على : $584 + 2ab = 1024$ أي : $ab = 220$

ومن الجملة (*) تصبح مكافئة لـ : $\begin{cases} a+b=32 \\ ab=220 \end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases} b=32-a \\ a(32-a)=220 \end{cases}$

تكافئ : $\Delta = 144$ ، $a^2 - 32a + 220 = 0$ إذن : $\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_2 = 22 \end{cases}$ و $\begin{cases} b_1 = 22 \\ b_2 = 10 \end{cases}$

و بما أن : $a > b$ فإن : $(a; b) = (22; 10)$

إضغط على "8" للعودة إلى التمرين

حل التمرين 8:

1. لدينا : $PGCD(5; 3) = 1$ أي 5 و 3 أوليان فيما بينهما ، ومنه المعادلة (1)

تقبل حلا على الأقل في $\mathbb{Z}^2$. " أنظر إلى حل معادلات من الشكل $ax + by = c$ "

2. لدينا : $(x; y)$ حل للمعادلة أي : $5x - 3y = 2$ ومنه : $2x - 2 = 3y - 3x$ ومنه : $2(x - 1) = 3(y - x)$

أي : $\begin{cases} 3 \mid 2(x-1) \\ PGCD(3; 2) = 1 \end{cases}$ ومنه حسب مبرهنة غوص فإن : $3 \mid (x-1)$ أي : $x - 1 \equiv 0 [3]$ إذن : $x \equiv 1 [3]$

3. لدينا من السؤال السابق $x \equiv 1 [3]$ إذن : $x = 3k + 1$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

ثم بتعويض x في المعادلة (1) نجد : $5x - 3y = 5(3k + 1) - 3y = 15k + 5 - 3y = 2$

أي : $y = 5k + 1$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

ومنه حلول المعادلة (1) هي : $S = \{(3k + 1; 5k + 1)\}$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

4. أ/ نضع : $PGCD(x; y) = d$ و $PGCD(x; 2) = d'$

إذن : $\begin{cases} d \mid x \\ d \mid y \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} d \mid x \\ d \mid 5x - 3y \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} d \mid x \\ d \mid 2 \end{cases}$

إذن : $d \mid PGCD(x; 2)$ ومنه : $d \mid d'$

ومن جهة : $\begin{cases} d' \mid x \\ d' \mid 2 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} d' \mid x \\ d' \mid x + 2k \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} d' \mid x \\ d' \mid y \end{cases}$

إذن : $d' \mid d$ و منه : $d' \mid PGCD(x; y)$

إذن بما أن : $d \mid d'$ و $d' \mid d$ فإن : $d = d'$

ب/ من السؤال السابق : $d \mid 2$ و منه القيم الممكنة لـ : $PGCD(x; y) = d$ هي : $\{1; 2\}$.

ج/ لدينا : $PGCD(x; y) = 2$ و منه : $\begin{cases} x \equiv 0 [2] \\ y \equiv 0 [2] \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} 3k+1 \equiv 0 [2] \\ 5k+1 \equiv 0 [2] \end{cases}$

و منه : $\begin{cases} k \equiv 1 [2] \\ k \equiv 1 [2] \end{cases}$ و منه : $k = 2l + 1$

و بالتالي حلول المعادلة (1) التي تحقق : $PGCD(x; y) = 12$

هي : $S = \{(6l + 4; 10l + 6)\}$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

حل التمرين 9:

إضغط على "9" للعودة إلى التمرين

لدينا : $n = \overline{11\alpha 00}^7 = 1 \times 7^4 + 1 \times 7^3 + \alpha \times 7^2$ و منه : $n = 2744 + 49\alpha$ حيث : $0 \leq \alpha \leq 6$

1. تعيين قيمة α

بما أن n يقبل القسمة على 3 فإن : $n \equiv 0 [3]$ تكافئ : $2744 + 49\alpha \equiv 0 [3]$

تكافئ : $2 + \alpha \equiv 0 [3]$ تكافئ : $\alpha \equiv -2 [3]$ تكافئ : $\alpha \equiv 1 [3]$ أي : $\alpha \in \{1; 4\}$.

2. تعيين قيمة α

بما أن n يقبل القسمة على 5 فإن : $n \equiv 0 [5]$ تكافئ : $2744 + 49\alpha \equiv 0 [5]$

تكافئ : $4 + 4\alpha \equiv 0 [5]$ تكافئ : $4(1 + \alpha) \equiv 0 [5]$ تكافئ : $1 + \alpha \equiv 0 [5]$ تكافئ : $\alpha \equiv -1 [5]$

تكافئ : $\alpha \equiv 4 [5]$ أي : $\alpha = 4$.

3. من السؤال الأول والثاني نستنتج أن n يقبل القسمة على 15 إذا وفقط إذا كان : $\alpha = 4$.

4. كتابة العدد n في النظام العشري :

من أجل $\alpha = 4$ نجد : $n = 2744 + 49 \times 4$ إذن : $n = 2940$.

حل التمرين 10:

إضغط على "10" للعودة إلى التمرين

1.

أ/ لدينا : $PGCD(21;3) = 3$ و $78 = 26 \times 3$ أي : $PGCD(21;3)$ يقسم العدد 78 .

إذن المعادلة (E) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$.

ب/ لدينا : $(x; y)$ حل للمعادلة (E) أي : $3x - 21y = 78$ تكافئ : $3x = 21y + 78$ بقسمة الطرفين على 3 نجد : $x = 7y + 26$

أي : $x \equiv 26 [7]$ و بما أن : $26 \equiv 5 [7]$ فإن : $x \equiv 5 [7]$

ج/ $x \equiv 5 [7]$ و منه : $x = 7k + 5$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

ثم بتعويض x في المعادلة (E) نجد :

$$3x - 21 = 3(7k + 5) - 21y = 21k + 15 - 21y = 78$$

و منه : $y = k - 3$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

إذن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S = \{(7k + 5; k - 3)\}$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

2.

$$5^0 \equiv 1 [7] \quad n = 0$$

$$5^1 \equiv 5 [7] \quad n = 1$$

$$5^2 \equiv 4 [7] \quad n = 2$$

$$5^3 \equiv 6 [7] \quad n = 3$$

$$5^4 \equiv 2 [7] \quad n = 4$$

$$5^5 \equiv 3 [7] \quad n = 5$$

$$5^6 \equiv 1 [7] \quad n = 6$$

أ/ دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 :
نلاحظ أن بواقي القسمة تشكل متتالية دورية و دورها 6
" أي دور القسمة هو من الشكل $6m$ مع $m \in \mathbb{N}$ "

نلخص هذه الموافقات في الجدول الآتي:

n	$6m$	$6m + 1$	$6m + 2$	$6m + 3$	$6m + 4$	$6m + 5$	
$5^n \equiv$	1	5	4	6	2	3	[7]

ب/ تعيين الثنائيات $(x; y)$:

نعلم أن حلول المعادلة (E) هي : $(x; y) = (7k + 5; k - 3)$.

و حتى تكون هذه الحلول أعداداً طبيعية يكفي وضع $k \geq 3$

و بوضع $k' = k - 3$ مع $k' \in \mathbb{N}$ نجد : $k = k' + 3$ و بالتالي : $(x; y) = (7k' + 26; k')$
بتعويض x و y في : $5^x + 5^y \equiv 3 [7]$ نجد : $5^{7k'} + 5^{k'} \equiv 3 [7]$ تكافئ :

$$5^{6k'+24+2+k'} + 5^{k'} \equiv 3 [7]$$

$$5^{6(k'+4)+2+k'} + 5^{k'} \equiv 3 [7]$$

$$5^{6(k'+4)+2} \equiv 4 [7] \text{ حيث : } 5^{6(k'+4)+2} \times 5^{k'} + 5^{k'} \equiv 3 [7]$$

$$4 \times 5^{k'} + 5^{k'} \equiv 3 [7]$$

$$5 \times 5^{k'} \equiv 3 [7]$$

$$5^{k'+1} \equiv 3 [7]$$

و حسب الجدول نجد : $k' + 1 = 6m + 5$ أي : $k' = 6m + 4$

إذن الثنائيات المطلوبة هي : $(x; y) = (42m + 54; 6m + 4)$ مع $m \in \mathbb{Z}$.

إضغط على "11" للعودة إلى التمرين

حل التمرين 11:

1.

أ/ لنبين أن : $PGCD(\alpha; \beta) = PGCD(\beta; 10)$

لدينا : $\alpha = (2n^2 - 6n + 4)(n + 3) - 10$ " إستعمل القسمة الإقليدية للتحقق من ذلك "
و منه : $\alpha = (2n^2 - 6n + 4)\beta - 10$ ، نضع : $PGCD(\alpha; \beta) = d$ و $PGCD(\beta; 10) = d'$.

لدينا : $\left\{ \begin{array}{l} d | \alpha \\ d | \beta \end{array} \right.$ و منه $\left\{ \begin{array}{l} d | \alpha \\ d | (2n^2 - 6n + 4)\beta \end{array} \right.$ بالطرح نجد $d | 10$ و منه : $d | d'$

لدينا : $\left\{ \begin{array}{l} d' | 10 \\ d' | \beta \end{array} \right.$ و منه $\left\{ \begin{array}{l} d' | 10 \\ d' | (2n^2 - 6n + 4)\beta \end{array} \right.$ بالطرح نجد $d' | \alpha$ و منه : $d' | d$

في الأخير : d يقسم d' و d' يقسم d معناه : $d = d'$ أي : $PGCD(\alpha; \beta) = PGCD(\beta; 10)$

ب/ لدينا : $PGCD(\beta; 10) = 10$ و منه d يقسم 10 إذن : $PGCD(\alpha; \beta) \in \{1; 2; 5; 10\}$

ج/ تعيين قيم العدد الطبيعي n :

لدينا : $PGCD(\alpha; \beta) = 5$ أي : $PGCD(\beta; 10) = 5$ و منه $5 | \beta$ أي : $\beta = 5k$ مع $k \in \mathbb{N}$

من جهة نلاحظ أن k و 2 أوليان فيما بينهما لأن :

$$PGCD(\beta; 10) = 5$$

$$PGCD(5k; 10) = 5$$

$$5PGCD(k; 2) = 5$$

$$PGCD(k; 2) = 1$$

معناه k عدد فردي ، أي : $k = 2k' + 1$

إذن : $\beta = 5k$ و منه $n+3 = 5k$ و منه $n = 5k - 3$ أي : $n = 5(2k' + 1) - 3$

إذن : $n = 10k' + 2$ مع $k' \in \mathbb{N}$

2.

$$4^0 \equiv 1[11] \quad n = 0$$

$$4^1 \equiv 4[11] \quad n = 1$$

$$4^2 \equiv 5[11] \quad n = 2$$

$$4^3 \equiv 9[11] \quad n = 3$$

$$4^4 \equiv 3[11] \quad n = 4$$

$$4^5 \equiv 1[11] \quad n = 5$$

أ/ دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11 :
نلاحظ أن بواقي القسمة تشكل متتالية دورية و دورها 5
" أي دور القسمة هو من الشكل $5m$ مع $m \in \mathbb{N}$ "

نلخص هذه الموافقات في الجدول الآتي:

n	$5m$	$5m+1$	$5m+2$	$5m+3$	$5m+4$	
$4^n \equiv$	1	4	5	9	3	[11]

ب/ تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n

$$\text{لدينا : } \begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[10] \end{cases} \text{ و منه } \begin{cases} 1 + 4^n + n \equiv 0[11] \\ n \equiv 10p + 2, p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{و منه : } 1 + 4^{10p+2} + 10p + 2 \equiv 0[11] \text{ تكافئ :}$$

$$1 + 4^{5 \times (2p) + 2} + 10p + 2 \equiv 0[11]$$

$$1 + 5 + 10p + 2 \equiv 0[11]$$

$$2(5p + 4) \equiv 0[11]$$

$$5p + 4 \equiv 0[11]$$

$$5p \equiv -4[11]$$

$$5p \equiv 7[11]$$

$$10p \equiv 14[11]$$

$$-p \equiv 3[11]$$

$$\text{و منه } p \equiv -3[11] \text{ تكافئ } p \equiv 8[11] \text{ أي : } p = 11p' + 8 \text{ مع } p' \in \mathbb{N} .$$

$$\text{إذن : } n \equiv 10(11p' + 8) + 2 \text{ و بالتالي : } n = 110p' + 82$$

إضغط على "12" للعودة إلى التمرين

حل التمرين 12:

1. نتحقق أن $4 \equiv -3 [7]$:لدينا : $4 - (-3) = 7 \equiv 0 [7]$ و منه : $4 \equiv -3 [7]$.نبين أن $A_3 \equiv 6 [7]$:من أجل $n = 3$ لدينا : $A_3 = 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3$ و منه $A_3 \equiv 2^3 + 3^3 + (-3)^3 + (-2)^3 + (-1)^3 [7]$ و منه : $A_3 \equiv 2^3 + 3^3 - 3^3 - 2^3 - 1^3 [7]$ أي : $A_3 \equiv -1 [7]$ و بالتالي : $A_3 \equiv 6 [7]$.2. دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 :

نلاحظ أن بواقي القسمة تشكل متتالية دورية و دورها 3

" أي دور القسمة هو من الشكل $3k$ مع $k \in \mathbb{N}$ "

نلخص هذه الموافقات في الجدول الآتي:

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$	
$2^n \equiv$	1	2	4	[7]

$$2^0 \equiv 1 [7] \quad n = 0$$

$$2^1 \equiv 2 [7] \quad n = 1$$

$$2^2 \equiv 4 [7] \quad n = 2$$

$$2^3 \equiv 1 [7] \quad n = 3$$

$$2^4 \equiv 2 [7] \quad n = 4$$

$$2^5 \equiv 4 [7] \quad n = 5$$

$$2^6 \equiv 1 [7] \quad n = 6$$

-دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7 :

نلاحظ أن بواقي القسمة تشكل متتالية دورية و دورها 6

" أي دور القسمة هو من الشكل $6m$ مع $m \in \mathbb{N}$ "

نلخص هذه الموافقات في الجدول الآتي:

n	$6m$	$6m+1$	$6m+2$	$6m+3$	$6m+4$	$6m+5$	
$3^n \equiv$	1	3	2	6	4	5	[7]

- نبين أن $A_n + 1$ يقبل القسمة 7 :

لدينا : $A_n + 1 = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n + 1$ و منه $A_n + 1 \equiv 2^n + 3^n + (-3)^n + (-2)^n + (-1)^n + 1 [7]$

بما أن n عدد فردي فإن : $n = 2p + 1$ مع $p \in \mathbb{N}$.

إذن : $A_{2p+1} + 1 \equiv 2^{2p+1} + 3^{2p+1} + (-3)^{2p+1} + (-2)^{2p+1} + (-1)^{2p+1} + 1 [7]$ و منه : $A_{2p+1} + 1 \equiv 0 [7]$ إذن $A_n + 1$ يقبل القسمة 7 .

- بما أن 2011 عدد فردي فإن $A_{2011} + 1 \equiv 0 [7]$ و منه : $A_{2011} \equiv -1 [7]$

أي $A_{2011} \equiv 6 [7]$ ، إذن باقي قسمة العدد A_{2011} على 7 هو 6 .

3. تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{1432} على 7 :

لدينا : $A_{1432} \equiv 2^{1432} + 3^{1432} + (-3)^{1432} + (-2)^{1432} + (-1)^{1432} [7]$

و منه $A_{1432} \equiv 2^{1432} + 3^{1432} + 3^{1432} + 2^{1432} + 1^{1432} [7]$ و منه $A_{1432} \equiv 2 \times 2^{1432} + 2 \times 3^{1432} + 1 [7]$

أي : $A_{1432} \equiv 2 \times 2^{3 \times 477 + 1} + 2 \times 3^{6 \times 238 + 4} + 1 [7]$ إذن : $A_{1432} \equiv 4 + 8 + 1 [7]$

و بالتالي : $A_{1432} \equiv 6 [7]$.

إضغط على "13" للعودة إلى التمرين

حل التمرين 13:

1.

أ/ لدينا :

$$(n+3)(3n^2-9n+16) = 3n^3-9n^2+16n+9n^2-27n+48 = 3n^3-11n+48$$

بما أن $(3n^2-9n+16) \in \mathbb{Z}$ فإن $3n^3-11n+48$ يقبل القسمة على $n+3$.

ب/ نبين أن $3n^2-9n+16$ عدد طبيعي غير معدوم :

نقوم بحل المعادلة $3x^2-9x+16=0$ من أجل $x \in \mathbb{R}$.

لدينا مميز المعادلة : $\Delta = (-9)^2 - 4(3)(16) = -111 < 0$ وهذا يعني أن المعادلة ليس لها حلول

و المعامل $a = 3 > 0$ و بالتالي من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا $3x^2-9x+16 > 0$ ، و منه من أجل كل

$n \in \mathbb{N}$ العدد $3n^2-9n+16$ هو عدد صحيح موجب تماما أي هو عدد طبيعي غير معدوم .

2. نبين أن $PGCD(a; b) = PGCD(bc - a; b)$:

- ليكن d قاسما للعددين a و b ومنه : $\begin{cases} d | a \\ d | b \end{cases}$ أي : $d | bc - a$
إذن d قاسم مشترك للعددين b و $bc - a$.

- نفرض أن d قاسما للعددين b و $bc - a$ ومنه : $\begin{cases} d | bc - a \\ d | b \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} d | bc - a \\ d | bc \end{cases}$
بالطرح نجد $d | a$ إذن d قاسم مشترك للعددين a و b .

في الأخير : مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي نفسها مجموعة القواسم المشتركة للعددين b و $bc - a$ و بالتالي : $PGCD(a; b) = PGCD(bc - a; b)$.

2. نبين أن $PGCD(3n^3 - 11n; n + 3) = PGCD(48; n + 3)$:

نعوض بـ $a = 48$ و $b = n + 3$ و $c = 3n^2 - 9n + 16$ في : $PGCD(a; b) = PGCD(bc - a; b)$
نجد : $PGCD(3n^3 - 11n; n + 3) = PGCD(48; n + 3)$.

4.

أ/ مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 48 هي : $\{1; 2; 3; 4; 8; 12; 16; 24; 48\}$

ب/ لدينا :

$$A = \frac{3n^3 - 11n}{n + 3} = \frac{3n^3 - 11n + 48 - 48}{n + 3} = \frac{(n + 3)(3n^2 - 9n + 16) - 48}{n + 3} = 3n^2 - 9n + 16 - \frac{48}{n + 3}$$

و منه يكون A عددا طبيعيا إذا فقط إذا كان $\frac{48}{n + 3}$ عددا طبيعيا و $3n^2 - 9n + 16 \geq \frac{48}{n + 3}$

- يكون $\frac{48}{n + 3}$ عددا طبيعيا إذا كان $n + 3 | 48$

و منه : $(n + 3) \in \{1; 2; 3; 4; 8; 12; 16; 24; 48\}$ أي : $n \in \{0; 1; 3; 5; 9; 13; 21; 45\}$

نلاحظ أن من أجل $n = 1$ يكون $A = -2 \notin \mathbb{N}$ إذن قيم n هي : $\{0; 3; 5; 9; 13; 21; 45\}$.

إضغط على "14" للعودة إلى التمرين

حل التمرين 14:

1.

أ/ لدينا : $2n + 27 \equiv 0 [n + 1]$ ومنه $2n + 2 + 25 \equiv 0 [n + 1]$ ومنه $2(n + 1) + 25 \equiv 0 [n + 1]$

أي $25 \equiv 0 [n + 1]$ معناه $n + 1 | 25$ أي : $(n + 1) \in \{1; 5; 25\}$ إذن : $n \in \{0; 4; 24\}$.

ب/ لدينا: $(b-a)(a+b) = 1 \times 24 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6$ وبما أن a و b عددان طبيعيين فإن $a+b > b-a$

إذن: $\begin{cases} a+b=24 \\ b-a=1 \end{cases}$ بالجمع نجد $2b=25$ أي $b = \frac{25}{2} \notin \mathbb{N}$ "مرفوض"

أو: $\begin{cases} a+b=12 \\ b-a=2 \end{cases}$ بالجمع نجد $2b=14$ أي $b=7$ ، نعوض في إحدى المعادلتين نجد $a=5$

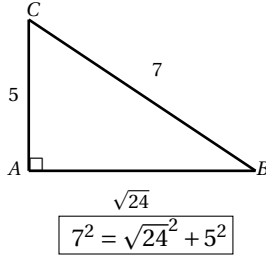
أو: $\begin{cases} a+b=8 \\ b-a=3 \end{cases}$ بالجمع نجد $2b=11$ أي $b = \frac{11}{2} \notin \mathbb{N}$ "مرفوض"

أو: $\begin{cases} a+b=6 \\ b-a=4 \end{cases}$ بالجمع نجد $2b=10$ أي $b=5$ ، نعوض في إحدى المعادلتين نجد $a=1$

إذن: $(a; b) \in \{(5; 7), (1; 5)\}$

ج/ لدينا: $(b-a)(a+b) = 24$ تكافئ $b^2 - a^2 = 24$ تكافئ $b^2 = 24 + a^2$

أي $b^2 = \sqrt{24^2} + a^2$ و منه حسب السؤال السابق $7^2 = \sqrt{24^2} + 5^2$ أو $5^2 = \sqrt{24^2} + 1^2$.



- إذن حسب نظرية فيثاغورث فإنه يوجد مثلث قائم طول وتره 7 أو 5 و طول أحد ضلعيه القائمين 5 أو 1 على الترتيب و طول الضلع الآخر $\sqrt{24}$.

2.

أ/ كتابة α و β في النظام العشري :

لدينا : $\alpha = \overline{10141}^5 = 1 \times 5^4 + 0 \times 5^3 + 1 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 1 \times 5^0$ و منه : $\alpha = 671$.

لدينا : $\beta = \overline{3403}^5 = 3 \times 5^3 + 4 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 3 \times 5^0$ و منه : $\beta = 478$.

ب/ تعيين الثنائيات $(a; b)$:

لدينا : $\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ \alpha a - \beta b = 9 \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \dots (1) \\ 671a - 478b = 9 \dots (2) \end{cases}$ و نعلم أن حلول المعادلة (1) هي : $\{(5; 7), (1; 5)\}$

و بالتعويض في المعادلة (2) فإن الثنائية الوحيدة التي تحقق هي : $(a; b) = (5; 7)$

3.

$$2013 = 1434 \times 1 + 579$$

$$1434 = 579 \times 2 + 276$$

$$579 = 276 \times 2 + 27$$

$$276 = 27 \times 10 + 6$$

$$27 = 6 \times 4 + 3$$

$$6 = 3 \times 2 + 0$$

أ/ لدينا باستخدام خوارزمية إقليدس :

فإن آخر باقي غير معدوم هو 3 إذن : $PGCD(2013; 1434) = 3$

من جهة لدينا : $2013 = 3 \times 671$ و $1434 = 3 \times 478$ فإن : $PGCD(3 \times 671; 3 \times 478) = 3$

و بالتالي : $PGCD(671; 478) = 1$ إذن : $3PGCD(671; 478) = 3$.

ب/ حل المعادلة :

لدينا : $2013x - 1434y = 27$ تكافئ : $671x - 478y = 9$ و حسب ما سبق نعلم أن $(x; y) = (5; 7)$ حل خاص للمعادلة .

$$\text{إذن : } \begin{cases} 671x - 478y = 9 \\ 671(5) - 478(7) = 9 \end{cases} \text{ بالطرح نجد : } 671(x - 5) - 478(y - 7) = 0$$

$$\text{تكافئ : } 671(x - 5) = 478(y - 7)$$

- إذن 478 يقسم $671(x - 5)$ و $PGCD(671; 478) = 1$ فإن حسب غوص نجد 478 يقسم $(x - 5)$

أي : $x - 5 = 478k$ و منه : $x = 478k + 5$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

- و 671 يقسم $478(y - 7)$ و $PGCD(671; 478) = 1$ فإن حسب غوص نجد 671 يقسم $(y - 7)$

أي : $y - 7 = 671k$ و منه : $y = 671k + 7$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

إذن حلول المعادلة هي : $(x; y) = (478k + 5; 671k + 7)$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

حل التمرين 15:

إضغط على "15" للعودة إلى التمرين

$$8^0 \equiv 1[13] \quad n = 0$$

$$8^1 \equiv 8[13] \quad n = 1$$

$$8^2 \equiv 12[13] \quad n = 2$$

$$8^3 \equiv 5[13] \quad n = 3$$

$$8^4 \equiv 1[13] \quad n = 4$$

1. دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على 13 :

نلاحظ أن بواقي القسمة تشكل متتالية دورية و دورها 4

" أي دور القسمة هو من الشكل $4k$ مع $k \in \mathbb{N}$ "

- نلخص هذه الموافقات في الجدول الآتي:

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$8^n \equiv$	1	8	12	5	[13]

2. لدينا : $138 \equiv 8 [13]$ و $42 \equiv 3 [13]$ و $2014 \equiv -1 [13]$ و بالتالي :

$$\begin{aligned} 42 \times 138^{2015} + 2014^{2037} - 3 &\equiv 3 \times 8^{2015} + (-1)^{2037} - 3 [13] \\ &\equiv 3 \times 8^{4 \times 503 + 3} - 1 - 3 [13] \\ &\equiv 3 \times 5 - 4 [13] \\ &\equiv 11 [13] \end{aligned}$$

و منه باقي القسمة الإقليدية للعدد $42 \times 138^{2015} + 2014^{2037} - 3$ على 13 هو 11 .

3. لدينا $5 \equiv -8 [13]$ و بالتالي :

$$\begin{aligned} (5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} &\equiv (5n+1) \times (8^2)^n - (-8)^{2n+3} [13] \quad \text{و منه :} \\ &\equiv (5n+1) \times 8^{2n} - (-1)^{2n+3} \times 8^{2n+3} [13] \quad , \quad "(-1)^{2n+3} = 1" \\ &\equiv (5n+1) \times 8^{2n} + 8^{2n} \times 8^3 [13] \\ &\equiv (5n+1) \times 8^{2n} + 8^{2n} \times 5 [13] \quad , \quad "8^3 \equiv 5 [13]" \\ &\equiv (5n+1+5) \times 8^{2n} [13] \\ &\equiv (5n+6) \times 8^{2n} [13] \quad \text{إذن :} \end{aligned}$$

4. تعيين قيم n :

لدينا من السؤال السابق $(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+6) \times 8^{2n} [13]$

و لدينا : $PGCD(13; 8) = 1$ و منه : $PGCD(13; 8^{2n}) = 1$

إذن : $(5n+6) \times 8^{2n} \equiv 0 [13]$ يكافئ : $5n+6 \equiv 0 [13]$ و منه : $5n \equiv -6 [13]$ و منه : $5n \equiv 7 [13]$

نضرب الطرفين في 5 نجد : $25n \equiv 35 [13]$ و منه $-n \equiv -4 [13]$ إذن : $n \equiv 4 [13]$

و منه قيم n هي : $n = 13k + 4$ مع $k \in \mathbb{N}$.

إضبط على "16" للعودة إلى التمرين

حل التمرين 16:

1. نبين أن العدد 153 حل للجملة (S) :

$$\left\{ \begin{array}{l} 153 \equiv 3 [15] \\ 153 \equiv 6 [7] \end{array} \right. \quad \text{و منه :} \quad \left\{ \begin{array}{l} 153 = 15 \times 10 + 3 \\ 153 = 7 \times 21 + 6 \end{array} \right.$$

و بالتالي العدد 153 حل للجملة (S) .

2. لدينا : x حل للجملة (S) معناه $\left\{ \begin{array}{l} x \equiv 3 [15] \\ x \equiv 6 [7] \end{array} \right.$ و x_0 حل للجملة (S) معناه $\left\{ \begin{array}{l} x_0 \equiv 3 [15] \\ x_0 \equiv 6 [7] \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - x_0 \equiv 0 [15] \\ x - x_0 \equiv 0 [7] \end{array} \right. \quad \text{بالطرح نجد :}$$

3. حل الجملة (S) :

$$\begin{cases} x - 153 \equiv 0 [15] \\ x - 153 \equiv 0 [7] \end{cases} \text{ بحسب السؤال السابق فإن :}$$

و منه : $x - 153 \equiv 0 [15 \times 7]$ تكافئ $x \equiv 153 [105]$ تكافئ $x \equiv 48 [105]$ إذن : $x = 105k + 48$ مع $k \in \mathbb{Z}$

4. تعيين عدد الكتب :

ليكن x هو عدد الكتب .

- إذا إستعمل علبا تتسع ل 15 كتابا بقي له 3 كتب ، أي : $x \equiv 3 [15]$

- إذا إستعمل علبا تتسع ل 7 كتابا بقي له 6 كتب ، أي : $x \equiv 6 [7]$

$$\text{إذن نحصل على } \begin{cases} x \equiv 3 [15] \\ x \equiv 6 [7] \end{cases} \text{ و حسب السؤال السابق فإن : } x = 105k + 48$$

و بما أن عدد الكتب محصورة بين 500 و 600 فإن : $500 \leq 105k + 48 \leq 600$ مع $k \in \mathbb{N}$

و منه $452 \leq 105k \leq 552$ أي $4.3 \leq k \leq 5.25$ إذن : $k = 5$

إذن عدد الكتب هو : $x = 105 \times 5 + 48 = 573$.

إضغط على "17" للعودة إلى التمرين

حل التمرين 17:

1.

أ/ لدينا : $\sqrt{2011} \approx 44.84$ و منه الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{2011}$ هي : 2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23، 29، 31، 37، 41، 43

و بما أن 2011 لا يقبل القسمة على أي عدد من هذه الأعداد الأولية فإن 2011 عدد أولي .

ب/ تعيين الحل الخاص :

$$\begin{cases} 569 = 2011 - 1432 \dots (1) \\ 274 = 1432 - 569 \times 2 \dots (2) \\ 31 = 569 - 274 \times 2 \dots (3) \end{cases} \text{ و منه : } \begin{cases} 2011 = 1432 \times 1 + 569 \\ 1432 = 569 \times 2 + 274 \\ 569 = 274 \times 2 + 31 \end{cases}$$

نعوض (1) في (2) نجد : $274 = 1432 - (2011 - 1432) \times 2 = -2 \times 2011 + 3 \times 1432 \dots (4)$

ثم نعوض (1) و (4) في (3) نجد :

$$31 = (2011 - 1432) - (-2 \times 2011 + 3 \times 1432) \times 2 = 2011 \times 5 - 1432 \times 7$$

و منه : $31 = 2011 \times 5 - 1432 \times 7$ إذن الثنائية $(x_0; y_0) = (5; 7)$ حل خاص للمعادلة (1) .
حل المعادلة :

لدينا : $\begin{cases} 2011x - 1432y = 31 \\ 2011 \times 5 - 1432 \times 7 = 31 \end{cases}$ بالطرح نجد : $2011(x-5) - 1432(y-7) = 0$

تكافئ : $2011(x-5) = 1432(y-7)$ " لاحظ أن : $PGCD(2011; 1432) = 1$ "

- لدينا : $\begin{cases} 1432 \mid 2011(x-5) \\ PGCD(2011; 1432) = 1 \end{cases}$ حسب غوص نجد $1432 \mid (x-5)$ و منه : $x = 1432k + 5$

- لدينا : $\begin{cases} 2011 \mid 1432(y-7) \\ PGCD(2011; 1432) = 1 \end{cases}$ حسب غوص نجد $2011 \mid (y-7)$ و منه : $y = 2011k + 7$

إذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي : $S = \{(1432k + 5; 2011k + 7)\}$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

2.

أ/ تعيين بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 :
 نلاحظ أن بواقي القسمة تشكل متتالية دورية و دورها 3
 " أي دور القسمة هو من الشكل $3m$ مع $m \in \mathbb{N}$ "

$2^0 \equiv 1[7]$	$n = 0$
$2^1 \equiv 2[7]$	$n = 1$
$2^2 \equiv 4[7]$	$n = 2$
$2^3 \equiv 1[7]$	$n = 3$

- نلخص هذه الموافقات في الجدول الآتي:

n	$3m$	$3m+1$	$3m+2$	
$2^n \equiv$	1	2	4	[7]

إيجاد باقي قسمة $2011^{1432^{2012}}$ على 7 :

لدينا : $2011 \equiv 2[7]$ و $1432 \equiv 1[3]$ و منه : $2011^{1432^{2012}} \equiv 2^{1^{2012}}[7]$

و منه : $2011^{1432^{2012}} \equiv 2^1[7] \equiv 2[7]$ إذن باقي قسمة $2011^{1432^{2012}}$ على 7 هو 2 .

ب/ لدينا : $\begin{cases} 2010 \equiv 1[7] \\ 2011 \equiv 2[7] \\ 1432 \equiv 4[7] \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} 2010^n \equiv 1[7] \\ 2011^n \equiv 2^n[7] \\ 1432^n \equiv 4^n[7] \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} 2010^n \equiv 1[7] \\ 2011^n \equiv 2^n[7] \\ 1432^n \equiv 4^n[7] \end{cases}$

بالجمع نجد : $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 1 + 2^n + 2^{2n}[7]$ و بالتالي :

$n \equiv$	0	1	2	[3]
$2^n \equiv$	1	2	4	[7]
$2^{2n} \equiv$	1	4	2	[7]
$2^n + 2^{2n} \equiv$	2	6	6	[7]
$1 + 2^n + 2^{2n} \equiv$	3	0	0	[7]

إذن من الجدول لدينا : $n \equiv 1[3]$ أو $n \equiv 2[3]$ أي : $n = 3p + 1$ أو $n = 3p + 2$ مع $p \in \mathbb{N}$.

3. تعيين : α ، β و γ

لدينا : $N = \overline{2\gamma\alpha\beta}^9 = 2 \times 9^3 + \gamma \times 9^2 + \alpha \times 9^1 + \beta \times 9^0$
 ومنه : $N = \overline{2\gamma\alpha\beta}^9 = 1458 + 81\gamma + 9\alpha + \beta$ مع $0 \leq \beta < 9$ و $0 \leq \alpha < 9$.
 و $(\beta; \gamma)$ حل للمعادلة (1) معناه : $(\beta; \gamma) = (1432k + 5; 2011k + 7)$
 بما أن $0 \leq \beta < 9$ فإن : $0 \leq 1432k + 5 < 9$ أي حتما $k = 0$ إذن : $(\beta; \gamma) = (5; 7)$
 و كون α ، β و γ بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية فإن : $\alpha + \gamma = 2\beta$
 إذن : $\alpha = 3$ ومنه القيم المطلوبة هي : $(\alpha; \beta; \gamma) = (3; 5; 7)$
 وأيضا : $N = 1458 + 81\gamma + 9\alpha + \beta = 1458 + 81 \times 7 + 9 \times 3 + 5 = 2057$

حل التمرين 18:

إضغط على "18" للعودة إلى التمرين

1. إيجاد الحل الخاص $(x_0; y_0)$:

لدينا : $x_0 = y_0$ و بالتعويض في المعادلة (E) نجد : $6x_0 - 7x_0 = 19$ و منه : $x_0 = -19$.
 إذن الحل الخاص هو : $(x_0; y_0) = (-19; -19)$.

حل المعادلة :

لدينا : $\begin{cases} 6x - 7y = 19 \\ 6(-19) - 7(-19) = 19 \end{cases}$ بالطرح نجد : $6(x + 19) - 7(y + 19) = 0$

تكافئ : $6(x + 19) = 7(y + 19)$ " لاحظ أن : $PGCD(7; 6) = 1$ "

- لدينا : $\begin{cases} 7 \mid 6(x + 19) \\ PGCD(7; 6) = 1 \end{cases}$ حسب غوص نجد $7 \mid (x + 19)$ و منه : $x = 7k - 19$

- لدينا : $\begin{cases} 6 \mid 7(y + 19) \\ PGCD(7; 6) = 1 \end{cases}$ حسب غوص نجد $6 \mid (y + 19)$ و منه : $y = 6k - 19$

إذن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $(x; y) = (7k - 19; 6k - 19)$.

2. لدينا : $\begin{cases} \lambda \equiv 24 [7] \\ \lambda \equiv 5 [6] \end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases} \lambda \equiv 24 [7] \\ \lambda \equiv 5 [6] \end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases} \lambda = 7x + 24 \\ \lambda = 6y + 5 \end{cases}$

و منه : $6y + 5 = 7x + 24$ تكافئ : $(E) : 6y - 7x = 19 \dots$ وحلها : $(x; y) = (7k - 19; 6k - 19)$

و منه قيم λ هي : $\lambda = 6x + 5 = 6(7k - 19) + 5 = 42k - 109$ مع $k \in \mathbb{Z}$

من جهة لدينا : $\lambda = 42k - 109$ و منه : $\lambda \equiv -109 [42]$ وبإضافة التردد 3 مرات نجد : $\lambda \equiv 17 [42]$

و منه باقي قسمة λ على 42 هو 17 .

3. بما أن $(x; y)$ حل للمعادلة (E) معناه : $(x; y) = (7k - 19; 6k - 19)$.

لدينا : $|x + y - 1| \leq 13$ و منه $|7k - 19 + 6k - 19 - 1| \leq 13$ أي $|13k - 39| \leq 13$

و منه $-13 \leq 13k - 39 \leq 13$ و منه $26 \leq 13k \leq 52$ و بالتالي : $2 \leq k \leq 4$

و منه الثنائيات هي : $(x; y) \in \{(-5; -7), (2; -1), (9; 5)\}$

4. أ / دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 :

$$5^0 \equiv 1[7] \quad n = 0$$

$$5^1 \equiv 5[7] \quad n = 1$$

$$5^2 \equiv 4[7] \quad n = 2$$

$$5^3 \equiv 6[7] \quad n = 3$$

$$5^4 \equiv 2[7] \quad n = 4$$

$$5^5 \equiv 3[7] \quad n = 5$$

$$5^6 \equiv 1[7] \quad n = 6$$

نلاحظ أن بواقي القسمة تشكل متتالية دورية و دورها 6
" أي دور القسمة هو من الشكل $6m$ مع $m \in \mathbb{N}$ "

- نلخص هذه الموافقات في الجدول الآتي:

n	$6m$	$6m+1$	$6m+2$	$6m+3$	$6m+4$	$6m+5$	
$5^n \equiv$	1	5	4	6	2	3	[7]

ب / لدينا $2020 \equiv 4[7]$ و $1437 \equiv 3[6]$

و منه : $\left\{ \begin{array}{l} n - 5^n \equiv 4[7] \\ n = 6l + 3, l \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$ تكافئ $\left\{ \begin{array}{l} n - 5^n \equiv 4[7] \\ n \equiv 3[6] \end{array} \right\}$ تكافئ $\left\{ \begin{array}{l} n - 5^n \equiv 2020[7] \\ n \equiv 1437[6] \end{array} \right\}$

و منه : $\left\{ \begin{array}{l} n \equiv 3[7] \\ n \equiv 3[6] \end{array} \right\}$ تكافئ $\left\{ \begin{array}{l} n \equiv 10[7] \\ n \equiv 3[6] \end{array} \right\}$ تكافئ $\left\{ \begin{array}{l} n - 6 \equiv 4[7] \\ n = 6l + 3 \end{array} \right\}$

و منه : $n \equiv 3[42]$ و بالتالي مجموعة قيم n هي : $n = 42p + 3$ مع $p \in \mathbb{N}$.

حل التمرين 19:

إضبط على "19" للعودة إلى التمرين

1.

أ / حساب $PGCD(2013; 1962)$:

لدينا باستخدام خوارزمية إقليدس :

$$2013 = 1962 \times 1 + 51$$

$$1962 = 51 \times 38 + 24$$

$$51 = 24 \times 2 + 3$$

$$24 = 3 \times 8 + 0$$

فإن آخر باقي غير معدوم هو 3 إذن : $PGCD(2013; 1962) = 3$

ب/ لدينا : $54 = 3 \times 18$ إذن بما أن $PGCD(2013; 1962) = 3$ يقسم العدد 54

فإن المعادلة (E) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$.

ج/ الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (E) معناه : $2013x - 1962y = 54$

تكافئ $2013x = 54 + 1962y$ بقسمة الطرفين على 3 نجد : $671x = 18 + 654y$

تكافئ $671x = 6(3 + 109y)$ معناه : $671x$ لكن 6 و 6 أوليان فيما بينهما

لأن باستخدام خوارزمية إقليدس :

$$671 = 6 \times 111 + 5$$

$$6 = 5 \times 1 + 1$$

$$5 = 1 \times 5 + 0$$

فإن آخر باقي غير معدوم هو 1 إذن : $PGCD(671; 6) = 1$

و بالتالي حسب غوص فإن : $6 \mid x$ و منه : $x \equiv 0 [6]$.

د/ لدينا : $(x_0; y_0)$ حلاً خاصاً للمعادلة (E) فحسب السؤال السابق $x_0 \equiv 0 [6]$

ومنه : $x_0 = 6k$ مع $k \in \mathbb{N}$ حيث : $74 < x_0 < 80$ و منه $74 < 6k < 80$

بقسمة أطراف المتراجحة على 6 نجد : $12.33 < k < 13.33$ أي حتماً : $k = 13$

و منه $x_0 = 6k = 6 \times 13 = 78$ ثم بتعويض x_0 في المعادلة (E) نجد : $y_0 = 80$

و منه الحل الخاص هو : $(x_0; y_0) = (78; 80)$.

حل المعادلة :

لدينا : $\begin{cases} 2013x - 1962y = 54 \\ 2013(78) - 1962(80) = 54 \end{cases}$ بالطرح نجد : $2013(x - 78) - 1962(y - 80) = 0$

تكافئ : $2013(x - 78) = 1962(y - 80)$ بقسمة الطرفين على 3 نجد : $671(x - 78) = 654(y - 80)$

حيث : $PGCD(671; 654) = 1$

- لدينا $\begin{cases} 654 \mid 671(x - 78) \\ PGCD(671; 654) = 1 \end{cases}$ حسب غوص نجد $654 \mid (x - 78)$ و منه $x = 654k + 78$

- لدينا $\begin{cases} 671 \mid 654(y - 80) \\ PGCD(671; 654) = 1 \end{cases}$ حسب غوص نجد $671 \mid (y - 80)$ و منه $y = 671k + 80$

إذن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $(x; y) = (654k + 78; 671k + 80)$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

2.

أ/ لدينا $(x; y)$ حل للمعادلة (E) معناه $2013x - 1962y = 54$ بقسمة طرفي المعادلة على 3

نجد $671x - 654y = 18$ و $d = PGCD(x; y)$ معناه $\begin{cases} d \mid x \\ d \mid y \end{cases}$ و منه $\begin{cases} d \mid 671x \\ d \mid 654y \end{cases}$

أي : $d \mid 671x - 654y$ إذن : $d \mid 18$ و بالتالي القيم الممكنة لـ d هي : $d \in \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$.

ب/ لدينا : $PGCD(a; b) = 18$ و منه : $\begin{cases} 18 | a \\ 18 | b \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} a = 18a' \\ b = 18b' \end{cases}$ حيث : $PGCD(a'; b') = 1$

و لدينا : $671a - 654b = 18$ تكافئ : $671 \times 18a' - 654 \times 18b' = 18$ أي : $671a' - 654b' = 1 \dots (*)$

بما أن 671 و 654 أوليان فيما بينهما ، فتوجد ثنائية $(a'; b')$ تحقق (*)

$$\begin{cases} 17 = 671 - 654 \dots (1) \\ 8 = 654 - 17 \times 38 \dots (2) \\ 1 = 17 - 8 \times 2 \dots (3) \end{cases} \text{ و منه : } \begin{cases} 671 = 654 \times 1 + 17 \\ 654 = 17 \times 38 + 8 \\ 17 = 8 \times 2 + 1 \end{cases}$$

نعوض (1) في (2) نجد : $8 = 654 - (671 - 654) \times 38 = -38 \times 671 + 39 \times 654 \dots (4)$

ثم نعوض (1) و (4) في (3) نجد :

$$1 = (671 - 654) - (-38 \times 671 + 39 \times 654) \times 2 = 671 \times 77 - 654 \times 79$$

و منه : $1 = 671 \times 77 - 654 \times 79$ إذن الثنائية $(a'_0; b'_0) = (77; 79)$ حل خاص للمعادلة (*)

$$\text{لدينا : } \begin{cases} 671a' - 654b' = 1 \\ 671 \times 77 - 654 \times 79 = 1 \end{cases} \text{ بالطرح نجد : } 671 \times (a' - 77) - 654 \times (b' - 79) = 0$$

تكافئ : $671 \times (a' - 77) = 654 \times (b' - 79)$ حيث : $PGCD(671; 654) = 1$

$$\text{- لدينا } \begin{cases} 654 | 671 \times (a' - 77) \\ PGCD(671; 654) = 1 \end{cases} \text{ حسب غوص نجد } 654 | (a' - 77) \text{ و منه } a' = 654k' + 77$$

$$\text{- لدينا } \begin{cases} 671 | 654 \times (b' - 79) \\ PGCD(671; 654) = 1 \end{cases} \text{ حسب غوص نجد } 671 | (b' - 79) \text{ و منه } b' = 671k' + 79$$

$$\text{و بالتالي : } \begin{cases} a = 18a' \\ b = 18b' \end{cases} \text{ و منه : } \begin{cases} a = 11772k' + 1386 \\ b = 12078k' + 1422 \end{cases}$$

و منه قيم العددين الطبيعيين a و b هي : $(a; b) = (11772k' + 1386; 12078k' + 1422)$ مع $k' \in \mathbb{N}$

إضغط على "20" للعودة إلى التمرين

حل التمرين 20:

1.

أ/ لدينا : $5(6n+2) - 3(10n+3) = 30n+10-30n-9=1$ و منه : $(6n+2; 10n+3)$ حلا للمعادلة (E)

ب/ حسب السؤال السابق بما أنه توجد ثنائية $(5; -3)$ حيث $(6n+2)(5) + (10n+3)(-3) = 1$

فحسب مبرهنة بيزو فإن $6n+2$ و $10n+3$ أوليان فيما بينهما .

2.

$$\text{أ/ لدينا : } \begin{cases} d | a \\ d | b \end{cases} \text{ و منه } \begin{cases} d | 3a \\ d | 10b \end{cases} \text{ معناه } d | 10b - 3a$$

أي $d | 41$ و بما أن 41 عدد أولي فإن : $d = 1$ أو $d = 41$.

$$\text{ب/ لدينا : } PGCD(a; b) = 41 \text{ و منه } \begin{cases} 41 \mid a \\ 41 \mid b \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} a \equiv 0 [41] \\ b \equiv 0 [41] \end{cases}$$

$$\text{أي : } \begin{cases} 10n + 3 \equiv 0 [41] \\ 3n + 5 \equiv 0 [41] \end{cases} \text{ بالطرح نجد : } 7n - 2 \equiv 0 [41] \text{ أي : } 7n \equiv 2 [41]$$

$$\text{بالضرب في 6 نجد } 6 \times 7n \equiv 6 \times 2 [41] \text{ أي } 42n \equiv 12 [41] \text{ و منه : } n \equiv 12 [41]$$

3.

أ/ بالقسمة الإقليدية للعددين A و B على $2n+3$ نجد: $A = (2n+3)(10n+3)$ و $B = (2n+3)(3n+5)$
ب/ لدينا :

$$PGCD(A; B) = PGCD((2n+3)(10n+3); (2n+3)(3n+5)) = (2n+3) PGCD((10n+3); (3n+5)) \\ = (2n+3) PGCD(a; b)$$

- إذا كان : $PGCD(a; b) = 41$ أي : $PGCD(A; B) = 41(2n+3)$ حيث $n \equiv 12 [41]$

$$\text{أي } n = 41k + 12 \text{ مع } k \in \mathbb{N} .$$

- إذا كان : $PGCD(a; b) = 1$ أي : $PGCD(A; B) = 2n+3$ حيث $n \not\equiv 41k + 12$ مع $k \in \mathbb{N} .$

إضغط على "21" للعودة إلى التمرين

حل التمرين 21:

1.

أ/ تعيين بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 :

$$2^0 \equiv 1 [7] \quad n = 0$$

$$2^1 \equiv 2 [7] \quad n = 1$$

$$2^2 \equiv 4 [7] \quad n = 2$$

$$2^3 \equiv 1 [7] \quad n = 3$$

نلاحظ أن بواقي القسمة تشكل متتالية دورية و دورها 3

" أي دور القسمة هو من الشكل $3m$ مع $m \in \mathbb{N}$ "

- نلخص هذه الموافقات في الجدول الآتي:

n	$3m$	$3m+1$	$3m+2$	
$2^n \equiv$	1	2	4	[7]

ب/ إيجاد باقي قسمة $1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53}$ على 7 :

لدينا : $1962 \equiv 2 [7]$ و $1954 \equiv 1 [7]$ و $2015 \equiv 6 [7]$ و بالتالي :

$$1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53} \equiv 2^{1954} - 1^{1962} + 6^{53} [7] \\ \equiv 2^{3 \times 651 + 1} - 1 + (-1)^{53} [7] \\ \equiv 2 - 1 - 1 [7] \\ \equiv 0 [7]$$

و منه باقي القسمة الإقليدية للعدد $2015^{53} + 1954^{1962} - 1962^{1954}$ على 7 هو 0 .

2.

أ/ لدينا : $\sqrt{89} \approx 9.43$ و منه الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{89}$ هي : 2, 3, 5, 7

و بما أن 89 لا يقبل القسمة على أي عدد من هذه الأعداد الأولية فإن 89 عدد أولي .

ب/ نحلل العدد 7832 إلى جداء عوامل أولية :

$$\begin{array}{r|l} 7832 & 2 \\ 3916 & 2 \\ 1958 & 2 \\ 979 & 11 \\ 89 & 89 \\ 1 & \end{array} \quad \text{لدينا : } 7832 = 2^3 \times 11 \times 89 \text{ و منه : } 7832 \text{ و بالتالي عدد قواسم العدد } 7832$$

هي : $16 = (1+1)(1+1)(3+1)$ و هي كالاتي :

$$D_{7832} = \{1; 2; 4; 8; 11; 22; 44; 88; 89; 178; 356; 712; 979; 1958; 3916; 7832\}$$

ج باستعمال خوارزمية إقليدس :

$$\begin{cases} 981 = 977 \times 1 + 4 \\ 977 = 244 \times 4 + 1 \\ 4 = 4 \times 1 + 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن آخر باقي غير معدوم هو 1 ، و منه $PGCD(981; 977) = 1$

و بالتالي العددان 981 و 977 أوليان فيما بينهما .

3. لدينا : $PGCD(x; y) = 2$ و منه : $\begin{cases} 2 | x \\ 2 | y \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} x = 2x' \\ y = 2y' \end{cases}$ حيث : $PGCD(x'; y') = 1$

$$\begin{cases} x'^2 - y'^2 = 7832 \\ x' - y' \equiv 4 [11] \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} 4x'^2 - 4y'^2 = 31328 \\ 2x' - 2y' \equiv 8 [22] \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8 [22] \end{cases}$$

$$\text{تكافئ } \begin{cases} (x' + y')(x' - y') = 7832 \\ x' - y' \equiv 4 [11] \end{cases} \dots (*) \text{ و بما أن } x' \text{ و } y' \text{ عددان طبيعيين فإن : } x' + y' > x' - y'$$

لدينا :

$$7832 = 7832 \times 1 = 3916 \times 2 = 1958 \times 4 = 979 \times 8 = 712 \times 11 = 356 \times 22 = 178 \times 44 = 89 \times 88$$

نلخص جميع الحالات في الجدول التالي :

$x' + y'$	7832	3916	1958	979	712	356	178	89	
$x' - y'$	1	2	4	8	11	22	44	88	
$x' - y' \equiv$	1	2	4	8	0	0	0	0	[11]

من الجدول نلاحظ أن الحالة الوحيدة التي تحقق الجملة (*) هي لما : $\begin{cases} x' + y' = 1958 \\ x' - y' = 4 \end{cases}$

بالجمع نجد $2x' = 1962$ أي : $x' = 981$ ثم بالتعويض في إحدى المعادلتين نجد : $y' = 977$

و منه في الأخير : $\begin{cases} x = 2x' = 1962 \\ y = 2y' = 1954 \end{cases}$ إذن : $(x; y) = (1962; 1954)$.

4.

أ/ لدينا :

- a أولي مع b معناه يوجد عددين صحيحين α و β حيث $\alpha a + \beta b = 1$

- a أولي مع c معناه يوجد عددين صحيحين α' و β' حيث $\alpha' a + \beta' c = 1$.

ومنه :

$$(\alpha a + \beta b)(\alpha' a + \beta' c) = \alpha \alpha' a^2 + \alpha \beta' ac + \beta \alpha' ab + \beta \beta' bc = (\alpha \alpha' a + \alpha \beta' c + \beta \alpha' b) a + (\beta \beta') bc = 1$$

و بالتالي حسب مبرهنة ييزو فإن a أولي مع $b \times c$.

ب/ نتحقق من الخاصية من أجل $n = 1$ لدينا $PGCD(a; b^1) = PGCD(a; b) = 1$

لأن a أولي مع b . ومنه فهي محققة .

نفرض أن الخاصية محققة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ونبين صحتها من أجل $n + 1$

$$PGCD(a; b^n) = 1 \text{ أي نبين أن } PGCD(a; b^{n+1}) = 1$$

من الفرض لدينا a أولي مع b^n و a أولي مع b إذن حسب السؤال السابق a أولي مع $b^n \times b$

و بالتالي : $PGCD(a; b^{n+1}) = 1$ ومنه المطلوب .

ج/ لدينا :

$$1962^{1954} = (2 \times 981)^{1954} = 2^{1954} \times 981^{1954}$$

$$1954^{1962} = (2 \times 977)^{1962} = 2^{1962} \times 977^{1962} = 2^{1954} \times 2^8 \times 977^{1962}$$

ومنه :

$$PGCD(1962^{1954}; 1954^{1962}) = PGCD(2^{1954} \times 981^{1954}; 2^{1954} \times 2^8 \times 977^{1962}) \\ = 2^{1954} PGCD(981^{1954}; 2^8 \times 977^{1962})$$

و بالتالي حسب ما سبق $PGCD(981; 977) = 1$ فإن $PGCD(981^{1954}; 977^{1962}) = 1 \dots (1)$.

و كون 2 لا يقسم 981 فإن $PGCD(981; 2) = 1$ و بالتالي : $PGCD(981^{1954}; 2^8) \dots (2)$

في الأخير من (1) و (2) و حسب السؤال 4.أ/ فإن : $PGCD(981^{1954}; 2^8 \times 977^{1962}) = 1$

و بالتالي : $PGCD(1962^{1954}; 1954^{1962}) = 2^{1954} \times 1 = 2^{1954}$.

1.

أ/ تعيين بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 :

$2^0 \equiv 1[7]$	$n = 0$
$2^1 \equiv 2[7]$	$n = 1$
$2^2 \equiv 4[7]$	$n = 2$
$2^3 \equiv 1[7]$	$n = 3$

نلاحظ أن بواقي القسمة تشكل متتالية دورية و دورها 3
 " أي دور القسمة هو من الشكل $3m$ مع $m \in \mathbb{N}$ "

- نلخص هذه الموافقات في الجدول الآتي:

n	$3m$	$3m+1$	$3m+2$	
$2^n \equiv$	1	2	4	$[7]$

ب/ إستنتاج باقي قسمة 1444^{2023} على 7 :

لدينا $1444 \equiv 2[7]$ و منه :

$$\begin{aligned} 1444^{2023} &\equiv 2^{2023} [7] \\ &\equiv 2^{3 \times 674 + 1} [7] \\ &\equiv 2 [7] \end{aligned}$$

و منه باقي قسمة 1444^{2023} على 7 هو 2 .

ج/ تعيين قيم n :

لدينا : $1444^{3n+1} \equiv 2^{3n+1} [7]$ و منه $1444^{3n+1} \equiv 2 [7]$ وأيضا : $1962n \equiv 2n [7]$

ومنه $1444^{3n+1} + 1962n \equiv 0 [7]$ تكافئ $2 + 2n \equiv 0 [7]$ أي $2(n+1) \equiv 0 [7]$

و بالتالي : $n+1 \equiv 0 [7]$ أي $n \equiv 6 [7]$ و منه : $n = 7k + 6$ مع $k \in \mathbb{N}$.

2. بما أن : $7 \times 4 - 6 \times 4 = 4$ فإن الثنائية $(4; 4)$ حل للمعادلة (E) .

لدينا : $\begin{cases} 7x - 6y = 4 \\ 7 \times (4) - 6 \times (4) = 4 \end{cases}$ بالطرح نجد $7(x-4) - 6(y-4) = 0$ تكافئ $7(x-4) = 6(y-4)$

- لدينا : $\begin{cases} 6 \mid 7(x-4) \\ PGCD(7; 6) = 1 \end{cases}$ فحسب غوص نجد $6 \mid (x-4)$ و منه $x = 6p + 4$

- لدينا : $\begin{cases} 7 \mid 6(y-4) \\ PGCD(7; 6) = 1 \end{cases}$ فحسب غوص نجد $7 \mid (y-4)$ و منه $y = 7p + 4$

و منه مجموعة الحلول هي : $S = \{(6p+4; 7p+4)\}$ مع $p \in \mathbb{Z}$.

3. تعيين الثنائيات $(x; y)$:

لدينا $(x; y)$ حلول المعادلة (E) معناه $\begin{cases} x = 6p + 4 \\ y = 7p + 4 \end{cases}$

لدينا : $2^{3x} + 2^y \equiv 3 [7]$ تكافئ : $1 + 2^{7p+4} \equiv 3 [7]$ تكافئ : $2^{7p} \times 2^4 \equiv 2 [7]$ تكافئ : $(2^7)^p \times 2 \equiv 2 [7]$
 ومنه : $(2)^p \equiv 1 [7]$ و من جدول الموافقات نجد $p = 3m$
 بالتعويض في x و y نجد الثنائيات هي : $(x; y) = (18m + 4; 21m + 4)$ مع $m \in \mathbb{Z}$.

حل التمرين 23:

1.

أ/ بما أن : $16 \times 6 + 361 \times 2 = 818$ فإن الثنائية $(6; 2)$ حل للمعادلة (E).

لدينا : $\begin{cases} 16x + 361y = 818 \\ 16 \times (6) + 361 \times (2) = 818 \end{cases}$ بالطرح نجد $16(x - 6) + 361(y - 2) = 0$

تكافئ $16(x - 6) = 361(2 - y)$

- لدينا : $\begin{cases} 361 \mid 16(x - 6) \\ PGCD(361; 16) = 1 \end{cases}$ فحسب غوص نجد $361 \mid (x - 6)$ و منه $x = 361p + 6$

- لدينا : $\begin{cases} 16 \mid 361(2 - y) \\ PGCD(361; 16) = 1 \end{cases}$ فحسب غوص نجد $16 \mid (2 - y)$ و منه $y = 2 - 16p$

و منه مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S = \{(361p + 6; 2 - 16p)\}$ مع $p \in \mathbb{Z}$.

ب/ لدينا : $|x + 23y| \leq 4$ و منه $|361p + 6 + 23(2 - 16p)| \leq 4$ تكافئ $|361p + 6 + 46 - 368p| \leq 4$

و منه $|52 - 7p| \leq 4$ أي $-4 \leq 52 - 7p \leq 4$ أي $-56 \leq -7p \leq -48$ و منه $6.85 \leq p \leq 8$

و بالتالي : $p \in \{7; 8\}$

و منه من أجل $p = 7$ نجد : $(x; y) = (2533; -110)$ و من أجل $p = 8$ نجد : $(x; y) = (2894; -126)$

و منه الثنائيات هي : $(x; y) \in \{(2533; -110), (2894; -126)\}$.

2. لدينا : $P = 5 \times 7^3 + \alpha \times 7^2 + \beta \times 7^1 + 0 \times 7^0 = 1715 + 7\beta + 49\alpha$

لدينا : $P = \beta \times 9^3 + \alpha \times 9^2 + 8 \times 9^1 + 7 \times 9^0 = 79 + 729\beta + 81\alpha$

لدينا :

$$79 + 729\beta + 81\alpha = 1715 + 7\beta + 49\alpha$$

$$81\alpha - 49\alpha + 729\beta - 7\beta = 1715 - 79$$

$$32\alpha + 722\beta = 1636$$

$$16\alpha + 361\beta = 818 \text{ بقسمة على 2 نجد}$$

و منه حسب ما سبق : $\alpha = 361p + 6$ و $\beta = 2 - 16p$ مع $p \in \mathbb{Z}$.

لدينا : $\begin{cases} 0 \leq \alpha \leq 6 \\ 0 \leq \beta \leq 6 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 0 \leq 361p + 6 \leq 6 \\ 0 \leq 2 - 16p \leq 6 \end{cases}$ أي حتما $p = 0$

و عليه : $\alpha = 6$ و $\beta = 0$.

و بالتالي : $P = 79 + 729 \times 2 + 81 \times 6 = 2023$

3.

أ/ تحليل العدد 2023 إلى جداء عوامل أولية :

$$\begin{array}{r|l} 2023 & 7 \\ 289 & 17 \\ 17 & \\ 1 & \end{array} \quad \text{لدينا : } 2023 = 7 \times 17^2 \text{ ومنه :}$$

إذن من المساواة $2023 = 7 \times 17^2$ نستنتج أنه يوجد عدداً طبيعيين مربع كل منهما يقسم 2023 هما 1 و 17 .

ب/ لدينا : (1) $m^2 + 3d^2 = 2023 \dots$

$$PGCD(a; b) = d \text{ أي } \begin{cases} d | a \\ d | b \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} a = d \times a' \\ b = d \times b' \end{cases} \text{ حيث } PGCD(a'; b') = 1$$

$$\text{و لدينا : } d \times m = a \times b \text{ و بالتالي } d \times m = d \times a' \times d \times b' \text{ أي } m = da'b' \dots (2)$$

$$(da'b')^2 + 3d^2 = 2023 \quad \text{بتعويض (2) في (1) نجد :}$$

$$d^2(a'b')^2 + 3d^2 = 2023$$

$$d^2[(a'b')^2 + 3] = 2023 \dots (*)$$

نستنتج أن d^2 يقسم 2023 و حسب السؤال السابق نستنتج أن $d \in \{1; 17\}$

- لما $d = 1$: المساواة (*) تصبح $(a'b')^2 + 3 = 2023$ أي $(a'b')^2 = \sqrt{2020} \notin \mathbb{N}$ "مرفوضة"

- لما $d = 17$: المساواة (*) تصبح $(a'b')^2 + 3 = 7$ أي $(a'b')^2 = 4$

ومنه $a'b' = 2$ و بالتالي : $(a'; b') \in \{(1; 2), (2; 1)\}$

- ومنه نستنتج أن : $(a; b) \in \{(17; 34), (34; 17)\}$.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَأَنْفِقُوا مِنْ مَا رَزَقْنَاكُمْ مِنْ قَبْلِ أَنْ يَأْتِيَ أَحَدَكُمُ الْمَوْتُ فَيَقُولَ رَبِّ لَوْلَا
أَخَّرْتَنِي إِلَىٰ أَجَلٍ قَرِيبٍ فَأَصَّدَّقَ وَأَكُنْ مِنَ الصَّالِحِينَ ﴿١٠﴾
"سورة المنافقون"

❁ الحمد لله الذي وفقنا لإتمام هذا الكتاب ❁