الاختبار الثاني في مادة الرياضيات

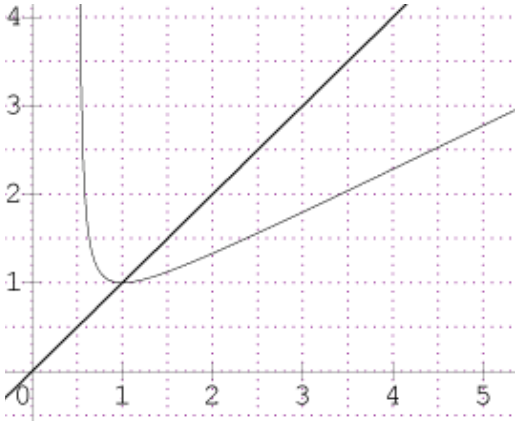
المستوى: ثالثة علوم تجريبية **المدة: 3 ساعات**

التمرين الأول: 5 نقاط

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n - 1}$

f دالة معرفة على $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ بـ: $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$, (C_f) تمثيلها البياني و (Δ) مستقيم معادلته $y = x$

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (أنظر الشكل)



1- أ- أعِد رسم الشكل المقابل على الورقة ثم مثّل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 مع توضيح الخطوط.

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \geq 1$

3- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة ; احسب $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

4- (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \ln\left(1 - \frac{1}{u_n}\right)$

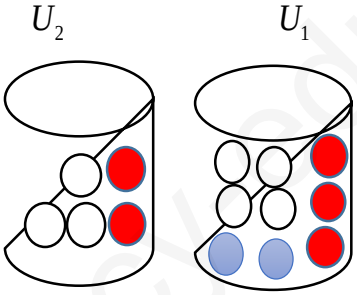
أ- بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية وأساسها $q = 2$ ثم احسب v_0 .

ب- اكتب v_n بدلالة n.

ج- اكتب u_n بدلالة v_n, ثم استنتج أن: $u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}}$

5- احسب S_n و S_n': $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ $\quad S_n' = \left(1 - \frac{1}{u_0}\right) \times \left(1 - \frac{1}{u_1}\right) \times ... \times \left(1 - \frac{1}{u_n}\right)$

التمرين الثاني: 4 نقاط



نعتبر صندوقين U_1 و U_2. الصندوق U_1 يحتوي على 3 كرات حمراء و 4 كرات بيضاء و 2 زرقاء.

الصندوق U_2 يحتوي: كرتين حمراوين و 3 كرات بيضاء; لا نفرق بين الكرات باللمس.

$I-$ نسحب كريتين في آن واحد من الصندوق U_1.

- احسب احتمال سحب: A: "كرتان من نفس اللون". B: "كرتين مختلفتا اللون".

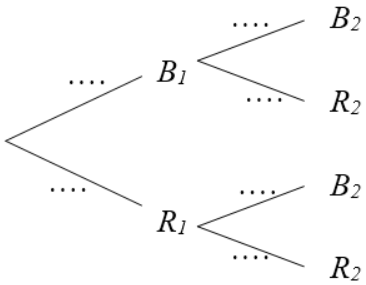
$II-$ نعتبر سحب 3 كريات بالكيفية التالية: كرتان في آن واحد من من الصندوق U_1 وكرة واحدة من الصندوق U_2

- احسب احتمال الأحداث التالية:

C: "الكرات الثالثة المسحوبة من نفس اللون". D: "سحب كرتين حمراوين على الأقل"

E: "الكرات المسحوبة تعطينا ثلاثي الألوان"

$III-$ نضيف للصندوق U_2 n كرية بيضاء حيث $(n \geq 1)$ ثم نسحب كريتين على التوالي دون إرجاع من نفس الصندوق U_2. نعتبر P_n "سحب كرتين من نفس اللون"



- اكمل شجرة الإحتمالات, ثم بيّن أن: $P_n = \frac{n^2 + 5n + 8}{n+5 \quad n+4}$

3as.ency-education.com

التمرين الثالث: 4 نقاط

$I-$ $P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث: $P(z)=z^3-5z^2+12z-8$

أ- احسب $P(1)$ ثم عين العددين a و b الحقيقين حتى يكون $P(z)=(z-1)(z^2+az+b)$

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

$II-$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ نعتبر النقط A, B, C و z_E لواحقها على الترتيب

$$z_A=1 \quad ; z_B=2+2i \quad ; z_C=\overline{z_B} \quad ; z_E=4\times\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i}$$

1- اكتب كلا من z_B و z_C على الشكل الأسي, ثم بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\left(\frac{z_C}{2\sqrt{2}}\right)^{8n}+\left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{8n}=2$

2- اكتب العدد المركب z_E على الشكل الجبري ثم الشكل المثلثي.

3- اكتب على الشكل الأسي العدد المركب $\frac{z_B}{z_C}$ ثم استنتج طبيعة المثلث OBC.

4- عين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع، ثم حدد طبيعته.

5- عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A,|z_A|);(z_B,|z_B|);(z_C,|z_C|)\}$

6- عين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $\left|\frac{z-2-2i}{z-1}\right|=1$.

التمرين الرابع: 7 نقاط

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\frac{x+1}{1-e^{-x}}$

(C_f) المنحنى البياني للدالة في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$; $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)$.

ب- بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x)=\frac{e^x(x+1)}{e^x-1}$, ثم احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2- بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$; ثم استنتج مستقيمات مقاربة اخرى إن وجدت.

3- أ- بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x)=\frac{e^x g(x)}{(e^x-1)^2}$ حيث g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ يطلب تعيينها.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة g, ثم شكل جدول تغيراتها.

جـ- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $-1,9\prec\alpha\prec-1,8$ و $1,1\prec\beta\prec1,2$.

د- استنتج إشارة $g(x)$.

و- استنتج إشارة $f'(x)$ واتجاه تغير الدالة f, ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

4- ادرس الوضع النسبي للمستقيم (Δ) مع المنحنى (C_f)

5- بيّن أن: $f(\alpha)=\alpha+2$ ثم استنتج حصرا لكل من $f(\alpha)$ و $f(\beta)$.

6- أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

7- بيّن أن المستقيمات $(\Delta_m): y=mx+1$ تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيينها.

- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=mx+1$.

انتهى بالتوفيق للجميع

مع تحيات

أساتذة المادة

3as.ency-education.com

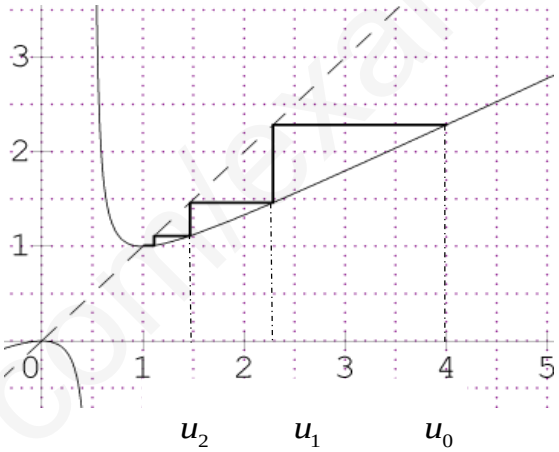
الحل النموذجي للإختبار الثاني ثالثة علوم

التمرين الأول: 5 نقاط

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=4$ و $u_{n+1}=\dfrac{u_n^2}{2u_n-1}$

f دالة معرفة على $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-1}$, (C_f) تمثيلها البياني و (Δ) مستقيم معادلته $y=x$

1- تمثيل على محور الحدود u_0 , u_1 , u_2



ب- بما أن $u_0 \succ u_1 \succ u_2$ فإن المتتالية متناقصة تماما ومتقاربة نحو 1.

2- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 1$

الدالة المرفقة للمتتالية (u_n) هي: $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-1}$ ومنه المشتقة $f'(x)=\dfrac{2x^2-2x}{(2x-1)^2}$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $[1;+\infty[$

- التحقق من أجل $n=0$ و $u_0=4$ ومنه $u_0 \geq 1$ ومنه الخاصية محققة.
- نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: أي $u_n \geq 1$
- نبرهن صحة الخاصية من أجل الرتبة $n+1$ أي $u_{n+1} \geq 1$

لدينا من الفرضية $u_n \geq 1$ ومنه $f(u_n) \geq f(1)$ ومنه $u_{n+1} \geq 1$

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه $n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq 1$

3- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n):

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^2}{2u_n-1}-u_n=\frac{-u_n^2+u_n}{2u_n-1}=\frac{u_n(-u_n+1)}{2u_n-1}$$

لدينا $u_n \geq 1$ ومنه $-u_n+1 \leq 0$ و $2u_n-1 \geq 1$ ومنه $u_{n+1}-u \prec 0$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل فإنها متقاربة.

حساب $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ ومنه

$\dfrac{l^2}{2l-1}=l$ ومنه $-l^2+l=0$ ومنه $l=0$ أو $l=1$ بما أن $u_n \geq 1$

فإن $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$

4- (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=\ln\left(1-\dfrac{1}{u_n}\right)$

أ- بيان أن المتتالية (v_n) هندسية وأساسها $q=2$

$$v_{n+1}=\ln\left(1-\frac{1}{u_{n+1}}\right)=\ln\left(1-\frac{1}{\frac{u_n^2}{2u_n-1}}\right)=\ln\left(1-\frac{2u_n-1}{u_n^2}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{u_n^2-2u_n+1}{u_n^2}\right)=\ln\left[\left(\frac{u_n-1}{u_n}\right)^2\right]=2\ln(v_n)$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية وأساسها $q=2$ و $v_0=\ln\left(\dfrac{3}{4}\right)$

ب- كتابة v_n بدلالة n: $v_n=\ln\left(\dfrac{3}{4}\right)\times 2^n$

ج- كتاب u_n بدلالة v_n , $v_n=\ln\left(1-\dfrac{1}{u_n}\right)$ ومنه $e^{v_n}=1-\dfrac{1}{u_n}$ ومنه

$$u_n=\frac{1}{1-e^{v_n}}$$

$$u_n=\frac{1}{1-e^{v_n}}=\frac{1}{1-e^{2^n\times\ln(3/4)}}=\frac{1}{1-e^{\ln(3/4)^{2^n}}}=\frac{1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}}$$

5- حساب S_n و S_n' : $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$

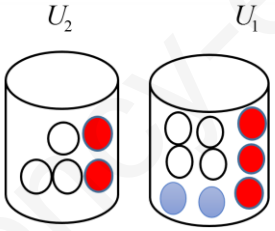
$$S_n=\ln\left(\frac{3}{4}\right)\left[2^{n+1}-1\right]$$

$$S_n'=\left(1-\frac{1}{u_0}\right)\times\left(1-\frac{1}{u_1}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{u_n}\right)$$

$$=e^{v_0}\times e^{v_1}\times\ldots\times e^{v_n}=e^{v_0+v_1+\ldots+v_n}$$

$$=e^{S_n}=\left(\frac{3}{4}\right)^{2^{n+1}-1}$$

التمرين الثاني: 4ز



I. نسحب كرتين في آن واحد من الصندوق U_1

$$P(A)=\frac{C_4^2+C_3^2+C_2^2}{C_9^2}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

$$P(B)=\frac{C_4^1C_2^1+C_4^1C_3^1+C_3^1C_2^1}{C_9^2}=\frac{26}{36}=\frac{13}{18}$$

II. سحب كرتين في آن واحد من U_1 وكرية من U_2

- "الكرات الثالثة المسحوبة من نفس اللون" $P(C)=\dfrac{C_4^2}{C_9^2}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{C_3^2}{C_9^2}\times\dfrac{2}{5}$

3as.ency-education.com

- "سحب كرتين حمراء على الاقل"

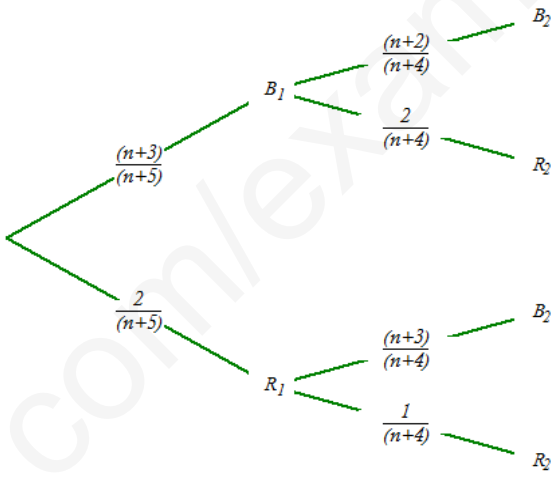
$$P(D)=\frac{C_3^2}{36}\times\frac{3}{5}+\frac{C_3^1C_6^1}{36}\times\frac{2}{5}+\frac{C_3^2}{36}\times\frac{2}{5}=\frac{51}{180}$$

"الكرات المسحوبة تعطينا ثلاثي الألوان"

$$P(E)=\frac{C_2^1C_3^1}{36}\times\frac{3}{5}+\frac{C_2^1C_4^1}{36}\times\frac{2}{5}=\frac{34}{180}$$

III – نضيف للصندوق U_2 n كرية بيضاء حيث $(1\le n)$ ثم نسحب كريتين على التوالي

دون إرجاع من نفس الصندوق U_2. نعتبر P_n "سحب كرتين من نفس اللون"



ومنه $P_n=\frac{n+3}{n+5}\times\frac{n+2}{n+4}+\frac{2}{n+5}\times\frac{1}{n+4}=\frac{n^2+5n+8}{(n+5)(n+4)}$

التمرين الثالث:4ن

I – $P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث:

$$P(z)=z^3-5z^2+12z-8$$

أ- حساب $P(1)$ ثم تعيين العددين a و b الحقيقين حتى يكون

$$P(z)=(z-1)(z^2+az+b)$$

$P(1)=0$

	1	−5	12	−8
1				
	1	−4	8	0

ومنه $P(z)=(z-1)(z^2-4z+8)$

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$. ومنه

$z=1$ أو $z^2-4z+8=0$ و منه $\sqrt{\Delta}=i4$

$z_1=2+2i$; $z_2=\overline{z_1}$

1- كتاب كلا من z_B و z_C على الشكل الأسي لدينا $z_B=2+2i$

ومنه $|z_B|=2\sqrt{2}$ و $\arg(z_B)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ومنه $z_B=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

لدينا $z_C=\overline{z_B}=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

- اثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\left(\frac{z_C}{2\sqrt{2}}\right)^{8n}+\left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{8n}=2$

$$\left(\frac{z_C}{2\sqrt{2}}\right)^{8n}+\left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{8n}=\left(\frac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}}\right)^{8n}+\left(\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}}\right)^{8n}$$

$$=\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{8n}+\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{8n}=\left(e^{-i\frac{8n\pi}{4}}\right)+\left(e^{i\frac{8n\pi}{4}}\right)$$

$$=\left(e^{-i2n\pi}\right)+\left(e^{i2n\pi}\right)=1+1=2$$

2-كتابة العدد المركب z_E على الشكل الجبري:

$$z_E=4\times\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i}=4\frac{(1-i)(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}=1-\sqrt{3}+i(-1-\sqrt{3})$$

ومنه $|z_E|=4\frac{|1-i|}{|1+\sqrt{3}i|}=2\sqrt{2}$

$$\arg(z_E)=\arg\left(\frac{4-4i}{1+\sqrt{3}i}\right)=\arg(4-4i)-\arg(1+\sqrt{3}i)$$

$$=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}=-\frac{7\pi}{12}$$

ومنه الشكل المثلثي $z_E=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-7\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{-7\pi}{12}\right)\right)$

3- كتابة على الشكل الأسي العدد $\frac{z_B}{z_C}$ ثم استنتج طبيعة المثلث OBC.

$\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{2}$ و $\frac{OB}{OC}=1$ ومنه $\frac{z_B}{z_C}=\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right]}=e^{i\frac{\pi}{2}}$

ومنه المثلث OBC قائم في O ومتساوي ساقين.

4- تعيين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع

يكافئ: $z_{\overline{AB}}=z_{\overline{CD}}$ ومنه $z_B-z_A=z_D-z_C$ ومنه

$z_D=3$ ومنه $z_D=2-i2-1+2+2i=3$

طبيعة المتوازي الاضلاع: $\frac{z_B-z_C}{z_D-z_A}=\frac{2+2i-2+2i}{2}=2i$

ومنه $\frac{CB}{AD}=2$ و $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}$ ومنه الرباعي $ABDC$ معين.

5-تعيين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A,|z_A|);(z_B,|z_B|);(z_C,|z_C|)\}$

يكافئ G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;2\sqrt{2}),(C;2\sqrt{2})\}$

ومنه

$$z_G=\frac{z_A+2\sqrt{2}z_B+2\sqrt{2}z_C}{1+4\sqrt{2}}=\frac{1+4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i+4\sqrt{2}-4\sqrt{2}i}{1+4\sqrt{2}}$$

$$z_G=\frac{1+8\sqrt{2}}{1+4\sqrt{2}}$$

3as.ency-education.com

6- تعيين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $\left|\frac{z-2-2i}{z-1}\right|=1$ ومنه $|z-2-2i|=|z-1|$ تكافئ

$MA=MB$ يكافئ $|z-z_B|=|z-z_A|$

ومنه مجموعة النقط M هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$.

التمرين الرابع: 7ن

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\frac{x+1}{1-e^{-x}}$

C_f المنحنى البياني للدالة في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- أ- حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{1-e^{-x}}=+\infty$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{x+1}{1-e^{-x}}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x+1}{1-e^{-x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

ب- بيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x)=\frac{e^x(x+1)}{e^x-1}$

$$f(x)=\frac{x+1}{1-e^{-x}}=\frac{e^x(x+1)}{e^x(1-e^{-x})}=\frac{e^x(x+1)}{e^x-1}$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x(x+1)}{e^x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x+e^x}{e^x-1}=0$ $\left(\lim_{x\to-\infty} xe^x=0\right)$

2- بيان أن $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x+e^x}{e^x-1}-x-1$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x+e^x-xe^x-e^x+x+1}{e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{e^x-1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}=0$$

ومنه $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

المستقيمات المقاربة $y=0;\ x=0$

3- أ- بيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x)=\frac{e^x g(x)}{(e^x-1)^2}$

$$f'(x)=\frac{\left(e^x(x+1)+e^x\right)(e^x-1)-e^x\left(e^x(x+1)\right)}{(e^x-1)^2}$$

$$=\frac{xe^{2x}+2e^{2x}-xe^x-2e^x-xe^{2x}-e^{2x}}{(e^x-1)^2}$$

$$=\frac{e^x(e^x-x-2)}{(e^x-1)^2}=\frac{e^x g(x)}{(e^x-1)^2}$$

ومنه $g(x)=e^x-x-2$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة g

حساب المشتقة: لدينا الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

$g'(x)=e^x-1$

ومنه الدالة g متناقصة تماما على $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على $[0;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

جـ- بيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $-1,9\prec\alpha\prec-1,8$ و $1,1\prec\beta\prec1,2$.

الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على $[-1,9;-1,8]$ و $[1,1;1,2]$

$g(-1,8)=-0.03;\ g(-1,9)=0.05$ ومنه $g(-1,8)\times g(-1,9)\prec0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا $-1,9\prec\alpha\prec-1,8$

$g(1,1)=-0.1;\ g(1,2)=0.12$ ومنه $g(1,1)\times g(1,2)\prec0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا $1,1\prec\beta\prec1,2$

د- استنتج إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

و- استنتاج إشارة $f'(x)$ واتجاه تغير الدالة f,

لدينا $f'(x)=\frac{e^x g(x)}{(e^x-1)^2}$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

الدالة g متزايدة تماما على $]-\infty;\alpha]$ و $[\beta;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $[\alpha;0]$ و $[0;\beta]$

جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	0 ↗		↘ $-\infty$	$+\infty$ ↗	$+\infty$

4- دراسة الوضع النسبي للمستقيم Δ مع المنحنى C_f.

$f(x)-(x+1)=\frac{x+1}{e^x-1}$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		
e^x-1	$-$		$-$		$+$		
$f(x)-y$	$+$		$-$		$+$		
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)		

ency-education.com

5- بيان أن $f(\alpha)=\alpha+2$

لدينا $g(\alpha)=e^{\alpha}-\alpha-2$ و $g(\alpha)=0$ ومنه $e^{\alpha}=\alpha+2$

$$f(\alpha)=\frac{e^{\alpha}(\alpha+1)}{e^{\alpha}-1}=\frac{\alpha+2(\alpha+1)}{\alpha+1}=\alpha+2$$

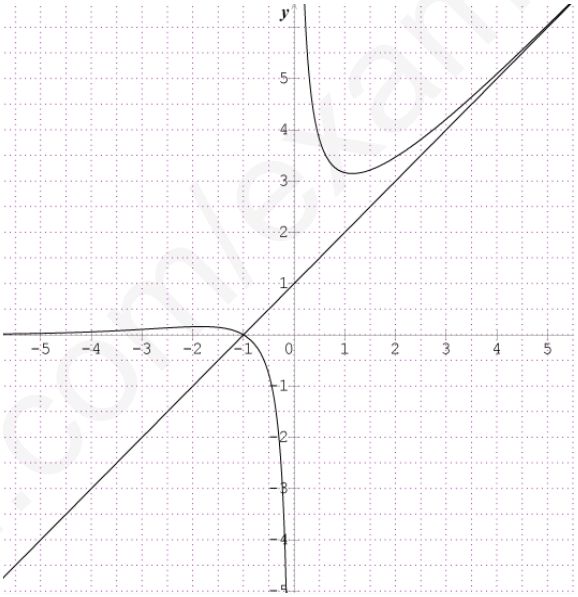
استنتاج حصر $f(\alpha)$ لدينا $-1,8\prec\alpha\prec-1,9$ ومنه $0.1\prec\alpha+2\prec0.2$

ومنه $0.1\prec f(\alpha)\prec0.2$

لدينا $1,1\prec\beta\prec1,2$ ومنه $3,2\prec\beta+2\prec3,1$ أي

$3,1\prec f(\beta)\prec3,2$

6- انشاء المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)



7- اثبات أن المستقيمات (Δ_m) تشمل نقطة ثابتة

$y=mx+1$ يكافئ $mx+1-y=0$ ومنه $x=0$ و $1-y=0$

ومنه $x=0$ و $y=1$ ومنه النقطة الثابتة هي $(0;1)$

المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة

$f(x)=mx+1$

حلول المعادلة هي نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات ذات معامل التوجيه m

$m\in]-\infty;0]$ المعادلة لا تقبل حلول

$m\in]0;1[$ المعادلة تقبل حل وحيد.

$m\in]1;+\infty[$ المعادلة تقبل حلين.

انتهى بالتوفيق والتميز

في بكالوريا 2020

مع تحيات الأستاذ:

قشار صالح

واجه فإنك أهل لها

ency-education.com/bxams

﴿إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات﴾

ثالثة
علوم تجريبية : $\sum_{i=1}^{4} i$

يوم : 2020 – 03 – 01

10800 ثانية

التمرين 01: (4ن)

نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بحدها الأول $U_1 = \sqrt{e}$ و من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1. أحسب الحدود U_2 ، U_3 و U_4 ، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) .
2. أ) بين بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $U_n \leq n + 3$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{3}(n + 3 - U_n)$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (U_n) .

3. (V_n) المتتالية العددية المعرفة على N^* بـ : $V_n = U_n - n$.

• بين أن (V_n) متتالية هندسية ، ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $U_n = n + (\sqrt{e} - 1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

4. نضع من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$:

$$S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^1 V_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 V_2 + ... + \left(\frac{2}{3}\right)^n V_n$$

$$S'_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$$

$$T_n = \frac{S'_n}{n^2}$$

• احسب المجموعين S_n و S'_n ، ثم عين $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$.

التمرين 02: (4.5ن)

نعلم أن فصائل الدم عند الإنسان أربعة و هي : O ، A ، B و AB .

تتوزع مجموعة من 10 أشخاص حسب فصيلتهم الدموية كما يلي : أربعة أشخاص من فصلة O و ثلاثة من فصيلة A و شخصان من فصيلة B و شخص واحد من فصيلة AB . نختار عشوائيا و في آن واحد شخصان من هذه المجموعة .

1. احسب إحتمال كل من الأحداث الآتية : C : " الشخصان المختاران لهما نفس الفصيلة الدموية " .

D : " الشخصان المختاران لهما فصيلتين دمويتن مختلفتين "

E : " فصيلة أحد الشخصين فقط هي A "

F : " فصيلة الشخصان المختاران هي A أو O "

2. نرفق الفصيلة O بالعدد 4 الذي يمثل عدد الفصائل التي يمكن أن تتلقى من الفصيلة O و هكذا نرفق الفصيلة A بالعدد 2 و الفصيلة B بالعدد 2 و الفصيلة AB بالعدد 1 .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل اختيار بمجموع الرقمين المرفقين بفصيلتيهما .

أ) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب انحرافه المعياري.

ب) احسب احتمال الحدثين $"X^2 - 9X + 18 = 0"$ و $"X^2 - 9X + 18 \leq 0"$.

ج) احسب احتمال الحدث $"X = 4"$ إذا علمت أن أحد الشخصين المختارين هو A فقط .

ency-education.com/exams

التمرين 03: (4.5ن)

I/ من أجل كل عدد مركب z نعتبر كثير الحدود $P(z)$ حيث : $P(z)=z^3-2(\sqrt{3}+i)z^2+4(1+i\sqrt{3})z-8i$.

1. أ) بين أن $P(z)$ يقبل جذرا تخيليا صرفا z_0 يطلب تعيينه .

ب) حلل $P(z)$ و حل المعادلة : $P(z)=0$ في C .

2. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A=\sqrt{3}-i$ ، $z_B=\sqrt{3}+i$ و $z_C=2i$.

أ) بين أن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها .

ب) أنشىء النقط A ، B و C .

II/ من أجل كل z من C^* نضع : $Q(z)=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{z}$.

- حل في C كلا من المعادلات التالية : $Q(z)=\dfrac{2}{z+1}$ و $Q(z)=z$ ، $Q(z)=\dfrac{z-4cos\theta}{-1+i\sqrt{3}}$ حيث $\theta\in R.$.

III/ نعتبر العدد المركب z حيث : $z=x+iy$ و M صورته و ليكن العدد L حيث $L=\dfrac{z-z_A}{z-z_C}$.

1. أكتب العدد L على الشكل الجبري .

2. عين طبيعة (Γ) مجموعة النقط M بحيث : L حقيقي .

التمرين 04: (7ن)

I/ g دالة معرفة على $[0;+\infty[$ حيث : $g(x)=\dfrac{2x^2-(x^2+1)ln(x^2+1)}{x^2+1}$.

1. أدرس تغيرات الدالة g و شكل جدول تغيراتها .

2. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين 2 و 1,9 .

3. إستنتج إشارة $g(x)$ على $[0;+\infty[$.

II/ f دالة معرفة على R بـ : $f(0)=0$ و من أجل كل $x\neq 0$: $f(x)=\dfrac{ln(x^2+1)}{x}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسو إلى معلم متعامد ; متجانس (وحدة الطول $2cm$).

1. بين أن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ ، ثم فسر النتيجة هنسيا .

2. أ) بين أن الدالة f فردية .

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

3. أ) بين أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$ فإن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

ب) إستنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

ج) شكل جدول تغيرات الدالة f على R .

4. بين أن : $f\alpha)=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}$ ثم اوجد حص لـ $f(\alpha)$.

5. ارسم (T) و (C_f) حيث (T) مماس لـ (C_f) عند المبدأ.

ency-education.com/exams

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية الأغواط ثانوية غزاوي بلقاسم بآفلو إمتحان الثلاثي الثاني إختبار في مادة الرياضيات	السنة الدراسية : 2019-2020 المستوى : الثالثة علوم تجريبية التاريخ : 02 مارس 2020 المدة : 3 ساعات

التمرين الأول : 04 نقاط

يحتوي صندوق على ثلاث كرات بيضاء و كرتان حمراء . لا يمكن التمييز بينهم . نسحب عشوائيا كرتان في آن واحد .

1) نعتبر الحادثة A الحصول على كرتان من نفس اللون . و الحادثة B الحصول على كرتان حمراء على الأكثر .

أ- أحسب كلا من $P(A)$ و $P(B)$.

ب- تحقق أن : $P(A \cap B)=\frac{1}{10}$ ثم إستنتج $P_B(A)$. هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟ علل ذلك .

2) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة إذا كانت الكرتان من نفس اللون يربح اللاعب نقطتان و تنتهي اللعبة . و إذا كانت مختلفتان في اللون يخسر نقطة واحدة و تتاح له فرصة ثانية بإرجاع الكرتان إلى الصندوق وإعادة عملية السحب بنفس الكيفية إلى غاية السحب الثالث (فرصة ثالثة وأخيرة) و تنتهي اللعبة .

أ- أثبت ان قيم المتغير العشوائي X هي $w=\{0;1;2;-3\}$

ب- تحقق أن : $P(X=0)=\frac{144}{1000}$ و $P(X=1)=\frac{24}{100}$ ثم أتمم تعريف قانون الإحتمال للمتغير X .

ت- بين أن : $P\left[ln(2X+6)<\ln(X+8)\right]=0,384$.

التمرين الثاني : 05 نقاط

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z حيث : $\left(i\,z+2\sqrt{3}\right)\left(z^2-6z+12\right)=0$

2) نعتبر في المستوي المركب $\left(O;\vec{U};\vec{V}\right)$ النقط A , B و C ذات اللواحق على الترتيب :

$z_A=3+\sqrt{3}\,i$, $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=2\sqrt{3}\,i$ و $z_D=6$.

أ- أكتب كل من الأعداد المركبة z_A , z_B و z_C على الشكل الأسي .

ب- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=\frac{z_C}{z_A}$. إستنتج $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1441}$.

3) نعتبر التحويل النقطي f الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=2z-2\sqrt{3}\,i$.

أ- عين طبيعة التحويل f محددا عناصره المميزة .

ب- تحقق أن صورة النقطة A بالتحويل f هي النقطة D ثم بين أن الرباعي $OADB$ هو معين .

4) عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق : $Arg\left(\overline{z}-z_B\right)=\frac{\pi}{2}$.

3as.ency-education.com

التمرين الثالث : 04 نقاط

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = \frac{5}{3}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ; $u_{n+1} = 2 - (2 - u_n)^2$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $1 < u_n < 2$.

2) أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$. إستنتج أنها تقاربها .

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = ln(2 - u_n)$.

- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ يطلب حساب حدها الأول .
- أكتب عبارة v_n بدلالة n .ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n . أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4) أحسب P_n بدلالة n حيث : $P_n = (2 - u_0) \times (2 - u_1) \times (2 - u_2) \times ... \times (2 - u_n)$.

التمرين الرابع : 07 نقاط

الجزء الأول : نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 + (x^2 - 1)e^x$

1) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث $0,71 < \alpha < 0,72$.

- إستنتج إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني : نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x + (x - 1)^2 e^x$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$. بحيث $\|\vec{i}\| = 2cm$.

1) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها .

2) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

- أدرس الوضعية النسبية بين المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ).

3) أثبت أنه من اجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$.

أ) إستنتج إتجاه تغير الدالة f , ثم شكل جدول تغيراتها .

ب) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين متوازيين أحدهما المستقيم المقارب (Δ) . والآخر (T) يطلب كتابة معادلة له

4) أرسم المستقيمين $(\Delta), (T)$ و المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty; 2]$. نأخذ $f(\alpha) \simeq 0,9$.

5) عين قيم الوسيط الحقيقي m بحيث المعادلة : $f(x) = x + m$ تقبل ثلاثة حلول متمايزة مثنى مثنى .

بالتوفيق والنجاح للجميع في بكالوريـــا 2020 ـــا

أستاذ المادة : نوقبة . ن

تخلى عن الإيحاءات السلبية ..... كن إيجابيا

3as.ency-education.com

ETest M 3AS S 2020/001

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — **ثانوية أفلح بن عبد الوهاب – تيارت–**

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — **دورة : جوان 2020**

الشعبة : علوم تجريبية

اختبار في مادة : الرياضيات — **المدة : 03 سا و 30 د**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

بعد اجتياز الإمتحان النظري لمسابقة توظيف بإحدى المؤسسات سجلنا ما يلي: 75 % من المترشحين عملوا بجد، تم توظيف 80 % منهم و 70 % من المترشحين الذين لم يعملو بجد لم يتم توظيفهم.

نرمز بـ T للحدث " المترشح عمل بجد " و بـ R " المترشح تم توظيفه "

❶ شكل شجرة الإحتمالات المثقلة.

❷ احسب احتمال الحدث " المترشح عمل بجد و تم توظيفه "

❸ بين أن احتمال الحدث R هو 0.675 .

❹ المترشح لم يتم توظيفه. ما إحتمال أنه عمل بجد.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

❶ عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب α حيث: $\alpha = 2+2\sqrt{3}i$.

❷ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z التالية: $\left(Z^2-2-2\sqrt{3}i\right)\left(Z^2-2\sqrt{3}Z+4\right)=0$.

❸ نعتبر المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

لتكن النقط A; B و C ذات اللواحق $Z_A=\sqrt{3}+i$; $Z_B=\overline{Z_A}$ و $Z_C=-Z_A$ على الترتيب.

أ// اكتب Z_A على الشكل الأسي ثم استنتج الشكل الأسي لكل من Z_B و Z_C .

ب// استنتج أن النقط A; B و C تنتمي إلى نفس الدائرة، يطلب تعيين عناصرها المميزة.

ج// اكتب على الشكل الجبري العدد المركب L حيث: $L=\left(\frac{Z_A}{2}\right)^{1954}\times\left(\frac{Z_B}{2}\right)^{1962}\times\left(\frac{Z_C}{2}\right)^{1440}$.

❹ ليكن التحويل النقطي f الذي يحقق: $f(B)=A$ و $f(O)=O$.

أ// عين العبارة المركبة للتحويل f ثم استنتج طبيعته، يطلب تعيين عناصره المميزة.

ب// عين طبيعة المجموعة (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z حيث:

$$(Z-Z_A)\cdot\overline{(Z-Z_A)}=Z_C\cdot\overline{Z_C}$$

ETest M 3AS S 2020/001

التمرين الثالث: (05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

نعتبر النقط A; B; C و D ذات اللواحق $Z_A=3+\sqrt{3}+i\left(-3+\sqrt{3}\right)$; $Z_B=3+i\sqrt{3}$; $Z_C=\frac{Z_A}{Z_B}$ و $Z_D=-iZ_B$ على الترتيب.

❶ أ// بين أن: $Z_C=1-i$ ثم اكتب كلا من Z_C و Z_B على الشكل الأسي.

ب// بين أن: $Z_A=2\sqrt{6}e^{-\frac{\pi}{12}i}$ ثم استنتج أن: $\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$.

❷ بين أن: $\left(\frac{Z_A}{2\sqrt{6}}\right)^{2020}+i\left(\frac{Z_B}{2\sqrt{3}}\right)^{1441}=0$.

❸ بين أن قيم العدد الطبيعي n و التي تحقق $\left(\frac{Z_A}{2\sqrt{6}}\right)^n=\left(\frac{Z_B}{2\sqrt{3}}\right)^n$ هي $n=8k$ مع $k\in\mathbb{N}$.

(Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها Z حيث $\arg\left(iZ+Z_D\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

❹ بين أنه يمكن كتابة (Γ) على الشكل $\arg\left(Z-Z_B\right)=k\pi$ ، ثم حدد طبيعة المجموعة (Γ) .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الجزء I : نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=2\ln(x)+\frac{x-1}{x}$.

❶ ادرس تغيرات الدالة g.

❷ احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

الجزء II : لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=(x-1)^2\ln(x)+x-1$.

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

❶ احسب $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

❷ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=(x-1)g(x)+1$.

❸ استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

❹ بين أن (C_f) يقبل مماسا معامل توجيهه 1 .

❺ اكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

❻ ادرس الوضع النسبي بين (T) و (C_f). ماذا تستنتج؟

❼ احسب $f(2)$ و $f(3)$ ثم ارسم (T) و (C_f).

3as.ency-education.com

التمرين الثالث: (04 نقاط)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على IN بـ: $u_0=0$ و بالعلاقة $u_{n+1}=\frac{1}{2}(3u_n-1)$.

❶ برهن بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n \leq 1$.

❷ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على IN بـ: $v_n - u_n = \alpha$ حيث α عدد حقيقي ثابت.

❶ عين قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية، يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

❷ اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

❸ احسب كل من P_n و S_n بدلالة n حيث: $P_n = v_0 \times v_1 \times \cdots \times v_n$ و $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الجزء I : نعتبر الدالة العددية g المعرفة على IR بـ: $g(x) = 4e^{-x} - 4x + 5$.

❶ احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

❷ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

❸ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1.5 ; 1.45[$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

الجزء II : لتكن الدالة f المعرفة على IR بـ: $f(x) = \frac{(4x-1)e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

❶ احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا ثم احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

❷ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 4x - 1$ مقارب مائل لـ (C_f).

❸ اثبت أنه من أجل كل x من IR: $f'(x) = \frac{e^{-x} g(x)}{(1+e^{-x})^2}$.

❹ عين دون حساب $\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ و فسر النتيجة بيانيا.

❺ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

❻ بين أن $f(\alpha) = 4\alpha - 5$ ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$.

❼ ارسم (Δ) و (C_f).

❽ m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد و إشارة حلول المعادلة: $f(x) = m$.

ETest M 3AS S 2020/001

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 كرات لا نفرق بينها باللمس، منها 5 كرات بيضاء و 3 كرات حمراء و كرتان خضراوان.

نسحب عشوائيا و في آن واحد أربع كرات من الصندوق و نعتبر الحوادث التالية:

A " من بين الكرات المسحوبة توجد كرة خضراء واحدة فقط "

B " من بين الكرات المسحوبة توجد بالضبط ثلاث كرات من نفس اللون "

C " سحب كرتين على الأكثر حمراوين "

D " سحب على الأقل كرتين بيضاوين "

❶ احسب $P(A)$; $P(B)$; $P(C)$ و $P(D)$.

❷ نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات الخضراء المسحوبة.

أ// عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X و احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

ب// احسب $E(X^2 - 1 \leq 0)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[1;3]$ حيث: $f(x) = \frac{-3}{x-4}$.

❶ ادرس إتجاه تغير الدالة f ثم اثبت أنه إذا كان $x \in [1;3]$ فإن $f(x) \in [1;3]$.

❷ نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ// برهن بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1 \prec u_n \prec 3$.

ب// اثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على IN.

ج// استنتج أن (u_n) متقاربة ثم عين نهايتها.

❸ لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة على IN كما يلي: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 3}$.

أ// اثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب// اكتب v_n بدلالة n ثم احسب المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

ج// عين العدد الطبيعي n الذي يحقق: $3 + 2S_n = \frac{1}{27}$.

3as.ency-education.com

ثانوية عمري سعيد	اختبار الثلاثي الثاني	الاثنين 02 مارس 2020م
المستوى: الثالثة علوم تجريبية	في مادة الرياضيات	المدة: 03 ساعات

التمرين الأول: (03 نقاط)

نعتبر المتتالية الهندسية (u_n) الموجبة تماما و المعرفة على $\mathbb{N}^*$ حيث: $\begin{cases}\ln(u_3)-\ln(u_4)=-1\\ \ln(u_3)+\ln(u_4)=5\end{cases}$.

1) عين q أساس المتتالية (u_n) و حدها الأول.

2) استنتج أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n=e^{n-1}$؛ ثم احسب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n=u_1\times u_2\times\ldots\times u_{n+1}$.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $v_n=\ln(u_{n+1})-2\ln(u_n)$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) احسب S_n حيث: $S_n=v_1+v_2+\ldots+v_n$؛ ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $\ln(S_n)=0$.

التمرين الثاني: (06 نقاط)

I. 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية: $z^2-6z+13=0$.

2) احسب العددين المركبين z_1 و z_2 اللذين يحققان الجملة التالية: $\begin{cases}3z_1+(1-i)z_2=13\\ 4\overline{z_1}-(1+i)\overline{z_2}=1-7i\end{cases}$.

II. في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A ، B و C لواحقها (على الترتيب): $z_A=2+i$ ؛ $z_B=3-2i$ ؛ $z_C=5+2i$.

1) اكتب على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ و استنتج طبيعة المثلث ABC.

2) احسب $\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)^{2020}$، ثم عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

3) أ) عين (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $\left|\dfrac{z-3+2i}{z-5-2i}\right|=1$.

ب) تحقق أن النقطة A تنتمي إلى (Γ_1).

4) أ) عين (Γ_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $\arg\left(\dfrac{z-5-2i}{z-3+2i}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ (حيث $k\in\mathbb{Z}$)،

ب) تحقق أن النقطة A تنتمي إلى (Γ_2).

التمرين الثالث: (05 نقاط)

يحتوي صندوق على ثلاثة أزهار نرد متوازنة، اثنان خضراوان وفيهما ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6. أما الثالث فلونه أحمر وفيه وجهان يحملان الرقم 1 و أربعة أوجه تحمل الرقم 6.

نسحب من الصندوق بصفة عشوائية زهر نرد ثم نرميه و نسجل الرقم الظاهر. نعتبر الحوادث:

V: "زهر النرد المسحوب أخضر" ؛ R: "زهر النرد المسحوب أحمر" ؛ S: "الرقم الظاهر هو6".

1) أ) أنشئ شجرة احتمالات مناسبة للوضعية؛ ثم احسب احتمال الحادثة S.

ب) بعد رمي زهر النرد كان الرقم الظاهر هو 6، ما هو احتمال أن يكون زهر النرد المرمي أحمرا ؟

3as.ency-education.com

2) نقوم الآن بسحب زهر نرد من الصندوق ثم نرميه n مرة متتابعة و نسجل في كل مرة الرقم الظاهر.

نعتبر الحادثة S_n:"الرقم الظاهر في الرمية n هو 6".

أ) أنشئ شجرة احتمالات مناسبة للوضعية في حالة $n=2$.

ب) احسب الحادثة G_2:"الرقم الظاهر في الرميتين الاثنتين هو 6".

ج) نعتبر الحادثة G_n:"الرقم الظاهر في n رمية هو 6"

- احسب بدلالة n الاحتمالين $P_V(G_n)$ و $P_R(G_n)$.

د) استنتج أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $P(G_n)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n+\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

هـ) نرمز بـ p_n لاحتمال أن يكون زهر النرد المسحوب أحمرا علما أن الرقم الظاهر في n رمية هو 6.

- بين أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $P_n=\frac{1}{2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+1}$؛ ثم احسب نهاية p_n لما n يؤول إلى $+\infty$.

و) احسب أصغر عدد طبيعي n_0 حيث يكون $p_n\geq 0{,}999$ من أجل كل $n\geq n_0$.

التمرين الرابع: (06 نقاط)

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=e^{x-1}-2x+2$.

1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $g(x)>0$.

II. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث: $f(x)=\frac{2x}{e^{x-1}}+x-1$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x+1]$ ، ماذا تستنتج ؟

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=\frac{g(x)}{e^{x-1}}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f''(x)=\frac{2x-4}{e^{x-1}}$.

ب) ادرس على $\mathbb{R}$ إشارة $f''(x)$. ماذا تستنتج ؟

4) أ) بين أنه يوجد مماس وحيد (T) للمنحنى (C_f) معامل توجيهه 1 و اكتب معادلة له.

ب) أنشئ المماس (T) و المنحنى (C_f).

5) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x)-x=m$.

انتهى

3as.ency-education.com

التمرين الأول:

نضع من أجل كل عدد مركب $p(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$

1)أ- بين أن : $p(2) = 0$

ب- أوجد العددين a وb بحيث من أجل كل عدد مركب z، $p(z) = (z - 2)(z^2 + az + b)$

ج- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة: $p(z) = 0$

2)المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \overrightarrow{u};)$

لواحقها على الترتيب A, B و C $Z_A = -3 - 2i$ $Z_B = 1 + i$ $Z_C = 4 - 3i$

أ-علم النقط A , و C ثم عين طبيعة المثلث A مع التعليل

ب-عين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث A

ج- عين لاحقة النقطة I منتصف القطعة $[AC]$

د-عين لاحقة النقطة D نظيرة النقطة B بالنسبة إلى النقطة I

ه-حدد بدقة طبيعة الرباعي A مع التعليل

3)نعتبر (T) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{M} + \overrightarrow{MC}\right\| = 5\sqrt{2}$

أ- تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (T).

ب- عين مجموعة النقط (T) ثم أنشئها.

التمرين الثاني:

(U_n) متتالية عددية معرفة كمايلي: $U_0 = \frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $U_{n+1} = \frac{2U_n}{2U_n+1}$

1)أ- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n $U_{n+1} = 1 - \frac{1}{2U_n+1}$

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 < U_n < \frac{1}{2}$

ج- أدرس إتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها

3) (V_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n ، $V_n = \frac{5^n U_n}{2U_n - 1}$

أ-بين أن (V_n) متتالية هندسية بطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب-أكتب عبارة n بدلالة n ثم بين أن : $U_n = \frac{2^n}{2^{n+1} + 3}$ ثم احسب نهاية (U_n) مرة ثانية

ency-education.com/exams

4)- أحسب بدلالة n المجموعين : $S_n = V_1 + V_2 + \cdots\ldots\ldots\ldots + V_n$

$$T_n = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_2} + \cdots + \frac{1}{U_n}$$

التمرين الثالث:

يحتوي صندوق U_1 على ستة كرات وثلاث كرات سوداء وكرتين حمراوين لانفرق بينها باللمس

نسحب عشوائيا وفي ان واحد ثلاث كرات من هذا الصندوق .

نعتبر الحدثين :A "الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون"

B:"الحصول على ثلاث كرات مختلفة الألوان مثنى مثنى"

1) أحسب $p(A)$ و $p(B)$ إحتمالي الحدثينA وB على الترتيب.

2)ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط بكل سحبة عدد الألوان التي تحملها الكرات الثلاثة المسحوبة .

أ- عين قيم المتغير العشوائي X

ب-عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$

3)يحتوي صندوق اخر U_2 على ثلاث كرات تحمل الرقم 3 وكرتين تحملان الرقم2 لانفرق بينها باللمس.

نسحب كرة من U_2 ونسجل رقمها ثم نسحب عشوائيا وفي ان واحد n كرة من U_1 حيث n هو رقم الكرة المسحوبة من U_2

أ- أحسب إحتمال الحصول على ثلاث كرات بيضاء

ب- أحسب إحتمال الحصول على كرتين حمراوين علما أن رقم الكرة المسحوبة من U_2 هو 3.

ency-education.com/exams

إختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول

1- يحتوي صندوق على 8 كرات سوداء ثلاثة منها تحمل الرقم -1 و ثلاثة تحمل الرقم 0 و اثنتان تحملان الرقم 1 وكرتين حمراوين تحملان الرقمين 1 و 2 ، كل الكرات متماثلة و لا نفرق بينها عند اللمس.

✍ نسحب من الصندوق عشوائيا **ثلاث كرات في آن واحد.**

- أحسب احتمال الحصول على كرتين سوداوين على الاقل.

✍ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب جداء الأرقام المسجلة على الكرات.

- عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله.

2- نعتبر زهر نرد بستة أوجه أربعة منها تحمل الحرف " β " ووجهان يحملان الحرف " α " .

نقوم بالتجربة الآتية : نرمي زهر النرد اذا تحصلنا على الحرف " β " نسحب على التوالي و **بدون إرجاع** كرتين من الصندوق و إذا تحصلنا على الحرف " α " نسحب على التوالي و **بالارجاع** كرتين من الصندوق.

- أحسب إحتمال ظهور الحرف " α " علما أن الكرتين المسحوبتين مختلفتين في اللون.

التمرين الثاني

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$

II. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها $z_A=4\sqrt{3}-4i$ ، $z_B=\overline{z}_A$ و $z_C=-\sqrt{3}+i$.

1- أكتب العدد $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)$ على الشكل الأسي ثم استنتج طبيعة المثلث OAB.

2- جد z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R الذي مركزه النقطة O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.

3- لتكن النقطة G مرجح الجملة $\{(O;-1),(D;1),(B;1)\}$ ذات اللاحقة z_G.

أ) بين أن $z_G=4\sqrt{3}+6i$ ثم علم النقط A، B، C، D و G.

ب) بين أن النقط C، D، G في استقامية.

ج) حدد طبيعة الرباعي $OBGD$.

4- عين (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $|z|=|z-z_B|$

5- عين (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MO}\right)\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}-2\overrightarrow{MO}\right)=0$

التمرين الثالث

I. لتكن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2-2+\ln x$.

1- أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد $1.31<\alpha<1.32$.

3- استنتج إشارة $g(x)$.

3as.ency-education.com

II. لتكن الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $f(x)=x-e+\frac{1-\ln x}{x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. وحدة الطول $2cm$.

1- بين أن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2- بين أنه من أجل كل x من $]0,+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

3- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4- بين أن المستقيم $(\Delta): y=x-e$ مقارب للمنحنى (C_f) ثم ادرس وضعيته مع (C_f).

5- بين أن $f(\alpha)=2\alpha-e-\frac{1}{\alpha}$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

6- أرسم (Δ) و (C_f).

بالتوفيق للجميع

ency-education.com/exams

3as.ency-education.com

الإجابة النموذجية

التمرين الأول

1- الحالات الممكنة للسحب : $C_{10}^{3}=120$.

- **احتمال الحصول على كرتين سوداوين على الأقل :**

$$P(A)=\frac{C_8^2\times C_2^1+C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{112}{120}=\frac{14}{15}$$

- **قيم المتغير العشوائي** X : $X\in\{-2;-1;0;1;2\}$.
- **قانون الاحتمال :**

$$P(X=-2)=\frac{C_3^1\times C_3^1\times C_1^1}{120}=\frac{9}{120}$$

$$P(X=-1)=\frac{C_3^1\times C_3^2+C_3^3}{120}=\frac{10}{120}$$

$$P(X=0)=\frac{C_3^1\times C_7^2+C_3^2\times C_7^1+C_3^3}{120}=\frac{85}{120}$$

$$P(X=1)=\frac{C_3^2\times C_3^1+C_3^3}{120}=\frac{10}{120}$$

$$P(X=2)=\frac{C_3^2\times C_1^1+C_3^2\times C_1^1}{120}=\frac{6}{120}$$

اذن :

X	-2	-1	0	1	2
$P(X=X_i)$	$\frac{9}{120}$	$\frac{10}{120}$	$\frac{85}{120}$	$\frac{10}{120}$	$\frac{6}{120}$

2-

إحتمال " ظهور الحرف α علما أن الكرتين مختلفتين في اللون"

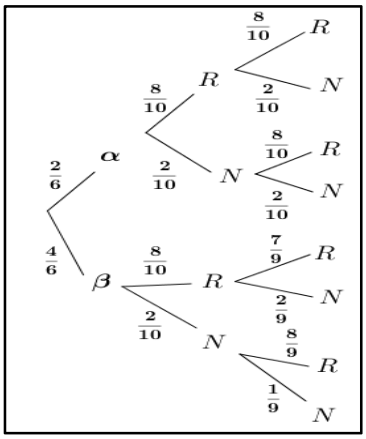
نضع " M :حادثة ظهور الحرف α" و" D :حادثة الكرتين مختلفتين في اللون"

لدينا $P(D)=\frac{2}{6}\times\frac{2\times 8^1\times 2^1}{10^2}+\frac{4}{6}\times\frac{2A_8^1\times A_2^1}{A_{10}^2}=\frac{232}{675}$

و $P(D\cap M)=\frac{2}{6}\times 2\times\frac{8^1\times 2^1}{10^2}=\frac{8}{75}$

اذن $P_D(M)=\frac{P(D\cap M)}{P(D)}=\frac{\frac{8}{75}}{\frac{232}{675}}=\frac{9}{29}$

يمكن استعمال شجرة الإحتمالات



التمرين الثاني

I. حل المعادلة : $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$

لدينا $\Delta=-64=(8i)^2$ ومنه $z_1=4\sqrt{3}-4i$ أو $z_2=4\sqrt{3}+4i$

اذن مجموعة الحلول هي $S=\{4\sqrt{3}-4i\,;4\sqrt{3}+4i\}$

II. 1. كتابة العدد $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)$ على الشكل الأسي :

$$\frac{z_B}{z_A}=\frac{4\sqrt{3}+4i}{4\sqrt{3}-4i}=\frac{(4\sqrt{3}+4i)(4\sqrt{3}+4i)}{(4\sqrt{3}-4i)(4\sqrt{3}+4i)}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنه : $\left|\frac{z_B}{z_A}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ و

$$\frac{z_B}{z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ اذن } \begin{cases}\cos\theta=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}\\ \sin\theta=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi/\ k\in\mathbb{Z}$$

- **طبيعة المثلث** OAB : لدينا $\left|\frac{z_B-z_o}{z_A-z_o}\right|=1$ و

$arg\left(\frac{z_B-z_o}{z_A-z_o}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi/\ k\in\mathbb{Z}$ ومنه المثلث OAB متقايس الأضلاع.

2- **ايجاد** z_D :لدينا العبارة المركبة للدوران هي :

$(z'-z_o)=e^{-i\frac{\pi}{3}}(z-z_o)$ تكافئ $z'=e^{-i\frac{\pi}{3}}z$

تكافئ $z'=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ و بما أن D صورة النقطة C

فإن : $z_D=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_C$ تكافئ

$$z_D=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\sqrt{3}+i\right)=2i$$

3- أ)تبيين أن : $z_G=4\sqrt{3}+6i$

$$z_G=\frac{-z_o+z_D+z_B}{-1+1+1}=\frac{0+2i+4\sqrt{3}+4i}{1}=4\sqrt{3}+6i$$

- **تعليم النقط :**

ب) **تبيين أن النقط** G ، D ، C **في استقامية :**

طريقة ① : نثبت أن $\vec{CD}//\vec{CG}$ لدينا $\vec{CD}\left(\sqrt{3};1\right)$ ، $\vec{CG}\left(5\sqrt{3};5\right)$ و

$\vec{CD}//\vec{CG}$ معناه $\sqrt{3}\times 5-1\times\sqrt{3}=0$ محققة

و بالتالي النقط C ، D ، G في استقامية.

طريقة ② : نبين أن $\frac{z_G-z_C}{z_D-z_C}=k\in\mathbb{R}$ ، لدينا

و بالتالي النقط C ، D ، G في استقامية. $\frac{z_G-z_C}{z_D-z_C}=5$

ج) **طبيعة الرباعي** $OBGD$: متوازي الأضلاع ،

التبرير : $z_{\overrightarrow{OB}}=(z_B-z_O)=4\sqrt{3}+4i=z_{\overrightarrow{DG}}$.

4- تعيين (Γ_1) : لدينا $|z|=|z-z_B|$ تكافئ $|z-z_o|=|z-z_B|$

تكافئ $MO=MB$ اذن مجموعة النقط هي محور القطعة $[OB]$.

ency-education.com

5- تعيين (Γ_2) :

$\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MO}\right)\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}-2\overrightarrow{MO}\right)=0$ تكافئ

$\left(\overrightarrow{MG}\right)\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+2\overrightarrow{OM}\right)=0$ تكافئ

$\left(\overrightarrow{MG}\right)\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MD}\right)=0$ تكافئ

$\left(\overrightarrow{MG}\right)\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)=0$ أي $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{OG}=0$

اذن مجموعة النقط هي المستقيم العمودي على المستقيم (OG) في النقطة G أي الذي يشمل G و $\overrightarrow{OG}$ ناظما له.

التمرين الثالث

I. 1-دارسة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و $g'(x)=2x+\frac{1}{x}$: بما أن $x>0$ فإن $g'(x)>0$.

- **جدول تغيراتها :**

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2- تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد :

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[1.31;1.32]$ و $\begin{cases}g(1.32)\approx 0.02\\ g(1.32)\approx -0.01\end{cases}$ أي $g(1.32)<0<g(1.32)$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد $1.31<\alpha<1.32$.

3- استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II. 1-تبيين أن $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\underbrace{x}_{0}-e+\underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty}\underbrace{\left(1-\overbrace{\ln x}^{-\infty}\right)}_{+\infty}=+\infty$ ،

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{x}_{+\infty}-e+\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}-\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{0}=+\infty$$

2- دارسة اتجاه تغير الدالة f : الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=1-\frac{-\frac{1}{x}\times x-1\times \ln x}{x^2}=\frac{x^2-2+\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.إذن الدالة متناقصة تماما على المجال $]0;\alpha]$ و متزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

- **جدول تغيراتها :**

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

4- المستقيم $y=x-e$ مقارب لـ (C_f) معناه $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-e)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=0$ ومنه

المستقيم (Δ) مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

- **دراسة الوضع النسبي :** ندرس إشارة الفرق

$f(x)-(x-e)=\frac{1-\ln x}{x}$ ومنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا : $\frac{1-\ln x}{x}=0$ يكافئ $\begin{cases}1-\ln x=0\\ x\neq 0\end{cases}$ أي

$x=e$ إذن :

☒ (C_f) فوق (Δ) في المجال $]0;e]$ و (C_f) تحت (Δ) في المجال $[e;+\infty[$.

☒ (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(e;0)$.

5-تبيين أن $g(\alpha)=\alpha^2-2+\ln\alpha=0$ لدينا : $f(\alpha)=2\alpha-e-\frac{1}{\alpha}$

أي $\ln\alpha=2-\alpha^2$ ولدينا من جهة أخرى $f(\alpha)=\alpha-e+\frac{1-\ln\alpha}{\alpha}$

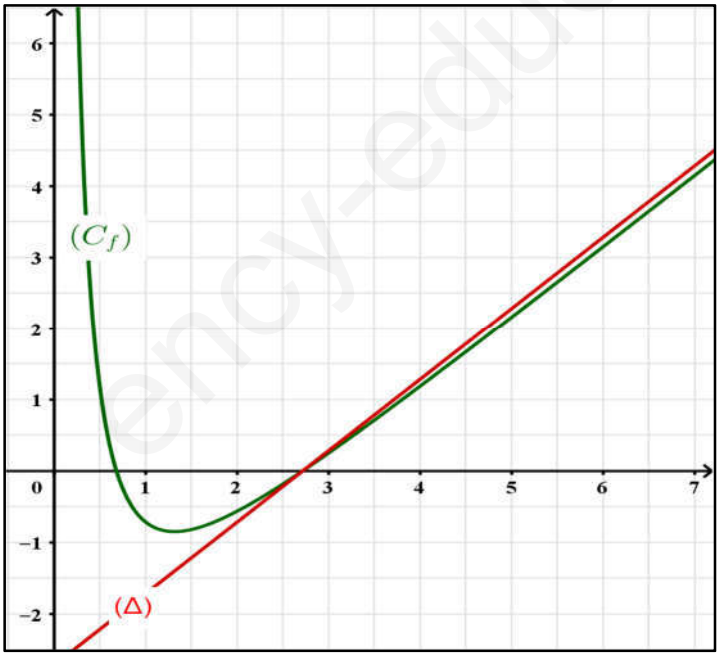
ومنه :

$$f(\alpha)=\alpha-e+\frac{1-(2-\alpha^2)}{\alpha}=\alpha-e-\frac{1}{\alpha}+\frac{\alpha^2}{\alpha}=2\alpha-e-\frac{1}{\alpha}$$

- **استنتاج حصر لـ $f(\alpha)$:** لدينا $1.31<\alpha<1.32$ أي

$\begin{cases}-0.1<2\alpha-e<-0.08\\ -0.76<\frac{-1}{\alpha}<-0.75\end{cases}$ إذن $-0.86<f(\alpha)<-0.83$.

6-رسم (Δ) و (C_f) :



ency-education.com/exams

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

متقن : خلاف بشير ـخنشلة — الأقسام : 3 علوم تجريبية

السنة الدراسية : 2019 / 2020 — المدة : 3 ساعات

اختبار الثلاثي الثاني لمادة الرياضيات — الأستاذ : خيار هلال

التمرين الأول : (04 ن)

(u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن اجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$

1) أ) تحقق ان من اجل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \dfrac{4}{u_n + 3}$

ب) برهن بالتراجع ان من اجل كل عدد طبيعي n : $-1 < u_n \leq 0$

جـ) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) و استنتج انها متقاربة . ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \dfrac{1}{u_n + 1}$

أ) بين ان (v_n) حسابية معينا حدها الأول واساسها .

ب) اكتب v_n بدلالة n واستنتج u_n بدلالة n

3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \dfrac{u_0 + 2}{u_0 + 1} + \dfrac{u_1 + 2}{u_1 + 1} + \dfrac{u_2 + 2}{u_2 + 1} + \ldots + \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1}$

التمرين الثاني: (06 ن)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z : $(z-4)\left(z^2 - 4z + 8\right) = 0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$

نعتبر النقط A ، B ، C ، D و E التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 2 - 2i$ ، $z_B = 4$ ، $z_C = \overline{z_A}$ ، $z_D = -z_A$ و $z_E = -6 - 2i$.

أ) أكتب العدد المركب $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسي ، ثمّ إستنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بتحويل نقطي S يطلب تعيين طبيعته وعناصره المميزة .

ب) تحقق أنّ النقطة D هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-2),(C;2)\}$.

3) (Γ) هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $\left|(1+i)z + 4\right| = 8$

أ) تحقق أنّ النقطة A تنتمي إلى (Γ) ، ثمّ عيّن طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميّزة

ب) احسب مساحة (Γ) و استنتج مساحة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S.

جـ) تحقق أنّ $S(D) = E$ ، ثمّ بيّن أنّ (Γ') هي الدائرة التي مركزها E ونصف قطرها AE

التمرين الثالث: (05 ن)

صندوق غير شفاف U_1 به اربع كريات تحمل الرقم 4 وثلاث كريات تحمل الرقم 3 وكريتان تحمل الرقم 2

3as.ency-education.com

وصندوق اخر U_2 غير شفاف به اربع كريات بيضاء وكريتان خضراوان واربع كريات حمراء . الكريات لانميز بينها باللمس .

1) نسحب عشوائيا على التوالي و بالارجاع ثلاث كريات من الصندوق U_1

احسب احتمال الاحداث : A الكريات المسحوبة من نفس الرقم

B الكريات المسحوبة من ارقام متمايزة مثنى مثنى

2) نسحب عشوائيا على التوالي ودون ارجاع اربع كريات من الصندوق U_2

احسب احتمال الاحداث : E الكريات المسحوبة من نفس اللون

F الحصول على كريتن بيضاوين وكرية حمراء وكرية خضراء.

3) نسحب عشوائيا و في ان واحد كريتان من الصندوق U_1 فاذا كانتا من نفس الرقم n نسحب و في ان واحد n كرية من الصندوق U_2 واذا كانتا من رقمين مختلفين b,a نسحب وفي ان واحد n كرية من الصندوق U_2 حيث n هو اصغر الرقمين a و b .

-احسب احتمال الحدثين : H الحصول على اربع كريات حمراء

L الحصول على كريتين بيضاوين وكرية حمراء

التمرين الرابع: (05 ن)

I) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=e^x(1-x)+1$

1) أحسب نهاية الدالة h عند $+\infty$ ثم عند $-\infty$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها

3) بين أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1,2\ ;1,3]$ و إستنتج إشارة $h(x)$ على $\mathbb{R}$

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x}{e^x+1}+2$

(C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. فسر النتيجة الأخيرة بيانيا .

2) بين أن لـ $f'(x)$ و $h(x)$ نفس الإشارة ، واستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ) بين أن المستقيم (d) ذو المعادلة : $y=x+2$ مقارب مائل للمنحنى (C)

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (d)

4) بين أنه يوجد عددين طبيعيين p و q بحيث : $f(\alpha)=p\alpha+q$ ثم إستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

5) أنشئ كل من (d) و (C).

انتهى الموضوع.

3as.ency-education.com

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية
ثانوية زاغز جلول بالإدريسية

مديرية التربيـة لولاية الجلفة
المستوى : ثالثة ثانوي علوم تجريبية

يوم : 2020/03/03 | الإمتحان الثاني في مادة : الرياضيات | المدة : 4 ساعات

التمريـن الأول

يحتوي كيس على 5 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء ، كلّ الكرات متماثلة ولا نفرّق بينها عند اللّمس .

1 - نسحب من الكيس 3 كرات عشوائيا وفي آن واحد .

♣ احسب احتمال كل حادثة من الحوادث التالية :

- A : " الكرات المسحوبة كلّها حمراء " .
- B : " توجد كرة واحدة حمراء في السحب " .
- C : " توجد على الأقل كرة واحدة بيضاء في السحب " .
- D : " الكرات المسحوبة من ألوان مختلفة " .

2 - ننزع من الكيس الكرات البيضاء ونضع مكانها n كرة سوداء حيث $n \in \mathbb{N}$ مع $n \succeq 2$ ثمّ نسحب كرتين على التوالي وبدون إرجاع .

♣ نفرض أنّ سحب كرة حمراء يساوي (-10) نقطة ، وسحب كرة سوداء يساوي ($+5$) نقطة .

نعتبر المتغيّر العشوائي X الذي يرفق كل سحب كرتين مجموع النقط المحصّل عليها .

أ - عيّن قانون الاحتمال لهذا المتغيّر العشوائي X والأمل الرياضياتي $E(X)$.

ب - عيّن قيمة n حتى تكون اللعبة عادلة .

ج - كيف نختار عدد الكرات السّوداء حتى تكون اللعبة مربحة ؟

التمريـن الثاني

نعتبر الدّالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كمايلي : $f(x) = \dfrac{3x}{x+1}$

ونسمّي (C_f) منحنيها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ (الوثيقة المرفقة) .

(I) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{u_n + 1} \end{cases}$$

1 - على الوثيقة المرفقة مثّل على محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) (دون حسابها وموضّحا خطوط الإنشاء) .

2 - ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها .

2 - برهن بالتراجع أنّه من كل عدد طبيعي n : $u_n \prec 2$.

3 - أثبت أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ثمّ استنتج أنّها متقاربة . عيّن نهايتها .

(II) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = 1 - \dfrac{2}{u_n}$.

1 - برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يّطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

2 - اكتب عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n . تحقق من نهاية المتتالية (u_n) .

(III) اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n = \frac{u_0}{u_0 - 2} + \frac{u_1}{u_1 - 2} + \frac{u_2}{u_2 - 2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{u_n}{u_n - 2}$$

3as.ency-education.com

التمرين الثالث

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z^2+3)(z^2-6z+21)=0$.

(II) المستوي المركب مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$.

نعتبر النّقط A ، B ، C و D ذات اللّواحق $z_A=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_B=\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_C=3+2i\sqrt{3}$ و $z_D=\overline{z_C}$ على الترتيب

1 - أ - بيّن أنّ النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدّائرة (C) التي مركزها Ω ذات اللّاحقة $z_\Omega=3$.

ب - بيّن أنّ : $z_A=\left(\frac{z_D-1}{4}\right)^{1906}+\left(\frac{z_C-1}{4}\right)^{1963}$.

2 - لتكن النّقطة E نظيرة النقطة D بالنسبة إلى المبدأ O .

أ - عيّن عمدة وطويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}$ ثمّ استنتج طبيعة المثلث BEC .

ب - استنتج طبيعة التحويل T الذي مركزه النقطة B ويحوّل E إلى C ثمّ اكتب الصيغة المركبة له .

(III) 1 - عيّن طبيعة (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللّاحقة z التي تحقق : $|iz-3i|=|-3+i\sqrt{3}|$.

2 - عيّن طبيعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللّاحقة غير المعدومة z التي تحقق : $\arg\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)=2k\pi$ حيث : $k\in\mathbb{Z}$

التمرين الرابع

(I) نعتبر الدّالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي : $g(x)=1+x^2+\ln x$.

1 - ادرس تغيّرات الدّالة g .

2 - بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدًا α حيث : $0.32\prec\alpha\prec 0.33$.

3 - استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

(II) نعتبر الدّالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي : $f(x)=-x+\frac{2+\ln x}{x}$

ونسمّي (C_f) منحنيها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$.

1 - احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0\atop x\succ 0}f(x)$.

2 - بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=-\frac{g(x)}{x^2}$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة f .

3 - بيّن أنّ : $f(\alpha)=2\left(\frac{1}{2\alpha}-\alpha\right)$ ثمّ عيّن حصرًا للعدد $f(\alpha)$.

4 - احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x]$ واستنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته .

- ادرس الوضع النّسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

5 - أثبت أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيينها . اكتب معادلة المماس (T) .

6 - أنشئ المستقيم (Δ) ، المماس (T) والمنحنى (C_f) علما أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما x_0 و x_1 حيث : $0.2\prec x_0\prec 0.1$ و $1.6\prec x_1\prec 1.5$.

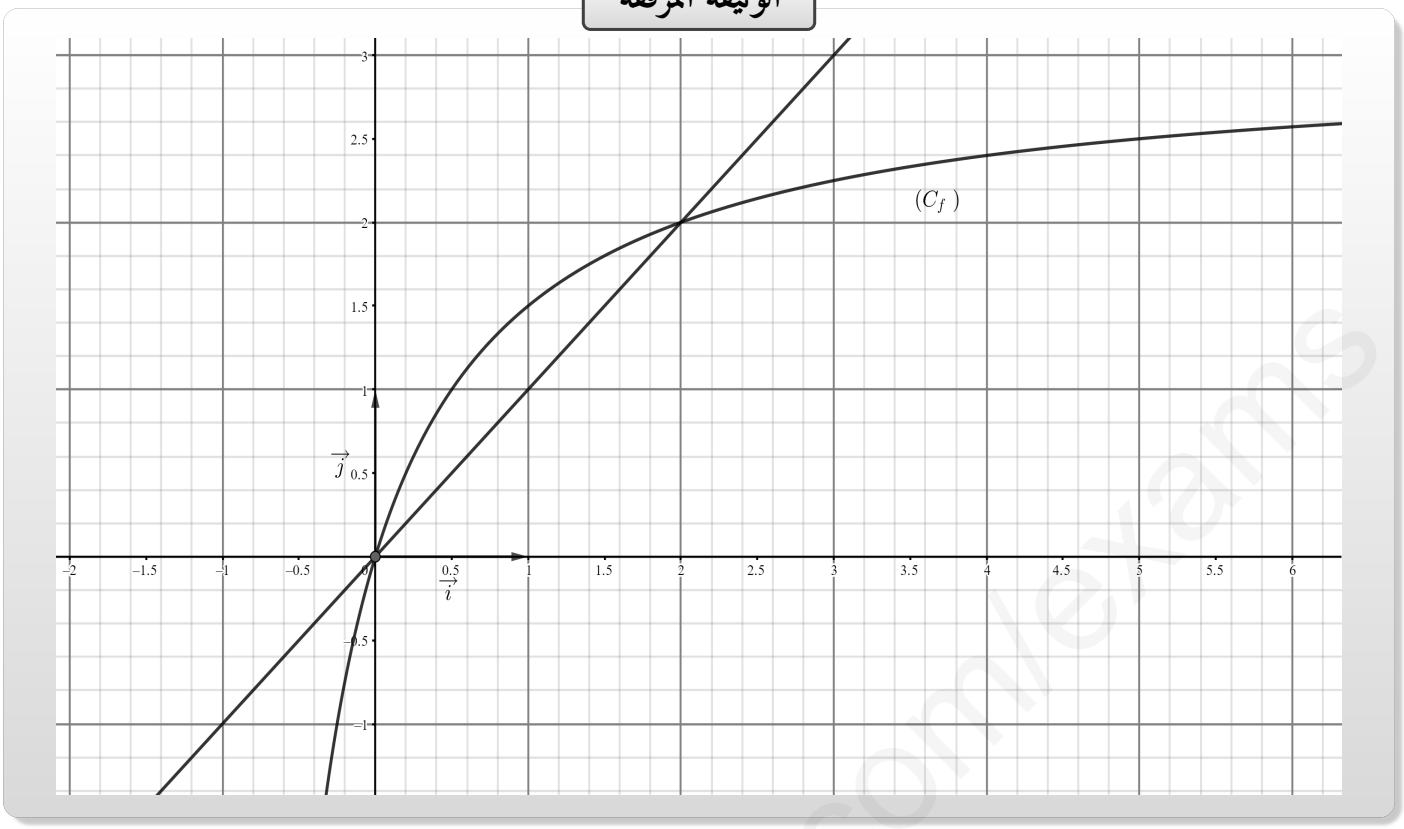
بالتوفيق والنّجاح إن شاء الله في شهادة البكالوريا

أعظم هندسة في العالم :

بناء جسرٍ من الأمل ... على نهرٍ من اليأس !!

الإســـم واللقـب : ..... القســم : .....

الوثيقة المرفقة

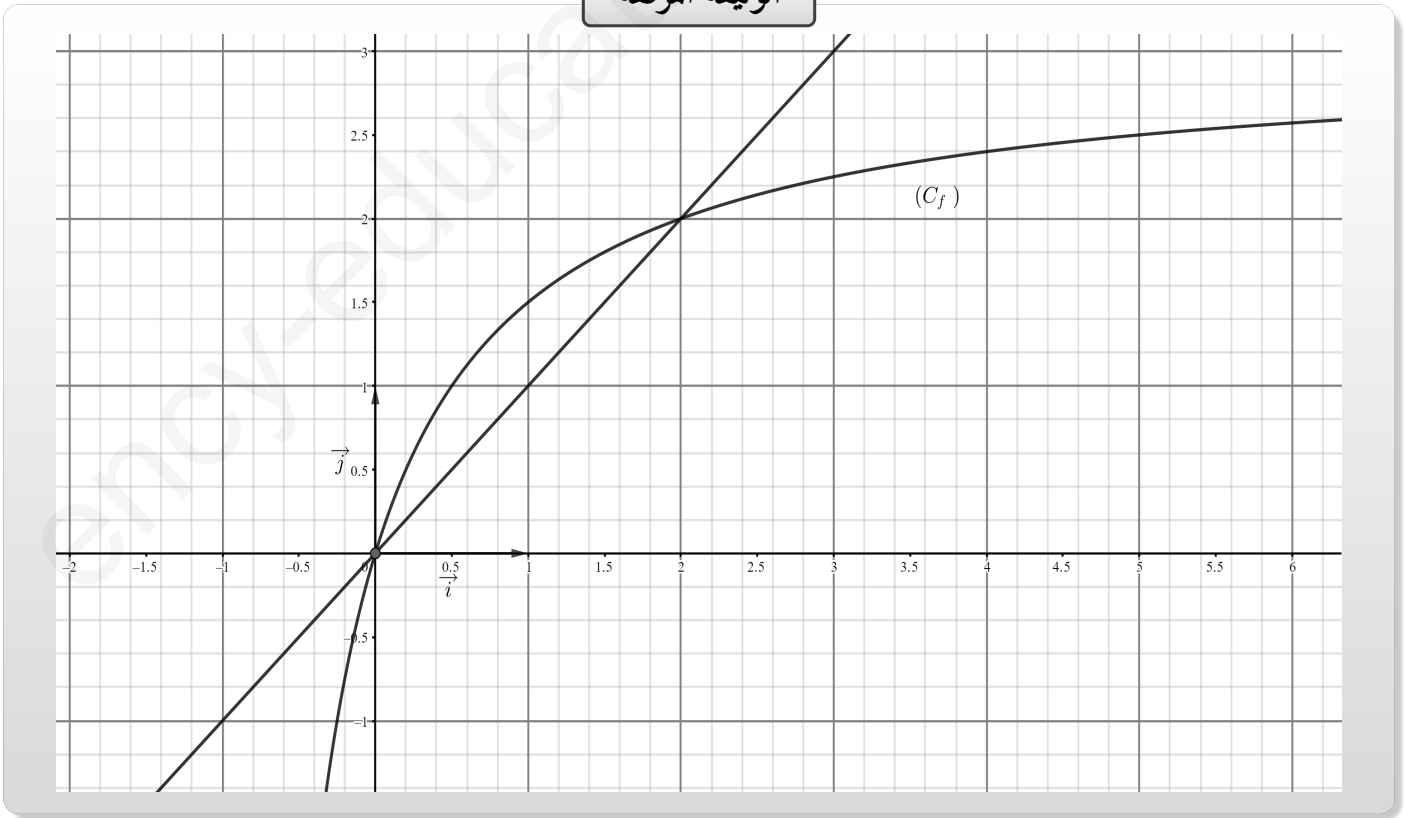


يُنجز العمل المطلوب على الوثيقة المرفقة وتُعاد مع ورقة الإجابة

.....

الإســـم واللقـب : ..... القســم : .....

الوثيقة المرفقة



يُنجز العمل المطلوب على الوثيقة المرفقة وتُعاد مع ورقة الإجابة

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية
ثانوية زاغز جلول بالإدريسية

مديرية التربيـة لولاية الجلفة
المستوى : ثالثة ثانوي علوم تجريبية

يوم : 2020/03/03 التصحيح المفصل للامتحان الثاني في مادة : الرياضيات المدة : 4 ساعات

التمريـن الأول

1 - ♣ حساب احتمال كل حادثة من الحوادث التالية :

$$P(A)=\frac{C_5^3}{C_8^3}=\frac{10}{56}\text{ ، }P(B)=\frac{C_5^1\cdot C_3^2}{C_8^3}=\frac{15}{56}\text{ ، }P(C)=\frac{C_3^1\cdot C_5^2+C_3^2\cdot C_5^1+C_3^3}{C_8^3}=\frac{46}{56}$$
$$\text{و }P(D)=\frac{C_3^1\cdot C_5^2+C_3^2\cdot C_5^1}{C_8^3}=\frac{45}{56}\text{ .}$$

2 - أ - تعيين قانون الاحتمال لهذا المتغيّر العشوائي X والأمل الرياضياتي $E(X)$:

لنعيّن قيم المتغير العشوائي والتي تحقّق : $x_i\in\{-20;-5;10\}$ مع $i\in\{1;2;3\}$.

لدينا :

$$A_{n+5}^2=\frac{(n+5)!}{(n+5-2)!}=\frac{(n+5)!}{(n+3)!}=\frac{(n+5)(n+4)(n+3)!}{(n+3)!}=(n+5)(n+4)=n^2+9n+20$$

وعليه :

$$P(X=-20)=\frac{A_5^2}{A_{n+5}^2}=\frac{20}{n^2+9n+20}\text{ ، }P(X=-5)=\frac{2A_5^1\cdot A_n^1}{A_{n+5}^2}=\frac{10n}{n^2+9n+20}$$
$$\text{و }P(X=10)=\frac{A_n^2}{A_{n+5}^2}=\frac{n(n-1)}{n^2+9n+20}$$

لنلخّص ذلك في الجدول التالي :

x_i	-20	-5	10
$P(X=x_i)$	$\frac{20}{n^2+9n+20}$	$\frac{10n}{n^2+9n+20}$	$\frac{n^2-n}{n^2+9n+20}$

تعيين الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$$E(X)=-20\left(\frac{20}{n^2+9n+20}\right)-5\left(\frac{10n}{n^2+9n+20}\right)+10\left(\frac{n^2-n}{n^2+9n+20}\right)=\frac{10n^2-60n-400}{n^2+9n+20}$$

ب - تعيين قيمة n حتى تكون اللعبة عادلة : حتى تكون اللعبة عادلة يكون $E(X)=0$

$E(X)=0$ معناه : $\frac{10n^2-60n-400}{n^2+9n+20}=0$ أي : $10n^2-60n-400=0$ معناه $n=10$.

ج - تبيين كيف نختار عدد الكرات السّوداء حتى تكون اللعبة مربحة ؟ : لدينا : $E(X)=\frac{10(n+4)(n-10)}{n^2+9n+20}$.

حتى تكون اللعبة مربحة يكون : $E(X)\succ 0$ أي $(n-10)\succ 0$ أي $n\succ 10$ لأنّ $\frac{10(n+4)}{n^2+9n+20}\succ 0$.

ومنه حتى تكون اللعبة مربحة نأخذ الكرات السوداء أكبر تماما من 10 كرات .

التمريـن الثاني

لدينا :

$$u_{n+1}=\frac{3u_n}{u_n+1}=\frac{3u_n+3-3}{u_n+1}=\frac{3u_n+3}{u_n+1}-\frac{3}{u_n+1}=3\left(\frac{u_n+1}{u_n+1}\right)-\frac{3}{u_n+1}=3-\frac{3}{u_n+1}$$

3as.ency-education.com

(I) 1 - التمثيل على محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) (الوثيقة المرفقة) .

2 - وضع التخمين حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها :

من خلال البيان نلاحظ أنّ حدود المتتالية (u_n) تتزايد وبالتالي نُخمّن أنّها متزايدة كما نلاحظ أنّها تتقارب نحو نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المنصف الأول وعليه نُخمّن أنّها متقاربة نحو النقطة ذات الفاصلة 2 .

3 - البرهان بالتراجع أنّه من كل عدد طبيعي n : $u_n \prec 2$:

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0=1$ ونعلم أنّ $1 \prec 2$ ومنه $u_0 \prec 2$ وبالتالي الخاصية " $u_n \prec 2$ " محققة من أجل $n=0$.

- نفرض أنّ $u_n \prec 2$ ونبرهن أنّ $u_{n+1} \prec 2$.

لدينا من الفرض $u_n \prec 2$ بإضافة العدد 1 نجد : $u_n+1 \prec 3$ بوضع مقلوب الطرفين نجد : $\frac{1}{u_n+1} \succ \frac{1}{3}$ بضرب الطرفين في العدد -3 نجد : $-\frac{3}{u_n+1} \prec -1$ بإضافة العدد 3 نتحصل على : $u_{n+1} \prec 2$.

ومنه من أجل كل n عدد طبيعي فإنّ : $u_n \prec 2$.

ملاحظة مهمّة : هنا يمكنك استعمال الدالة المرفقة للانتقال من u_n إلى u_{n+1} وهو الأفضل .

3 - اثبات أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ثمّ استنتاج أنّها متقاربة . تعيين نهايتها :

لدينا : $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n$. نلاحظ من خلال البيان أنّه من كل x من المجال $[0;2[$ المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم ذو المعادلة $y=x$

ومنه من أجل كل x من المجال $[0;2[$ فإنّ : $f(x)-x \succ 0$.

بما أنّ $u_n \prec 2$ (واضح أنّ $0 \preceq u_n$) فإنّ : $f(u_n)-u_n \succeq 0$ وعليه $u_{n+1}-u_n \succeq 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة .

بما أنّ المتتالية (u_n) ومتزايدة و $u_n \prec 2$ أي محدودة من الأعلى بالعدد 2 فإنّ المتتالية (u_n) متقاربة نحو 2 .

تعيين النهاية :

بما أنّ المتتالية (u_n) متقاربة فإنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=l$ مع l عدد حقيقي .

لإيجاد l نضع $l=f(l)$ معناه $l=\frac{3l}{l+1}$ أي $l^2+l=3l$ إذن $l^2-2l=0$ وعليه $l(l-2)=0$ هذا معناه : $l=2$ أو $l=0$ وبما أنّ $u_0=1$ والمتتالية (u_n) متزايدة فإنّ : $l=2$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=2$.

(II) 1 - البرهان أنّ المتتالية (v_n) هندسية مع تعيين أساسها وحدّها الأول :

$$v_{n+1}=1-\frac{2}{u_{n+1}}=1-\frac{2}{\frac{3u_n}{u_n+1}}=1-\frac{2(u_n+1)}{3u_n}=\frac{3u_n-2u_n-2}{3u_n}=\frac{u_n-2}{3u_n}=\frac{1}{3}\left(\frac{u_n-2}{u_n}\right)=\frac{1}{3}v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0=1-\frac{2}{u_0}=1-\frac{2}{1}=-1$.

2 - كتابة عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

لدينا : $v_n=v_0q^n$ ومنه $v_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$ وكذلك $v_n=1-\frac{2}{u_n}$ ومنه $u_n=\frac{2}{1-v_n}$ ومنه $u_n=\frac{2}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$.

- التحقق من نهاية المتتالية (u_n) :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}=2$ لأنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ ($-1 \prec \frac{1}{3} \prec 1$) .

(III) كتابة بدلالة n المجموع S_n :

لدينا : $\frac{1}{-\frac{1}{(3)^n}}=-(3)^n=\frac{1}{-\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\frac{1}{v_n}=\frac{1}{1-\frac{2}{u_n}}=\frac{1}{\frac{u_n}{u_n}-\frac{2}{u_n}}=\frac{1}{\frac{u_n-2}{u_n}}=\frac{u_n}{u_n-2}$ وبالتالي :

$$S_n=-(3)^0-(3)^1-(3)^2-.....-(3)^n=-\left(3^0+3^1+3^2+.....+3^n\right)=-\left(\frac{1-(3)^{n+1}}{1-3}\right)=\frac{1-(3)^{n+1}}{2}$$

3as.ency-education.com

التمرين الثالث

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z^2+3)(z^2-6z+21)=0$:

لدينا $(z^2+3)(z^2-6z+21)=0$ معناه : $(z^2+3)=0$ أو $(z^2-6z+21)=0$

لنبدأ بالمعادلة الأولى $(z^2+3)=0$ معناه $z^2=-3$ أي $z^2=3i^2$ وعليه $z=i\sqrt{3}$ $z=-i\sqrt{3}$.

الآن نمر إلى المعادلة الثانية $(z^2-6z+21)=0$ نحسب المميز $\Delta=(-6)^2-4(1)(21)=-48=48i^2=\left(4\sqrt{3}i\right)^2$

وعليه حلول المعادلة الثانية هي : $\begin{cases} z_1=\dfrac{6-i4\sqrt{3}}{2}=3-2i\sqrt{3} \\ z_2=\dfrac{6+i4\sqrt{3}}{2}=3+2i\sqrt{3} \end{cases}$

إذن حلول المعادلة $(z^2+3)(z^2-6z+21)=0$ هي : $S=\{-i\sqrt{3};i\sqrt{3};3-2i\sqrt{3};3+2i\sqrt{3}\}$.

(II) 1 - أ - تبيين أنّ النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدّائرة (C) التي مركزها Ω ذات اللاّحقة $z_\Omega=3$:

$$|z_\Omega-z_A|=\left|3-\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}\right|=\left|3-\sqrt{3}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right)\right|=\left|3-i\sqrt{3}\right|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$
$$|z_\Omega-z_B|=\left|3-\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}\right|=\left|3-\sqrt{3}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\right)\right|=\left|3+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$
$$|z_\Omega-z_C|=\left|3-\left(3+2i\sqrt{3}\right)\right|=\left|3-3-2i\sqrt{3}\right|=\left|-2i\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}$$
$$|z_\Omega-z_D|=\left|3-\left(3-2i\sqrt{3}\right)\right|=\left|3-3+2i\sqrt{3}\right|=\left|2i\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}$$

واضح أنّ : $|z_\Omega-z_A|=|z_\Omega-z_B|=|z_\Omega-z_C|=|z_\Omega-z_D|$ أي : $\Omega A=\Omega B=\Omega C=\Omega D=2\sqrt{3}$.

ومنه النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدّائرة (C) .

ب - تبيين أنّ : $\left(\dfrac{z_D-1}{4}\right)^{1906}+\left(\dfrac{z_C-1}{4}\right)^{1963}=z_A$: لدينا :

$$\left(\frac{z_D-1}{4}\right)^{1906}+\left(\frac{z_C-1}{4}\right)^{1963}=\left(\frac{2-2i\sqrt{3}}{4}\right)^{1906}+\left(\frac{2+2i\sqrt{3}}{4}\right)^{1963}=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{1906}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{1963}$$

أي : $\left(\dfrac{z_D-1}{4}\right)^{1906}+\left(\dfrac{z_C-1}{4}\right)^{1963}=\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{1906}+\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{1963}=e^{-i\frac{1906\pi}{3}}+e^{i\frac{1963\pi}{3}}$

لدينا : $e^{i\left(\frac{-1905\pi-\pi}{3}\right)}+e^{i\left(\frac{1962\pi+\pi}{3}\right)}=e^{-i635\pi}\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}+e^{i654\pi}\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$

ومنه : $\left(\dfrac{z_D-1}{4}\right)^{1906}+\left(\dfrac{z_C-1}{4}\right)^{1963}=-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=i\sqrt{3}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}=z_A$

أ - تعيين عمدة وطويلة العدد المركب $\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}$ ثمّ استنتاج طبيعة المثلث BEC :

E نظيرة D بالنسبة إلى O معناه : $z_E=-z_B=-3+2i\sqrt{3}$.

$$\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\frac{3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{-3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}=\frac{3+3i\sqrt{3}}{-3+3i\sqrt{3}}=\frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

لدينا : $\left|\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}\right|=\dfrac{|z_C-z_B|}{|z_E-z_B|}=\dfrac{BC}{BE}=1$ و $\arg\left(\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}\right)=-\dfrac{\pi}{3}$ ومنه المثلث BEC متقايس الأضلاع .

ب - استنتاج طبيعة التحويل T الذي مركزه النقطة B ويحوّل E إلى C ثمّ كتابة الصيغة المركبة له :

لدينا : $\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $z_C-z_B=e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_E-z_B)$ إذن T دوران مركزه النقطة B وزاويته $-\dfrac{\pi}{3}$.

والعبارة المركبة لهذا التحويل هي :

$$z'=e^{-i\frac{\pi}{3}}\cdot z+z_B\left(1-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+z_B\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

3as.ency-education.com

1 - تعيين طبيعة (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاّحقة z التي تحقق : $|iz-3i|=\left|-3+i\sqrt{3}\right|$:

لدينا : $|iz-3i|=\left|-3+i\sqrt{3}\right|$ تكافئ : $|i(x+iy)-3i|=\sqrt{(-3)^2+3}$ تكافئ : $|-y+i(x-3)|=\sqrt{12}$ تكافئ : $(x-3)^2+y^2=12$ إذن (E) هي دائرة مركزها النقطة $\Omega(3;0)$ ونصف قطرها $r=2\sqrt{3}$.

2 - تعيين طبيعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاّحقة غير المعدومة z التي تحقق : $\arg\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)=2k\pi$ حيث : $k\in\mathbb{Z}$:

لدينا $\arg\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)=\arg(z)-\arg(\overline{z})$ ونعلم أنّ : $\arg(\overline{z})=-\arg(z)$ وعليه $\arg\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)=2\arg(z)$ وعليه حتى تكون $\arg\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)=2k\pi$ يكون $\arg(z)=k\pi$ يكافئ : $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM}\right)=k\pi$ إذن (Γ) هي محور الفواصل باستثناء النقطة O .

التمرين الرابع

(I) 1 - دراسة تغيّرات الدّالة g .

النهايات : $\lim\limits_{x\to 0\atop x>0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0\atop x>0}(1+x^2+\ln x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2+\ln x)=+\infty$.

المشتقة : الدّالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي : $g'(x)=2x+\frac{1}{x}$.

نلاحظ أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ فإنّ : $g(x)\succ 0$ ومنه الدّالة g متزايدة تماما .

جدول التغيّرات :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

2 - تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدًا α حيث : $0.32\prec\alpha\prec 0.33$:

لدينا $g(0.32)=-0.037$ و $g(0.33)=0.00023$.

من جدول التغيرات لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0.32;0.33[$ و $g(0.32)\times g(0.33)\prec 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $0.32\prec\alpha\prec 0.33$.

3 - استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

(II) 1 - حساب $\lim\limits_{x\to 0\atop x>0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$:

$\lim\limits_{x\to 0\atop x>0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0\atop x>0}\left(-x+\frac{2+\ln x}{x}\right)=-\infty$ لأنّ : $\lim\limits_{x\to 0\atop x>0}\ln x=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+\frac{2+\ln x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)=-\infty$ لأنّ : $\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0\right\}$

2 - تبيين أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=-\frac{g(x)}{x^2}$ ثمّ تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f :

الدّالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=-1+\left(\frac{\frac{1}{x}\times x-(2+\ln x)}{x^2}\right)=-1+\frac{-\ln x-1}{x^2}=\frac{-x^2-\ln x-1}{x^2}=-\frac{g(x)}{x^2}$$

جدول تغيّرات الدّالة f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

3 - تبيين أنّ : $f(\alpha)=2\left(\frac{1}{2\alpha}-\alpha\right)$ ثمّ تعيين حصرًا للعدد $f(\alpha)$:

لدينا : $f(\alpha)=-\alpha+\frac{2+\ln\alpha}{\alpha}\cdots(1)$ ولدينا : $g(\alpha)=0$ أي : $1+\alpha^2+\ln\alpha=0$ ومنه $\ln\alpha=-(1+\alpha^2)$

بالتعويض في (1) نجد :

$$f(\alpha)=-\alpha+\frac{2+\ln\alpha}{\alpha}=-\alpha+\frac{2-(1+\alpha^2)}{\alpha}=-\alpha+\frac{1-\alpha^2}{\alpha}=-\alpha+\frac{1}{\alpha}-\frac{\alpha^2}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}-2\alpha=2\left(\frac{1}{2\alpha}-\alpha\right)$$

4 - حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x]$ واستنتاج أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته :

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)+x]=\lim_{x\to+\infty}\left[-x+\frac{2+\ln x}{x}+x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)=0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$.

- دراسة الوضع النّسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) : لدينا : $f(x)-y=f(x)+x=\frac{2+\ln x}{x}$

إشارة $f(x)+x$ من إشارة $2+\ln x=0$ لأنّ $x\succ 0$.

لدينا : $f(x)+x=0$ معناه $\frac{2+\ln x}{x}=0$ أي $2+\ln x=0$ معناه $\ln x=-2$ ومنه $x=e^{-2}$.

- لمّا $x\succ e^{-2}$ معناه $\ln x\succ -2$ أي $2+\ln x\succ 0$ ومنه $f(x)-y\succ 0$ ومنه (C_f) فوق (Δ) على المجال $]e^{-2};+\infty[$.

- لمّا $x\prec e^{-2}$ معناه $\ln x\prec -2$ أي $2+\ln x\prec 0$ ومنه $f(x)-y\prec 0$ ومنه (C_f) تحت (Δ) على المجال $]0;e^{-2}[$.

- المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة $(e^{-2};-e^{-2})$ ، $((C_f)\cap(\Delta)=\{(e^{-2};-e^{-2})\})$.

5 - اثبات أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيينها . كتابة معادلة المماس (T) :

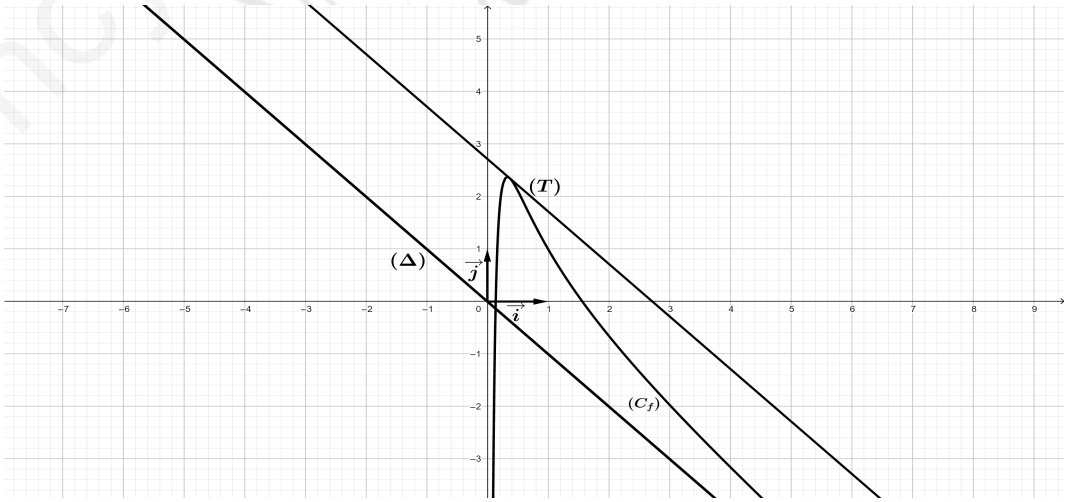
نعتبر النقطة $A(x_0;f(x_0))$.

المماس (T) عند النقطة A يوازي المستقيم (Δ) معناه $f'(x_0)=-1$ معناه $-\frac{g(x_0)}{x_0^2}=-1$ أي $g(x_0)=x_0^2$

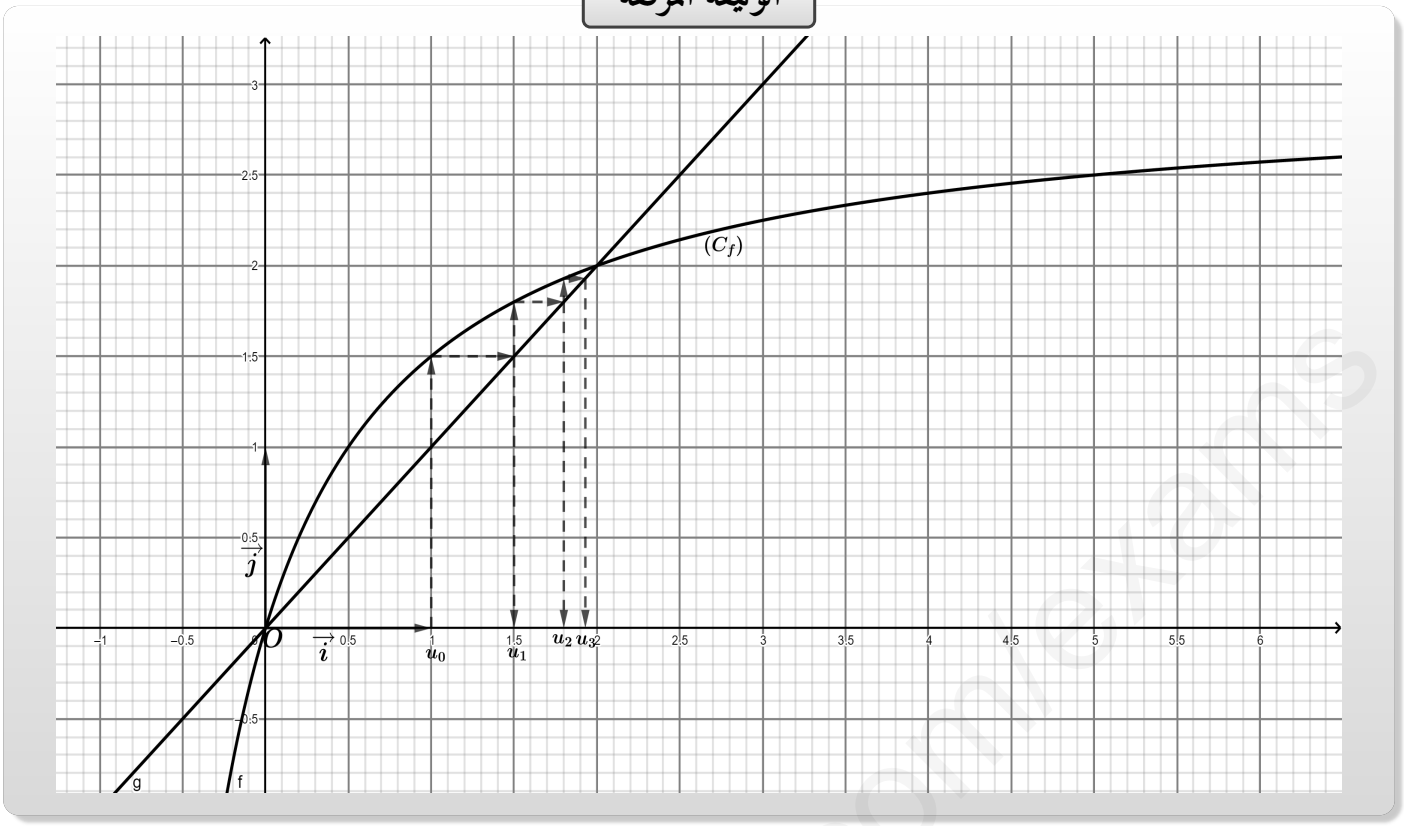
أي $1+x_0^2+\ln x_0=x_0^2$ ومنه $x_0=e^{-1}$ وعليه إحداثيات النقطة A التي يكون عندها المماس (T) يوازي المستقيم (Δ) هي $A(e^{-1};e-e^{-1})$.

معادلة المماس (T) : $(T):y_T=f'(e^{-1})(x-e^{-1})+f(e^{-1})=-x+e^{-1}+e-e^{-1}=-x+e$

6 - إنشاء المستقيم (Δ) ، المماس (T) والمنحنى (C_f) :



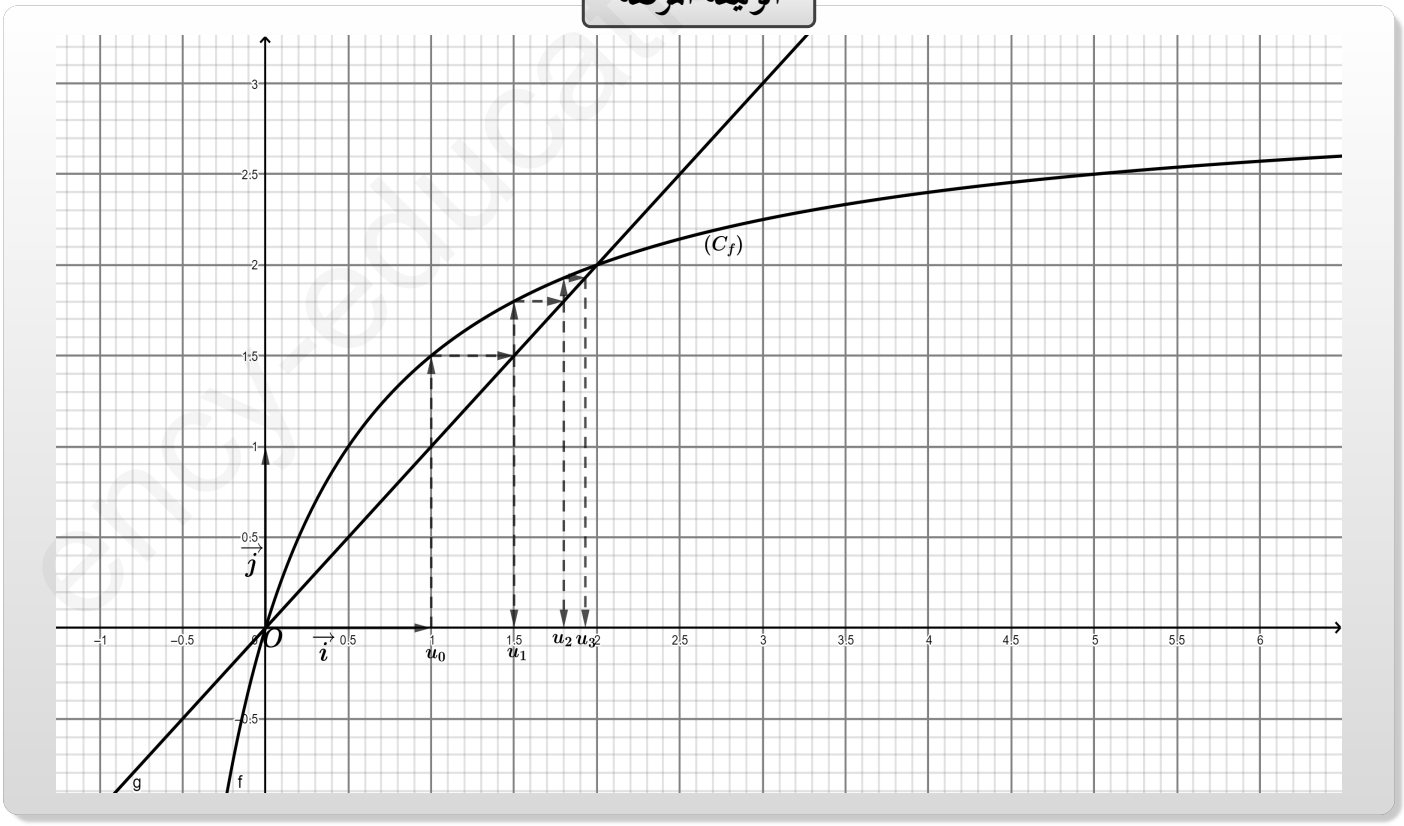
الوثيقة المرفقة



تُلصق الوثيقة المرفقة مع الإجابة النموذجية على الكراس

.....

الوثيقة المرفقة



تُلصق الوثيقة المرفقة مع الإجابة النموذجية على الكراس

وزارة التربية الوطنية
مديرية التربية لولاية بجاية
ثانوية الشهداء السبعة بوعيفل

السنــة الدراسيــة : 2020/2019

المستوى : الثالثة
علوم تجريبية
المـــدة : ساعتان

اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول☺: (6 نقاط)

يحتوي صندوق U على 10 كــرات: 3 منها بيضاء و7 سوداء و يحتوي صندوق V على 10 كرات: 7 منها بيضاء و 3 سوداء(الكرات لا نفرق بينها باللمس) .

I) نسحب عشوائيا كرة من الصندوق U: اذا كانت بيضاء نعيدها الى نفس الصندوق و نسحب منه عشوائيا 3 كرات في أن واحد. أما اذا كانت سوداء فنضعها في الصندوق V و نسحب منه عشوائيا 3 كرات على التوالي و بدون ارجاع. نعتبر الحادثتين:

A: الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء و من الصندوق U.

B: الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء و من الصندوق V.

1) أحسب كل من: $P(A)$ و $P(B)$.

2) استنتج احتمال أن تكون الكرات الثلاثة المسحوبة بيضاء .

3) اذا علمت أن الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء، ما هو احتمال أن تكون من الصندوق U.

II) نفرغ محتوى الصندوقين U و V في كيس غير شفاف و نضيف له n كرة حمراء $(n \geq 2)$.

نسحب عشوائيا من الكيس كرتان على التوالي مع الإرجاع. نسمي X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المتبقية في الكيس.

1) برر أن قيم المتغير العشوائي X هي: $\{n\ ;\ n-1\ ;\ n-2\}$.

2) عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

3) نضع $n=2$ ، احسب الأمل الرياضياتي ، التباين و الإنحراف للمتغير العشوائي X.

التمرين الثاني☺: (5 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 0 \ ; \ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n \end{cases}$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n$ و $w_n = 5^n \times u_n$.

1) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{5}$، ثم اكتب v_n بدلالة n.

2) أ) بين أن المتتالية (w_n) حسابية أساسها 5.

ب) اكتب w_n بدلالة n، ثم استنتج u_n بدلالة n.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$S_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots\ldots + v_{n-1}$ ، $S'_n = w_n + w_{n+1} + \ldots\ldots\ldots + w_{n+2020}$ و $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots\ldots\ldots \times v_n$

✓ أحسب S_n ، S'_n و P_n بدلالة n.

ency-education.com

التمرين الثالث☺ (9 نقاط)

I) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ حيث: $P(z)=z^3+\left(1-i\sqrt{3}\right)z^2-2\sqrt{3}iz-2-2\sqrt{3}i$.

1) عين الأعداد الحقيقية a و b حيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=\left(z-1-i\sqrt{3}\right)\left(z^2+az+b\right)$.

2) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$.

II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط : A , B , C و D التي لواحقها على الترتيب هي : $z_A=-1+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=1+i\sqrt{3}$ و $z_D=-z_A$.

1) أكتب العددان المركبان : z_A, z_C على الشكل الأسي ، استنتج الشكل الأسي لكل من z_B ، $\frac{z_A}{z_C}$.

2) أكتب $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الجبريثم على الشكل الأسي ،استنتج طبيعة المثلث OAB .

3) اكتب العدد المركب $\frac{z_C}{z_A}$ على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

4) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد : $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ تخيلي صرف .

5) عين (E_1) و (E_2) مجموعتي النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث:

$$(E_1):|z+1-i|=|iz-1-i|$$

$$(E_2):Arg\left(z-1-\sqrt{3}i\right)=Arg\left(\overline{z}-1+\sqrt{3}i\right)+\pi+2k\pi \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

6) نعتبر التحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' و الذي يحول النقطة A إلى B و يحول B إلى D.

a. بين أن العبارة المركبة للتحويل T هي: $z'=iz$.

b. عيّن طبيعة التحويل T و حدد عناصره المميزة .

c. عين z_E لاحقة النقطة E صورة النقطة D بالتحويل T .

d. ماذا تستنتج بالنسبة الى النقط A ، B ، D و E.

أستاذتكم تتمنى لكم كل التوفيق و النجاح - بن صافية-

ency-education.com/exams

الإجابة المقترحة للإختبار الفصل الثاني:

التمرين الأول☺:

I) A: الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء من الصندوق U.
B: الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء و من الصندوق V.

1) حساب كل من: $P(A)$ و $P(B)$:

$$P(A)=\frac{3}{10}\times\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30} \quad \text{و} \quad P(B)=\frac{7}{10}\times\frac{A_7^3}{A_{11}^3}=\frac{49}{330}$$

2) استنتاج احتمال أن تكون الكرات الثلاثة المسحوبة بيضاء:
(C نسميها الحادثة):قد تكون بيضاء ومن الصندوق U او بيضاء و من الصندوق V.

$$P(C)=P(A)+P(B)=\frac{1}{30}+\frac{49}{330}=\frac{60}{330}=\frac{2}{11}$$

4) اذا علمت أن الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء، ما هو احتمال أن تكون من الصندوق U:

$$P_C(U)=\frac{P(C\cap U)}{P(C)}=\frac{P(A)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{30}}{\frac{2}{11}}=\frac{1\times 11}{30\times 2}=\frac{11}{60}$$

II) نسمي X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المتبقية في الكيس.

1) برر أن قيم المتغير العشوائي X هي: $\{n\ ;\ n-1\ ;\ n-2\}$.

اذا سحبنا كرتان ليستا حمراوتان، يبقى في الكيس n كرة حمراء .
اذا سحبنا كرتان احداهما حمراء، يبقى في الكيس $n-1$ كرة حمراء .
اذا سحبنا كرتان حمراوتان، يبقى في الكيس $n-2$ كرة حمراء .

2) قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

$$P(X=n)=\frac{20^2}{(n+20)^2}=\frac{400}{n^2+40n+400}$$

$$P(X=n-1)=\frac{2\left(n^1\times 20^1\right)}{(n+20)^2}=\frac{40n}{n^2+40n+400}$$

$$P(X=n-1)=\frac{n^2}{(n+20)^2}=\frac{n^2}{n^2+40n+400}$$

X	n	$n-1$	$n-2$
$P(X=x_i)$	$\frac{400}{n^2+40n+400}$	$\frac{40n}{n^2+40n+400}$	$\frac{n^2}{n^2+40n+400}$

3) نضع $n=2$

X	2	1	0
$P(X=x_i)$	$\frac{400}{484}$	$\frac{80}{484}$	$\frac{4}{484}$

- **الأمل الرياضياتي :** $E(X)=\frac{2\times 400+1\times 80+0\times 4}{484}=1.8$
- **التباين:** $V(X)=\frac{2^2\times 400+1^2\times 80+0^2\times 4}{484}-(1.8)^2=0.23$
- **الانحراف:** $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0.23}=0.48$.

التمرين الثاني: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي:

$$\begin{cases} u_0=0\ ;\ u_1=1 \\ u_{n+2}=\frac{2}{5}u_{n+1}-\frac{1}{25}u_n \end{cases}.$$

نضع : $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n$ و $w_n=5^n\times u_n$.

1) اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{5}$:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+2}-\frac{1}{5}u_{n+1}}{u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n}=\frac{\frac{2}{5}u_{n+1}-\frac{1}{25}u_n-\frac{1}{5}u_{n+1}}{u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n}$$

$$=\frac{\frac{1}{5}\left(u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n\right)}{\left(u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n\right)}=\frac{1}{5}$$

كتابة v_n بدلالة n: لدينا: $v_0=u_1-\frac{1}{5}u_0=1$

منه: $v_n=v_0\times q^n=\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

2) أ)تبيان أن المتتالية (w_n) حسابية أساسها 5:

$$w_{n+1}-w_n=5^{n+1}\times u_{n+1}-5^n\times u_n$$
$$=5^n\left(5u_{n+1}-u_n\right)$$

لدينا: $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n$ منه: $u_{n+1}=v_n+\frac{1}{5}u_n=\left(\frac{1}{5}\right)^n+\frac{1}{5}u_n$.

اذن: $w_{n+1}-w_n=5^n\left(5\left(\left(\frac{1}{5}\right)^n+\frac{1}{5}u_n\right)-u_n\right)$

$$=5^n\left(5\times\frac{1}{5^n}+u_n-u_n\right)=5$$

ب) كتابة w_n بدلالة n: $w_n=w_0+nr=0+n\times 5=5n$

استنتاج u_n بدلالة n:

منه: $w_n=5^n\times u_n$ $\quad u_n=\frac{w_n}{5^n}=\frac{5n}{5^n}$.

3) حساب S_n و S'_n و P_n بدلالة n:

3as.ency-education.com

$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots\ldots + v_{n-1} = v_0\left(\frac{1-q^{n-1-0+1}}{1-q}\right)$$

$$= 1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}\right) = \frac{5}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

$$S'_n = w_n + w_{n+1} + \ldots\ldots\ldots + w_{n+2020}$$

$$= \frac{n+2020-n+1}{2}\left(w_n + w_{n+2020}\right)$$

$$= \frac{2021}{2}\left(5n+5\left(n+2020\right)\right) = 2021\left(5n+1010\right)$$

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots\ldots\ldots \times v_n$$

و:

$$= 1\times\left(\frac{1}{5}\right)\times\left(\frac{1}{5}\right)^2\times\left(\frac{1}{5}\right)^3\times\ldots\ldots\ldots\ldots\times\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{5}\right)^{0+1+2+\ldots\ldots+n} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{n-0+1}{2}(0+n)} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

التمرين الثالث☺

I) $P(z) = z^3 + \left(1-i\sqrt{3}\right)z^2 - 2\sqrt{3}iz - 2 - 2\sqrt{3}i$.

1) تعيين الأعداد الحقيقية a و b :

$P(z) = \left(z-1-i\sqrt{3}\right)\left(z^2+az+b\right)$:

نجد: $a=2$ و $b=2$

2) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $P(z)=0$:

$z_0 = 1+i\sqrt{3}$ ، $z_1 = -1+i$ و $z_2 = -1-i$

II) $z_A = -1+i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 1+i\sqrt{3}$ و $z_D = -z_A$.

1) أكتب العددان المركبان : z_A, z_C على الشكل الأسي ، استنتج الشكل الأسي لكل من z_B ، $\frac{z_A}{z_C}$:

$z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ، $z_C = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $z_B = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{-3\pi}{4}\right)}$

و $\frac{z_A}{z_C} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{12}\right)}$.

2) كتابة $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الجبري و الأسي ، ثم استنتاج طبيعة المثلث OAB :

$\frac{z_A}{z_B} = \frac{(-1+i)\times(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{1-1-2i}{1+1} = -i$ منه: $\frac{z_A}{z_B} = e^{i\left(\frac{-\pi}{2}\right)}$

منه: $OA = OB$ و $Arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = -\frac{\pi}{2}$ $\left|\frac{z_A}{z_B}\right| = 1$

منه: $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right) = -\frac{\pi}{2}$ منه المثلث قائم و متساوي الساقين.

3) اكتب العدد المركب $\frac{z_C}{z_A}$ على الشكل الجبري :

$$\frac{z_A}{z_C} = \frac{-1+i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(-1+i)\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1^2+\sqrt{3}^2} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)+i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)$$

استنتاج القيمة المضبوطة لـ : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$:

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right)$$ ،

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{2}}\right)$$

4) عين قيم العدد الطبيعي n :

$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ تخيلي صرف معناه: $Arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{\pi}{2}+k\pi$.

منه:

$$n\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow n = \left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\times\left(\frac{2}{-\pi}\right)$$

$n = -1-2k$, $k \in \mathbb{Z}^*$

5) تعيين (E_1) و (E_2) :

لدينا: $(E_1): |z+1-i| = |iz-1-i|$ منه:

$(E_1): |z-(-1+i)| = |i(z+i-1)|$

$(E_1): |z-z_A| = |z-z_D|$ تكافيء: $AM = DM$

منه: (E_1) هي محور القطعة المستقيمة $[AD]$.

لدينا:

$(E_2): Arg\left(z-1-\sqrt{3}i\right) = Arg\left(\overline{z}-1+\sqrt{3}i\right)+\pi+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$(E_2): Arg\left(z-(1+\sqrt{3}i)\right) = -Arg\left(\overline{z}-1+\sqrt{3}i\right)+\pi+2k\pi$

$(E_2): Arg\left(z-(1+\sqrt{3}i)\right) = -Arg\left(z-(1+\sqrt{3}i)\right)+2k\pi+\pi+2k\pi$

$(E_2): 2Arg\left(z-(1+\sqrt{3}i)\right) = \pi+4k\pi$

$(E_2): Arg\left(z-(1+\sqrt{3}i)\right) = \frac{\pi}{2}+2k\pi$

$(E_2): \left(\overrightarrow{U};\overrightarrow{MC}\right) = \frac{\pi}{2}+2k\pi$

منه: (E_2) هي نصف المستقيم $[CM)$ الموازي لمحور التراتيب ما عدا النقطة C .

6)

أ) تبيان أن العبارة المركبة للتحويل T هي: $z' = iz$:

T يكتب على الشكل: $z' = az+b$ و يحول النقطة A إلى B و يحول B إلى D . منه: اذن:

$$\begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_D = az_B + b \end{cases}$$

$$a = \frac{z_B - z_D}{z_A - z_B} = i \quad \text{و} \quad b = z_B - az_A = 0$$

ب) طبيعة التحويل T و عناصره المميزة :

$a \in \mathbb{C}$ و $|a| = 1$ منه T دوران زاويته $\theta = Arg(a) = \frac{\pi}{2}$

و مركزه Ω حيث: $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = 0$.

ency-education.com/exams

ت) تعيين z_E لاحقة النقطة E صورة النقطة D:

$z_E = iz_D$ منه: $z_E = i(1-i) = i+1$

ث) نستنتج أن النقط A ، B ، D و E تنتمي الى نفس الدائرة ذات المركز O و نصف القطر $R = \sqrt{2}$.

ency-education.com/exams

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية هواري بومدين — المستوى :الثالثة علوم تجريبية

الإختبار الثاني في مادة : الرياضيات — المدة : C_3^2 سا

التمرين الأول (4نقاط)

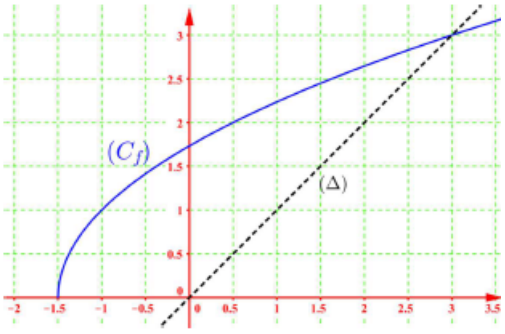
نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بما يلي : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

❶ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0,3]$ بما يلي : $f(x) = \sqrt{2x+3}$

✍ أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0,3]$ وشكل جدول تغيراتها

✍ بين أنه إذا كان $x \in [0,3]$ فإن $f(x) \in [0,3]$

❷ ✍ باستعمال المحنى (C_f) الممثل للدالة f والمستقيم $(\Delta) : y = x$



مثل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n)

✍ ما هو تخمينك لإتجاه تغير المتتالية (u_n) ؟

❸ ✍ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \preceq u_n \preceq 3$

✍ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

✍ إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة

❹ ✍ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \preceq 3 - u_{n+1} \preceq \frac{2}{3}(3 - u_n)$

✍ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \preceq 3 - u_n \preceq 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ثم أحسب $\lim U_n$

التمرين الثاني (4نقاط)

نعتبر كثير الحدود $P(Z)$ للمتغير المركب Z حيث : $P(Z) = Z^3 - 15Z^2 + 81Z - 175$

❶ أحسب $p(7)$ ثم حلل $p(Z)$ الى جداء عاملين

❷ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(Z) = 0$

❸ في المستوي المركب المنسوب الى م م م $(O; \vec{U}; \vec{V})$ نعتبر النقط A, B و C التي لواحقها:

$Z_C = 7, Z_B = 4 + 3i, Z_A = 4 - 3i$

أ–علم النقط A, B و C

ب–تحقق أن : $Z_A - Z_C = i(Z_B - Z_C)$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

❹ ليكن R الدوران الذي مركزه Ω ودو اللاحقة $Z_\Omega = 4$ ويحول النقطة C الى B

أ–أكتب العبارة المركبة للدوران R

ب–أوجد Z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران R ثم علمها في المعلم السابق

ج–ماطبيعة الرباعي $ACBD$

❺ عين (γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z حتى يكون $\frac{Z - Z_B}{Z - Z_C}$ تخيليا صرفا موجبا ثم أنشئها

❻ أنشئ (σ) صورة (γ) بالدوران R

ency-education.com/bams

3as.ency-education.com

التمرين الثالث (6نقاط)

يحتوي كيس U_1 على ثمانية كريات ثلاث منها تحمل الرقم 2 والبقية تحمل الرقم 3 يحتوي كيس U_2 على عشر كريات من بينها خمسة كريات حمراء تحمل الارقام $3,3,3,1,1$ وأربعة بيضاء تحمل الارقام $2,2,1,1$ وكرة خضراء واحدة تحمل الرقم 1 ويحتوي كيس U_3 على تسعة كريات منها أربعة حمراء تحمل الارقام $3,2,2,1$ وثلاثة بيضاء تحمل الارقام $3,2,1$ وكرتين خضراويتين تحملان الرقمين $3,3$ جميع الكريات لانفرق بينها باللمس

❶ نسحب كرية واحدة من الكيس U_1 اذا كان رقمها 2 فاننا نسحب ثلاث كريات على التوالي دون ارجاع من الكيس U_2 أما اذا كان رقمها 3 فنسحب ثلاث كريات على التوالي مع الارجاع من الكيس U_3

أ–أحسب احتمال الحوادث التالية : A"الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون " B"الحصول على ثلاث كريات تحمل ألوان العلم الوطني " C"الحصول على ثلاث كريات من لونين فقط "

ب–ادا علمت أن الكريات الثلاث المسحوبة من نفس اللون فما احتمال أن تكون من الكيس U_3

❷ نفرغ جميع كريات الكيس U_3 في الكيس U_2 ثم نسحب من الكيس U_2 ثلاث كريات في ان واحد

وليكن المتغير العشوائي X الدي يرفق بكل عملية سحب مجموع الأرقام المحصل عليها

أ–عين قانون احتمال المتغير العشوائي X ب–أحسب كل من $\sigma(X);V(X);E(X)$

التمرين الرابع (6نقاط)

الجزء الأول

g الدالة المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=e^{-x}+x-1$

❶ أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

❷ بين انه من أجل كل $x\epsilon\mathbb{R}$: $g(x)\geqslant 0$ ثم استنتج أن: $e^{-x}+x\geqslant 1$

الجزء الثاني

نعتبر الدالة fالمعرفة على $\mathbb{R}$بـ : $f(x)=\dfrac{x}{e^{-x}+x}$ ،وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

① تحقق أنه من أجل كل $x\epsilon\mathbb{R}$: $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^{x}}}$

② أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثم فسر النتائج بيانيا

③ أ– بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{e^{-x}(1+x)}{(e^{-x}+x)^2}$

ب–أدرس اشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيراتها

④ أ–أكتب معادلة المماس (T)للمنحني (C_f)عند النقطة O

ب–تحقق أنه من أجل كل xمن $\mathbb{R}$: $x-f(x)=\dfrac{xg(x)}{g(x)+1}$ ثم استنتج اشارة $x-f(x)$

ج–أستنتج الوضع النسبي للمنحني (C_f)والمستقيم $(\triangle)$دا المعادلة $y=x$

⑤ أنشئ $(\triangle)$و(C_f)

⑥ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة $\dfrac{xe^{x}}{xe^{x}+1}-1=m$

3as.ency-education.com

اختبـــار الثلاثـــي الثانـــي

التمرين الأول : (07 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ $u_1 = 2$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = \frac{(n+1)u_n+n-1}{2n}$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geq 1$.

2) برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1$ واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-n)(u_n-1)}{2n}$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ماذا تستنتج ؟

4) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = \frac{u_n-1}{n}$.

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) عبر عن v_n بدلالة n .

5) احسب المجموع : $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

6) احسب المجموع : $S'_n = \ln(u_1 - 1) + \ln(u_2 - 1) + \cdots + \ln(u_n - 1)$.

التمرين الثاني : (06 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 قريصات لا نفرق بينها باللمس ، منها أربع قريصات بيضاء تحمل الرقم 0 وثلاث قريصات حمراء تحمل الرقم 7 و قريصتان بيضاوان تحملان الرقم 2 وقريصة حمراء تحمل الرقم 5 .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد 4 قريصات من هذا الصندوق .

نعتبر الحوادث الآتية :

A "جميع القريصات تحمل أرقاما مختلفة مثنى مثنى"

B "نستطيع تشكيل العدد أرقاما 2000"

C "جميع القريصات بيضاء"

D "جميع القريصات من نفس اللون ".

E "على الأقل توجد قريصة رقمها يختلف عن باقي أرقام القريصات الأخرى".

3as.ency-education.com

1) أ) بين أن $P(B) = \frac{4}{105}$.

ب) احسب : $P(A)$ ، $P(C)$ ، $P(D)$ و $P(E)$.

ج) نفرض أن الحادثة C محققة ، احسب احتمال الحادثة B .

2) نعتبر القيم النقدية الآتية الموافقة لسحب 4 كريات بالطريقة السابقة حيث :

- تشكيل العدد 5000 يوافقه 75 دينارا.
- تشكيل العدد 7000 يوافقه 50 دينارا.
- تشكيل العدد 2000 يوافقه 20 دينارا.
- تشكيل العدد 0000 يوافقه 25 دينارا بقيمة سالبة.
- بقية الحالات توافقها 5 دنانير بقيمة سالبة.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي القيمة النقدية الموافقة للسحبة.

- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثالث : (07 نقاط)

1) أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 - 2z + 4 = 0$.

حيث z_1 الحل الذي جزؤه التخيلي موجب.

ب) اكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي.

ج) استنتج حلول المعادلة : $(i\bar{z} + 2 - i)^2 - 2(i\bar{z} + 2 - i) + 4 = 0$.

د) عين طويلة وعمدة العددين المركبين ${z_1}^2$ و ${z_2}^2$ ثم استنتج الشكل الجبري لـ ${z_1}^2$ و ${z_2}^2$.

2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{u}; \vec{v})$.

A ، B ، A' و B' أربع نقط من المستوي لواحقها : $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ ، $z_{A'} = -2 + 2i\sqrt{3}$ و $z_{B'} = -2 - 2i\sqrt{3}$ على الترتيب.

أ) احسب $z_{\overrightarrow{AB}}$ و $z_{\overrightarrow{A'B'}}$ لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'B'}$ على الترتيب ، ماذا تستنتج؟

ب) احسب $z_{\overrightarrow{AA'}}$ و $z_{\overrightarrow{BB'}}$ لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{AA'}$ و $\overrightarrow{BB'}$ على الترتيب ، ماذا تستنتج؟

ج) ما طبيعة الرباعي $AA'BB'$ ؟

د) اكتب : $\frac{z_{A'} - z_A}{z_{B'} - z_B}$ على الشكل المثلثي واستنتج طبيعة المثلث $AA'B'$.

انتهى الموضوع

3as.ency-education.com

عرفي حال ≠ اختبار الثلاثي الثاني

ع ت ع 3

تمرين الأول :

1) نضع $P(n): U_n \geq 1$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

- من أجل $n=1$: $U_1 = 2 > 1$

ومنه $P(1)$ صحيحة

- نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ أي أن : $U_n \geq 1$

- ونبرهن صحة $P(n+1)$ ، أي أن :

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $U_{n+1} \geq 1$

لدينا : $U_n \geq 1$

$(n+1) U_n \geq n+1$

$(n+1) U_n + n - 1 \geq n+1+n-1$

$(n+1) U_n + n - 1 \geq 2n$

$\frac{(n+1) U_n + n - 1}{2n} \geq \frac{2n}{2n}$

$U_{n+1} \geq 1$

$P(n+1)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة أي أن : $U_n \geq 1$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

2) نضع : $P(n): U_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

- من أجل $n=1$: $U_1 = 1+1 = 2$

ومنه $P(1)$ صحيحة .

- نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

أي أن : $U_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1$

- ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي :

$U_{n+1} = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

لدينا : $U_{n+1} = \frac{(n+1) U_n + n - 1}{2n}$

$= \frac{(n+1)\left[n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1\right] + n - 1}{2n}$

$= \frac{n(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{2n} + 1$

$= \frac{(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{2} + 1$

$= (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$

$P(n+1)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة أي أن :

$U_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

- حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1\right)$

$= \lim \left(n\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + 1\right)$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \left(2n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(2\frac{n}{2^n} + 1\right)$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \left(2 \times \frac{n}{e^{\ln 2^n}} + 1\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(2 \times \frac{\ln 2}{\ln 2} \times \frac{n}{e^{n \ln 2}} + 1\right)$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{\ln 2} \times \frac{n \ln 2}{e^{n \ln 2}} + 1\right) = 1$

لأن $\frac{n \ln 2}{e^{n \ln 2}} = \frac{1}{\frac{e^{n \ln 2}}{n \ln 2}} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

لأن $\frac{e^{n \ln 2}}{n \ln 2} \xrightarrow{} +\infty$ (التزايد المقارن)

3as.ency-education.com

$$= \frac{\frac{(n+1)U_n + n - 1 - 2n}{2n}}{n+1} \times \frac{n}{U_n - 1}$$

$$= \frac{(n+1)U_n - n - 1}{2n(n+1)} \times \frac{n}{U_n - 1}$$

$$= \frac{(n+1)U_n - (n+1)}{2n(n+1)} \times \frac{n}{U_n - 1}$$

$$= \frac{U_n - 1}{2(U_n - 1)} = \frac{1}{2}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_1 = \frac{U_1 - 1}{1} = 1$

ب * التعبير عن v_n بدلالة n:

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(5

$$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

$$= v_1 \left(\frac{1 - q^n}{1 - q}\right) = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

(6

$$S'_n = \ln(U_1 - 1) + \ln(U_2 - 2) + \cdots + \ln(U_n - n)$$

$$= \ln(1v_1 + 1 - 1) + \ln(2v_2 + 1 - 1) + \cdots + \ln(nv_n + 1 - 1)$$

$$= \ln(1v_1) + \ln(2v_2) + \cdots + \ln(nv_n)$$

$$= \ln(1) + \ln(v_1) + \ln(2) + \ln(v_2) + \cdots + \ln(n) + \ln(v_n)$$

$$= \ln(1) + \ln(2) + \cdots + \ln(n) + \ln(v_1) + \ln(v_2) + \cdots + \ln(v_n)$$

$$= \ln(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n) + \ln(v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_n)$$

$$= \ln(n!) + \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \cdots \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

(3

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(n+1)U_n + n - 1}{2n} - U_n$$

$$= \frac{nU_n + U_n + n - 1 - 2nU_n}{2n}$$

$$= \frac{U_n - nU_n + n - 1}{2n}$$

$$= \frac{(1-n)U_n - (1-n)}{2n}$$

$$= \frac{(1-n)(U_n - 1)}{2n}$$

- استنتاج اتجاه تغير المتتالية (U_n)

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(1-n)(U_n - 1)}{2n}$$

$2n > 0$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، إذن إشارة الفرق هي من إشارة البسط.

لدينا حسب السؤال (1): $U_n \geq 1$ ومنه $U_n - 1 \geq 0$

و $1 - n \leq 0$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

إذن $U_{n+1} - U_n \leq 0$

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ومنه (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$.

- الاستنتاج:

بما أن $U_n \geq 1$ (محدودة من الأسفل) ومتناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$ فهي متقاربة (تتقارب نحو 1)

(4

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{U_{n+1} - 1}{n+1}}{\frac{U_n - 1}{n}}$$

$$= \frac{U_{n+1} - 1}{n+1} \times \frac{n}{U_n - 1}$$

$$= \frac{\frac{(n+1)U_n + n - 1}{2n} - 1}{n+1} \times \frac{n}{U_n - 1}$$

3as.ency-education.com

$P(X=50) = \frac{C_4^3 \times C_3^1}{210} = \frac{12}{210}$

$P(X=75) = \frac{C_4^3 \times C_1^1}{210} = \frac{4}{210}$

$P(X=-5) = 1 - \left(\frac{1}{210} + \frac{8}{210} + \frac{12}{210} + \frac{4}{210}\right)$

$= 1 - \frac{25}{210} = \frac{185}{210}$

ومنه

$X=x_i$	-5	-25	20	50	75
$P(X=x_i)$	$\frac{185}{210}$	$\frac{1}{210}$	$\frac{8}{210}$	$\frac{12}{210}$	$\frac{4}{210}$

- حساب الأمل الرياضياتي:

$E(X) = (-5)\times\frac{185}{210} - 25\times\frac{1}{210} + 20\times\frac{8}{210}$

$+50\times\frac{12}{210} + 75\times\frac{4}{210} = \frac{11}{21}$

التمرين الثالث:

(1 أ*

$z^2 - 2z + 4 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(4) = 4 - 16 = -12 = 12i^2$

$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}\,i$

$z_1 = \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{2} = 1 + \sqrt{3}\,i$

$z_2 = \frac{2 - 2\sqrt{3}\,i}{2} = 1 - \sqrt{3}\,i$

$S = \{1-\sqrt{3}i; 1+\sqrt{3}i\}$ ب*

$z_1 = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$

$z_2 = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$

ج* بوضع $iz + 2 - i = x$

نثبت المعادلة من الشكل: $X^2 - 2X - 4 = 0$

$= \ln(n!) + \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{0+1+\cdots+(n-1)}\right)$

$= \ln(n!) + \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}(n-1)}$

التمرين الثاني:

(1 عدد الحالات الممكنة = الطلبات المستخلصة $C_{10}^4 = 210$

$P(B) = \frac{C_2^1 \times C_4^3}{210} = \frac{4}{105}$ أ*

$P(A) = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{210} = \frac{56}{210} = \frac{28}{105}$ ب*

$P(C) = \frac{C_6^4}{210} = \frac{15}{210} = \frac{1}{14}$

$P(D) = \frac{C_6^4 + C_4^4}{210} = \frac{15+1}{210} = \frac{16}{210} = \frac{8}{105}$

- حساب $P(E)$:

لأن الحادثة $\bar{E}$ "لا تحوي أي فردية" وضعها يختلف عن باقي أرقام الفرديات الأخرى"

$P(\bar{E}) = \frac{C_4^4}{210} = \frac{1}{210}$

ومنه $P(E) = 1 - \frac{1}{210} = \frac{209}{210}$

ج* $P_C(B) = \frac{P(C \cap B)}{P(C)} = \frac{P(B)}{P(C)}$

$= \frac{8}{15}$

(2 $X = \{-5; -25; +20; +50; +75\}$

$P(X=-25) = \frac{C_4^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{210}$

$P(X=20) = \frac{C_4^3 \times C_2^1}{210} = \frac{8}{210}$

3as.ency-education.com

$z_{\overrightarrow{AA'}} = z_{A'} - z_A = -3 + \sqrt{3}i$

$z_{\overrightarrow{BB'}} = z_{B'} - z_B = -3 - \sqrt{3}i$

الشعاعان $\overrightarrow{AA'}$ و $\overrightarrow{BB'}$ غير مرتبطان خطيا.

جـ- الرباعي $AA'BB'$ شبه منحرف.

$$\frac{z_{A'} - z_A}{z_{B'} - z_A} = \frac{-3+\sqrt{3}i}{-3-3\sqrt{3}i} \times \frac{-3+3\sqrt{3}i}{-3+3\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{9 - 9\sqrt{3}i - 3\sqrt{3}i - 9}{36} = \frac{-12\sqrt{3}i}{36}$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{3}i$$

$$\left|\frac{z_{A'} - z_A}{z_{B'} - z_A}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\arg\left(\frac{z_{A'} - z_A}{z_{B'} - z_A}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{z_{A'} - z_A}{z_{B'} - z} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)$$ ومنه:

استنتاج طبيعة المثلث $AA'B'$:

$$\left|\frac{z_{A'} - z_A}{z_{B'} - z_A}\right| = \frac{AA'}{AB'} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ومنه: $AA' = \frac{\sqrt{3}}{3}AB'$

$$\arg\left(\frac{z_{A'} - z_A}{z_{B'} - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AA'}) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

ومنه $AA'B'$ مثلث قائم في A.

ومنه:

$X = 1 + \sqrt{3}i$

$i\bar{z} + 2 - i = 1 + \sqrt{3}i$: ليكن M

$$\bar{z} = \frac{1+\sqrt{3}i - 2 + i}{i} = \frac{-1 + (1+\sqrt{3})i}{i}$$

$$\bar{z} = \frac{-1+(1+\sqrt{3})i}{i}\left(\frac{-i}{-i}\right) = i + 1 + \sqrt{3}$$

$z = 1 + \sqrt{3} - i$ ومنه:

$X = 1 - \sqrt{3}i$: وليكن M'

$i\bar{z} + 2 - i = 1 - \sqrt{3}i$: لـ M'

$$\bar{z} = \frac{1-\sqrt{3}i - 2 + i}{i} = \frac{-1 + (1-\sqrt{3})i}{i}$$

$$\bar{z} = \frac{-1+(1-\sqrt{3})i}{i}\left(\frac{-i}{-i}\right) = i + 1 - \sqrt{3}$$

$z = 1 - \sqrt{3} - i$ ومنه:

$S = \{1 - \sqrt{3} - i; 1 + \sqrt{3} - i\}$

لدينا: $z_1 = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$ ومنه: $z_1^2 = 4e^{\frac{2\pi}{3}i}$

إذن $|z_1^2| = 4$ و

$\arg(z_1^2) = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

و $z_2 = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$ ومنه: $z_2^2 = 4e^{-\frac{2\pi}{3}i}$

إذن $|z_2^2| = 4$ و $\arg(z_2^2) = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

لدينا:

$$z_1^2 = 4e^{\frac{2\pi}{3}i} = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_1^2 = 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_1^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$z_2^2 = 4e^{-\frac{2\pi}{3}i} = 4\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_2^2 = 4\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_2^2 = -2 - 2\sqrt{3}i$$

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 1 - i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3} = -2\sqrt{3}i$ ②

$z_{\overrightarrow{A'B'}} = z_{B'} - z_{A'} = -2 - 2i\sqrt{3} + 2 - 2i\sqrt{3} = -4\sqrt{3}i$

نلاحظ أن $z_{\overrightarrow{A'B'}} = 2z_{\overrightarrow{AB}}$

إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'B'}$ مرتبطان خطيا.

3as.ency-education.com