الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية البيَض — ثانوية: المجاهد شعشوع مصطفى -البيض-

المستوى : الثالثة علوم تجريبية — السنة الدراسية: 2022 / 2023

اختبار الفصل الثاني في مادّة الرياضيات — المدة :03 ساعات

التمرين الأول: (4 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد صحيح عينه مع التبرير:

1) (U_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول $U_0 = 3$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n نضع $S_n = C_n^0 U_0 + C_n^1 U_1 + ... + C_n^n U_n$ ، المجموع S_n يساوي :

أ) $3(3)^n$ ب) $3(2)^n$ ج) $2(3)^n$

2) فريق عمل يتكون من 4 نساء و 7 رجال نريد تشكل لجنة تضم رئيسا ونائبا و أمين ، عدد اللجان التي يمكن تشكيلها بحيث تضم اللجنة رجلين أحدهما الرئيس :

أ) 168 ب) 84 ج) 336

3) ليكن (C) التمثيل البياني للدالة $f : x \longrightarrow \sqrt{\cos x}$ على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ، الحجم v المولد بدوران (C) حول محور الفواصل (xx') بوحدة الحجوم يساوي :

أ) π ب) 1 ج) $\frac{\pi}{2}$

4) المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_n = \int_0^n 2^x dx$ هي متتالية :

أ) متزايدة تماما ب) متناقصة تماما ج) ثابتة

التمرين الثاني: (4 نقاط)

يحتوي صندوق على 9 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس ،منها اربع كريات بيضاء مرقمة: -2،-1 ، 1 ، 1 وخمس كريات حمراء مرقمة -1 ، -1 ، 0 ، 0 ، 0 ، نسحب عشوائيا وفي ان واحد ثلاث كريات من هذا الصندوق .

1) نعتبر الحادثتين: A " سحب 3 كريات من نفس اللون "

B "سحب 3 كريات مجموع أرقامها معدوم"

أ) احسب $P(A)$ ثم بين أن $P(B) = \frac{11}{42}$.

ب) احسب $P(A \cap B)$ ثم استنتج $P_B(A)$ و $P(A \cup B)$.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة .

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب $E(x)$ أمله الرياضي .

ency-education.com/exams

التمرين الثالث: (4 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب $u_0 = \frac{3}{2}$ و ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{6u_n - 2}{u_n + 3}$

1) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 6 - \frac{20}{u_n + 3}$

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$.

2) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة و استنتج أنها متقاربة .

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leqslant 2 - u_{n+1} \leqslant \frac{8}{9}(2 - u_n)$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leqslant 2 - u_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^n$ ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$.

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}$.

2) استنتج اتجاه تغير الدالة g .

3) بين أن $g\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$ ثم استنتج أشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

الجزء الثاني :

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ ، "$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$" .

1) بين أن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ثم أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = g(x)$.

ب) استنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أ) احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x]$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يطلب تعيين معادلته .

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

4) أ) اكتب معادلة المستقيم المماس (T) للمنحنى (C_f) عند الفاصلة المعدومة .

ب) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف A يطلب تعيين إحداثيها .

5) احسب $f(1)$ ثم أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f) .

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = x + \ln(m)$.

7) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}dx = 1 - \frac{e}{2}$.

8) لتكن S مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (T) و المستقيمين $x = 0$ و $x = \frac{1}{2}$.

بين أن : $S = (6 - 2e)cm^2$

ency-education.com/exams

التمرين الأول: (4 نقاط)

اختيار الجواب الصحيح مع التبرير:

1) أ) $S_n = 3(3)^n$ التبرير :

$$\begin{aligned} S_n &= C_n^0 U_0 + C_n^1 U_1 + \ldots + C_n^n U_n \\ &= C_n^0(3\times 2^0) + C_n^1(3\times 2^1) + \ldots + C_n^n(3\times 2^n) \\ &= 3\left[C_n^0(2^0\times 1^n) + C_n^1(2^1\times 1^{n-1}) + \ldots + C_n^n(2^n\times 1^{n-n})\right] \\ &= 3(2+1)^n = 3(3)^n \end{aligned}$$

2) ج) 336 :

التبرير : لدينا حالتين

رجل (الرئيس)	رجل (ن أول)	امرأة (أمين)

أو

رجل (الرئيس)	امرأة (ن أول)	رجل (أمين)

ومنه عدد اللجان هو $2A_7^2A_4^1 = 2\times 7\times 6\times 4 = 336$

3) أ) π التبرير:

$$v = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x))^2\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\cos x}\right)^2 dx$$

$$v = \pi[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right] = \pi$$

4) أ) متزايدة تماما التبرير :

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \int_0^{n+1} 2^x dx - \int_0^n 2^x dx \\ &= \int_0^n 2^x dx + \int_n^{n+1} 2^x dx - \int_0^n 2^x dx \\ &= \int_n^{n+1} 2^x dx > 0 \end{aligned}$$

لأن $2^x > 0$ و $n+1 > n$

التمرين الثاني: (4 نقاط)

1) $P(A) = \dfrac{C_4^3 + C_5^3}{C_9^3} = \dfrac{4+10}{84} = \dfrac{14}{84} = \dfrac{1}{6}$

$$P(A\cap B) = \frac{C_3^2C_1^1 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$$

$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{84}}{\frac{22}{84}} = \frac{4}{22}$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B).$$

$$P(A\cup B) = \frac{14}{84} + \frac{22}{84} - \frac{4}{84} = \frac{32}{84} = \frac{8}{21}.$$

2) تعيين قيم المتغير العشوائي X . $X = \{0;1;2;3\}$

$3 \longrightarrow BBB$; $2 \longrightarrow BB\overline{B}$; $1 \longrightarrow B\overline{B}\,\overline{B}$; $0 \longrightarrow \overline{B}\,\overline{B}\,\overline{B}$

$$P(X=0) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{10}{84}$$

$$P(X=1) = \frac{C_5^2C_4^1}{C_9^3} = \frac{40}{84}$$

$$P(X=2) = \frac{C_5^1C_4^2}{C_9^3} = \frac{30}{84}$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{4}{84}$$

X_i	0	1	2	3
$p(X=X_i)$	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{15}{42}$	$\frac{1}{21}$

حساب الأمل الرياضي :

$$E(x) = 0\frac{10}{84} + 1\frac{40}{84} + 2\frac{30}{84} + 3\frac{4}{84} = \frac{112}{84}$$

$$P(B) = \frac{C_3^2C_1^1 + C_3^1C_2^1C_3^1 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{3\times 1 + 3\times 2\times 3 + 1}{84}.$$

$$P(B) = \frac{3+18+1}{84} = \frac{11}{42}.$$

التمرين الثالث: (4 نقاط)

1) أ)

$$U_{n+1} = 6 - \frac{20}{U_n+3} = \frac{6(U_n+3)-20}{U_n+3}$$

$$U_{n+1} = \frac{6U_n+18-20}{U_n+3} = \frac{6U_n-2}{U_n+3}$$

www.ency-education.com

ب) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$.

(*) من أجل $n=0$ لدينا $\frac{3}{2} \leqslant 2$ $0 \leqslant u_0 = \frac{3}{2}$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n=0$

(**) نفرض أن $\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$ من أجل عدد طبيعي كيفي n

ونبرهن أن $\frac{3}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

لدينا $\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$ ومنه $\frac{3}{2}+3 \leqslant u_n+3 \leqslant 2+3$

ومنه $-20\frac{2}{9} \leqslant -\frac{20}{u_n+3} \leqslant \frac{-20}{5}$

ومنه $6-\frac{40}{9} \leqslant 6-\frac{20}{u_n+3} \leqslant 6-\frac{20}{5}$

ومنه $\frac{3}{2} \leqslant \frac{14}{9} \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$

من (*) و (**) نستنتج من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$.

---

2) تبيان أن المتتالية (u_n) متزايدة :

$$u_{n+1}-u_n = \frac{6u_n-2}{u_n+3}-u_n = \frac{6u_n-2-u_n(u_n+3)}{u_n+3}$$

$$u_{n+1}-u_n = \frac{-u_n^2+3u_n-2}{u_n+3} = -\frac{(u_n-1)(u_n-2)}{u_n+3}$$

لدينا $\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$ ومنه $u_n+3>0$ و $u_n-1 \geqslant \frac{1}{2} > 0$

و $u_n-2 \leqslant 0$ ومنه $u_{n+1}-u_n > 0$ أي أن (u_n) متزايدة تماما.

بما أن (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة .

---

3) أ) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$0 \leqslant 2-u_{n+1} \leqslant \frac{8}{9}(2-u_n)$.

$$2-u_{n+1} = 2-\frac{6u_n-2}{u_n+3} = \frac{2(u_n+3)-6u_n+2}{u_n+3}$$

$$2-u_{n+1} = \frac{8-4u_n}{u_n+3} = \frac{4(2-u_n)}{u_n+3}$$

ولدينا أيضا $\frac{3}{2} \leqslant u_n$ ومنه $\frac{9}{2} \leqslant u_n+3$

ومنه $\frac{1}{u_n+3} \leqslant \frac{2}{9}$

أي أن $\frac{4}{u_n+3} \leqslant \frac{8}{9}$

بضرب طرفي المتراجحة في $2-u_n$

$$2-u_{n+1} = \frac{4(2-u_n)}{u_n+3} \leqslant \frac{8}{9}(2-u_n)$$

أي أن $2-u_{n+1} \leqslant \frac{8}{9}(2-u_n)$

و $u_{n+1} \leqslant 2$ معناه $0 \leqslant 2-u_{n+1}$

ومنه ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$0 \leqslant 2-u_{n+1} \leqslant \frac{8}{9}(2-u_n)$.

ب) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$0 \leqslant 2-u_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^n$

نستخدم البرهان بالتراجع

(*) من أجل $n=0$ لدينا $0 \leqslant 2-u_0 \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^0$

أي $0 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}$ ومنه الخاصية محققة من أجل $n=0$

(**) نفرض أن $0 \leqslant 2-u_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^n$

من أجل عدد طبيعي كيفي n ونبرهن أن

$$0 \leqslant 2-u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^{n+1}$$

لدينا $0 \leqslant 2-u_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^n$ بضرب أطراف المتراجحة في $\frac{8}{9}$

ينتج $0 \leqslant \frac{8}{9}(2-u_n) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^n \frac{8}{9}$

www.ency-education.com

ومن السؤال السابق لدينا $0 \leqslant 2-u_{n+1} \leqslant \frac{8}{9}(2-u_n)$

. أي أن $0 \leqslant 2-u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^{n+1}$

من $(*)$ و $(**)$ نستنتج من أجل كل عدد طبيعي n :

$$0 \leqslant 2-u_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^{n}$$

حساب النهاية :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^{n} = 0$ لأن $-1 < \frac{8}{9} < 1$

و $0 \leqslant 2-u_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^{n}$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} 2-u_n = 0$ أي أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

الجزء الأول

$g(x) = 1+4xe^{2x}$.

1) المشتقة من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$g'(x) = 4e^{2x} + 2e^{2x}(4x) = (8x+4)e^{2x} = 4(2x+1)e^{2x}$$

2) استنتاج اتجاه تغير الدالة g : لدينا $4e^{2x} > 0$

ومنه اشارة المشتقة من اشارة $2x+1$

$2x+1=0$ ومنه $x=-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

ومنه f متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$

.

f متزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

---

3)

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1-\frac{2}{e} > 0$$

استنتاج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

لدينا $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ قيمة حدية صغرى و $g\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$

ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $g(x) > 0$.

الجزء الثاني :

$f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$.

1)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ ومنه } \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -e^{2x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ ومنه } \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 2x-1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty \end{cases}$$

2)

أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2)e^{2x} + 2e^{2x}(2x-1) + 1 \\ &= (2+4x-2)e^{2x} + 1 \\ &= 1+4xe^{2x} = g(x) \end{aligned}$$

ب) استنتج إتجاه تغير الدالة f

اشارة المشتقة من إشارة $g(x)$ ومنه $f'(x) > 0$

نستنتج أن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

. جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

ency-education.com/exams

3) أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]$:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to-\infty}[(2x-1)e^{2x}+x+1-x]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}[(2x-1)e^{2x}+1]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}[2x\overset{0}{e^{2x}}-\overset{0}{e^{2x}}+1]=1$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=1$ معناه $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x-1]=0$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) :

$$f(x)-y=f(x)-x-1=(2x-1)e^{2x}$$

اشارة الفرق من إشارة $2x-1$ ومنه :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $(0.5;1.5)$		(C_f) فوق (Δ)

4) أ) معادلة المستقيم المماس عند الفاصلة 0.

$$y=f'(0)(x-0)+f(0)$$
$$y=(1+4(0)e^0)(x-0)+((0-1)e^0+0+1)$$
$$y=x+0$$
$$y=x$$

ب) تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف A

لدينا $f''(x)=g'(x)$ ومنه اشارة $f''(x)$ من اشارة $g'(x)$

(تمت دراسة اشارتها في السؤال 2 من الجزء الأول) ومنه ينتج

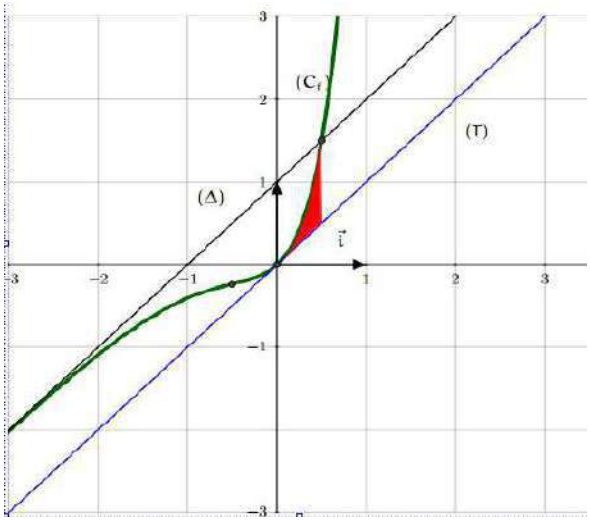
x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

و $f(-\frac{1}{2})=(-1-1)e^{-1}-\frac{1}{2}+1=-2e^{-1}+\frac{1}{2}$

المشتقة الثانية انعدمت وغيرت اشارتها من أجل $x=-\frac{1}{2}$

ومنه النقطة $(-\frac{1}{2},-2e^{-1}+\frac{1}{2})$ نقطة إنعطاف

5) $f(1)=((2(1)-1)e^{2(1)}+1+1=e^2+2$



6) المناقشة البيانية : حلول المعادلة $f(x)=x+\ln(m)$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=x+\ln(m)$ مناقشة مائلة موازية للمستقيمين (T) و (Δ)

من أجل $\ln(m)<0$ أي $m<1$ المعادلة لا تقبل حلولا

من أجل $\ln(m)=0$ أي $m=1$ المعادلة تقبل حل واحد

من أجل $0<\ln(m)<1$ أي $1<m<e$ المعادلة تقبل حلين مختلفين

من أجل $\ln(m)\geqslant 0$ أي $m\geqslant e$ المعادلة تقبل حل واحد .

7) بفرض

$$\begin{cases} u(x)=(2x-1) & u'(x)=2 \\ v'(x)=e^{2x} & v(x)=\frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}dx=\left[\frac{2x-1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2}{2}e^{2x}dx$$

$$=\left[\frac{2(\frac{1}{2})-1}{2}e^{2(\frac{1}{2})}-\frac{0-1}{2}e^0\right]-\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=0+\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{2}e^{2(\frac{1}{2})}-\frac{1}{2}e^0\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}$$

$$=1-\frac{e}{2}$$

8) مساحة الحيز : في المجال $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ المنحنى (C_f) فوق المستقيم (T) ومنه

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}(f(x)-y)\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}((2x-1)e^{2x}+x+1-x\ )\,dx$$

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}((2x-1)e^{2x}+1)dx$$

$$S=1-\frac{e}{2}+\frac{1}{2}-0\quad=(\frac{2-e+1}{2})\,\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|cm^2$$

$$S=\frac{3-e}{2}(2\times 2)cm^2=(6-2e)cm^2$$

www.ency-education.com

اختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

المستوى: ثالثةُ علوم تجريبيةُ المدةُ: 3 ساعات

التمرين الأول : (6 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $[1\ ,\ 4]$ بـ : $f(x)=\dfrac{x+4}{6-x}$.

1. (ا) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[1\ ,\ 4]$.

(ب) بيّن أنه من أجل كل $x\in[1\ ,\ 4]$ فإن : $f(x)\in[1\ ,\ 4]$.

2. (U_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ $U_0=3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=f(U_n)$

(ا) برهن بالتراجع أنـه من أجل كل عـدد طبيعي n يكون : $1\leq U_n\leq 4$.

(ب) ادرس اتجـاه تغيـر المتتاليـة (U_n)، استنتج أنها متقاربة ، ثم احسب نهايتها .

3. من أجل كـل عـدد طبيعي n نضع : $V_n=\dfrac{U_n-1}{4-U_n}$

(ا) أثبـت أن المتتاليـة (V_n) هندسية ، عيـن أساسها وحـدها الأول .

(ب) اكتب بدلالة n كلا من عبارة V_n و U_n ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$ من جديد .

(ج) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=\dfrac{1}{4-U_0}+\dfrac{1}{4-U_1}+.....+\dfrac{1}{4-U_n}$.

التمرين الثاني : (4 نقاط)

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x+3+4e^{2x-1}$

$(\mathbf{C_g})$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث $\|\vec{i}\|=1cm$

1. ادرس اشارة الفرق $f(x)-x-3$

2. أحسب $I(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(\mathbf{C_g})$ والمستقيمات ذات المعادلات : $y=x+3$ و $x=0$ و $x=\alpha$ حيث α عدد حقيقي موجب تماما .

3. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n=I(n)+2e^{-1}$

حيث : $I(n)=I(\alpha)$ من أجل $\alpha=n$

(ا) بيّن أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

(ب) احسب بدلالة n المجموع Y_n حيث :

$$Y_n=\int_0^1 4e^{2x-1}dx+\int_0^2 4e^{2x-1}dx+.....+\int_0^n 4e^{2x-1}dx$$

www.ency-education.com

التمرين الثالث : (10 نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $\mathbb{R}^*$ كمايلي : $g(x) = x^2 + 2 - \ln(x^2)$

1. أحسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها .
2. أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .
3. استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $\mathbb{R}^*$ كمايلي : $f(x) = x + 1 + \dfrac{\ln(x^2)}{x}$
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ حيث $\| \vec{i} \| = 1cm$

1. أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها ، ثم فسر النتيجة بيانيا .
2. (ا) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل $(\triangle)$ يطلب تعيين معادلة له .
   (ب) أدرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم $(\triangle)$.
3. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
4. أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .
5. (ا) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) موازيين للمستقيم $(\triangle)$ في نقطتين يطلب تعيينهما .
   (ب) اكتب معادلة لكل من المماسين (T_1) و (T_2) .
6. بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $f(-x) + f(x) = 2$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .
7. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما -1 والآخر α حيث : $0.6 < \alpha < 0.62$.
8. أرسم كلا من : (Δ) ، (T_1) و (T_2) و المنحنى (C_f) .
9. m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة : $\dfrac{\ln(x^2)}{x} = m - 1$.
10. (ا) أحسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين ذوا المعادلتين : $x = \alpha$ و $x = 1$. (α العدد الحقيقي المعرف في السؤال 7) .
    (ب) بيّن أنّ : $A(\alpha) = \dfrac{(\alpha^2 + \alpha)^2}{4}$

www.ency-education.com

اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04,5 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = e$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{eu_n}{u_n + 1}$

1. أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n + 1 \geq e$
   ب. ادرس اتجاه تغير (u_n)، ثم استنتج تقاربها.
2. لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \dfrac{e(1-e)u_n}{u_n - e + 1}$
   أ) بين أن (v_n) متتاليه هندسية أساسها e يطلب حساب حدها الأول.
   ب) أكتب v_n بدلالة n، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim u_n$
3. أحسب بدلالة n المجموع التالي: $S_n = \dfrac{1}{u_0} + \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \ldots + \dfrac{1}{u_n}$
4. أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_{n+1} - e + 1 \leq e^{-1}(u_n - e + 1)$
   ب. استنتج أن: $0 < u_n - e + 1 \leq e^{-n}$
   ت. استنتج $\lim u_n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات مع التبرير:

x_i	-2	β	2	5
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	α	$\frac{7}{15}$

1. قانون الإحتمال للمتغير العشوائي معرف بالجدول المقابل:
   قيمة العددين الحقيقيين α و β حتى يكون $E(193X + 1444) = 2023$ هي:
   أ) $\alpha = \dfrac{3}{27}$; $\beta = 1$
   ب) $\alpha = \dfrac{1}{3}$; $\beta = 4$
   ج) $\alpha = \dfrac{1}{3}$; $\beta = 0$
2. المتتالية العددية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = e^n - \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$.
   نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$
   أ) $S_n = e^{\frac{n(n+1)}{2}} + \ln(n+1)$
   ب) $S_n = ne^n - \ln(n) + \ln(n+1)$
   ج) $S_n = \dfrac{e^{n+1} - e}{e-1} + \ln(n+1)$
3. نعتبر العدد الحقيقي $I = \int_1^e \dfrac{(\ln x)^{2022}}{x} dx$ قيمة I هي:
   أ) $I = 2023$
   ب) $I = \dfrac{1}{2023}$
   ج) $I = \dfrac{2022}{2023}$
4. حلول المعادلة التفاضلية $(E) \ldots\ldots y'' = e^{-x} + \dfrac{1}{x^2}$ على المجال $]0;+\infty[$ هي:
   أ) $f(x) = \ln x - e^{-x} + c_1 x + c_2$
   ب) $f(x) = e^{-x} + \ln x + c_1 x + c_2$
   ج) $f(x) = e^{-x} - \ln x + c_1 x + c_2$

www.ency-education.com

التمرين الثالث: (**04,5** نقاط)

g الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $g(x)=2x\ln(x+1)$

ليكن (Γ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$ و $\|\vec{j}\|=3cm$

1. عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $\dfrac{x^2}{x+1}=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$

2. عين مجموعة الدوال F الأصلية للدالة $f:x\mapsto\dfrac{x^2}{x+1}$ على المجال $[0;+\infty[$

3. نضع: $I=\int_0^{e-1}\dfrac{x^2}{x+1}dx$ و $J=\int_0^{e-1}g(x)dx$

أ) بإستعمال المكاملة بالتجزئة بيّن أن : $J=(e-1)^2-I$

ب) أحسب قيمة I و استنتج قيمة J .

4. أ) تحقق أنه من أجل كل $x\geq 0$: $g(x)\geq 0$

ب) استنتج مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (Γ) و محور الفواصل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=0$ و $x=e-1$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(4x+2)e^x-1$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $-0,2<\alpha<-0,19$

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=(2xe^x-1)e^x$.

(C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^xg(x)$

ب) استنتج اتجاه تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أ) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

4) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث $0,34<\beta<0,36$

ب) استنتج أن : $e^{\beta}=\dfrac{1}{2\beta}$

5) أرسم (T) و المنحنى (C_f).

6) أ) تحقق أن الدالة $H:x\mapsto\left(x-\dfrac{1}{2}\right)e^{2x}$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto 2xe^{2x}$ على $\mathbb{R}$

ب) احسب بالسنتمتر المربع مساحة $S(\beta)$ الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى و محور الفواصل و المستقيمات المعرفة بالمعادلات $x=0$ و $x=\beta$

انتهى الموضوع الأول

www.ency-education.com

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (**04** نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{\sqrt{4+u_n^2}}$

1. أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n > 0$

ب. أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة وأحسب نهايتها.

2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \dfrac{4}{u_n^2}$

أ. بين أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول .

ب. أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n . واحسب من جديد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3. أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_1\sqrt{v_1} + 2u_2\sqrt{v_2} + 3u_3\sqrt{v_3} \cdots + nu_n\sqrt{v_n}$

التمرين الثاني : (**05** نقاط)

أجب بصح أو خطأ مع التعليل :

1) الحد العام للمتتالية العددية (w_n) المعرفة بـ: $w_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $w_{n+1} = -\dfrac{1}{3}w_n - 4$ هو: $w_n = 3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n - 3$

2) الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = (x - \ln(x))e^{-2x}$ تمثيلها البياني يقبل مستقيم مقارب معادلته : $y = 0$

3) الدالتان G و H المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $G(x) = x + \ln(e^{-2x}+1)$ و $H(x) = -x + \ln(e^{2x}+1)$ أصليتان لنفس الدالة

4) القيمة المتوسطة للدالة $x \mapsto \dfrac{1+\ln x^2}{x}$ على المجال $\left[e^{-1};e\right]$ تساوي $\dfrac{2e}{e^2-1}$.

5) من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $\ln x \geq \dfrac{x-1}{x}$

التمرين الثالث: (**04** نقاط)

الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - 1 + (x-1)^2\, e^x$

ليكن (Γ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 1cm$.

1. نعتبر G الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $G(x) = (\alpha x + \beta)e^x$

- عين العددين الحقيقيين α و β حتى تكون الدالة G دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$

2. نضع: $A = \int_0^1 xe^x\,dx$ و $B = \int_0^1 x^2e^x\,dx$

أ) بإستعمال المكاملة بالتجزئة بيّن أن : $B = e - 2A$

ب) أحسب قيمة A ، ثم استنتج قيمة B

3. أ) بالإستعانة بنتائج السؤال (2. ب) أحسب العدد الحقيقي A حيث $A = \int_0^1 (x-1)^2\, e^x dx$

ب) فسر النتيجة هندسيا .

التمرين الرابع: (**07** نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = 2x^3 + 4\ln x$.

1. أدرس تغيرات الدالة g .

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,78 < \alpha < 0,79$

3. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

www.ency-education.com

(II) لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=1-2x+\dfrac{1+2\ln x}{x^2}$

(C) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ ، حيث وحدة الطول $\|\vec{i}\|=2cm$.

1. أ. بين أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$ ، فسر النتيجة هندسيا

ب. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-2x+1$ هو مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ) .

3. أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ يكون: $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{x^3}$.

ب) استنتج اتجاه تغيرات الدالة ثم شكل جدول تغيراتها .

ج) بين أن: $f(\alpha)=1+\dfrac{1-3\alpha^3}{\alpha^2}$ ، ثم جد حصرا للعدد $f(\alpha)$.

بين أن (C) يقبل مماسا يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له

4. أنشئ (Δ)، (T) و (C)

5- ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=-2x+m$

6. نعتبر الدالة H المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $H(x)=\dfrac{-1-\ln x}{x}$

أ) بين أن الدالة H هي دالة أصلية للدالة $h:\mapsto\dfrac{\ln(x)}{x^2}$ على المجال $]0;+\infty[$.

ب) احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و المستقيم (Δ) و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=\sqrt{e^{-1}}$ و $x=1$.

ency-education.com/exams

انتهى الموضوع الثاني

www.ency-education.com

اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

المستوى : سنة ثالثة شعبة علوم تجريبية المدة : 03 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين

الموضوع الأول :

التمرين 01 : 04.5 نقاط

I ـ (U_n) متتالية عددية معرفة بـ : $U_0 = 3\ln 2$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = \ln\left(\frac{2}{7}e^{U_n} + 5\right)$.

❶ أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > \ln 7$.

❷ أثبت أن : $e^{U_n} - e^{U_{n+1}} = \frac{5}{7}\left(e^{U_n} - 7\right)$ ، ثم استنتج أن : $e^{U_n} > e^{U_{n+1}}$.

❸ استنتج اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم بين أنها ومتقاربة واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

II ـ نعتبر المتتالية العددية (V_n) المعرفة بـ : $V_n = e^{U_n} - 7$.

❶ أثبت أن المتتالية (V_n) هندسية واكتب عبارة حدها العام .

❷ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = \ln\left[7 + \left(\frac{2}{7}\right)^n\right]$ ، ثم احسب مرة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

❸ أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = 7^{\ln\left(e^{U_0}-7\right)} + 7^{\ln\left(e^{U_1}-7\right)} + 7^{\ln\left(e^{U_2}-7\right)} + \ldots + 7^{\ln\left(e^{U_n}-7\right)}$.

التمرين 02 : 04 نقاط

I ـ f دالة معرفة ، موجبة و متزايدة تماما على المجال $[0;1]$ حيث $f(x) = \frac{x}{e^x - 2x}$.

◄ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .

❶ تحقق أنه من أجل كل $x \in [0;1]$: $f(x) - xe^{-x} = 2xe^{-x}f(x)$.

❷ أثبت أنه من أجل كل $x \in [0;1]$: $xe^{-x} \leq f(x) \leq \frac{1}{e-2}$.

❸ باستخدام المكاملة بالتجزئة بين أن : $\int_0^1 xe^{-x}dx = 1 - \frac{2}{e}$.

❹ لتكن A مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) ومحوري الإحداثيات والمستقيم ذو المعادلة $(d) : x = 1$.

⊡ بين أن : $1 - \frac{2}{e} \leq A \leq \frac{1}{e-2}$.

التمرين 03 : 04.5 نقاط

I ـ صندوق غير شفاف به 5 كريات حمراء و 5 كريات سوداء لا يمكن التمييز بينها عند اللمس ، نسحب عشوائيا كرية من الصندوق إذا كان حمراء نعيدها إلى الصندوق ، ثم نسحب منه كريتين آن واحد وإذا كانت كانت سوداء لا نعيدها إلى الصندوق ونضع بدلها كريتين حمراء ثم نسحب كريتين على التوالي ودون إرجاع من الصندوق .

❶ أحسب احتمال كل من الحادثتين الآتيتين :

www.ency-education.com

♦ A : سحب ثلاث كريات حمراء . ♦ B : الحصول على لونين مختلفين .

❷ أحسب احتمال سحب الكرية الأولى سوداء علما أن الكريات الثلاث المسحوبة من نفس اللون .

II ـ نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الصندوق بعد انتهاء عملية السحب .

❶ عرف قانون احتمال X واحسب أمله الرياضياتي ، التباين والإنحراف المعياري .

❷ أحسب كل من : $E(2022+2023X)$ و $P\left(4\leq \int_{6}^{X} dt+\int_{5}^{6} dt+\ldots+\int_{2}^{3} dt+\int_{1}^{2} dt\leq 5\right)$

التمرين 04 : 07 نقاط

I ـ h و g دالتين معرفتين على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=x-1-\ln x$ و $g(x)=x+(x-2)\ln x$.

❶ شكل جدول تغيرات h ، ثم استنتج أنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $h(x)\geq 0$.

❷ بين أنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $g(x)=1+h(x)+(x-1)\ln x$.

❸ بين أنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $(x-1)\ln x\geq 0$ ، ثم استنتج أن : $g(x)>0$.

II ـ نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=1+x\ln x-(\ln x)^2$.

◄ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

❶ أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ مفسرا النتيجة هندسيا .

❷ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **(لا حظ أن :** $f(x)=1+x\ln x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)$ **)** .

❸ أثبت أنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

❹ أ ـ أكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$.

ب ـ أثبت أنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $f(x)-x=(\ln x-1)h(x)$.

جـ ـ أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المماس (T) .

❺ أنشئ المنحنى (C_f) والمماس (T) على المجال $]0;e]$.

❻ أ ـ بين أن الدالة $x\mapsto x\ln x-x$ أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$.

ب ـ باستخدام المكاملة بالتجزئة بين أن : $\int_{1}^{e} x\ln x dx=\dfrac{e^2+1}{4}$ و $\int_{1}^{e}(\ln x)^2 dx=e-2$.

جـ ـ أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و (T) والمستقيمين $(d):x=1$ و $(d'):x=e$.

III ـ (U_n) متتالية معرفة بـ : $U_0=\sqrt{e}$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $U_{n+1}=f(U_n)$.

❶ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\leq U_n\leq e$.

❷ بين أن المتتالية (U_n) متناقصة **(إستعمل السؤال II ـ ❹ ـ جـ)** .

❸ بين أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

✧✧✧ انتهى الموضوع الأول ✧✧✧

www.ency-education.com

الموضوع الثاني :

التمرين 1 : 5 نقطة

I ـ (U_n) متتالية عددية معرفة بـ : $U_0=2$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $U_{n+1}=5-\dfrac{4}{U_n}$.

❶ أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2\leq U_n\leq 4$.

❷ أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم بين أنها ومتقاربة واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

❸ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4-U_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}(4-U_n)$.

❹ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leq 4-U_n\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ ، ثم احسب مرة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

❺ نضع : $S_n=U_1+U_2+U_3+...+U_n$ ، بين أن : $S_n\geq 4n-2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

II ـ α عدد حقيقي و (V_n) متتالية عددية معرفة بـ : $V_n=\dfrac{4\alpha-U_n}{\alpha-U_n}$.

❶ عين قيمة α حتى تكون (V_n) هندسية ثم اكتب عبارة حدها العام .

❷ استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (U_n) ، ثم احسب مرة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

❸ احسب بدلالة n المجموع : $R_n=\dfrac{V_0}{4^n}+\dfrac{V_1}{4^{n-1}}+\dfrac{V_2}{4^{n-2}}+...+\dfrac{V_{n-1}}{4}+V_n$.

التمرين 2 : 04 نقاط

◄ f دالة معرفة على المجال $]-1;0]$ بـ : $f(x)=x\ln(1+x)$.

◄ (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (وحدة الطول $2cm$) .

❶ أدرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها ، ثم أنشئ المنحنى (C_f) .

❷ عين الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث : $\dfrac{x^2}{1+x}=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$.

❸ ليكن λ عددا حقيقيا حيث $-1<\lambda<0$ ، أحسب بدلالة λ العدد I حيث : $I=\int_{\lambda}^{0}\dfrac{x^2}{1+x}dx$.

❹ باستخدام المكاملة بالتجزئة أحسب بالـ cm^2 وبدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=0$ و $x=\lambda$.

❺ تحقق أن : $\lim\limits_{\substack{\lambda\to-1\\ >}}A(\lambda)=3$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

التمرين 03 : 04 نقاط

◄ ـ صندوق غير شفاف به 10 كريات متماثلة لانفرق بينها عند اللمس منها أربع كريات تحمل الرقم 0 وثلاث كريات تحمل الرقم 2 وكريتين تحملان الرقم 3 وكرية واحدة تحمل الرقم 1 ، نسحب عشوائيا على التوالي ودون إرجاع 4 كريات من الصندوق ونكتب بالترتيب الأرقام المتحصل عليها وهكذا نحصل بالترتيب على عدد مكون من 4 أرقام حيث رقم الآلاف هو الرقم المتحصل عليه في المرة الأولى ورقم المئات هو المتحصل عليه في المرة الثانية ورقم العشرات هو المتحصل عليه في المرة الثالثة

www.ency-education.com

ورقم الآحاد هو المتحصل عليه في المرة الرابعة .

❶ أحسب احتمال كل من الحوادث التالية :

♦ A : العدد المتحصل عليه هو 2023 .

♦ B : العدد المتحصل عليه أرقامه مختلفة مثنى مثنى .

♦ C : العدد المتحصل عليه زوجي .

❷ أحسب : $P_B(C)$.

التمرين 04 : 07 نقاط

I ـ g و h دالتين معرفتين على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=(1-x)e^x-1$ و $h(x)=e^x-x-1$.

❶ أدرس تغيرات الدالتين g و h ثم شكل جدول تغيرات كل منهما .

❷ استنتج أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $g(x)\leq 0$ و $h(x)\geq 0$.

II ـ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x-1}-x$.

◄ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

❶ أ ـ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب ـ أثبت أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له .

جـ ـ أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

❷ أ ـ تحقق أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$: $f(x)=1-x+\dfrac{1}{\dfrac{e^x-1}{x}-1}$.

ب ـ بين أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$.

جـ ـ أثبت أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ') بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له .

د ـ أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ') .

❸ أثبت أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{[h(x)]^2}-1$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

❹ أثبت أنه لا يوجد أي مماس لـ (C_f) يوازي المستقيم (Δ) .

❺ أثبت أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث $1<\alpha<2$ و $-2<\beta<-1$.

❻ أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيمين (Δ) و (Δ') .

❼ ليكن $m\in\mathbb{R}_+^*$ ، عين قيم m حتى لا تقبل المعادلة : $f(x)=\ln m-x$ أي حل .

❽ لتكن $A(\beta)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y=-x$ ، $x=-1$ و $x=\beta$ ، بين أن : $A(\beta)=\ln\left(\dfrac{e\beta}{\beta-1}\right)$.

✧✧✧ انتهى الموضوع الثاني ✧✧✧

www.ency-education.com

اختبار الفصل في مادة الرياضيات

120 دقيقة

التمرين الأول

I) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_1 = e^{-1}$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = \frac{n+1}{en}u_n$

❶ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > 0$.

❷ بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

II) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $v_n = \frac{1}{en}u_n$.

❶ بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{e}$ ثم احسب حدها الأول.

❷ اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

❸ احسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{3}u_3 + \cdots\cdots + \frac{1}{n}u_n$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

III) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $w_n = ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

❶ ادرس اتجاه تغير المتتالية (w_n) ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

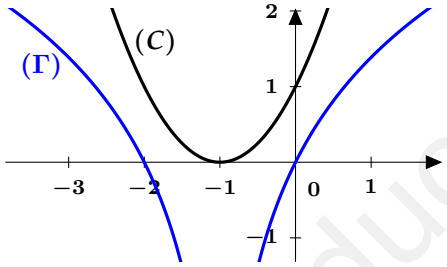
❷ هل المتتاليتان (u_n) و (w_n) متجاورتان ؟ برر ذلك.

التمرين الثاني

I) نعتبر المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

◄ (C) هو التمثيل البياني للدالة : $x \mapsto (x+1)^2$.

◄ (Γ) هو التمثيل البياني للدالة : $x \mapsto ln(x+1)^2$.



❶ بقراءة بيانية حدد وضعية (C) بالنسبة الى (Γ) على $\mathbb{R} - \{-1\}$.

❷ لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي : $g(x) = (x+1)^2 - ln(x+1)^2$

◄ استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$: $g(x) > 0$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{2}{x+1} + \frac{ln(x+1)^2}{x+1} + x + 2$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

❶ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

❷ احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$. ثم فسر النتيجة بيانيا.

❸ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{-1\}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$.

❹ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

❺ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 2$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ).

❻ بين أن النقطة $A(-1,1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f).

❼ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث $-0.7 < \alpha < -0.6$ و $-1.5 < \beta < -1.4$.

ency-education.com/exams

❽ بين أن (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) يوازيين المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلتيهما.

❾ ارسم (T_1) ، (T_2) ، (Δ) و (C_f).

❿ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة $f(x)=x+m$.

III لتكن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي : $F(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{1}{4}\left[ln(x+1)^2\right]^2+2ln|x+1|$

❶ اثبت أن F هي دالة أصلية للدالة f.

❷ احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين : $x=0$ و $x=2$.

ency-education.com/exams

اختبار الفصل الثاني في مادة : الرياضيات **المدة :ساعتان**

التمرين الأول : (6نقاط)

1) نعتبر المجموعة E حيث : $E=\{2;3;5;7\}$.عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها باستعمال أرقام المجموعة E و المكونة من ثلاث أرقام هي :

أ) 12 ب) 64 ج) 81

2) في إحدى المقاطعات الإدارية 4 ثانويات A ، B ، C و D .عدد الطرق التي يمكن تنظيم بها مسابقة بين الثانويات (كل لقاء يجمع ثانويتين) هي :

أ) 6 ب) 12 ج) 24

3) تحوي علبة على 3 بطاقات بيضاء و بطاقتين سوداوين و 3 بطاقات صفراء . نسحب من العلبة عشوائيا ثلاث بطاقات في أن واحد (البطاقات لا نميز بينها عند اللمس) . X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد البطاقات السوداء المسحوبة قيم المتغير العشوائي X هي :

أ) $X\in\{1;2;3\}$ ب) $X\in\{0;1;2\}$ ج) $X\in\{0;1;3\}$

4) تتكون جمعية رياضية من 27 تلميذا (15 ذكرا و 12 بنتا) . نريد تشكيل لجنة تضم رئيسا ونائب له و أمين. عدد اللجان التي يمكن تشكيلها بحيث الرئيس (ذكر) أو النائب (أنثى) هو :

أ) 390 ب) 17550 ج) 4500

التمرين الثاني : (6 نقاط)

الشكل المعطى في الوثيقة المرفقة هوالتمثيل البياني (C) للدالة f المعرفة على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ : $f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$.و (D)المستقيم ذو المعادلة : $y=x$.

1) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم استنتج انه : إذا كان : $x\succ 1$ فان: $f(x)\succ 1$.

2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=4$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) باستعمال التمثيل البياني (C) مثل الحدود u_0 ، u_1، u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل دون حسابها .

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

3) أ) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n\succ 1$.

ب)ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)ثم استنتج أنها متقاربة.

4) نعتبر المتتاليتين (v_n) و (w_n) المعرفتين بـ : من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=1-\frac{1}{u_n}$ و $w_n=\ln(v_n)$.

أ) برهن أن (w_n)متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) اكتب عبارة w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n.

ج) بين أن : $u_n=\frac{1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{e^{n\ln 2}}}$.ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

5) احسب بدلالة n الجداء P_n حيث : $P_n=v_0\times v_1\times\ldots\times v_n$ ثم استنتج بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=w_0+w_1+\ldots+w_n$.

www.ency-education.com

التمرين الثالث (8 نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=\frac{\ln x}{x}+e$.

أ) ادرس تغيرات الدالة g .

ب) احسب $g\left(\frac{1}{e}\right)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـــ : $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+ex-e$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=2cm$ و $\|\vec{j}\|=cm$.

1) أ) بين انه من اجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب) عين نهايتي الدالة f عند 0 و $+\infty$ ثم شكل جدول تغيراتها .

2) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

3) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (T).

5) أنشئ (T) و (C_f) .

6) H الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $H(x)=x\left[(\ln x)^2+a\ln x+b\right]$ ، حيث a و b عددان حقيقيان

أ) عين a و b بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة $x\mapsto(\ln x)^2$ و .

ب) احسب بـــ : cm^2 المساحة S للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها :

$x=\frac{1}{e}$ ، $x=1$ و $y=ex-e$.

7) لتكن K الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $K(x)=e^{2x+1}+2x^2-e$

أ) اثبت انه من اجل كل عدد حقيقي x لدينا : $K(x)=f(e^{2x})$. ثم استنتج أن الدالة K تكتب على شكل مركب دالتين يطلب تعيينهما .

ب) باستعمال مشتقة دالة مركبة عين اتجاه تغير الدالة K ثم شكل جدول تغيراتها .

حظ سعيد للجميع **أستاذ المادة**

ency-education.com/exams

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية باتنة

امتحان الثلاثي الثاني — يوم: 06 مارس 2023

الشعبة: علوم تجريبية — المستوى: السنة الثالثة

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: ثلاث ساعات

التمرين الأول: 03 نقاط

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

1. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$.

✓ الدالة الأصلية للدالة g والتي تنعدم من أجل 1 هي الدالة G المعرفة بـ: $G(x)=1-\dfrac{1+\ln x}{x}$.

2. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$ نعتبر النقطتين A و B بحيث: $\begin{cases} z_A=1+i \\ z_B=i \end{cases}$.

✓ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث $|z-1-i|=|\overline{z}+i|$ هي الدائرة التي قطرها $[AB]$.

3. الحل الخاص f للمعادلة التفاضلية $y'=(\ln 2023)y$ والذي يحقق $f(0)=1$ هو الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2023^x$.

التمرين الثاني: 04 نقاط

يحتوي كيس على أربع كريات حمراء مرقمة بـ: 1، 1، 2، 2 و ثلاث كريات سوداء مرقمة بـ: 1، 2، 3.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الكيس، و نعتبر الحادثتين: A : سحب ثلاث كريات من نفس اللون

و B : سحب ثلاث كريات مجموع أرقامها عدد فردي.

1. احسب كلا من $P(A)$ و $P(B)$.
2. احسب $P(A\cap B)$ ثم استنتج كلا من $P_B(A)$ و $P(A\cup B)$.
3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب أكبر الأرقام المحصل عليها.
   أ) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.
   ب) عين قيمة العدد الحقيقي α حتى يكون $E(\alpha X-1444)=2024$

التمرين الثالث: 05 نقاط

الجزء الأول: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0=1+e^{-1} \\ u_{n+1}=\sqrt{(u_n-1)^3}+1 \end{cases}$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $1<u_n<2$.
2. بين أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=(u_n-1)\left(\sqrt{u_n-1}-1\right)$، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و برر تقاربها.

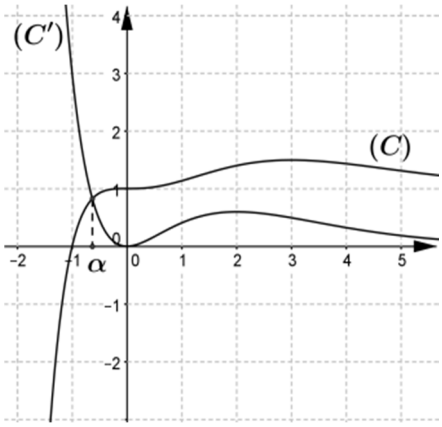
www.ency-education.com

الجزء الثاني: المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \dfrac{1}{\ln(u_n - 1)}$.

1. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{2}{3}$ يطلب حساب حدها الأول.
2. اكتب v_n بدلالة n، ثم استنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^n} + 1$ واحسب $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.
3. احسب بدلالة n الجداء P_n بحيث: $P_n = (u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \ldots\ldots \times (u_n - 1)$.

التمرين الرابع: 08 نقاط

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.



الجزء الأول: في الشكل المقابل (C) هو التمثيل البياني للدالة $x \mapsto 1 + x^3 e^{-x-1}$، (C') التمثيل البياني للدالة $x \mapsto 3x^2 e^{-x-1}$ والعدد الحقيقي α هو فاصلة نقطة تقاطع (C) و (C') بحيث: $-0,64 < \alpha < -0,62$.

1. بقراءة بيانية حدد الوضع النسبي لـ (C) و (C').
2. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + (x^3 - 3x^2)e^{-x-1}$.
   - ✓ استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - x^3 e^{-x-1}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي السابق.

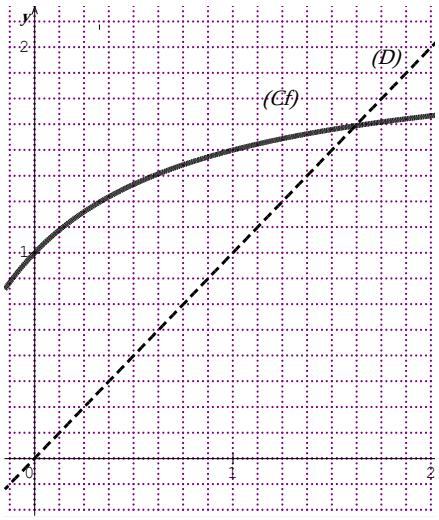
1. أ. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   ب. بين أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.
2. نعتبر الدالة h المعرفة و المتزايدة تماما على المجال $[-1;0]$ بحيث $h(\alpha) = \alpha + 1 + \dfrac{3}{\alpha - 3}$.
   - ✓ بين أن $f(\alpha) = h(\alpha)$ ثم اعط حصرا لـ $f(\alpha)$.
3. أ. بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$، ثم تحقق أن (Δ) مماس لـ (C_f) في مبدأ المعلم.
   ب) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)، ثم فسر النتيجة هندسيا.
   ج. بين أن (C_f) يقبل مماسين معامل توجيههما 1 أحدهما (Δ) والآخر (T) يطلب كتابة معادلة له.
4. أ. احسب $f(-1)$، ثم أنشئ كلا من (Δ)، (T) ومثل (C_f).
   ب. عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين مختلفين.
5. أ. بين أن الدالة F المعرفة بـ: $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + (x^3 + 3x^2 + 6x + 6)e^{-x-1}$ دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$.
   ب) احسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و حاملي محوري الإحداثيات و المستقيم ذا المعادلة $x = -1$.

www.ency-education.com

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية قسنطينة — **الثانوية : الحرية**
المادة : رياضيات — **المستوى : ثالثة ثانوي**
الشعبة : علوم تجريبية — **المعامل : 5**

الإختبار الثاني — **المدة: ساعتين**



التمرين الأول(6ن):

نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $[0;2]$ بـــ : $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$ ، وَ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد وَ المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ كما هو موضّح في الشكل.

1) بيّني أنّه إذا كان $x\in[1;2]$ فإنّ : $f(x)\in[1;2]$.

2) (u_n) وَ (v_n) متتاليتان معرّفتان على $\mathbb{N}$ بـــ :

$$\begin{cases} v_0=2 \\ v_{n+1}=f(v_n) \end{cases} \text{ وَ } \begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$$

أ- أعيدي رسم الشكل على ورقة الإجابة مع تمثيل الحدود u_0 ، u_1 وَ u_2 على محور الفواصل، وَ الحدّين v_0 وَ v_1 على محور التراتيب .

ب- أعطي تخمينًا حول إتجاه تغيّر وَ تقارب المتتاليتين (u_n) وَ (v_n).

3) برهني بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\leq u_n\leq 2$ وَ $1\leq v_n\leq 2$.

4) برهني بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\leq u_{n+1}$ وَ $v_n\geq v_{n+1}$.

5) أثبتي أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.

6) أ- بإستعمال البرهان بالتراجع ، أثبتي أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n-u_n\geq 0$.

ب- إستنتجي أنّ: $v_{n+1}-u_{n+1}\leq\frac{1}{4}(v_n-u_n)$.

جـ- أثبتي أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n-u_n\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

د- إستنتجي أنّ للمتتاليتين (u_n) وَ (v_n) نفس النهاية l يُطلب حساب قيمتها.

www.ency-education.com

التمرين الثاني(14ن):

I) g هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln|x|$.

1) أحسبي نهايات الدالة g عند الحدود المفتوحة لـ $\mathbb{R}^*$.

2) أدرسي إتجاه تغيّر الدالة g على $\mathbb{R}^*$. (علمًا أنّ : $\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$).

3) شكّلي جدول تغيّرات الدالة g.

4) بيّني أنّ المعادلة : $g(x) = 0$ تقبل حلًا وحيدًا α حيث : $\alpha \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$.

5) جدي حصرًا بعددين ناطقين للعدد α من الشكل $\frac{n}{100}$ وَ $\frac{n+1}{100}$ ، حيث : n عدد طبيعي.

6) إستنتجي إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

II) f هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x) = 2x - \frac{\ln|x|}{x^2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد وَ المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) أحسبي النهايات عند الحدود المفتوحة لـ $\mathbb{R}^*$.

2) أدرسي إتجاه تغيّر الدالة f.

3) شكّلي جدول تغيّرات الدالة f.

4) أ- بيّني أنّ : $f(\alpha) = 3\alpha - \frac{1}{2\alpha^2}$.

ب- أحصري $f(\alpha)$.

5) أ- بيّني أنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ)، يُطلب تعيين معادلة له.

ب- أدرسي الوضعية النسبية.

6) أرسمي كل من (C_f) وَ المستقيم (Δ).

III) لتكن النقطتين $M(x; y)$ وَ $M'(x'; y')$ حيث : M' نظيرة M بالنسبة لمحور التراتيب.

1) عيّني x' وَ y' بدلالة x وَ y.

2) بيّني أنّه إذا كانت M تتغيّر على المنحنى (C_f) فإنّ النقطة M' تتغيّر على المنحنى (Γ) ذو المعادلة : $y = -2x - \frac{\ln|x|}{x^2}$.

3) أدرسي الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) وَ (Γ).

IV) 1) من أجل كل عدد حقيقي موجب تمامًا وَ بإستعمال التكامل بالتجزئة ، أحسبي $I = \int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$.

2) أحسبي مساحة الحيّز للمستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وَ المستقيم (Δ) وَ المستقيمان : $x = \alpha$ وَ $x = 2$.

بالتوفيق ــــــــــ الإثنين 6 مارس 2023 ــــــــــ أساتذة المادة

www.ency-education.com

تنقيط	الإجابة النموذجية	تنقيط	الإجابة النموذجية

(6) * التمرين الأول: $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$; $D=[0;2]$

1) إثبات أنه إذا كان $x\in[1;2]$ فإن $f(x)\in[1;2]$:

$x\in[1;2]$ معناه $1\leq x\leq 2$

f متزايدة على $[0;2]$ حسب الشكل

$f(1)\leq f(x)\leq f(2)$ أي $\frac{3}{2}\leq f(x)\leq \frac{5}{3}$

بما أن $[\frac{3}{2};\frac{5}{3}]\subset[1;2]$ فإن $f(x)\in[1;2]$

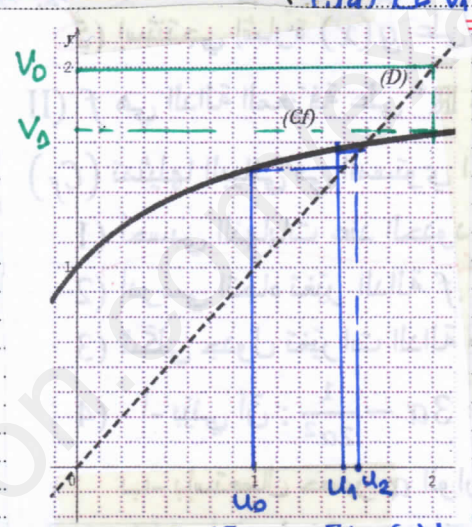
أو يمكننا القول أنه بالتعويض:

$1\leq x\leq 2$ أي $\frac{3}{2}\leq f(x)\leq \frac{5}{3}$

إذن: $f(x)\in[1;2]$ ؛ وهو المطلوب

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\begin{cases}v_0=2\\v_{n+1}=f(v_n)\end{cases}$

P- إعادة رسم الشكل وتحديد u_0، u_1، u_2 على محور الفواصل و v_0 و v_1 على محور التراتيب:



ب- تخمين اتجاه تغير و تقارب المتتاليتين:

نلاحظ وحسب الشكل فإن: $u_0<u_1<u_2$ مما يخبرنا أن (u_n) متزايدة كما أنها تقترب نحو 2 (فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع (D)) أي $u_n\leq 2$ تبقى محدودة من الأعلى بالعدد 2 إذن (u_n) متقاربة.

بنفس الطريقة نجد أن: $v_0>v_1$ مما يخبرنا أن (v_n) متناقصة كما أنها تقترب نحو 2 (فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع (D)) أي $v_n\geq 2$ تبقى محدودة من الأسفل، وبالتالي هي متقاربة.

3) البرهان بالترجوع أن: $\forall n\in\mathbb{N}: 1\leq u_n\leq 2$:

من أجل $n=0$ فإن: $1\leq u_0=1\leq 2$ أي أن $P(0)$ حققة، نفرض صحة الخاصية حتى الرتبة n أي $1\leq u_n\leq 2$ ونحاول إثبات صحتها من أجل $n+1$ أي: $1\leq u_{n+1}\leq 2$؟

لدينا حسب السؤال الأول وهو صحيح $P(n)$: $1\leq u_n\leq 2$ حسب $1\leq f(u_n)\leq 2$

أي: $1\leq u_{n+1}\leq 2$ ؛ وهو المطلوب

4) البرهان بالترجوع أن: $\forall n\in\mathbb{N}: u_n\leq u_{n+1}$:

من أجل $n=0$ فإن: $u_0=1\leq u_1=f(u_0)=\frac{3}{2}$

أي $P(0)$ حققة ؛ نفرض صحة الخاصية حتى الرتبة n أي: $u_n\leq u_{n+1}$ ونحاول إثبات صحتها من أجل $n+1$ أي: $u_{n+1}\leq u_{n+2}$؟

لدينا: فرضا: $u_n\leq u_{n+1}$ وبما أن f متزايدة فإن: $u_{n+1}=f(u_n)\leq f(u_{n+1})=u_{n+2}$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

* البرهان بالترجوع أن: $\forall n\in\mathbb{N}: v_n\geq v_{n+1}$:

من أجل $n=0$ فإن: $v_0=2\geq v_1=f(v_0)=\frac{7}{3}$

وعليه: $P(0)$ حققة ؛ نفرض صحة الخاصية حتى الرتبة n أي: $v_n\geq v_{n+1}$ ونحاول إثبات صحتها من أجل $n+1$ أي $v_{n+1}\geq v_{n+2}$؟

لدينا: فرضا: $v_n\geq v_{n+1}$ وبما أن f متزايدة فإن: $v_{n+1}=f(v_n)\geq f(v_{n+1})=v_{n+2}$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

ج) إثبات أن: $\forall n\in\mathbb{N}: v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{v_n-u_n}{(v_{n+1})(u_{n+1})}$:

$$v_{n+1}-u_{n+1}=f(v_n)-f(u_n)=\frac{2v_n+1}{v_n+1}-\frac{2u_n+1}{u_n+1}$$
$$=\frac{(2v_n+1)(u_n+1)-(v_n+1)(2u_n+1)}{(v_n+1)(u_n+1)}$$
$$=\frac{2v_nu_n+2v_n+u_n+1-2v_nu_n-v_n-2u_n-1}{(v_n+1)(u_n+1)}$$
$$=\frac{v_n-u_n}{(v_{n+1})(u_{n+1})}$$

وبالتالي: $v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{v_n-u_n}{(v_{n+1})(u_{n+1})}$

وبنفس الطريقة نجد أن: $\forall n\in\mathbb{N}: v_n-u_n\geq 0$:

البرهان بالترجوع أن: $\forall n\in\mathbb{N}: v_n-u_n\geq 0$:

من أجل $n=0$ فإن: $v_0-u_0=2-1=1\geq 0$

أي $P(0)$ حققة ؛ نفرض صحة الخاصية حتى الرتبة n أي: $v_n-u_n\geq 0$ ونحاول إثبات صحتها من أجل $n+1$ أي: $v_{n+1}-u_{n+1}\geq 0$؟

www.ency-education.com

الإجابة النموذجية — تنقيط

لدينا: فرضا: $v_n - u_n \geq 0$

ومن جهة أخرى لدينا: (u_{n+1}) و (v_{n+1}) متقاربتان

لأن: $1 \leq u_n \leq 2$ و $1 \leq v_n \leq 2$ حسب السؤال

ومنه: بضرب طرفي المتباينة في $\frac{1}{(v_{n+1})(u_{n+1})}$ نجد أن: $\frac{v_n - u_n}{(v_{n+1})(u_{n+1})} \geq 0$ ... 0,25

$\hookrightarrow v_{n+1} - u_{n+1} \geq 0$

ب- استنتاج أن: $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$:

لدينا حسب السؤال-أ-: $\begin{cases} u_n \geq 1 \\ v_n \geq 1 \end{cases}$ ... 0,25

وبإضافة 1 نجد: $\begin{cases} u_{n+1} \geq 2 \\ v_{n+1} \geq 2 \end{cases}$

بضرب الأطراف الموجبة للمتباينتين نجد: $(u_n+1)(v_n+1) \geq 2 \times 2 = 4$

نقلب $\rightarrow \frac{1}{(u_n+1)(v_n+1)} \leq \frac{1}{4}$ ... 0,25

بضرب الطرفين في $v_n - u_n$ $\rightarrow \frac{v_n - u_n}{(u_n+1)(v_n+1)} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$ ... 0,25

ومنه: $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$

جـ- إثبات أن: $\forall n \in \mathbb{N}: v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$:

لدينا حسب السؤال-ب-: $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$

$n=0 \rightarrow v_1 - u_1 \leq \frac{1}{4}(v_0 - u_0)$

$n=1 \rightarrow v_2 - u_2 \leq \frac{1}{4}(v_1 - u_1)$

$n=2 \rightarrow v_3 - u_3 \leq \frac{1}{4}(v_2 - u_2)$ ... 0,25

$n-2 \rightarrow v_{n-1} - u_{n-1} \leq \frac{1}{4}(v_{n-2} - u_{n-2})$

$n-1 \rightarrow v_n - u_n \leq \frac{1}{4}(v_{n-1} - u_{n-1})$

بضرب الأطراف الموجبة المتباينات طرفا طرفا نجد:

$v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1-0+1}(v_0 - u_0)$ ... 0,25

$\hookrightarrow v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ ... 0,25

د- استنتاج أن (u_n) و (v_n) تقبلان نفس النهاية ℓ:

حسب جـ- فإن: $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ ومنه: $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) \leq \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ ... 0,25

لأن: $\left(\frac{1}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ أي $\frac{1}{4} \in]-1;1[$

وحسب P- فإن: $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n$ أي $v_n - u_n \geq 0$ ... 0,25

ومنه (u_n) و (v_n) تقبلان نفس النهاية ℓ، ولتكن ℓ

حساب قيمة ℓ: بما أن (u_n) متقاربة نحو ℓ

فإن: $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ... 0,25

ومنه: $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

$\ell = \frac{2\ell+1}{\ell+2} \rightarrow \ell^2 + 2\ell = 2\ell + 1$ أي $\ell^2 - 1 = 0$

$\hookrightarrow \ell^2 - \ell - 1 = 0$.

$\Delta = (-1)^2 - 4(1) = 5 > 0 \rightarrow \begin{cases} \ell_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \text{ (مرفوض)} \\ \ell_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0 \text{ (مقبول)} \end{cases}$ ... 0,25

ومنه: $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

* خلاصة: (u_n) و (v_n) متجاورتان

الإجابة النموذجية — تنقيط

* التمرين الثاني:

I) $g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln|x|$ معرفة على $D_g = \mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

1) حساب النهايات:

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(2x^3 - 1 + 2\ln|x|)$ ت.غ. ... 0,25

$= \lim_{x\to-\infty} x^3\left[2 - \frac{1}{x^3} + 2\frac{\ln|x|}{x^3}\right] = -\infty$

$\lim_{x\to0} g(x) = \lim_{x\to0}[2x^3 - 1 + 2\ln|x|] = -\infty$ ... 0,25

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}[2x^3 - 1 + 2\ln|x|] = +\infty$ ... 0,25

2) دراسة إتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}^*$:

g معرفة وقابلة للاشتقاق على $]-\infty;0[$ وعلى $]0;+\infty[$ كمجموع حيث:

$g'(x) = 6x^2 + \frac{2}{x} = \frac{6x^3+2}{x} = \frac{2(3x^3+1)}{x}$ ... 0,25

وحسب الصياغة فإن: $g'(x) = 0$ تكافئ

$3x^3 + 1 = 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}^*; x \neq 0$ لأن)

$(\sqrt[3]{3}x)^3 + 1^3 = (\sqrt[3]{3}x + 1)[(\sqrt[3]{3}x)^2 - \sqrt[3]{3}x + 1]$

$= (\sqrt[3]{3}x + 1)(\sqrt[3]{9}x^2 - \sqrt[3]{3}x + 1) = 0$ ... 0,25

تكافئ: $x = \frac{-1}{\sqrt[3]{3}}$ ($\Delta = (-\sqrt[3]{3})^2 - 4\sqrt{9} = -3\sqrt{9} < 0$) ... 0,25+0,25

ومنه:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$	0	$+\infty$
$3x^3+1$	$-$	0	$+$	$+$
x	$-$	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$ ||	$+$

... 0,25

$g'(x) < 0 \rightarrow x \in]-\frac{1}{\sqrt[3]{3}};0[$ ... 0,25

أي: g متناقصة تماما على $]-\frac{1}{\sqrt[3]{3}};0[$

$g'(x) > 0 \rightarrow x \in]-\infty;-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}[\cup]0;+\infty[$ ... 0,25

ومنه g متزايدة تماما على $]-\infty;-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}]$ وعلى $]0;+\infty[$.

3) جدول تغيرات g:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$	0	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$ ||	$+$
g	$-\infty$	$g(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}})$	$-\infty$ || $+\infty$	$+\infty$

$g(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}) \simeq -0,77$ ... 0,25

4) إثبات أن: $\exists \alpha \in]\frac{1}{2};1[: g(\alpha) = 0$:

g معرفة ومستمرة ومتزايدة تماما على $]\frac{1}{2};1[$ فهي تنعدم على $]\frac{1}{2};1[$ حسب جدول التغيرات لأن $0 \in \mathbb{R}^*_+$

$\begin{cases} g(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4} < 0 \\ g(1) = 1 > 0 \end{cases} \rightarrow g(\frac{1}{2}) \times g(1) < 0$ ... 0,25

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن: المعادلة $g(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا α في $]\frac{1}{2};1[$ ... 0,25

5) التأطير حصر α:

لدينا حسب السؤال-4- فإن: $\alpha \in]\frac{1}{2};1[$ وبالتدريج نجد: $g(\frac{3}{4}) \simeq -0,734$ حيث $\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ أي:

$\frac{3}{4}+\frac{1}{2} = 0,875$ وبما أن $\alpha \in]\frac{3}{4};1[$ فهو منتصف المجال السابق

مع 10^{-2} (قريبة عن الصفر) $\simeq g(0,87)$

لدينا حسب $\alpha \in]0,86;0,87[$ أي $-10^{-2} \simeq g(0,86)$ ... 0,25

www.ency-education.com

الإجابة النموذجية — تنقيط

www.ency-education.com