الاستمرارية

✠ **الاستمرارية:** f دالة معرفة على مجال D_f يشمل العدد الحقيقي x_0 .

♠ القول أن الدالة f مستمرة عند x_0 يعني : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
♠ إذا كانت الدالة f مستمرة على مجال I يعني الدالة f مستمرة عند كل نقطة من I.
♠ التفسير البياني : الدالة f مستمرة على المجال I عندما يمكن رسم منحنيها البياني على هذا المجال دون رفع القلم (اليد).

✠ **مبرهنة القيم المتوسطة :**

♠ f دالة معرفة ومستمرة على مجال $[a;b]$ ومن أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$
فإن : المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا على الأقل α في المجال $]a;b[$.

✠ **حالة خاصة :**

♠ f دالة معرفة ومستمرة على مجال $[a;b]$ وكان $f(a) \times f(b) < 0$ أي 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$
فإن : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل α في المجال $]a;b[$.

✠ **التفسير الهندسي للمعادلة $f(x) = 0$:**

♠ المنحني C_f يقطع حامل محور الفواصل على الأقل مرة واحدة في نقطة فاصلتها α بحيث : $a < \alpha < b$

سلسلة تمارين الاستمرارية

✓ التمرين 01 ◄

♠ f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & ; \ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

♦ أدرس استمرارية الدالة f عند $x_0 = 0$.

✓ التمرين 02 ◄

♠ f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+4}+1 & ; \ x > 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2+3x+3}{x+1} & ; \ x \leq 0 \end{cases}$$

♦ بيّن أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R} - \{-1\}$.

✓ التمرين 03 ◄

♠ f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 - 4x + 5 & ; \ x \geq 0 \\ f(x) = x^2 + 7\alpha - 9 & ; \ x < 0 \end{cases}$$

♦ عيّن قيمة α حتى تكون f مستمرة عند $x_0 = 0$.

✓ التمرين 04 ◄

♠ f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2} & ; \ x \neq 2 \\ f(2) = \beta \end{cases}$$

♦ عيّن قيمة β حتى تكون f مستمرة عند $x_0 = 2$.

✓ التمرين 05 ◄

♠ f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + \dfrac{|x|}{x} & ; \ x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

[1] ♦ اكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .
[2] ♦ ادرس استمرارية الدالة f عند $x_0 = 0$.
[3] ♦ انطلاقا من المنحني الممثل للدالة المرجعية $x \mapsto x^2$ إستنتج التمثيل البياني (C_f) الممثل للدالة f .

✓ التمرين 06 ◄

♠ f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ بـ :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|} & ; \ x \neq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

[1] ♦ بيّن ان f زوجية.
[2] ♦ أكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .
[3] ♦ ادرس استمرارية الدالة f على مجموعة تعريفها .
[4] ♦ أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ثم فسر النتائج بيانيا .
[5] ♦ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

✓ التمرين 07 ◄

♠ f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \dfrac{x^2 - 2|x-3|}{x^2+1}$

[1] ♦ اكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .
[2] ♦ ادرس استمرارية الدالة f عند 3 .

✓ التمرين 08 ◄

♠ f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\begin{cases} f(x) = 3x - 5 & ; \ x < 1 \\ f(x) = ax + 2 & ; \ 1 \leq x < 4 \\ f(x) = x^2 - b & ; \ x \geq 4 \end{cases}$$

♦ عيّن قيمة a و b حتى تكون f مستمرة على $\mathbb{R}$.

✓ التمرين 09 ◄

♠ لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^4 - x^2 + 1$

[1] ♦ بيّن أن المعادلة $f(x) = 3$ تقبل حلا على الأقل α في المجال $]1; 2[$.

♠ لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 4$

[2] ♦ بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل α في المجال $]0; 1[$.

حالة عدم التعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$f(x)$ تتضمن جذراً $\sqrt{\quad}$

نستعمل طريقة التحليل :
وضع الحد الأكبر درجة كعامل مشترك .

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = |x|\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}$$

$$\sqrt{\alpha x+\beta} = |x|\sqrt{\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x^2}}$$

$f(x)$ تتضمن كثيرات حدود فقط

تطبيق القاعدة التالية :
عند اللانهاية: كثير الحدود له نفس نهاية الحد الأكبر درجة.

$$\lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0 = \lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n$$

حالة عدم التعيين $+\infty-\infty$

$f(x)$ تتضمن جذراً $\sqrt{\quad}$

- $f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta$
  - $\sqrt{a} \neq |\alpha|$: نضـــع x كـعامـــل مشتـــرك
  - $\sqrt{a} = |\alpha|$: نستعمـــل طريقـــة المرافـــق
- $f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$
  - $a \neq \alpha$: نستعمـــل طريقـــة المرافـــق
  - $a = \alpha$: نضـــع x كـعامـــل مشتـــرك
- $f(x) = \sqrt{ax+b}+\alpha x+\beta$: نضـــع x كـعامـــل مشتـــرك

حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$

$f(x)$ تتضمن كثيرات حدود

نستعمل طريقة الإختزال :

❶ نحلّل البسط والمقام.

❷ ثم نختزل على $(x-a)$

$$f(x) = \frac{\cancel{(x-a)}(\cdots\cdots)}{\cancel{(x-a)}(\cdots\cdots)}$$

$f(x)$ تتضمن جذراً $\sqrt{\quad}$

نستعمل طريقة المرافق :

❶ نضرب : $f(x)\times\frac{\text{المرافق}}{\text{المرافق}}$

❷ ثم نختزل على : $(x-a)$

المقام من الشكل $(\alpha x+\beta)$

نستعمل طريقة العدد المشتق :

❶ إظهار العبارة : $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$

$$\frac{\ldots\ldots}{\alpha x+\beta} = \frac{1}{\alpha}\times\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

❷ $\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a)$

$f(x)$ تتضمن $\sin x$ و $\cos x$

نظهر إحدى النهايات الشهيرة التالية :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$$

مثال 01

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2-3}}{x+2}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ تكافئ : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{2-3/x}}{x(1+2/x)}$ تكافئ :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{2}}{x}=-\sqrt{2}$

مثال 02

$f(x)=\sqrt{4x^2-3}+2x-2$ من الشكل $(\sqrt{\alpha}=|a|)$ ومنه

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ تكافئ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-3}+(2x-2)\right)\left(\sqrt{4x^2-3}-(2x-2)\right)}{\left(\sqrt{4x^2-3}-(2x-2)\right)}$$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{8x+1}{\left(\sqrt{4x^2-3}-(2x-2)\right)}$ تكافئ

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{8x+1}{-2x\left(\sqrt{1}+1\right)}$ تكافئ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{8x}{-4x}=-2$

مثال 03

$f(x)=\sqrt{4x^2-3}+x-2$ من الشكل $(\sqrt{\alpha}\neq|a|)$ ومنه

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ تكافئ $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-3}+x-2$ تكافئ

$\lim\limits_{x\to-\infty}-x\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}+x-2$

تكافئ $\lim\limits_{x\to-\infty}-x\left[\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}+1-\frac{2}{x}\right]$ تكافئ $\lim\limits_{x\to-\infty}-3x=+\infty$

مثال 04

$f(x)=\sqrt{4x^2-3}-\sqrt{4x^2-2}$ $(+\infty-\infty\,,\ a=\alpha)$ ومنه

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ تكافئ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-3}-\sqrt{4x^2-2}\right)\left(\sqrt{4x^2-3}+\sqrt{4x^2-2}\right)}{\left(\sqrt{4x^2-3}+\sqrt{4x^2-2}\right)}$$

تكافئ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt{4x^2-3}+\sqrt{4x^2-2}\right)}$ تكافئ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{2x}=0$

مثال 05

$(+\infty-\infty\,,\ a\neq\alpha)\ f(x)=\sqrt{4x^2-3}-\sqrt{9x^2-2}$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ تكافئ $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-3}-\sqrt{9x^2-2}$ تكافئ

$\lim\limits_{x\to-\infty}-x\sqrt{4-3/x^2}-x\sqrt{9-2/x^2}$ تكافئ $\lim\limits_{x\to-\infty}-x[2-3]$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

مثال 06

$f(x)=\sqrt{2x-3}-3x+2$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ تكافئ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x-3}-3x+2$

تكافئ $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}-3x+2$ تكافئ $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\sqrt{2}-3]$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

مثال 07

$f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ ومنه $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}f(x)$ ، $(0/0)$

تكافئ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ تكافئ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$

ومنه $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\frac{(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$ تكافئ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$

ومنه $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}f(x)=\frac{1}{4}$

مثال 08

$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ ومنه $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}f(x)$ تكافئ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}$

تكافئ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}(x+1)$ ومنه $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}f(x)=2$

مثال 09

$f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

لحساب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}f(x)$ يجب أن تكون $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ تكافئ

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=g'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$

ومنه بوضع $g(x)=\sqrt{x+3}$ نجد $g(1)=2$ ومنه $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$

ومنه $g'(1)=\frac{1}{4}$ ومنه $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}f(x)=\frac{1}{4}$