تمارين : الاعداد المركبة (من الكتاب المدرسي) مع الحل المفصل

الاستاذ : بوخلاط محمد

في كل التمارين ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

I. حل في مجموعة الاعداد المركبة المعادلات ذات المجهول z التالية :

أ ـ $(1-i)z=3+i$. ب ـ $(2z+1-i)(i\overline{z}+i-2)=0$.

جـ ـ $\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1}=i$. د. $2z+i\overline{z}=5-4i$.

II. حل في المجموعة C^2 الجمل ذات المجهول $(z;z')$ التالية :

أ ـ $\begin{cases}3z+z'=2-5i\\ z-z'=-2+i\end{cases}$. ب ـ $\begin{cases}3z+z'=5+2i\\ z+z'=1-2i\end{cases}$.

III. برّر أن العددين $(1+i)^8$ و $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2008}$ حقيقيان .

IV. $z=x+iy$ عدد مركب مع x و y عددين حقيقيين . نضع $\alpha=z-2\overline{z}+2+3i$.

أ) أحسب بدلالة x و y الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد المركب α .

ب) حل في مجموعة الاعداد المركبة المعادلة $\alpha=0$, ذات المجهول z .

V. $z=x+iy$ عدد مركب حيث $z\neq1$ و x ، y عددان حقيقيان .

نعتبر العدد المركب L حيث $L=\dfrac{z+2i}{z-1}$.

أ) أكتب العدد المركب L على الشكل الجبري .

ب) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L حقيقيا .

ج) برهن أن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L تخيليا صرفا هي دائرة باستثناء نقطة ، يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها .

VI. A ؛ B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $z_1=1$, $z_2=2i$ و $z_3=-1-i$.

أ) أحسب $|z_2-z_1|$ و $|z_3-z_1|$.

ب) أحسب $Arg\left(\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right)$.

ج) استنتج طبيعة المثلث ABC.

VII. عيّن ثمّ مثّل مجموعة النقط M ذات اللاحقة المركب z الذي يحقق المساواة المقترحة .

أ ـ $|z+1+2i|=|z-4|$. ب ـ $|z-3i|=2$. جـ ـ $|2z-i|=2$

VIII. يعطى العدد المركب α حيث : $\alpha=\sqrt{2-\sqrt{2}}-i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

أ) أحسب α^2 ثم α^4 .

ب) أحسب $\left|\alpha^4\right|$ ثم استنتج $|\alpha|$.

ج) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة العدد المركب z حيث $|\alpha z|=6$.

IX. في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، عين الطويلة وعمدة للعدد المركب z .

أ ـ $z=4\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. ب ـ $z=-3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

جـ ـ $z=\sqrt{5}\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)$. د ـ $z=\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}$.

X. أكتب الأعداد المركبة التالية على الشكل المثلثي

$z_1=1+i$ ، $z_2=3-3i$ ، $z_3=-\sqrt{5}-i\sqrt{15}$ ، $z_4=-\sqrt{6}+i\sqrt{2}$.

$z=(1-i)^2$ ، $z=\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$.

$z=(1+i)\left(\sqrt{3}+i\right)$ ، $z=\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^9}{(1+i)^{12}}$.

XI. نعتبر العدد المركب $Z=\frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}$.

أ) أكتب العدد المركب Z على الشكل الجبري

ب) أكتب العدد المركب Z على الشكل المثلثي .

ج) أكتب على الشكل المثلّثي الأعداد: $\frac{1}{Z}$ ، Z^{2009} و $\overline{Z}$.

XII. 1)أنشئ في المعلم$\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ النقط A ، B ، C و D صور على الترتيب للأعداد المركبة التالية :

$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $\frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $e^{i\pi}$ و $2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

2) أكتب على الشكل الجبري كل من الأعداد المركبة التالية : $6e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ؛ $\sqrt{5}e^{i\frac{3\pi}{2}}$ ؛ $\frac{1}{2}e^{i\pi}$ ؛ $2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

3) أكتب الأعداد المركبة التالية على الشكل الأسّي .

$z_1=2-2i$ ؛ $z_2=3\sqrt{3}-3i$ ؛ $z_3=\frac{5}{4}i$ ؛ $z_4=-1$.

4) عين شكلا أسّيا لكل من الأعداد المركبة التالية .

$z_1=-e^{i\frac{\pi}{12}}$ ؛ $z_2=-3e^{i\frac{\pi}{8}}$ ؛ $z_3=-\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ؛ $z_4=-\frac{1}{2}e^{i\pi}$.

XIII. حل في مجموعة الاعداد المركبة كلا من المعادلات ذات المجهول z التالية:

أ ـ $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$. ب ـ $z^2-2\left(1+\sqrt{2}\right)z+2\left(\sqrt{2}+2\right)=0$.

جـ ـ $z^2-2(\cos\theta)z+1=0$ حيث θ عدد حقيقي .

د ـ $z^2-2(\sin\theta)z+1=0$ حيث θ عدد حقيقي .

XIV. يعطى العددين المركبين $z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ و $z_2=1-i$.

1) أعط الشكل المثلثي لكل من الأعداد المركبة z_1 ، z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$.

2) أعط الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1}{z_2}$.

3) استنتج أنّ : $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

XV. حل في مجموعة الأعداد المركبة، كلا من المعادلتين : $z^2-2z+5=0$ ؛ $z^2-2(1+\sqrt{3})z+5+2\sqrt{3}=0$.

في المستوي المزود بالمعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D صور الأعداد المركبة $1+2i$ ، $1+\sqrt{3}+i$ ، $1-2i$ و $1+\sqrt{3}-i$ على الترتيب .

أ ـ ما هي طبيعة المثلث ABC ؟

ب ـ أكتب معادلة للدائرة $\mathcal{C}$ المحيطة بالمثلث ABC .

ج ـ أثبت أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة $\mathcal{C}$.

د ـ أنشئ $\mathcal{C}$ والنقط A ، B ، C و D في المعلم المعطى .

XVI. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر.
لكل سؤال يمكن عدّة اقتراحات صحيحة ، المطلوب إدلاء بها مبرّرا ذلك .

1) تعطى النقط A ، B و C ، لواحقها على الترتيب : $a=-2+3i$ ؛ $b=-3-i$ و $c=2,08+1,98i$.

المثلث ABC هو :
- ✓ متساوي الساقين وغير قائم .
- ✓ قائم وغير متساوي الساقين .
- ✓ متساوي الساقين وقائم .
- ✓ لا قائم ولا متساوي الساقين .

2) لكل عدد مركب $z\neq-2$ نرفق العدد المركب z' حيث: $z'=\frac{z-4i}{z+2}$.

مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $|z'|=1$ هي :
- ✓ دائرة مركزها 1 .
- ✓ مستقيم .
- ✓ دائرة مركزها 1 باستثناء نقطة.
- ✓ مستقيم باستثناء نقطة.

مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث z' حقيقي هي :
- ✓ دائرة مركزها 1 .
- ✓ مستقيم .
- ✓ دائرة مركزها 1 باستثناء نقطة.
- ✓ مستقيم باستثناء نقطة.

XVII. في كل حالة من الحالات التالية مثل مجموعة النقط ذات اللاحقة العدد المركب z الذي يحقق المساواة المقترحة

أ ـ $Arg\left(iz\right)=\frac{3\pi}{2}$.

ب ـ $Arg\left(\frac{z}{1+i}\right)=\frac{\pi}{4}$.

جـ ـ $Arg\left(z\right)=Arg\left(\bar{z}\right)$.

XVIII. لكل سؤال يمكن عدّة اقتراحات صحيحة ، المطلوب إدلاء بها مبرّرا ذلك .

نضع $z=-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1) الشكل الجبري للعدد المركب z^2 هو :

- ✓ $2\sqrt{2}$.
- ✓ $2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}$.
- ✓ $2+\sqrt{2}+i\left(2-\sqrt{2}\right)$.
- ✓ $2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}$.

2) العدد المركّب z^2 يكتب على الشكل الأسّي :

- ✓ $4e^{i\frac{\pi}{4}}$.
- ✓ $4e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
- ✓ $4e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
- ✓ $4e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

3) العدد المركّب z يكتب على الشكل الأسّي :

- ✓ $2e^{i\frac{7\pi}{8}}$.
- ✓ $4e^{i\frac{\pi}{8}}$.
- ✓ $4e^{i\frac{5\pi}{8}}$.
- ✓ $4e^{i\frac{3\pi}{8}}$.

XIX. المستوي المركب منسوب إلى المعلم $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ (وحدة الرسم $4cm$).

نعتبر النقط A , B , C و D ذات اللواحق على الترتيب $a=1$, $b=e^{i\frac{\pi}{3}}$,

$c=\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$ و $d=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

1) أكتب c على الشكل الأسّي و d على الشكل الجبري .

2) مثل النقط A , B , C و D في المعلم ثم برهن أن الرباعي $OACB$ هو معين .

XX. يعطى العددان المركبان $z_1=2+3i$ و $z_2=2+i$.

1)أكتب $z_1^2 - z_2^2$ على شكله المثلثي .

2) أكتب العدد المركب $\left(\frac{z_1^2 - z_2^2}{8\sqrt{2}}\right)^{2008}$ على شكله الجبري.

XXI. يعطى العدد المركب $z = \frac{1-3i}{2-i}$.

1) أكتب z على الشكل الجبري ثم استنتج طويلته وعمدة له .

2) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها z^n عددا حقيقيا .

حلول التمارين

I. حلول المعادلات في مجموعة الاعداد المركبة :

أ ـ $(1-i)z=3+i$ تكافيء $z=\frac{3+i}{1-i}=\frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{3+3i+i+i^2}{1^2+1^2}=\frac{2+4i}{2}=1+2i$

مجموعة حلول المعادلة $s=\{1+2i\}$

ب ـ $(2z+1-i)(i\bar{z}+i-2)=0$ تكافيء $2iz\bar{z}+2iz-4z+i\bar{z}+i-2+\bar{z}+1+2i=0$ تكافئ

$2iz\bar{z}+2iz-4z+i\bar{z}+3i-1+\bar{z}=0$ بوضع $z=a+ib$ حيث a و b عددان حقيقيان بالتعويض في المعادلة نجد :

$2i(a^2+b^2)+2i(a+ib)-4(a+ib)+i(a-ib)+3i-1+a-ib=0$ تكافئ

$-2b-4a+b-1+a+i(2a^2+2b^2+2a-4b+a+3-b)=0$ يكافئ

$-b-3a-1+i(2a^2+2b^2+3a-5b+3)=0$ يكافئ $\begin{cases}-b-3a-1=0\\2a^2+2b^2+3a-5b+3=0\end{cases}$ يكافئ

$\begin{cases}b=-3a-1\\2a^2+2b^2+3a-5b+3=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}b=-3a-1\\2a^2+2(-3a-1)^2+3a-5(-3a-1)+3=0\end{cases}$ يكافئ

$\begin{cases}b=-3a-1\\2a^2+2(9a^2+1+6a)+3a-5(-3a-1)+3=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}b=-3a-1\\20a^2+30a+10=0\end{cases}$ يكافئ

$\begin{cases}b=-3a-1\\2a^2+3a+1=0\end{cases}$ نحل المعادلة $2a^2+3a+1=0$ ، $\Delta=1$ ، $a_1=-1$ و $a=-\frac{1}{2}$.

- اذا كان $a_1=-1$ فان : $b_1=2$
- اذا كان $a_2=-\frac{1}{2}$ فان : $b_2=\frac{1}{2}$

مجموعة حلول المعادلة $s=\left\{-1+2i ، -\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right\}$

جـ ـ $\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1}=i$ تكافئ $\bar{z}-1=i(\bar{z}+1)$ تكافئ

$\bar{z}(1-i)=1+i$ تكافئ $\bar{z}=\frac{1+i}{1-i}$ تكافئ $\bar{z}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+i+i^2}{1+1}=\frac{1}{2}i$ تكافئ $z=-\frac{1}{2}i$

مجموعة حلول المعادلة $s=\left\{-\frac{1}{2}i\right\}$

د. $2z+i\bar{z}=5-4i$. بوضع $z=a+ib$ حيث a و b عددان حقيقيان

بالتعويض في المعادلة نجد : $2(a+ib)+i(a-ib)=5-4i$ تكافئ

$2a+b+i(2b+a)=5-4i$ تكافئ $\begin{cases}2a+b=5\\2b+a=-4\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}-4a-2b=-10\\2b+a=-4\end{cases}$ بالجمع نجد :

$-3a=-14$ تكافئ $a=\frac{14}{3}$ بالتعويض نجد

$2b+\frac{14}{3}=-4$ تكافئ $2b=-4+\frac{14}{3}=\frac{2}{3}$ تكافئ $b=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

مجموعة حلول المعادلة $s=\left\{\frac{14}{3}+i\frac{1}{3}\right\}$

.II أ. $\begin{cases}3z+z'=2-5i\\ z-z'=-2+i\end{cases}$

بالجمع نجد : $4z=-4i$ تكافئ $z=-i$ بالتعويض في احدى المعادلات نجد :

$-i-z'=-2+i$ تكافئ $z'=2-2i$

مجموعة حلول الجملة $s=\{(-i;2-2i)\}$

ب ـ $\begin{cases}3z+z'=5+2i\\ z+z'=1-2i\end{cases}$

بالطرح نجد $2z=4+4i$ تكافئ $z=2+2i$ بالتعويض في احدى المعادلات نجد:

$2+2i+z'=1-2i$ تكافئ $z'=-1-4i$

مجموعة حلول الجملة $s=\{(2+2i;-1-4i)\}$

.III برّر أن العددين $(1+i)^8$ و $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2008}$ حقيقيان .

$$(1+i)^8=\left[(1+i)^2\right]^4=\left[1+2i+i^2\right]^4=(2i)^4=2^4(i)^4=16(i^2)^2=16$$

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2008}=\left(\frac{1-2i+i^2}{\sqrt{2}}\right)^{2008}=\left(\frac{-2i}{\sqrt{2}}\right)^{2008}=\frac{(-2)^{2008}(i)^{2008}}{(\sqrt{2})^{2008}}=\frac{2^{2008}(i^2)^{1004}}{\left((\sqrt{2})^2\right)^{1004}}=\frac{2^{2008}}{2^{1004}}=\left(\frac{2^2}{2}\right)^{1004}=2^{1004}$$

وكلا من العددين حقيقين

.IV أ) حساب بدلالة x و y الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد المركب α .

$$\alpha=z-2\overline{z}+2+3i$$

$$\alpha=x+iy-2(x-iy)+2+3i=-x+2+i(3y+3)$$

ب)الحل في مجموعة الاعداد المركبة المعادلة $\alpha=0$, ذات المجهول z .

$\alpha=0$ يعني $-x+2+i(3y+3)=0$ يعني $\begin{cases}-x+2=0\\ 3y+3=0\end{cases}$ يعني $\begin{cases}x=2\\ y=-1\end{cases}$

مجموعة حلول المعادلة $s=\{2-i\}$

.V أ)كتابة العدد المركب L على الشكل الجبري .

L معرف من أجل $z\neq 1$ يعني $x\neq 2$ و $y\neq 0$

$$L=\frac{x+iy+2i}{x+iy-2}=\frac{x+iy+2i}{x-2+iy}=\frac{(x+iy+2i)(x-2-iy)}{(x-2+iy)(x-2-iy)}$$

$$L=\frac{x^2-2x-ixy+ixy-i2y+y^2+i2x-4i+2y}{(x-2)^2+y^2}$$

اذن :

$$L=\frac{x^2+y^2-2x+2y+i(2x-2y-4)}{(x-2)^2+y^2}$$

$$L=\frac{x^2+y^2-2x+2y}{(x-2)^2+y^2}+i\frac{2x-2y-4}{(x-2)^2+y^2}$$

ب) تعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L حقيقيا .

L حقيقي يعني $\frac{2x-2y-4}{(x-2)^2+y^2}=0$ يعني $2x-2y-4=0$ و ($x\neq 2$ و $y\neq 0$)

اذن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من اجلها L حقيقيا هي مستقيم ذو معادلة $2x-2y-4=0$ ماعدا نقطة $A(2;0)$.

ج)نبرهن أن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L تخيليا صرفا هي دائرة باستثناء نقطة

L تخيلي صرف يعني $\frac{x^2+y^2-2x+2y}{(x-2)^2+y^2}=0$ يعني $x^2+y^2-2x+2y=0$ و ($x\neq 2$ و $y\neq 0$)

يعني $(x-1)^2-1+(y+1)^2-1=0$ و ($x\neq 2$ و $y\neq 0$) يعني $(x-1)^2+(y+1)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$ و ($x\neq 2$ و $y\neq 0$) وبالتالي مجموعة النقط هي دائرة مركزها $\omega(1;-1)$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$ ماعدا نقطة $A(2;0)$

VI. أ)حساب $|z_2-z_1|$ و $|z_3-z_1|$. $z_1=1$,

$$|z_2-z_1|=|2i-1|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$$

$$|z_3-z_1|=|-1-i-1|=|-2-i|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$$

اذن $\left|\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right|=\frac{|z_2-z_1|}{|z_3-z_1|}=1$

ب) حساب $Arg\left(\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right)$.

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{2i-1}{-2-i}=\frac{(2i-1)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)}=\frac{-4i-2+2-i}{5}=-i$$

اذن $Arg\left(\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right)=Arg(-i)=-\frac{\pi}{2}$

ج) استنتاج طبيعة المثلث ABC.

بما أن $\left|\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right|=\frac{|z_2-z_1|}{|z_3-z_1|}=1$ أي $|z_2-z_1|=|z_3-z_1|$ ادن $AB=AC$ و

$Arg\left(\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right)=Arg(-i)=-\frac{\pi}{2}$ أي $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{\pi}{2}$ فان المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين

VII. تعيّن ثمّ نمثّل مجموعة النقط M ذات اللاحقة المركب z الذي يحقق المساواة المقترحة .

أ ـ $|z+1+2i|=|z-4|$ تكافئ $|z-(-1-2i)|=|z-4|$ لتكن A صورة العدد المركب $z_1=-1-2i$ و B صورة العدد المركب $z_2=4$ وعليه $|z-(-1-2i)|=|z-4|$ تكافئ $|z-z_1|=|z-z_2|$ تكافئ $AM=BM$ وبالتالي مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$

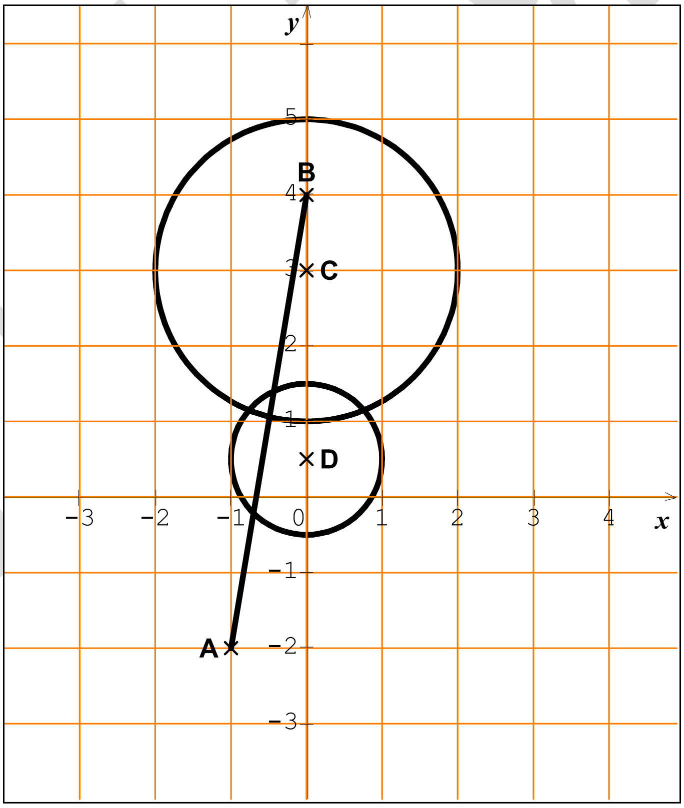
ب ـ $|z-3i|=2$ ، لتكن C صورة العدد المركب $z_3=3i$ وعليه $|z-3i|=2$ تكافئ $|z-z_3|=2$ تكافئ $CM=2$.

مجموعة النقط هي دائرة مركزها C ونصف قطرها 2 .

جـ ـ $|2z-i|=2$

$\left|2\left(z-\frac{1}{2}i\right)\right|=2$ تكافئ $2\left|\left(z-\frac{1}{2}i\right)\right|=2$ تكافئ $\left|\left(z-\frac{1}{2}i\right)\right|=1$ لتكن D صورة العدد المركب $z_4=\frac{1}{2}i$ وعليه $\left|\left(z-\frac{1}{2}i\right)\right|=1$ تكافئ $|(z-z_4)|=1$ تكافئ $DM=1$.

مجموعة النقط هي دائرة مركزها D ونصف قطرها 1 .



.VIII أ) حساب α^2 ثم α^4 . $\alpha=\sqrt{2-\sqrt{2}}-i\sqrt{2+\sqrt{2}}$

$$\alpha^2=\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}-i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\alpha^2=\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2-2i\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}}+\left(i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\alpha^2=2-\sqrt{2}-2i\sqrt{4-2}-2-\sqrt{2}$$

$$\alpha^2=-2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}$$

$$\alpha^2=-2\sqrt{2}(1+i)$$

$$\alpha^4 = (\alpha^2)^2$$
$$\alpha^4 = \left[-2\sqrt{2}(1+i)\right]^2$$
$$\alpha^4 = 8(1+2i-1)$$
$$\alpha^4 = 16i$$

ب) حساب $|\alpha^4|$ ثم استنتج $|\alpha|$.

$$|\alpha^4| = \sqrt{(16)^2} = 16$$

لدينا $|\alpha^4| = \sqrt{(16)^2} = 16$ وبالتالي $|\alpha^4| = 16 = 2^4$ أي $|\alpha|^4 = 16 = 2^4$ نستنتج
$|\alpha| = 2$

ج) نعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة العدد المركب z حيث $|\alpha z| = 6$.

$|\alpha z| = 6$ يعني $|\alpha| \times |z| = 6$ يعني $2 \times |z| = 6$ يعني $|z| = 3$ يعني $OM = 3$

مجموعة النقط هي دائرة مركزها O ونصف قطرها 3 .

IX. عين الطويلة وعمدة للعدد المركب z .

أ ـ $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$z = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

لأن الدالة $\cos$ زوجية والدالة $\sin$ فردية

اذن $|z| = 4$ و $Arg(z) = -\frac{\pi}{4}$

ب ـ $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

$$z = -3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$z = 3\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$z = 3\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$z = 3\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

لان : $\cos(\pi + x) = -\cos x$ و $\sin(\pi + x) = -\sin x$.

اذن : $|z| = 3$ و $Arg(z) = \frac{4\pi}{3}$

جـ ـ $z = \sqrt{5}\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)$.

$$z=\sqrt{5}\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z=\sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$z=\sqrt{5}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

لان : $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$ و $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$.

اذن : $|z|=\sqrt{5}$ و $Arg(z)=\frac{\pi}{3}$

د ـ $z=\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}$.

$$z=\sin\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}$$

$$z=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$z=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$z=1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

لأن الدالة $\cos$ زوجية والدالة $\sin$ فردية

اذن $|z|=1$ و $Arg(z)=-\frac{\pi}{3}$

X. كتابة الأعداد المركبة التالية على الشكل المثلثي

*) $z_1=1+i$

$$|z_1|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

لتكن θ_1 عمدة لـ z_1 : $\begin{cases}\cos\theta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ نستنتج $\theta_1=\frac{\pi}{4}$

اذن : $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

*) $z_2=3-3i$

$$|z_2|=\sqrt{3^2+(-3)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

لتكن θ_2 عمدة لـ z_2 : $\begin{cases}\cos\theta_2=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_2=-\frac{3}{3\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ نستنتج $\theta_2=-\frac{\pi}{4}$

اذن : $z_2 = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

*) $z_3 = -\sqrt{5} - i\sqrt{15}$

$$|z_3| = \sqrt{\left(-\sqrt{5}\right)^2 + \left(-\sqrt{15}\right)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

لتكن θ_3 عمدة لـ z_3 : $\begin{cases} \cos\theta_3 = \frac{-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta_3 = -\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ نستنتج $\theta_3 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

اذن : $z_3 = 2\sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

*) $z_4 = -\sqrt{6} + i\sqrt{2}$.

$$|z_4| = \sqrt{\left(-\sqrt{6}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

لتكن θ_4 عمدة لـ z_4 : $\begin{cases} \cos\theta_4 = \frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_4 = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \end{cases}$ نستنتج $\theta_4 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

اذن : $z_4 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

*) $z = (1-i)^2$

نضع : $z_5 = 1 - i$

$$|z_5| = \left[\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}\right] = \sqrt{2}$$

لتكن θ_5 عمدة لـ z_5 : $\begin{cases} \cos\theta_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ نستنتج $\theta_5 = -\frac{\pi}{4}$

اذن : $z_5 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

لدينا : $z = (z_5)^2$ وبالتالي نجد :

$$z = \left(\sqrt{2}\right)^2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^2$$

$z = 2\left(\cos 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin 2\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ باستخدام دستور موافر

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

*) $z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1+i}$

$$|z|=\frac{|1-i\sqrt{3}|}{|1+i|}=\frac{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$$Arg\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)=Arg(1-i\sqrt{3})-Arg(1+i)$$

لتكن θ_6 عمدة لـ $1-i\sqrt{3}$ **:** $|1-i\sqrt{3}|=2$

$$\begin{cases}\cos\theta_6=\frac{1}{2}\\ \sin\theta_6=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$ نستنتج $\theta_6=-\frac{\pi}{3}$

ومما سبق نجد **:** $Arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$

اذن **:**

$$Arg\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)=Arg(1-i\sqrt{3})-Arg(1+i)$$

$$Arg\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=-\frac{7\pi}{12}$$

اذن **:** $z=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$

***)** $z=(1+i)(\sqrt{3}+i)$

$$|z|=|(1+i)(\sqrt{3}+i)|=|1+i|\times|\sqrt{3}+i|=\sqrt{2}\times 2=2\sqrt{2}$$

$$Arg(1+i)(\sqrt{3}+i)=Arg(1+i)+Arg(\sqrt{3}+i)$$

لتكن θ_7 عمدة لـ $\sqrt{3}+i$ **:** $|\sqrt{3}+i|=2$

$$\begin{cases}\cos\theta_7=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_7=\frac{1}{2}\end{cases}$$ نستنتج $\theta_6=\frac{\pi}{6}$

ومما سبق نجد **:** $Arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$

اذن **:**

$$Arg(1+i)(\sqrt{3}+i)=Arg(1+i)+Arg(\sqrt{3}+i)$$

$$Arg(1+i)(\sqrt{3}+i)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{12}$$

اذن **:** $z=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$

***)** $z=\frac{(\sqrt{3}+i)^9}{(1+i)^{12}}$

$$|z|=\left|\frac{(\sqrt{3}+i)^9}{(1+i)^{12}}\right|=\frac{\left|(\sqrt{3}+i)^9\right|}{\left|(1+i)^{12}\right|}=\frac{|\sqrt{3}+i|^9}{|1+i|^{12}}=\frac{2^9}{(\sqrt{2})^{12}}=\frac{2^9}{\left((\sqrt{2})^2\right)^6}=\frac{2^9}{2^6}=2^3=8$$

$$Arg\left(\frac{(\sqrt{3}+i)^9}{(1+i)^{12}}\right)=Arg(\sqrt{3}+i)^9-Arg(1+i)^{12}$$

$$Arg\left(\frac{(\sqrt{3}+i)^9}{(1+i)^{12}}\right)=9Arg(\sqrt{3}+i)-12Arg(1+i)$$

$$Arg\left(\frac{(\sqrt{3}+i)^9}{(1+i)^{12}}\right)=9\left(\frac{\pi}{6}\right)-12\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\pi}{2}-3\pi=-\frac{3\pi}{2}$$

$$z=8\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right)$$

XI. أ**)**كتابة العدد المركب Z على الشكل الجبري $Z=\dfrac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}$

$$Z=\frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}=\frac{(4+4i)(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}=\frac{4+i4\sqrt{3}+4i-4\sqrt{3}}{1+3}=\frac{4-4\sqrt{3}+i(4+4\sqrt{3})}{4}$$

$$Z=1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})$$

ب**)** كتابة العدد المركب Z على الشكل المثلثي .

$$|z|=\frac{|4+4i|}{|1-i\sqrt{3}|}=\frac{\sqrt{4^2+(4)^2}}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}=\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{4}}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$

$$Arg\left(\frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}\right)=Arg(4+4i)-Arg(1-i\sqrt{3})$$

لتكن θ_6 عمدة لـ $1-i\sqrt{3}$**:** $|1-i\sqrt{3}|=2$

$$\begin{cases}\cos\theta_6=\dfrac{1}{2}\\[2mm] \sin\theta_6=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$ نستنتج $\theta_6=-\dfrac{\pi}{3}$

ومما سبق نجد **:** $Arg(4+4i)=Arg\,4(1+i)=\dfrac{\pi}{4}$

اذن **:**

$$Arg\left(\frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}\right)=Arg(4+4i)-Arg(1-i\sqrt{3})$$

$$Arg\left(\frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}$$

اذن **:** $z=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$

ج) كتابة على الشكل المثلّثي الأعداد: $\frac{1}{Z}$ ، Z^{2009} و $\overline{Z}$.

(*

$$\frac{1}{Z}=\left[\frac{1}{2\sqrt{2}};-\frac{7\pi}{12}\right]$$

$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$$

(*

$$Z^{2009}=\left[\left(2\sqrt{2}\right)^{2009};2009\times\frac{7\pi}{12}\right]$$

$$\frac{1}{Z}=\left(2\sqrt{2}\right)^{2009}\left(\cos\left(\frac{24108\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{24108\pi}{12}\right)\right)$$

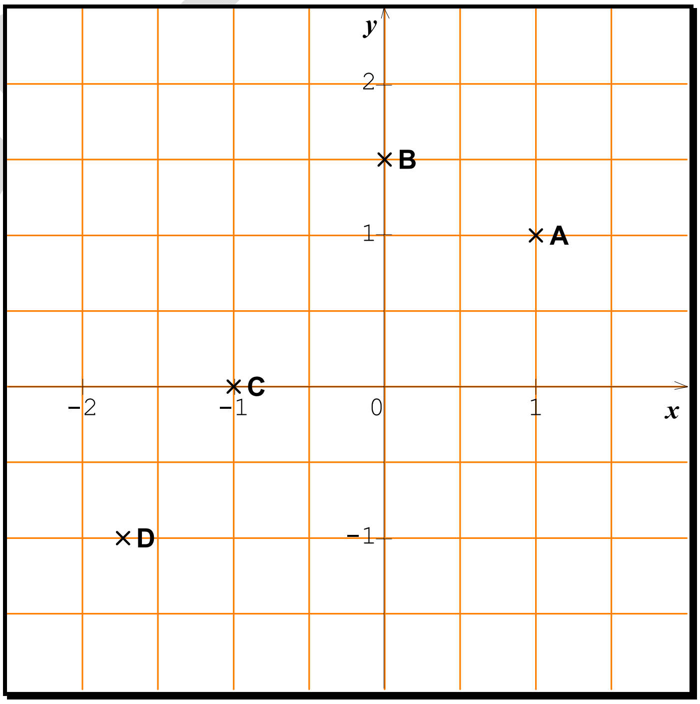
(*

$$\overline{Z}=\left[2\sqrt{2};-\frac{7\pi}{12}\right]$$

$$\overline{Z}=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$$

XII. أ)أنشاء في المعلم $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ النقط A ، B ، C و D صور على الترتيب للأعداد المركبة التالية :

$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $\frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $e^{i\pi}$ و $2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.



2) كتابة على الشكل الجبري كل من الأعداد المركبة التالية : $6e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ؛ $\sqrt{5}e^{i\frac{3\pi}{2}}$ ؛ $\frac{1}{2}e^{i\pi}$ ؛ $2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

(*

$$6e^{i\frac{3\pi}{4}} = 6\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$6e^{i\frac{3\pi}{4}} = 6\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$6e^{i\frac{3\pi}{4}} = 6\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$$

(*

$$\sqrt{5}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$\sqrt{5}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{5}\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\sqrt{5}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{5}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{5}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{10}}{2} + i\frac{\sqrt{10}}{2}$$

(*

$$\frac{1}{2}e^{i\pi} = \frac{1}{2}(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$$

$$\frac{1}{2}e^{i\pi} = \frac{1}{2}(-1 + i\times 0)$$

$$\frac{1}{2}e^{i\pi} = -\frac{1}{2}$$

(*

$$2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{3}\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} + 3i$$

3) كتابة الأعداد المركبة التالية على الشكل الأسّي .

$z_1 = 2-2i$ ؛ $z_2 = 3\sqrt{3} - 3i$ ؛ $z_3 = \frac{5}{4}i$ ؛ $z_4 = -1$.

(* $z_1 = 2-2i$.

$$|z_1| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

لتكن θ_1 عمدة لـ z_1 : $\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = -\dfrac{2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ نستنتج $\theta_1 = -\dfrac{\pi}{4}$

اذن : $z_1 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

*) $z_2 = 3\sqrt{3} - 3i$.

$$|z_2| = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 + (-3)^2} = \sqrt{36} = 6$$

لتكن θ_2 عمدة لـ z_2 : $\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = -\dfrac{3}{6} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ نستنتج $\theta_4 = -\dfrac{\pi}{6}$

اذن : $z_1 = 6e^{-i\frac{\pi}{6}}$

*) $z_3 = \dfrac{5}{4}i$.

$$z_3 = \frac{5}{4}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

*) $z_4 = -1$

$$z_4 = e^{i\pi}$$

4) تعين شكلا أسّيا لكل من الأعداد المركبة التالية .

$z_1 = -e^{i\frac{\pi}{12}}$ ؛ $z_2 = -3e^{i\frac{\pi}{8}}$ ؛ $z_3 = -\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ؛ $z_4 = -\dfrac{1}{2}e^{i\pi}$.

*) $z_1 = -e^{i\frac{\pi}{12}}$

بما أن $-1 = e^{i\pi}$ اذن $z_1 = -1 \times e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{13\pi}{12}}$

*) $z_2 = -3e^{i\frac{\pi}{8}}$

$$z_2 = -3\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

$$z_2 = 3\left(-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

$$z_2 = 3\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{8}\right)\right)$$

$$z_2 = 3\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$$

$$z_2 = 3e^{i\frac{9\pi}{8}}$$

*) $z_3 = -\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

بما أن $-1 = e^{i\pi}$ اذن $z_3 = \sqrt{2}\left(-1 \times e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) = \sqrt{2}\left(e^{i\pi} \times e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$

(* $z_4 = -\frac{1}{2}e^{i\pi}$

بما أن $-1 = e^{i\pi}$ اذن $z_4 = \frac{1}{2}\left(-1 \times e^{-i\pi}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\pi} \times e^{-i\pi}\right) = \frac{1}{2}e^{i0}$

XIII. حل في مجموعة الاعداد المركبة كلا من المعادلات ذات المجهول z التالية:

أ ـ $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$.

حساب المميز : $\Delta = \left(-8\sqrt{3}\right)^2 - 4(64) = -64 = (8i)^2$

$$z_2 = \frac{8\sqrt{3} + 8i}{2} = 4\sqrt{3} + 4i \quad ، \quad z_1 = \frac{8\sqrt{3} - 8i}{2} = 4\sqrt{3} - 4i$$

ب ـ $z^2 - 2\left(1 + \sqrt{2}\right)z + 2\left(\sqrt{2} + 2\right) = 0$.

حساب المميز :

$$\Delta = 4\left(1 + \sqrt{2}\right)^2 - 8\left(\sqrt{2} + 2\right) = 4\left(1 + 2 + 2\sqrt{2}\right) - 8\sqrt{2} - 16 = -4 = (2i)^2$$

$$z_2 = \frac{2\left(1 + \sqrt{2}\right) + 2i}{2} = 1 + \sqrt{2} + i \quad ، \quad z_1 = \frac{2\left(1 + \sqrt{2}\right) - 2i}{2} = 1 + \sqrt{2} - i$$

جـ ـ $z^2 - 2(\cos\theta)z + 1 = 0$ حيث θ عدد حقيقي .

حساب المميز :

$$\Delta = 4(\cos\theta)^2 - 4 = 4\left(\cos^2\theta - 1\right) = 4\left(-\sin^2\theta\right) = (2i\sin\theta)^2$$

$$z_2 = \frac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta + i\sin\theta \quad ، \quad z_1 = \frac{2\cos\theta - 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta - i\sin\theta$$

د ـ $z^2 - 2(\sin\theta)z + 1 = 0$ حيث θ عدد حقيقي .

حساب المميز :

$$\Delta = 4(\sin\theta)^2 - 4 = 4\left(\sin^2\theta - 1\right) = 4\left(-\cos^2\theta\right) = (2i\cos\theta)^2$$

$$z_2 = \frac{2\sin\theta + 2i\cos\theta}{2} = \sin\theta + i\cos\theta \quad ، \quad z_1 = \frac{2\sin\theta - 2i\cos\theta}{2} = \sin\theta - i\cos\theta$$

XIV. **1)** الشكل المثلثي لكل من الأعداد المركبة z_1 ، z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$.

(* $z_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{6} - i\sqrt{2}\right)$

$$|z_1| = \sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

لتكن θ_1 عمدة لـ z_1: $\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \end{cases}$ نستنتج $\theta_1 = -\frac{\pi}{6}$

اذن : $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

*) $z_2 = 1 - i$

$$|z_2| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

لتكن θ_2 عمدة لـ z_2 : $\begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ نستنتج $\theta_1 = -\frac{\pi}{4}$

اذن : $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

*) $\frac{z_1}{z_2}$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

$$Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2) = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

اذن : $z = \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

2) الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1}{z_2}$. $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ و $z_2 = 1 - i$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{6} - i\sqrt{2}\right)}{1 - i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\left(\sqrt{6} - i\sqrt{2}\right)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{6} + i\sqrt{6} - i\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

3) استنتاج أنّ : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ و $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

بالمطابقة الشكل الجبري مع المثلثي للعدد المركب $\frac{z_1}{z_2}$ نجد :

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ و $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

XV. **1)** حل في مجموعة الأعداد المركبة، كلا من المعادلتين : $z^2 - 2z + 5 = 0$ ؛ $z^2 - 2\left(1 + \sqrt{3}\right)z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$.

*) $z^2 - 2z + 5 = 0$

حساب المميز : $\Delta = (-2)^2 - 4(5) = -16 = (4i)^2$

$$z_1 = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i \quad ، \quad z_2 = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i$$

*) $z^2 - 2\left(1 + \sqrt{3}\right)z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$

حساب المميز :

$$\Delta = 4\left(1 + \sqrt{3}\right)^2 - 4\left(5 + 2\sqrt{3}\right) = 4\left(1 + 3 + 2\sqrt{3}\right) - 20 - 8\sqrt{3} = -4 = (2i)^2$$

$$z_2=\frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)+2i}{2}=1+\sqrt{3}+i \quad ، \quad z_1=\frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)-2i}{2}=1+\sqrt{3}-i$$

أ ـ طبيعة المثلث ABC :

نعتبر النقط A ، B ، C و D صور الأعداد المركبة $1+2i$ ، $1+\sqrt{3}+i$ ، $1-2i$ و $1+\sqrt{3}-i$ على الترتيب

$$AB=\left|Z_B-Z_A\right|=\left|1+\sqrt{3}+i-1-2i\right|=\left|\sqrt{3}-i\right|\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(-1\right)^2}=2$$

$$AC=\left|Z_C-Z_A\right|=\left|1-2i-1-2i\right|=\left|-4i\right|=\sqrt{\left(-4\right)^2}=4$$

$$CB=\left|Z_B-Z_C\right|=\left|1+\sqrt{3}+i-1-\sqrt{3}+i\right|=\left|2i\right|\sqrt{\left(2\right)^2}=2$$

بما أن : $AB^2+CB^2=AC^2$ فان المثلث ABC مثلث قائم في B حسب مبرهنة فيتاغورس

ب)كتابة معادلة للدائرة $\mathcal{C}$ المحيطة بالمثلث ABC .

$M(x;y)\in\mathcal{C}$ يعني $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MC}=0$

$\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}1-x\\2-y\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{MC}\begin{pmatrix}1-x\\-2-y\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MC}=0$ يعني : $(1-x)(1-x)+(2-y)(-2-y)=0$ يعني

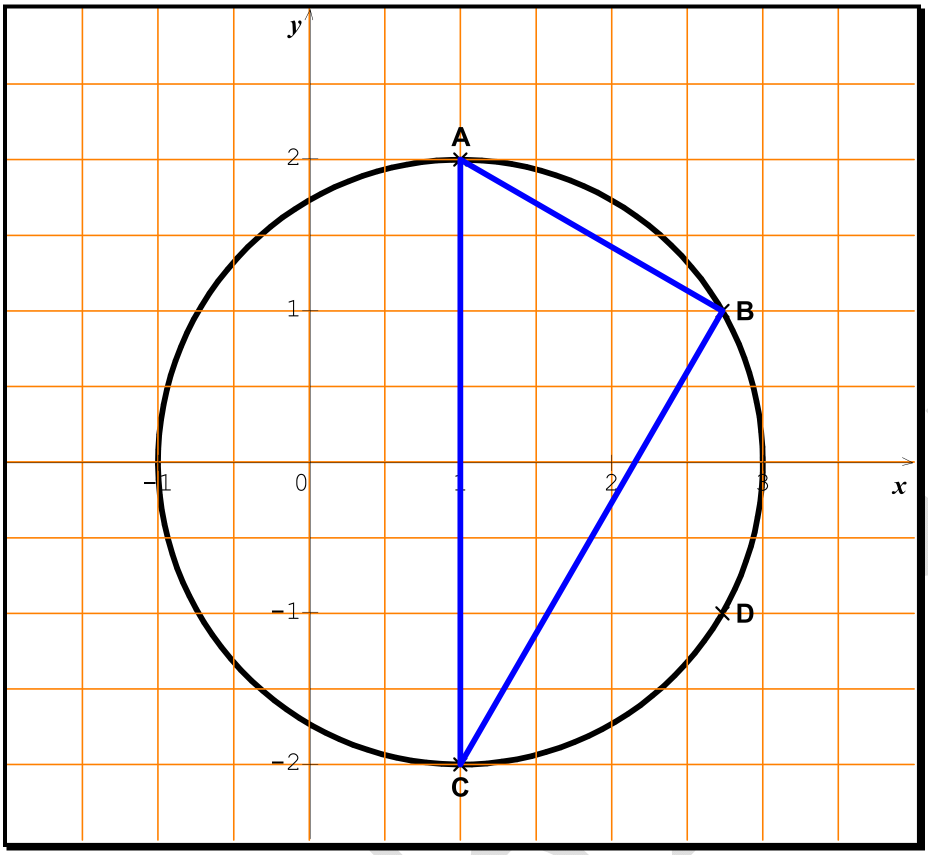
$1-x-x+x^2-4-2y+2y+y^2=0$ يعني $x^2+y^2-2x-3=0$

ج ـ أثبات أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة $\mathcal{C}$.

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^2+\left(-1\right)^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)-3=1+3+2\sqrt{3}+1-2-2\sqrt{3}-3=0$$

اذن النقطة D تنتمي إلى الدائرة $\mathcal{C}$.

د ـ أنشاء $\mathcal{C}$ والنقط A ، B ، C و D في المعلم المعطى .



XVI. **1)** تعطى النقط A ، B و C ، لواحقها على الترتيب : $a=-2+3i$ ؛ $b=-3-i$ و $c=2,08+1,98i$.

$$AB=|b-a|=|-3-i+2-i|=|-1-2i|\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$$

$$AC=|c-a|=|2.08+1.89i+2-3i|=|4.08-1.11i|=\sqrt{(4.08)^2+(-1.11)^2}=\sqrt{17.8785}$$

$$CB=|b-c|=|-3-i-2.08-1.98i|=|-5.08-2.98i|\sqrt{(-5.08)^2+(-2.98)^2}=\sqrt{34.6868}$$

✓ اذن لا قائم ولا متساوي الساقين .

2) لكل عدد مركب $z\neq -2$ نرفق العدد المركب z' حيث: $z'=\frac{z-4i}{z+2}$.

مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $|z'|=1$ هي :

من أجل كل عدد مركب $z\neq -2$: $|z'|=1$ يعني $\left|\frac{z-4i}{z+2}\right|=1$ يعني $\frac{\|z-4i\|}{|z+2|}=1$ يعني

$|z-4i|=|z+2|$

يعني $AM=BM$ حيث : $A(4i)$ و $B(-2)$

✓ اذن : مجموعة النقط هي مستقيم باستثناء نقطة $B(-2)$.

3) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث z' حقيقي هي :

نكتب على الشكل الجبري

بوضع : $z=x+iy$

من أجل كل عدد مركب $z \neq -2$:

$$Z' = \frac{z-4i}{z+2} = \frac{(x+iy-4i)}{x+iy+2}$$

$$Z' = \frac{(x+iy-4i)(x+2-iy)}{(x+2+iy)(x+2-iy)}$$

$$Z' = \frac{x^2+2x-ixy+ixy+i2y+y^2-4ix-8i-4y}{(x+2)^2+y^2}$$

$$Z' = \frac{x^2+y^2+2x-4y}{(x+2)^2+y^2} + i\frac{-4x+2y-8}{(x+2)^2+y^2}$$

Z' حقيقي يعني $\frac{-4x+2y-8}{(x+2)^2+y^2} = 0$ يعني $-4x+2y-8=0$ حيث $x \neq -2$ و $y \neq 0$.

✓ اذن : مجموعة النقط هي مستقيم باستثناء نقطة $B(-2)$.

XVII. في كل حالة من الحالات التالية تمثل مجموعة النقط ذات اللاحقة العدد المركب z الذي يحقق المساواة المقترحة

أ ـ $Arg(iz) = \frac{3\pi}{2}$.

$Arg(iz) = \frac{3\pi}{2}$ يعني أن iz تخيلي صرف و جزؤه التخيلي سالب أو بمعنى أخر $\mathrm{Re}(iz)=0$ و $\mathrm{Im}(iz) \leq 0$. بوضع $z=x+iy$ نجد : $iz = i(x+iy) = -y+ix$

اذن : $\mathrm{Re}(iz)=0$ و $\mathrm{Im}(iz) \leq 0$ يعني $-y=0$ و $x \leq 0$ يعني $y=0$ و $x \leq 0$.

وبالتالي مجموعة النقط هي نصف مستقيم $[Ox')$

ب ـ $Arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \frac{\pi}{4}$.

نعلم ان $\frac{\pi}{4}$ هي عمدة للعدد المركب $(1+z)$ وبالتالي نجد :

$Arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \frac{\pi}{4}$ يعني

$Argz - Arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ (باستخدام الخواص) يعني $Argz - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ (علما أن $Arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$) يعني $Argz = \frac{\pi}{2}$ يعني $\mathrm{Re}(z)=0$ و $\mathrm{Im}(z) \geq 0$

بوضع $z=x+iy$ اذن : $\mathrm{Re}(z)=0$ و $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ يعني $x=0$ و $y \geq 0$

وبالتالي مجموعة النقط هي نصف مستقيم $[Oy)$

جـ ـ $Arg(z) = Arg(\bar{z})$

$Argz = Arg(\bar{z})$ يعني $Argz = -Argz$ (علما أن $Arg\bar{z} = -Argz$) يعني $2Argz = 0$

يعني $Argz = 0$ يعني z حقيقي موجب يعني $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ و

$\operatorname{Im}(z) = 0$ يعني $x \geq 0$ و

$y = 0$ وبالتالي مجموعة النقط هي نصف مستقيم $[Ox)$

ملاحظة : هناك طرق أخرى لحل هذا التمرين

XVIII. **1)** الشكل الجبري للعدد المركب z^2 هو : $2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$

التبرير :

$$z^2 = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$$

$$z^2 = 2+\sqrt{2} - 2 + \sqrt{2} - 2i\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$z^2 = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

$$z^2 = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{4-2}$$

$$z^2 = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$$

2) العدد المركّب z^2 يكتب على الشكل الأسّي : $4e^{-i\frac{\pi}{4}}$

التبرير: $\left|z^2\right| = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(-2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{16} = 4$

لتكن θ_1 عمدة لـ z^2: $\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = -\dfrac{-2\sqrt{2}}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ نستنتج $\theta_1 = -\dfrac{\pi}{4}$

اذن : $z^2 = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}$

3) العدد المركّب z يكتب على الشكل الأسّي : $2e^{i\frac{7\pi}{8}}$

التبرير : $\left|z^2\right| = 4$ يعني $|z|^2 = 2^2$ يعني $|z| = 2$

$Arg\left(z^2\right) = 2Arg(z)$ وبالتالي $Arg(z) = \dfrac{1}{2}Arg\left(z^2\right)$

اذن : $Arg(z) = \dfrac{1}{2}Arg\left(z^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\pi}{8}$

وعليه : $z = 2e^{-i\frac{\pi}{8}} = 2e^{i(\pi -)}$

XIX. **1)** كتابة c على الشكل الأسّي و d على الشكل الجبري .

$a = 1$ ، $b = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، $c = \dfrac{3+i\sqrt{3}}{2}$

و $d = \dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

*) $c = \dfrac{3+i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$|c| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

لتكن θ عمدة لـ c : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ نستنتج $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

اذن : $c = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

*)

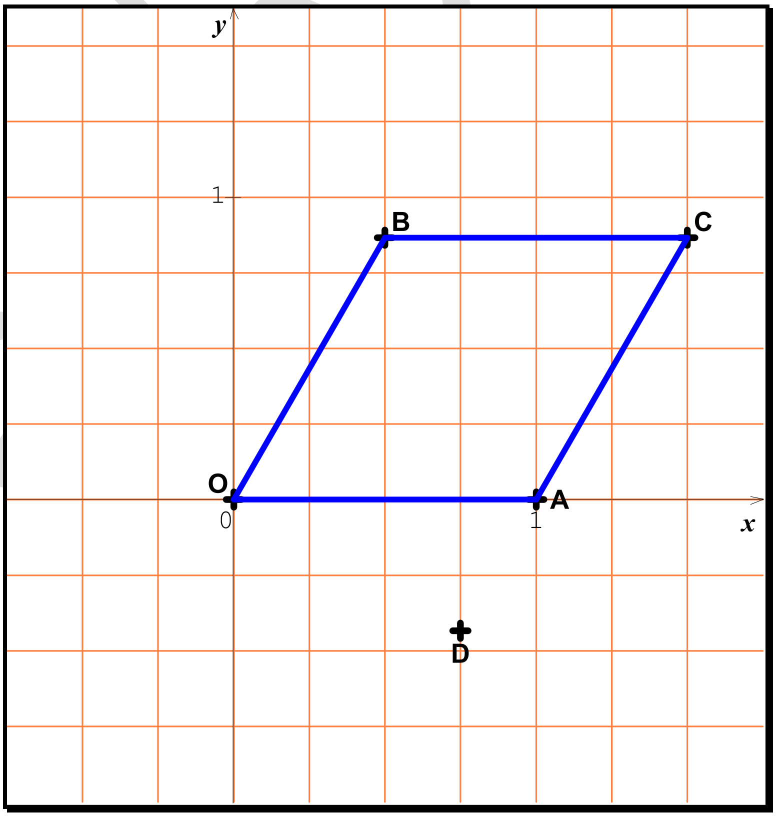
$$d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$$

$$d = \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

2) نمثل النقط A , B , C و D في المعلم ثم برهن أن الرباعي $OACB$ هو معين .



نحسب الأطوال :

*) $OA = |a| = 1$

*) $OB = |b| = 1$

*) $AC=|c-a|=\left|\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right|=\left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1$

*) $BC=|c-b|=\left|\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\left|\frac{2}{2}\right|=1$

اذن الرباعي $OACB$ هو معين .

XX. كتابة $z_1^2-z_2^2$ على شكله المثلثي .

$$z_1^2-z_2^2=(2+3i)^2-(2+i)^2=4-9+12i-4+1-4i=-8+8i=8(-1+i)$$

$$z_1^2-z_2^2=8\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right)=8\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

2)كتابة العدد المركب $\left(\frac{z_1^2-z_2^2}{8\sqrt{2}}\right)^{2008}$ على شكله الجبري.

$$\left(\frac{z_1^2-z_2^2}{8\sqrt{2}}\right)^{2008}=\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)^{2008}=\cos\frac{2008\times3\pi}{4}+i\sin\frac{2008\times3\pi}{4}$$

$$\left(\frac{z_1^2-z_2^2}{8\sqrt{2}}\right)^{2008}=\cos1506\pi+i\sin1506\pi=\cos2\times753\pi+i\sin2\times753\pi=1$$

(باستعمال دستور موافر)

XXII. كتابة z على الشكل الجبري ثم استنتاج الطويلة وعمدة له .

$$z=\frac{(1-3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{2+i-6i+3}{4+1}=1-i$$

$$Argz=Arg(1-i)=-\frac{\pi}{4} \text{ و } |z|=|1-i|=\sqrt{2}$$

2) تعين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها z^n عددا حقيقيا .

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^n$$

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-n\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)\right)$$

يكون z^n عددا حقيقيا اذا وفقط اكان $\text{Im}(z)=0$ يعني $\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)=0$ يعني

$-\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)=0$ يعني $\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)=0$ يعني $\left(\frac{n\pi}{4}\right)=k\pi$ (مع k عدد صحيح نسبي)يعني

$n=4k$ (مع k عدد طبيعي)