المستوى: ثالثة رياضي و تقني رياضي — ثانوية المجاهد الراحل عبد القادر علام – تابلاط –

المدة: ساعتان — ❋ 2022 / 12 / 05 ❋

إمتحان الفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين الأول (10 نقاط):

I– نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $g(x)=1+\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$

1. احسب النهايات $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} g(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2. ادرس إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3. استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

II– نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & ; x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الرسم $3\ cm$)

1. احسب النهايتين التاليتين : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. احسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ماذا تستنتج؟

3. احسب $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ ماذا تستنتج ؟ ثم فسر النتيجة بيانيا.

4. بين أن الدالة f قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ و أن من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$.

5. شكل جدول تغيرات الدالة f .

6. بين أن $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]=-\frac{1}{4}$ ماذا تستنتج؟

7. أنشئ (C_f).

III– 1. ليكن n عدد طبيعي غير معدوم ، بين أن المعادلة $f(x)=n$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}_+^*$.

2. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\alpha_n>n$ و استنتج النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n)$.

التمرين الثاني (10 نقاط):

-I 1. علما أن $x-\frac{x^2}{2}\leq \ln(1+x)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ ، استنتج النهاية : $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

2 . لتكن الدالتين u و v المعرفتين على $]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$ بما يلي $u(x)=x-1-x\ln(x)$ و $v(x)=x-1-x\ln(-x)$ على الترتيب.

– شكل جدول تغيرات الدالتين u و v ثم استنتج إشارة $u(x)$ و $v(x)$.

(لاحظ أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث $-4<\alpha<-3$ يحقق $v(\alpha)=0$)

-II لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بما يلي: $\begin{cases} f(x)=\frac{\ln(x^2)}{x-1} & ; \quad x\neq 1 \\ f(1)=2 \end{cases}$

1. أدرس استمرارية و قابلية اشتقاق الدالة f في 1 .
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.
3. ليكن المنحنى (C_f) الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

أ. بين أن $f(\alpha)=\frac{2}{\alpha}$ ثم أحصر العدد $f(\alpha)$

ب. أنشئ (C_f)

-III لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بما يلي: $\begin{cases} g(x)=\frac{\ln\left((x+1)^2\right)}{x}+1 & ; \quad x\neq 0 \\ g(0)=3 \end{cases}$

1. بين أنه يمكن رسم المنحنى (C_g) منحنى الدالة g انطلاقا من المنحنى (C_f) .

2. أنشئ المنحنى (C_g) في نفس المستوي السابق.

تصحيح إمتحان الفصل الأول في مادة الرياضيات

حل التمرين الأول (10 نقاط):

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $g(x)=1+\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$

1. حساب النهايات $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} g(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$$\lim_{\substack{x\to0\\<}} g(x)=\lim_{\substack{x\to0\\<}} 1+\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to-\infty} 1+(1+t)e^{t}=\lim_{t\to-\infty} 1+e^{t}+te^{t}=1 \text{ و } \lim_{|x|\to+\infty} g(x)=\lim_{|x|\to+\infty} 1+\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}=2$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}} g(x)=\lim_{\substack{x\to0\\>}} 1+\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}=+\infty$$

2. دراسة إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;\ 0[$ والمجال $]0;\ +\infty[$ و

من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$:

$$g'(x)=\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}+\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$=e^{\frac{1}{x}}\left[-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right]=\left(\frac{-2x-1}{x^3}\right)e^{\frac{1}{x}}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $\left(\frac{-2x-1}{x^3}\right)$ لأن $e^{\frac{1}{x}}>0$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$-2x-1$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
x^3		$-$		$-$	‖	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

الدالة g متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;\ \frac{-1}{2}\right]$ و المجال $]0;\ +\infty[$ و

متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{-1}{2}\ ;\ 0\right[$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
$g(x)$	2	$\searrow$	$1-e^{-2}$	$\nearrow$	1 ‖ $+\infty$	$\searrow$	2

3. استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

من جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	‖	$+$	

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & ;\ x\neq0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$

1. حساب النهايتين التاليتين : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=+\infty \text{ و } \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=-\infty$$

2. حساب $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ ماذا تستنتج؟

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$ ومنه نستنتج أن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ أي الدالة f مستمرة في 0

3. حساب $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ ماذا تستنتج ؟ ثم تفسر النتيجة بيانيا.

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0 \quad \text{و} \quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$$

ومنه نستنتج أن الدالة f غير قابلة للإشتقاق في 0

ومنه (C_f) يقبل في النقطة $O(0;0)$ نصفي مماسين معامل توجيههما 0 و 1.

4. تبين أن الدالة f قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ و أن من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$.

الدالة f عبارة عن حاصل قسمة و تركيب دوال قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ ومنه الدالة f قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ ومن أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$:

$$f'(x)=\frac{(1)\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)-\left(\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)(x)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}=\frac{1+e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}=\frac{1+e^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}=\frac{g(x)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$$

5. تشكيل جدول تغيرات الدالة f .

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن $\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2>0$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

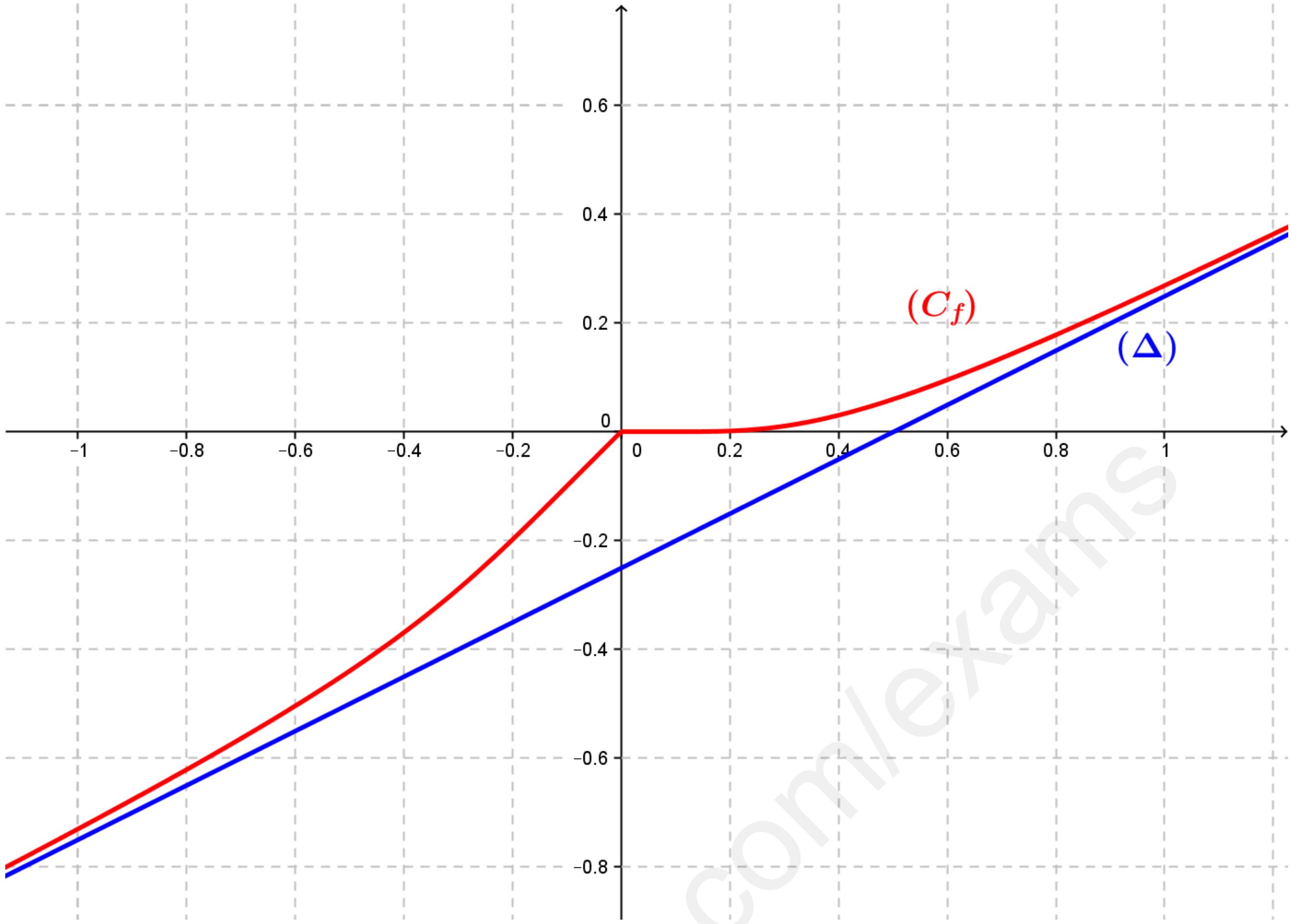
6. تبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\dfrac{1}{2}x\right]=-\dfrac{1}{4}$ ماذا تستنتج؟

$$\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-\frac{1}{2}x\right]=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[\frac{2x-x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)}{2\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)}\right]=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[\frac{x-xe^{\frac{1}{x}}}{2\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)}\right]$$

$$=\lim\limits_{t\to 0}\left[\frac{\frac{1}{t}-\frac{e^t}{t}}{2\left(1+e^t\right)}\right]=\lim\limits_{t\to 0}\left[\frac{\frac{1-e^t}{t}}{2\left(1+e^t\right)}\right]=\lim\limits_{t\to 0}\left[\frac{\frac{-\left(e^t-1\right)}{t}}{2\left(1+e^t\right)}\right]=-\frac{1}{4}$$

ومنه نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

7. أنشئ (C_f).



III- 1. ليكن n عدد طبيعي غير معدوم ، تبين أن المعادلة $f(x)=n$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}_+^*$.

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $f(0)=0$ ومنه $n\in]0;+\infty[$

وعليه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=n$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}_+^*$.

2. تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\alpha_n>n$ و استنتج النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n)$.

لدينا $f(\alpha_n)=n$ معناه $\dfrac{\alpha_n}{1+e^{\frac{1}{\alpha_n}}}=n$ معناه $\alpha_n=n\left(1+e^{\frac{1}{\alpha_n}}\right)$ معناه $\alpha_n=n+ne^{\frac{1}{\alpha_n}}$ و $n+ne^{\frac{1}{\alpha_n}}>n$ وعليه $\alpha_n>n$

بما ان $\alpha_n>n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(n)=+\infty$ ومنه بإستعمال النهاية بالمقارنة نجد $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n)=+\infty$.

التمرين الثاني (10 نقاط):

1. إستنتاج النهاية : $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

بما أن $x-\dfrac{x^2}{2}\le \ln(1+x)\le x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$ يكافئ $-\dfrac{x^2}{2}\le \ln(1+x)-x\le -\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$ يكافئ

$-\dfrac{1}{2}\le \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}\le -\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{3}$ ولدينا $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}\left[-\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{3}\right]=\dfrac{-1}{2}$ إذن باستعمال النهاية بالحصر نجد

$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\dfrac{-1}{2}$.

2. لتكن الدالتين u و v المعرفتين على $]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$ بما يلي $u(x)=x-1-x\ln(x)$ و $v(x)=x-1-x\ln(-x)$ على الترتيب.

– تشكيل جدول تغيرات الدالتين u و v ثم استنتج إشارة $u(x)$ و $v(x)$.

(لاحظ : يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث $-4<\alpha<-3$ يحقق $v(\alpha)=0$)

الدالة u قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل $x\in]0;+\infty[$:

$$u'(x)=1-[\ln(x)+1]=-\ln x$$

x	0		1		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
$u(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

من جدول التغيرات

x	0		1		$+\infty$
$u(x)$		$-$	0	$-$	

الدالة v قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ و من أجل كل $x\in]-\infty;0[$:

$$v'(x)=1-[\ln(-x)+1]=-\ln(-x)$$

x	$-\infty$	α		-1		0
$v'(x)$			$-$	0	$+$	
$v(x)$	$+\infty$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1

من جدول التغيرات

x	$-\infty$		α		0
$v(x)$		$+$	0	$-$	

4. لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(x^2)}{x-1} & ;\quad x\neq 1 \\ f(1)=2 \end{cases}$$

دراسة استمرارية الدالة f في 1:

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(x^2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2\ln(x)}{x-1}=2$ ومنه $\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)$ وعليه الدالة f مستمرة في 1

4. دراسة قابلية اشتقاق الدالة f في 1:

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{\ln(x^2)}{x-1}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2\ln(x)-2(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2[\ln(x)-(x-1)]}{(x-1)^2}=\lim_{t\to0}\frac{2[\ln(t+1)-t]}{t^2}=-1$$

5. دراسة اتجاه تغير الدالة f و تشكيل جدول تغيراتها.

الدالة قابلة للإشتقاق على المجالين $]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$:

$$f'(x)=\frac{\frac{2x}{x^2}(x-1)-\ln(x^2)}{(x-1)^2}=\frac{\frac{2(x-1)}{x}-\ln(x^2)}{(x-1)^2}=\frac{\frac{2(x-1)-2x\ln|x|}{x}}{(x-1)^2}=\frac{2[2x-1-x\ln|x|]}{x(x-1)^2}$$

من أجل $x\in]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{2u(x)}{x(x-1)^2}$ وعليه: إشارة $f'(x)$ من إشارة $u(x)$ لأن $\dfrac{2}{x(x-1)^2}>0$

ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0;\ +\infty[$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$ $\quad$ $-$	

من أجل $x\in]-\infty;\ 0[$: $f'(x)=\dfrac{2v(x)}{x(x-1)^2}$ وعليه:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $\dfrac{v(x)}{x}$ لأن $\dfrac{2}{(x-1)^2}>0$

x	$-\infty$		α		0
$v(x)$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\ \alpha]$ ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;\ +\infty[$

ت. تبين أن $f(\alpha)=\dfrac{2}{\alpha}$ ثم أحصر العدد $f(\alpha)$

$$f(\alpha)=\frac{\ln(\alpha^2)}{\alpha-1}=\frac{2\ln|\alpha|}{\alpha-1}=\frac{2\ln(-\alpha)}{\alpha-1}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

و من جهة لدينا $v(\alpha)=0$ معناه $\alpha-1-\alpha\ln(-\alpha)=0$ معناه

$\ln(-\alpha)=\dfrac{\alpha-1}{\alpha}$ بالتعويض في (1) نجد $f(\alpha)=\dfrac{2\,\dfrac{\alpha-1}{\alpha}}{\alpha-1}=\dfrac{2}{\alpha}$

x	$-\infty$	α	0		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$ ‖	$-$	
$f(x)$	$0 \searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow +\infty$ ‖	$+\infty \searrow$	0

حصر العدد $f(\alpha)$:

لدينا $-4<\alpha<-3$ يكافئ $\dfrac{2}{-4}<\dfrac{2}{\alpha}<\dfrac{2}{-3}$ ومنه $\dfrac{-2}{3}<f(\alpha)<\dfrac{-1}{2}$

5. لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بما يلي:

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{\ln\left((x+1)^2\right)}{x}+1 & ;\quad x\neq 0 \\ g(0)=3 & \end{cases}$$

1. تبين أنه يمكن رسم المنحنى (C_g) منحنى الدالة g انطلاقا من المنحنى (C_f).

لدينا $g(x)=f(x+1)+1$ ومنه (C_g) صورة (C_f) بإنسحاب شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

2. أنشئ المنحنى (C_g) في نفس المستوي السابق.