

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

تمرين 01 : (03.5 نقاط) نعتبر المتتالية (Z_n) للأعداد المركبة المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2}i \times z_n + 5 \end{cases}$$

في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

نضع M_n النقطة ذات اللاحقة z_n . نعتبر العدد المركب $z_A = 4 + 2i$ و النقطة A ذات اللاحقة z_A

1) لتكن (U_n) المتتالية المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_n = z_n - z_A$

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}i \times u_n$

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4 - 2i)$

3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، النقط M_n و M_{n+4} ، A على إستقامة

التمرين 02 : (04.5 نقاط) الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

نعتبر مجموعتي النقط (E) و (F) المعرفتين كالتالي:

$$(E) = \{M(x, y, z) / (x + y + z + 1)^2 + (x - y + 2)^2 = 0\}$$

$$(F) = \{M(x, y, z) / (x + y + z + 1)^2 - (x - y + 2)^2 = 0\}$$

1. بين أن (E) هي مستقيم يطلب تعيين شعاع توجيه له
2. بين أن (F) هي اتحاد مستويين (P_1) و (P_2) يطلب إعطاء معادلتيهما ثم تحقق أن

$$(P_1) \cap (P_2) = (E)$$

3. نرفق بكل عدد حقيقي m المستوي (P_m) المعروف بالمعادلة الديكارتية :

$$(P_m): (1+m)x + (m-3)y + (m-1)z + m - 3 = 0$$

أ. تحقق أن (P_m) يحوي (E)

ب. هل كل مستوي يحوي (E) هو المستوي (P_m) ؟ برر

التمرين 03 (05 نقاط) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهول $(x; y)$ حيث : $4x - 9y = 5$

(1) أ) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : $x \equiv 8[9]$ ، ثم إستنتج حلول المعادلة (E)

ب) α عدد طبيعي يكتب $\overline{43}$ في نظام التعداد الذي أساسه x و يكتب $\overline{98}$ في نظام التعداد الذي أساسه y حيث : $x \leq 35$ و $y \leq 15$

❖ عين القيم الممكنة لـ x و y ثم أكتب α في النظام العشري

(2) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة العدد 4^n على 9

ب) عين الثنائيات $(x; y)$ من $\mathbb{N}^2$ حلول المعادلة (E) حيث : $2011^x + 4^y + 7 \equiv 0[9]$

(3) نعتبر العددين الطبيعيين a و b حيث : $a = 9n + 8$ و $b = 4n + 3$ و ليكن d قاسمهما المشترك الأكبر حيث n عدد طبيعي

أ) ما هي القيم الممكنة لـ d

ب) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $d = 5$

(4) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $A = 9n^2 + 17n + 8$ و $B = 4n^2 + 7n + 3$

أ) بين أن العدد $(n+1)$ يقسم كلا من A و B

ب) إستنتج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B

التمرين الرابع (07 نقاط) الجزء I ليكن k عدد حقيقي موجب تماما

(1) الدالة g_k معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g_k(x) = 1 + (1 + k(x+1))e^{kx+k}$

أ) أحسب الدالة المشتقة g'_k ثم إستنتج إشارة $g'_k(x)$ من أجل x من $\mathbb{R}$
 ب) شكل جدول تغيرات الدالة g_k ، ثم إستنتج أنه من أجل x من $\mathbb{R}$: $g_k(x) > 0$ (لاحظ أن من أجل x من $\mathbb{R}$: $e^x > x$)

(2) الدالة f_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_k(x) = x + (x + 1)e^{kx+k}$

(C_k) منحنى دالة f_k في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

❖ بين أن جميع المنحنيات (C_k) تمر بنقطة ثابتة I يطلب تعيين إحداثياتها

❖ بين أنه من أجل x من $\mathbb{R}$: $f'_k(x) = g_k(x)$

الجزء II : بوضع $k = 1$:

أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$

ب) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_1) بجوار $-\infty$

ج) أدرس إتجاه تغير الدالة f_1 على $\mathbb{R}$ و إستنتج جدول تغيراتها

د) عين معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_1) عند النقطة التي فاصلتها -1

(4) بين أن المعادلة $f_1(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1 \leq \alpha \leq 0$

(5) أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f_1(x-1) + f_{-1}(-x-1) = -2$. ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_1) و (C_{-1}) ؟

ب) أرسم المنحنى (C_1) . و إستنتج على نفس المعلم المنحنى (C_{-1})

الجزء III : λ عدد حقيقي أقل تماما من 1 . نعتبر التكامل التالي : $I_k = \int_{\lambda-1}^{-1} -(x+1)e^{kx+k} dx$

(1) هل العدد I_k يمثل مساحة ؟ برر

(2) بإستعمال التكامل بالتجزئة ، أحسب I_1 ثم إستنتج $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} I_1$. فسر هذه النتيجة

إنتهى الموضوع الأول .

الموضوع الثاني :

التمرين الأول : (04 نقاط)

1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين $(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعرفة بـ : $2019x - 2018y = 1 - \lambda$ بحيث $\lambda \in \mathbb{Z}$

(أ) عين قيم λ التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حولا في $\mathbb{Z}^2$

(ب) بين ان الثنائية $(1 - \lambda; 1 - \lambda)$ حل خاص للمعادلة (E)

(ت) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

(ث) نعتبر في $\mathbb{Z}$ جملة المعادلتين : $(S) : \begin{cases} a \equiv 1[2018] \\ a \equiv \lambda[2019] \end{cases}$ بحيث $a \in \mathbb{Z}$

❖ إستنتج حل جملة المعادلتين (S)

(5) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة العدد 2^n على 7

(ب) إستنتج باقي قسمة العدد $1440 + 2018^{2019}$ على 7

(ج) بوضع $\lambda = 0$: عين الثنائيات (x, y) من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ حلول المعادلة (E) وتحقق $2^{y-x} \equiv 4[7]$

التمرين الثاني : (04 نقاط) ليكن n عدد طبيعي بحيث : $n \geq 4$

1) يحتوي صندوق U على n كرة لا يمكن التمييز بينها عند اللمس منها 3 حمراء و البقية سوداء. نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين

❖ أحسب إحتمال كل حادثة من الحادثتين التاليتين :

A : سحب كرتين من نفس اللون

B : سحب كرة حمراء على الأكثر

2) نعيد التجربة و نضيف صندوقين بحيث نرمز لـ U_k لصندوق k ($1 \leq k \leq 3$) الذي يحتوي على k كرة حمراء و $n - k$ كرة سوداء .

نختار عشوائيا صندوق من 3 صناديق و نسحب في آن واحد كرتين .

ليكن X المتغير العشوائي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكرات الحمراء.

❖ عين مجموعة قيم X

❖ أثبت أن : $P(X = 1) = \frac{4(3n - 7)}{3n(n - 1)}$ و $P(X = 2) = \frac{8}{3n(n - 1)}$

❖ عين قانون الإحتمال لـ X

التمرين الثالث : (04.5 نقاط) حل في $\mathbb{C}$ جملة المعادلتين :

$$\begin{cases} z_1 - z_2 = 4i \\ z_1 + 3z_2 = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A و B النقطتان اللتان لاحقتاهما على الترتيب $\sqrt{3} + 3i$ و $\sqrt{3} - i$

1. أكتب العدد المركب $\frac{z_B}{z_A}$ على الشكل الأسّي .

2. إستنتج قيم n التي من أجلها يكون $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$ عدد تخيلي صرف .

3. S التحويل النقطي الذي مركزه O ويحول A إلى B

♣ أوجد الكتابة المركبة للتشابه S ثم عين العناصر المميزة له

4. نعرف متتالية النقط A_n التي لاحقتها Z_n من المستوي المركب كمايلي : $\begin{cases} A_0 = A \\ A_{n+1} = S(A_n) \end{cases}$ من أجل كل عدد طبيعي n

أ) أنشئ في المستوي المركب . النقط A_2, A_1, A_0

ب) برهن أن : $Z_n = 2(\sqrt{3})^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}$

4. نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كمايلي : $\begin{cases} U_0 = A_0 A_1 \\ U_n = A_n A_{n+1} \end{cases}$

أ/ بين أن المتتالية (U_n) هندسية يطلب تحديد أساسها q و حدها الأول U_0

ب/ إستنتج عبارة U_n بدلالة n

ج. أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

التمرين 04 : (06.5 نقاط) الجزء I : الدالة g معرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x$

(1) أدرس إتجاه تغير الدالة g على المجال $]0, +\infty[$

(2) برر وجود عدد حقيقي α حيث $g(\alpha) = 0$. ثم جد قيمة مقربة لـ α مدور إلى 10^{-3}

الجزء II : الدالة f معرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$

(C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (بحيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$)

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) ذو المعادلة $y = 2x$

(3) أ) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

ب) شكل جدول تغيرات دالة f
(4) أرسم (Δ) و (C_f)

الجزء III ليكن n عدد طبيعي غير معدوم . و ليكن I_n الحيز من المستوي المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين ذو المعادلتين : $x = n$ و $x = 1$

(1) برر أن هذه المساحة معطاة بـ : $I_n = \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx$

(2) أ) تأكد أن الدالة : $F : x \rightarrow -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$ هي دالة أصلية للدالة $x \rightarrow \frac{\ln x}{x^2}$ على المجال $]0, +\infty[$

ب) إستنتج عبارة I_n بدلالة n

(3) أحسب نهاية المساحة I_n لما n تؤول الى $+\infty$

إنتهى الموضوع الثاني

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين
الموضوع الأول

التمرين الأول (04 نقاط)

نعتبر المعادلة (E) $7x - 3y = 10$ ذات المجهول $(x; y)$ حيث $x; y$ عددين صحيحين:

$$(1) \text{ عين الحل الخاص } (x_0; y_0) \text{ للمعادلة الذي يحقق } \begin{cases} x_0 - 1 \equiv 0[3] \\ -2 < x_0 < 4 \end{cases}$$

ثم حل المعادلة (E).

(2) بفرض أن الثنائية $(x; y)$ حل المعادلة (E) حيث $x; y$ عددان طبيعيين .

$$\begin{cases} 2^x + y + n^2 - 2 \equiv 0[7] \\ 0 < n < 18 \end{cases}$$
 عين مجموعة الأعداد الطبيعية n التي تحقق الجملة

(3) جد الثنائية الوحيدة $(x; y)$ حل المعادلة (E) بحيث المضاعف المشترك الأصغر للعددين $x; y$ هو 2139

التمرين الثاني (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نعتبر النقط $A(4; 2; 2)$ و $B(5; -2; 3)$ و $C(1; 1; 1)$ والمستقيم

$$(\Delta) \text{ المعروف بالتمثيل الوسيطى } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} : t \in \mathbb{R}$$

(P) المستوي الذي يمر من النقطة A و عمودي على المستقيم (Δ) .

1. أ.اكتب معادلة ديكرتية للمستوي (P)

ب. تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المستوي (P) و أن النقطة C لا تنتمي إلى المستوي (P).

ج. تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ) و أن النقطة A لا تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

2. أ. عين إحداثيات النقطة D المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (P).

ب. بين أن النقط $A; B; C; D$ ليست من نفس المستوي .

ج. عين طبيعة المثلث ABD ثم أحسب حجم رباعي الوجوه ABCD.

3. عين مركز سطحي الكرتين اللذين يمسان المستوي (P) في النقطة D و نصف قطر كل منهما 3.

4. m عدد حقيقي و (P_m) المستوي المعرف بمعادلته $mx - 2(m-1)y - z + m - 1 = 0$ أثبت أن جميع المستويات (P_m) تشمل مستقيم ثابتاً (يطلب تعيين تمثيل وسيطي له) و ذلك مهما يكن الوسيط الحقيقي m

التمرين الثالث (05 نقاط)

ليكن α عدد حقيقي من المجال $[0; \pi]$ و z عدد مركب نعتبر كثير $P(z)$ معرف كما يلي:

$$P(z) = z^3 - (1 - 2 \sin \alpha)z^2 + (1 - 2 \sin \alpha)z - 1$$

1. احسب $P(1)$ ثم استنتج انه يوجد عددين حقيقيين a و b يطلب تعيينهما بحيث: $P(z) = (z-1)(z^2 + az + b)$.
2. حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $P(z) = 0$.
3. أكتب حلول المعادلة $P(z) = 0$ على الشكل المثلثي ثم على الشكل الآسي.
4. في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط $A; B; C$ لواحقتها على الترتيب

$$z_A = 1 \text{ و } z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \text{ و } z_C = \overline{z_B}$$

أ- علم النقط $A; B; C$ ما طبيعة المثلث ABC ؟

- ب- لتكن النقطة D نظيرة O بالنسبة إلى النقطة B و ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه O و يحول C إلى D .
عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S .

5. أكتب العدد المركب $\left(\frac{1}{-z_B}\right)$ على الشكل الأسّي ثم عين مجموعة الأعداد الطبيعية n حتى يكون $\left(\frac{1}{-z_B}\right)^n$ عددا حقيقيا سالبا.

التمرين الرابع (07 نقاط) :

I - نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = -2 + (-x+2)e^{-x+2}$

1. أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
 2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,14 < \alpha < 1,15$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.
- II - نعتبر f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = -2x + (x-1)e^{-x+2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2. أبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -2x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .
- ب. ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .
3. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
4. أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $[0; +\infty[$ (تعطى $f(\alpha) = -1,95$)
5. لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = (x-1)e^{-x+2}$ باستخدام التكامل بالتجزئة عين دالة أصلية للدالة h ثم استنتج حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمتين التي معادلتهما $x=0$ و $x=1$ و $y=-2x$

اتمنى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول (04 نقاط) خاص بشعبة التقني رياضي

تتكون مجموعة من ثمانية رجال و أربع نساء من بينهم رجل اسمه عبد القادر و امرأة واحدة اسمها هاجر .
نريد تكوين لجنة مشكلة من ثلاث أعضاء لهم نفس المهام .

1. أحسب احتمال كل من الأحداث التالية : A " اللجنة تضم ثلاث رجال " B " اللجنة تضم رجل و إمرتين "
- C " اللجنة تضم عبد القادر " D " اللجنة تضم إما هاجر أو عبد القادر "
2. ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل اختيار بعدد الرجال في اللجنة المكونة .
عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله ثم احسب أمله الرياضي.

التمرين الأول (04 نقاط) خاص بشعبة الرياضيات

اجريت دراسة إحصائية على عدد من التلاميذ الذين يملكون هواتف نقالة و حواسيب بإحدى الثانويات فكانت نتائج الدراسة الإحصائية كما يلي : 70 % من التلاميذ يملكون هواتف نقالة

احتمال ان يكون التلميذ يملك حاسوب علما أنه يملك هاتف نقال هو $\frac{1}{16}$ و احتمال ان يكون التلميذ لا يملك حاسوب علما أنه لا يملك هاتف نقال هو $\frac{3}{14}$.

نرمز إلى T حادثة " التلميذ يملك هاتف نقال " و M حادثة " التلميذ يملك حاسوب "

1. شكل شجرة الاحتمال التي تتمذج هذه الوضعية .
2. أحسب احتمال أن يملك التلميذ هاتف نقال و حاسوب $P(T \cap M)$.
3. أحسب احتمال أن يملك التلميذ حاسوب $P(M)$.
4. أحسب احتمال ان يملك التلميذ هاتف نقال و لا يملك حاسوب $P(T \cap \overline{M})$ ثم استنتج $P_{\overline{M}}(T)$.

التمرين الثاني (04 نقاط)

نعتبر (u_n) متتالية المعرفة بـ $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

- 1 - أحسب الحدود u_1 , u_2 ; u_3 ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغيرات المتتالية (u_n)
- 2 - أبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \leq n + 3$.

ب-ادرس اتجاه تغيرات المتتالية (u_n)

ج-استنتج ان (u_n) محدودة من الأسفل هل يمكن القول أن (u_n) متقاربة ؟

3 - نعتبر (v_n) متتالية المعرفة بالعلاقة : $v_n = u_n - n$

أ - برهن أن المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول و أساسها .

ب -عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n و أحسب نهاية المتتالية (u_n)

ج-احسب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

4 - لتكن (t_n) متتالية المعرفة على $\mathbb{N}$: $t_n = \ln(v_n)$

أ. برهن أن (t_n) المتتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب. أحسب بدلالة n المجموع $A_n = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n$ واستنتج بدلالة n الجداء $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$

التمرين الثالث (05 نقاط)

نعتبر في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ والنقطتين A و B لاحقتها $z_A = 4 + 2i$ و $z_B = 3 - i$

- أكتب على الشكل الجبري ثم على الشكل المثلثي العدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_B}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABO .
- نعتبر التحويل النقطي r في المستوى الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' والذي يحول النقطة A إلى B ويحول النقطة B إلى O .
 - بين أن العبارة المركبة للتحويل النقطي r هي $z' = -iz + 1 + 3i$.
 - عين طبيعة التحويل r و عناصره المميزة.
 - عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة O بالتحويل r .
- استنتج طبيعة الرباعي $ABOC$.
- عين مجموعة النقط M من المستوى لاحقتها z حيث $|z - 4 - 2i| = |z|$.
- من أجل $z \neq 2 + i$ نضع $L = \frac{z' - 2 - i}{z - 2 - i}$
 - بين أن $L = -i$.
 - عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون L^n عدداً حقيقياً.
 - بين أن $(z' - 2 - i)^2 + (z - 2 - i)^2 = 0$.

التمرين الرابع (07 نقاط) :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{\ln(x+1) + |x|}{x+1}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (وحدة الطول 2cm)

- أحسب : $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجةين بيانياً
- أ- أحسب $f'(x)$ من أجل $x \in]-1; 0[$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; 0[$
 ب- أحسب $f'(x)$ من أجل $x \in]0; +\infty[$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$
- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ هل f قابلة للاشتقاق عند 0 ؟
- أكتب معادلتى المماسين لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0
- شكل جدول تغيرات f
- أحسب $f(e-1)$ ثم أنشئ (C_f)
- أوجد دالة أصلية للدالة f على المجال $[0; +\infty[$ ثم استنتج مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و محور الفواصل والمستقيمين ذا المعادلتين : $x = 0$ و $x = e^2 - 1$

اتمنى الموضوع الثاني

نعتبر المعادلة (E)..... $7x-3y=10$ ذات المجهول (x,y) حيث $y;x$ عددين صحيحين.

(1) تعيين الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة الذي يحقق $\begin{cases} x_0-1 \equiv 0[3] \\ -2 < x_0 < 4 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x_0 \equiv 1[3] \\ -2 < x_0 < 4 \end{cases}$ يعني أن

أي أن $\begin{cases} x_0 = 1+3k : k \in \mathbb{Z} \\ -2 < x_0 < 4 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} x_0 = 1+3k : k \in \mathbb{Z} \\ -3 < k < 3 \end{cases}$ بتعويض

$k =$	-2	-1	0	1	2
$x_0 =$	-5	-2	1	4	7
$y_0 =$	-15	-8	-1	6	13

نختار واحد من الحلول الخاصة و ليكن (4;6) (1)

حل المعادلة (E) لدينا $\begin{cases} 7x-3y=10 \\ 7(4)-3(6)=10 \end{cases}$ بالطرح نجد $7(x-4)=3(y-6)$ و العددين 3 و 7 أوليان فيما بينهما فحسب مبرهنة

قوس نجد أن $\begin{cases} x-4=3k \\ y-6=7k \end{cases} : k \in \mathbb{Z}$ و منه $\begin{cases} x=4+3k \\ y=6+7k \end{cases} : k \in \mathbb{Z}$

مجموعة الحلول $S = \{(4+3k; 6+7k) : k \in \mathbb{Z}\}$ (1)

(2) بفرض أن الثنائية $(x;y)$ حل المعادلة (E) حيث $y;x$ عددين طبيعيين .

تعيين مجموعة الأعداد الطبيعية n التي تحقق الجملة $\begin{cases} 2^x + y + n^2 - 2 \equiv 0[7] \\ 0 < n < 18 \end{cases}$ أي أن $\begin{cases} 2^{4+3k} + 6 + 7k + n^2 - 2 \equiv 0[7] \\ 0 < n < 18 \\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$ أي أن $\begin{cases} n^2 \equiv 1[7] \\ 0 < n < 18 \\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$ و منه $\begin{cases} 2 + n^2 + 4 \equiv 0[7] \\ 0 < n < 18 \\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$ أي أن $\begin{cases} n^2 \equiv 1[7] \\ 0 < n < 18 \\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$ و لدينا $2^3 = 1[7]$ و منه $\begin{cases} 2^{4+3k} + n^2 + 4 \equiv 0[7] \\ 0 < n < 18 \\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
$n^2 \equiv$	1	4	2	1	4	1	0	1	4	2	1	4	1	0	1	4	2	[7]

القيم هي 1; 4; 6; 8; 11; 13; 15 (1)

(3) إيجاد الثنائية الوحيدة $(x;y)$ حل المعادلة (E) بحيث المضاعف المشترك الأصغر للعددين $y;x$ هو 2139 لدينا

$2139 = 3 \times 23 \times 31$ و العددين $4+3k; 6+7k$ قاسمان للعدد 2139 و قواسم 2139 هي 1 و 3 و 23 و 31 و 69 و 93 و 713 و 2139 :

$4+3k=1$ يعني أن $k=-1$ و منه $\begin{cases} x=1 \\ y=15 \end{cases}$ و 15 ليست قاسم للعدد 2139 إذن الحل مرفوض

$4 + 3k = 31$ يعني أن $k = 9$ و منه $\begin{cases} x = 31 \\ y = 39 \end{cases}$ و $PPCM(39;31) = 2139$ و منه $(x; y) = (31; 39)$ هي الثنائية الوحيدة.....(1)

و $4 + 3k = 23$ ليس لها حل صحيح و $4 + 3k = 3$ ليس لها حل صحيح و $4 + 3k = 69$ ليس لها حل صحيح و $4 + 3k = 93$ ليس لها حل صحيح و $4 + 3k = 713$ ليس لها حل صحيح و $4 + 3k = 2139$ ليس لها حل صحيح .

التمرين الثاني (04 نقاط)

1. أ. كتلف معادلة ديكارتية للمستوي (P) : شعاعه الناظمي هو $\vec{n}(2; 1; 2)$ معادلته من الشكل $2x + y + 2z + d = 0$ و بما أن A

نقطة منه فإن $2(4) + 2 + 2(2) + d = 0$ و منه $d = -14$ إذن $2x + y + 2z - 14 = 0$ (0,5)

ب. التحقق أن النقطة B تنتمي إلى المستوي (P) : $2(5) + (-2) + 2(3) - 14 = 0$ محققة و منه $B \in (P)$

و أن النقطة C لا تنتمي إلى المستوي (P) : $2(1) + 2(1) + 2(1) - 14 = 0$ غير محققة و منه $C \notin (P)$ (0,25)

ج. التحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ) : تنتمي لأنه من أجل $t = 0$ في التمثيل الوسيط نجد $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ (0,25)

النقطة A لا تنتمي إلى المستقيم (Δ) : يعني أن $\begin{cases} 4 = 1 + 2t \\ 2 = 1 + t \\ 2 = 1 + 2t \end{cases}$ و منه A لا تنتمي إلى المستقيم (Δ) (0,25)

2. أ. نعين إحداثيات النقطة D المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (P) : لتكن $D(x; y; z)$ و هي تنتمي إلى (P) أي أن

$$\begin{cases} 2x + y + 2z - 14 = 0 \\ \frac{x-1}{2} = y-1 \\ y-1 = \frac{z-1}{2} \end{cases} \text{ يكافئ } \overrightarrow{CD}(x-1; y-1; z-1) \text{ مرتبط خطيا مع } \vec{n}(2; 1; 2) \text{ أي أن}$$

$$\begin{cases} 2x + y + 2z - 14 = 0 \\ \frac{x-1}{2} = \frac{z-1}{2} \\ y-1 = \frac{z-1}{2} \end{cases} \text{ و منه } \begin{cases} 2x + y + 2z - 14 = 0 \\ x = z \\ z = 2y - 1 \end{cases} \text{ و منه } \begin{cases} 2(2y-1) + y + 2(2y-1) - 14 = 0 \\ x = z \\ z = 2y - 1 \end{cases}$$

و منه $y = 2$ إذن $x = z = 3$ و منه $D(3; 2; 3)$ (0,5)

ب. إثبات أن النقط $A; B; C; D$ ليست من نفس المستوي : بما أن النقط $A; B; D$ تنتمي إلى المستوي (P) و النقطة

C لا تنتمي للمستوي (P) فإن النقط $A; B; C; D$ ليست من نفس المستوي (0,25)

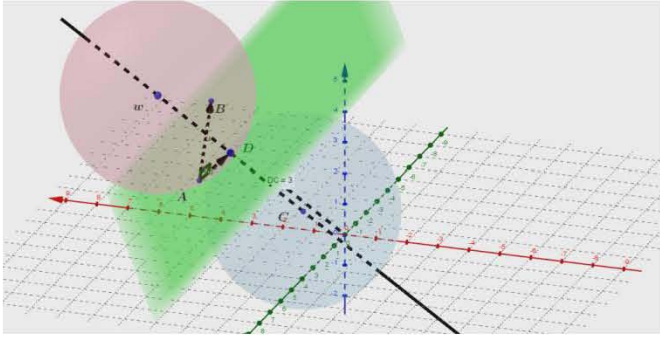
ج. نعين طبيعة المثلث ABD لنحسب $\overrightarrow{AB}(1; -4; 1)$ و $\overrightarrow{AD}(-1; 0; 1)$ و منه $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

و منه المثلث ABD قائم في A (0,25)

حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$: مساحة المثلث ABD هي $S = \frac{AB \times AD}{2} = \frac{\sqrt{18} \times \sqrt{2}}{2} = 3$ (0,25)

هو $v = \frac{S \times CD}{3} = \frac{3 \times 3}{3} = 3$ (0,25)

3. تعيين مركز سطحي الكرتين اللذين يمسان المستوي (P) في النقطة D ونصف قطر كل منهما 3 وليكن أحدهما $w(x_0; y_0; z_0)$



أي أن $wD=3$ والشعاع $\vec{wD}$ و $\vec{n}(2; 1; 2)$ مرتبطان خطياً
يكافئ $(x_0 - 3)^2 + (y_0 - 2)^2 + (z_0 - 3)^2 = 9$

$$\frac{x_0 - 3}{2} = \frac{y_0 - 2}{1} = \frac{z_0 - 3}{2} \text{ ومنه}$$

$$(y_0 - 2)^2 = 1 \text{ أي أن } 4(y_0 - 2)^2 + (y_0 - 2)^2 + 4(y_0 - 2)^2 = 9$$

ومن ثم $y_0 = 1$ أو $y_0 = 3$

لما $y_0 = 3$ فإن $x_0 = 5$ و $z_0 = 5$ ولما $y_0 = 1$ فإن

$$x_0 = 1 \text{ و } z_0 = 1$$

المركزين هما $C(1; 1; 1)$ و $w(5; 3; 5)$ $2 \times (0,25)$

4. m عدد حقيقي و (P_m) المستوي المعرف بمعادلته $mx - 2(m-1)y - z + m - 1 = 0$ أثبت أن جميع المستويات (P_m) تشمل مستقيم

ثابتاً $mx - 2(m-1)y - z + m - 1 = 0$ يكافئ $m(x + 2y + 1) + 2y - z - 1 = 0$ مستقلة عن m يعني $\begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$ الجملة

تعيين مستقيم لأنها للمستويين غير متوازيان $(0,25)$

نضع $\begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = t \\ z = 2t - 1 \end{cases}$ و منه $t \in R$ هو التمثيل الوسيط المطلوب $(0,25)$

التمرين الثالث (05 نقاط)

1. حساب $P(1)$ نجد $P(1) = 0$ $(0,25)$

استنتج أنه يوجد عددين حقيقيين a و b يطلب تعيينهما بحيث : $P(z) = (z-1)(z^2 + az + b)$ بالتحليل نجد

$$P(z) = (z-1)(z^2 + 2\sin\alpha \cdot z + 1) \text{ } (0,5)$$

2. حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $P(z) = 0$ يكافئ $\begin{cases} z = 1 \\ z^2 + 2\sin\alpha \cdot z + 1 = 0 \end{cases}$ $(0,25)$

نحل $z^2 + 2\sin\alpha \cdot z + 1 = 0$ حساب المميز $\Delta = 4\sin^2\alpha - 4 = -4\cos^2\alpha$ للمعادلة حلين هما $z_1 = -\sin\alpha + i\cos\alpha$

$$\text{و } z_2 = -\sin\alpha - i\cos\alpha \text{ } 2 \times (0,25)$$

3. كتلف حل المعادلة $P(z) = 0$ على الشكل المثلثي $z_1 = i(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ و

$$z_2 = -i(\cos\alpha - i\sin\alpha) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$$

الشكل الآسي : $z_1 = e^{i(\alpha + \frac{\pi}{2})}$ و $z_2 = e^{i(\frac{3\pi}{2} - \alpha)}$ $2 \times (0,5)$

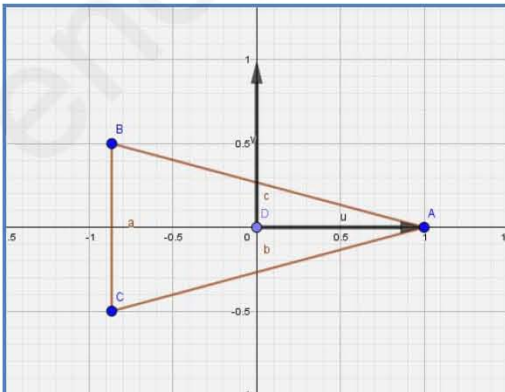
4. نعتبر النقط A ; B ; C لواحقتها على الترتيب $z_A = 1$ و

$$z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \text{ و } z_C = \overline{z_B}$$

أ - نطالع النقط A ; B ; C $3 \times (0,25)$

طبيعة المثلث ABC هو مثلث متساوي الساقين

لأن $AB = AC$ $(0,25)$



ب لتكن النقطة D نظيرة O بالنسبة إلى النقطة B وليكن S التشابه المباشر الذي مركزه O و يحول C إلى D .

$$(0,25) \dots\dots\dots z_D = -\sqrt{3} + i \text{ أي } z_D = 2z_B \text{ يعني أن } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OB}$$

نقن العناصر المميزة للتشابه المباشر S : لدينا $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ $\frac{z_D - z_O}{z_C - z_O} = \frac{2z_B}{z_B} = \frac{2(z_B)^2}{1} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$3 \times (0,25) \dots\dots\dots -\frac{\pi}{6} \text{ زاويته } 2 \text{ و نسبته } S \text{ منه التشابه } \arg\left(\frac{z_D}{z_C}\right) = -\frac{\pi}{6} \text{ و } \left|\frac{z_D}{z_C}\right| = 2$$

$$(0,25) \dots\dots\dots \left(\frac{1}{-z_B}\right) = e^{\frac{\pi}{6}i} \text{ على الشكل الأسّي } \left(\frac{1}{-z_B}\right)$$

نقن مجموعة الأعداد الطبيعية n حتى يكون $\left(\frac{1}{-z_B}\right)^n$ عددا حقيقيا سالبا يعني أن $\arg\left(\left(\frac{1}{-z_B}\right)^n\right) = \pi [2\pi]$ أي أن

$$(0,25) \dots\dots\dots n = 12k + 6 : k \in \mathbb{N} \text{ إذن } n \equiv 6[12] \text{ أي أن } \frac{n}{6} \equiv 1[2] \text{ و منه } \frac{n\pi}{6} \equiv \pi[2\pi]$$

التمرين الرابع (07 نقاط) :

I - نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = -2 + (-x+2)e^{-x+2}$

1. دراسة تغيرات الدالة g : النهايات : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-2 - xe^{-x}] = -2$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ $2 \times (0,25) \dots\dots\dots$

المشتقة $g'(x) = (x-3)e^{-x+2}$ موجبة على المجال $[3; +\infty[$ و منه الدالة g متزايدة على هذا المجال و سالبة على المجال $] -\infty; 3]$ و منه الدالة g متناقصة على هذا المجال $2 \times (0,5) \dots\dots\dots$

جدول تغيراتها: $(0,5) \dots\dots\dots$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$-2 - \frac{1}{e}$	-2

2. إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

حيث $1,14 < \alpha < 1,15$ بما أن

$$g(1,14) = 0,03 \text{ و } g(1,15) = -0,01$$

الدالة مستمرة و متناقصة على المجال $[1,14; 1,15]$

فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α $(0,5) \dots\dots\dots$

استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$: $g(x)$ موجبة على المجال $] -\infty; \alpha [$

و سالبة على المجال $] \alpha; +\infty [$ $(0,5) \dots\dots\dots$

II - نعتبر f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = -2x + (x-1)e^{-x+2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم

المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-2 + \frac{x-1}{x} e^{-x+2}] = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x) = -\infty$ $2 \times (0,5) \dots\dots\dots$

2. إثبات أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -2x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) : لدينا

$$(0,25) \dots\dots\dots \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^{-x+2} = 0 \text{ و منه محققة}$$

ب. دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) : $f(x) - y = [f(x) + 2x] = (x-1)e^{-x+2}$: إشارة الفرق من إشارة $x-1$ و منه (C_f) يقع فوق (Δ) على المجال $]-\infty; 1[$ و (C_f) يقع تحت (Δ) على المجال $]1; +\infty[$ و يتقاطع في النقطة ذات الفاصلة 1.....(0,5)

3. إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$: لدينا $f'(x) = -2 + e^{-x+2} - (x-1)e^{-x+2}$ أي أن $f'(x) = -2 + (-x+2)e^{-x+2} = g(x)$ شاريتها من إشارة $g(x)$(0,5)

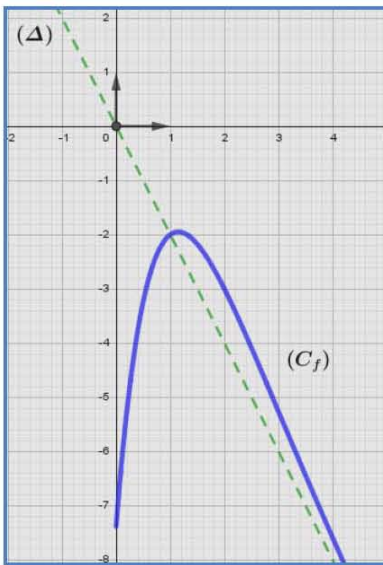
جدول تغيرات الدالة f(0,5)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$			

$+$ $-$

$-\infty$ $f(\alpha)$ $-\infty$

4. إنشاء (Δ) و (C_f) على المجال $[0; +\infty[$ (تعطي $f(\alpha) = -1,95$).....(0,75)



5. لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = (x-1)e^{-x+2}$ باستخدام التكامل بالتجزئة تعين

$$\text{دالة أصلية للدالة } h : \int_0^x h(t)dt = \left[-(t-1)e^{-t+2} \right]_0^x + \int_0^x e^{-t+2} dt$$

أي أن

$$\int_0^x h(t)dt = -xe^{-x+2} \text{ و منه } \int_0^x h(t)dt = \left[-(t-1)e^{-t+2} - e^{-t+2} \right]_0^x = \left[-te^{-t+2} \right]_0^x$$

الدالة الأصلية H حيث $H(x) = -xe^{-x+2}$(0,25)

استنتاج حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمتين التي

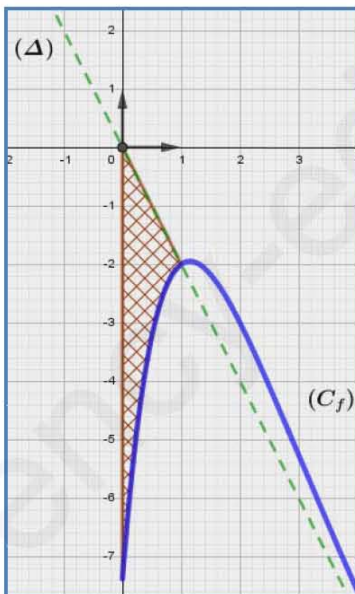
$$y = -2x \text{ و } x = 1 \text{ و } x = 0$$

نحسب التكامل

$$\int_0^1 [-2x - f(x)]dx = -\int_0^1 (x-1)e^{-x+2}dx = -[H(x)]_0^1 = e$$

و منه المساحة هي e u.a.....(0,25)

المساحة هي التكامل مضروب في وحدة مساحة



انتهى الموضوع الأول

التصحيح المفصل الموضوع الثاني

التمرين الأول (04 نقاط) خاص بشعبة التقني رياضي

تتكون مجموعة من ثمانية رجال و أربع نساء من بينهم رجل اسمه عبد القادر و امرأة واحدة اسمها هاجر .
نريد تكوين لجنة مشكلة من ثلاث أعضاء لهم نفس المهام .

1. حساب احتمال كل من الأحداث التالية : نحسب عدد الحالات الممكنة الكلية $C_{12}^3 = 220$ (0,5)

(0,25)..... $P(A) = \frac{C_8^3}{220} = \frac{56}{220} = \frac{14}{55}$ " اللجنة تضم ثلاث رجال "

(0,25)..... $P(B) = \frac{C_8^1 \times C_4^2}{220} = \frac{48}{220} = \frac{12}{55}$ " اللجنة تضم رجل و إمرتين "

(0,25)..... $P(C) = \frac{C_{11}^2}{220} = \frac{55}{220} = \frac{1}{4}$ " اللجنة تضم عبد القادر "

(0,25)..... $P(D) = \frac{C_{10}^2 + C_{10}^1}{220} = \frac{90}{220} = \frac{9}{22}$ " اللجنة تضم إما هاجر أو عبد القادر "

2. ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل اختيار بعدد الرجال في اللجنة المكونة .

(1)..... القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي 0 و 1 و 2 و 3

تعريف قانون احتمال $P(X=0) = \frac{C_4^3}{220} = \frac{4}{220}$ و $P(X=1) = \frac{C_8^1 \times C_4^2}{220} = \frac{48}{220}$ و $P(X=2) = \frac{C_8^2 \times C_4^1}{220} = \frac{112}{220}$ و

(1)..... $P(X=3) = \frac{C_8^3}{220} = \frac{56}{220}$

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{220}$	$\frac{48}{220}$	$\frac{112}{220}$	$\frac{56}{220}$

(0,5)..... حساب أمل الرياضيائي $E(X) = \frac{0 + 48 + 224 + 168}{220} = 2$

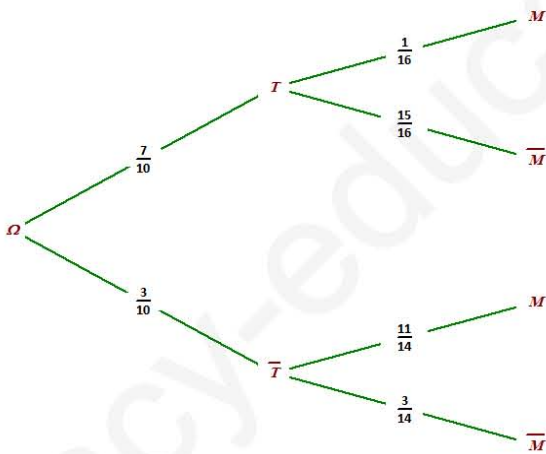
التمرين الأول (04 نقاط) خاص بشعبة الرياضيات

1. شجرة الاحتمال التي تمذج هذه الوضعية (1)

2. حساب احتمال أن يملك التلميذ هاتف نقال و حاسوب

(1)..... $P(T \cap M) = \frac{7}{10} \times \frac{1}{16} = \frac{7}{160}$

3. حساب احتمال أن يملك التلميذ حاسوب



(1)..... $P(M) = P(M \cap T) + P(M \cap \bar{T}) = P(M \cap T) + P(\bar{T}) \times P_T(M) = \frac{7}{160} + \frac{3}{10} \times \frac{11}{14} = \frac{313}{1120} = 0,28$

(0,5)..... $P(T \cap \bar{M}) = \frac{7}{10} \times \frac{15}{16} = \frac{21}{32} = 0,65625$ حساب احتمال أن يملك التلميذ هاتف نقال و لا يملك حاسوب

استنتج $P_M(T) = \frac{P(T \cap \overline{M})}{P(\overline{M})}$ لدينا $P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 1 - \frac{313}{1120} = \frac{807}{1120}$ و منه

$$(0,5) \dots \dots \dots P_M(T) = \frac{\left(\frac{21}{32}\right)}{\left(\frac{807}{1120}\right)} = \frac{21 \times 1120}{32 \times 807} = \frac{23520}{25824} = \frac{245}{269} = 0,91$$

التمرين الثاني (04 نقاط) :

نعتبر (u_n) متتالية المعرفة بـ $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

1 - حساب الحدود u_1, u_2, u_3 : $u_1 = \frac{2}{3}u_0 + 0 + 1 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$ و $u_2 = \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{14}{9} + \frac{4}{3} = \frac{14+12}{9} = \frac{26}{9}$

و $3 \times (0,25) \dots \dots \dots u_3 = \frac{2}{3}u_2 + \frac{1}{3}(2) + 1 = \frac{52}{27} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{52+18+27}{27} = \frac{97}{27}$

اتجاه تغيرات المتتالية (u_n) : المتتالية متزايدة..... (0,25)

2 - أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \leq n+3$ لدينا $u_0 \leq 3$ محققة..... (0,25)

نفرض أن $u_n \leq n+3$ صحيحة و لنبرهن أن $u_{n+1} \leq n+4$ صحيحة

$u_n \leq n+3$ بالضرب $\frac{2}{3}$ في نجد $\frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3}n+2$ بإضافة $\frac{1}{3}n+1$ نجد $\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n+1 \leq n+3$ أي أن

$u_{n+1} \leq n+3$ و منه $u_{n+1} \leq n+4$ صحيحة و منه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \leq n+3$ (0,25)

ب-درسة اتجاه تغيرات المتتالية (u_n) : $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 = \frac{-u_n + n + 3}{3}$ الفرق موجب

و منه المتتالية متزايدة..... (0,25)

ج-استنتج أن (u_n) محدودة من الأسفل : بما أن المتتالية (u_n) متزايدة فهي محدودة من الأسفل بالحد u_0 (0,25)

لا يمكن الحكم على تقارب المتتالية (u_n) (0,25)

3 - نعتبر (v_n) متتالية المعرفة بالعلاقة : $v_n = u_n - n$

أ - البرهان أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول و أساسها :

$v_{n+1} = u_{n+1} - n - 1 = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n$ أي أن $v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n$ و منه $v_{n+1} = \frac{2}{3}(u_n - n)$ إذن

$v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ و حدها الأول $v_0 = 2$ (0,5)

ب -التعبير عن v_n بدلالة n : $v_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ و لدينا $u_n = v_n + n$ و منه $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$ (0,25)

حساب نهاية المتتالية (u_n) : $\lim u_n = \lim \left[2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n \right] = +\infty$ (0,25)

ج-حساب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ لدينا

$S_n = (v_0 - 0) + (v_1 - 1) + (v_2 - 2) + \dots + (v_n - n)$ و منه

$$S_n = v_0 \left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{2}{3} - 1} \right] - \frac{(n+1)n}{2} \quad S_n = [v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n] - [0 + 1 + 2 + \dots + n] \text{ أي أن } S_n = [v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n] - [0 + 1 + 2 + \dots + n]$$

$$(0,25) \dots \dots \dots S_n = -6 \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1 \right] - \frac{(n+1)n}{2}$$

4 - لتكن (t_n) متتالية المعرفة على $\mathbb{N}$: $t_n = \ln(v_n)$

أ. البرهان أن (t_n) المتتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول :لدينا $t_n = \ln(v_n) = \ln \left[2 \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]$ و منه

$$t_{n+1} = \ln \left[2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right] \text{ أي أن } t_{n+1} = \ln \left[2 \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] + \ln \left(\frac{2}{3}\right) \text{ و منه } t_{n+1} = t_n + \ln \left(\frac{2}{3}\right) \text{ إذن المتتالية } (t_n)$$

$$(0,25) \dots \dots \dots \ln \left(\frac{2}{3}\right) \text{ حسابية أساسها}$$

ب. حساب بدلالة n المجموع $A_n = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n$:

$$(0,25) \dots \dots \dots A_n = \frac{n+1}{2} [t_0 + t_n] = \frac{n+1}{2} \left[\ln 2 + \ln \left[2 \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] \right] = \frac{n+1}{2} \ln \left[4 \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]$$

و استنتج بدلالة n الجداء $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$ لدينا $v_n = e^{t_n}$ و

$$P_n = e^{t_0} \times e^{t_1} \times e^{t_2} \times \dots \times e^{t_n} = e^{A_n} = e^{\frac{n+1}{2} \ln \left[4 \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]}$$

التمرين الثالث (05 نقاط)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ و النقطتين A و B لاحتقها $z_A = 4 + 2i$ و $z_B = 3 - i$

$$(0,5) \dots \dots \dots \frac{z_B - z_A}{z_B} = \frac{-1 - 3i}{3 - i} = \frac{-i(-i + 3)}{3 - i} = -i \text{ (1) الكتلقة على الشكل الجبري للعدد}$$

$$(0,5) \dots \dots \dots \frac{z_B - z_A}{z_B} = \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \text{ هو (2) الشكل المثلثي}$$

استنتج طبيعة المثلث ABO قائم متساوي الساقين..... (0,5)

(2) نعتبر التحويل النقطي r في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M لاحتقها z النقطة M' لاحتقها z' والذي يحول النقطة A إلى B ويحول النقطة B إلى O .

أ. نبيّن أنّ العبارة المركبة للتحويل النقطي r هي $z' = -iz + 1 + 3i$ (0,25)

• الطريقة 1 : لدينا العبارة المركبة لـ r هي من الشكل $z' = az + b$ حيث $a = \frac{z_B - z_A}{z_B} = -i$ و

$$b = z_O - az_B = i(3 - i) = 3i + 1 \text{ و منه } z' = -iz + 3i + 1 \text{ محققة .}$$

• الطريقة 2 : لدينا $z_B = -iz_A + 1 + 3i$ أي أن $3 - i = -i(4 + 2i) + 1 + 3i$ نحسب

$$3 - i = -4i + 2 + 1 + 3i \text{ محققة}$$

و $z_O = -iz_B + 1 + 3i$ أي أن $0 = -i(3 - i) + 1 + 3i$ نحسب $0 = -3i - 1 + 1 + 3i$ محققة .
و العبارة صحيحة .

ب. نعين طبيعة التحويل r و عناصره المميزة : بما أن $|-i| = 1$ فإن r دوران زاويته $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$ و مركزه النقطة

$$z_0 = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i \text{ أي أن } z_0 = \frac{b}{1-a} = \frac{3i+1}{1+i} = \frac{(1+3i)(1-i)}{2} \text{ الصامدة ذات اللاحقة}$$

ج. نعين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة O بالتحويل r :

$$z_C = -iz_O + 1 + 3i = 1 + 3i \text{ } (0,25)$$

(3) استنتج طبيعة الرباعي $ABOC$ لدينا $r(A) = B$ و $r(B) = O$ و $r(O) = C$ و منه $AB = BO$ و $OA = BC$ القطران متناصفان و

$$\left(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BO}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ أي } \left(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{OB}\right) = -\frac{\pi}{2} \text{ متقايسان و}$$

ومنه $ABOC$ مربع (0,5)

(4) نعين مجموعة النقط M من المستوي ذات الاحتمال z حيث

$$|z - 4 - 2i| = |z| \text{ يعني أن } MA = MO \text{ مجموعة النقط هي محور القطعة}$$

المستقيمة $[OA]$ (0,5)

$$(5) \text{ من أجل } z \neq 2 + i \text{ نضع } L = \frac{z' - 2 - i}{z - 2 - i}$$

$$L = \frac{-iz - 1 + 2i}{z - 2 - i} \text{ أي } L = \frac{-iz + 3i + 1 - 2 - i}{z - 2 - i} : L = -i \text{ . بين أن :}$$

$$L = \frac{-i(z - i - 2)}{z - 2 - i} = -i \text{ و منه } L = \frac{-i(z - i - 2)}{z - 2 - i} \text{ (0,5)}$$

ب. نعين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون L^n عددًا حقيقيًا : $L = -i$ أي أن $L = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ و منه $L^n = e^{-i\frac{n\pi}{2}}$ يكون L^n

$$\text{عددًا حقيقيًا لما } -\frac{n\pi}{2} = \pi k : k \in \mathbb{Z} \text{ و منه } n = -2k : k \in \mathbb{Z}^- \text{ هي القيم المطلوبة (0,5)}$$

$$\left(\frac{z' - 2 - i}{z - 2 - i}\right)^2 = -1 \text{ و } \frac{z' - 2 - i}{z - 2 - i} = -i \text{ لدينا } (z' - 2 - i)^2 + (z - 2 - i)^2 = 0 \text{ ج. يتبين أن}$$

$$\text{أي أن } (z' - 2 - i)^2 + (z - 2 - i)^2 = 0 \text{ (0,5)}$$

التمرين الرابع (07 نقاط) :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{\ln(x+1) + |x|}{x+1}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (وحدة الطول 2cm)

$$1. \text{ حساب : } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} \ln(1+x) = -\infty \text{ (0,5)}$$

$$(0,5)..... \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \text{ و}$$

(0,25)..... (C_f) القسـر البياني هو $x = -1$; $y = 1$ معادلتـي المستقيمان المقاربـان للمـنحـى

$$2. \text{ أ- حساب } f'(x) \text{ من أجل } x \in]-1; 0[: f(x) = \frac{\ln(x+1)-x}{x+1} \text{ و منه}$$

$$(0,5)..... f'(x) = \frac{-\ln(1+x)}{(x+1)^2} \text{ أن } f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{1+x}-1\right)(1+x)-\ln(1+x)+x}{(x+1)^2}$$

استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $] -1; 0 [$: بما أن $x \in] -1; 0 [$ فإن $\ln(1+x) < 0$ و منه f متزايدة على المجال $] -1; 0 [$. (0,25).....

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{1+x}+1\right)(1+x)-\ln(1+x)-x}{(x+1)^2} \text{ ومنه } f(x) = \frac{\ln(x+1)+x}{x+1} : x \in]0; +\infty[\text{ من أجل } f'(x) \text{ حسب ب-}$$

أي أن $f'(x) = \frac{2-\ln(1+x)}{(x+1)^2}$ إشارتها من إشارة $2-\ln(1+x)$: تنعدم عند e^2-1 و موجبة على المجال $[0; e^2-1]$ و سالبة على المجال $[e^2-1; +\infty[$. (0,5).....

استنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$: f متزايدة على المجال $[0; e^2-1]$ و متناقصة على المجال $[e^2-1; +\infty[$. (0,25).....

$$3. \text{ حساب } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)+x}{x(x+1)} \text{ لدينا } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \text{ (باستخدام العدد المشتق) و منه}$$

$$(0,25)..... \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(x+1)}{x(x+1)} + \frac{1}{x+1} \right] = 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x(x+1)} = 1$$

$$(0,25)..... \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(x+1)}{x(x+1)} - \frac{1}{x+1} \right] = 0 \text{ و منه } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)-x}{x(x+1)}$$

$$(0,25)..... \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \text{ لان } 0 \text{ غير قابلة للاشتقاق عند } 0$$

4. كـثـقـبـمـعـادـلـتـي المماسين لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

$2 \times (0,25)..... y = 0$ و المماس على اليسار معادلته $y = 2x$ و المماس على اليمين معدلته

x	-1	0	$e^2 - 1$	$+\infty$	
$f'(x)_1$	$+$	$ $	$+$	0	$-$
$f(x)$				$\frac{1+e^2}{e^2}$	

$-\infty \rightarrow 0 \rightarrow \frac{1+e^2}{e^2} \rightarrow 1$

5. جدول تغيرات f (0,5).....

$$6. \text{ حساب } f(e-1) = 1 \text{ (0,5).....}$$

إنشاء (C_f) : (1).....

7. إيجاد دالة أصلية للدالة f على المجال $[0; +\infty[$:

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)+x}{x+1} \text{ أي أن}$$



: الدالة الأصلية للدالة f و F منه $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1} + 1 - \frac{1}{x+1}$

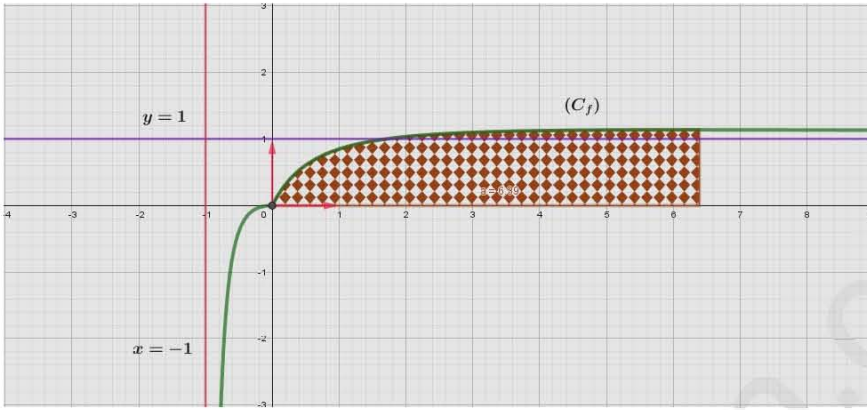
$$(0,5) \dots \dots \dots F(x) = \frac{[\ln(x+1)]^2}{2} + x - \ln(x+1) + c$$

استنتاج مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f)

و محور الفواصل والمستقيمين ذا المعادلتين : $x = 0$ و $x = e^2 - 1$

$$\int_0^{e^2-1} f(x) dx = \left[\frac{1}{2} (\ln(x+1))^2 + x - \ln(x+1) \right]_0^{e^2-1} \quad \text{أي أن} \quad \int_0^{e^2-1} f(x) dx = \int_0^{e^2-1} \frac{\ln(x+1) + x}{x+1} dx \quad \text{نحسب التكامل}$$

$$(0,5) \dots \dots \dots 4(e^2 + 1) \text{ cm}^2 \quad \text{و منه المساحة هي} \quad \int_0^{e^2-1} f(x) dx = e^2 + 1$$



انتهى الموضوع الثاني

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

- I. (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2u_n + 1$
- (1) احسب u_1 ، u_2 و u_3
- (2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2^n - 1$
- (v_n) و (w_n) متتاليتان عدديتان معرفتان على $\mathbb{N}$: $v_n = u_n + 3$ و $w_n = 2^n$
- (3) احسب بدلالة n ، S_n ، S'_n و S''_n
- حيث: $S''_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$
- II. نعتبر في هذا الجزء من أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن جميع حدود المتتاليتين (u_n) و (v_n) من $\mathbb{N}$
- (1) عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين u_n و v_n
- (2) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 3
- (ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $v_n \equiv 0[3]$
- (ج) استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تجعل الحدين u_n و v_n أوليين فيما بينهما
- (3) بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن: $S''_n \equiv S'_n[3]$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- (1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z :
- $$(E): \dots z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + \sqrt{3}i)z - 8i$$
- (أ) بين أن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرفا يطلب تعيينه ،
- (ب) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ، تعطى الحلول على الشكل الأسّي..
- (2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D
- (3) التي لاحتقاتها على الترتيب $z_A = \sqrt{3} - i$ ، $z_B = \frac{4e^{i\frac{\pi}{4}} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6})}$ ، $z_C = 2i$ و $z_D = \frac{\sqrt{3}}{3} + i$
- (أ) بين العددين المركبين z_A و z_B مترافقان واستنتج أن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث:
- $$z - z_A = \frac{1}{\bar{z} - z_B}$$
- (ب) برر وجود التشابه المباشر S الذي يحول النقطة A إلى النقطة B والنقطة O إلى النقطة D ، ثم جد العبارة المركبة له مستنتجا عناصره المميزة
- (ج) بين أن النقط A ، C و D في استقامية واستنتج العناصر المميزة للتحاكي h الذي مركزه C ويحول D إلى A وأن B هي صورة D بتشابه مباشر مركزه C محددًا نسبته وزاوية له.
- (د) (δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق $\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB}\|$
- عين صورة المجموعة (δ) بالتحويل S .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

يقوم متجر ببيع جزء من مدخراته من قطع الغيار التي تشتمل ثلاثة أنواع من السلع x ، y و z تمثل السلعة x ربع المدخرات بينما y ثلثها وتمثل z الباقي ، كانت السلعة تحوي عيوب تشمل 40% من السلعة x ، 75% من السلعة y و 24% من السلعة z ، أخذ زبون قطعة عشوائيا.

لتكن الحوادث التالية:

الحادثة A : "أخذ الزبون القطعة من السلعة x "

الحادثة B : " أخذ الزبون القطعة من السلعة y "

الحادثة C : " أخذ الزبون القطعة من السلعة z "

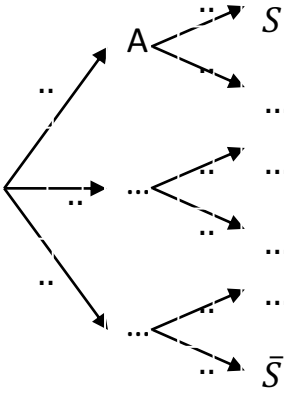
الحادثة S : " القطعة التي أخذها الزبون تحوي عيوباً "

(1) أ) أتمم شجرة الاحتمالات لهذه التجربة

ب) ما هو احتمال أن تكون السلعة تحوي عيباً ثم استنتج نسبة السلع السليمة

ج) القطعة التي أخذها الزبون تحوي عيوباً ، ما احتمال أن تكون القطعة من السلعة z

د) علماً أن 180 هو إجمالي عدد القطع المعروضة للبيع ، أنقل ثم أكمل الجدول التالي:



نوع القطعة	x	y	z	المجموع
عدد القطع				
عدد القطع ذات عيوب				81

(2) بسبب العيوب الواضحة اضطر صاحب المتجر عزل هذه القطع وعرضها للبيع بتخفيضات هامة ، سعر القطعة x

هو 65 DA ، سعر القطعة y هو 80 DA وسعر القطعة z هو 75 DA

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل من هذه الإمكانيات لبيع قطعتين معا مخفضتين سعرهما الإجمالي

أ) ما هي عدد الطرائق الممكنة لبيع قطعتين معا من السلعة المخفضة

ب) ما هي قيم X الممكنة (توجد ست قيم)

ج) أكتب قانون احتمال للمتغير العشوائي X

د) أحسب الأمل الرياضي ، التباين والانحراف المعياري

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي: $h(x) = -xe^x + 2e^x - 1$

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة h ثم أنشئ جدول تغيراتها .

(2) أثبت أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $1.8 < \alpha < 1.9$

(3) استنتج إشارة $h(x)$ على المجال $[0; +\infty[$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$

(1) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ وفسرها هندسياً .

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم أنشئ جدول تغيراتها .

(3) تعطى g دالة موجبة تماماً على المجال $[0; +\infty[$

أ) بين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$ ، ثم أعط حصراً لـ $f(\alpha)$

ب) استنتج أنه من أجل كل x من $[0; 1]$ فإن: $f(x) \in [0; 1]$

ج) بين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$ فإن: $f(x) - x = \frac{(1-x) \cdot g(x)}{e^x - x}$ ، عين دستور الدالة g

د) استنتج وضعية (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = x$ على المجال $[0; +\infty[$.

(4) ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$ نأخذ: $\|\vec{i}\| = 5 \text{ cm}$ و $\|\vec{j}\| = 10 \text{ cm}$

أ) تحقق أن معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي: $y = \frac{1}{e-1}(x-1) + 1$

ب) أنشئ (Δ) ، (T) و (C) في نفس المعلم

ج) أحسب بالسنتيمتر المربع مساحة الحيز المغلق للمستوي المحدد بالمنحنى (C) و المستقيم (Δ)

د) ناقش بيانياً وهذا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد الحلول ومجال انتمائها للمعادلة (E) التالية:

$$(E): f(x) = mx + 1 - m$$

III. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) بين أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى وحدد اتجاه تغيرها

(2) استنتج أن (u_n) متقاربة ، ثم أوجد نهايتها

(ملاحظة: في هذا الجزء يمكنك توظيف نتائج السؤالين (3) ب و (3) د من الجزء II .)

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقط $C(3; 2; 1)$ ، $B(1; 2; 0)$ ، $A(3; 1; 0)$ و $D(0; 0; m)$ حيث m عدد حقيقي موجب.

- (1) أ) احسب الجداء السلمي $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ ، ثم استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $\sin \widehat{ABC}$ و $\cos \widehat{ABC}$.
ب) احسب مساحة المثلث ABC .
- (2) بين أن الشعاع $\vec{n}(1; 2; -2)$ ناظمي للمستوي (ABC) ، ثم استنتج معادلة ديكارتية له.
- (3) بين أن $ABCD$ رباعي وجوه، وأن حجمه $V_{ABCD} = \frac{2m+5}{6} u \cdot v$ (وحدة الحجم).
- (4) لتكن (S_m) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق: $x^2 + y^2 + z^2 - 2mz + m^2 - 9 = 0$.
أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي m موجب، لدينا: (S_m) سطح كرة، يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.
ب) عين قيمة m حتى يكون المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S_m) .
ج) اكتب معادلة للمستوي (P) الموازي تماما للمستوي (ABC) ويمس (S_2) .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع: $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$.
- (1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا: $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
 - (2) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي k غير معدوم فإن: $PGCD(k; k+1) = 1$.
ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي k غير معدوم فإن: $PGCD(S_{2k}; S_{2k+1}) = (2k+1)^2$.
 - (3) أ) عين من أجل كل عدد طبيعي k غير معدوم $PGCD(2k+1; 2k+3)$.
ب) عين $PGCD(S_{2k+1}; S_{2k+2})$.
 - (4) أ) استنتج حسب قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n : $PGCD(S_n; S_{n+1})$.
ب) استنتج $PGCD(S_{2017}; S_{2018})$.
(ملاحظة: يمكن استعمال المبرهنة: $PGCD(a; b)$ يكافئ $PGCD(a^2; b^2)$)

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- (1) ليكن $p(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z والمعرف كما يلي: $p(z) = z^2 - \left(\frac{5+i}{2}\right)z + 1 + i$.
أ) احسب $p(2)$.
ب) عين العددين المركبين a و b حيث: $p(z) = (z-2)(az+b)$.
ج) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة: $p(z) = 0$ (نضع z_0 الحل الحقيقي و z' الحل الآخر)
- (2) نعتبر في المستوي المركب المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. الوحدة 5 cm .
نضع $z_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $z_{n+1} = z' z_n$ (حيث z' حل المعادلة في السؤال الأول) ونسمي النقطة A_n صورة العدد المركب z_n .
أ) احسب الأعداد المركبة z_1, z_2, z_3 و z_4 .
ب) مثل النقط A_0, A_1, A_2, A_3 و A_4 .
ج) من أجل كل عدد طبيعي n نعرف المتتالية (u_n) كما يلي: $u_n = |z_n|$.
أ) بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
ب) اكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) .
ج) احسب نهاية المتتالية (u_n) ، ماذا تستنتج حول تقارب المتتالية (u_n) ؟
- (4) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i$.
ب) استنتج طبيعة المثلث $OA_n A_{n+1}$.
- (5) من أجل كل عدد طبيعي n نسمي L_n طول الخط المنكسر المحدد بالنقط $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$.

(أ) احسب الأطوال: A_0A_1 ، A_1A_2 و A_2A_3 .

(ب) تحقق أن: $\frac{A_2A_3}{A_1A_2} = \frac{A_1A_2}{A_0A_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(ج) عبر عن L_n بدلالة n ثم حدد نهاية L_n .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) باستعمال قابلية اشتقاق الدالة $\ln$ عند 1، بين أن: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln x}{x-1} \right) = 1$ ، ثم استنتج أن $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(x+1)}{x} \right) = 1$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ ، وليكن (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $(x \geq 1)$ لدينا: $f(x) = \ln x + \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)$.

(ب) من أجل $(x \geq 1)$ ، بين أن: $x - 1 = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \left(x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right)$.

(ج) بين أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 1، وفسر النتيجة بيانياً.

(2) (أ) احسب النهاية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1; +\infty[$ ، لدينا: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(ج) ارسم المنحنى (C) .

(3) ليكن S مساحة الحيز D المستوي المحدد بالمنحنى (C) ، محور الفواصل والمستقيمين ذو المعادلتين $x = 1$

و $x = 3$ ، ولتكن A و B نقطتان من المنحنى (C) فاصلتهما على الترتيب 1 و 3،

والنقطتان $P(1; 2 \ln(1 + \sqrt{2}))$ و $Q(3; 0)$ من المستوي.

(أ) احسب مساحة كل من المستطيل $APBQ$ والمثلث ABQ .

(ب) استنتج أن $2 \ln(1 + \sqrt{2}) \leq S \leq 4 \ln(1 + \sqrt{2})$.

(III) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}$ و (C_g) تمثيلها البياني.

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x لدينا: $g(x) \geq 1$.

(2) (أ) بين أن: $(g \circ f)(x) = x$ ، ثم بين أنه إذا كانت النقطة $M(x; y)$ من المنحنى (C) فإن النقطة $M'(y; x)$ من المنحنى (C_g) .

(ب) ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنيين (C) و (C_g) ؟ أنشئ (C_g) في المعلم السابق.

(3) ليكن S' مساحة الحيز D' المحدد بالمنحنى (C_g) والمستقيمتين التي معادلاتها $x = 0$ ، $x = 2 \ln(1 + \sqrt{2})$ و $y = 3$.

(أ) بين أن: $S' = 6 \ln(1 + \sqrt{2}) - \int_0^{2 \ln(1 + \sqrt{2})} g(x) dx$.

(ب) احسب $\int_0^{2 \ln(1 + \sqrt{2})} g(x) dx$ ثم استنتج قيمة S .

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية بجاية

امتحان البكالوريا التجريبي

ثانوية الحمادية – بجاية

الشعبة : رياضيات

دورة : ماي 2019

أختبار في مادة الرياضيات

المدة : 4سا و 30 دقيقة

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول: (4 نقاط)

كيس يحتوي على 9 كريات لا نميز بينها باللمس منها 5 حمراء مرقمة بالأرقام 1، 1، 1، 3، 3 و 4 كريات سوداء مرقمة كلها بالرقم 2
❖ نسحب عشوائيا في ان واحد كريتين من الكيس.

1/ أحسب احتمالات الأحداث الآتية: A " الكريات مختلفة الألوان "

B " الكريات من اللون الأحمر "

C " الكريات تحمل نفس الرقم علما انها حمراء "

2/ نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب مجموع الأرقام التي تظهر على الكريات .

أ/ حدد قانون احتمال X

ب/ أحسب الأمل الرياضي لـ X

3/ نفرض أن عملية السحب نعيدها 4 مرات متتالية وفي كل مرة نعيد الكريتين المسحوبتين الى الكيس ونعتبر المتغير العشوائي Y

الذي يرفق بكل عملية عدد مرات الحصول على كريتين مختلفتين في اللون . حدد قانون احتمال Y

التمرين الثاني : (4 نقاط)

(u_n) و (v_n) المتتاليتين العدديتين المعرفتين بـ : $u_0 = 5$ ، $u_1 = 31$ ، $v_0 = -1$ و $v_1 = -11$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{cases} u_{n+2} = 12u_{n+1} - 35u_n \\ v_{n+2} = 12v_{n+1} - 35v_n \end{cases}$$

ولتكن المتتاليتين العدديتين (x_n) و (y_n) المعرفتين من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $x_n = u_n + v_n$ و $y_n = u_n - v_n$

1/ أحسب x_0 و x_1 ثم برهن أن المتتالية (x_n) هندسية أساسها 5

2/ برهن أن المتتالية (y_n) هندسية بنفس طريقة السؤال 1/

الصفحة 1 من 6

3/ أحسب x_n و y_n بدلالة n ثم عبر عن u_n و v_n بدلالة n .

4/ من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $d_n = \text{pgcd}(u_n; u_{n+1})$

أ/ ماهي القيم الممكنة لـ d_n ب/ هل u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما ؟

التمرين الثالث : (5 نقاط)

ليكن r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي حيث $0 \leq \theta \leq \pi$ ومن أجل كل عدد طبيعي n نضع :

$$u_n = |Z_n| \quad \text{ونضع :} \quad Z_0 = re^{i\theta} \quad \text{و} \quad Z_{n+1} = \frac{1}{2}(Z_n + |Z_n|)$$

الجزء الأول :

1/ نضع : $\theta = 0$ و $Z_0 = r$ أحسب : Z_1 ، Z_2 و Z_3 ثم ضع تخمينا حول العدد المركب Z_n ثم برهن صحة التخمين بالتراجع .

2/ نضع : $\theta = \pi$ و $Z_0 = -r$ أحسب : Z_1 ، Z_2 و Z_3 ثم ضع تخمينا حول العدد المركب Z_n ثم برهن صحة التخمين بالتراجع .

الجزء الثاني : نضع : $0 < \theta < \pi$

1/ برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة ، ثم أستنتج أنها متقاربة .

$$2/ \text{ أ) برهن أن من أجل كل عدد حقيقي } x : e^{ix} + 1 = 2e^{i\frac{x}{2}} \cos \frac{x}{2}$$

$$\text{ب) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي } n : Z_n = \frac{r \sin \theta}{2^n \sin \frac{\theta}{2^n}} e^{i\frac{\theta}{2^n}}$$

ج) أستنتج $\text{Re}(Z_n)$ و $\text{Im}(Z_n)$ بدلالة n .

$$3/ \text{ حدد النهاية : } \lim_{n \rightarrow +\infty} [\text{Im}(Z_n)]$$

$$4/ \text{ أ) برهن أن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (2^n \sin \frac{\theta}{2^n}) = \theta$$

$$\text{ب) أستنتج : } \lim_{n \rightarrow +\infty} [\text{Re}(Z_n)] \quad \text{ثم أحسب النهاية : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

التمرين الرابع : (7 نقاط)

1/ g الدالة العددية لمتغير حقيقي x المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 e^x$

. أدرس اتجاه تغير الدالة g على $]0; +\infty[$ ثم أستنتج أنه إذا كان $0 < x < 1$ فإن $g(x) < g(\frac{1}{x})$ وإذا كان $x > 1$ فإن $g(x) > g(\frac{1}{x})$

12 / الدالة العددية لمتغير حقيقي x المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + e^{\frac{1}{x}} - 3e$

(c_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$

. بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = g(x) - g(\frac{1}{x})$ ثم أحسب $f'(1)$ وشكل جدول تغيرات f

13 / الدالة العددية لمتغير حقيقي x المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $h(x) = e^{\frac{1}{x}} - 3e$ و (c_h) تمثيلها البياني (أنظر الملحق)

(أ) بين أن المعادلة : $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تقبل حلين α و β حيث $0,5 < \alpha < 0,6$ و $1,5 < \beta < 1,6$ ثم أستنتج أن المنحنى (c_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين .

(ب) أدرس وضعية المنحنى (c_f) بالنسبة للمنحنى (c_h) .

(ت) بين أن المنحنى (c_f) يقبل مماسا (T) في النقطة ذات الفاصلة 1 يطلب كتابة معادلة له . ثم أنشئ (T) و (c_f) .

14 / m عدد حقيقي موجب تماما ، جد بيانيا قيم m التي من أجلها المعادلة $f(x) = (m^2 - 2m + 2)e^m + h(m)$ تقبل حلين متميزين

15 / (أ) بين أن من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $\int_1^x [f(t) - h(t)] dt = (x^2 - 4x + 6)e^x - 3e$

(ب) λ عدد حقيقي من المجال $]0; 1[$ و $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (c_f) و (c_h) والمستقيمين

المعرفين بالمعادلتين $x = \lambda$ و $x = 1$

❖ أستنتج $A(\lambda)$ مقدرة بوحدة المساحة ثم أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow 0} A(\lambda)$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقاط)

❖ نعتبر المعادلة (E_n) ذات المجهولين الصحيحين x و y الآتية : $645x - 195y = 13^n - 54n - 1$ حيث n عدد طبيعي

1/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة العدد 13^n على 15 ثم عين قيم n التي من أجلها المعادلة (E_n) تقبل حولا .

2/ (أ) تحقق أن الثنائية $(1;3)$ حل للمعادلة (E_2) ثم حل المعادلة (E_2) .

(ب) العدد الطبيعي A يكتب $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}$ في النظام ذي الأساس 6 ويكتب $\overline{\beta 0444}$ في النظام ذي الأساس 5

• عين العددين α و β ثم أكتب A في النظام العشري .

(ج) في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر المستقيم (Δ) المعروف بتمثيله الديكارتي كما يلي :

$$\begin{cases} 3x - y - 12z = 0 \\ x - y - 90z + 2 = 0 \end{cases}$$

. بين أن احداثيات نقط المستقيم (Δ) تحقق المعادلة (E_2) ثم أستنتج مجموعة النقط M من (Δ) التي احداثياتها أعداد صحيحة

التمرين الثاني : (4 نقاط)

❖ المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$

1/ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0;1]$ بـ : $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

• أحسب $f'(x)$ ثم أستنتج الحد الأول u_0

2/ (أ) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة ثم أستنتج أنها متقاربة .

(ب) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n غير المعدوم : (1) $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{(n+1)}$ ثم أستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

3/ من أجل $n \geq 3$ نضع $I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx$

(أ) تحقق أن من أجل $n \geq 3$: $u_n + u_{n-2} = I_n$

(ب) باستعمال التكامل بالتجزئة على I_n بين أن من أجل $n \geq 3$: $nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$

ت) أستنتج أن من أجل $n \geq 3$: $(2n-1)u_n \leq \sqrt{2} \dots \dots \dots (2)$

ج) بوضع $v_n = nu_n$ وباستعمال المتباينتين (1) و (2) بين أن (v_n) متقاربة نحو عدد حقيقي يطلب تعيينه .

التمرين الثالث : (5 نقاط)

1. $P(z)$ كثير حدود بمتغير مركب z معرف بـ : $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$

1/ جد الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد مركب : $P(z) = (z+3)(az^2 + bz + c)$

2/ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\square$ المعادلة : $P(z) = 0$

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{u}, \vec{v})$ النقطة A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب

z_C ، z_B و z_A : حيث $z_C = \overline{z_B}$ و $z_B = 1+i$ ، $z_A = -1$

1/ S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطة $M'(z')$ حيث : $z' = (1+i)z + i$

أ) ما طبيعة التحويل S ؟ جد عناصره المميزة .

ب) من أجل M تختلف عن A أحسب الجداء السلمي : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MM'}$ ثم حدد طبيعة المثلث AMM'

2/ ليكن n عدد طبيعي و M_n نقطة من المستوي تختلف عن A لاحقتها العدد المركب z_n

• نضع النقطة M_0 تنطبق على المبدأ O ومن أجل كل عدد طبيعي n : $M_{n+1} = S(M_n)$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n = (1+i)^n - 1$

ب) جد قيم العدد الطبيعي n حتى تكون النقطة O ، A و M_n في استقامة .

التمرين الرابع : (7 نقاط)

❖ الجزء الأول : φ الدالة العددية لمتغير حقيقي x المعرفة على $\square - \{-1\}$ بـ : $\varphi(x) = \ln|1+x| - \frac{x}{1+x}$

1/ أدرس تغيرات الدالة φ وشكل جدول تغيراتها .

2/ أ) بين أن من أجل كل x من المجال $[1; 2]$: $|\varphi(x)| < 0,45$

ب) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد من المجال $]-\infty; -1[$ نرمزاليه α حيث $\varphi(\alpha) = 0$ ، ثم تحقق أن : $-4,6 < \alpha < -4,5$

ث) وأستنتج اشارة $\varphi(x)$

❖ الجزء الثاني :

f و g دالتين معرفتين على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = |1+x|^{\frac{1}{x}}; x \neq 0 \\ g(0) = e \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} f(x) = \frac{\ln|1+x|}{x}; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

(c_f) و (c_g) التمثيليين البيانيين لهما على الترتيب في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1/ أ) بين أن f و g مستمرتين عند الصفر

ب) نقبل أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند الصفر وأن : $f'(0) = -\frac{1}{2}$ بين أن g قابلة للاشتقاق عند الصفر وأن :

$$g'(0) = -\frac{e}{2}$$

2/ أدرس تغيرات كل من f و g وشكل جدول تغيراتهما .

3/ أنشئ المنحنيين (c_f) و (c_g)

4/ أ) بين أن من أجل كل x من المجال $[1; 2]$: $g(x) \in [1; 2]$

ب) بملاحظة أن من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$: $g'(x) = -\frac{1}{x^2} \varphi(x) g(x)$

• تحقق أن من أجل كل x من $[1; 2]$: $|g'(x)| < 0,9$

انتهى الموضوع الثاني

انشاء الله موفقون في البكالوريا

امتحان البكالوريا التجريبي

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :
الموضوع الأول:

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بجدوها الأول u_0 و من اجل كل عدد طبيعي $n : u_n = 10^n (u_0 + 1) - 1$ حيث u_0 عدد طبيعي

- نعتبر المعادلة (E) في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ التالية: $61x - 39y = 38$
1) حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (E) علما ان الثنائية $(23; 35)$ حلا خاصا لها .

2) أ) بين ان : $u_{1982} \equiv u_0 [33]$

ب) بملاحظة ان : $10^{60} \equiv 1 [61]$. بين ان $u_{1982} \equiv (39u_0 + 38) [61]$

ثم إستنتج ان : $u_{1982} \equiv 0 [61]$ يكافئ $u_0 \equiv 35 [61]$

3) أ) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n : 10^{7n} \equiv 10^n [70]$

ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n : 10^{7n} \equiv 10 [70]$

4) في هذا السؤال نفرض ان : $u_0 = 0$. أنشر العدد 2019 وفق الأساس 7 ثم عين باقي u_{2019} على 70 .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

في الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. نعتبر المستقيمان (D_1) و (D_2) المعرفان بتمثيلهما

$$(D_2): \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = t \\ z = -2t + 4 \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad (D_1): \begin{cases} x = m \\ y = m - 1 \\ z = 1 \end{cases} ; m \in \mathbb{R}$$

الوسطيان كما يلي:

1) أ) بين أن (D_1) و (D_2) متعامدان وليسا من نفس المستوى .

ب) تحقق أن الشعاع $\vec{n}(-1; 1; 1)$ هو شعاع عمودي على (D_1) و (D_2) .

2) أ) بين أن المعادلة الديكارتيّة للمستوي (P) الذي يحوي (D_1) والعمودي على (D_2) هي $x - y + 2z - 3 = 0$

ب) بين أن المستقيم (D_2) يقطع المستوي (P) في نقطة B يطلب تعيين إحداثياتها

3) بين أن المستقيم (D) الذي يشمل النقطة B وشعاع توجيهه $\vec{n}$ يقطع المستقيم (D_1) في النقطة $A(1; 0; 1)$

4) ليكن (Q) المستوي الذي يحوي (D_1) ويكون عموديا على (P) و M نقطة متغيرة على (D_2)

أ) ادرسا لوضع النسبي بين المستوي (Q) والمستقيم (D_2)

ب) استنتج المسافة بين M و (Q) .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

$$\begin{cases} 2z_1 + iz_2 = 1 + i\sqrt{3} \\ (\sqrt{3} + 2i)z_1 - z_2 = (1 - \sqrt{3})i \end{cases}$$

1) عين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث :

2) في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين $z_A = 1 - i$ و $z_B = 2 + \sqrt{3} + i$

أ) أكتب z_A على الشكل الأسّي .

(ب) بين ان : $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم إستنتج الشكل الأسّي للعدد z_B .

(3) أوجد لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{6}$ -

(ب) احسب مساحة الدائرة (γ) التي قطرها $[BD]$ مقدرة بوحدة المساحة .

(ج) عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $\arg[(z - z_B)^2] = \arg(z_B) - \arg(z_D)$

(4) لتكن النقطة C ذات اللاحقة $z_C = 1 + i$.

- عين طبيعة المثلث ABC ثم استنتج بدقة طبيعة الرباعي $ACBD$.

(5) ليكن التحويل النقطي S المعروف كما يلي : $S = r \circ h$ مع h تحاكي مركزه O ونسبته -2

(أ) عين طبيعة التحويل S مع تعيين خصائصه المميزة

(ب) نعرف من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ ، التحويل النقطي H_n كما يلي : $H_n = \underbrace{S \circ S \circ \dots \circ S}_{n \text{ مرّات}}$

- عين قيم n حتى يكون H_n تحاكي يطلب تعيين خصائصه.

التعريف الرابع : (07 نقاط)

(I) 1) لتكن الدالة u المعرفة على $]0; +\infty[$ ب : $u(t) = 3\ln(1+t) - \frac{t}{1+t}$

- عين اتجاه تغير الدالة u .

(2) ليكن الدالة f المعرفة على $[0;1]$ ب : $f(x) = x^3 [\ln(1+x) - \ln x]$; $x \in]0;1]$
 $f(0) = 0$

(أ) أثبت أن f قابلة للإشتقاق على $]0;1]$.

(ب) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in]0;1]$ ، $f'(x) = x^2 u\left(\frac{1}{x}\right)$ ،

(ج) عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(II) نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على $[0;1]$ ب : $g(x) = x^3 \ln(x+1)$ و $h(x) = x^3 \ln x$; $x \in]0;1]$
 $h(0) = 0$

وليكن على الترتيب (C_f) ، (C_g) و (C_h) منحنيات الدوال f ، g و h في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

بحيث : $\|\vec{i}\| = 4 \text{ cm}$

(1) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;1]$: $f(x) = g(x) - h(x)$

(ب) عين الوضع النسبي بين المنحنيين (C_g) و (C_f) .

(2) ليكن (T) و (T') مماسين لـ (C_f) و (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة $e^{-\frac{1}{3}}$ على الترتيب .

- أثبت أن (T) و (T') متوازيان .

(3) أنشئ المنحنى (C_f)

(4) لتكن H الدالة الأصلية الوحيدة لـ h على المجال $[0;1]$ والتي تنعدم عند 1 .

(أ) ليكن $\alpha \in]0;1]$ و $A_\alpha = \int_\alpha^1 x^3 \ln x \, dx$ ، عبر عن A_α بدلالة الدالة H

(ب) أحسب A_α باستعمال التكامل بالتجزئة ثم أستنتج $H(0)$.

(5) عين مساحة الحيز من المستوي المحددة بالمنحنيين (C_g) و (C_f) والمستقيمين ذو المعادلتين $x=0$ و $x=1$.

التصحيح المفصل للباكالوريا التجريبي ماي 2019 الموضوع 01

تصحيح التمرين الأول (04 نقاط) الأعداد والحساب + المتتاليات العددية التقط

1 حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (E) :لتكن الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (E) يكافئ (1) $61x - 39y = 38$ بما الثنائية $(23; 35)$ حل خاص لـ (E) نجد: (2) $61(23) - 39(35) = 38$ ب طرح المعادلتين نجد: $61(x - 23) = 39(y - 35)$ لدينا، 61 يقسم $61(x - 23)$ منه نستنتج ان 61 يقسم $39(y - 35)$ بما ان 61 و 39 اوليان فيما بينهما فانه حسب مبرهنة غوص نجد ان 61 يقسم $y - 35$ وعليه نجد: $y = 61k + 35$ مع $k \in \mathbb{Z}$ - بتعويض قيمة y في المعادلة (1) نجد: $x = 39k + 23$ مع $k \in \mathbb{Z}$ الخلاصة: حلول المعادلة (E) هي : $S = \{(x; y) = (39k + 23; 61k + 35) ; k \in \mathbb{Z}\}$ 2 أ) تبين ان: $u_{1982} \equiv u_0 [33]$:لدينا، $u_{1982} = 10^{1982}(u_0 + 1)$ لاحظ ان: $10^2 \equiv 1 [33]$ منه $(10^2)^{991} \equiv 1 [33]$ يكافئ $10^{1982} \equiv 1 [33]$ يكافئ $10^{1982}(u_0 + 1) \equiv u_0 + 1 [33]$ يكافئ $10^{1982}(u_0 + 1) - 1 \equiv u_0 [33]$ يكافئ $u_{1982} \equiv u_0 [33]$ ب) تبين ان: $u_{1982} \equiv (39u_0 + 38) [61]$ بما ان: $10^{60} \equiv 1 [61]$ منه $10^{60} \equiv 1 [61]$ اي $10^{1980} \equiv 1 [61]$ منه $10^2 \times 10^{1980} \equiv 10^2 [61]$ منه $10^{1982} \equiv 39 [61]$ منه $10^{1982}(u_0 + 1) \equiv 39(u_0 + 1) [61]$ منه $u_{1982} \equiv 39u_0 + 38 [61]$ - استنتاج ان: $u_{1982} \equiv 0 [61]$ يكافئ $u_0 \equiv 35 [61]$:

الاستلزام الاول:

 $u_{1982} \equiv 0 [61]$ معناه $39u_0 + 38 \equiv 0 [61]$ اي $39u_0 + 38 = 61t$ مع $t \in \mathbb{Z}$ وعليه: $61t - 39u_0 = 38$ منه الثنائية $(t; u_0)$ حل للمعادلة (E)اذن نجد ان: $u_0 = 61k + 35$ اي $u_0 \equiv 35 [61]$ الاستلزام العكسي: اذا كان $u_0 \equiv 35 [61]$ معناه $u_0 + 1 \equiv 36 [61]$ بما ان $10^{1982} \equiv 39 [61]$ نجد: $10^{1982}(u_0 + 1) \equiv 1404 [61]$ منه $10^{1982}(u_0 + 1) \equiv 1 [61]$ منه: $u_{1982} \equiv 0 [61]$

0.25 0.5 0.25 0.5	3) أ) تبين انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $10^{7^n} \equiv 10^n [70]$: لدينا، $10^7 \equiv 10 [70]$ منه من اجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $10^{7^n} \equiv 10^n [70]$ اي $10^{7^n} \equiv 10^n [70]$ ب) البرهان باتراجع: نضع من اجل كل عدد طبيعي n ، $P(n): 10^{7^n} \equiv 10 [70]$ ، المرحلة 01: التحقق من صحة $P(0)$ من اجل $n=0$: $10 \equiv 10 [70]$ منه $P(0)$ محققة. المرحلة 02: من اجل n عدد طبيعي كفي ، نفرض صحة $P(n)$ ونبرهن صحة $P(n+1): 10^{7^{n+1}} \equiv 10 [70]$ لدينا ، $10^{7^{n+1}} = 10^{7(7^n)} = 10^{7^n [70]}$ ، حسب السؤال السابق ، وحسب فرضية التراجع نجد: $10^{7^n} \equiv 10 [70]$ نجد: $10^{7(7^n)} \equiv 10 [70]$ منه: $10^{7^{n+1}} \equiv 10 [70]$ اي $P(n+1)$ محققة. الخلاصة: من اجل كل عدد طبيعي n فان : $10^{7^n} \equiv 10 [70]$. 4) نشر العدد 2019 وفق الاساس 7 : $\begin{array}{r} 2019 \overline{) 7} \\ \underline{3} 288 \overline{) 7} \\ \underline{1} 41 \overline{) 7} \\ \underline{6} 5 \overline{) 7} \\ \underline{5} 0 \end{array}$ لدينا، $2019 = \overline{5613}^{(7)}$ منه : تعيين باقي u_{2019} على 70 : لدينا ، $u_{2019} = 10^{2019} - 1$. بما ان : $2019 = \overline{5613}^{(7)} = 3 + 7 + 6(7^2) + 5(7^3)$ منه : $10^{2019} = 10^{3+7+6(7^2)+5(7^3)} = 10^3 \times 10^7 \times 10^{6(7^2)} \times 10^{5(7^3)}$ حساب السؤال السابق نجد: $10^{2019} \equiv 10^3 \times 10 \times 10^6 \times 10^5 [70] \equiv 20 [70]$ منه : $u_{2019} \equiv 19 [70]$
التقيط	تصحیح التمرين الثاني (04 نقاط) الهندسة الفضائية
0.25 0.75	1) أ) تبين ان (D_1) و (D_2) متعامدان وليسا من نفس المستوي: لدينا، $\vec{u}(1;1;0)$ و $\vec{v}(-1;1;-2)$ اشعة توجيه المستقيمين (D_1) و (D_2) على الترتيب. لدينا، $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1 \times -1) + (1 \times 1) + (0 \times -2) = -1 + 1 + 0 = 0$ منه: المستقيمين (D_1) و (D_2) متعامدين . - تبين ان (D_1) و (D_2) ليسا من نفس المستوي: بما ان المستقيمين (D_1) و (D_2) متعامدين فانهما ليس من نفس المستوي او متقاطعين في نقطة وحيدة $H(x;y;z)$ فهي تحقق $\begin{cases} H \in (D_1) \\ H \in (D_2) \end{cases}$ اي $\begin{cases} -t+1=m & \dots(1) \\ t=m-1 & \dots(2) \\ -2t+4=1 & \dots(3) \end{cases}$

بجمل الجمل (1) و (2) نجد: $t=0$ و $m=1$

- من اجل $t=0$ نجد: $H(1;0;4)$ ومن اجل $m=1$ نجد: $H(1;0;1)$

بما النقطة H ليست وحيدة فان المستقيمين (D_1) و (D_2) ليسا من نفس المستوى.

ب) التحقق ان $\vec{n}(-1;1;1)$ هو شعاع عمودي على (D_1) و (D_2) :

لدينا، $\vec{u}(1;1;0)$ و $\vec{v}(-1;1;-2)$ اشعة توجيه المستقيمين (D_1) و (D_2) على الترتيب.

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{n} = (-1 \times 1) + (1 \times 1) + (1 \times 0) = -1 + 1 + 0 = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{n} = (-1 \times -1) + (1 \times 1) + (1 \times -2) = 1 + 1 - 2 = 0 \end{cases}$$

بما ان: $\vec{n}(-1;1;1)$ هو شعاع عمودي على (D_1) و (D_2) .

2) أ) المعادلة الديكارتية للمستوي (P) :

بما المستقيم (D_2) عمودي على المستوي (P) فان $\vec{v}(-1;1;-2)$ شعاع ناظمي لـ (P)

و عليه المعادلة الديكارتية للمستوي (P) من الشكل: $-x + y - 2z + d = 0$

- لتكن $A(1;0;1)$ نقطة من (D_1) فان $A \in (P)$ لان (D_1) محتوي في المستوي (P)

منه: $-x_A + y_A - 2z_A + d = 0$ اي $-1 - 2 + d = 0$ منه: $d = 3$

الخلاصة: المعادلة الديكارتية لـ (P) هي $-x + y - 2z + 3 = 0$ اي $x - y + 2z - 3 = 0$.

ب) دراسة الوضع النسبي بين (D_2) و (P) :

بما ان المستقيم (D_2) عمودي على المستوي (P) فانهما متقاطعان وفق نقطة وحيدة

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = t \\ z = -2t + 4 \\ x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{اي} \quad \begin{cases} B \in (D_2) \\ B \in (P) \end{cases} \quad \text{تحقق} \quad B(x;y;z)$$

منه: $-6t + 6 = 0$ منه: $t = 1$ و عليه نجد: $B(0;1;2)$

3) دراسة تقاطع (D) مع (D_1) : التمثيل الوسيط للمستقيم (D) الذي يشمل B وموجه

$$\begin{cases} x = -k \\ y = 1 + k \\ z = 2 + k \end{cases} \quad \text{بأشعاع} \quad \vec{n}(-1;1;1) \quad \text{يكتب على الشكل:} \quad k \in \mathbb{R}$$

من اجل الثانية: $(m;k) = (1;-1)$ نجد ان النقطة $A \in (D)$ و $A \in (D_1)$

منه: $(D) \cap (D_1) = \{A\}$.

4) أ) الوضع النسبي بين (Q) و (D_2) :

بما ان المستوي (Q) والمستقيم (D_2) عموديان على (P) نستنتج ان:

- (D_2) و (Q) متوازيان او (D_2) محتوي في (Q)

- لدينا، $B \in (D_2)$ وبما $B \notin (D_1)$ اي $B \notin (Q)$ و عليه (D_2) و (Q) متوازيان تماما

ب) استنتاج $d(M;(Q))$:

$$d(M;(Q)) = AB = \sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{3}$$

التنقيط	الاعداد المركبة	تصحیح التمرين الثالث (05 نقاط)
0.5	1) تعيين العددين z_1, z_2 : $\begin{cases} 2z_1 + iz_2 = 1 + i\sqrt{3} \\ (-2 + i\sqrt{3})z_1 - iz_2 = -1 + \sqrt{3} \end{cases}$ تكافئ لدينا ، $\begin{cases} 2z_1 + iz_2 = 1 + i\sqrt{3} \\ (\sqrt{3} + 2i)z_1 - z_2 = (1 - \sqrt{3})i \end{cases}$ بالجمع نجد: $i\sqrt{3}z_1 = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$ اي $z_1 = 1 - i$. بتعويض قيمة z_1 نجد ان : $z_2 = 2 + \sqrt{3} + i$.	
0.25	2) أ) كتابة z_A على الشكل الاسي: لدينا ، $ z_A = \sqrt{2}$ و $\arg(z_A) = -\frac{\pi}{4}$ منه : $z_A = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ب) تبين ان : $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{4}}$: لدينا ،	
0.25	$\frac{z_B}{z_A} = \frac{2 + \sqrt{3} + i}{1 - i} = \frac{(2 + \sqrt{3} + i)(1 + i)}{2} = \frac{2 + 2i + \sqrt{3} + \sqrt{3}i + i - 1}{2} = \frac{1 + \sqrt{3} + i(3 + \sqrt{3})}{2}$ $= (1 + \sqrt{3}) \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \right) = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$	
0.25	استنتاج الشكل الاسي لـ z_B : لدينا: $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ منه : $z_B = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}z_A = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = (\sqrt{2} + \sqrt{6})e^{i\frac{\pi}{12}}$ 3) أ) إيجاد لاحقة النقطة D :	
0.5	D صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{6}$ معناه: $r(B) = D$ منه: $z_D = e^{-i\frac{\pi}{6}}z_B = e^{-i\frac{\pi}{6}}(\sqrt{2} + \sqrt{6})e^{i\frac{\pi}{12}} = (\sqrt{2} + \sqrt{6})e^{-i\frac{\pi}{12}}$ وعليه: الاستنتاج: $z_D = \overline{z_B}$ ب) مساحة الدائرة (γ) :	
0.5	لكن S مساحة الدائرة (γ) التي قطرها [BD] منه: $S = \pi \frac{BD^2}{4} = \frac{\pi}{2} z_B - z_D ^2$ بما ان $z_D = \overline{z_B}$ فان $z_B - z_D = 2i \operatorname{Im}(z_B) = 2i$ منه: $S = \pi u.a$ ج) تعيين مجموعة النقط:	
0.75	لدينا ، $\arg[(z - z_B)^2] = \arg(z_B) - \arg(z_D)$ تكافئ $2\arg(z - z_B) = \frac{\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) + 2\pi k$ تكافئ $\arg(z - z_B) = \frac{\pi}{12} + \pi k$ تكافئ $(\vec{u}; \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{12} + \pi k$ مع $k \in \mathbb{Z}$. منه مجموعة النقط (Δ) هي المستقيم الموجه بالشعاع $\vec{w}$ حيث $(\vec{u}; \vec{w}) = \frac{\pi}{12}$ و المار من النقطة B ولا يشملها .	

0.25 0.5 0.75 0.25 0.25	أ) طبيعة المثلث ABC : $K = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{2 + \sqrt{3} + i - 1 - i}{1 - i - 1 - i} = \frac{1 + \sqrt{3}}{-2i} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i$ لدينا، $K = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ و $\arg(K) = \frac{\pi}{2}$ إذن: $BC \neq AC$ و $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2}$ منه المثلث ABC قائم في C ب) طبيعة الرباعي ACBD : لدينا، $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$ إذن الرباعي ACBD متوازي اضلاع $\begin{cases} z_C - z_A = 2i \\ z_B - z_D = 2i \end{cases}$ بما أن المثلث ABC قائم في C نجد أن هناك ضلعان متتاليان من الرباعي ACBD متعامدان و ليس متساويان منه نستنتج أن ACBD مستطيل . 5) أ) طبيعة التحويل S : r دوران مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{6}$: منه r هو تشابه مباشر مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{6}$ ونسبته 1 h تحاكي مركزه O ونسبته 2 : منه h هو تشابه مباشر مركزه O وزاويته π ونسبته 2 إذن: التحويل $S = r \circ h$ هو تشابه مباشر مركزه O ونسبته 2 وزاويته $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ ب) تعيين قيم n : لدينا، $H_n = S \circ S \circ \dots \circ S$ هو تشابه مباشر مركزه O ونسبته 2^n وزاويته $\frac{5\pi n}{6}$ H_n يكون تحاكي إذا كان $5n \equiv 0[6]$ أي $n \equiv 0[6]$ أي $n = 6\alpha / \alpha \in \mathbb{N}$. تعيين الخصائص: إذا كان: α عدد زوجي فإن H_n تحاكي مركزه O ونسبته 2^n إذا كان: α عدد فردي فإن H_n تحاكي مركزه O ونسبته -2^n
التنقيط	تصحيح التمرين الرابع (7 نقاط) الدوال العددية : الدالة اللوغارتمية
0.5 0.5	1) تعيين واتجاه تغير الدالة u : لدينا من أجل كل عدد حقيقي t من $]0; +\infty[$: $u'(t) = \frac{3}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} = \frac{3(t+1) - 1}{(t+1)^2} = \frac{3t+2}{(t+1)^2}$ من أجل من أجل كل عدد حقيقي t من $]0; +\infty[$: $u'(t) > 0$ منه u دالة متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$. 2) أ) إثبات أن f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 [\ln(1+x) - \ln x]}{x}$ $= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 [\ln(1+x) - \ln x]$ $= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln(1+x) - x^2 \ln x$ $= 0$ منه: f دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و عدد المشتق $f'_d(0) = 0$

ب) حساب $f'(x)$ من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;1[$:

0.5

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 [\ln(x+1) - \ln x] + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \right) x^3 \\ &= x^2 \left[3(\ln(x+1) - \ln x) + \frac{x}{x+1} - 1 \right] \\ &= x^2 \left[3 \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} \right] \\ &= x^2 u \left(\frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

ج) اتجاه تغير الدالة f :

0.5

لدينا من اجل كل x من $]0;1[$ فان $\frac{1}{x} \geq 1$ منه $u\left(\frac{1}{x}\right) \geq u(1)$ اي $u\left(\frac{1}{x}\right) > 0$
 منه من اجل كل x من $]0;1[$ نجد: $f'(x) > 0$
 إذن f دالة متزايدة تماما على المجال $]0;1[$.

- جدول التغيرات:

0.25

x	0	1
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$\ln 2$

II) 1) التحقق ان: $f(x) = g(x) - h(x)$:

0.25

من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;1[$:

$$f(x) = x^3 [\ln(x+1) - \ln(x)] = x^3 \ln(x+1) - x^3 \ln x = g(x) - h(x)$$

ب) دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (C_g) :

لدينا من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;1[$: $f(x) - g(x) = -h(x)$
 بما ان $h(x) < 0$ على المجال $]0;1[$ منه نجد:

0.75

x	0	1
x^3	○	○
$\ln x$	○	○
$-h(x)$	○	○

إذن: (C_f) يقع فوق (C_g) على المجال $]0;1[$.

(C_f) و (C_g) يتقطعان في النقطتين $A(1; \ln 2)$ و O .

2) إثبات ان (T) و (T') متوازيان :

(T) و (T') مماسين لـ (C_f) و (C_g) عند $e^{-\frac{1}{3}}$ على الترتيب

0.5

معامل توجيههما على التوالي $f'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)$, $g'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)$

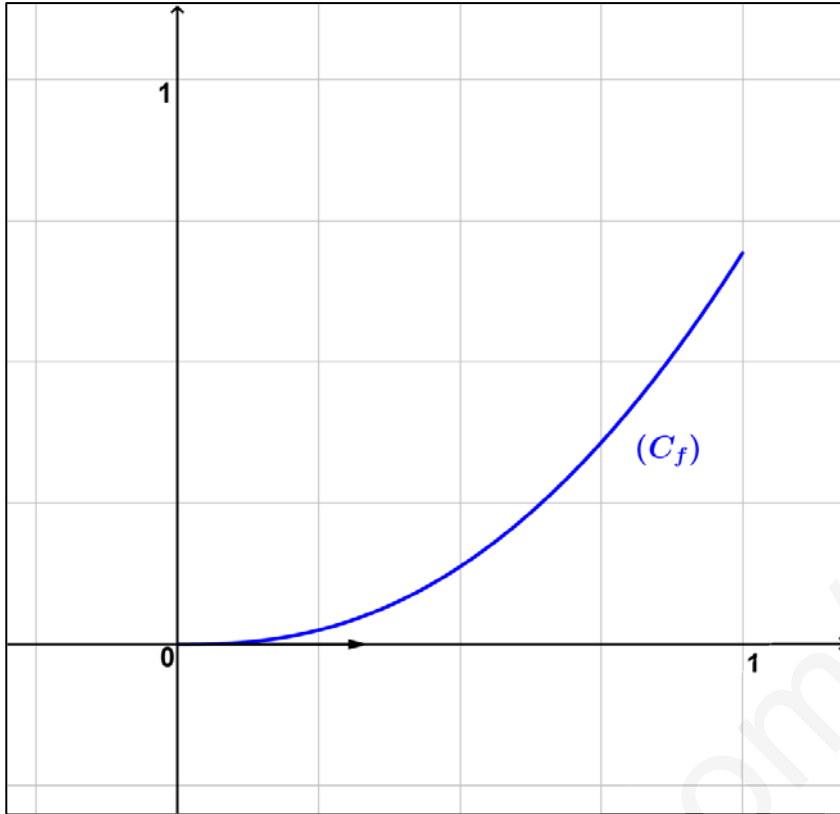
لدينا، من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;1[$: $f(x) - g(x) = h(x)$

$$\text{منه: } f'(x) - g'(x) = h'(x) = x^2 (3 \ln x - 1)$$

$$\text{وعليه: } f'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = g'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) \text{ اي } f'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) - g'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = 0$$

وعليه (T) و (T') متوازيان .

3) إنشاء (C_f) :



4) أ، التعبير عن A_α بدلالة الدالة H :

$$A_\alpha = \int_\alpha^1 x^3 \ln x dx = \int_\alpha^1 h(x) dx = [H(x)]_\alpha^1 = H(1) - H(\alpha) = -H(\alpha)$$

ب) حساب A_α باستعمال التكامل بالتجزئة :

$$\text{نضع: } \begin{cases} u(x) = \ln x & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x^3 & v(x) = \frac{x^4}{4} \end{cases} \text{ منه:}$$

$$A_\alpha = \left[\frac{x^4 \ln x}{4} \right]_\alpha^1 - \frac{1}{4} \int_\alpha^1 x^3 dx = \left(0 - \frac{\alpha^4 \ln \alpha}{4} \right) - \frac{1}{4} \left[\frac{x^4}{4} \right]_\alpha^1 = - \left[\frac{\alpha^4 \ln \alpha}{4} + \frac{1}{16} (1 - \alpha^4) \right]$$

استنتاج $H(0)$:

$$H(\alpha) = \frac{\alpha^4 \ln \alpha}{4} + \frac{1}{16} (1 - \alpha^4) \text{ حساب السؤالين السابقين نستنتج ان:}$$

$$H(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} H(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha^4 \ln \alpha}{4} + \frac{1}{16} (1 - \alpha^4) = \frac{1}{16} \text{ منه:}$$

5) حساب المساحة:

$$S = \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx = - \int_0^1 h(x) dx = - [H(x)]_0^1 = H(0) - H(1) = \frac{1}{16} \text{ u.a}$$

$$\text{بما ان: } \| \vec{i} \| \times \| \vec{j} \| = 16 \text{ cm}^2 \text{ نجد ان: } S = 1 \text{ cm}^2$$

امتحان البكالوريا التجريبي

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

تنبيه : الإجابة تكون بمنهجية واضحة و دقيقة

التمرين الأول : 04 نقاط

يحتوي صندوق على أربع كرات حمراء و ثلاثة بيضاء حيث كل الكرات متماثلة و لا نفرق بينها باللمس.

نسحب كرة واحدة من الصندوق, إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء نسحب كرتين في أن واحد من الكرات المتبقية, وإذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء نسحب كرتين على التوالي و بدون إرجاع من الكرات المتبقية.

1. أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : « الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون » C : « الحصول على كرة بيضاء على الأكثر »

2. إذا علمت أنه حصلنا على كرتين بيضويتين بالضبط, ما احتمال أن تكون الكرة الأولى المسحوبة بيضاء.

نضيف الآن إلى الصندوق السابق ثلاث كرات حمراء و نسحب من جديد ثلاث كرات على التوالي و بلا رجاء و ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل تجربة عدد الكرات الحمراء المتبقية في الصندوق

1. عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

2. أحسب $P(e^X \leq e), P(|X-1| \leq 1), P(X^2 - 3X + 2 = 0)$

3. أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X ثم إمنتج $E(3X + 2)$

التمرين الثاني : 04 نقاط

أ. عين قيم العدد الصحيح m بحيث تقبل المعادلة : $2014\alpha = 475\beta + m$ حلوًا في $\mathbb{Z}^2$.

ب. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $2014x - 475y = -19$ (1) .

1. عين الحل الخاص (x_0, y_0) للمعادلة (1) والذي يحقق : $y_0 - 4x_0 = 1$.

2. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1).

3. بين أن العددين x و y أوليان فيما بينهما باعتبار الثنائية (x, y) من $\mathbb{N}^2$ حل للمعادلة (1) .

4. عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $n \equiv 4[25]$ وباقي قسمة n على العدد 106 هو 17 .

5. عين كل الثنائيات (x, y) من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (1) بحيث يكون العدد $(x + y)$ مضاعف للعدد 10 .

6. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على العدد 5 .

7. عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $(2017^{4n+3} - 2 \times 2016^{8n} + 2014^{2n+1})$ على العدد 5 حيث n عدد

طبيعي .

التمرين الثالث : 05 نقاط

1. عین العددين المركبين z_1 و z_2 حيث :
$$\begin{cases} 2z_1 + iz_2 = 1 + i\sqrt{3} \\ (\sqrt{3} + 2i)z_1 - z_2 = (1 - \sqrt{3})i \end{cases}$$
2. في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين $z_A = 1 - i$ و $z_B = 2 + \sqrt{3} + i$.
3. اكتب z_A على الشكل الأسّي.
4. بين ان : $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم استنتج الشكل الأسّي للعدد z_B .
5. أوجد لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه النقطة O وزاويته $-\frac{\pi}{6}$.
6. احسب مساحة الدائرة (γ) التي قطرها $[BD]$ مقدرة بوحدة المساحة.
7. عین مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $\arg[(z - z_B)^2] = \arg(z_B) - \arg(z_D)$.
8. لتكن النقطة C ذات اللاحقة $z_C = 1 + i$.
- أ. عین طبيعة المثلث ABC ثم استنتج بدقة طبيعة الرباعي $ACBD$.
- ب. ليكن التحويل النقطي S المعروف كما يلي : $S = r \circ h$ مع h تحاكي مركزه O ونسبته -2 .
1. عین طبيعة التحويل S مع تعيين خصائصه المميزة.
2. نعرف من اجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ ، التحويل النقطي H_n كما يلي : $H_n = \underbrace{S \circ S \circ \dots \circ S}_{n \text{ مر } S}$.
- أ. عین قيم n حتى يكون H_n تحاكي يطلب تعيين خصائصه.

التمرين الرابع : 07 نقاط

- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث : $f(x) = (1 - 2x)e^{2x}$ ، ونسمي (C_f) المنحنى الممثل لها في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ مع وحدة الطول $2cm$.
1. أدرس تغيرات الدالة f .
 2. أوجد معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الترتيب $y = 0$.
 3. احسب $f(1)$ ثم أرسم بدقة (C_f) و (Δ) .
 4. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = f(m)$.
 5. عین العددين الحقيقيين a, b بحيث تكون الدالة F المعرفة بـ : $F(x) = (ax + b)e^{2x}$ دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.
 6. احسب بـ cm^2 وبدلالة λ المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معدلاتها $y = 0$ ، $x = \frac{1}{2}$ و $x = \lambda$ حيث $\lambda < \frac{1}{2}$ ثم احسب $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} S(\lambda)$.
 7. احسب f'' ، $f^{(3)}$ ، $f^{(4)}$ ، حيث f' ، f'' ، $f^{(3)}$ ، $f^{(4)}$ المشتقات المتتالية للدالة f حيث $n \geq 1$.
 8. برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ فإن : $f^{(n)}(x) = 2^n(1 - n - 2x)e^{2x}$.
 9. عین x_n و y_n إحداثيات النقطة M_n بحيث يقبل $(C_{f^{(n)}})$ عندها مماسا يوازي حامل محور الفواصل.
 10. بين أن x_n متتالية حسابية وأن y_n متتالية هندسية يطلب تعيين حداهما العام بدلالة n .
 11. تحقق من أن النقطة M_n تنتمي إلى المنحنى (Γ) الذي معادلته : $y = \frac{e^{2x}}{4^x}$.
 12. احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$.

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

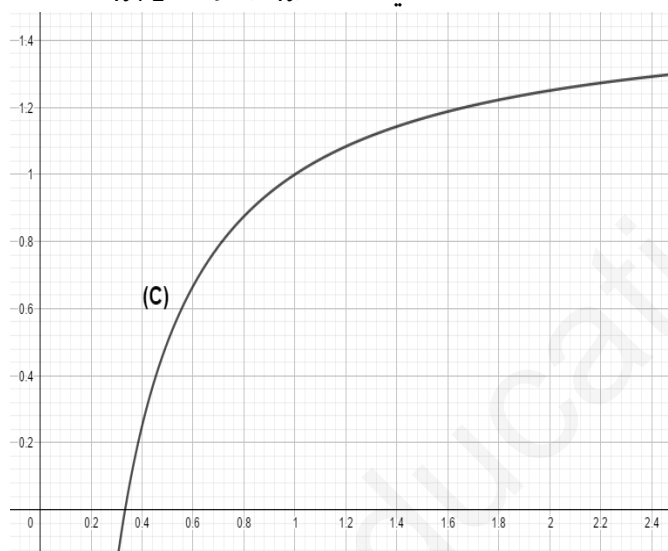
الموضوع الأول

التمرين الأول (04 نقاط) :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$ كما يلي : $f(x) = \frac{3x-1}{2x}$ وليكن (C) تمثيلها البياني في مستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس (في الوثيقة المرفقة) .

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$

(2) (U_n) متتالية عددية معرفة على N ب : $U_0 = 2$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$



ا- مثل الحدود U_0, U_1, U_2, U_3 على محور

الفواصل مبرزاً خطوط الانشاء.

ب- يرهّن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n :

$$U_n > 1$$

ج- بين ان المتتالية (U_n) متناقصة تماماً.

ماذا تستنتج ؟

(3) ا- اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n :

$$0 < U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$$

ب- استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n :

$$0 < U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ثم عيّّن نهاية المتتالية (U_n)

(4) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على N كما يلي $v_n = \frac{U_n - 1}{2U_n - 1}$

ا- بين ان (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول ; ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n

ج- احسب المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{v_0 - 1}{U_0} + \frac{v_1 - 1}{U_1} + \dots + \frac{v_n - 1}{U_n}$

التمرين الثاني (04.5 نقاط) :

1 الفضاء منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، لتكن (p_m) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ التي تحقق

$$(m+2)^2 = m^2x + (m+1)y + (m^2 + m + 1)z \text{ حيث } m \text{ وسيط حقيقي}$$

1. أ) بّرّان (p_m) مستوئيهما كان الوسيط الحقيقي m .

ب) بين ان كل المستويات تشمل مستقيماً ثابتاً (D) يطلب إعطاء تمثيل وسيطي له .

2. نعتبر النقطة $A(0; 1; -1)$ والمستقيم (Δ) الذي $(t \in \mathbb{R})$ تمثيل وسيطي له.

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 + t \\ z = -t \end{cases}$$

اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (p) الذي يحوي (Δ) ويمر بالنقطة A .

3. ليكن (Q) و (R) المستويين المعرفين بالمعادلتين الدكارتيتين $x - y + 2z + 3 = 0$ و $2x - y + z + 2 = 0$ على الترتيب

اثبت ان (Q) و (R) متقاطعان وعين تمثيلا وسيطيا لمستقيمين تقاطعهما.

4. لتكن النقطة $I(1; 0; 0)$

أ) أثبت أنه يوجد سطح كرة وحيد (S) ذي المركز I يمس كلا من (Q) و (R)

ب) اوجد معادلة ديكارتية ل (S)

5. لتكن (S_m) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء والتي تحقق

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 4my + 5m^2 - 6 = 0 \quad \text{حيث } m \in \mathbb{R}$$

أ) اثبت أن (S_m) سطح كرة ، يطلب تعيين مركزه I_m ونصف قطره R .

ب) عين مجموعة النقط I_m لما m يمسح $\mathcal{R}$

ج) ناقش حسب قيم m تقاطع (S_m) و (Q) .

التمرين الثالث (04.5 نقاط) :

في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

$P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث: $p(z) = 8z^3 + (12i - 16)z^2 + 50z - 100 + 75i$

1. أ) عين العددين المركبين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $p(z) = \left(z^2 + \frac{25}{4}\right)(\alpha z + \beta)$

ب) استنتج حلول المعادلة $p(z) = 0$

2. نعتبر النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب : $Z_A = 2 - \frac{3}{2}i$ و $Z_B = \frac{5}{2}i$

أ) عين Z_C لاحقة النقطة C حيث : $\begin{cases} 2|Z_C - Z_A| = |Z_B - Z_A| \\ \arg(Z_C - Z_A) = \frac{\pi}{2} + \arg(Z_B - Z_A) \end{cases}$

ب) استنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A يطلب تعيين نسبته وزاوية له

ج) حدد طبيعة المثلث ABC ، ثم احسب مساحته.

د) لتكن النقطة D صورة النقطة C بالتشابه المباشر S . بين ان مساحة المثلث ACD تساوي $\frac{5}{4} ua$

3. أ) عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S .

ب) من اجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ ، نعتبر التحويل النقطي T_n المعروف ب : $T_n = \underbrace{SoSo \dots So}_n$

برهن بالتراجع أن العبارة المركبة للتحويل T_n هي : $Z' = \frac{1}{2^n} e^{in\frac{\pi}{2}}(Z - Z_A) + Z_A$

ج) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من اجلها التحويل T_n تحاكيا مركزه النقطة A يطلب تعيين نسبته.

4. نعتبر النقطتين M و N صورتا النقطة B بالتحويلين T_{4k} و T_{4k-2} على الترتيب حيث $k \in \mathbb{N}^*$

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي k غير معدوم ، النقطة A تنتمي إلى $[MN]$

ب) أحسب بدلالة العدد الطبيعي k ، الطول MN

ج) أحسب $\lim_{K \rightarrow +\infty} MN$

التمرين الرابع (07 نقاط) :

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - e + \ln(1 + 2e^{-2(x-e)})$

(1) (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

أ / تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)})$

ب / احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ج / أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) أ / بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاريين (D) و (D') معادلتهما:

$y = x - e$ و $y = -x + \ln 2 + e$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$ على الترتيب.

ب / ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيمين المقاريين (D) و (D') .

ج / بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = \frac{1}{2} \ln 2 + e$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f) .

(3) أرسم (Δ) ، (D) ، (D') و (C_f)

(4) ليكن (D_m) المستقيم الذي معادلته: $y = mx - m \left(e + \frac{\ln 2}{2} \right) + \frac{\ln 2}{2}$ حيث m وسيط حقيقي.

أ / بين أن جميع المستقيومات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A \left(\frac{\ln 2}{2} + e; \frac{\ln 2}{2} \right)$.

ب / ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (D_m) و المنحنى (C_f)

(5) نضع: $I = \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} [f(x) - (x - e)] dx$ ، $I_n = \int_0^1 \ln(1 + X^n) dX$ ، n عدد طبيعي غير معدوم

أ / فسر هندسيا العدد I و احسب العدد I_1 .

ب / بين أن: $0 \leq I_n \leq \ln 2$

ج / عين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

(6) باستعمال: $\ln(1 + X) \leq X$ ، من أجل كل $X \in]0; +\infty[$

أ* / استنتج أن: $0 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$

ب / اعط حصرا للعدد $I + I_1$.

اتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول (04.5 نقاط) :

- I. (1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي بواقي قسمة 3^n على 10
 (2) بين انه من اجل كل عدد طبيعي فان العدد $7^{4n+1} + 2021^n + 2019^{2n} + 1$ يقبل القسمة على 10
- (3) A عدد طبيعي يكتب $\overline{xx0xx02}$ في نظام التعداد ذي الأساس 3 و يكتب $\overline{y612}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7. أوجد x و y ثم أكتب A في النظام العشري.
- II. (1) حل المعادلة التفاضلية : $y' = (\ln 3)y$
 (2) نسمي f الحل الخاص لهذه المعادلة والذي يحقق : $f(0) = 1$, بين ان $f(x) = 3^x$
 (3) ما هو رقم احاد العدد $f(1440) + f(2019)$
 (4) نعتبر المجموع S_n حيث $S_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n)$
- احسب بدلالة n المجموع S_n ثم اوجد الاعداد الطبيعية n التي يكون من اجلها $2S_n$ يقبل القسمة على 10.
- III. يحتوي كيس على 4 كرات مرقمة ببواقي قسمة 3^n على 10 نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد.
- أ- احسب احتمال الحصول على رقمين مجموعهما يساوي مجموع أرقام العدد 2019.
 ب- X متغير عشوائي يرفق بكل عملية سحب مجموع الرقمين المتحصل عليهما.
 ج - عرف قانون احتمال X ثم احسب أمله الرياضيائي

التمرين الثاني (04 نقاط) :

1. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب: $u_1 = \frac{1}{2}$ و بالعلاقة التراجعية : $u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}$

أ) ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل $n \geq 1$ بـ : $v_n = u_n - \frac{2}{5}$

بين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها.

ب) استنتج عبارة v_n بدلالة n ثم عبارة u_n بدلالة n .

2. نعتبر نردين A و B غير مزيفين بحيث : النرد A به ثلاث اوجه حمراء و ثلاث اوجه بيضاء ، اما النرد B به اربع اوجه حمراء و وجهين بيضاوين.

نختار عشوائيا نردا ونرميه : إذا ظهر اللون الأحمر نحتفظ بهذا النرد ، اما اذا ظهر اللون الأبيض نغير النرد. ثم نرمي هذا النرد وهكذا دواليك.

نرمز ب A_n : الى الحادثة : " رمي النرد A مرة n و بـ : $\overline{A_n}$ الحادثة العكسية للحادثة A_n .

R_n الى الحادثة : " ظهور اللون الأحمر في الرمية n " و بـ : $\overline{R_n}$ الحادثة العكسية للحادثة R_n .

ونرمز بـ : a_n الى احتمال الحادثة A_n و r_n الى احتمال الحادثة R_n .

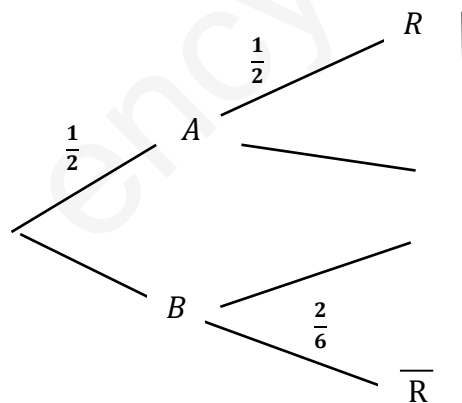
أ) عين a_1

ب) اكمل الشجرة ثم عين r_1

ج) بملاحظة أنه من اجل كل $n \geq 1$

$$R_n = (R_n \cap A_n) \cup (R_n \cap \overline{A_n})$$

$$r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3} \quad \text{بين أن :}$$



- د) بين أنه من أجل كل $n \geq 1$: $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$
- هـ) استنتج أنه من أجل كل $n \geq 1$: $a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$ ثم عيّن عبارة a_n بدلالة n
- و) استنتج عبارة r_n بدلالة n ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$

التمرين الثالث (04 نقاط) :

- 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $z^2 - 8z + 17 = 0$
- 2) في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و D

التي لواحقها على الترتيب : $a = 4 - i$ ، $b = 4 + i$ و $d = -i$

وليكن R الدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $w = 2$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

أ / بين أن العبارة المركبة للدوران من الشكل : $z' = iz + 2 - 2i$

ب / عيّن لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران R

ج / بين أن : $\frac{c-d}{c-b} = -i$ ثم استنتج طبيعة المثلث BCD

د / بين أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

هـ / عيّن مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث يكون $|-i - z|^2 - |4 - i - z|^2 = 16$

التمرين الرابع (06.5 نقاط) :

الدالتان العدديتان f و g معرفتان على المجال $]0, +\infty[$ كما يلي :

$$g(x) = 2x^2 - 2 + \ln x \quad \text{و} \quad f(x) = 2x + 1 + \frac{1 - \ln x}{x}$$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1.

أ / أثبت أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0, +\infty[$

ب / أحسب $g(1)$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$

2.

أ / أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

ب / أثبت أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 2x + 1$ هو مقارب مائل لـ (C_f)

ج / أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

3. أثبت أنه من أجل كل x من $]0, +\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

4. أنشئ كلا من (Δ) و (C_f)

5. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x) - (2x + 1))dx$

أ/ أحسب U_n بدلالة n ثم استنتج طبيعة المتتالية (U_n)

ب/ لتكن A مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) وبالمستقيمين

الذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = e^2$

** تحقق من أن : $A = (U_0 - U_1) ua$

6. نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بالعلاقة : $h(x) = x^2(1 + \ln x) - 3x + 2$

أ) أثبت أنه من أجل كل x من المجال $]0, +\infty[$ فإن $\frac{h(x)}{x} = f\left(\frac{1}{x}\right) - 4$

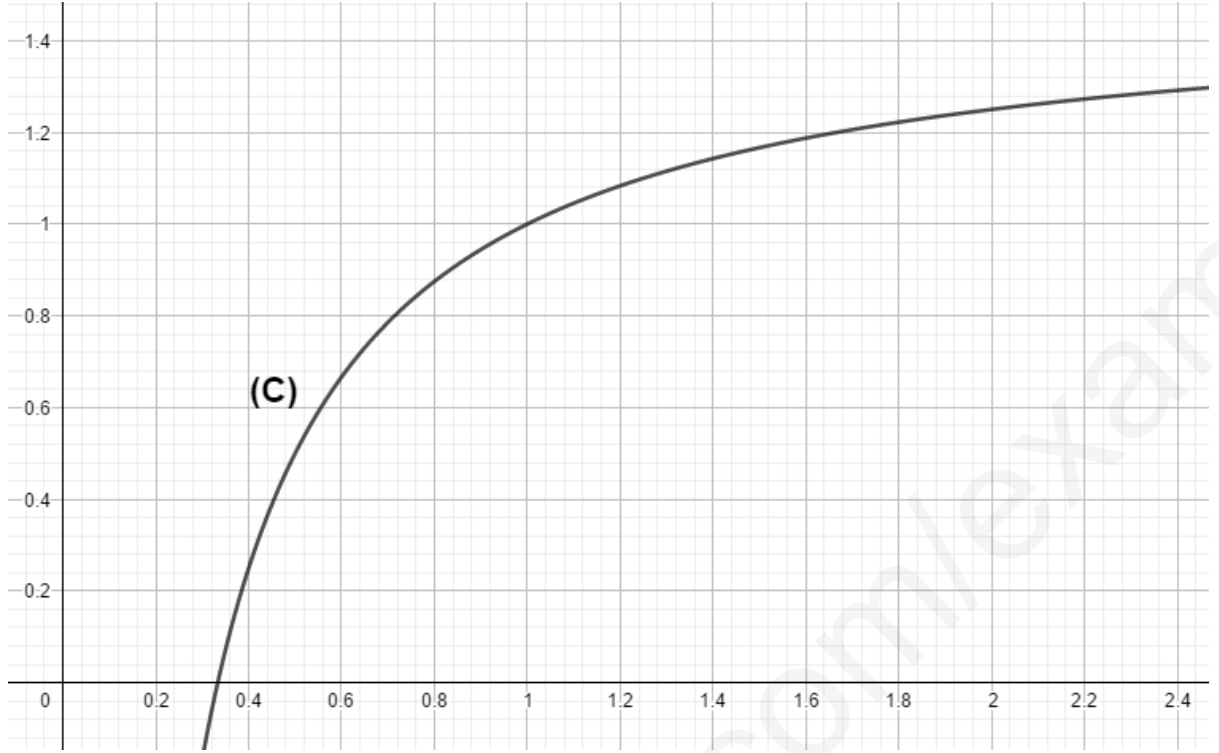
ثم استنتج أن $h(x) \geq 0$

ب) عين x بحيث يكون $h(x) = 0$

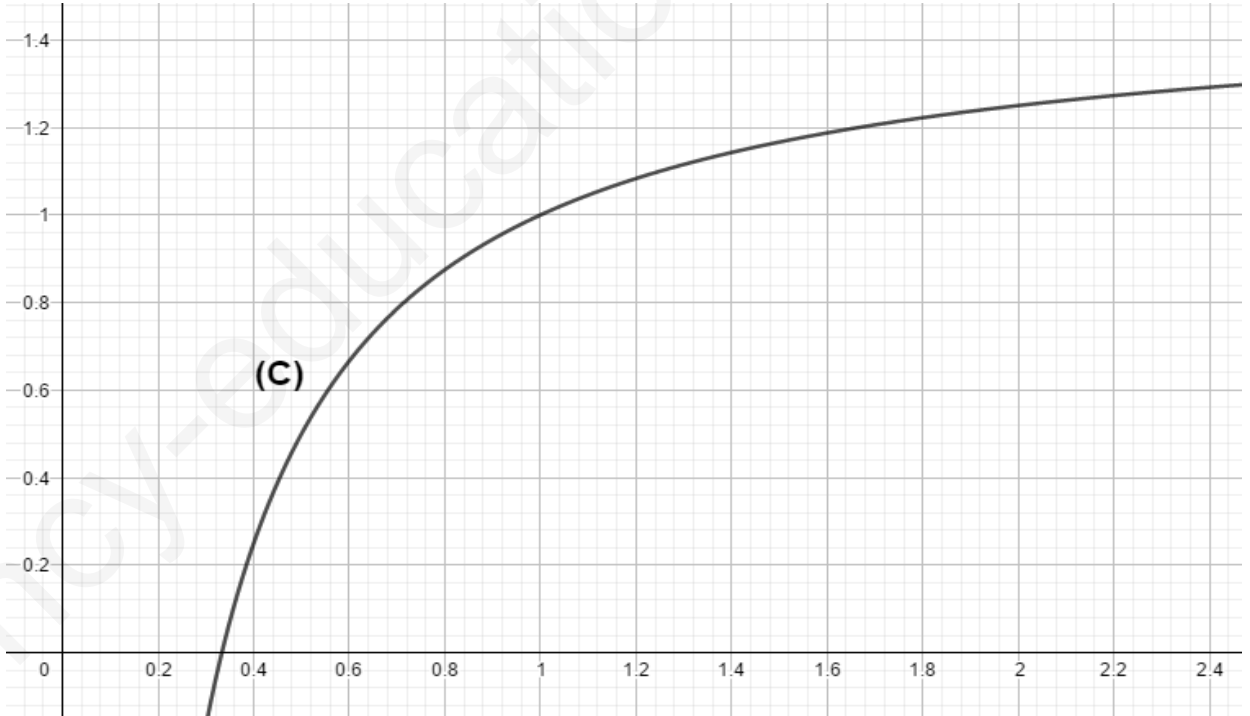
اتمى الموضوع الثاني

ملاحظة : تعاد الوثيقة مع ورقة الإجابة ولو كانت فارغة
الإسم واللقب :

القسم : 3 رياضيات



ملاحظة : تعاد الوثيقة مع ورقة الإجابة ولو كانت فارغة
الإسم واللقب :



..... الأستاذ: تونسي ن يتمنى لكم التوفيق والنجاح tounsi_nawri@yahoo.com

على المتر شح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأولالتمرين الأول (04 نقاط)النقطتان A_0 و B_0 من المستوي بحيث $A_0B_0 = 8$ (الوحدة هي السنتيمتر)التشابه المباشر S الذي مركزه النقطة A_0 ونسبته $\frac{1}{2}$ و $\frac{3\pi}{4}$ زاوية لهنعرف متتالية النقط (B_n) بـ : من أجل كل عدد طبيعي n : $B_{n+1} = S(B_n)$ (1) أنشئ النقط : B_1, B_2, B_3 و B_4 (2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n المثلثان $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان(3) نعرف المتتالية (u_n) بـ : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = B_nB_{n+1}$ (أ) أثبت أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ (ب) جد عبارة u_n بدلالة n و u_0 (ج- نضع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$, جد $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ (4) (أ) حل في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة : $3x - 4y = 2$ (ب) المستقيم (Δ) العمودي على المستقيم (A_0B_0) في النقطة A_0 ، جد قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون النقطة B_n تنتمي إلى المستقيم (Δ) التمرين الثاني: (05 نقاط)1 نعطي في مجموعة الأعداد المركبة العبارة $P(z) = z^3 + (-8+i)z^2 + (25-8i)z + 25i$:1- أ- تحقق أن $p(-i) = 0$ ب- جد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z+i)(z^2 + az + b)$ ج- حل في $\square$ المعادلة : $p(z) = 0$ 2 (المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(0; \vec{u}; \vec{v})$, النقط $C; B; A$ و D هي صور الأعداد المركبة $z_A = 1$, $z_B = -i$, $z_C = 4 + 3i$ و $z_D = 4 - 3i$ على الترتيب.من أجل كل نقطة M تختلف عن A لاحتقها z نرفق النقطة M' لاحتقها z' حيث $z' = \frac{-iz + 4i - 3}{z - 1}$ أ- تحقق أن $z' + i = \frac{-3 + 3i}{z - 1}$ ب- بين أن $AM \times BM' = 3\sqrt{2}$ و $(\vec{u}; \overline{AM}) + (\vec{u}; \overline{BM'}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ حيث k عدد صحيحج- عين (∂) مجموعة النقط M من المستوي حيث $z' + i = 3e^i$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على خمس كريات بيضاء مرقمة بـ : 1 ، 1 ، 0 ، 1 ، -1 وخمس كريات سوداء مرقمة بـ : 1 ، 1 ، 0 ، 0 ، -1 لا نميز بينها باللمس ، نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من الصندوق .
I. نعطي الأحداث التالية :

A : "الحصول على كرية بيضاء واحدة فقط" . B : "الحصول على كرية بيضاء على الأقل"

C : "الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون" . D : "الحصول على اللونين الأبيض والأسود"

F : "مجموع أرقام الكريات الثلاث المسحوبة يساوي 0" .

1- أحسب احتمال الأحداث A ، B و C .

2- بين أن : $P(D) = \frac{5}{6}$ ، $P(F) = \frac{31}{120}$ و $P(C \cap F) = \frac{7}{120}$.

3- إذا كان مجموع أرقام الكريات المسحوبة يساوي 0 ما هو احتمال أن تكون الكريات الثلاث من نفس اللون ؟
II. نعطي المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل مخرج مجموع أرقام الكريات الثلاث المسحوبة .
عين قيم المتغير العشوائي X عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(1) الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln(x)$

أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

ج- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1,84 < \alpha < 1,83$. أستنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$

(2) الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{2\ln(x)}{x^2 + x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ الوحدة 2cm

أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. ثم فسر النتيجة بيانيا .

ب- اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} \times g(x)$

. ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ج- بين أن : $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$. استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أكتب معادلة المماس (T) في النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 1$. ثم أنشئ كل من المماس (T) و المنحني (C_f) .

(4) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x) = x + m$.

(5) أ- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \geq 1$ ، أن: $\frac{\ln(x)}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln(x)}{x}$

ب - أحسب $I = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln(x)}{x} dx$. ثم باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب $J = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$

ج - استنتج حصرا للعدد K حيث : $K = \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx$.

(6) المساحة A الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلاتهما: $x = 1$ و $x = \frac{3}{2}$

أكتب A بدلالة K . ثم استنتج قيمة مقربة بـ: cm^2 للمساحة A .

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (4 نقاط)

(1) نعطي المعادلة (E) ذات المجهول $(n; m)$ حيث $11n - 24m = 1$ عدداً صحيحاً. n و m عدداً صحيحاً. جد الحل الخاص $(n_0; m_0)$ للمعادلة (E) ثم استنتج حلول المعادلة (E).

(2) بين أن 9 يقسم كل من $10^{11}-1$ و $10^{24}-1$.

(3) بين أن $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$ حيث $(n ; m)$ احد حلول المعادلة (E) من الأعداد الطبيعية.

(4) من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n و من اجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$:

بين أن $(x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{n-1})=x^n-1$:

(ب)-بين أن : $10^{11} - 1$ يقسم $10^{11n} - 1$ و أن : $10^{24} - 1$ يقسم $10^{24m} - 1$

(ج)۔ اثبت انه يوجد عدنان صحيحان M و N بحيث $(10^{11}-1)N - (10^{24}-1)M = 9$.

(5) اثبت أن كل قاسم مشترك لـ $10^{24} - 1$ و $10^{11} - 1$ يقسم 9 .

ثم استنتج القاسم المشترك الأكبر PGCD لكل من $10^{24}-1$ و $10^{11}-1$

التمرين الثاني: (04 نقاط) :

المكعب $ABCDEFGH$ طول ضلعه 1, I منتصف القطعة $[EF]$ و J نظيرة النقطة E بالنسبة للنقطة F

ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$

(1) أ) عين إحداثيات النقطتين I و J

(ب) تحقق أن الشعاع $\overrightarrow{DJ}$ ناظمي على المستوي (BGI)

(ج) استنتاج المعادلة الديكارتية للمستوي (BGI)

(د) أحسب المسافة بين F و المستوى (BGI)

(2) نضع المستقيم (Δ) المار من F و العمودي على المستوى (BGI)

(أ) أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ)

(ب) بين أن المستقيم (Δ) يشمل النقطة K مركز الوجه $ADHE$

(ج) بين أن المستقيم (Δ) و المستوي (BGI) يتقاطعان في النقطة P إحداثياتها $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$

(د) هل النقطة P هي نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث BGI ؟ عّلل إجابتك.

(3) عين معادلة سطح الكرة (S) الموجودة داخل المكعب $ABCDEFGH$ والتي تمس أوجهه الستة.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1. أ) عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب: $L = 2 + 2i\sqrt{3}$

(ب) حل في مجموعة الاعداد المركبة C المعادلة : $(z^2 - 2 - 2i\sqrt{3})(z^2 + 1) = 0$

2. نعطى النقط A, B, C و D من المستوى لواحقتها على الترتيب $z_A = \sqrt{3} + i, z_B = \sqrt{3} - i, z_C = i$ و $z_D = 1$.

أقلب الورقة

أ) اكتب العدد المركب $\frac{z_A}{z_B}$ علي الشكل الاسي ثم استنتج طبيعة المثلث OAB

ب) هل توجد قيم للعدد الطبيعي n حتي يكون العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ تخيليا صرفا

3. أ) عين عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه A و يحول النقطة B الي النقطة C محددا عناصره المميزة
ب) عين و انشئ القطعة $[B'C']$ صورة القطعة المستقيمة $[BC]$ بالتشابه S مستنتجا مساحة المثلث $AB'C'$

4. أ) عين (ψ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث يكون: $\frac{z-z_C}{z-z_B}$ عددا حقيقيا سالبا تماما.

ب) عين (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث: $z = -3 - 2i - ke^{\frac{i\pi}{4}}$ مع $k \in R^+$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I:

نعطي المعادلة التفاضلية: $y' + y = e^{-x} \dots (E)$

1. بين أن الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $u(x) = xe^{-x}$ حل للمعادلة (E)

2. حل المعادلة التفاضلية $y' + y = 0 \dots (E_0)$

3. بين أن الدالة v المعرفة و القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ تكون حلا للمعادلة (E_0)

إذا وفقط إذا كانت $v + u$ حلا للمعادلة (E) - استنتج جميع حلول المعادلة (E) .

4. عين الدالة f_2 حل المعادلة (E) التي تأخذ القيمة 2 من أجل 0.

II:

للدالة f_k المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f_k(x) = (x+k)e^{-x}$ و k عدد حقيقي

نرمز بـ $(\mathcal{C}_k)$ إلى تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. عين نهايات f_k عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2. احسب من أجل كل عدد حقيقي x : f'_k ثم شكل جدول تغيرات الدالة f_k

III:

المتتالية (I_n) المعرفة بـ $I_0 = \int_{-2}^0 e^{-x} dx$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $I_n = \int_{-2}^0 x^n e^{-x} dx$

1. أ- احسب القيمة المضبوطة لـ I_0 .

ب - باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن: $I_{n+1} = (-2)^{n+1} e^2 + (n+1)I_n$

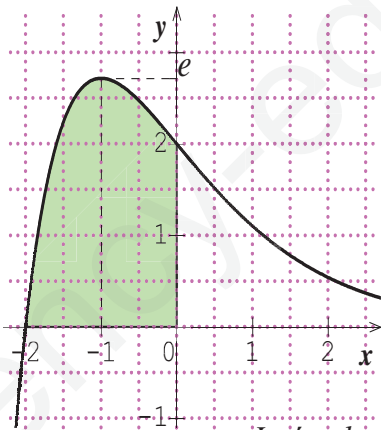
ج - استنتج القيم المضبوطة لـ I_1 و I_2 .

2. التمثيل البياني الموالي $(\mathcal{C}_k)$ هو لدالة f_k المعرفة في الجزء II.

أ- باستعمال المعلومات المتوفرة في الشكل، عين قيمة k المرفقة بالمنحنى $(\mathcal{C}_k)$.

ب- المساحة S للجزء المظلل (مقدرة بوحدة المساحات).

عبر عن S بدلالة I_0 و I_1 ثم استنتج القيمة المضبوطة للمساحة S .



انتهى الموضوع الثاني

بالتوفيق صح رمضانكم وصح فطوركم

على الممتحن أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

- (1) p عدد طبيعي غير معدوم ، n عدد طبيعي غير معدوم و يختلف عن 1 .
 a و b عددين طبيعيين حيث : $a = pn$ و $b = p(n-1)$.
 • بيّن أن : $PGCD(a; b) = a - b$.

- (2) بيّن أنّه إذا كان a و b عددين طبيعيين غير معدومين حيث : $PGCD(a; b) = a - b$ فإنّه يوجد عددين طبيعيين n و p يحققان : $a = pn$ و $b = p(n-1)$.

- (3) x و y عددين طبيعيين غير معدومين .
 نضع : $a = 40x(3y + 2)$ ، $b = 15x(8y + 5)$ ، $c = 24x(5y + 3)$.
 • عيّن $PGCD(a; b)$ و $PGCD(b; c)$ ثم استنتج $PGCD(a; b; c)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- يحتوي كيس على 5 كريات بيضاء و 5 كريات سوداء متماثلة لا نفرق بينها باللمس .
 نسحب من الكيس n كرية على التوالي مع الإرجاع حيث n عدد طبيعي ($n \geq 2$) .

- نعتبر الحوادث A : " نتحصل على كريات من اللونين " B : " نتحصل على كرية بيضاء على الأكثر " C : " نتحصل على كريات من نفس اللون " D : " نتحصل على كرية بيضاء واحدة فقط "

- (1) أ) أحسب إحتمال الحادثتين C و D .
 ب) بيّن أن : $P(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$ ، $P(A \cap B) = \frac{n}{2^n}$ و $P(B) = \frac{n+1}{2^n}$.
 (2) بيّن أن : $[P(A \cap B) = P(A) \times P(B)]$ يكافئ $[2^{n-1} = n+1]$.
 (3) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \geq 2}$ المعرفة بـ : من أجل $n \geq 2$ يكون $u_n = 2^{n-1} - (n+1)$.
 أ) أحسب كل من : u_2 ، u_3 و u_4 .
 ب) بيّن أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 2}$ متزايدة تماما .
 (4) إستنتج قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون الحادثتان A و B مستقلتان .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
- (1) S تحويل نقطي يحول $M(z)$ إلى $M'(z')$ بحيث : $z' = -(\sqrt{3} + i)z - 1 + (1 + \sqrt{3})i$.
- أ) عيّن صورة النقطة Ω ذات اللاحقة i بالتحويل S . ماذا تستنتج ؟ .
- ب) ما طبيعة التحويل S ؟ . عيّن عناصره المميزة .
- (2) نعرّف متتالية النقط (A_n) المعرفة بـ :
$$\begin{cases} A_0 \left(z_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + i \frac{3}{4} \right) \\ A_{n+1} = S(A_n) \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
 نرمز إلى لائحة A_n بالرمز z_n .
- أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإنّ : $z_n - i = 2^n e^{i \left(\frac{7n\pi}{6} \right)} (z_0 - i)$.
- ب) إستنتج أنّه يوجد تشابه مباشر مركزه Ω و يحول A_0 إلى A_n يطلب تعيين نسبته و زاوية له .
- ج) عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية n التي من أجلها تكون النقط : Ω ، A_0 و A_n على استقامة واحدة .
- (3) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = \Omega A_0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \Omega A_n$.
- أ) برهن أنّ (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول و أساسها .
- ب) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_3 + u_6 + \dots + u_{3n}$ ثمّ أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

- لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
- $$f(x) = \begin{cases} (1-x)e^x & ; \quad x < 1 \\ (x-1) + \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$$
- (1) (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ الوحدة $1cm$.
- I) (1) نقبل باستمرارية الدالة f عند $x_0 = 1$
- أ) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يسار x_0 .
- ب) بيّن أنّ : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3}{2}$ ، ماذا تستنتج ؟ فسّر النتائج هندسياً .
- (2) أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (3) أ) بيّن أنّ المنحني (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له .
- ب) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكل جدول تغيّراتها .
- ج) أنشئ المنحني (C_f) بدقة .
- (4) ناقش بيانها و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x) = m(x-1)$.

(II) نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية (E) $y' - y = (-2x + 1)e^x$ و لتكن الدالة g حل لها .

(1) أ) يبين أن كل دالة φ من الشكل : $\varphi(x) = e^{-x} g(x)$ تحقق $\varphi'(x) = -2x + 1$ على $\mathbb{R}$.

ب) إستنتج حلا للمعادلة (E) الذي يأخذ القيمة 1 من أجل $x = 0$.

(2) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نعتبر المتتالية (I_n) المعرفة بـ : $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$.

أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب I_n و فسر هندسيا .

ب) أوجد علاقة تراجعية تربط بين I_n و I_{n+1} .

ج) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$: $I_n = e - 1 - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!}$.

(3) يبين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{(n+1)!} \leq I_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$ ثم استنتج : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!}$.

إنتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

يحتوي الموضوع الثاني على 03 صفحات (من الصفحة 4 إلى الصفحة 6)

التمرين الأول: (04 نقاط)

- ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
- نعتبر النقطتين : $A\left(\frac{2}{3}; -3; 2\right)$ و $B\left(-\frac{4}{3}; 0; -4\right)$ و لتكن I منتصف القطعة $[AB]$. (S) سطح الكرة التي قطرها $[AB]$
- (1) أ) أحسب إحداثيات النقطة E مرجح النقطتين المتقلبتين $(A; 2)$ و $(B; 1)$.
- ب) أثبت أن مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 3\|\overrightarrow{MO}\|$ هي مستوي (P) يطلب إعطاء معادلة ديكارتية له .
- (2) أ) أحسب المسافة بين I و المستوي (P) .
- ب) أثبت أن (P) يقطع (S) وفق دائرة (C) معادلتها في المستوي (P) : $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (z + 1)^2 = 12$.
- ج) إستنتج إحداثيات النقطة J مركز الدائرة (C) و نصف قطرها r .
- (3) لتكن $F\left(\sqrt{3} - \frac{1}{3}; -1; 2\right)$ نقطة من الدائرة (C) .
- أ) عيّن تمثيلاً و سيطياً للمستقيم (T) الذي يمر (C) و (S) في النقطة F .
- ب) عيّن إحداثيات النقطة K من المماس (T) حتى يكون حجم رباعي الوجوه $KIJF$ يساوي $\sqrt{3} uv$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- (1) N عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس 8 على الشكل $N = \overline{a740}$ و يكتب في نظام التعداد ذي الأساس 9 على الشكل $N = \overline{26b0}$ حيث a و b عدنان طبيعيان غير معدومين .
- أ) عيّن قيمتي العددين الطبيعيين a و b حتى يقبل N القسمة على 72 .
- ب) إستنتج كتابة العدد الطبيعي N في النظام العشري .
- ج) تحقق أن : $512a - 9b = 1464$.
- (2) نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y التالية : (1) $512x - 3y = 1464$.
- أ) حل المعادلة (1) .
- ب) ما هي القيم الممكنة لـ $PGCD(x; y)$ ؟
- ج) أوجد حلول المعادلة (1) التي تحقق : $PGCD(x; y) = 488$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

لتكن (z_n) متتالية أعداد مركبة معرفة بـ : $\begin{cases} z_0 = e^{i\theta} & ; \theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\\ z_{n+1} = z_n + |z_n| \end{cases}$.

(1) بيّن أنّ : $e^{i\theta} + 1 = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

(2) نعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_n = \arg(z_n)$ حيث : $u_n \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

• بيّن أنّ (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثمّ أكتب u_n بدلالة n و θ .

(3) نعتبر (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = z_n - \overline{z_n}$.
أ) أكتب v_{n+1} بدلالة v_n . ماذا تستنتج ؟

ب) بيّن أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $|z_n| \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \sin \theta$.

(4) أحسب المجموع : $S_n = |z_0| + |z_1| + \dots + |z_{n-1}|$.

(5) إستنتج أنّ : $\cotang\left(\frac{\theta}{2^n}\right) - \cotang(\theta) = \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \dots + \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$ و ذلك من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

(I) n عدد طبيعي غير معدوم ، نعتبر الدالة المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ : $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{(1+x)^n}$.

(C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ وحدته $1cm$.

(1) أ) أحسب نهايات الدالة f_n عند حدود مجال التعريف .

ب) أحسب $f'_n(x)$ و ادرس إشارتها .

ج) أنشئ جدول تغيرات الدالة f_n .

(2) بيّن أنّ جميع المنحنيات (C_n) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها .

(3) أ) أدرس حسب قيم العدد الحقيقي x الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) .

ب) أرسم بدقة و في نفس المعلم المنحنيين (C_1) و (C_2) .

(II) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نعتبر المتتالية $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة بـ : $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

(1) أكتب $f'_n(x)$ بدلالة $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$.

(2) أ) بيّن أنّ المتتالية $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متناقصة .

ب) إستنتج أنّ المتتالية $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة .

(3) أ) بَيِّنْ أَنَّهُ مِنْ أَجْلِ كُلِّ $n \in \mathbb{N}^*$ وَ $0 \leq x \leq 1$ لَدِينَا : $\frac{e^{-1}}{(1+x)^n} \leq f_n(x) \leq \frac{1}{(1+x)^n}$.

ب) إِسْتَنْتِجْ أَنَّهُ مِنْ أَجْلِ كُلِّ $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ لَدِينَا : $\frac{e^{-1}}{n-1} \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right] \leq I_n \leq \frac{1}{n-1} \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right]$.

ج) أَحْسِبْ $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

(4) أ) إِعْتَمَادًا عَلَى السُّؤَالِ (1/II) بَيِّنْ أَنَّ : $I_n + nI_{n+1} = 1 - \frac{e^{-1}}{2^n}$.

ب) إِسْتَنْتِجْ : $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$.

ج) أَحْسِبْ بِـ cm^2 مَسَاحَةَ الْحِيزِ الْمُسْتَوِيِّ A الْمَحْدَدِ بِالْمُنْحَنِيِّينَ (C_1) وَ (C_2) وَ الْمُسْتَقِيمَيْنِ $x=0$ وَ $x=1$.

إنتهى الموضوع الثاني

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتين : الموضوع الأول

التمرين الأول : (04.5 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 + 4z\cos\theta + 4 = 0$: (E_θ) حيث $\theta \in]0, \pi[$.

1) أثبت أنه إذا كان α حل للمعادلة (E_θ) فإن $\bar{\alpha}$ هو كذلك حلالها.

2) نضع : $z_1 = -2\cos\theta + 2i\sin\theta$ و $z_2 = -2\cos\theta - 2i\sin\theta$.

أ. تحقق أن z_1 و z_2 هما حلين للمعادلة (E_θ) .

ب. أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسّي.

ج. استنتج قيمة θ التي من أجلها يكون OM_1M_2 مثلثا قائما في O حيث M_1 و M_2 نقطتان من المستوي لواحتهما z_1 و z_2 على الترتيب

3) عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z لما θ تلمس المجال $[-\pi; \pi]$ و k يلمس المجال $[0; 2]$ حيث : $z = ke^{i\theta} + 3$.

4) نعتبر $\theta \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ والنقط A, B, C لواحتهما على الترتيب z_1, z_2 و 2

أ. تحقق أن $\frac{z_2 - 2}{z_1 - 2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ واستنتج طبيعة المثلث ABC .

ب. عيّن مركز ونصف قطر الدائرة (Φ) المحيطة بالمثلث ABC .

5) نعتبر التحويل النقطي S في المستوي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث : $z' = iz + 3$.

أ. عيّن طبيعة التحويل S وعناصره المميزة.

ب. عيّن (Φ') صورة الدائرة (Φ) بالتحويل S ماذا تستنتج؟

التمرين الثاني : (04 نقاط)

إناء U_1 و U_2 يحتوي على ثلاث كرات بيضاء و كرتان سوداوان

و U_2 يحتوي على كرتان بيضاوان و ثلاث كرات سوداء.

نسحب كرتان دفعة واحدة من كل منهما

(علما أن الكرات متجانسة في اللمس) فنحصل بذلك على أربع كرات.

1. نهتم بعدد الكرات البيضاء المسحوبة من الإناء U_1 و عدد الكرات البيضاء المسحوبة من الإناء U_2

• بين أن احتمال سحب كرتين بيضاوين من الإناء U_1 هو $p_2 = 0,3$ و من الإناء U_2 هو $p'_2 = 0,1$.

• شكل الشجرة المثقلة المناسبة.

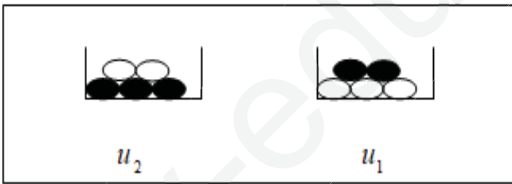
• برهن أن احتمال العادّة E "ضمن الكرات المسحوبة يوجد بالضبط كرتان بيضاوان" هو : $0,46$.

2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات البيضاء المحصل عليها.

أ. حدد قانون الاحتمال لـ X .

ب. اللاعب يدفع $2,50DA$ قبل إجراء السحب. و يكسب $1DA$ لكل كرة بيضاء مسحوبة. هل اللعبة مريحة له؟

3. احسب احتمال الحصول على كرة بيضاء فقط من الإناء U_2 علما أنه حصل على كرتين بيضاوين.



التمرين الثالث : (04.5 نقاط)

(U_n) متتالية معرفة بـ: $U_0 = 0$ ، $U_1 = 1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+2} = 5U_{n+1} - 4U_n$.

1. احسب U_2 و U_3 .

2. برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أن: $U_{n+1} = 4U_n + 1$.

- تحقق أن: U_n عدد طبيعي، ثم استنتج أن: U_n و U_{n+1} أوليان بينهما.

3. (V_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $V_n = U_n + \frac{1}{3}$.

- بين أن المتتالية (V_n) هندسية، عين أساسها وحدها الأول، ثم اكتب V_n و U_n بدلالة n .

4. أ) احسب $PGCD((4^6 - 1), (4^5 - 1))$ ،

ب) عين من أجل كل عدد طبيعي n : $PGCD((4^{n+1} - 1), (4^n - 1))$

5. أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 4^n على 7.

ب) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{3n}$.

ج) عين قيم العدد الطبيعي n حيث العدد $9S_n + 4^n$ يقبل القسمة على 7.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

الفرع الأول :

1] نعتبر الدالة g_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g_n(x) = n(x+1) + e^x$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم

أ. ادرس تغيرات الدالة g_n وأكتب جدول تغيراتها .

ب. برهن أن المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل على $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α_n ثم تحقق أن $-2 < \alpha_n < -1$

ج. استنتج حسب قيم x إشارة $g_n(x)$

2] نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث: $f_n(x) = \frac{x e^x}{n + e^x}$ ونسمي (C_n) منحنىها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم

المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

أ. احسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f_n(x) - x]$ وفسر النتائج بيانيا

ب. برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $f'_n(x) = \frac{e^x \cdot g_n(n)}{(n + e^x)^2}$

ج. بين أن: $f_n(\alpha_n) = 1 + \alpha_n$ ثم أكتب جدول تغيرات الدالة f_n

3] أدرس وضعية المنحنى (C_n) بالنسبة للمستقيم (D) الذي معادلته: $y = x$

ب. ادرس وضعية المنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) ثم أنشئ المنحنيين (C_1) و (C_2)

الفرع الثاني :

نعتبر التكاملين: $I = \int_{-1}^0 x e^x dx$ و $U_n = \int_{-1}^0 f_n(x) dx$

1] احسب: I ثم برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-1, 0]$: $\frac{x e^x}{n} \leq \frac{x e^x}{n + e^x} \leq \frac{x e^x}{n + 1}$

2] بين أن المتتالية (U_n) متقاربة و حدد نهايتها

3] نضع: $V_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$

أ. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي k : $\int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k+1}$

ب. استنتج ان $\frac{1}{1+1} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{3+1} + \dots + \frac{1}{n+1} \geq \ln(n+2) - \ln 2$

ج. برهن إذن أن: $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = -\infty$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

- I. نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة التالية: (E) $2019x - 1440y = 3177$
 1) بين أن المعادلة (E) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$ ، ثم استنتج أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة: $673x - 480y = 1059$
 2) أجد حلاً خاصاً $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E) حيث: $x_0^2 + 480y_0 = 969$ مع $x_0 \geq 0$.
 بـ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

3) عين قيم العدد الصحيح λ التي تحقق الجملة (S) حيث $(S) \dots \begin{cases} \lambda \equiv -59 [673] \\ \lambda \equiv 1000 [480] \end{cases}$.

- II. 1. أدرس تبعاً لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n و 5^n على 7 .
 بـ استنتج باقي القسمة للعدد: $2020^{2019} + 1440^{1439} - 2019^{2018}$ على 7 .
 جـ عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $3 \times 2019^n - 2 \times 1440^n + 2020^{2019} \equiv 0 [7]$
 2. $N = \underbrace{1 \dots 1}_{2018 \text{ fois}} 10$ كما يلي: $N = 10^{2018} + 10^{2017} + \dots + 10^1 + 10^0$
 - بين أن العدد الطبيعي $N - 5$ مضاعف للعدد 7 .

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

- نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ حيث: $P(z) = z^3 - 7z^2 + 25z - 39$
 1) أـ عين العددين الحقيقيين α و β حيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z - 3)(z^2 + \alpha z + \beta)$
 بـ جد في $\mathbb{C}$ مجموعة حلول المعادلة: $P(z) = 0$
 2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. نعتبر النقط A, B, C و D ذات اللوح: $z_A = i$ ، $z_D = -1 - 2i$ و $z_C = 2 - 3i$ ، $z_B = 3$
 - احسب العدد $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ ثم استنتج نوع المثلث ABC
 3) ليكن التحويل النقطي S الذي يحول النقطة $M(z)$ إلى النقطة $M'(z')$ حيث: $z' = (1 - i)z + b$
 أـ عين العدد المركب b حتى تكون النقطة A مركز التحويل النقطي S
 بـ ما طبيعة التحويل S ؟ مبيناً عناصره المميزة.
 جـ استنتج طبيعة التحويل $S \circ S$ مع ذكر عناصره المميزة.
 4) ليكن $z_0 = 1 + i$ لاحقة النقطة A_0 و z_n لاحقة A_n ومن أجل كل عدد طبيعي n : $A_{n+1} = S(A_n)$
 5) أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n = (1 - i)^n + i$
 بـ نعرف المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = |z_{n+1} - z_n|$ - جد عبارة الحد العام u_n بدلالة n ثم
 استنتج أنها هندسية أساسها $\sqrt{2}$ ، ثم احسب الطول: $L = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{19}A_{20}$

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

- نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقط $A(3, 2, 1)$ و $B(4, 3, 2)$ و $C(3, 1, -1)$ و $E(-1, 3, 1)$
 و نعتبر المستقيم (Δ) الموجه بالشعاع $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ و يشمل النقطة E
 1) بين أن المستقيمين (Δ) و (AB) غير متوازيين
 2) أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) و استنتج أن النقط A, B, C ليست في إستقامة
 3) أـ برهن أن المعادلة الديكارتيّة للمستوي (ABC) هي: $x - 2y + z = 0$
 بـ استنتج أن المستقيم (Δ) غير محتوي في المستوي (ABC)

ج- نعتبر النقطة $M_t \left(\frac{1}{2}, \sin t \times \cos t, 0 \right)$ حيث $t \in \mathbb{R}$ جد قيم العدد الحقيقي t بحيث يكون $M_t \in (ABC)$

(4) أ- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) واستنتج إحداثيات النقطة H نقطة تقاطع (Δ) و (ABC)

ب- استنتج أن (Δ) و (AB) ليسا من نفس المستوي

(5) نعتبر (P_m) مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء التي تحقق : $(m-1)x + (2m-6)y + (3-m)z + m-2 = 0$

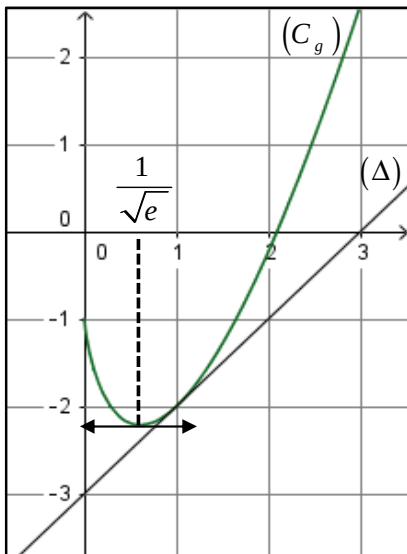
أ- برهن أنه لأجل كل عدد حقيقي m المجموعة (P_m) هي مستوي، ثم برهن أن المستوي (ABC) ينتمي إلى المستويات (P_m)

ب- برهن أن المستويات (P_m) تشمل مستقيما ثابتا (D) يطلب تعيين نقطة منه وشعاع توجيهه

التمرين الرابع : (07 نقاط)

أ- الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = 2x \ln x - x - 1$.

المنحنى (C_g) المقابل هو التمثيل البياني للدالة g في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



المنحنى (C_g) يقبل مماسا موازيا لمحور الفواصل عند النقطة التي فاصلتها $\frac{1}{\sqrt{e}}$

و (Δ) هو المماس لـ (C_g) في النقطة التي فاصلتها $x = 1$.

1- بقراءة بيانية: أ- حدد $g'(1)$; $g(1)$; $g'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ ثم عين معادلة للمماس (Δ) .

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة g .

2- أ- علل وجود عدد حقيقي α حيث $2 < \alpha < 2,1$ و يحقق $g(\alpha) = 0$.

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

II- الدالة معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \begin{cases} x^2(\ln x - 1) - x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1- أ- بين أن الدالة f مستمرة عند الصفر من اليمين.

ب/ بين أن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -1$ ، ماذا يمكن أن تستنتج؟

ج/ أكتب معادلة نصف المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة O من اليمين.

2- أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. ب/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ ، $f'(x) = g(x)$.

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

3- بين أن: $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + \alpha}{2}\right)$ ، ثم استنتج حصر الـ $f(\alpha)$.

4- ليكن (D) المماس الذي معادلته $y = -x$.

أ- ادرس الوضعية النسبية بين (C_f) و (D) . ب/ انشئ (D) و (C_f) . نأخذ $f(3,55) \approx 0$.

5- دالة معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $F(x) = \frac{x^3}{9}(3 \ln x - 4)$.

أ- احسب $F'(x)$ ، ثم استنتج دالة أصلية للدالة $h: x \mapsto f(x) + x$ على المجال $]0; +\infty[$.

ب/ A هي مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (D) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = e$.

أ- بين أن: $A = \frac{e^3 - 4}{9}$ بعد تمثيلها على الرسم. (يرمز $u.a$ إلى وحدة المساحة).

انتهى الموضوع الثاني

©استاذ المادة يتمنى لكم النجاح في شهادة البكالوريا

على المترشح اختيار احد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

من اجل العدد الطبيعي n نعرف المعادلة (E_n) التالية: $645x - 195y = 13n - 54n - 1$ ، حيث x و y عددين صحيحين.

1. أ) درس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 13 على 15 .

ب) عين مجموعة قيم الطبيعي n التي من اجلها العدد المعادلة (E_n) تقبل حلول.

2. تحقق ان الثنائية $(1; 3)$ حل للمعادلة (E_2) ثم حل المعادلة (E_2) .

3. عين العددين الطبيعيين α و β علما أنه في النظام ذي الأساس 6، العدد a يكتب على الشكل $\alpha\beta\alpha\beta\alpha$ ويكتب على الشكل $\beta 0444$ في النظام ذي الأساس 5.

4. الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; I; J; K)$

أ) أثبت ان مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق: $(3x - y - 12z)^2 + (x - y - 90z + 2)^2 = 0$ هي لمستقيم (Δ) . ثم اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) الذي يحوي (Δ) ويشمل النقطة $A(1; 3; 0)$.

ب) بين ان احداثيات نقط المستقيم (Δ) تحقق المعادلة (E_2) ثم استنتج مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من المستقيم (Δ) التي احداثياتها اعداد صحيحة.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin(x) dx \quad \text{كما يلي : } (u_n) \text{ متتالية عددية معرفة على } \mathbb{N}$$

1- باستعمال البرهان بالتراجع بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $\cos(n\pi) = (-1)^n$.

2- أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = (-1)^n \frac{e^{-\pi} + 1}{2} e^{-n\pi}$

ب) بين ان المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

3- من اجل العدد طبيعي n نعرف المجموع S_n كما يلي: $S_n = 1 + \frac{u_1}{u_0} + \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)^n$.

- اكتب S_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

4 - عبر بدلالة n الجداء P_n المعرف على $\mathbb{N}$ ب: $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1- ليكن العدد المركب β بحيث: $\beta = 4\sqrt{2}(1+i)$

(أ) أكتب العدد β على الشكل الأسّي والمثلثي.

(ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^3 = \beta \dots (1)$.

(ج) بين أنه إذا كان z_1, z_2, z_3 حلول المعادلة (1) فإن: $\frac{z_2 \times z_3}{(z_1)^2} = \frac{z_1 \times z_3}{(z_2)^2} = \frac{z_1 \times z_2}{(z_3)^2}$

2- لتكن النقط A, B, C, D و H التي لاحقها على الترتيب: $z_A = \alpha, z_B = e^{i2\pi} + \frac{\alpha-1}{\alpha}i$

$z_C = \alpha e^{i\frac{\pi}{2}}, z_D = -\frac{1}{\alpha}i$ و $z_H = 1 + z_D$ حيث α عدد حقيقي موجب تماماً يختلف عن 1.

(أ) تحقق أن: $z_B - z_D = \overline{z_D}(z_A - z_C)$ ثم بين أن: $iz_A \times z_D = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(z_B - z_D) \right]^{2016}$

(ب) استنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان.

(ج) بين أنه يوجد تحويل نقطي f يحول النقطة A إلى B ويحول النقطة C إلى D يطلب تعيين عناصره المميزة.

(د) بين أن المثلثين OAC و BHD متشابهان، ثم احسب مساحتهما.

3- عين مجموعة النقط (Γ) للنقط M ذات الاحقة z حيث: $\arg(\bar{z} + i\alpha) = -\arg(z_A - z_C) + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

k حيث عدد حقيقي موجب تماماً.

I. g_k دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g_k(x) = 1 + (1+kx)e^{kx}$.

1- ادرس اتجاه تغير الدالة g_k على $\mathbb{R}$ مشكلاً جدول تغيراتها.

2- استنتج إشارة $g_k(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. f_k دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_k(x) = x - 1 + xe^{kx}$.

(C_k) تمثيلها البياني في المتجانس و المتعامد المعلم في $(O; I; J)$ حيث $\|I\| = 2cm$

1- (أ) بين أن جميع المنحنيات (C_k) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثياتها.

(ب) احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x)$.

(ج) بين أن جميع المنحنيات (C_k) تقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) ثابت يطلب كتابة معادلته. ثم ادرس الوضع النسبي

للمنحني (C_k) و المستقيم (Δ) .

2- ادرس اتجاه تغير الدالة f_k على $\mathbb{R}$ مشكلا جدول تغيراتها.

3- أ) بين ان جميع المنحنيات (C_k) تقبل مماس (T) معادلته $y = 2x - 1$ عند الفاصلة x_0 يطلب تعيينها.

ب) عين احداثيات I نقطة انعطاف للمنحنيات (C_k) .

4- أ) بين ان المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0 \leq \alpha \leq 1$.

ب) بين ان المسافة بين النقطة $N(\alpha; f_1(\alpha))$ و المستقيم (Δ) تساوي $\frac{\alpha e^\alpha}{\sqrt{2}}$

5- بين انه من اجل كل عدد حقيقي x فإن: $f_k(x) + f_{-k}(-x) = -2$. ماذا تستنتج؟

6- أنشئ كل من : (Δ) ، (T) ، (C_1) و (C_{-1}) في نفس المعلم

انتهى الموضوع الأول.
بالتوفيق

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

I. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $6x + 7y = 57 \dots (E)$

II. الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; I; J; K)$

المستويات (P_m) ذي المعادلة: $(m+1)x + (m+2)y + (m+3)z - 57 = 0$ حيث $m \in \mathbb{R}$

- 1- أثبت ان جميع المستويات (P_m) تتقاطع في مستقيم (Δ) يطلب كتابة تمثيلا وسيطيا له.
- 2- ناقش حسب قيم الوسيط تقاطع المستويات (P_m) و سطح الكرة (S) ذو المعادلة: $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 6z - 15 = 0$
- 3- ليكن المستقيم (D) تقاطع المستوي (P_5) مع المستوي (O, I, J)
 (أ) بين انه توجد نقطة وحيدة من (D) احداثياتها أعداد طبيعية.
 (ب) $N(x_0; y_0; z_0)$ نقطة من المستوي (P_5) حيث x_0, y_0, z_0 أعداد طبيعية. بين ان $y_0 = 2k + 1$ حيث $k \in \mathbb{N}$
 (ج) عين باقي قسمة العدد $(k + z_0)$ على 3
 (د) p عدد طبيعي حيث : $3p = k + z_0 - 1$ بين ان : $x_0 + k + 4p = 7$ ثم استنتج القيم الممكنة للعدد p .
 (و) استنتج كل النقط N من المستوي (P_5) ذات الإحداثيات الطبيعية.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

كيس U_1 يحتوي على n كرة بيضاء $(n$ عدد طبيعي غير معدوم) و 3 كرات سوداء .

كيس U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين و كرة سوداء.

كرات الكيسين متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس.

نعرف اللعبة التالية :نسحب عشوائيا من الكيس U_1 كرة واحدة ونضعها في الكيس U_2 ثم نسحب عشوائيا من الكيس U_2 كرة واحدة ونضعها في الكيس U_1 .

I. 1- احسب احتمال ان يسترجع الكيسين كرتاهم الابتدائية.

2- ما هو احتمال ان تكون الكرة بيضاء واحدة فقط في الكيس U_2 .

II. نضيف الى اللعبة مايلي:

اللاعب يدفع 200DA قبل بداية اللعبة

اللاعب يتحصل على $20 \times n$ DA اذا كان في الكيس U_2 كرة بيضاء واحدة.

اللاعب يتحصل على $10 \times n$ DA اذا كان في الكيس U_2 كرتين بيضاوين .

اللاعب لا يتحصل على مبلغ اذا كان في الكيس U_2 3 كرات بيضاء.

X المتغير العشوائي الذي يرفق بقيمة المبلغ المتحصل عليه (ربح أو خسارة)

1- اكتب قانون احتمال X . ثم احسب $E(X)$.

2- ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ربح وخسارة اللاعب .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المستوى المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \bar{u}; \bar{v})$.

I. m عدد حقيقي غير معدوم.

1- نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E): z^3 - (4 + mi)z^2 + (13 + 4mi)z - 13mi = 0$

بين ان المعادلة (E) تقبل حلا تخيلا صرفا. ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

2- لتكن النقطتان A و B التي لاحقتها على الترتيب: $z_A = mi$ و $z_B = 2 + 3i$

أ) بين ان لاحقة C صورة B بالتشابه S الذي مركزه A ونسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ هي: $z_C = \left(\frac{m-1}{2}\right) + i\left(\frac{5+m}{2}\right)$

ب) عين z_E لاحقة النقطة E صورة D لاحقتها $z_D = 5$ بالدوران R الذي مركزه I منتصف $[AB]$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

ج) اكتب العدد $\frac{z_D - z_A}{z_E - z_C}$ على الشكل الأسّي. ثم فسر النتيجة هندسيا

II. نضع: $m = 1$

1- نرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z حيث $Z \neq z_A$ النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث $Z' = \frac{\bar{Z}(Z-i)}{\bar{Z}+i}$

أ) أثبت انه اذا كان: $Z \neq 0$ و $Z' \neq 0$ فإن: $\begin{cases} |Z'| = |Z| \\ \arg(Z') \equiv 2\arg(Z-i) - \arg(Z) [2\pi] \end{cases}$

ب) بين انه اذا كان: $|Z| = 1$ فإن: $Z' = -i$

2- عين مجموعة النقط (Γ) للنقط M حيث Z' تخيلي صرف.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

n عدد طبيعي غير معدوم.

$$f_n \text{ دالة معرفة على } [0; +\infty[\text{ بـ: } \begin{cases} f_n(x) = x(1 - \ln x)^n; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C_n) تمثيلها البياني في المتجانس و المتعامد المعلم في $(O; I; J)$ حيث $\|i\| = 2cm$

I. 1- أ) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على يمين 0.

ب) احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$.

2 - ادرس اتجاه تغير الدالتين f_1 و f_2 على $\mathbb{R}$ مشكلا جدول تغيراتها.

3- أ) بين ان للمنحنى (C_2) نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيها.

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) ثم انشئ كل (C_1) و (C_2) من نفس المعلم.

II. نعتبر الدالة F المعرفة على $]-\infty; 0]$ كما يلي : $F(x) = \int_{e^x}^1 \frac{f_1(t)}{1+t^2} dt$

1- أ) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 0]$ فإن : $F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{(1+e^{2x})}$
 ب) استنتج اتجاه تغير الدالة F على $]-\infty; 0]$.

2- أ) بين انه من اجل كل $x \leq 0$ فإن : $\frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \leq F(x) \leq \frac{1}{(1+e^{2x})} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt$

ب) بين انه $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\int_{e^x}^1 f_1(t) dt \right) = \frac{3}{4}$

III. (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n = \int_1^e f_n(x) dx$

1- أ) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n \geq 0$.

ب) ادرس اشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ على المجال $[1; e]$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) . ماذا تستنتج؟

2- أ) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{(n+1)}{2} u_n$

ب) استنتج مساحة الحيز المحصور بين (C_1) و (C_2) و المستقيمين $x=1$ و $x=e$

3- بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$: $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

انتهى الموضوع الثاني.
 بالتوفيق

التمرين 01:

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

$z_D = 5 + 8i$ ، $z_C = 3 + 2i$ ، $z_B = 2 - i$ ، $z_A = 1 + i$ ، $z_\Omega = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$ ونقطة Ω و D ، C ، B ، A على التوالي.

1- أ- أكتب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي واستنتج طبيعة المثلث ABC

ب- عين طبيعة وعناصر التحويل النقطي R الذي مركزه A ويحول B إلى C

2- عين نسبة التحاكي h الذي مركزه B ويحول C إلى D

3- نضع: $S = h \circ R$

أ- تحقق أن $S(B) = D$

ب- ما هي طبيعة وعناصر التحويل S ؟

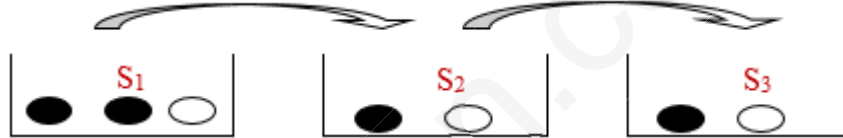
4- لتكن E ، F ، G نقط حيث: $S(D) = E$ ، $S(E) = F$ ، $S(F) = G$

أ- بين أن النقط Ω ، E و B في استقامة

ب- بين أن النقط Ω ، G و B في استقامة

التمرين 02:

لدينا n كيس S_1 ، S_2 ، $\dots$ ، S_n يحوي كل منهم على قريصات غير معروفة عند اللمس. n عدد طبيعي غير معدوم.



S_1 يحوي قريصتان سوداوان وواحدة بيضاء وكل الأكياس الأخرى تحوي قريصة سوداء وقريصة بيضاء.

نقترح دراسة تطور السحوبات المتتالية لقريصة حسب البروتوكول التالي:

■ سحب قريصة من S_1 :

■ نضعها في S_2 ثم نسحب قريصة من S_2 :

■ نضعها في S_3 و هكذا....

■ من أجل كل عدد طبيعي k حيث: $1 \leq k \leq n$ ، نرمز بـ E_k الحادثة " القريصة المسحوبة من S_k بيضاء " و $\overline{E_k}$ حادته المعاكسة.

■ احتمال الحادثة E_k هو p_k .

1- بداية العملية:

أ- مثل بشجرة السحب في S_1 ثم في S_2 .

ب- أذكر p_1 ثم أحسب p_2 .

2- علاقة بين p_k و p_{k+1} :

أ- عين $p_{E_k}(E_{k+1})$ و $p_{\overline{E_k}}(E_{k+1})$

ب- أتمم الشجرة المقابلة و التي تمثل السحوبات في الكيسين S_k و S_{k+1} ، $(1 \leq k \leq n)$.

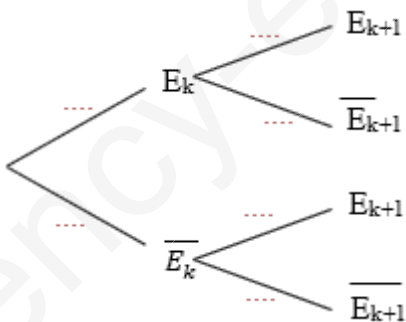
ج- استنتج أن: $p_{k+1} = \frac{1}{3} p_k + \frac{1}{3}$

3- دراسة متتالية (p_n) :

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $p_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right)$

ب- استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$

ج- ما هو التفسير العملي لهذه النتيجة؟



التمرين 03:

- نقط من الفضاء المزدود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ و $A(1;2;4)$ ، $B(-1;3;2)$ ، $C(4;-1;1)$ ، $D(-5;-1;0)$ و $G(-2;3;-1)$
- 1- أ - بين أن النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة
ب - بين أن النقط A ، B ، C و G تنتمي إلى نفس المستوي
ج - استنتج أن G مرجح للنقط A ، B و C مرفقة بمعاملات يطلب تعيينها
 - 2- أ - بين أن النقطة G هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)
ب - استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)
 - 3- أ - أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ والطولين AB و AC
ب - استنتج القيم المضبوطة لكل من $\cos \widehat{BAC}$ و $\sin \widehat{BAC}$
ج - استنتج مساحة المثلث ABC ثم أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$
 - 4- لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء حيث $4MA^2 - 6MB^2 - MC^2 = -54$
أ - عين طبيعة وعناصر (S)
ب - عين معادلتين ديكارتيتين للمستويين (P_1) و (P_2) الماسين لسطح الكرة (S) والموازيين للمستوي (ABC)

التمرين 04:

- الجزء I : f دالة معرفة على $]-\infty; 1]$ ب: $f(x) = -1 - \sqrt{1-x}$. (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 1- أ - أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
ب - أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها
 - 2- عين إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$
 - 3- أرسم (C_f) و (Δ)
- الجزء II : (u_n) المتتالية العددية المعرفة ب: $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$
- 1- مثل في الشكل السابق على محور الفواصل، الحدود u_0 ، u_1 و u_2 (دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء
 - 2- ضع تخمينا حول تغيرات (u_n) و تقاربها
 - 3- أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-3 \leq u_n \leq 0$
ب - ادرس اتجاه تغير (u_n)
ج - استنتج أن (u_n) متقاربة
 - 4- أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-3; 0]$ ، $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$
ب - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{1}{4}(u_n + 3) \leq u_{n+1} + 3 \leq \frac{1}{2}(u_n + 3)$
ج - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3 \leq u_n \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3$
د - استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين 05:

- f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{2\ln x}{x^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 1- أحسب النهايات للدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. ماذا تستنتج؟
 - 2- أدرس اتجاه تغير f ثم شكل جدول التغيرات.
 - 3- عين نقطة تقاطع (C_f) مع $(x'x)$
 - 4- أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x = 1$
 - 5- أنشئ (C_f) و (T)
 - 6- باستعمال مكاملة بالتجزئة؛ أحسب مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمتين ذات معادلات: $x = e$ و $x = 1$ ، $y = 0$
 - 7- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $f(x) = f(m)$

التمرين 06: (خاص بالقسم 3 رياضي)

1. أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين: 1440 و 276
2. ليكن x و y عددين طبيعيين غير معدومين أوليين فيما بينهما. بين أن العددين $(x+y)$ و (xy) أوليان فيما بينهما.
3. a و b عددان طبيعيين غير معدومان و m المضاعف المشترك الأصغر لهما.
أ - برهن أن: $PGCD(a+b; m) = PGCD(a; b)$ حيث $PGCD(a; b)$ هو القاسم المشترك الأكبر.
ب - أوجد كل الثنائيات $(a; b)$ التي تحقق: $a+b = 276$ و $m = 1440$

التمرين 01:

$$z_{\Omega} = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i \text{ و } z_D = 5+8i, z_C = 3+2i, z_B = 2-i, z_A = 1+i$$

1- أ - كتابة $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي:

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3+2i-1-i}{2-i-1-i} = \frac{2+i}{1-2i} = \frac{(2+i)(1+2i)}{5} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC :

$$ABC \text{ مثلث قائم ومتساوي الساقين في } A \Leftrightarrow \begin{cases} AC = AB \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ب - طبيعة وعناصر التحويل النقطي R :

$$R(B)=C \Leftrightarrow \begin{cases} AC = AB \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow C \text{ صورة } B \text{ بالدوران } R \text{ الذي مركزه } A \text{ وزاويته } \frac{\pi}{2} \text{ أي } R(B)=C$$

2 - تعيين نسبة التحاكي h :

h تحاكي مركزه B ونسبته k

$$k = 3 \Leftrightarrow 3(1+3i) = k(1+3i) \Leftrightarrow 5+8i-2+i = k(3+2i-2+i) \Leftrightarrow z_D - z_B = k(z_C - z_B) \Leftrightarrow h(C)=D$$

h تحاكي مركزه B ونسبته k = 3

3 - نضع: $S=hoR$ أ - التحقق من أن $S(B)=D$

$$S(B) = hoR(B) = h[R(B)] = h(C) = D$$

ب - طبيعة وعناصر التحويل S :

 $S=hoR$: S تشابه مباشر مركزه ω ، نسبته 3 وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$\text{لدينا: } 5 + 8i - z_{\omega} = 3i(2 - i - z_{\omega}) \Leftrightarrow z_D - z_{\omega} = 3e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_{\omega}) \Leftrightarrow S(B) = D$$

$$\omega = \Omega \Leftrightarrow z_{\omega} = \frac{-2-2i}{-1+3i} = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i = z_{\Omega} \Leftrightarrow (-1+3i)z_{\omega} = -2-2i \Leftrightarrow$$

S تشابه مباشر مركزه Ω ، نسبته 3 وزاويته $\frac{\pi}{2}$ 4 - لتكن E ، F ، G نقط حيث: $S(D)=E$ ، $S(E)=F$ ، و $S(F)=G$ أ - تبيان أن النقط Ω ، E و B في استقامية:

$$\text{لدينا: } E = S(D) = S[S(B)] = SoS(B)$$

 SoS : تشابه مباشر مركزه Ω ، ونسبته $3 \times 3 = 9$ وزاويته $2 \left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$: $SoS \Leftrightarrow$ تحاكي مركزه Ω ونسبته 9-

$$\overrightarrow{\Omega E} = -9\overrightarrow{\Omega B} \Leftrightarrow SoS(B) = E \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega B} \text{ و } \overrightarrow{\Omega E} \text{ مرتبطان خطيا} \Leftrightarrow \Omega, E \text{ و } B \text{ في استقامية}$$

ب - تبيان أن النقط Ω ، G و B في استقامية:

$$\text{لدينا: } G = S(F) = S[S(E)] = SoS[S(D)] = SoSoS[S(B)] = SoSoSoS(B)$$

 $SoSoSoS$: تشابه مباشر مركزه Ω ، ونسبته $3^4 = 81$ وزاويته $4 \left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi \equiv 0$: $SoSoSoS \Leftrightarrow$ تحاكي مركزه Ω ونسبته 81

$$\overrightarrow{\Omega G} = 81\overrightarrow{\Omega B} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega B} \text{ و } \overrightarrow{\Omega G} \text{ مرتبطان خطيا} \Leftrightarrow \Omega, E \text{ و } G \text{ في استقامية}$$

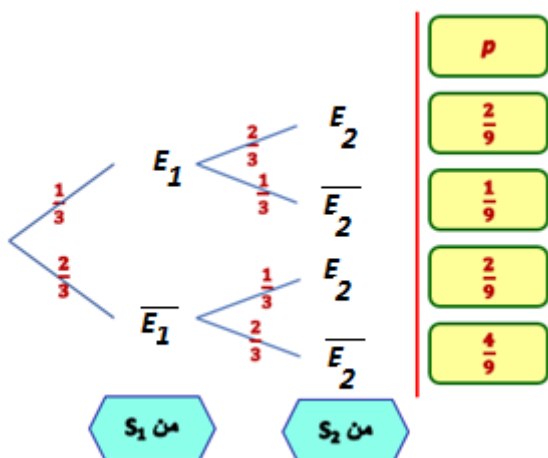
التمرين 02:

لدينا n كيس $S_1, S_2, \dots, S_n$ يحوي كل منهم على قريصات غير معروفة عند اللمس. n عدد طبيعي غير معدوم.



1 - بداية العملية:

أ - تمثيل بشجرة السحب في S_1 ، ثم في S_2 :

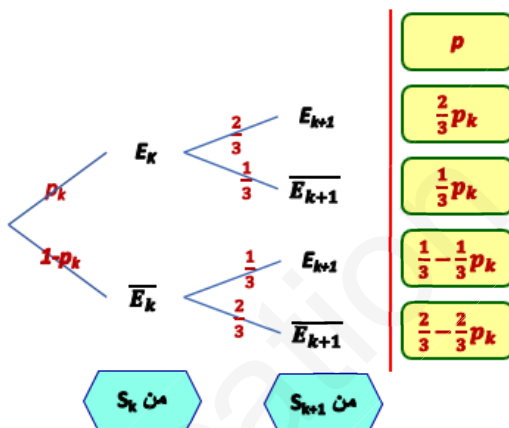


ب - أذكر p_1 ثم حساب p_2 :

$$p_1 = \frac{1}{3} \text{ و } p_2 = p(E_2) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

2- علاقة بين p_k و p_{k+1} :

أ - إتمام الشجرة:



ب - استنتاج أن: $p_{k+1} = \frac{1}{3} p_k + \frac{1}{3}$:

لدينا: $p_{E_k}(E_{k+1}) = \frac{2}{3}$ و $p_{E_k}(E_{k+1}) = \frac{1}{3}$

$$p_{k+1} = \frac{1}{3} p_k + \frac{1}{3} \text{ ومنه } p_{k+1} = p_k \times p_{E_k}(E_{k+1}) + (1-p_k) p_{E_k}(E_{k+1}) = \frac{2}{3} p_k + \frac{1}{3} (1-p_k) = \frac{1}{3} p_k + \frac{1}{3}$$

3- دراسة متتالية (p_n) :

أ - نبرهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $p_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$:

○ نتحقق من صحتها من أجل $n=1$

لدينا: $p_1 = \frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$ (صحيحة)

○ نفرض أنها صحيحة من أجل n ولنبرهن أنها صحيحة من أجل $n+1$ أي لنبرهن أن $p_{n+1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$

$$p_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \right] + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) + 1 \right] = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3^n} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$$

○ الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $p_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$

ب - استنتاج النهاية لـ p_n لما n يؤول إلى $+\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{2}$$

ج - التفسير العملي لهذه النتيجة:

عندما نعيد العملية عدد كبير من المرات بالقدر الكافي نجد فإن احتمال سحب كرة بيضاء يقترب من $\frac{1}{2}$

1- أ - تبيان أن النقط $A(1;2;4)$ ، $B(-1;3;2)$ ، $C(4;-1;1)$ ، $D(-5;-1;0)$ و $G(-2;3;-1)$ نقط من الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$
 أ - تبيان أن النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة:

$$\vec{AB}(-2; 1; -2) \quad , \quad \vec{AC}(3; -3; -3)$$

لدينا: $\frac{-2}{3} \neq \frac{1}{-3}$ $\Leftrightarrow \vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطان خطيا $\Leftrightarrow A$ ، B و C ليست على استقامة واحدة

ب - تبيان أن النقط A ، B ، C و G تنتمي إلى نفس المستوي:

$$\vec{GA}(-3; 1; -5) \quad , \quad \vec{GB}(-1; 0; -3) \quad , \quad \vec{GC}(-6; 4; -2)$$

$$\begin{cases} \beta = \frac{1}{4} \\ \alpha = \frac{3}{2} \\ -5 = -3\left(\frac{3}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = -\alpha - 6\beta \\ 1 = 4\beta \\ -5 = -3\alpha - 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \vec{GA} = \alpha \vec{GB} + \beta \vec{GC} \quad \text{حيث } \alpha \text{ و } \beta \text{ حقيقيين}$$

لدينا: $\vec{GA} = \frac{3}{2} \vec{GB} + \frac{1}{4} \vec{GC}$ $\Leftrightarrow \vec{GA}$ ، $\vec{GB}$ و $\vec{GC}$ مرتبطة خطيا $\Leftrightarrow A$ ، B ، C و G تنتمي إلى نفس المستوي

ج - استنتاج أن G مرجح للنقط A ، B و C مرفقة بمعاملات يطلب تعيينها:

$$\text{لدينا: } \vec{GA} = \frac{3}{2} \vec{GB} + \frac{1}{4} \vec{GC} \Leftrightarrow 4\vec{GA} - 6\vec{GB} - \vec{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow G = \{(A, 4); (B, -6); (C, -1)\} \quad (1) \dots$$

2- أ - تبيان أن النقطة G هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) :

$$GE(ABC) \Leftrightarrow (1)$$

$$\vec{DG}(3; 4; -1)$$

$$\text{لدينا: } \vec{DG}(3; 4; -1) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{DG} \perp \vec{AB} \\ \vec{DG} \perp \vec{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{DG} \cdot \vec{AB} = -6 + 4 + 2 = 0 \\ \vec{DG} \cdot \vec{AC} = 9 - 12 + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{لدينا: } G \Leftrightarrow \begin{cases} (DG) \perp (ABC) \\ G \in (ABC) \end{cases} \quad \text{حيث } G \text{ هي المسقط العمودي للنقطة } D \text{ على المستوي } (ABC)$$

ب - استنتاج معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) :

$$(ABC): 3x+4y-z+d=0 \Leftrightarrow (ABC) \text{ ناظمي للمستوي } \vec{DG}(3; 4; -1)$$

$$(ABC): 3x+4y-z-7=0 \text{ ومنه } d=-7 \Leftrightarrow 3+8-4+d=0 \Leftrightarrow A \in (ABC)$$

3- أ - حساب الجداء السلمي $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ والطولين AB و AC :

$$AC = 3\sqrt{3} \quad , \quad AB = 3 \quad , \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -6 - 3 + 6 = -3$$

ب - استنتاج القيم المضبوطة لكل من $\cos \widehat{BAC}$ و $\sin \widehat{BAC}$:

$$\text{لدينا: } \cos \widehat{BAC} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC} = \frac{-3}{9\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$

$$\sin \widehat{BAC} = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{BAC}} = \sqrt{1 - \frac{1}{27}} = \sqrt{\frac{26}{27}} = \frac{\sqrt{78}}{9} \quad \text{وبالتالي}$$

ج - استنتاج مساحة المثلث ABC ثم أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$:

$$S_{ABC} = \frac{AB \times AC \times \sin \widehat{BAC}}{2} = \frac{9\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{78}}{9}}{2} = \frac{3\sqrt{26}}{2} \text{ u. a.}$$

$$\text{لدينا: } DG = \sqrt{26} \quad \text{وبالتالي} \quad V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times S_{ABC} \times DG = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{26}}{2} \times \sqrt{26} = 13 \text{ u. v.}$$

4- لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء حيث $4MA^2 - 6MB^2 - MC^2 = -54$

أ - تعيين طبيعة وعناصر (S) :

$$4\vec{MA}^2 - 6\vec{MB}^2 - \vec{MC}^2 = -54 \Leftrightarrow 4MA^2 - 6MB^2 - MC^2 = -54 \Leftrightarrow M \in (S)$$

$$4(\vec{MG} + \vec{GA})^2 - 6(\vec{MG} + \vec{GB})^2 - (\vec{MG} + \vec{GC})^2 = -54 \Leftrightarrow$$

$$-3MG^2 + 4GA^2 - 6GB^2 - GC^2 = -54 \Leftrightarrow$$

$$GC^2 = 56 \quad , \quad GB^2 = 10 \quad , \quad GA^2 = 35$$

$$MG^2 = 26 \Leftrightarrow -3MG^2 + 140 - 60 - 56 = -54 \Leftrightarrow M \in (S)$$

(S) سطح كرة مركزه G ونصف قطره $R = \sqrt{26}$

ب - تعيين معادلتين ديكرتيتين للمستويين (P_1) و (P_2) المماسين لسطح الكرة (S) والموازيين للمستوي (ABC)

$$(P): 3x+4y-z+d=0 \quad \text{وبالتالي} \quad (P) \text{ هو ناظمي للمستوي } (ABC) \Leftrightarrow \vec{DG}(3; 4; -1) \Leftrightarrow (P) \parallel (ABC)$$

$$(P) \text{ مماس لسطح الكرة } (S) \Leftrightarrow d(G; (P)) = \sqrt{26} \Leftrightarrow \frac{|7+d|}{\sqrt{26}} = \sqrt{26} \Leftrightarrow d = -33 \text{ أو } d = 19$$

$$\text{ومنه } (P_1): 3x+4y-z+19=0 \text{ و } (P_2): 3x+4y-z-33=0$$

الجزء I : f دالة معرفة على $]-\infty; 1]$ بـ : $f(x) = -1 - \sqrt{1-x}$. (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$
 1- أ- حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب - دراسة اتجاه تغير الدالة f

f تقبل الاشتقاق على $]-\infty; 1[$ و $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} > 0 \Leftrightarrow f$ متزايدة تماما على $]-\infty; 1]$

جدول تغيرات f : $f(1) = -1$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	-1	$+\infty$

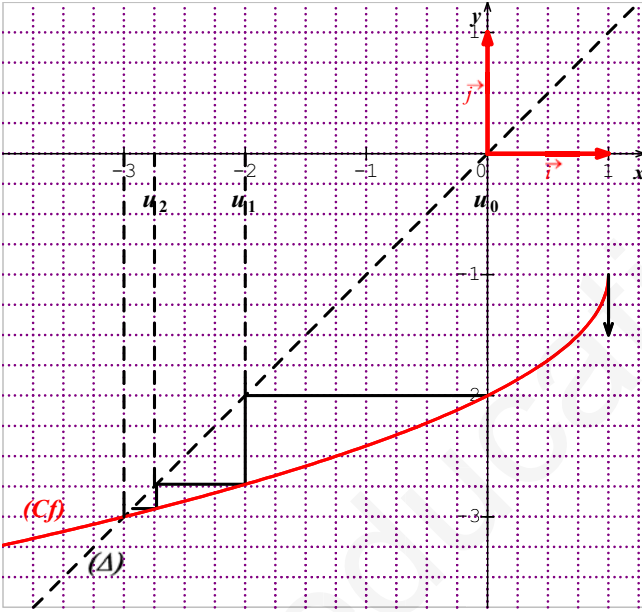
2 - تعيين إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ x^2 + 3x = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 1 \geq 0 \\ 1 - x = x^2 + 2x + 1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x} = -x - 1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - \sqrt{1-x} = x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ هي $(-3; -3)$

3 - رسم (C_f) و (Δ)



$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) = -1 - \sqrt{1-u_n} \end{cases} \text{ الجزء I}$$

2 - تخمين حول تغيرات (u_n) وتقاربها:

(u_n) متناقصة تماما

(u_n) متقاربة وتقارب 3-

3 - أ - البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-3 \leq u_n \leq 0$

- نتحقق من أنها صحيحة من أجل $n = 0$

لدينا: $u_0 = 0 \in [-3; 0]$ (صحيحة)

- نفرض أنها صحيحة من أجل n أي نفرض أن $-3 \leq u_n \leq 0$

- نبرهن أنها صحيحة من أجل $n+1$ أي نبرهن أن $-3 \leq u_{n+1} \leq 0$

لدينا: $-3 \leq u_n \leq 0 \Leftrightarrow f(-3) \leq f(u_n) \leq f(0)$

(لأن f متزايدة على $[-3; 0]$)

$$-3 \leq u_{n+1} \leq -2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$-3 \leq u_{n+1} \leq 0 \Leftrightarrow \text{(صحيحة)}$$

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n : $-3 \leq u_n \leq 0$

ب - دراسة اتجاه تغير (u_n)

(C_f) يقع تحت (Δ) على $[-3; 0] \Leftrightarrow (f(x) \leq x \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 0)$

لدينا: $\forall n \in \mathbb{N}; f(u_n) \leq u_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; -3 \leq u_n \leq 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} \leq u_n \Leftrightarrow$$

$$(u_n) \text{ متناقصة تماما} \Leftrightarrow$$

ج - استنتاج أن (u_n) متقاربة

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}; -3 \leq u_n \leq 0 \\ (u_n) \text{ متناقصة تماما} \\ f(-3) = -3 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -3 \text{ أي } (u_n) \text{ متقاربة وتقارب } -3 \Leftrightarrow$$

4 - أ - تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-3; 0]$ ، $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \leq 2\sqrt{1-x} \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{1-x} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 1-x \leq 4 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \text{من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من } [-3; 0] , \frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$$

ب - استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{1}{4}(u_n + 3) \leq u_{n+1} + 3 \leq \frac{1}{2}(u_n + 3)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}; \int_{-3}^{u_n} \frac{1}{4} dx \leq \int_{-3}^{u_n} f'(x) dx \leq \int_{-3}^{u_n} \frac{1}{2} dx \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in [-3; 0]; \frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}; -3 \leq u_n \leq 0 \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; \frac{1}{4}(u_n + 3) \leq [f(x)]_{-3}^{u_n} \leq \frac{1}{2}(u_n + 3) \Leftrightarrow$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; \frac{1}{4}(u_n + 3) \leq f(u_n) - f(-3) \leq \frac{1}{2}(u_n + 3) \Leftrightarrow$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; \frac{1}{4}(u_n + 3) \leq u_{n+1} + 3 \leq \frac{1}{2}(u_n + 3) \Leftrightarrow$$

ج - استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3 \leq u_n \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3$:

من السؤال السابق نجد:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(u_0 + 3) \leq u_1 + 3 \leq \frac{1}{2}(u_0 + 3) \\ \frac{1}{4}(u_1 + 3) \leq u_2 + 3 \leq \frac{1}{2}(u_1 + 3) \\ \frac{1}{4}(u_2 + 3) \leq u_3 + 3 \leq \frac{1}{2}(u_2 + 3) \\ \dots \dots \dots \\ \frac{1}{4}(u_{n-1} + 3) \leq u_n + 3 \leq \frac{1}{2}(u_{n-1} + 3) \end{cases}$$

بالضرب نجد:

$$\forall n \in \mathbb{N}; 3\left(\frac{1}{4}\right)^n \leq u_n + 3 \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; \left(\frac{1}{4}\right)^n (u_0 + 3) \leq u_n + 3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 + 3)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; 3\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3 \leq u_n \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3 \Leftrightarrow$$

د - استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}; 3\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3 \leq u_n \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[3\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3 \right] = -3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3 \right] = -3 \end{cases} \quad \text{لدينا:}$$

التمرين 05:

f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{2\ln x}{x^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- حساب النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

الاستنتاج: $x = 0$ و $y = 0$ معادلتين لمقاربين للمنحنى (C_f)

2- دراسة اتجاه تغير f :

f' تقبل الاشتقاق على $]0; +\infty[$ و $f'(x) = \frac{2x-4x\ln x}{x^4} = \frac{2-4\ln x}{x^3}$

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-

f متزايدة تماما على $]0; \sqrt{e}]$ و متناقصة تماما على $[\sqrt{e}; +\infty[$
جدول التغيرات:

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$\frac{1}{e}$	0

3- نقطة تقاطع (C_f) مع $(x'x)$:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\ln x}{x^2} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

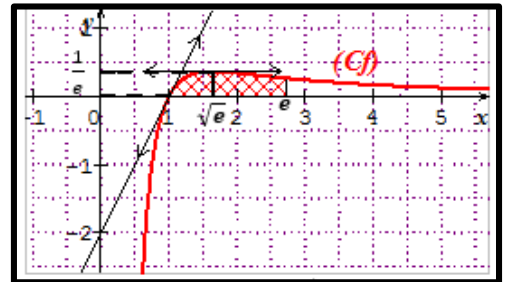
إحداثيتي نقطة تقاطع (C_f) مع $(x'x)$ هي $(1; 0)$

4- معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x = 1$:

$$f(1) = 0 \text{ و } f'(1) = 2$$

$$(T): y = 2x - 2 \Leftrightarrow (T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

5- إنشاء (C_f) و (T) :



6- حساب المساحة:

$$\mathcal{A} = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \frac{2\ln x}{x^2} dx$$

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{2}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = -\frac{2}{x} \end{cases} \text{ نضع:}$$

$$\mathcal{A} = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^e + \int_1^e \frac{2}{x^2} dx = \left[-\frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x} \right]_1^e = \left(-\frac{4}{e} + 2 \right) u.a. \approx 0,53 u.a.$$

7- المناقشة:

$$(\Delta): y = f(m)$$

$$(x'x): y = 0$$

$$(\Delta'): y = \frac{1}{e}$$

من البيان نستنتج ما يلي:

$$0 < m \leq 1 \Leftrightarrow f(m) \leq 0 \text{ حل وحيد}$$

$$m \in]1; \sqrt{e}] \cup [\sqrt{e}; +\infty[\Leftrightarrow 0 < f(m) < \frac{1}{e} \text{ حلان متمايزان}$$

$$m = \sqrt{e} \Leftrightarrow f(m) = \frac{1}{e} \text{ حل مضاعف}$$

التمرين 06: (خاص بالقسم 3 رياضي)

1. حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين: 1440 و 276 :

$$PGCD(276; 1440) = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} 276 = 12 \times 23 \\ 1440 = 12 \times 120 \\ PGCD(23; 120) = 1 \end{cases} \text{ لدينا:}$$

2. تبين أن العددين $(x+y)$ و (xy) أوليان فيما بينهما:

x و y عددين طبيعيين غير معدومين أوليين فيما بينهما

لدينا: $x \wedge y = 1 \Leftrightarrow$ يوجد عدنان صحيحان α و β حيث: $\alpha x + \beta y = 1$ (مبرهنة بيزو)

$$\begin{cases} \alpha(x+y) + (\beta-\alpha)y = 1 \\ \beta(x+y) + (\alpha-\beta)x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(مبرهنة بيزو) \begin{cases} (x+y) \wedge y = 1 \\ (x+y) \wedge x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(x+y) \wedge (xy) = 1 \Leftrightarrow$$

3. a و b عدنان طبيعيين غير معدومان و m المضاعف المشترك الأصغر لهما.

أ - برهان على أن: $PGCD(a+b; m) = PGCD(a; b)$

$$\begin{cases} a = d \times a' \\ b = d \times b' \\ PGCD(a'; b') = 1 \end{cases} \Leftrightarrow PGCD(a; b) = d \text{ نضع:}$$

$$m = d a' b' \Leftrightarrow md = ab = d^2 a' b' \text{ لدينا:}$$

$$PGCD(a+b; m) = PGCD(d(a'+b'); da'b') = d PGCD(a'+b'; a'b') = d = PGCD(a; b)$$

(لأن $(a' + b') \wedge (a'b') = 1$ من السؤال السابق)

ب - إيجاد $(a; b)$:

$$m = 1440 \text{ و } a+b = 276$$

$$\begin{cases} a = 12a' \\ b = 12b' \\ PGCD(a'; b') = 1 \end{cases} \Leftrightarrow PGCD(a; b) = PGCD(a+b; m) = PGCD(276; 1440) = 12$$

$$a'b' = 120 \Leftrightarrow 12a'b' = 1440 \Leftrightarrow m = d a' b' \text{ لدينا:}$$

$$a' + b' = 23 \Leftrightarrow a + b = 12(a' + b') = 276 \text{ و}$$

$$a' \text{ و } b' \text{ هما حلا المعادلة: } x^2 - 23x + 120 = 0$$

$$x_2 = 8, x_1 = 15 \quad \Delta = 23^2 - 4(120) = 49$$

$$(a; b) = (180; 96) \text{ أو } (a; b) = (96; 180) \Leftrightarrow (a'; b') = (15; 8) \text{ أو } (a'; b') = (8; 15) \text{ وبالتالي}$$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

السنة الدراسية: 2018/2019

المستوى: السنة الثالثة ثانوي

الشعبة: رياضيات

المدة: 04 ساعات و 30 دقيقة

وزارة الدفاع الوطني

أركان الجيش الوطني الشعبي

دائرة الاستعمال والتحضير

مديرية مدارس أشبال الأمة

امتحان بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين: الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

(1) احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين $4^5 - 1$ و $4^6 - 1$.

(2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 0$ و $u_1 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$$

(أ) احسب الحدود: u_2 ، u_3 و u_4 .

(ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 4u_n + 1$

(ج) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فان u_n عدد طبيعي، ثم استنتج $PGCD(u_n; u_{n+1})$.

(3) لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n + \frac{1}{3}$

(أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

(ب) اكتب بدلالة العدد الطبيعي n عبارة v_n ثم عبارة u_n .

(ج) عين من اجل كل عدد طبيعي n : $PGCD(4^{n+1} - 1; 4^n - 1)$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر سطح الكرة (S) التي

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ معادلة ديكارتية له و المستقيم (D) المعروف بالتمثيل الوسيط

$$\begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = 6 - 5t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \text{ حيث } t \text{ عدد حقيقي.}$$

(1) بين أن: $(D) \cap (S) = \emptyset$.

(2) أعط تمثيلا ديكارتيا للمستقيم (D) .

(3) حدد معادلة ديكارتية لكل مستوي من المستويين (P_1) و (P_2) المماسين لسطح الكرة (S) و اللذان يشملان المستقيم (D) .

(4) احسب إحداثيات النقطتين A و B نقطتا تماس كل من (P_1) و (P_2) مع (S) على التوالي.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I . المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لتكن p النقطة ذات اللاحقة $Z_p = 10$

و (Γ) الدائرة ذات القطر $[OP]$ نسمي Ω مركز الدائرة (Γ) . نعتبر النقط C, B, A التي لاحتقاتها على الترتيب $Z_C = 8 - 4i$ و $Z_B = 1 + 3i$, $Z_A = 5 + 5i$

(1) بين أن النقط C, B, A تنتمي إلى الدائرة (Γ) (يطلب إنشاء الشكل).

(2) لتكن النقطة D ذات اللاحقة $Z_D = 2 + 2i$. بين أن النقطة D هي المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (BC) .

II . من أجل كل نقطة M من المستوي مختلفة عن O ذات اللاحقة z نرفق النقطة M' ذات اللاحقة z'

حيث : $z' = \frac{20}{z}$ علما أن $\bar{z}$ يرمز إلى مرافق z .

(1) بين أن النقط O , M و M' على استقامة واحدة.

(2) لبكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ و M نقطة من (Δ) ذات اللاحقة z .
(أ) تحقق أن : $z + \bar{z} = 4$.

(ب) عبر عن $z' + \bar{z}'$ بدلالة z و $\bar{z}$, ثم استنتج أن : $5(z' + \bar{z}') = z' \bar{z}'$.

(ج) استنتج أن M' تنتمي إلى تقاطع المستقيم (OM) و الدائرة (Γ) ثم علم النقطة M' في الشكل .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نعتبر الدالة العددية f_n للمتغير الحقيقي x و المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$f_n(x) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx} + 7}$ و نرمز بـ : (C_n) إلى المنحنى الممثل للدالة في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

I . دراسة الدالة f_1 المعرفة على بـ : $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x + 7}$

(1) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f_1(x) = \frac{4}{1 + 7e^{-x}}$.

ب) احسب نهايتي الدالة f_1 عند $-\infty$ و عند $+\infty$ و فسر هندسيا النتائج المحصل عليها.

(2) أ) بين أن الدالة f_1 متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و شكل جدول تغيراتها.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $0 < f_1(x) < 4$.

3(أ) بين أن النقطة I_1 ذات الإحداثيتين $(\ln(7); 2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_1) .

ب) اكتب معادلة لـ (T_1) مماس المنحنى (C_1) في النقطة I_1 .

ج) أنشئ المماس (T_1) و المنحنى (C_1) .

4(أ) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_1) و المستقيمات التي معادلاتها:

$$x=1, y=0 \text{ و } x=3.$$

II. دراسة بعض خواص الدالة f_n

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f_n(x) = f_1(nx)$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f_n .

2) اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن النقطة $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ تنتمي إلى المنحنى (C_n) .

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

- (1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 7 .
(ب) ما هو باقي القسمة الاقليدية للعدد $2017^{4n+2} + 2019^{6n+4}$ على 7 .
(2) نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y : $(E) : 343x - 648y = 76$.
(أ) بين أن المعادلة (E) تقبل حولا في $\mathbb{Z}^2$.
(ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .
(3) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين غير المعدومين x و y حلول المعادلة (E) .
(أ) ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟
(ب) عين الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الطبيعية بحيث يكون $d = 76$.
(4) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{\beta 1 \alpha \beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7 ، ويكتب $\overline{\alpha 1 \alpha \alpha \beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5 .
جد العددين الطبيعيين α و β ، ثم أكتب λ في نظام التعداد ذي الأساس 6 .

التمرين الثاني : (04 نقاط)

- يحتوي كيس على أربع كرات بيضاء تحمل الأرقام 0، 1، 1، 2 وأربع كرات حمراء تحمل الأرقام 1، 1، 2، 2 .
نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من هذا الكيس .
(1) أحسب احتمال الحصول على :
(أ) ثلاث كرات من نفس اللون .
(ب) ثلاث كرات تحمل نفس الرقم .
(ج) ثلاث كرات أرقامها مختلفة مثنى مثنى .
(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات المسحوبة التي تحمل الرقم 1 .
(أ) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X .
(ب) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ والانحراف المعياري $\sigma(X)$.

التمرين الثالث : (05 نقاط)

- (1) $P(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z المعروف كما يلي: $P(z) = z^3 + (2 - \sqrt{3})z^2 + (3 - 2\sqrt{3})z + 6$.
(أ) احسب $P(-2)$ ، ثم عين العددين الحقيقيين α و β بحيث يكون: $P(z) = (z + 2)(z^2 + \alpha z + \beta)$.
(ب) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z) = 0$.
(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقتها على الترتيب $z_A = 1 + \sqrt{3}i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -2$.

(أ) أكتب كل من الأعداد z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي ، ثم استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة (C) التي يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

(ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقي .

(ج) عين ثم أنشئ (Δ) مجموعة النقط ذات اللاحقة حيث: $\bar{z} = ke^{-i\frac{2\pi}{3}}$ عندما k يسمح $\mathbb{R}$.

(3) (أ) أكتب على الشكل الأسّي العدد : $L = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$.

(ب) استنتج أن صورة A بتحويل نقطي يطلب تعيين عناصره المميزة .

(ج) حدد مع التعليل طبيعة المثلث ABC .

(د) عين اللاحقة z_D للنقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$

و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$.

- برهن أن المستقيم $y = x$: (D) مقارب مائل لـ (C) ثم أدرس الوضع النسبي لـ (C) و (D) .

(4) أثبت أن المستقيم $(T) : y = -x + \ln 2$: (T) مقارب مائل لـ (C) ثم أدرس الوضع النسبي لـ (C) و (T) .

(5) أرسم (T) و (D) ثم المنحنى (C) .

(6) (Δ_m) مستقيم معادلته $y = mx + \frac{\ln 2}{2}(1 - m)$ حيث m وسيط حقيقي .

(أ) بين أن جميع المستقيمات (Δ_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثياتها .

(ب) ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = mx + \frac{\ln 2}{2}(1 - m)$

(7) h دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = f(|x|)$

(1°) برهن أن الدالة h زوجية

(2°) أدرس قابلية اشتقاق الدالة h عند القيمة $x_0 = 0$.

(3°) أشرح كيفية رسم المنحنى (Γ) الممثل للدالة h انطلاقاً من المنحنى (C) ثم أرسم (Γ) .

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

السنة الدراسية: 2019/2018

المستوى: السنة الثالثة ثانوي

الشعبة: رياضيات

وزارة الدفاع الوطني

أركان الجيش الوطني الشعبي

دائرة الاستعمال والتحضير

مديرية مدارس أشبال الأمة

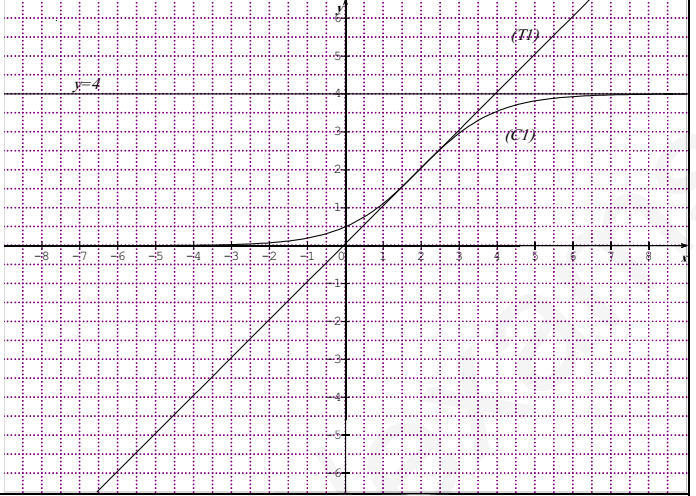
امتحان بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات

تصحيح الموضوع الأول

العلامة المجزأة	عناصر الإجابة
0.5	التمرين الأول: (04 نقاط) (-1) حساب : $\text{PGCD}(4^5 - 1, 4^6 - 1)$ باستخدام خوارزمية اقليدس أو بالتحليل : $(4^5 - 1)(4^6 - 1) = 3$
0.5	(-2) حساب الحدود نجد : $U_2 = 5$ و $U_4 = 85$ و $U_2 = 21$.
0.5	ب-) نتحقق من صحة $P(0)$: $U_0 = 0$ و $U_1 = 1$ ومنه $U_1 = 4U_0 + 1$ اذن $P(0)$ صحيحة نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي $U_{n+1} = 4U_n + 1$ ومنه $U_{n+2} = 4U_{n+1} + 1$ أي $P(n+1)$ صحيحة
0.5	ج-) لدينا من أجل $n = 0$ لدينا $U_0 = 0$ و $0 \in \mathbb{N}$ اذن $P(0)$ صحيحة ؛ و بما أن $4 \in \mathbb{N}$ و $U_n \in \mathbb{N}$ فإن : $(4U_n + 1) \in \mathbb{N}$ أي $U_{n+1} \in \mathbb{N}$ اذن $P(n+1)$ صحيحة .
0.5	استنتاج $\text{PGCD}(U_n, U_{n+1})$: من العلاقة : $U_{n+1} = 4U_n + 1$ نستنتج أن : $U_{n+1} - 4U_n = 1$ اذن حسب "مبرهنة بيزو Beuzout" فإن العددين : U_n و U_{n+1} أوليان فيما بينهما أي $\text{PGCD}(U_n, U_{n+1}) = 1$
0.5	(-3) أ-) لدينا : $V_n = U_n + \frac{1}{3}$ و منه $V_{n+1} = (4U_n + 1) + \frac{1}{3}$ ومنه $V_{n+1} = 4V_n$ اذن (V_n) هي متتالية هندسية أساسها $q = 4$ وحدها $V_n = \frac{1}{3}$
0.5	ب-) من أجل من أجل كل عدد طبيعي $V_n = \frac{1}{3} \times 4^n$ و منه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$
0.5	ج - تعيين $\text{PGCD}(4^{n+1} - 1, 4^n - 1)$: لدينا من الجواب (-3) : $U_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ أي $3U_n = 4^n - 1$ ومنه $3U_{n+1} = 4^{n+1} - 1$ اذن : $\text{PGCD}(4^{n+1} - 1, 4^n - 1) = \text{PGCD}(3U_{n+1}, 3U_n)$ $= 3 \times \text{PGCD}(U_{n+1}, U_n)$ اذن : $\text{PGCD}(4^{n+1} - 1, 4^n - 1) = 3$
	التمرين الثاني : (04 نقاط)
0.5	(-1) أ-) $(S) : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + Z^2 = 9$ اذن (S) سطح كرة مركزها $(2, -1, 0)$ و نصف قطرها $R = 3$

0.75	حيث : $Z\bar{Z}' = x^2 + y^2$ أي $Z\bar{Z} \in \mathbb{R}_*^+$ و بالتالي $\frac{20}{Z\bar{Z}} \in \mathbb{R}_*^+$ اذن $\arg\left(\frac{Z'}{Z}\right) = 2k\pi$ مع k عدد صحيح و هذا يعني أن النقط : M', M, O على استقامة واحدة
0.25	(-2) بما أن $M \in (\Delta)$ فإن : $Z = 2 + iy$ ومنه $\bar{Z} = 2 - iy$ بالجمع نجد : $Z + \bar{Z} = 4$
0.5	(ب) لدينا : $Z' + \bar{Z}' = \frac{20}{Z} + \frac{20}{\bar{Z}} = \frac{20Z + 20\bar{Z}}{Z\bar{Z}} = \frac{20(Z + \bar{Z})}{Z\bar{Z}} = \frac{80}{Z\bar{Z}}$
0.5	(*) حسب الجواب السابق : $5(Z' + \bar{Z}') = 5\left(\frac{80}{Z\bar{Z}}\right) = \frac{400}{Z \times \bar{Z}} = \frac{20}{Z} \times \frac{20}{\bar{Z}}$ اذن $5(Z' + \bar{Z}) = Z' \times \bar{Z}'$
01	(ج) من جهة حسب الجواب (1 - II) النقط M, O و M' في استقامة و منه $M' \in (OM)$ من جهة ثانية : $\Omega M' = Z' - 5 $ (علما أن $Z \times \bar{Z} = Z ^2$) و بالتالي $\Omega M'^2 = (Z' - 5)(\bar{Z}' - 5)$ أي $\Omega M'^2 = Z'\bar{Z}' - 5(Z' + \bar{Z}') + 25$ و بما أن $Z' + \bar{Z}' = 4$ و $Z' \times \bar{Z}' = 5(Z' + \bar{Z}') = 20$ نحصل على : $\Omega M'^2 = 25$ أي $\Omega M' = 5$ و منه $M' \in (\Gamma)$ و بالتالي M' تنتمي إلى تقاطع المستقيم (OM) و الدائرة (Γ) .

العلامة المجزأة	التمرين الرابع : (07 نقاط)
0.25	(I -1) أ- التحقق من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x(1+\frac{7}{e^x})}$ و هو المطلوب : $= \frac{4}{1+7e^{-x}}$
0.5	(ب) النهايات : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{1+7e^{-x}}\right) = 4$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^x}{(e^x+7)} = 0$
0.5	التفسير الهندسي : المنحنى (C_1) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما في جوار $-\infty$ معادلته $y = 0$ (منطبق على محور الفواصل) و الآخر معادلته $y = 4$ (موازي لحامل محور الفواصل) في جوار $+\infty$.
0.5	(-2) أ- الدالة f_1 قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث : من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f_1'(x) = \frac{28e^x}{(e^x+7)^2}$.
0.5	إتجاه التغير : من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $f_1'(x) > 0$ و بالتالي الدالة f_1 متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.
0.5	(ب) بما أن الدالة f_1 مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و حسب الجواب 1-ب) فإن صورة المجال $\mathbb{R}$ بالدالة f_1 هو المجال $[4, 0]$ [اذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $0 < f_1(x) < 4$].
0.75	(-3) أ- نضع $\begin{cases} a = \ln 7 \\ b = 2 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 2a = 2 \ln 7 \\ 2b = 4 \end{cases}$ ؛ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن : $f_1(2 \ln 7 - x) = \frac{4e^{2 \ln 7 - x}}{e^{2 \ln 7 - x} + 7} = \frac{28}{7 + e^x}$ و $(2 \ln 7 - x) \in \mathbb{R}$ بالجمع نجد : $f_1(2 \ln 7 - x) + f_1(x) = \frac{28}{7 + e^x} + \frac{4e^x}{7 + e^x} = 4$ أي $f_1(2a - x) + f_1(x) = 2b$ و هذا يعني أن النقطه $(\ln 7, 2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_1) .

0.25	(ب) معادلة المماس (T_1) : $y = f'_1(\ln 7)(x - \ln 7) + f_1(\ln 7)$: نجد $(T_1): y = x - \ln 7 + 2$
0.75	(ج) انشاء المماس (T_1) و المنحنى (C_1) 
0.5	(-4) حساب المساحة $\mathcal{A}$: الدالة f مستمرة و موجبة على المجال $[1, 3]$ إذن : $\mathcal{A} = \int_1^3 f_1(x) dx = 4 \int_1^3 \frac{e^x}{e^x + 7} dx = [4 \ln(e^x + 7)]_1^3 \quad Ua$
0.5	أي : $\mathcal{A} = 4 \ln(e^3 + 7) - 4 \ln(e^1 + 7) \quad Ua$ أو $\mathcal{A} = 4 \ln\left(\frac{e^3 + 7}{e^1 + 7}\right) \quad Ua$
0.5	الجزء II (-1) من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f_n(x) = \frac{4e^x}{e^{nx} + 7}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x + 7}$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $f_1(nx) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx} + 7}$ أي : $f_1(nx) = f_n(x)$
0.5	* اتجاه تغير الدالة f_n : بما أن $f_n(x) = f_1(nx)$ و يوضع $U(x) = nx$ حيث $(n \in \mathbb{N}^* \text{ أي } n > 0)$ فإن $f_n = f_1 \circ U$ و بما أن الدالة U متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن الدالة المركبة f_n متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.
0.5	(-2) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم و من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f_n(0) = \frac{4e^0}{e^0 + 7} = \frac{4}{1+7} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ و بالتالي النقطة $A(0, \frac{1}{2})$ تنتمي إلى (C_n)

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

السنة الدراسية: 2019/2018

المستوى: السنة الثالثة ثانوي

الشعبة: الرياضيات

وزارة الدفاع الوطني

أركان الجيش الوطني الشعبي

دائرة الاستعمال والتحضير

مديرية مدارس أشبال الأمة

امتحان بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات

تصحيح الموضوع الثاني

العلامة		عناصر الإجابة	محاور الموضوع														
كاملة	مجزأة																
04 ن	0.5 ن	1) أ) بواقي قسمة 3^n على 7 . <table><tr><td>$n =$</td><td>$6k$</td><td>$6k + 1$</td><td>$6k + 2$</td><td>$6k + 3$</td><td>$6k + 4$</td><td>$6k + 5$</td></tr><tr><td>$3^n \equiv$</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>6</td><td>4</td><td>5</td></tr></table> ب) $2019 \equiv 3[7]$ ومنه $2019^{6n+4} \equiv 4[7]$ $2017 \equiv 1[7]$ ومنه $2017^{4n+2} \equiv 1[7]$ إذن $2 \times 2019^{6n+4} + 2017^{4n+2} \equiv 2[7]$.	$n =$	$6k$	$6k + 1$	$6k + 2$	$6k + 3$	$6k + 4$	$6k + 5$	$3^n \equiv$	1	3	2	6	4	5	التمرين الأول
	$n =$	$6k$	$6k + 1$	$6k + 2$	$6k + 3$	$6k + 4$	$6k + 5$										
	$3^n \equiv$	1	3	2	6	4	5										
	0.5 ن																
	0.25 ن	2) أ) $PGCD(343; 648) = 1$ و 1 يقسم 76 ومنه المعادلة (E) تقبل حولا في $\mathbb{Z}^2$.															
	0.75 ن	ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) . $(x; y) = (648k + 4; 343k + 2)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.															
	0.5 ن	3) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين غير المعدومين x و y حلول المعادلة (E) .															
0.5 ن	أ) d يقسم x و d يقسم y ومنه d يقسم $343x - 648y$ أي d يقسم 76 ومنه $d \in \{1; 2; 4; 19; 38; 76\}$. ب) $d = 76$ معناه $\begin{cases} 648k + 4 \equiv 0[76] \\ 343k + 2 \equiv 0[76] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 40k + 4 \equiv 0[76] \\ 39k + 2 \equiv 0[76] \end{cases}$																
0.5 ن	و منه $k \equiv 74[76]$ أي $k \equiv 76\alpha + 74$ مع $\alpha \in \mathbb{N}$. ومنه $(x; y) = (49248\alpha + 47956; 26068\alpha + 25384)$ مع $\alpha \in \mathbb{N}$. 4) $\begin{cases} \lambda = 344\beta + 7\alpha + 49 \\ \lambda = 655\alpha + \beta + 125 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \lambda = \beta \times 7^3 + 7^2 + \alpha \times 7 + \beta \\ \lambda = \alpha \times 5^4 + 5^3 + \alpha \times 5^2 + \alpha \times 5 + \beta \end{cases}$																

0.75 ن	$\cdot (\alpha; \beta) = (2; 4) \text{ ومنه } \begin{cases} 343\beta - 648\alpha = 76 \\ 0 < \alpha < 5 \\ 0 < \beta < 5 \end{cases} \text{ أي}$$\cdot \lambda = 1439 = \overline{01355}_6 \text{ كتابة } \lambda \text{ في نظام التعداد ذي الأساس 6:}$	التمرين الثاني										
0.25 ن												
04 ن												
0.25 ن												
0.25 ن	يحتوي كيس على أربع كرات بيضاء تحمل الأرقام 0، 1، 1، 2 وأربع كرات حمراء تحمل الأرقام 1، 1، 2، 2 . نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من هذا الكيس. (1) عدد إمكانيات السحب: $C_8^3 = 56$. (أ) احتمال الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون: $\frac{C_4^3 + C_4^3}{56} = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$. (ب) احتمال الحصول على ثلاث كرات تحمل نفس الرقم: $\frac{C_4^3 + C_3^3}{56} = \frac{5}{56}$. (ج) احتمال الحصول على ثلاث كرات أرقامها مختلفة مثني مثني: $\frac{C_1^1 \times C_4^1 \times C_3^1}{56} = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}$. (2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات المسحوبة التي تحمل الرقم 1 . (أ) قانون احتمال المتغير العشوائي X: <table><tr><td>x_i</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>$P(X = x_i)$</td><td>$\frac{4}{56}$</td><td>$\frac{24}{56}$</td><td>$\frac{24}{56}$</td><td>$\frac{4}{56}$</td></tr></table> (ب) الأمل الرياضي: $E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i P_i = \frac{0+24+48+12}{56} = \frac{84}{56} = 1,5$. التباين: $V(X) = \sum_{i=1}^4 x_i^2 P_i - E^2(X) = \frac{0+24+96+36}{56} - (1,5)^2 = 0,54$. الانحراف المعياري: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 0,73$.	x_i	0	1	2	3	$P(X = x_i)$	$\frac{4}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{4}{56}$	التمرين الثالث
x_i	0	1	2	3								
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{4}{56}$								
0.25 ن												
0.25 ن												
0.25 ن												
0.25 ن	(1) $P(z) = z^3 + (2 - \sqrt{3})z^2 + (3 - 2\sqrt{3})z + 6$. (أ) $P(-2) = 0$. $P(z) = (z+2)(z^2 - \sqrt{3}z + 3)$. (ب) $P(z) = 0$ تكافئ $(z+2=0)$ أو $(z^2 - \sqrt{3}z + 3=0)$. $z+2=0$ يكافئ $z = -2$. $z^2 - \sqrt{3}z + 3 = 0$ $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ و $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ ، $\Delta = -9 = (3i)^2$.											
0.25 ن												
0.5 ن												
05 ن												

0.5 ن	مجموعة الحلول: $S = \left\{ -2; \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i; \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \right\}$ (2) $z_C = -2$ و $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_A = 1 + \sqrt{3}i$	
0.75 ن	أ) كتابة كل من الأعداد z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي: • $z_C = 2e^{i\pi}$ و $z_B = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ، $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$	
0.25 ن	الاستنتاج: لدينا $ z_A = z_B = z_C = 2$ أي $OA = OB = OC = 2$ ومنه النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها O ونصف قطرها 2 .	
0.5 ن	ب) $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n \in \mathbb{R}$ معناه $e^{2in\frac{\pi}{3}} \in \mathbb{R}$ ومنه $2n\frac{\pi}{3} = k\pi$ ومنه $2n = 3k$ ونجد حيث $n = 3k'$ $k' \in \mathbb{N}$ ج) $\overline{z} = ke^{-i\frac{2\pi}{3}}$ معناه $z = ke^{i\frac{2\pi}{3}}$ ومنه $\arg z = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ومنه	
0.5 ن	$(\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ و منه (Δ) هو نصف المستقيم $[OE)$ باستثناء النقطة O حيث $z_E = -1 + i\sqrt{3}$ 3) أ) كتابة على الشكل الأسّي العدد: $L = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$	
0.5 ن	$L = \frac{3 + i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$	
0.25 ن	ب) لدينا $z_A - z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_C)$ ومنه A صورة B بالدوران الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$	
0.5 ن	ج) طبيعة المثلث ABC : لدينا $\begin{cases} CB = CA \\ (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ ومنه ABC متقايس الأضلاع .	
0.5 ن	د) $ABCD$ متوازي أضلاع معناه $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ أي $z_D - z_A = z_C - z_B$ ومنه $z_D = -2 + 2i\sqrt{3}$ أي $z_D = z_C - z_B + z_A$	
07 ن	$f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ $f'(x) = \frac{e^{-x}(e^{2x} - 2)}{e^x + 2e^{-x}}$ (2)	التمرين الرابع
0.5 ن		
0.5 ن		
0.5 ن		

0.5 ن

x	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\ln(2\sqrt{2})$	$+\infty$

0.5 ن

$$f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + 2e^{-2x}) = 0$$

$(D): y = x$ مقارب مائل لـ B

0.25 ن

$$f(x) - x = \ln(1 + 2e^{-2x}) > 0, 1 + 2e^{-2x} > 1$$

B أعلى من (D)

0.25 ن

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-x + \ln 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(2 + e^{2x}) = 0 \quad (4)$$

0.25 ن

$(T): y = -x + \ln 2$ مقارب مائل لـ B

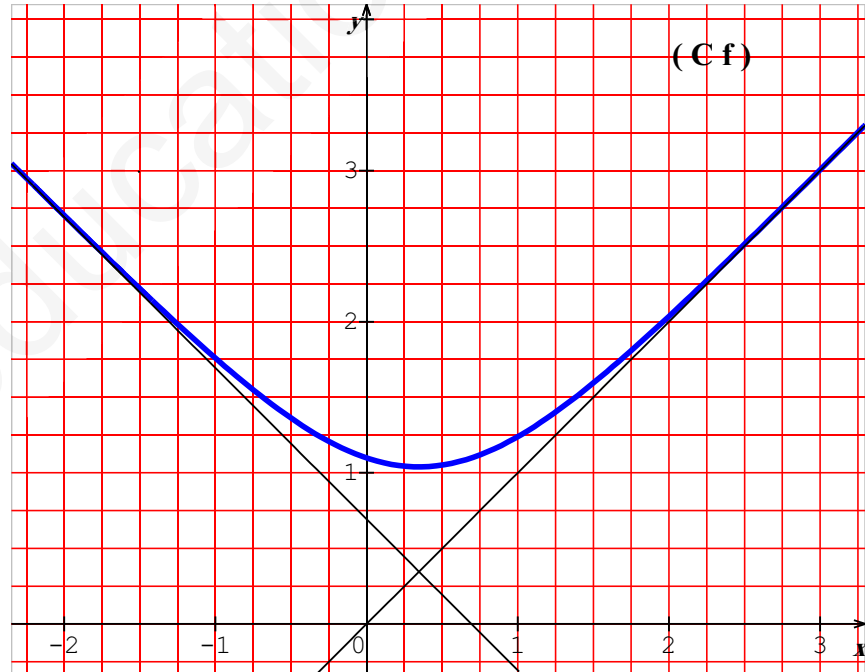
$$f(x) - (-x + \ln 2) = \ln(2 + e^{2x}) > 0, 2 + e^{2x} > 0$$

0.25 ن

B أعلى من (T)

(5) رسم (D) ثم (C)

01 ن



$$(\Delta_m) \quad y = mx + \frac{\ln 2}{2}(1 - m) \quad (6)$$

0.5 ن

(أ) النقطة الثابتة $\left(\frac{\ln 2}{2}, \frac{\ln 2}{2}\right)$

$$f(x) = mx + \frac{\ln 2}{2}(1 - m) \quad (ب)$$

$$m \in \left] -\infty; 1 - \frac{2 \ln 3}{\ln 2} \right[\quad *$$

$$m = 1 - \frac{2 \ln 3}{\ln 2} \quad *$$

$$m \in \left] 1 - \frac{2 \ln 3}{\ln 2}; -1 \right[\quad *$$

$$m \in [-1, 1] \quad *$$

$$m \in]1; +\infty[\quad *$$

01 ن

0.5 ن

(7) h دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = f(|x|)$

(°1) من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$ و $h(-x) = h(x)$

(°2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln(1 + 2e^{-2x}) - \ln 3}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln(1 + 2e^{-2x})}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{\ln \left[1 + \left(\frac{-2}{3} + \frac{2}{3} e^{-2x} \right) \right]}{\left(\frac{-2}{3} + \frac{2}{3} e^{-2x} \right)} \cdot \frac{\left(\frac{-2}{3} + \frac{2}{3} e^{-2x} \right)}{x} = \frac{-1}{3} \end{aligned}$$

0.5 ن

$$\text{الدالة } h \text{ غير قابلة للاشتقاق عند القيمة } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{3} \quad x_0 = 0$$

(°3) $h(x) = f(x)$ $x \in [0, +\infty[$ المنحنى (Γ) ينطبق على (C)

0.5 ن

$x \in]-\infty, 0]$ المنحنى (Γ) نظير (C) بالنسبة إلى (yy')

