## التمارين

### التمرين الأول: بكالوريا 2017 – الموضوع الأول – الدورة العادية

نعتبر الأعداد الطبيعية $a$ ، $b$ و $c$ حيث:

$a = 2016$ ، $b = 1437$ و $c = 1954$

1) عين باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد $a$ ، $b$ و $c$ على 5.

2) استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من: $a + b + c$ ، $a \times b \times c$ و $b^4$ على 5.

3) أ- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $b^{4n} \equiv 1\ [5]$.

ب- استنتج أن العدد $b^{2016} - 1$ يقبل القسمة على 5.

4) أ- تحقق أن: $c \equiv -1\ [5]$.

ب- بين أن: $c^{1438} + c^{2017} \equiv 0\ [5]$.

### التمرين الثاني: بكالوريا 2017 – الموضوع الثاني – الدورة العادية

$a$ ، $b$ و $c$ ثلاثة أعداد طبيعية حيث:

$a \equiv -5\ [7]$ ، $b = 1966$ و $c = 2017$

1) عين باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد $a$ ، $b$ و $c$ على 7.

2) تحقق أن: $b \equiv -1\ [7]$.

3) أثبت أن العدد: $b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2$ يقبل القسمة على 7.

4) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي $k$ : $2^{3k} \equiv 1\ [7]$.

ثم استنتج أن:

$2^{3k+1} \equiv 2\ [7]$ و $2^{3k+2} \equiv 4\ [7]$

5) عين قيم العدد الطبيعي $n$ حتى يكون $2^n + 3$ قابلا للقسمة على 7.

### التمرين الثالث: بكالوريا 2017 – الموضوع الأول – الدورة الاستثنائية

1) أ- عين باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد 4 ، $4^2$ و $4^3$ على 9.

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $4^{3n} \equiv 1\ [9]$.

جـ- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $4^{3n+1} \equiv 4\ [9]$.

2) تحقق أن: $2020^{1438} \equiv 4\ [9]$.

3) بين أن العدد: $2020^{1438} - 2017^2 + 1995$ يقبل القسمة على 9.

## التمرين الرابع: بكالوريا 2017 – الموضوع الثاني – الدورة الاستثنائية

$a$ و $b$ عددان صحيحان حيث: $a \equiv 14\ [13]$ و $b \equiv -1\ [13]$.

1) أ- بين أن باقي القسمة الإقليدية للعددين $a$ و $b$ على 13 هو 1 و 12 على الترتيب.

ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من $a+b$ ، $a-b$ و $2a+b^2$ على 13.

2) بين أن العدد: $a^{1438}+b^{2017}$ يقبل القسمة على 13.

3) عين الأعداد الطبيعية $n$ بحيث: $b^{2017}+n+1438 \equiv 0\ [13]$.

## الحلول

### حل التمرين الأول: بكالوريا 2017 – الموضوع الأول – الدورة العادية

نعتبر الأعداد الطبيعية $a$ ، $b$ و $c$ حيث:

$$a=2016 \text{ ، } b=1437 \text{ و } c=1954$$

1) تعيين باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد $a$ ، $b$ و $c$ على 5:

➢ تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد $a$ على 5:

لدينا:

$$a=2016=403\times5+1$$

ونكتب:

$$a\equiv1\ [5]$$

ومنه:

باقي القسمة الإقليدية للعدد $a$ على 5 هو 1

➢ تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد $b$ على 5:

لدينا:

$$b=1437=287\times5+2$$

ونكتب:

$$b\equiv2\ [5]$$

ومنه:

باقي القسمة الإقليدية للعدد $b$ على 5 هو 2

➢ تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد $c$ على 5:

لدينا:

$$c=1954=390\times5+4$$

ونكتب:

$$c\equiv4\ [5]$$

ومنه:

باقي القسمة الإقليدية للعدد $c$ على 5 هو 4

2) استنتاج باقي القسمة الإقليدية لكل من: $a+b+c$ ، $a\times b\times c$ و $b^4$ على 5.

➢ استنتاج باقي القسمة الإقليدية لـ $a+b+c$ على 5:

لدينا من 1):

$$\begin{cases} a \equiv 1\ [5] \\ b \equiv 2\ [5] \\ c \equiv 4\ [5] \end{cases}$$

بالجمع طرف لطرف ينتج:

$$a+b+c \equiv 1+2+4\ [5]$$

$$a+b+c \equiv 7\ [5]$$

$$a+b+c \equiv 2\ [5]$$

ومنه:

باقي القسمة الإقليدية لـ $a+b+c$ على 5 هو 2

➢ استنتاج باقي القسمة الإقليدية لـ $a\times b\times c$ على 5:

لدينا من 1):

$$\begin{cases} a \equiv 1\ [5] \\ b \equiv 2\ [5] \\ c \equiv 4\ [5] \end{cases}$$

بالضرب طرف لطرف ينتج:

$$a\times b\times c \equiv 1\times 2\times 4\ [5]$$

$$a\times b\times c \equiv 8\ [5]$$

$$a\times b\times c \equiv 3\ [5]$$

ومنه:

باقي القسمة الإقليدية لـ $a\times b\times c$ على 5 هو 3

➢ استنتاج باقي القسمة الإقليدية لـ $b^4$ على 5:

لدينا من 1):

$$b \equiv 2\ [5]$$

$$b^4 \equiv 2^4\ [5]$$

$$b^4 \equiv 16\ [5]$$

$$b^4 \equiv 1\ [5]$$

ومنه:

باقي القسمة الإقليدية لـ $b^4$ على 5 هو 1

3) أ- التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $b^{4n} \equiv 1\ [5]$:

لدينا:

$$b^4 \equiv 1\ [5]$$

$$(b^4)^n \equiv (1)^n\ [5]$$

من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا: $1^n = 1$ و $(b^4)^n = b^{4n}$.

ومنه:

$$b^{4n} \equiv 1\ [5]$$

3) ب- استنتاج أن العدد $b^{2016} - 1$ يقبل القسمة على 5:

معناه استنتاج أن: $b^{2016} - 1 \equiv 0\ [5]$.

لدينا:

$$2016 = 4 \times 504$$

فنكتب:

$$b^{2016} \equiv b^{4\times 504}\ [5]$$
$$b^{2016} \equiv b^{4n}\ [5]\ ;\ n = 504$$
$$b^{2016} \equiv 1\ [5]$$
$$b^{2016} - 1 \equiv 1 - 1\ [5]$$
$$b^{2016} - 1 \equiv 0\ [5]$$

ومنه:

العدد $b^{2016} - 1$ يقبل القسمة على 5

4) أ- التحقق أن: $c \equiv -1\ [5]$.

لدينا:

$$1955 = 391 \times 5 + 0$$
$$1955 \equiv 0\ [5]$$
$$1955 - 1 \equiv 0 - 1\ [5]$$
$$1954 \equiv -1\ [5]$$

ومنه:

$$c \equiv -1\ [5]$$

4) ب- تبيان أن: $c^{1438} + c^{2017} \equiv 0\ [5]$.

لدينا:

$$c \equiv -1\ [5]$$

ونكتب:

$$\begin{cases} c^{1438} \equiv (-1)^{1438}\ [5] \\ c^{2017} \equiv (-1)^{2017}\ [5] \end{cases}$$

1438 عدد زوجي يعني: $(-1)^{1438} = 1$ و 2017 عدد فردي يعني: $(-1)^{2017} = -1$.

فينتج:

$$\begin{cases} c^{1438} \equiv 1\ [5] \\ c^{2017} \equiv -1\ [5] \end{cases}$$

بالجمع طرف لطرف نكتب:

$$c^{1438} + c^{2017} \equiv 1 - 1\ [5]$$

ومنه:

$$c^{1438} + c^{2017} \equiv 0\ [5]$$

## التمرين الثاني: بكالوريا 2017 – الموضوع الثاني – الدورة العادية

$a$ ، $b$ و $c$ ثلاثة أعداد طبيعية حيث:

$a \equiv -5\ [7]$ ، $b = 1966$ و $c = 2017$

1) تعيين باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد $a$ ، $b$ و $c$ على 7:

➢ تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد $a$ على 7:

لدينا:

$$a \equiv -5\ [7]$$
$$a \equiv 2\ [7]$$

ومنه:

باقي القسمة الإقليدية لـ $a$ على 7 هو 2

ملاحظة:

لا يمكن أن يكون باقي القسمة الإقليدية للعدد $a$ على 7 هو $-5$ لأنه سالب.

➢ تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد $b$ على 7:

لدينا:

$$b = 1966 = 280 \times 7 + 6$$

ونكتب:

$$b \equiv 6\ [7]$$

ومنه:

باقي القسمة الإقليدية للعدد $b$ على 7 هو 6

➢ تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد $c$ على 7:

لدينا:

$$c = 2017 = 288 \times 7 + 1$$

ونكتب:

$$c \equiv 1\ [7]$$

ومنه:

باقي القسمة الإقليدية للعدد $c$ على 7 هو 1

2) التحقق أن: $b \equiv -1\ [7]$.

لدينا:

$$1967 = 281 \times 7 + 0$$
$$1967 \equiv 0\ [7]$$
$$1967 - 1 \equiv 0 - 1\ [7]$$
$$1966 \equiv -1\ [7]$$

ومنه:

$$b \equiv -1\ [7]$$

3) إثبات أن العدد: $b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2$ يقبل القسمة على 7.

لإثبات أن العدد $b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2$ يقبل القسمة على 7 يكفي أن نثبت أن:

$$b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2 \equiv 0\ [7]$$

لدينا:

$b \equiv -1\ [7]$

$b^{2017} \equiv (-1)^{2017}\ [7]$

بما أن 2017 عدد فردي فإن: $(-1)^{2017} = -1$.

ومنه:

$$b^{2017} \equiv -1\ [7]$$

ولدينا:

$c \equiv 1\ [7]$

$c^{1438} \equiv 1^{1438}\ [7]$

ومنه:

$$c^{1438} \equiv 1\ [7]$$

فنكتب:

$b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2 \equiv -1 + 3 \times 1 - 2\ [7]$

$b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2 \equiv -1 + 3 - 2\ [7]$

$b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2 \equiv 0\ [7]$

ومنه:

العدد: $b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2$ يقبل القسمة على 7

4) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي $k$ : $2^{3k} \equiv 1\ [7]$.

لدينا:

$2^3 \equiv 8\ [7]$

$2^3 \equiv 1\ [7]$

$(2^3)^k \equiv 1^k\ [7]$

من أجل كل عدد طبيعي $k$ لدينا: $1^k = 1$ و $(2^3)^k = 2^{3k}$.

ومنه:

$$2^{3k} \equiv 1\ [7]$$

➢ استنتاج أن: $2^{3k+1} \equiv 2\ [7]$ و $2^{3k+2} \equiv 4\ [7]$.

لدينا:

$2^{3k} \equiv 1\ [7]$

$$\begin{cases} 2^{3k} \times 2^1 \equiv 1 \times 2^1\ [7] \\ 2^{3k} \times 2^2 \equiv 1 \times 2^2\ [7] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^{3k+1} \equiv 2\ [7] \\ 2^{3k+2} \equiv 4\ [7] \end{cases}$$

ومنه:

$$2^{3k+1} \equiv 2\ [7] \text{ و } 2^{3k+2} \equiv 4\ [7]$$

5) تعيين قيم العدد الطبيعي $n$ حتى يكون $2^n + 3$ قابلا للقسمة على 7:

العدد $2^n + 3$ يقبل القسمة على 7 معناه: $2^n + 3 \equiv 0\ [7]$.

لدينا:

$2^n + 3 \equiv 0\ [7]$
$2^n \equiv -3\ [7]$
$2^n \equiv 4\ [7]$

ولدينا:

$2^{3k+2} \equiv 4\ [7]$

بالمطابقة نجد:

$$n = 3k + 2\ ;\ k \in \mathbb{N}$$

**التمرين الثالث: بكالوريا 2017 – الموضوع الأول – الدورة الاستثنائية**

1) أ- تعيين باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد 4 ، $4^2$ و $4^3$ على 9:

لدينا:

$$\begin{cases} 4 \equiv 4\ [9] \\ 4^2 \equiv 7\ [9] \\ 4^3 \equiv 1\ [9] \end{cases}$$

ومنه:

- باقي القسمة الإقليدية للعدد 4 على 9 هو 4
- باقي القسمة الإقليدية للعدد $4^2$ على 9 هو 7
- باقي القسمة الإقليدية للعدد $4^3$ على 9 هو 1

1) ب- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $4^{3n} \equiv 1\ [9]$.

لدينا:

$4^3 \equiv 1\ [9]$
$(4^3)^n \equiv 1^n\ [9]$

من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا: $1^n = 1$ و $4^{3n} = (4^3)^n$.

ومنه:

$$4^{3n} \equiv 1\ [9]$$

1) جـ- استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $4^{3n+1} \equiv 4\ [9]$.

لدينا:

$4^{3n} \equiv 1\ [9]$
$4^{3n} \times 4 \equiv 1 \times 4\ [9]$
$4^{3n+1} \equiv 4\ [9]$

ومنه:

نستنتج من أجل كل عدد طبيعي $n$ أن:

$$4^{3n+1} \equiv 4\ [9]$$

2) التحقق أن: $2020^{1438} \equiv 4\ [9]$.

لدينا:

$$2020 = 224 \times 9 + 4$$
$$2020 \equiv 4\ [9]$$
$$2020^{1438} \equiv 4^{1438}\ [9]$$
$$2020^{1438} \equiv 4^{3\times 479+1}\ [9]$$
$$2020^{1438} \equiv 4^{3n+1}\ [9]\ ;\ n = 479$$

من 1) جـ- لدينا:

$$4^{3n+1} \equiv 4\ [9]$$

ومنه:

$$2020^{1438} \equiv 4\ [9]$$

3) تبيان أن العدد: $2020^{1438} - 2017^2 + 1995$ يقبل القسمة على 9.

لتبيان أن العدد $2020^{1438} - 2017^2 + 1995$ يقبل القسمة على 9 يكفي أن نبين أن:

$$2020^{1438} - 2017^2 + 1995 \equiv 0\ [9]$$

لدينا من 2):

$$2020^{1438} \equiv 4\ [9]$$

ولدينا:

$$2017 = 224 \times 9 + 1$$
$$2017 \equiv 1\ [9]$$
$$2017^2 \equiv 1^2\ [9]$$

ومنه:

$$2017^2 \equiv 1\ [9]$$

ولدينا:

$$1995 = 221 \times 9 + 6$$

ومنه:

$$1995 \equiv 6\ [9]$$

فنكتب:

$$2020^{1438} - 2017^2 + 1995 \equiv 4 - 1 + 6\ [9]$$
$$2020^{1438} - 2017^2 + 1995 \equiv 9\ [9]$$
$$2020^{1438} - 2017^2 + 1995 \equiv 0\ [9]$$

ومنه:

العدد: $2020^{1438} - 2017^2 + 1995$ يقبل القسمة على 9

## التمرين الرابع: بكالوريا 2017 – الموضوع الثاني – الدورة الاستثنائية

$a$ و $b$ عددان صحيحان حيث: $a \equiv 14\ [13]$ و $b \equiv -1\ [13]$.

1) أ- تبيان أن باقي القسمة الإقليدية للعددين $a$ و $b$ على 13 هو 1 و 12 على الترتيب:

لدينا:

$$\begin{cases} a \equiv 14\ [13] & \text{(من المعطيات)} \\ 14 \equiv 1\ [13] \end{cases}$$

نجد:

$$a \equiv 1\ [13]$$

ومنه:

➢ باقي القسمة الإقليدية للعدد $a$ على $13$ هو $1$

ولدينا:

$$13 \equiv 0\ [13]$$
$$13 - 12 \equiv 0 - 12\ [13]$$
$$1 \equiv -12\ [13]$$
$$-1 \equiv 12\ [13]$$

فنكتب:

$$\begin{cases} b \equiv -1\ [13] & \text{(من المعطيات)} \\ -1 \equiv 12\ [13] \end{cases}$$

نجد:

$$b \equiv 12\ [13]$$

ومنه:

➢ باقي القسمة الإقليدية للعدد $b$ على $13$ هو $12$

1) ب- استنتاج باقي القسمة الإقليدية لكل من $a+b$ ، $a-b$ و $2a+b^2$ على $13$:

➢ استنتاج باقي القسمة الإقليدية لـ $a+b$ على $13$:

من 1) أ- لدينا:

$$\begin{cases} a \equiv 1\ [13] \\ b \equiv -1\ [13] \end{cases}$$

بالجمع طرف لطرف نكتب:

$$a + b \equiv 1 - 1\ [13]$$

نجد:

$$a + b \equiv 0\ [13]$$

ومنه:

باقي القسمة الإقليدية للعدد $a+b$ على $13$ هو $0$

➢ استنتاج باقي القسمة الإقليدية لـ $a-b$ على $13$:

من 1) أ- لدينا:

$$\begin{cases} a \equiv 1\ [13] \\ b \equiv -1\ [13] \end{cases}$$

بالطرح طرف من طرف نكتب:

$$a - b \equiv 1 + 1\ [13]$$

نجد:

$$a - b \equiv 2\ [13]$$

ومنه:

باقي القسمة الإقليدية للعدد $a - b$ على 13 هو 2

➢ استنتاج باقي القسمة الإقليدية لـ $2a + b^2$ على 13:

من 1) أ- لدينا:

$$\begin{cases} a \equiv 1\ [13] \\ b \equiv -1\ [13] \end{cases}$$

ونكتب:

$$\begin{cases} 2a \equiv 2 \times 1\ [13] \\ b^2 \equiv (-1)^2\ [13] \end{cases}$$

أي:

$$\begin{cases} 2a \equiv 2\ [13] \\ b^2 \equiv 1\ [13] \end{cases}$$

بالجمع طرف لطرف نكتب:

$$2a + b^2 \equiv 2 + 1\ [13]$$

نجد:

$$2a + b^2 \equiv 3\ [13]$$

ومنه:

باقي القسمة الإقليدية للعدد $2a + b^2$ على 13 هو 3

2) تبيان أن العدد: $a^{1438} + b^{2017}$ يقبل القسمة على 13.

لتبيان أن العدد $a^{1438} + b^{2017}$ يقبل القسمة على 13 يكفي أن نبين أن:

$$a^{1438} + b^{2017} \equiv 0\ [13]$$

لدينا:

$$a \equiv 1\ [13]$$

$$a^{1438} \equiv (1)^{1438}\ [13]$$

ومنه:

$$a^{1438} \equiv 1\ [13]$$

ولدينا:

$$b \equiv -1\ [13]$$

$$b^{2017} \equiv (-1)^{2017}\ [13]$$

بما أن 2017 عدد فردي فإن: $(-1)^{2017} = -1$.

ومنه:

$$b^{2017} \equiv -1\ [13]$$

فنكتب:

$$a^{1438} + b^{2017} \equiv 1 - 1\ [13]$$

$$a^{1438} + b^{2017} \equiv 0\ [13]$$

ومنه:

العدد: $a^{1438} + b^{2017}$ يقبل القسمة على 13

3) تعيين الأعداد الطبيعية $n$ بحيث: $b^{2017} + n + 1438 \equiv 0\ [13]$.

لدينا:

$$\begin{cases} b^{2017} \equiv -1\ [13] \\ 1438 \equiv 8\ [13] \end{cases}$$

ولدينا:

$$b^{2017} + n + 1438 \equiv 0\ [13]$$

فنكتب:

$$-1 + n + 8 \equiv 0\ [13]$$

$$n + 7 \equiv 0\ [13]$$

$$n \equiv -7\ [13]$$

$$n \equiv 6\ [13]$$

ومنه:

$$n = 13k + 6\ ;\ k \in \mathbb{N}$$