

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04,5 نقطة)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، الدالة العددية

المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ ، وليكن (C_f)

المنحنى الممثل لها (الشكل المقابل) ، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

(I) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; +\infty[$

(II) (u_n) متتالية معرفة بحددها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) أ) أعد رسم الشكل في ورقة الإجابة ثم مثل الحدود u_3, u_2, u_1, u_0 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 1$ ، ثم بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما وماذا تستنتج؟

(3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \frac{1+u_n}{1-u_n}$

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 ثم عبر عن حددها العام v_n بدلالة n .

ب) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 - \frac{2}{v_n + 1}$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) أحسب بدلالة n المجموعين $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ و $T_n = \frac{1}{u_0 - 1} + \frac{1}{u_1 - 1} + \dots + \frac{1}{u_n - 1}$

التمرين الثاني: (04,5 نقطة) :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر $A(1; 4; -5)$ ، $B(3; 2; -4)$ ، $C(5; 4; -3)$ و $D(-2; 8; 4)$ نقط

منه و (Δ) مستقيما يشمل النقطة D وشعاع توجيهه $\vec{u}(1; 5; -1)$

(1) بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا (ABC) معادلته $x - 2z - 11 = 0$

(2) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) ، وتحقق أن النقطة $E(-3; 3; 5)$ تنتمي اليه .

(3) نعتبر (P) المستوي المعروف بتمثيله الوسيطى : $(t; k) \in \mathbb{R}^2$; $\begin{cases} x = 4 - 2t - 3k \\ y = -7t + k \\ z = -3 + 5t - 4k \end{cases}$

(أ) تحقق من أن $x - y - z - 7 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (P).

(ب) بين أن المستويين (p) و (ABC) يتقاطعان وفق مستقيم (D) يطلب تعيين تمثيله الوسيط.

(ج) تحقق من أن النقطة $F(3;0;-4)$ تنتمي إلى (D)، واستنتج (بدون حساب) مع التبرير المسافة بين F والمستوي (P).

(4) (أ) عين إحداثيات النقطة G مرجح الجملة $\{(E;2),(F;1)\}$ ، ثم استنتج مع التعليل المسافة بين G والمستقيم (EF).

(ب) ما طبيعة المجموعة (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $(\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{ME}) \perp (\overrightarrow{2ME} + \overrightarrow{MF})$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A، B و C التي لواحقها على

الترتيب: $z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B = iz_A$ و $z_C = \overline{z_A}$

(1) أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الجبري

(2) (أ) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية: $\frac{1+i-z}{-1+i-z} = 2e^{i\pi}$ (E)

(ب) إستنتج أن النقطة A هي صورة النقطة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه النقطة Ω ذات الإحقة z_Ω

(حيث z_Ω هو حل للمعادلة (E) يطلب تعيين عناصره المميزة وكتابة عبارته المركبة .

(3) (أ) أوجد مركز ونصف قطر الدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC .

(ب) بين أن النقطة H ذات الإحقة $z_H = -1 + 3i$ هي مركز الدائرة (γ') صورة الدائرة (γ) بالتحويل S ثم عين معادلة ديكارتية للدائرة (γ').

(4) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد المركب $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا موجبا تماما.

(5) (أ) عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات الإحقة z حيث: $z = z_C - k \frac{z_A}{z_C}$ ، k يسمح $\mathbb{R}_+^*$.

(ب) عين (Γ') مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $\arg \left[\left(\frac{z_A - z}{z_B - z} \right)^2 \right] = \pi + 2\pi k$ ، $k \in \mathbb{Z}$.

التمرين الرابع: (06 نقاط)

(I) المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ الوحدة (cm)،

(Γ) التمثيل البياني للدالة: $x \rightarrow 2e^{x-1}$ ، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$

α و 1 هما فاصلتا نقطتي تقاطع (Γ) و (Δ) حيث: $-0,6 < \alpha < -0,5$

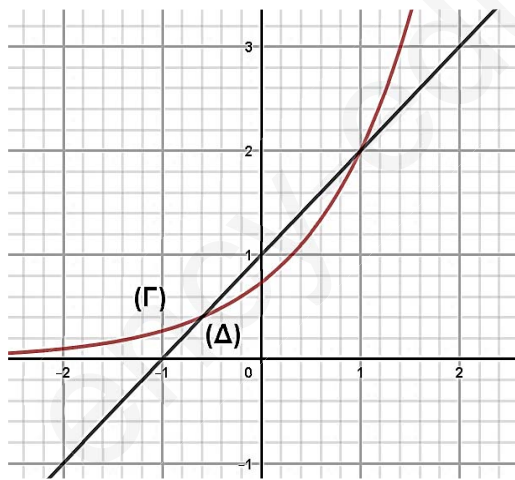
(1) بقراءة بيانية حدد وضعية المنحنى (Γ) بالنسبة لـ (Δ) على $\mathbb{R}$

(2) g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x والمعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = -2e^{x-1} + x + 1$ ، حدد إشارة g(x) حسب قيم العدد الحقيقي x

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2(ex - e - 3) + (x + 2)e^{-x+2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

(1) (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(ب) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = -g(x)e^{2-x}$



(ج) عين دون حساب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

(د) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) (أ) بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2(ex - e - 3)$ هو مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$ ، وأدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D)

(ب) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

(ج) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث $-1,4 < \beta < -1,3$

(3) أنشئ كلا من (D) و (C_f) ، (نأخذ $f(\alpha) = 4,15$)

(4) أحسب بـ cm^2 المساحة A للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، (D) والمستقيمين الذين معادلتهما $x = 1$ و $x = 2$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول (05 نقاط) :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \end{cases}$$

1- أحسب الحدود: u_1 ، u_2 ، u_3 ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغيرات المتتالية (u_n)

2- (أ) برهن بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n \leq n + 3$

(ب) أدرس اتجاه تغيرات المتتالية (u_n) .

(ج) استنتج أن (u_n) محدودة من الأسفل ، هل يمكن القول أن (u_n) متقاربة ؟

3- نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $V_n = u_n - n$

(أ) برهن أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

(ب) أكتب V_n بدلالة n ، واستنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب نهاية (u_n) عند $+\infty$

(ج) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

4- لتكن المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $t_n = \ln(V_n)$

(أ) برهن أن (t_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

(ب)- أحسب بدلالة n المجموع : $A_n = t_0 + t_1 + \dots + t_n$ و استنتج بدلالة n الجداء : $P_n = V_0 \times V_1 \times \dots \times V_n$.

التمرين الثاني (04 نقاط):

يحتوي صندوق على 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس ،منها سبع كريات بيضاء تحمل الأرقام بـ: 0،0،0،1،2،3،4

و ثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام 4،-3،-1 ، نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الصندوق

1 (أحسب احتمال الحوادث التالية:

A: "الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون "

B: "الحصول على كرة حمراء على الأقل تحمل عددا سالبا "

C: "الحصول على ثلاث كريات جداء أرقامها معدوم "

(2) نعيد الصندوق الى وضعيته الأولى ونسحب على التوالي دون ارجاع كريتين من الصندوق .

(أ) أحسب احتمال: D: "الحصول على كريتين مختلفتين اللون" ، E: "الحصول على كريتين جداء رقميهما عددا سالبا تماما"

(ب) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة.

عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي $E(X)$

التمرين الثالث (05 نقاط) :

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $(z - 2)(z^2 + 2z + 4) = 0$

(II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o; \vec{u}; \vec{v})$ النقط :

A, B, C التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A = -1 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ ، $z_C = 2$ ،

(أ) بين أن : $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{\frac{i\pi}{3}}$.

(ب) عين طبيعة المثلث ABC .

(ج) عين مركز ونصف قطر الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC ، أرسم (C) .

(1) (أ) عين الطبيعة و العناصر الهندسية للمجموعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق

$$2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$$

(ب) تحقق أن النقطتين A و B تنتميان إلى (Γ) .

(2) ليكن الدوران R الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

(أ) عين صورة B بالدوران R

(ب) عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

(ت) عين صورة المجموعة (Γ) بالدوران R .

التمرين الرابع (06 نقاط)

المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = 2 - x(1 + \ln(2) - \ln(x))$

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) استنتج حسب قيم x اشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $\begin{cases} f(x) = 2 - x - x \ln x \\ f(0) = 2 \end{cases}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

(1) (أ) أحسب : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 2}{h}$ ، ماذا تستنتج ؟

(ب) أحسب نهاية الدالة $f(x)$ عند $+\infty$.

(ج) أحسب $f'(x)$ مشتق الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ ، ثم أدرس إشارته .

(د) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) (أ) أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) ، عند النقطة ذات الفاصلة 2 .

(ب) استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

(3) أنشئ (Δ) والمنحنى (C_f) .

(4) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $h(x) = x^2 \ln x$

(أ) أحسب $h'(x)$ مشتق الدالة h .

(ب) استنتج دالة أصلية على المجال $]0; +\infty[$ للدالة : $x \rightarrow x \ln x + \frac{x}{2}$.

(ج) α عدد حقيقي حيث $0 < \alpha < 1$ ، أحسب المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمت التي

معادلاتها $x = \alpha$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ ثم أحسب $\lim_{\alpha \rightarrow 0} A(\alpha)$ واعط تفسيراً لهذه النتيجة .



20462601812018

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

الديوان الوطني للامتحانات و المسابقات
المقاطعة رقم 1 لولاية غرداية

وزارة التربية الوطنية
امتحان البكالوريا التجريبي

دورة : ماي 2019

الشعبة : علوم تجريبية

المدة : 03 سا و 30 د

اختبار في مادة : الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :
الموضوع الأول :

التمرين الأول: (04 نقاط)

(U_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي $U_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 5 - \frac{4}{U_n}$

(1) أحسب U_1 ، U_2 ، ثم برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $2 \leq U_n \leq 4$

(2) بين ان (U_n) متزايدة . ثم استنتج أنها متقاربة .

(3) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $4 - U_{n+1} \leq \frac{4 - U_n}{2}$.

(4) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 4 - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقتها على الترتيب Z_A ، Z_B ، Z_C و Z_D حيث: $Z_A = i\sqrt{3}$ ، $Z_B = \overline{Z_A}$ ، $Z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$ و $Z_D = \overline{Z_C}$

(1) بين أن: $\left(\frac{1+Z_A}{2}\right)^{2019} + \left(\frac{1-Z_A}{2}\right)^{2019} = -2$

- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $\left(\frac{1+Z_A}{2}\right)^n - \left(\frac{1-Z_A}{2}\right)^n = 0$

(2) تحقق أن: $\frac{Z_C - Z_A}{Z_D - Z_A} = \frac{Z_D - Z_B}{Z_B - Z_C}$ ثم استنتج أن النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين عناصرها المميزة.

(3) عين طبيعة الرباعي $ABDC$ ثم احسب مساحته.

(4) f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث:

$$Z' = \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}(Z - Z_A) + Z_A$$

. عين طبيعة التحويل f و عناصره المميزة .

(5) (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z حيث: $(Z \neq Z_B \text{ و } Z \neq Z_A)$ المعرفة بالعلاقة:

$$k \in \mathbb{Z} \text{ مع } (E) : \arg(Z^2 + 3) = \arg(Z + i\sqrt{3}) + 2k\pi$$

- بين أنه يمكن كتابة العلاقة للمجموعة (E) على الشكل: $\arg(Z - Z_A) = 2k\pi$ ثم استنتج طبيعة المجموعة (E) .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

تتكون باقة ورد من أربع وردات حمراء وثلاث وردات بيضاء ووردتين لونهما أصفر.

(I) نختار عشوائيا وفي آن واحد ثلاث وردات من هذه الباقة.
ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الوردات الصفراء المختارة.
(1) أعط قانون احتمال المتغير العشوائي X .

(2) أحسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

(II) نختار على التوالي وبدون إرجاع ثلاث وردات من هذه الباقة.
نعتبر الحادثتان التاليتان:

الحادث A : " اختيار ثلاث وردات من نفس اللون "

الحادث B : " اختيار ورتين على الأقل لونهما أحمر "

(1) أحسب الإحتمالات التالية $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(A \cap B)$.

(2) علما أن الوردات المختارة من نفس اللون ، ما هو الاحتمال أن تكون حمراء . (الحادث R : اختيار ثلاث وردات حمراء)

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) يعطى في الشكل المرفق المنحنيين (C_1) و (C_2) لدالتين معرفتين وقابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، نعلم أن احدى هاتين الدالتين هي الدالة المشتقة للأخرى ، نرمز إليهما إذن بـ g و g' .
(1) أرفق كل دالة منهما بتمثيلها البياني.

(2) على المجال $[-\frac{3}{2}; 5]$ شكل جدول تغيرات الدالة g .

(3) ماهو معامل توجيه المماس للمنحني (C_1) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

(II) لتكن المعادلة التفاضلية $(E): y' + y = 2(x+1)e^{-x}$

(1) بين أن الدالة f_0 المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_0(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$ حل للمعادلة (E) .

(2) حل المعادلة التفاضلية $(E'): y' + y = 0$.

(3) بين أن f حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت الدالة u حيث $u = f - f_0$ حلا للمعادلة (E') .

(4) استنتج من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، عبارة $f(x)$ عندما تكون f حلا للمعادلة (E) .

(5) علما أن الدالة g المعرفة في الجزء (I) حلا للمعادلة (E) عين $g(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x .

(6) عين الحل h للمعادلة (E) الذي تُمثله البياني يقبل في النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا معامل توجيهه معدوما.

(III) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.

(1) عين نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

(2) نعلم أن الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، عين دالتها المشتقة وأدرس اشارتها، ثم أنجز جدول تغيراتها.

(3) في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$) ، نسمي (C_f) التمثيل البياني للدالة f .

(I) عين معادلة $L(d)$ مماس المنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة -1.



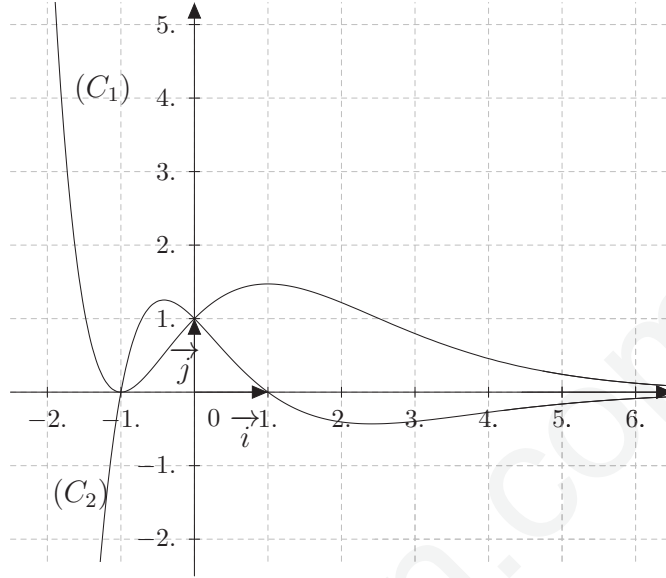
2 046260 812018

ب) أنشئ المماس (d) والمنحنى (C_f) في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

4) لتكن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

ا) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c حتى تكون F دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$.

ب) أحسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) وبمحور الترتيب و محور الفواصل والمستقيم ذي المعادلة $x = 1$.





الموضوع الثاني :

التمرين الأول: (04 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

f الدالة المعرفة على المجال $[1, +\infty[$ بالشكل: $f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$, و ليكن (C_f) المنحنى الممثل لها.

(Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (كما هو موضح في الشكل 1).

ولتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بعدها الأول $U_0 = \frac{3}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$

(1) (أ) مثل على حامل محور الفواصل الحدود U_0 , U_1 , U_2 دون حسابها مبينا خطوط الإنشاء. (الشكل 1)

(ب) خمن إتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها.

(ج) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فان $1 < U_n < 2$.

(2) أثبت ان المتتالية (U_n) متزايدة تماما. ثم استنتج أنها متقاربة .

(3) نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالشكل: $V_n = \ln(U_n - 1)$

(أ) بين أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الأول.

(ب) أكتب عبارة الحد العام (V_n) بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

(4) احسب كلا من Π_n و S_n بدلالة n حيث:

$$\Pi_n = (U_0 - 1)(U_1 - 1)(U_2 - 1) \dots (U_n - 1)$$

$$S_n = V_0^2 + V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_n^2$$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(Z + \sqrt{3} - 3i)(Z^2 - 6Z + 12) = 0$

(2) في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

نعتبر النقط A , B , C التي لواحقتها على الترتيب. $Z_A = 3 + i\sqrt{3}$, $Z_B = 3 - i\sqrt{3}$, $Z_C = -\sqrt{3} + 3i$

(أ) أكتب كلا من Z_A و Z_C و $\frac{Z_C}{Z_A}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة المثلث OAC .

$$(ب) \text{ أحسب } \left(\frac{Z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{1440} + i\left(\frac{Z_B}{2\sqrt{3}}\right)^{2019}$$

(3) لتكن النقطة D نظيرة C بالنسبة إلى محور الفواصل , بين أن المستقيمين (AD) و (BC) متعامدان.

(4) عين نسبة وزاوية التشابه المباشر S الذي مركزه $E(3 - \sqrt{3}, 0)$ ويحول النقطة A إلى النقطة C .

(5) بين أن النقط A , E , O , C تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على 4 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء ، و يحتوي صندوق U_2 على كرتين حمراوين و 5 كرات بيضاء ، و يحتوي صندوق U_3 على 3 كرات تحمل الرقم 1 و كرتين تحملان معا الرقم 2.
(1) نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كرات من U_1 ، (ولا نهتم بالصندوقين U_2 و U_3).

(ا) ما هو عدد الحالات الممكنة .

(ب) ما هو احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون.

(ج) ما هو احتمال الحصول على كرة بيضاء على الأقل.

(د) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

– حدد قانون احتمال X .

(2) نسحب الآن كرة من U_3 . إذا كان رقمها هو 1 نسحب كرة من U_1 ، أما إذا كان رقمها هو 2 فنسحب كرة من U_2 .

(ا) ما هو احتمال الحصول على كرة حمراء.

(ب) علما أن الكرة المسحوبة حمراء ، ما هو احتمال كونها مسحوبة من U_1 .

(نسمي الأحداث التالية الحدث R : الكرة المسحوبة حمراء ، الحدث A_1 : الكرة مسحوبة من الصندوق

U_3 وتحمل الرقم 1 ، الحدث A_2 : الكرة مسحوبة من الصندوق U_3 وتحمل الرقم 2 ، الحدث B : الكرة

مسحوبة من الصندوق U_1)

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 2\}$ كمايلي: $f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها ثم فسر النتائج هندسيا.

(2) (ا) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1; 2\}$ لدينا: $f'(x) = \frac{-2x(x+4)}{(x^2 - x - 2)^2}$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

(3) (ا) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) المقارب الأفقي له.

(ب) عين نقاط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات.

(ج) ارسم المستقيمات المقاربة و المنحنى (C_f) .

(د) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة:

$$(3 - m)x^2 + (m - 1)x + 2(m - 1) = 0$$

(4) (ا) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 و 2 لدينا:

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$$

(ب) إستنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]2, +\infty[$.

(5) لتكن $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين $y = 3$ و $x = 3$ و $x = \lambda$ حيث:

λ عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]2, 3[$.

(ا) أحسب المساحة $S(\lambda)$ بدلالة λ .



2 046260 812018

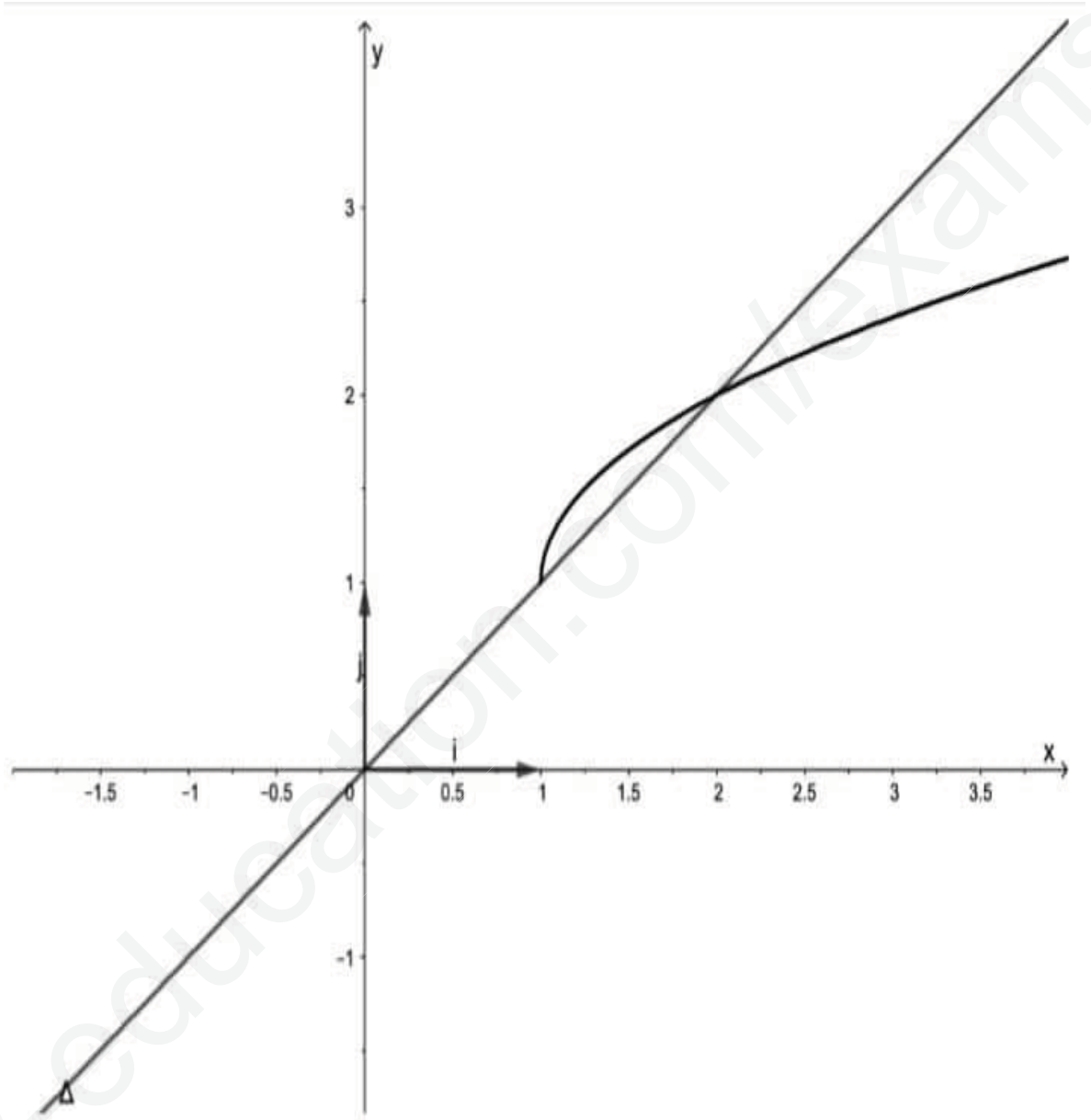
ب) أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow 2} S(\lambda)$.

6) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ كمايلي: $g(x) = \frac{3x^2 - |x| - 2}{x^2 - |x| - 2}$

ا) برهن أن g دالة زوجية على مجموعة تعريفها.

ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة g عند $x_0 = 0$ وفسر النتيجة هندسيا.

7) أكتب الدالة g دون رمز القيمة المطلقة. و بإستعمال المنحنى (C_f) أنشئ المنحنى (C_g) الممثل للدالة g .



الشكل-1-



2 046260 812019

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية الإخوة قوادري هني - بني ودرن -
دورة : ماي 2019

مديرية التربية لولاية الشلف
امتحان البكالوريا التجريبي

الشعبة : علوم تجريبية

المدة : 03 سا و 30 د

اختبار في مادة : الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :
الموضوع الأول :

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

g الدالة المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ كمايلي : $g(x) = x - \ln(x+2)$ والممثلة بمنحنىها البياني (C_g) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (الشكل في الورقة الملحقة)

(1) أحسب $g(-1)$ ، بقراءة بيانية حدد إتجاه تغير الدالة على المجال $]-2; +\infty[$

(2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = g(u_n)$

(أ) مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل (التمثيل على الورقة الملحقة)

(ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n \geq -1$

(ج) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

(د) استنتج أن (u_n) مقاربة وأحسب نهايتها

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب :
$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \ln[(u_0 + 2)(u_1 + 2) \cdots (u_{n-1} + 2)] \end{cases}$$

(أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : v_n = 3 - u_n$

(ب) استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_0 + 2)(u_1 + 2) \cdots (u_{n-1} + 2)$

التمرين الثاني: (03.5 نقاط)

لمكافحة مرض الحصبة الألمانية لقح 30% من تلاميذ ثانوية ما، وكانت نتائج دراسة إحصائية على هذه الثانوية كمايلي :

إحتمال أن يكون التلميذ مصابا علما أنه ملقح هو $\frac{1}{16}$

إحتمال أن يكون ملقحا علما أنه مصاب هو $\frac{3}{14}$

يتم إختيار تلميذ واحد من هذه الثانوية بطريقة عشوائية ، نرمز ب V إلى الحادثة "التلميذ ملقح" ونرمز ب M إلى الحادثة "التلميذ مصاب بالمرض"

(1) شكل شجرة الإحتمالات المنمذجة لهذه الوضعية

(2) أحسب $P(V \cap M)$ إحتمال أن يكون التلميذ ملقحا ومصابا بالمرض

(3) أثبت أن $P(M) = \frac{7}{80}$ إحتمال أن يكون التلميذ مصاب بالمرض



20462601812019

(4) أحسب $P(\bar{V} \cap M)$ إحتمال أن يكون التلميذ غير ملقح ومصاب بالمرض ثم استنتج $P_{\bar{V}}(M)$

(5) أحسب $P(\bar{V} \cap \bar{M})$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقطتين A و B لاحقتاهما

$$z_B = 3 - i \text{ و } z_A = 4 + 2i$$

(1) أكتب على الشكل الجبري ثم المثلثي العدد المركب : $\frac{z_B - z_A}{z_B}$

ب) استنتج طبيعة المثلث ABO مع التعليل

(2) نعتبر التحويل النقطي r في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' والذي يحول

A إلى B ويحول B إلى O

أ) بين أن العبارة المركبة للتحويل r هي : $z' = -iz + 1 + 3i$

ب) عين طبيعة التحويل r وعناصره المميزة

ج) عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة O بالتحويل r

د) استنتج طبيعة الرباعي $ABOC$

(3) عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $|z - 4 - 2i| = |z|$

(4) من أجل $z \neq 2 + i$ نضع : $L = \frac{z' - 2 - i}{z - 2 - i}$

أ) بين أن $L = -i$ ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون L^n عدد حقيقي

ب) بين أن $(z' - 2 - i)^2 + (z - 2 - i)^2 = 0$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

أ) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x) = 1 + (1 - x)e^{-x+2}$

(1) أدرس تغيرات الدالة g

(2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) \geq 0$

ب) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = x - 1 + xe^{-x+2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث $||\vec{i}|| = 1cm$

(1) أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب) بين أنه من أجل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$ (حيث f' مشتقة الدالة f)

ج) أدرس إتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها

(2) أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا

ب) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى مستقيمه المقارب المائل (Δ)

ج) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يطلب كتابة معادلته

(3) أ) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0,1 < \alpha < 0,2$

ب) أحسب $f(-1)$ ثم أرسم (T) ، (Δ) و (C_f)



20462601812019

(4) m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد حلول المعادلة : $xe^{-x+2} - 1 - m = 0$

(5) (ا) بين أن الدالة $e^{-x+2}(-x-1)$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x+2}$ على $\mathbb{R}$

(ب) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما :
 $x = 2$ و $x = 3$

الموضوع الثاني :

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. نعتبر النقط $A(1; -1; 4)$ ، $B(7; -1; -2)$ و $C(1; 5; -2)$

(1) (ا) بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع

(ب) بين أن الشعاع $\vec{n}(1; 1; 1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكارتية لـ (ABC)

$$(2) (\Delta) \text{ مستقيم معرف بتمثيله الوسيطى : } \begin{cases} x = -2t \\ y = -2 - 2t ; (t \in \mathbb{R}) \\ z = -3 - 2t \end{cases}$$

(ا) بين أن (Δ) عمودي على المستوي (ABC) ثم عين إحداثيات G نقطة تقاطعهما

(ب) بين أن G مركز ثقل المثلث ABC

(3) (S) سطح الكرة التي مركزها G وتشمل النقطة A

(ا) أكتب معادلة لسطح الكرة (S)

(ب) أدرس الوضع النسبي لـ (S) و (Δ) مع تحديد المجموعة $(S) \cap (\Delta)$

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

$$(u_n) \text{ متتالية عددية معرفة على } \mathbb{N}^* \text{ كمايلي : } \begin{cases} u_1 = e^2 \\ u_{n+1} = e^{-\frac{1}{2\sqrt{u_n}}} \end{cases}$$

(1) برهن أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > \frac{1}{e}$

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ثم استنتج اتجاه تغير (u_n)

(3) استنتج أن (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها

(4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n = \frac{1}{2} + \ln \sqrt{u_n}$

(ا) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

(ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n واستنتج u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(ج) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = \frac{1}{1 + \ln u_1} + \frac{1}{1 + \ln u_2} + \dots + \frac{1}{1 + \ln u_n}$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z - i)(z^2 + 2z + 2) = 0$



20462601812019

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

نعتبر النقط A, B, C و D لواقعها على الترتيب $z_A = i, z_B = 2, z_C = -1 - i$ و $z_D = 1 - 2i$

(ا) تحقق أن النقطة D مرجح للجملة $\{(A; 1), (B; -1), (C; -1)\}$

(ب) أكتب العدد المركب $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_C}$ على الشكل الأسّي ، ثم فسر النتيجة هندسيا ، برر طبيعة الرباعي $ABCD$

(ج) أكتب العدد المركب $-4 + 4i$ على الشكل الأسّي ، ثم أحسب $(-4 + 4i)^{2018}$

(3) من أجل كل نقطة $M(z)$ من المستوي تختلف عن B ، نرفق النقطة $M'(z')$ حيث : $z' = \frac{iz - 4 + 2i}{z - 2}$

(ا) تحقق أن $z' - i = \frac{-4 + 4i}{z - 2}$

(ب) بين أن $AM'.BM = 4\sqrt{2}$ و $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{BM}\right) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

(4) (Γ) هي مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\text{Arg}(z' - i) = \frac{\pi}{4}$

(ا) تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 2 + i$ تنتمي إلى (Γ)

(ب) عين طبيعة المجموعة (Γ)

التمرين الرابع: (06 نقاط)

لتكن f دالة عددية معرفة على $]-1; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = \frac{2x}{x+1} - \ln(x+1)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (وحدة الطول 2cm)

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) (ا) بين أنه من أجل عدد حقيقي x من $]-1; \infty[$: $f'(x) = \frac{1-x}{(x+1)^2}$ (حيث f' مشتقة الدالة f)

(ب) أدرس إتجاه تغير الدالة f على $]-1; \infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها

(3) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

(4) (ا) بين أن المنحني (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتها

(ب) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $3,9 < \alpha < 4$

(ج) أرسم (T) و المنحني (C_f)

(5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x - 3m$

(6) F دالة معرفة على $]-1; \infty[$ بـ : $F(x) = (-3 - x) \ln(x+1) + 3x$

(ا) بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1; \infty[$

(ب) لتكن $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما

$x = \alpha$ و $x = 0$

بين أن : $A(\alpha) = 4 \left(\frac{\alpha^2 - 3\alpha}{\alpha + 1} \right) \text{cm}^2$ ثم اوجد حصر ل $A(\alpha)$

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

- يحتوي كيس U_1 على سبع كرات منها ثلاث كرات تحمل الرقم 2 وأربع كرات تحمل الرقم 3 ويحتوي كيس U_2 على سبع كرات منها أربع كرات بيضاء وثلاث كرات حمراء (نعتبر كل الكرات متماثلة لا نفرق بينها باللمس)
- (1) نسحب من الكيس U_2 كرتين بالتتابع دون ارجاع الكرة المسحوبة
- (أ) احسب احتمال الحوادث الآتية :
- " A الحصول على كرتين من نفس اللون "
- " B الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل "
- (2) نسحب كرة واحدة من الكيس U_1 : اذا كانت الكرة المسحوبة تحمل الرقم 2 نسحب كرتين من الكيس U_2 بالتتابع دون ارجاع واذا كانت الكرة المسحوبة تحمل الرقم 3 نسحب ثلاث كرات من الكيس U_2 في آن واحد
- نعتبر المتغير العشوائي X المرتبط بعدد الكرات الحمراء المسحوبة
- (أ) عين قيم المتغير العشوائي X
- (ب) بين أن $E(X=1) = \frac{132}{245}$ و $E(X=2) = \frac{63}{245}$
- (ت) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X وأمله الرياضي $E(X)$

التمرين الثاني : (05 نقاط)

- (1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z-4)(z^2-4z+8)=0$
- (2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C, D التي لواحقتها على الترتيب $z_A = 2-2i, z_B = 2+2i, z_C = 4, z_D = -z_A$
- (أ) أكتب z_A و z_B على شكل أسّي
- (ب) أكتب $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$ على شكل أسّي ، استنتج طبيعة المثلث ABC
- (ج) تحقق أن $z_D = z_A + 2(z_B - z_C)$ ، ماذا تستنتج ؟
- (د) بين أن (DA) يوازي (CB)
- (3) نعتبر التحويل النقطي S الذي مركزه A ويحول B إلى C
- (أ) عيّن طبيعة التحويل S وحدد عناصره المميزة .

- (4) نعتبر (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $Arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$

(أ) تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ)

(ب) عين طبيعة المجموعة (Γ) محددا عناصرها المميزة

(ج) عيّن طبيعة المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S ، محددا عناصرها المميزة

التمرين الثالث : (04 نقاط)

1. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{4x+6}{x+3}$.
أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0, +\infty[$.
2. نعرف المتتالية (u_n) كما يلي : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.
(أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < 3$.
(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .
3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 2}$.
(أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .
(ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .
(ت) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4. أحسب S_n بدلالة n حيث : $S_n = \frac{5}{u_0 + 2} + \frac{5}{u_1 + 2} + \frac{5}{u_2 + 2} + \dots + \frac{5}{u_n + 2}$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

- I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$.
-1 ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .
-2 بين أن $g(x) > 0$ على $\mathbb{R}$.
- II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x + 1 + (2x - 1)e^{2x}$.
ليكن (C_f) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$.
1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
2. (أ) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$.
(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .
3. (أ) بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x + 1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$.
(ب) أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم (D) .
(ج) بين المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (D) يطلب تعيين معادلة له .
4. بين أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف I طلب تعيين إحداثياتها .
5. أنشئ المماس (T) و (D) والمنحني (C_f) على المجال $] -\infty; 1]$.
6. ناقش بيانها حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(2x - 1)e^{2x} = m - 1$.
7. (أ) باستعمال مكاملة بالتجزئة بين أن $\int_0^1 (2x - 1)e^{2x} dx = 1$.
(ب) احسب مساحة الحيز المحصور بين المنحني (C_f) والمماس (T) والمستقيمين $x = 0$ و $x = 1$.

الموضوع الثاني

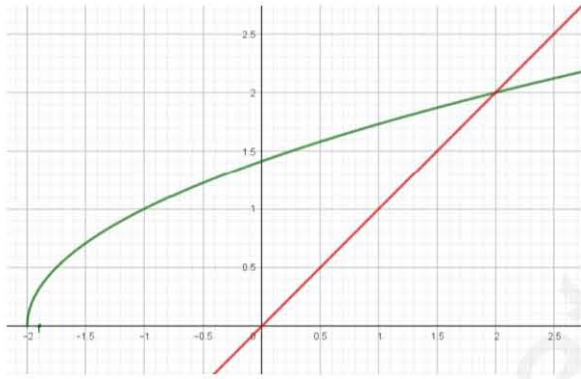
التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقط $C(0, -2, -3)$, $B(-3, -2, 3)$, $A(1, 2, -1)$

وليكن (P) المستوي ذو المعادلة الديكارتية : $x + y - z + 2 = 0$

1. أثبت أن النقط C, B, A تعين مستوي يطلب تعيين معادلة له .
2. أثبت أن المستويين (ABC) و (P) متعامدين .
3. عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (ABC) و (P)
4. عين احداثيات H المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (P)
5. احسب المسافة بين النقطة C والمستقيم (Δ)
6. لتكن G مرجع الجملة المثقلة التالية : $\{(A, 1); (B, -1); (C, 2)\}$.
(أ) عين احداثيات النقطة G .

7. عين طبيعة و العناصر المميزة للمجموعة (S) للنقط M من الفضاء حيث : $\|\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 4$



التمرين الثاني: (04 نقاط)

(1) الشكل المقابل هو التمثيل البياني (C) للدالة f المعرفة

على المجال $[-2, +\infty[$ ب : $f(x) = \sqrt{x+2}$.

و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في المستوي

المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(أ) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[-2, +\infty[$.

(ب) انقل التمثيل البياني (C) والمستقيم (Δ) على ورقة الإجابة ثم

مثل الحدود u_0, u_1, u_2 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل .

(ج) ضع تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n) .

(2) نعرف المتتالية (u_n) كما يلي : $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

(ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 2$.

(ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n}$, ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(د) استنتج أن (u_n) متقاربة .

(3) (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $0 < 2 - u_{n+1} < \frac{1}{2}(2 - u_n)$.

(ب) استنتج انه من أجل كل عدد طبيعي n , $0 < 2 - u_n < 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

(ج) استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثالث : (05 نقاط)

- (أ) عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = -3 + 12i\sqrt{3}$ حيث z في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقاط A, B, C, D و E التي لواحقتها على الترتيب $z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}, z_B = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}, z_C = 3 + 2i\sqrt{3}, z_D = -3 - 2i\sqrt{3}, z_E = \overline{z_D}$ و $z_E = \overline{z_D}$ (أ) بين أن النقاط B, C و E تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها A يطلب تعيين نصف قطرها .
 (ب) بين أن $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث BEC .
 (ت) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right)^n$ حقيقي سالب
 (3) بين أنه يوجد دوران r مركزه B ويحول النقطة E إلى C ، يطلب تعيين زوايته .
 (4) اكتب العبارة المركبة للدوران r
 (5) نعتبر (Γ) مجموعة النقاط M ذات الملاحقة z التي تحقق : $|\overline{z} + 3 + 2i\sqrt{3}| = |z_B|$
 (أ) عين طبيعة المجموعة (Γ) محددا عناصرها المميزة
 (ب) عين طبيعة المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالدوران r محددا عناصرها المميزة

التمرين الرابع : (07 نقاط)

- I لتكن الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = x + 1 - 2\ln x$
 1. احسب نهايتي الدالة g
 2. ادرس اتجاه تغيرات الدالة g على $]0; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها
 3. استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$
 (II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x + \ln x - (\ln x)^2$.
 وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 1. (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا .
 (ب) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 2. بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f .
 3. ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
 4. ادرس إشارة العبارة $\ln x - (\ln x)^2$ على المجال $]0; +\infty[$
 5. استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ) المعرف بالمعادلة $y = x$
 6. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث $0,6 < \alpha < 0,7$
 7. أنشئ المستقيم (Δ) المنحنى (C_f)
 (III) نضع $I = \int_1^e \ln(x) dx$ و $J = \int_1^e (\ln(x))^2 dx$
 (أ) بين باستعمال التكامل بالتجزئة أن : $J = e - 2I$
 (ب) تحقق أن الدالة $x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$
 (ب) استنتج مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x = e$ و $x = 1$

وهذه قيم المتغير العشوائي X_i :

$$X_i \in \{0, 1, 2, 3\}$$

حيث أن $P(X=2) = \frac{63}{245}$ و $P(X=1) = \frac{132}{245}$

$$P(X=1) = \frac{3}{7} \times \frac{2(A_3^1 \times A_4^1)}{A_7^2} + \frac{4}{7} \times \frac{C_3^1 \times C_4^1}{C_7^2}$$

$$= \frac{3}{7} \times \frac{24}{42} + \frac{4}{7} \times \frac{18}{35}$$

$$P(X=1) = \frac{132}{245}$$

$$P(X=2) = \frac{3}{7} \times \frac{A_3^2}{A_7^2} + \frac{4}{7} \times \frac{C_3^2 \times C_4^1}{C_7^3}$$

$$= \frac{3}{7} \times \frac{6}{42} + \frac{4}{7} \times \frac{3 \times 4}{35}$$

$$= \frac{3}{42} + \frac{48}{245}$$

$$P(X=2) = \frac{63}{245}$$

$$P(X=3) = \frac{4}{7} \times \frac{C_3^3}{C_7^3}$$

$$= \frac{4}{7} \times \frac{1}{35}$$

$$P(X=3) = \frac{4}{245}$$

$$P(X=0) = \frac{3}{7} \times \frac{A_4^2}{A_7^2} + \frac{4}{7} \times \frac{C_4^3}{C_7^3}$$

$$= \frac{3}{7} \times \frac{12}{42} + \frac{4}{7} \times \frac{4}{35}$$

$$= \frac{6}{49} + \frac{16}{245}$$

$$P(X=0) = \frac{46}{245}$$

نصحيح بالوراء يا قريبي دورة ماي 2019
شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

المركب الأول
اللبه 7 كرات
ثلاثة تحمل الرقم 2
اربعة تحمل الرقم 3

اللبه 7 كرات
اربعة بيضاء
ثلاثة حمراء

منجيب كرتين من اللب بالتتابع دون ارجاع
A "الحصول على كرتين من نفس اللون"

$$P(A) = \frac{A_4^2 + A_3^2}{A_7^2} = \frac{3}{7}$$

$$P(A) = \frac{3}{7}$$

B "الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل"

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{A_4^2}{A_7^2} = \frac{5}{7}$$

$$P(B) = \frac{5}{7}$$

حيث $\bar{B}$ عدم الحصول على كرة حمراء

2) قيم المتغير العشوائي X

سحب رقم 2 من اللب وسحب كرتين بيضاويتين
من اللب فقيمة X هي $X=0$

سحب رقم 3 من اللب وسحب ثلاث كرات
بيضاء من اللب فقيمة X هي $X=0$

سحب رقم 2 من اللب وسحب كرة حمراء وكرة
بيضاء من اللب فقيمة X هي $X=1$

سحب رقم 3 من اللب وسحب كرة حمراء وكرتين
بيضاء من اللب فقيمة X هي $X=1$

سحب رقم 2 من اللب وسحب كرتين حمراويتين
من اللب فقيمة X هي $X=2$

سحب رقم 3 من اللب وسحب كرتين حمراويتين
وكرة بيضاء من اللب فقيمة X هي $X=2$

سحب رقم 3 من اللب وسحب ثلاث كرات
حمراء من اللب فقيمة X هي $X=3$

لأنه الشكل المثلثي z_A هو

$$z_A = 2\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

كتابة z_B على شكل أسّي

$$z_B = \bar{z}_A = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

ب. كتابة $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$ على شكل أسّي

$$\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = \frac{4 - (2 - 2i)}{4 - (2 + 2i)}$$

$$= \frac{4 - 2 + 2i}{4 - 2 - 2i}$$

$$= \frac{2 + 2i}{2 - 2i}$$

$$= \frac{(2 + 2i)(2 + 2i)}{2^2 - 2^2}$$

$$= \frac{4 + 4i + 4i - 4}{2^2 + 2^2}$$

$$= \frac{4 + 4i + 4i - 4}{8}$$

$$= \frac{8i}{8}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = i$$

لدينا $|i| = 1$ و $\text{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

جميعاً المثلث ABC

$$\left| \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} \right| = \frac{|z_C - z_A|}{|z_C - z_B|} = \frac{AC}{AB} = 1$$

$$AC = AB$$

$$\text{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}\right) = \text{Arg}(i)$$

$$(\vec{BC}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{2}$$

وهذا ABC قائم في C وسأكون
الباقي

قانون الاحتمال المتكامل في X

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{46}{245}$	$\frac{132}{245}$	$\frac{63}{245}$	$\frac{4}{245}$

الأمثلة الرياضية

$$E(X) = 0\left(\frac{46}{245}\right) + 1\left(\frac{132}{245}\right) + 2\left(\frac{63}{245}\right) + 3\left(\frac{4}{245}\right)$$

$$= \frac{270}{245}$$

$$E(X) = \frac{54}{49}$$

المعادلة الثانية

حل المعادلة

$$(z - 4)(z^2 - 4z + 8) = 0$$

$$(z^2 - 4z + 8 = 0) \text{ أو } (z - 4 = 0)$$

$$z - 4 = 0 \text{ معناه } z = 4$$

$$z^2 - 4z + 8 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(8)$$

$$= 16 - 32$$

$$\Delta = -16$$

لا يوجد حلول حقيقية في Δ

$$z_1 = \frac{4 - 4i}{2} = 2 - 2i$$

$$z_2 = \frac{4 + 4i}{2} = 2 + 2i$$

حلول المعادلة هي

$$S = \{4; 2 + 2i; 2 - 2i\}$$

كتابة z_A و z_B على شكل أسّي

نصنح حركته ونحدد z_A

$$|z_A| = |2 - 2i| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Arg}(z_A) = \theta$$

$$\cos \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Arg}(z_A) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$a = \frac{-8i + 8f}{16}$$

$$a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$|a| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \quad \text{و} \quad a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{لدينا}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 1$$

ومن س مشابه مباشر مركزه A وثبت $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\text{Arg}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{\pi}{4}$$

(4) تغير (2) مجموعة النقاط ذات الارتفاع 2

$$\text{Arg}\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$$

أ. التحقق أن $CE \in (P)$

$$\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{لدينا من السؤال (ب):}$$

$$CE \in (P) \quad \text{أن} \quad \text{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$$

نصين طبيعة (P).

$$\text{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$(\vec{BM}, \vec{AM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{و} \quad \text{نص}$$

$$(\vec{MB}, \vec{MA}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{أ.}$$

إذن (P) هي نصف دائرة قطرها [AB]

مأخذ A و B والتي تشمل C.

(ج) نصين طبيعة (P')

(P') هي صورة (P) بواسطة S

مأخذ أن $S(A) = A$ و $S(B) = C$ فإن (P')

هي نصف دائرة قطرها [AC] مأخذ A و C

$$(\vec{MC}, \vec{MA}) = \frac{\pi}{2} \quad \text{لنثبت}$$

(ج) التحقق أن $z_D = z_A + 2(z_B - z_C)$

$$z_A + 2(z_B - z_C) = 2 - 2i + 2(2 + 2i - 4)$$

$$= 2 - 2i + 2(-2 + 2i)$$

$$= 2 - 2i - 4 + 4i$$

$$= -2 + 2i$$

$$= z_D$$

$$z_D = z_A + 2(z_B - z_C) \quad \text{إذن}$$

$$(z_D = z_A + 2z_B - 2z_C)$$

و نص z_D هي نقطة المرجح

$$\{(A, 1); (B, 2); (C, -2)\}$$

نصين أن $(CB) \parallel (DA)$

$$z_D = z_A + 2(z_B - z_C) \quad \text{لدينا}$$

أ.

$$z_D - z_A = 2(z_B - z_C)$$

$$\vec{AD} = 2\vec{CB}$$

و نص

إذن الشعاعان $\vec{AD}$ و $\vec{CB}$ مرتبطان

خطيًا ومما أن ABC مثلث

فإن $(AD) \parallel (CB)$

(3) نصين طبيعة S

$$\begin{cases} z_A = az_A + b & \text{①} \\ z_C = az_B + b & \text{②} \end{cases} \quad \text{نصنا} \quad \begin{cases} S(A) = A \\ S(B) = C \end{cases}$$

بالمرح نجد

$$z_C - z_A = a(z_B - z_A)$$

و نص

$$a = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$$

$$= \frac{4 - (2 - 2i)}{2 + 2i - (2 - 2i)}$$

$$= \frac{4 - 2 + 2i}{2 + 2i - 2 + 2i}$$

$$= \frac{2 + 2i}{4i}$$

$$= \frac{(2 + 2i)(-4i)}{16}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-U_n^2 + 4U_n + 6}{U_n + 3}$$

دراسة إشارة $(-U_n^2 + 4U_n + 6)$ بوضع $U_n = X$

$$\Delta = 1^2 - 4(6)(-1) \quad \text{حساب } \Delta$$

$$\Delta = 25$$

$$X_1 = \frac{-1-5}{-2} = 3 \quad \text{وسمى}$$

لأن

$$X_2 = \frac{-1+5}{-2} = -2$$

X	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$-X^2 + 4X + 6$	-	+	+	-

حيث أن $0 < U_n < 3$ فإن $-U_n^2 + 4U_n + 6 > 0$
 ومنه $U_{n+1} - U_n > 0$ إذن (U_n) متزايدة متناهية التقارب.

لنبا (U_n) متناهي متزايد متناهية
 ومحدودة من الأعلى $U_n < 3$ فهي متقاربة.
 ② $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n + 2}$
 - جيب أن (V_n) هندسية.

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 3}{U_{n+1} + 2}$$

$$= \frac{\frac{4U_n + 6}{U_n + 3} - 3}{\frac{4U_n + 6}{U_n + 3} + 2}$$

$$= \frac{4U_n + 6 - 3U_n - 9}{4U_n + 6 + 2U_n + 6}$$

$$= \frac{U_n - 3}{6U_n + 12}$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{U_n - 3}{U_n + 2} \right)$$

ومن (V_n) متناهي هندسي متناهي
 $V_0 = \frac{-3}{2}$

المركبة الثالث

$$f(x) = \frac{4x+6}{x+3}$$

دراسة إتياء تغيرات f على $[0, +\infty[$

المشتقة: f قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{4(x+3) - (4x+6)}{(x+3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6}{(x+3)^2}$$

$f'(x) > 0$ ومنه f دالة متزايدة متناهية على $[0, +\infty[$

$$U_{n+1} = f(U_n), \quad U_0 = 0$$

البرهان بالتراجع أنه من أجل n طبيعي
 $0 \leq U_n < 3$

(أ) التحفة من درجة الخاصة من أجل $n=0$
 لدينا $U_0 = 0$ و $0 < 0 < 3$ أي $0 \leq U_0 < 3$

إذن الخاصية محقة من أجل $n=0$
 (ب) نفرض صحة الخاصية من أجل n كفي

$$0 \leq U_n < 3$$

ونبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$
 أي نبرهن أن $0 \leq U_{n+1} < 3$

$$0 \leq U_n < 3$$

ول دالة متزايدة على $[0, +\infty[$ ومنه

$$f(0) \leq f(U_n) \leq f(3)$$

$$\text{لدينا } f(0) = 2 > 0 \text{ و } f(3) = 3$$

$$0 \leq U_{n+1} < 3$$

ومن الخاصية محقة من أجل $n+1$

الخلاصة:

من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_n < 3$

(ب) دراسة إتياء تغير (U_n)

$$U_{n+1} - U_n = \frac{4U_n + 6}{U_n + 3} - U_n$$

$$= \frac{4U_n + 6 - U_n^2 - 3U_n}{U_n + 3}$$

$$S_n = n+1 - \left(-\frac{3}{2} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{6}} \right) \right)$$

$$= n+1 + \frac{3}{2} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}}{\frac{5}{6}} \right)$$

$$S_n = n+1 + \frac{9}{5} \left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} \right)$$

المسألة الرابعة:

$$g(x) = 1 + 4xe^{2x} \quad (I)$$

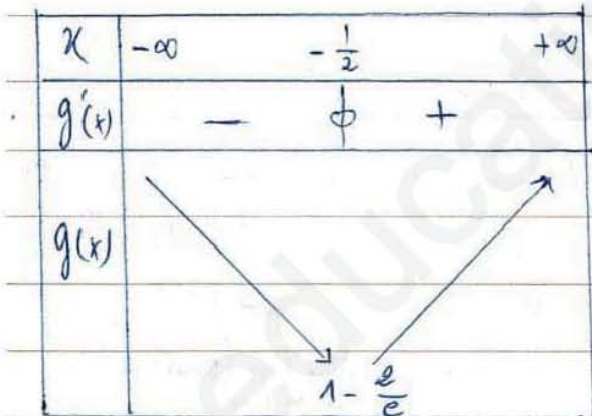
1. دراسة اتجاه تغيرات الدالة g :
المشتقة: $4e^{2x}$

g دالة قابلة للاشتقاق في $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$g'(x) = 4e^{2x} + 2e^{2x}(4x) \\ = (4 + 8x)e^{2x}$$

$$g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(2x+1)$ (لأن $e^{2x} > 0$)



إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

حيث أن القيمة الحرجة $x = -\frac{1}{2}$ هي $g(-\frac{1}{2}) > 0$

فإن $g(x) > 0$ على $\mathbb{R}$.

$$f(x) = x+1 + (2x-1)e^{2x} \quad (II)$$

1. حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 + (2x-1)e^{2x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x+1 + (2x-1)e^{2x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x-1)e^{2x} = 0 \text{ لأن}$$

علاقة V_n مع U_n :

$$V_n = -\frac{3}{2} \left(\frac{1}{6} \right)^n$$

إستنتاج علاقة U_n مع U_{n+1} :

$$V_n(U_{n+1} - U_n) = (U_n - 3) \text{ ومنه } V_n = \frac{U_n - 3}{U_{n+1} - U_n}$$

$$V_n U_{n+1} + 2V_n = U_n - 3 \text{ أي}$$

$$V_n U_n - U_n = -2V_n - 3 \text{ ومنه}$$

$$U_n(V_n - 1) = -2V_n - 3 \text{ أي}$$

$$U_n = \frac{-2V_n - 3}{V_n - 1} \text{ إذن}$$

$$U_n = \frac{3 \left(\frac{1}{6} \right)^n - 3}{-\frac{3}{2} \left(\frac{1}{6} \right)^n - 1}$$

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \left(\frac{1}{6} \right)^n - 3}{-\frac{3}{2} \left(\frac{1}{6} \right)^n - 1} = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{6} \right)^n = 0$$

حساب S_n :

$$S_n = \frac{5}{U_0+2} + \frac{5}{U_1+2} + \frac{5}{U_2+2} + \dots + \frac{5}{U_n+2}$$

$$V_n = \frac{U_n - 3}{U_{n+1} - U_n} \text{ أي } V_n = \frac{U_n - 3}{U_{n+1} - U_n}$$

$$= \frac{U_n - 3}{U_{n+1} - U_n} - \frac{5}{U_{n+1} - U_n}$$

$$V_n = 1 - \frac{5}{U_{n+1} - U_n} \text{ ومنه}$$

$$V_n - 1 = -\frac{5}{U_{n+1} - U_n} \text{ أي}$$

$$\frac{5}{U_{n+1} - U_n} = 1 - V_n \text{ إذن}$$

$$S_n = 1 - V_0 + 1 - V_1 + 1 - V_2 + \dots + 1 - V_n$$

$$= (1+1+\dots+1) - (V_0+V_1+\dots+V_n)$$

$$= n+1 - \left(\frac{1 - 9^{n+1}}{1 - 9} \right)$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$(2x+1)$	-	ϕ	+
e^{2x}		+	
$(2x-1)e^{2x}$	-	ϕ	+
الوضع النسبي		(f) حافة (D) (f) قطع (D) (f) يقطع (D)	

$$(f) \cap (D) = \left\{ A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \right\}$$

ج) تبين أن (f) يقبل حاسماً (T) موارد
للمستقيم (D)

$$f'(x_0) = 1 \text{ معناه } (D) \parallel (T)$$

$$g(x) = 1 \text{ معناه } f'(x) = 1$$

$$1 + 4xe^{2x} = 1 \text{ أي}$$

$$4xe^{2x} = 0 \text{ أي}$$

$$x = 0 \text{ أي}$$

كتابة معادلة المماس عند النقطة $x = 0$

$$(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$(T): y = x$$

4- تبين أن (f) يقبل نقطة انعطاف

$$f''(x) = g'(x) \text{ لدينا}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	ϕ	+

f تقدم عند $x = -\frac{1}{2}$ وتغير إشارتها.

ومن النقطة $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - 2e^{-1}\right)$ نقطة انعطاف

للمنحني (f).

2- الدفعة أن $f(x) = g(x)$
f دالة قابلة للاشتقاق على $J =]-\infty, +\infty[$

لدينا،

$$f'(x) = 1 + 2e^{2x} + 2e^{2x}(2x-1)$$

$$= 1 + 2e^{2x} + 4xe^{2x} - 2e^{2x}$$

$$f'(x) = 1 + 4xe^{2x}$$

ومن $f'(x) = g(x)$

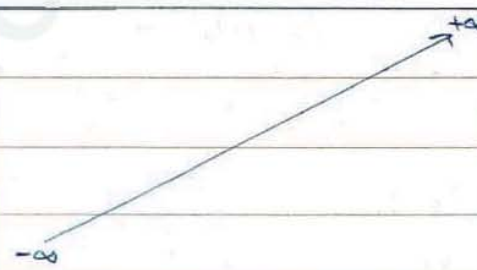
استنتاج إشارة $f'(x)$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

بما أن $g(x) > 0$ فإن $f'(x) > 0$ ومنه f دالة

متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		

3- تبين أن $y = x+1$ مستقيم مقارب

مائل للمنحني (f) عند $(-\infty)$

$$\text{لدينا } f(x) = (x+1) = (2x+1)e^{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+1)e^{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} = e^{2x} = 0$$

ومن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x+1$

مستقيم مقارب مائل للمنحني (f) لجوار

$(-\infty)$

دراسة الوضع النسبي لـ (f) مع (D)

لدراسة إشارة الفروقات

$$f(x) - (x+1)$$

$$\int_0^1 (2x-1)e^{2x} dx = 1 \quad \text{بجني ان}$$

$$\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases} \quad \text{وبعد} \quad \begin{cases} u(x) = 2x-1 \\ v'(x) = e^{2x} \end{cases}$$

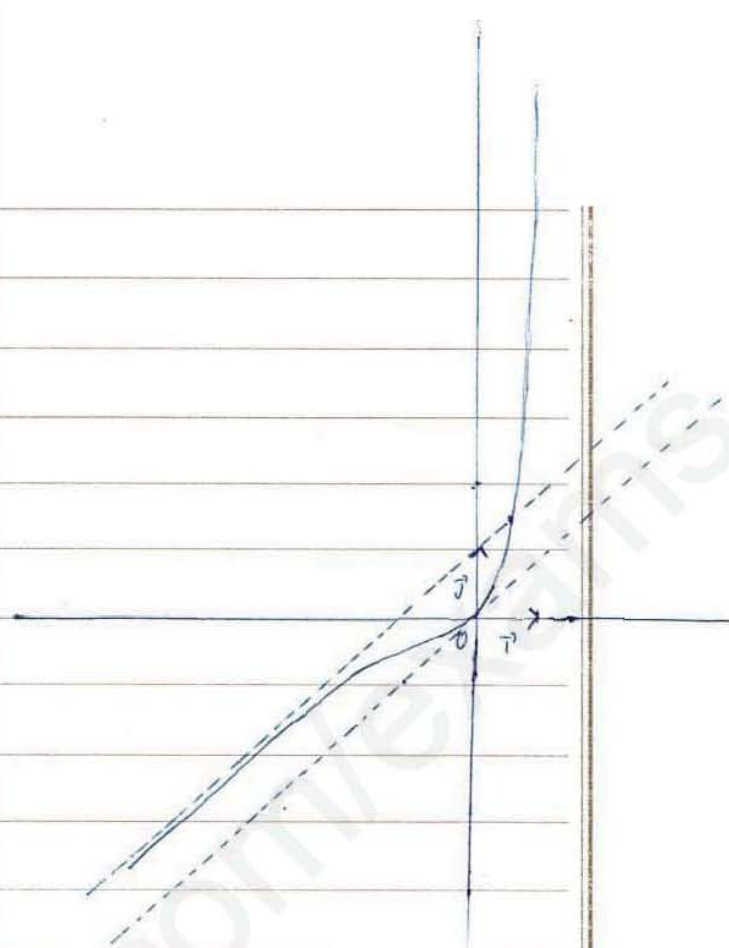
$$\begin{aligned} \int_0^1 (2x-1)e^{2x} dx &= \left[\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x} \right]_0^1 - \int_0^1 2\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x} \right]_0^1 - \int_0^1 e^{2x} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x} \right]_0^1 - \left[\frac{1}{2}e^{2x} \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{2}(2-1)e^2 \right) - \left(\frac{1}{2}(-1)e^0 \right) - \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 (2x-1)e^{2x} dx = 1$$

7- حساب مساحة المنحني المحدود بين (C_f) و (T) والمستقي $x=1$ و $x=0$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 f(x) - x dx = \int_0^1 (2x-1)e^{2x} + 1 dx \\ &= \int_0^1 (2x-1)e^{2x} dx + \int_0^1 1 dx \\ &= 1 + [x]_0^1 \\ &= 1 + 1 \end{aligned}$$

$$A = 2 \text{ cm}^2$$



المناقشة البانية.

$$(2x-1)e^{2x} = m-1$$

$$(2x-1)e^{2x} + 1 = m \quad \text{وبعد}$$

$$(2x-1)e^{2x} + 1 + x = x + m \quad \text{ان}$$

$$f(x) = x + m \dots (*) \quad \text{وبعد}$$

طول المقابلة $(*)$ هي نقطتان

تقاطع (C_f) مع المستقي (Δ_m)

$$y = m+1 \quad (\Delta_m) \quad \text{الموزنية } (1)$$

و (T)

من اجل $m \in]-\infty, 0[$ المقابلة $(*)$ لا يقبل طول

من اجل $m = 0$ المقابلة $(*)$ يقبل طول واحد

من اجل $m \in]0, 1[$ المقابلة $(*)$ تقبل

حلين متباينين

من اجل $m \in [1, +\infty[$ المقابلة $(*)$ تقبل

حل واحد

لكن قسمة d :
لدينا $C(0, -2, -3) \in (ABC)$

الموضوع الثاني :
المترين الأول :

إثبات أن للنقطتين مستو

لدينا $\vec{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$-\frac{4}{-1} \neq \frac{-4}{-4}$$

ومنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\vec{AB} = k\vec{AC}$
إذن الشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين
حسباً ومنه النقط A, B, C ليست على
استقامة فهي نقطتين مستو.

- نعين
نضع

معادلة ديكارتية لـ (ABC)

$\vec{n} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ شعاع داخلي لـ (ABC)

معناه $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} -4a - 4b + 4c = 0 \dots ① \\ -a - 4b - 2c = 0 \dots ② \end{cases}$

بمطرح ② من ① نحصل

$$-3a + 6c = 0$$

أي $-3a = -6c$

ومنه $\boxed{a = 2c}$

نضع $\boxed{c = 1}$ نجد $\boxed{a = 2}$

بالتعويض في ② نجد

$$-2 - 4b - 2 = 0$$

أي $\boxed{b = -1}$ ومنه

ومنه $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع داخلي لـ (ABC)

ومنه معادلة الديكارتي لـ (ABC) هي
الشكل

$$2x - y + z + d = 0$$

معناه $d = 1$ أي $2 - 3 + d = 0$
ومنه المعادلة الديكارتي لـ (ABC) هي

(ABC): $2x - y + z + 1 = 0$

2- نعين أن (P) و (ABC) متعامدان

لدينا $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ داخلي لـ (ABC)

و $\vec{n}' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ داخلي لـ (P)

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 2(1) + (-1)(1) + 1(-1) = 0$$

ومنه $\vec{n}$ يعامد $\vec{n}'$ إذن (ABC) يعامد (P)

3- نعين تمثيل وسيطي لـ (Δ) مستقيم تقاطع (ABC) و (P)

(Δ): $\begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \dots ① \\ x + y - z + 2 = 0 \dots ② \end{cases}$

نجمع ① و ② نجد $3x + 3 = 0$ أي $\boxed{x = -1}$
بالتعويض في ① نجد

$$-2 - y + z + 1 = 0$$

أي $-1 - y + z = 0$

نضع $\boxed{z = t}$ نجد $-1 - y + t = 0$

أي $\boxed{y = t - 1}$

ومنه التمثيل الوسيطي لـ (Δ) هو

(Δ): $\begin{cases} x = -1 \\ y = t - 1 \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$

- نعين إحداثيات H المسقط العمودي
لـ (C) على (P).

أولاً نعين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) العمودي
على (P) والذي يسيل C

بما أن (Δ) عمودي على (P) أيان $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

يعبر شعاع توجيه لـ (Δ) ومنه التمثيل الوسيطي
لـ (Δ) هو

(Δ): $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha - 2 \\ z = -\alpha - 3 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$

ومن حسب الخاصية المميزة لمربع
ثلاث فقط

$$\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} = 2\vec{MG}$$

$$\|\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = \|2\vec{MG}\| \text{ أي}$$

$$\|\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 2MG \text{ إذن}$$

$$\|\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 4 \text{ ومنه}$$

$$2MG = 4 \text{ تكافئ}$$

$$MG = 2 \text{ أي}$$

ومن (S) هي سطح كرة مركزها
G ونصف قطرها 2.

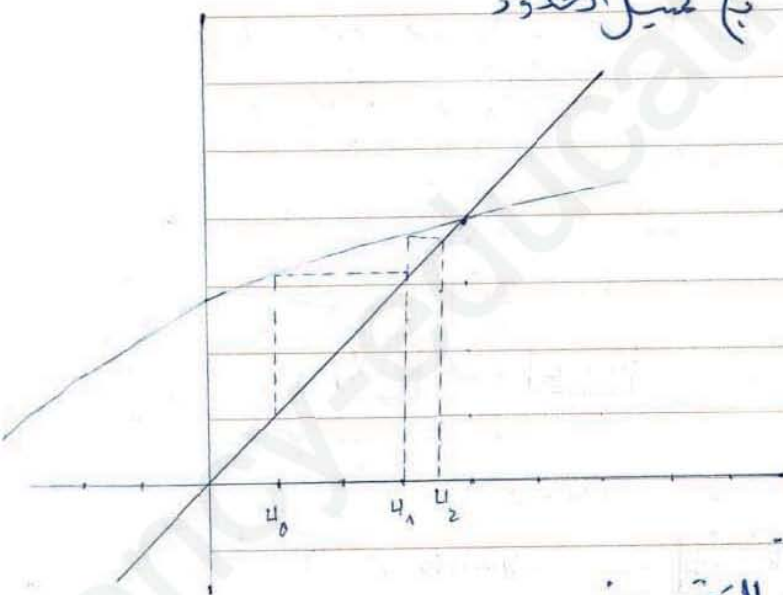
المتربن الثاني.

أ. دراسة اتجاه تغير الدالة f على $[-2, +\infty[$

لدينا f دالة متزايدة للإستقامت على $[-2, +\infty[$
وذلك المستقيمة هي:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} > 0$$

ومن f دالة متزايدة تمامًا على $[-2, +\infty[$
مع تمثيل الحدود



المتربن

لدينا $u_0 < u_1 < u_2$ ومنه (u_n) متزايدة
على $\mathbb{N}$ متناهي ومتقاربة نحو 2

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$$

② دفع

صيت تقاطع (D) مع (P)

لتكن $M(\alpha, \alpha-2, -\alpha-3)$ نقطة من (D)

ME (P) معناه

$$\alpha + \alpha - 2 - (-\alpha - 3) + 2 = 0$$

$$3\alpha + 3 = 0 \text{ أي}$$

$$\boxed{\alpha = -1} \text{ إذن}$$

ومن إحداثيات H المسقط

الموحد لـ C على (P) هي

$$H(-1, -3, -2)$$

حساب المسافة بين C و (A)

محان (P) بعمامد (ABC) و (D)

سيت تقاطعها فإن

$$d(C, (D)) = d(C, (P)) = CH$$

$$d(C, (P)) = \frac{|1 - 2 - (-3) + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$CH = \sqrt{(-1)^2 + (-3+2)^2 + (-2+3)^2} = \sqrt{3}$$

$$d(A, (D)) = \sqrt{3} \text{ ومنه}$$

6. تعيين إحداثيات G مركز الكرة

$$\{(A, 1), (B, -1), (C, 2)\}$$

$$x_G = \frac{x_A - x_B + 2x_C}{2} = \frac{1 - 3 + 2(0)}{2} = -1$$

$$y_G = \frac{y_A - y_B + 2y_C}{2} = \frac{2 + 2 + 2(-2)}{2} = 0$$

$$z_G = \frac{z_A + z_B + 2z_C}{2} = \frac{-1 - 3 + 2(-3)}{2} = -5$$

إذن

$$G(-1, 0, -5)$$

7. تعيين طبيعة (S)

$$(S): \|\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 4$$

لدينا G مركز الكرة

$$\{(A, 1), (B, -1), (C, 2)\}$$

$$X_1 = \frac{-1-3}{-2} = 2$$

ونس

$$X_2 = \frac{-1+3}{-2} = -1$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$-x^2+x+2$		-	+	-

بما ان $0 < u_n < 2$ فإن $-u_n^2 + u_n + 2 > 0$
 ونستنتج من $u_{n+1} - u_n > 0$ ان (u_n) متزايدة
 متزايدة متناهية IN.

مراجعة تقارب (u_n)

لدينا (u_n) متزايدة متناهية تماماً وحدودها
 من الأعلى (2) فهي متقاربة.

$$0 < 2 - u_{n+1} < \frac{1}{2}(2 - u_n)$$

$$2 - u_{n+1} > 0 \text{ ونستنتج } 0 < u_{n+1} < 2$$

$$2 - u_{n+1} = 2 - \sqrt{u_n + 2}$$

$$= \frac{(2 - \sqrt{u_n + 2})(2 + \sqrt{u_n + 2})}{(2 + \sqrt{u_n + 2})}$$

$$= \frac{4 - (u_n + 2)}{2 + \sqrt{u_n + 2}}$$

$$= \frac{4 - u_n}{2 + \sqrt{u_n + 2}}$$

$$2 - u_{n+1} = \frac{2 - u_n}{2 + \sqrt{u_n + 2}}$$

$$\sqrt{u_n + 2} > 0 \text{ ونستنتج } u_{n+1} > 0$$

$$2 + \sqrt{u_n + 2} > 2$$

$$\frac{1}{2 + \sqrt{u_n + 2}} < \frac{1}{2}$$

$$0 < 2 - u_{n+1} < \frac{1}{2}(2 - u_n)$$

$$\frac{1(2 - u_n)}{2 + \sqrt{u_n + 2}} < \frac{1}{2}(2 - u_n)$$

$$0 < 2 - u_{n+1} < \frac{1}{2}(2 - u_n)$$

أي

المبرهان بالترتيب ان $0 < u_n < 2$

لدينا - الحققة من اجل $n=0$

$$0 < \frac{1}{2} < 2 \text{ لدينا } u_0 = \frac{1}{2}$$

$$\text{اذن } 0 < u_0 < 2 \text{ حقيقة}$$

نفرض صحة الخاصية من اجل n كفي

$$0 < u_n < 2$$

نبرهن صحة الخاصية من اجل $n+1$ اي

$$0 < u_{n+1} < 2$$

لدينا $0 < u_n < 2$ و f دالة متزايدة

على $[-2, +\infty)$ ونستنتج

$$f(0) < f(u_n) < f(2)$$

$$\text{اي } \sqrt{2} < u_{n+1} < 2$$

$$\text{بما ان } \sqrt{2} > 0 \text{ فإن } 0 < u_{n+1} < 2$$

ونستنتج الخاصية حقيقة من اجل $n+1$

الملاحظة

من اجل n كفي: $0 < u_n < 2$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n} \text{ حيث ان}$$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 2} - u_n \text{ لدينا}$$

$$= \frac{(\sqrt{u_n + 2} - u_n)(\sqrt{u_n + 2} + u_n)}{\sqrt{u_n + 2} + u_n}$$

$$= \frac{(\sqrt{u_n + 2})^2 - u_n^2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n}$$

$$= \frac{u_n + 2 - u_n^2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n}$$

دراسة (u_n) ونغير (u_n)

دراسة إشارة $(-u_n^2 + u_n + 2)$

$$\text{نضع } x = u_n \text{ عند } -x^2 + x + 2$$

$$\Delta = (1)^2 - 4(2)(-1) = 9$$

$$2x^2 = 18$$

$$x^2 = 9$$

$$x = -3 \text{ أو } x = 3 \text{ ونسبة}$$

$$x = 3 \text{ داخل بالمعنيين في B نجد}$$

$$2(3)y = 12\sqrt{3}$$

$$y = 2\sqrt{3} \text{ أي}$$

$$2(-3)y = 12\sqrt{3} \text{ نجد } x = -3 \text{ ونسبة}$$

$$y = -2\sqrt{3}$$

$$z = -3 + 12i\sqrt{3} \text{ جذرات التربيعيات}$$

$$w_1 = -3 + 2i\sqrt{3}, w_2 = 3 + 2i\sqrt{3}$$

نحتاج أن B, C, E تقع على دائرة مركزها A

$$z_B = -\sqrt{3}i, z_A = \sqrt{3}i \text{ لدينا}$$

$$AB = |z_B - z_A| = |-\sqrt{3}i - \sqrt{3}i| = |-2\sqrt{3}i| = 2\sqrt{3}$$

$$AC = |z_C - z_A| = |3 + 2i\sqrt{3} - \sqrt{3}i| = |3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$AC = 2\sqrt{3}$$

$$AE = |-3 + 2i\sqrt{3} - \sqrt{3}i| = |-3 + i\sqrt{3}|$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + \sqrt{3}^2}$$

$$= \sqrt{12}$$

$$AE = 2\sqrt{3}$$

$$AB = AC = AE = 2\sqrt{3} \text{ لدينا}$$

ونسبة B, C, E تقع على دائرة مركزها A

ونصف قطرها $2\sqrt{3}$

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ نحسب أن}$$

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{3 + 2i\sqrt{3} + i\sqrt{3}}{-3 + 2i\sqrt{3} + i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3 + 3i\sqrt{3}}{-3 + 3i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3(1 + i\sqrt{3})}{3(-1 + i\sqrt{3})}$$

$$= \frac{1 + i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3}}$$

نجمع (2) مع (1) نجد

أي

$$0 < 2 - U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ استنتاج أن}$$

$$0 < 2 - U_n < \frac{1}{2}(2 - U_{n-1}) \text{ لدينا}$$

$$(2 - U_{n-1}) < \frac{1}{2}(2 - U_{n-2})$$

$$(2 - U_1) < \frac{1}{2}(2 - U_0)$$

$$0 < 2 - U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (2 - U_0) \text{ ونسبة}$$

$$0 < 2 - U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(2 - \frac{1}{2}\right) \text{ أي}$$

$$0 < 2 - U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{3}{2}\right)$$

$$0 < 2 - U_n < 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \text{ استنتاج}$$

$$0 < 2 - U_n < 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \text{ لدينا}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 < \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - U_n) < \lim_{n \rightarrow +\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$0 < \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - U_n) < 0 \text{ أي}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - U_n = 0 \text{ إذن}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2 \text{ ونسبة}$$

المسألة (3) ① تعين الجذور التربيعية لـ

$$z = -3 + 12i\sqrt{3}$$

بوضع $w = x + iy$ جذر لـ z معناه

$$w^2 = z$$

$$w^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \text{ لدينا}$$

$$|w|^2 = |w^2| = |z| = x^2 + y^2$$

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + (12\sqrt{3})^2} = 21$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 21 & \text{--- ①} \\ x^2 - y^2 = -3 & \text{--- ②} \\ 2xy = 12\sqrt{3} & \text{--- ③} \end{cases} \text{ مع } w^2 = z$$

من الناحية العكسية، دوران حول E إلى C و C إلى B .

$$\begin{cases} z_B = az_B + b \\ z_C = az_E + b \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} r(B) = B \\ r(E) = C \end{cases}$$

بالطرح نجد

$$z_C - z_B = a(z_E - z_B)$$

$$a = \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}$$

اذن

$$a = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

مباين $|a| = 1$ اذ r دوران / و $-\frac{\pi}{3}$ نصف عبارة المركبة
لذا $a = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$b = z_B - az_B$$

ونست

$$= z_B(1-a)$$

$$= (-\sqrt{3}i)\left(1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= (-\sqrt{3}i)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{2}$$

العبارة المركبة لدوران r هي

$$z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(5) نختار (1) حيث $|z + 3 + 2i\sqrt{3}| = |z_B|$

نعتبر طبعة (2).

$$|z + 3 - 2i\sqrt{3}| = |z_B| \text{ معناه } |z + 3 + 2i\sqrt{3}| = |z_B|$$

$$|z + 3 - 2i\sqrt{3}| = \sqrt{3} \text{ اي}$$

$$|z - (-3 + 2i\sqrt{3})| = \sqrt{3}$$

$$|z - z_E| = \sqrt{3}$$

$$EM = \sqrt{3}$$

ونست (2) هي دائرة مركزها E ونصف قطرها $\sqrt{3}$.

طبعة (3) : (3') هي صورة (2) بواسطة الدوران r

ونست (3') هي دائرة مركزها C و $r(E) = C$ ونصف

قطرها $r = \sqrt{3}$.

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3}} = \frac{(1 + i\sqrt{3})(-1 - i\sqrt{3})}{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{-1 - i\sqrt{3} - i\sqrt{3} + 3}{4}$$

$$= \frac{2 - 2i\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left|\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

لذا

$$\theta = \text{Arg}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ حيث}$$

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

اذن

نعتبر قيم العدد الطبيعي n حتى يكون
حقيقي سالب $\left(\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right)^n$

$$\left(\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right)^n \text{ حقيقي سالب معناه}$$

$$\text{Arg}\left(\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right)^n = \pi + 2k\pi$$

$$\text{Arg}\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^n = \pi + 2k\pi$$

$$\text{Arg}\left(e^{-i\frac{n\pi}{3}}\right) = \pi + 2k\pi$$

$$-\frac{n\pi}{3} = \pi + 2k\pi \text{ اذن}$$

$$n = -3 - 6k$$

مع k عدد صحيح نبي سالب غير معلوم

المسألة الرابع :

$$g(x) = x + 1 - 2 \ln x$$

حساب نهايات g :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 - 2 \ln x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2 \ln x}{x} \right)$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ لأن}$$

دراسة إيجاباً و تغيرات الدالة g
وقابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$ لدينا

$$g'(x) = 1 - \frac{2}{x}$$

$$= \frac{x-2}{x}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(x-2)$

جدول تغيرات g :

x	0	2	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
$g(x)$	$+\infty$	$3 - 2 \ln 2$	$+\infty$

استنتاج إشارة $g(x)$:

بما أن $g(2) = 3 - 2 \ln 2 > 0$ فـ $g(x) > 0$ على $]0, +\infty[$

فإن $g(x) > 0$ على $]0, +\infty[$

x	1	$+\infty$
$g(x)$		+

$$f(x) = x + \ln x - (\ln x)^2 \quad (II)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ حساب}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x + \ln x - (\ln x)^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x + \ln x (1 - \ln x) = -\infty$$

التفسير الهندسي :

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ فإن f (في) أفضل المسغم
ذو المعادلة $x=0$ كمنحني مقارب

موازي لمحور الترتيب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ تبين أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln x - (\ln x)^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{\ln x}{x} - \frac{(\ln x)^2}{x} \right)$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x} \text{ (2) تبين أن}$$

f دالة قابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$
لدينا

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{2 \ln x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{x+1-2 \ln x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x} \text{ ومنه}$$

3- دراسة إيجاباً و تغيرات الدالة f

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

ومن $g(x) > 0$ فإن $f'(x) > 0$ دالة متزايدة

كامل على $]0, +\infty[$

4- جدول تغيرات الدالة f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

منه نتائج:

4 - دراسة إشارة العبارة $\ln x - (\ln x)^2$

$$\ln x (1 - \ln x) = 0 \quad \ln x - (\ln x)^2 = 0$$

أيضا $(\ln x = 0)$ و $(1 - \ln x = 0)$

$$x = e \quad \text{و} \quad x = 1$$

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln x - (\ln x)^2$	-	0	0	-

إستنتاج الموقع التي بين (Δ) و (Γ)

$$y = x$$

$$f(x) - x = \ln x - (\ln x)^2$$

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln x - (\ln x)^2$	-	0	0	-
الوضع		(ف) يقع	(ف) يقع	(ف) يقع
النتي		تحت (د)	فوق (د)	تحت (د)
		(ف) يقع (د)	(ف) يقع (د)	

$$(f) \cap (\Delta) = \{A(1,1), B(e,e)\}$$

بين ان المعادلة $f(x) = 0$ قبل واحد

$$\alpha \text{ حيث } 0,6 < \alpha < 0,7$$

f دالة مستمرة ومتزايدة على $[0, +\infty)$

وبالتالي f هي دالة متزايدة على $[0, +\infty)$

$$\left. \begin{array}{l} f(0,7) : \\ f(0,6) : \end{array} \right\} \text{ ان } f(0,7) \cdot f(0,6) < 0$$

ومن حسب مبرهنة القيمة المتوسطة

يوجد α وحيد في المجال $[0,6; 0,7]$

$$f(\alpha) = 0$$

$$J = \int_1^e (\ln x)^2 dx \quad , \quad I = \int_1^e \ln x dx \quad (\text{III})$$

$$J = e - 2I$$

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{2 \ln x}{x} \\ v(x) = x \end{cases} \quad \text{وضع} \quad \begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} J &= \int_1^e (\ln x)^2 dx = \left[x (\ln x)^2 \right]_1^e - \int_1^e x \left(\frac{2 \ln x}{x} \right) dx \\ &= \left[x (\ln x)^2 \right]_1^e - \int_1^e 2 \ln x dx \\ &= e (\ln e)^2 - 1 (\ln 1)^2 - 2 \int_1^e \ln x dx \end{aligned}$$

$$J = e - 2I$$

تحقق ان $x \ln x - x$ دالة اصلية لـ $\ln x$

وضع $h(x) = x \ln x - x$: h قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty)$ ولها

$$h'(x) = 1 \ln x + \frac{1}{x} x - 1 = \ln x$$

ومن $x \ln x - x$ دالة اصلية لـ $\ln x$

بحسب مبرهنة الجبر

$$\begin{aligned} A &= \int_1^e f(x) - x dx = \int_1^e \ln x - (\ln x)^2 dx \\ &= \int_1^e \ln x - \int_1^e (\ln x)^2 dx \\ &= \left[x \ln x - x \right]_1^e - \left(e - 2 \left[x \ln x - x \right]_1^e \right) \\ &= e - e - 1 + e + 2(1 - 1) \end{aligned}$$

$$A = 3 - e$$

على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (4 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم م $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقط $A(1;2;-2)$ ، $B(0;3;-3)$ و $C(1;1;-2)$

(1) أ - بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا.

ب - بين أن الشعاع $\vec{n}(1;0;-1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم اكتب معادلة ديكارتية له.

(2) لتكن (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث: $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z = 0$

- بين أن (S) هي سطح كرة يطلب تحديد احداثيات مركزها Ω و نصف قطرها .

(3) أ - بين أن سطح الكرة (S) يمس المستوي (ABC) .

ب - احسب الطول ΩC ثم استنتج نقطة التماس بين (S) و (ABC) .

التمرين الثاني: (4.5 نقاط)

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى م م $(O; \vec{i}; \vec{j})$ النقط A ، B و C ذات اللواحق: $z_A = i$ ، $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ و f التحويل النقطي المعرف بالعلاقة المركبة: $z' = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

(1) أ - اكتب z_C على الشكل الجبري.

ب - حدد طبيعة التحويل f مع تعيين عناصره المميزة.

(2) أ - اوجد z_D لاحقة D مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-1);(C,2)\}$.

ب - حدد طبيعة مجموعة النقط $M(Z)$ التي تحقق: $z = e^{i\theta}$ لما يتغير θ في المجال $[0;2\pi]$.

(3) نعتبر الآن التحويل النقطي h الذي يحول $M(Z)$ إلى $M'(Z')$ حيث: $z' - i = 2(z - i)$

أ - حدد طبيعة التحويل h و عناصره المميزة.

ب - اوجد z_E لاحقة E صورة النقطة D بالتحويل h ثم بين أن: $z_D - z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_E - z_C)$

ج - استنتج قياس للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{CE}; \overrightarrow{CD})$ ثم حدد نوع المثلث CDE .

(4) بين أن التحويل $s = r \circ h$ هو تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة.

التمرين الثالث: (4 نقاط)

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على N حيث: $u_0 = 1$ و $v_0 = 2$ و من أجل كل n من N :

$$v_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n \quad \text{و} \quad u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}v_n$$

(1) لتكن المتتالية (w_n) المعرفة على N بـ: $w_n = v_n - u_n$

أ - بين أن المتتالية (w_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول w_0 يطلب حسابه.

ب - اكتب بدلالة n عبارة الحد العام w_n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.

ج - استنتج إشارة w_n ثم استنتج أنه من أجل كل n من N : $v_n \geq u_n$.

(2) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و المتتالية (v_n) متناقصة تماما.

(3) بين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ .

(4) أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من N : $v_n + u_n = 3$

ب - استنتج النهاية ℓ .

التمرين الرابع: (7.5 نقاط)

(I) g دالة معرفة على $]-\infty; 1]$ بـ: $g(x) = 1 - (x-1)e^{x-1}$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-\infty; 1]$.

(2) شكل جدول تغيرات الدالة g ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]-\infty; 1]$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ: $f(x) = -e^{x-1} + \ln(1-x)$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ثم فسر النتيجة الثانية بيانيا.

(2) بين أنه من أجل كل x من $]-\infty; 1[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{1-x}$ ثم شكل جدول تغيرات f .

(3) أ - بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $-1 < \alpha < 0$.

ب - عين حصرًا للعدد α سعته $0, 1$.

(4) احسب $f(0)$ ثم انشئ المنحنى (C_f) .

(5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة: $-e^{x-1} - 2m + \ln(1-x) = 0$

(6) نعتبر الدالة h المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ: $h(x) = (x-1)\ln(1-x) - x$

أ - بين أن h هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(1-x)$ على المجال $]-\infty; 1[$.

ب - احسب العدد الحقيقي $I = \int_{-1}^{\alpha} f(x) dx$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقاط)

(I) نعتبر كثير الحدود التالي: $p(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$

(1) عين العددين الحقيقيين α و β بحيث يكون: $p(z) = (z + 1)(z^2 + \alpha z + \beta)$

(2) حل في C المعادلة: $p(z) = 0$

(II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ النقاط A, B, C و D

حيث: $z_D = 3$ و $z_C = \overline{z_B}$ ، $z_B = 2 + \sqrt{3}i$ ، $z_A = -1$

(1) بين باستعمال الخواص و علاقة شال أن: $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = (\overline{AC}; \overline{AB})$

(2) اكتب العدد $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج نوع المثلث ABC بدقة.

(3) بين أن النقطة D هي مرجح الجملة $\{(A; -1); (B; 2); (C; 2)\}$

(4) (Δ) مجموعة النقط $M(x; y)$ التي تحقق: $(-\overline{MA} + 2\overline{MB} + 2\overline{MC}) \cdot \overline{CD} = 12$

- اوجد بدلالة x و y احداثيات $\overline{MD}$ ثم بين أن (Δ) هو مستقيم يطلب تحديد معادلة ديكارتية له.

التمرين الثاني: (4 نقاط)

(u_n) متتالية معرفة على N بـ $u_0 = 0$ و $u_1 = 1$ من أجل كل n من N : $u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n$

نضع من أجل كل n من N : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n$ و $w_n = 5^n u_n$

(1) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{5}$ يطلب حساب حدها الأول v_0 و اعطاء عبارة حده العام v_n .

(2) بين أن المتتالية (w_n) حسابية أساسها 5 يطلب حساب حدها الأول w_0 .

(3) اكتب بدلالة n عبارة الحد العام w_n ثم بين أن: $u_n = \frac{n}{5^{n-1}}$

(4) أ - بين أنه من أجل كل n من N^* : $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$ (يمكن البرهنة على أن: $u_{n+1} - \frac{2}{5}u_n \leq 0$)

ب - استنتج أنه من أجل كل n من N^* : $0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

ج - استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين الثالث: (4 نقاط)

يحتوي صندوق على ثلاث كريات بيضاء مرقمة من 1 إلى 3 ، و خمس كريات سوداء مرقمة من 1 إلى 5 لانفرك بينها عند اللمس. نسحب كرتين على التوالي و بدون إعادة الكرية المسحوبة إلى الصندوق.

(1) اذكر لماذا لدينا تساوي الإحتمال؟

(2) نعتبر الحوادث التالية: A " سحب كرتين من نفس اللون "

B " سحب كرتين تحملان نفس الرقم " ، C " سحب كرتين مجموع رقميهما يساوي 7 "

أ - بين أن $p(A) = \frac{13}{28}$ ثم احسب: $p(B)$ و $p(C)$.

ب - ما احتمال سحب كرتين تحملان نفس الرقم علما أنهما من نفس اللون؟

(3) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الأرقام الزوجية المسحوبة.

أ - عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

ب - احسب $E(X)$ ثم $v(X)$.

التمرين الرابع: (8 نقاط)

(I) g دالة معرفة على R بـ: $g(x) = 4xe^{2x} + 1$

(1) احسب نهايات الدالة g .

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال R ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) استنتج أنه من أجل كل x من R : $g(x) > 0$

(II) لتكن الدالة f المعرفة على R بـ: $f(x) = x + 1 + (2x - 1)e^{2x}$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) أ - بين أن المستقيم (Δ) ذو معادلة $y = x + 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب - ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(3) بين أنه من أجل كل x من R : $f'(x) = g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات f .

(4) أ - بين أن المنحنى (C_f) يشمل النقطة $\omega\left(\frac{-1}{2}; \frac{e-4}{2e}\right)$.

ب - تحقق أن النقطة ω هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) .

(5) احسب $f(0)$ ثم انشئ (Δ) و المنحنى (C_f) .

(6) أ - باستعمال المكاملة بالتجزئة احسب العدد: $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (2x - 1)e^{2x} dx$

ب - احسب التكامل $I = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$. ماذا تمثل النتيجة المحصل عليها بالنسبة للدالة f .

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول (04 نقاط) :

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(-2; 0; 1)$ ، $B(1; 2; -1)$ و $C(-2; 2; 2)$.

1. أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ثم إستنتج القيمة المدورة إلى الوحدة بالدرجات للزاوية $\widehat{ABC}$.
2. إستنتج أن النقط A و B و C ليست على إستقامة وأن $2x - y + 2z + 2 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

3 أ- أكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (P) المستوي المحوري للقطعة $[AB]$

ب- بين أن مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق $AM = CM$ هي المستوي (P') الذي معادلته الديكارتية $4y + 2z - 7 = 0$

ج- بين أن (P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له

4- أ- بين أن المستقيم (Δ) يقطع المستوي (ABC) في نقطة ω يطلب تعيين إحداثياتها

5. نعتبر النقطة G_α مرجح الجملة المثقلة $\{(A; \alpha^2 - 1); (B; \alpha^2 + 2); (C; -2\alpha^2)\}$ حيث α وسيط حقيقي عين بدلالة α إحداثيات G_α و إستنتج مجموعة النقط G_α عندما α تتغير على $\mathcal{R}$

التمرين الثاني (05 نقاط) :

1. / حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $Z : Z^2 - 2Z + 4 = 0$

2) استنتج حلول المعادلة $(\bar{Z} + 2 + 2i\sqrt{3})^2 - 2\bar{Z} - 4i\sqrt{3} = 0$ حيث $\bar{Z}$ هو مرافق Z

1. / المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A و B و C و D التي لواحفها

على الترتيب : $Z_A = 1 + i\sqrt{3}$, $Z_B = \bar{Z}_A$ و $Z_C = -1 + i\sqrt{3}$ و $Z_D = -1 + 3i\sqrt{3}$

أ- أوجد نسبة وزاوية التشابه المباشر S الذي مركزه B ويحول النقطة C إلى النقطة A ثم أعط العبارة المركبة له

ب- عين إحداثيتي النقطة D' صورة النقطة D بالتشابه S ثم استنتج أن المثلثين BCD و BAD' متشابهان

2) نعتبر التحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z'

حيث : $2Z' = 2[-i \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6}]Z - 1$

أ- أكتب العدد α حيث : $\alpha = -i \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6}$ على الشكل المثلثي ثم على الشكل الأسّي

ب- عين طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة

3) أ- بين أن (τ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $2(Z + \bar{Z}) + Z \times \bar{Z} = 0$ هي دائرة مركزها Ω ذات

اللاحقة 2 - يطلب تعيين نصف قطرها

ت- عين صورة الدائرة (τ) بالتحويل T

التمرين الثالث (04 نقاط) :

- (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حدودها موجبة تماما حيث : $U_1 = e^2$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ لدينا :
- $$2 \ln U_n - \ln U_{n+1} + 1 = 0 .$$
- (V_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $V_n = \ln(e \times U_n)$
- 1/ أحسب U_2 و U_3 .
 - 2/ عيّن طبيعة المتتالية (V_n).
 - 3/ أكتب V_n ثم U_n بدلالة n ثم أحسب بدلالة n المجموع S_n و الجداء P_n حيث :
- $$P_n = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n , S_n = V_1 + \frac{1}{2}V_2 + \frac{1}{4}V_3 + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}V_n$$
- 4/ المستوى منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$, لتكن النقط . $A(0; V_1)$, $B(1; V_2)$, $C(2; V_3)$.
- عين العددين الحقيقيين a و b حتى يكون مبدأ المعلم هو مرجح الجملة $\{(A, b); (B, a); (C, (1 + b))\}$ حيث $1 + a + 2b \neq 0$.

التمرين الرابع (07 نقاط) :

(I) h الدالة العددية للمتغير الحقيقي x والمعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $h(x) = x - \ln x$

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) استنتج حسب قيم x إشارة $h(x)$ ثم استنتج إشارة $h(x^2)$ على $\mathbb{R}^*$.

(II) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x والمعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\ln(x^2)}{x} - x - \frac{2}{x} \right)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $2x^2 f'(x) = -h(x^2)$

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(ج) بين أن (Δ) ذا المعادلة : $y = -\frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

(3) أ) تحقق أن : من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^* : \mathbb{R}^* - x \in \mathbb{R}^*$ و $f(x) + f(-x) = 0$. ماذا تستنتج ؟ فسر النتيجة بيانيا .

ب) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0.3; 0.4[$ ، عين حصرا للعدد $f(\alpha)$.

** استنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا آخر β يطلب تعيين حصره له .

(4) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين في نقطتي تقاطع (C_f) و (Δ) متوازيين .

ب) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) يوازيان المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلتيهما .

ج) أنشئ (Δ) ، (T_1) ، (T_2) و (C_f) .

(د) ناقش بيانيا وحسب قيم العدد الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = -\frac{1}{2}x + m$.

(5) لتكن k دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $k(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\ln(x+1)^2}{x+1} - (x+1) - \frac{2}{(x+1)} \right) + 2$ ، (C_k) تمثيلها البياني .

أ) بين أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول المنحنى (C_f) إلى المنحنى (C_k) .

ب) أنشئ المنحنى (C_k) في نفس المعلم السابق .

(6) أ) بين أن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}^* : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ بـ : $F(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}[\ln(x^2)]^2 - 2 \ln|x| \right)$ هي دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}^*$

ب) استنتج أن الدالة F هي دالة زوجية ثم جد الدالة الأصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل $x = 1$.

(ج) λ عدد حقيقي حيث : $\lambda > 1$. أحسب التكامل التالي : $A(\lambda) = -\int_1^\lambda f(x) dx$ وفسر النتيجة هندسيا .

** أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.

اتمى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول (04 نقاط) :

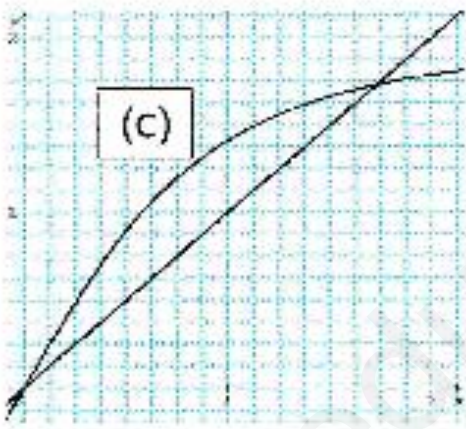
- يحتوي كيس على عشر كريات بحيث خمس كريات حمراء تحمل الارقام -2 ; -1 ; 0 ; 1 و ثلاث كريات خضراء تحمل الأرقام -1 ; 0 و 1 وكريتان سوداوين تحمل الرقمين 0 و -1 نسحب وفي أن واحد كرتين من هذا الكيس ونفترض أن كل الكريات لها نفس إحتمال السحب
- ا. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة ممكنة العدد الحقيقي $|x - y|$ حيث x و y هما الرقمان اللذان تحملاهما الكريتان المسحوبتان من الكيس
- 1- حدد قيم المتغير العشوائي X
 - 2- أكتب قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي
- ا. نعيد كل الكريات المسحوبة إلى الكيس ونسحب منه كرتين على التوالي وبدون إرجاع الكرة المسحوبة الأولى
- 1- أحسب عدد الحالات الممكنة للسحب
 - 2- لتكن A و B حادثتان معرفتان كما يلي :

A : الكريتان المسحوبتان لوناهما مختلفان B : الكريتان المسحوبتان تحمل كلا منهما عددا موجبا تماما
أحسب $P(A)$ و $P(B)$

التمرين الثاني (04 نقاط) :

الشكل المقابل هو التمثيل البياني (C_f) للدالة f المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ و (Δ) المستقيم الذي معادلته $y = x$ في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) أ- أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجال $[0, +\infty[$



ج- بين أنه إذا كان $x \in [1, \sqrt{3}]$ فإن $f(x) \in [1, \sqrt{3}]$

2) نعرف المتتالية (u_n) كما يلي $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

أ- مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 و u_2

ب- ضع تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

ج- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(2 - \sqrt{u_n^2 + 1})}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$$

- استنتج أن (u_n) متقاربة

4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$

أ- برهن ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الأول

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

5) أحسب P_n بدلالة n حيث : $P_n = \frac{(u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n)^2}{(3 - u_0^2)(3 - u_1^2) \dots (3 - u_n^2)}$

التمرين الثالث (05 نقاط) :

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

1) أوجد العددين Z_1 و Z_2 الجذران التربيعيان للعدد المركب $L = 2 - 2i\sqrt{3}$ ثم أكتبهما على الشكل الأسّي

2) نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $Z_A = 2i$ و $Z_B = \sqrt{3} + i$ و $Z_C = \sqrt{3} - i$

أ- بين أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ وعين قياسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{AC})$

ب- استنتج طبيعة الرباعي $OABC$

ج- عين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$

3) أ- أكتب العبارة المركبة للتشابه S الذي يحول النقطة A إلى النقطة O ويحول النقطة C إلى B

ت- تحقق أن SoS هو تشابه مباشر نسبته $\frac{1}{3}$ وأحد أقياس زاويته π

ث- نضع f التحويل النقطي المعروف بـ : $f = \underbrace{SoSoS \dots \dots \dots oS}_{n \text{ مرة}}$

- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون التحويل f تحاكيا نسبته سالبة

4) k عدد حقيقي ولتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z بحيث : $OM^2 + AM^2 + BM^2 + CM^2 = k$

أ- أثبت أن مجموعة النقط M من (E) تحقق العلاقة : $OM^2 = \frac{k-8.O\Omega^2}{4}$

ب- ناقش حسب قيم العدد الحقيقي k طبيعة المجموعة (E)

التمرين الرابع (06 نقاط):

1. لتكن الدالة g المعرفة على $\mathcal{R}$ بـ : $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$

(1) أحسب نهاية الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$

(2) عين إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

(3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathcal{R}$ ثم تحقق أن المجال $0.35 < \alpha < 0.36$

(4) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathcal{R}$

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathcal{R}$ بـ : $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$ وليكن (C_f) تمثيلها

البياني المنسوب الى المعلم المتعاود والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ وحدة الطول $(2cm)$

(1) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها

(2) أحسب $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

(3) أثبت أن : $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$ واستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$

(4) أثبت أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

- أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة (Δ)

(5) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

(6) أنشئ (Δ) ; (T) و (C_f)

(7) عين قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $0 = (x^2 + 2)e^{-x} - m - 1$ حلا وحيدا موجبا

(8) أوجد الاعداد الحقيقية a و b و c بحيث تكون الدالة $h : h(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ دالة أصلية على $\mathcal{R}$

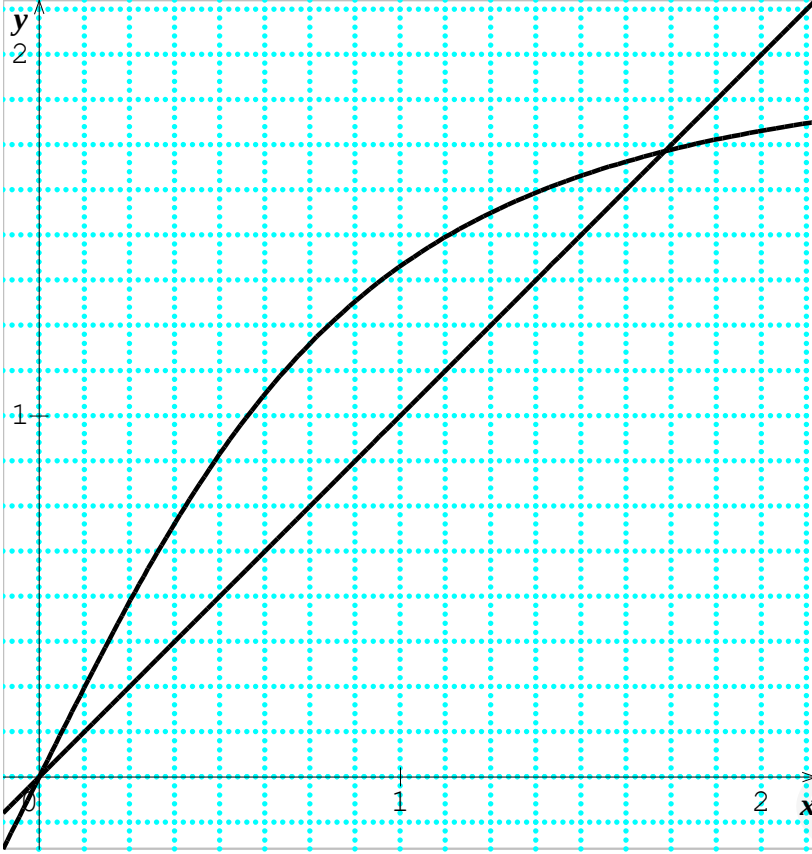
للدالة المعرفة بـ : $x \rightarrow (x^2 + 2)e^{-x}$

(9) أحسب مساحة الحيز $A(\alpha)$ المحدد بالمنحنى (C_f) , المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 0$ و

$x = \alpha$

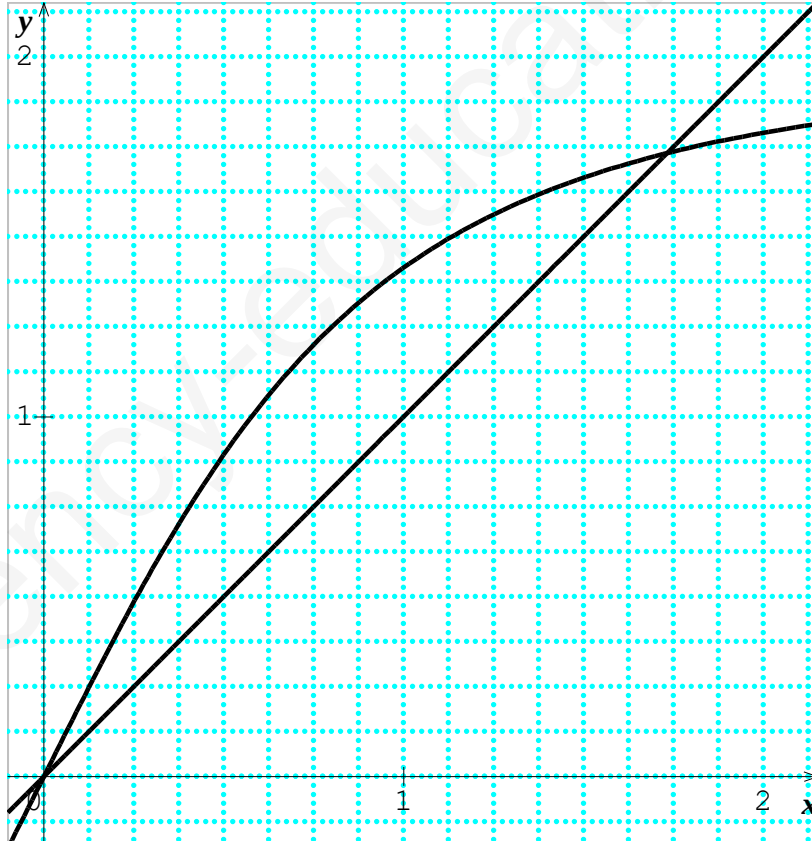
انتهى الموضوع الثاني

ملاحظة : تعاد الوثيقة مع ورقة الإجابة ولو كانت فارغة



الإسم :
اللقب :
القسم : 3 ع تج

ملاحظة : تعاد الوثيقة مع ورقة الإجابة ولو كانت فارغة



الإسم :
اللقب :
القسم : 3 ع تج

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقطة)

(1) أ) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $Z^2 + 2\sqrt{3}Z + 4 = 0$.

ب) أكتب حلي المعادلة السابقة على الشكل الأسّي.

(2) في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

نعتبر التحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث: $Z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} Z$.

■ عين طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة .

(3) لتكن النقطة A ذات اللاحقة Z_1 حيث: $Z_1 = -\sqrt{3} + i$

أ) عين Z_2 و Z_3 لاحقتي كل من النقطتين B و C على الترتيب حيث: $T(A) = B$ و $T(B) = C$.

ب) أنشئ النقط: A ، B و C .

ج) أحسب: $\frac{Z_2 - Z_3}{Z_1 - Z_3}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

I. يحتوي صندوق U_1 على تسع قريصات لا نميز بينها باللمس : أربعة منها حمراء و ثلاثة منها خضراء واثنين بيضاوين

نسحب عشوائيا من U_1 قريصتين في آن واحد ، أحسب احتمال كل من الحدثين التاليين :

A : " القريصتان المسحوبتان لهما نفس اللون "

B : " القريصتان المسحوبتان من لونين مختلفين "

II. نعتبر صندوقا آخر U_2 يحتوي على خمس كريات لا نميز بينها باللمس تحمل الأرقام : 1، 1، 1، 2 و 2 . ولنعتبر التجربة العشوائية التالية :

إذا تحقق الحدث A فإننا نسحب عشوائيا من U_2 كريتين على التوالي دون إرجاع .

أما إذا تحقق الحدث B فإننا نسحب عشوائيا من U_2 كريتين على التوالي بإرجاع .

نرمز بـ : E للحدث : " كل كرية من الكريتين المسحوبتين تحمل الرقم 1 "

F للحدث : " كل من الكريتين المسحوبتين تحملان رقمين مختلفين "

وبـ G للحدث : " كل كرية من الكريتين المسحوبتين تحمل الرقم 2 "

أ) أنجز شجرة الاحتمالات المرفقة بهذه التجربة.

ب) أحسب: $P(E)$.

ج) ما احتمال الحصول على قريصتين لهما نفس اللون علما أن كل كرية من الكريتين المسحوبتين من U_2 تحمل الرقم 1 ؟

التمرين الثالث: (04 نقاط)

الجزء الأول: نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x - x \ln x$

(1) أحسب نهايتي الدالة g عند كل من 0 و $+\infty$.

(2) بين أن: من أجل كل $x \in]0; +\infty[$: $g'(x) = -\ln x$.

(3) استنتج اتجاه تغير الدالة g ثم أنجز جدول تغيراتها.

الجزء الثاني: نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $U_n = \frac{e^n}{n^n}$

و المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n = \ln U_n$.

(1) بين أن: من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = n - n \ln n$.

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (v_n) ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (U_n) .

(3) بين أن المتتالية (U_n) محدودة.

(4) بين أن المتتالية (U_n) مقاربة ثم أحسب نهايتها.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الجزء الأول: نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln(x)$

(1) أدرس تغيرات الدالة g .

(2) بين أن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]1,8; 1,9[$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{2 \ln(x)}{x^2 + x}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = 2cm$.

(1) أ) أحسب نهايتي الدالة f عند كل من 0 و $+\infty$ ، ثم فسر بيانيا النتيجتين المحصل عليهما.

ب) بين أن: من أجل كل $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} g(x)$

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم أنجز جدول تغيراتها.

(2) أ) بين أن: $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ ، ثم استنتج حصر $f(\alpha)$.

ب) عين فاصلة نقطة تقاطع (C) مع حامل محور الفواصل.

ج) مثل بيانيا (C).

الجزء الثالث: نرمز بـ A إلى مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C) و حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين

معادلتهما $x = \frac{3}{2}$ و $x = 1$.

(أ) بين أن: من أجل كل $x \in [1; +\infty[$: $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$

(ب) أحسب I حيث: $I = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x} dx$

(ج) باستخدام المكاملة بالتجزئة أحسب J حيث: $J = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x^2} dx$

(د) استنتج حصرا لـ K حيث: $K = \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx$

(هـ) عبر عن A بدلالة K ثم استنتج حصرا لـ A

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04,5 نقاط) ليكن θ عدد حقيقي من المجال $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

- (1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $Z^2 - 2(i + \cos \theta)Z + 2i \cos \theta = 0$
- (2) المستوي المركب مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط: A ، M_1 و M_2 التي لواحقها على الترتيب Z_A ، Z_1 و Z_2 حيث: $Z_A = i$ ، $Z_1 = i + e^{i\theta}$ و $Z_2 = i + e^{-i\theta}$

(أ) عين (E_1) مجموعة النقط M_1 لما θ يسمح

(ب) عين (E_2) مجموعة النقط M_2 لما θ يسمح

(ج) نعتبر I منتصف القطعة المستقيمة $[M_1 M_2]$ ، عين (E_3) مجموعة النقط I لما θ يسمح

(3) (أ) بين أن: من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $i + e^{ix} = 2 \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$

(ب) استنتج الشكل الأسّي لكل من العددين Z_1 و Z_2 .

(4) (أ) أثبت أن المثلث $AM_1 M_2$ متقايس الساقين في A .

(ب) حدد قيمة θ التي من أجلها يكون المثلث $AM_1 M_2$ متقايس الأضلاع.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

أ. في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط: A ، B و C التي احداثياتها

$(-1; -3; 2)$ ، $(2; 0; 1)$ و $(3; 1; 0)$ على الترتيب.

(1) بين أن النقط: A ، B و C تعين مستويا.

(2) تحقق أن الشعاع $\vec{n}(0; 1; -1)$ ناظمي للمستوي (ABC) .

(3) استنتج معادلة ديكارتية لـ (ABC) .

II. نعتبر المجموعة (S_α) مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء التي تحقق:

$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2y \sin \alpha + 2z + \alpha^2 + \sin^2 \alpha - 1 = 0$ حيث: α وسيط حقيقي من المجال $[-\pi; \pi]$.

(1) بين أن: (S_α) سطح كرة محددا عناصرها المميزة.

(2) أدرس تبعا لقم الوسيط α الوضع النسبي لـ (S_α) و (ABC) .

(3) بين أن : (ABC) يمس $\left(S_{\frac{-\pi}{2}}\right)$ في نقطة يطلب تعيين احداثياتها

التمرين الثالث: (05,5 نقاط)

(1) نعتبر المتتالية العددية (I_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!} (2-x)^n e^x dx$

(أ) أحسب: I_1 .

(ب) بين أن: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} (e^2 - 1)$

(ج) باستخدام المكاملة بالتجزئة بين أن : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

(د) برهن بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $e^2 = 1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + I_n$

(2) نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ ب : $U_n = \frac{2^n}{n!}$

(أ) أحسب $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ ثم أثبت أن: من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 3$: $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$

(ب) استنتج أن: من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 3$: $0 \leq U_n \leq U_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

(3) (أ) استنتج نهاية المتتالية (U_n) ثم نهاية المتتالية (I_n) .

(ب) تحقق أن : $e^2 = \lim_n \left(1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!}\right)$

التمرين الرابع: (06 نقطة)

الجزء الأول: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1}$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = 1cm$.

(1) أدرس تغيرات الدالة f ، ثم أنجز جدول تغيراتها .

(2) أثبت أن النقطة I مركز التناظر لـ (C) .

(3) أكتب معادلة لـ (T) مماس (C) في النقطة I .

(4) أرسم (T) ثم مثل بيانها (C) .

الجزء الثاني: نعتبر المتتالية العددية (I_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $I_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} f(t) dt$

(1) بين أن : $I_n = 4[\ln(n+2) - \ln(n+1)]$.

(2) عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث : $S_n = I_1 + I_2 + \dots + I_n$.

(3) احسب $A(n)$ حيث $A(n)$ هي مساحة الحيز من المستوي المحدود بـ (C) والمستقيمت التي معادلاتها :

$$y = 4 \text{ و } x = \ln(n+1) , x = 0$$

بالتوفيق في شهادة البكالوريا 2019

البكالوريا التجريبي في مادة: الرياضيات

الموضوع الاول

التمرين الأول (04):

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n+2}$

(1) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n < 2$

(2) ادرس رتبة المتتالية (u_n) . هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

(3) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$

(ا) بين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول ثم عبر عن v_n بدلالة n

(ب) استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(ج) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$ ، احسب S_n بدلالة n

(4) (ا) بين ان $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{2}{3} |u_n - 2|$ من اجل كل عدد طبيعي n

(ب) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $|u_n - 2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين الثاني (04):

نعتبر صندوقين متماثلين U_1 و U_2 بحيث :

U_1 يحتوي على خمس كرات حمراء تحمل الارقام 1، 1، 1، 2، 0 وثلاث كرات خضراء تحمل الارقام 1، 1، 0،

U_2 يحتوي على ثلاث كرات حمراء تحمل الارقام 1، 1، 2 وكرتين خضراوين تحمل الرقمين 1، 0،

(كل الكرات متماثلة لانفرق بينها عند اللمس)

I. نختار عشوائيا احد الصندوقين فاذا كان U_1 نسحب كرتين على التوالي بدون ارجاع واذا كان U_2 نسحب منه كرتين على التوالي بالارجاع

(1) احسب احتمال الحوادث التالية :

A "سحب كرتين من نفس اللون" ، B "سحب كرتين تحملان نفس الرقم" ، C "سحب كرة حمراء على الاقل"

(2) هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟ علل.

(3) اذا علمت ان الكرتين المسحوبتين من لونين مختلفين . فما احتمال ان تكون من الصندوق U_1 ؟

II. نأخذ الكرات الموجودة في الصندوقين U_1 و U_2 ونضعها جميعها في صندوق واحد U_3 . نسحب عشوائيا من الصندوق U_3 كرتين في ان واحد .

وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة مجموع الارقام التي تحملها الكرتين المسحوبتين

1. عين قيم المتغير العشوائي X

2. عرف قانون الاحتمال لـ : X

التمرين الثالث (05):

(1) نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$(E) \dots \bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0 \text{ هو مرافق العدد المركب } z$$

(ا) بين ان المعادلة (E) تكافئ المعادلة : $(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7) = 0$

(ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

(2) في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، نعتبر النقاط A، B، C و D لواحقها على الترتيب : $z_A = -1$ ، $z_B = 2 + i\sqrt{3}$

$$z_D = 3, z_C = \bar{z}_B,$$

(أ) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا

(ب) عين طبيعة المثلث ABC

3. (أ) اكتب العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الاسي ثم استنتج ان النقطة A صورة D بتحويل نقطي يطلب تعيينه

(ب) اوجد مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD

4. (Γ) مجموعة النقط M من المستوي لاحتقتها z تحقق: $z + 1 = 2\sqrt{3}ke^{\frac{\pi}{6}}$ حيث k يسمح المجال $[0; +\infty[$

• عين قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overrightarrow{AB})$ ، ثم استنتج مجموعة النقط (Γ)

5. (أ) عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث يكون: $-\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} + \alpha\overrightarrow{CD} = \vec{0}$

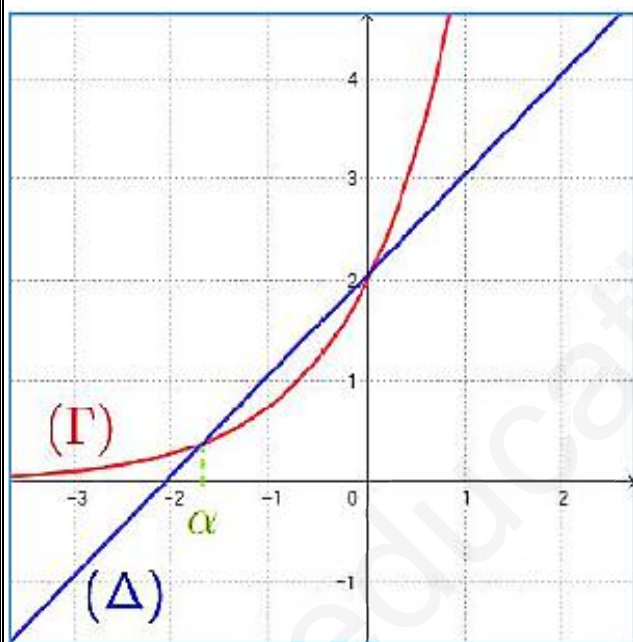
(ب) عين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|-\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} - 3\overrightarrow{DM}\| \leq 2\|\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\|$

(ج) استنتج مجموعة نقط تقاطع (E) و (Γ)

النمرين الرابع (07):

1. المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. التمثيل البياني للدالة $x \mapsto 2e^x$

، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $\alpha \cdot y = x + 2$ و 0 هما فاصلتا نقطتي تقاطع (Γ) و (Δ) حيث $-1.6 < \alpha < -1.5$



(1) بقراءة بيانية حدد وضعية المنحنى (Γ) بالنسبة لـ (Δ) على $\mathbb{R}$

(2) g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x والمعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = -2e^x + x + 2$$

• حدد اشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x

II. f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 2(ex - 3) + (x + 3)e^{-x+1}, \quad (C_f) \text{ تمثيلها البياني}$$

(1) (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(ب) بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = -g(x)e^{-x+1}$

(ج) عين دون حساب: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h}$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

(د) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

(2) (أ) بين ان المستقيم (D) ذا المعادلة $y = 2(ex - 3)$ هو مستقيم مقارب

لـ (C_f) عند $+\infty$ ، ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D)

(ب) بين ان المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها

(ج) بين ان المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها β حيث: $-2.4 < \beta < -2.3$

(3) انشئ كل من (C_f) ، (D) ، $f(\alpha) \approx 4.15$ ، $f(-3) \approx -22.31$ ناخذ

(4) (أ) اوجد العددين الحقيقيين a ، b حتى تكون الدالة $x \mapsto (ax + b)e^{-x+1}$ دالة اصلية للدالة $x \mapsto (x + 3)e^{-x+1}$ على $\mathbb{R}$

(ب) احسب I_n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (D) والمستقيمين الذين معادلتيهما: $x = 1$ ، $x = n$ حيث n عدد

طبيعي ($n > 1$)، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

الموضوع الثاني

النمرين الأول (04) :

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{3x-1}{2x} (C_f)$ تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ كما هو موضح في الشكل . وليكن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} : (u_n) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N} \text{ كما يلي (1)}$$

(أ) مثل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على محور الفواصل مبرزاً خطوط الانشاء

(ب) تخمین اتجاه تغییر و تقارب المتتالية (u_n)

(ج) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n > 1$ ثم بين ان (u_n) متناقصة

(د) استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة

(2) (ا) اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n فان: $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$

(ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n فان $u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n)

(3) لتكن (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$

(ا) بين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول

(ب) احسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n = \frac{v_0-1}{u_0} + \frac{v_1-1}{u_1} + \frac{v_2-1}{u_2} + \dots + \frac{v_{n-1}-1}{u_n}$

النمرين الثاني (04):

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. نعتبر النقط $C(-2; 2; 2), B(1; 2; -1), A(-2; 0; 1)$.

(1) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ثم الطولين AB و AC

(ب) عين قيسا بالدرجات مدورا الى الوحدة للزاوية $\widehat{BAC}$

ج) استنتج ان النقط A ، B و C ليست في استقامية

(د) اثبت ان : $2x - y + 2z + 2 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

(2) لتكن (P_1) و (P_2) المستويين ذي المعادلتين $x + y - 3z + 3 = 0$ و $x - 2y + 6z = 0$ على الترتيب

▪ بين ان المستويين (P_1) و (P_2) متقاطعين في مستقيم (Δ) له تمثيل وسيطي : $(t \in \mathbb{R})$:

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases}$$

3) بين ان المستقيم (Δ) والمستوي (ABC) متقاطعان ثم حدد احداثيات نقطة تقاطعهما

(4) ليكن (S) سطح الكرة ذات المركز $\Omega(1; -3; 1)$ ونصف القطر $r = 3$

(ا) اعط معادلة ديكارتية لـ (S)

(ب) حدد تقاطع (S) مع المستوى (ABC)

النمرين الثالث (05):

۱. a, b عددان حقیقیان.

(1) افشر الجداء $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

(2) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3 + 8 = 0$

١١. نعتبر في المستوى المركب المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$ النقط A, B, D التي لواحقتها $z_B = 1 - \sqrt{3}i, z_A = -2$.

$$\mathbf{z}_D = \mathbf{1} + \sqrt{3}i,$$

(1) علم النقط A, B و D

(2) اكتب على الشكل الاسي العدد المركب α حيث $\alpha = \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$

(ب) استنتج نوع المثلث ABD

(ج) اكتب معادلة للدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABD

(3) لتكن C مرجح الجملة $\{(A, -1); (B, 1); (D, 1)\}$

(ا) عين z_C لاحقة النقطة C ثم حدد مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

(ب) احسب قياسا بالراديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DO})$ ثم استنتج الوضع النسبي للمستقيم (DC) والدائرة (C)

(4) لتكن (I) مجموعة النقط M التي لواحقها z : حيث $k \in \mathbb{Z}, \arg(\bar{z} + 2) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

تحقق ان النقطة B تنتمي الى المجموعة (I) ثم حدد (I)

(5) الدوران الذي مركزه النقطة D ويحول النقطة A الى النقطة B

(ا) اكتب العبارة المركبة للدوران R

(ب) تحقق ان $R(B) = C$ ثم استنتج صورة المثلث ABD بالدوران R

النمرين الرابع (07):

f الدالة المعرفة بـ: $f(0) = 1$ ، ومن اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2 \ln x) + 1$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(1) ادرس استمرارية الدالة f عند النقطة $x_0 = 0$

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ ثم فسر النتيجة هندسيا

(2) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$

(3) ا) بين انه من اجل كل عدد حقيقي موجب تماما، $f'(x) = 2x(1 - \ln x)$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

(4) جد معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة E ذات الفاصلة 1

(5) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

(ا) احسب $g'(x)$ و $g''(x)$

(ب) بين ان الدالة g' تقبل قيمة حدية عظمى عند القيمة 1 ثم استنتج اشارة $g'(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

(ج) استنتج اتجاه تغير الدالة g ، احسب $g(1)$ ، ثم استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

(د) استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) ، فسر النتيجة هندسيا.

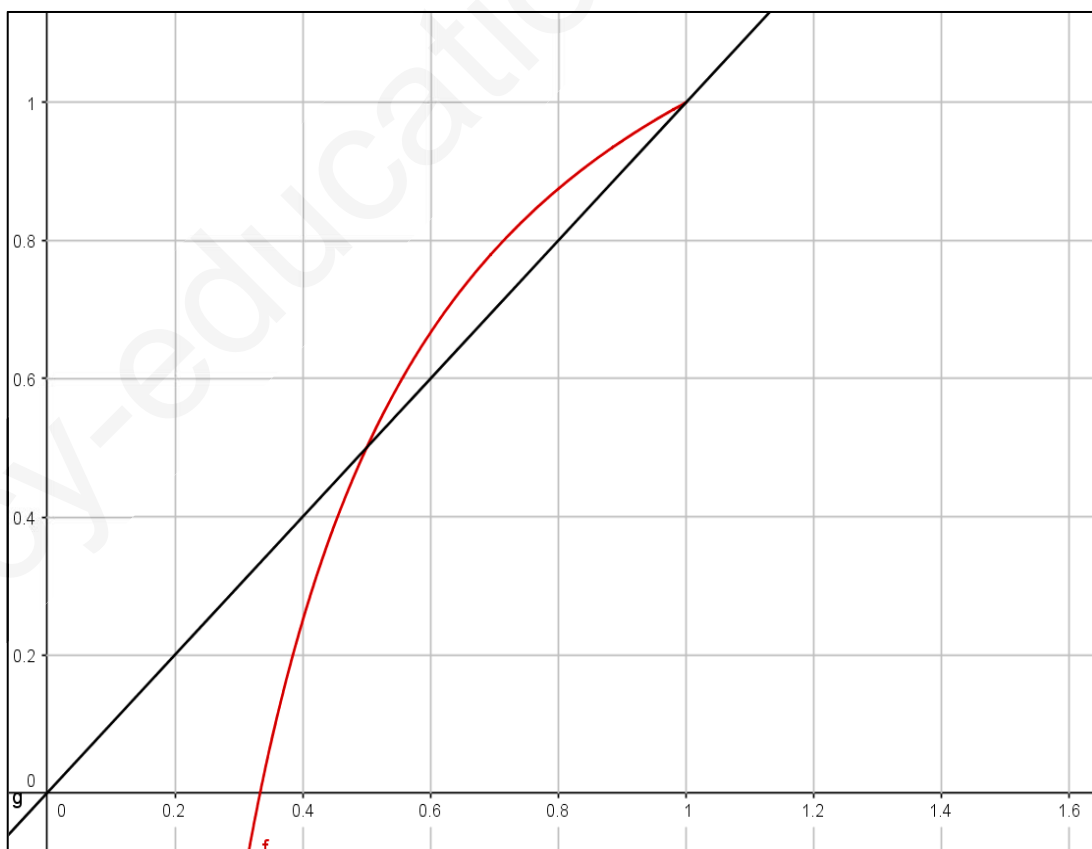
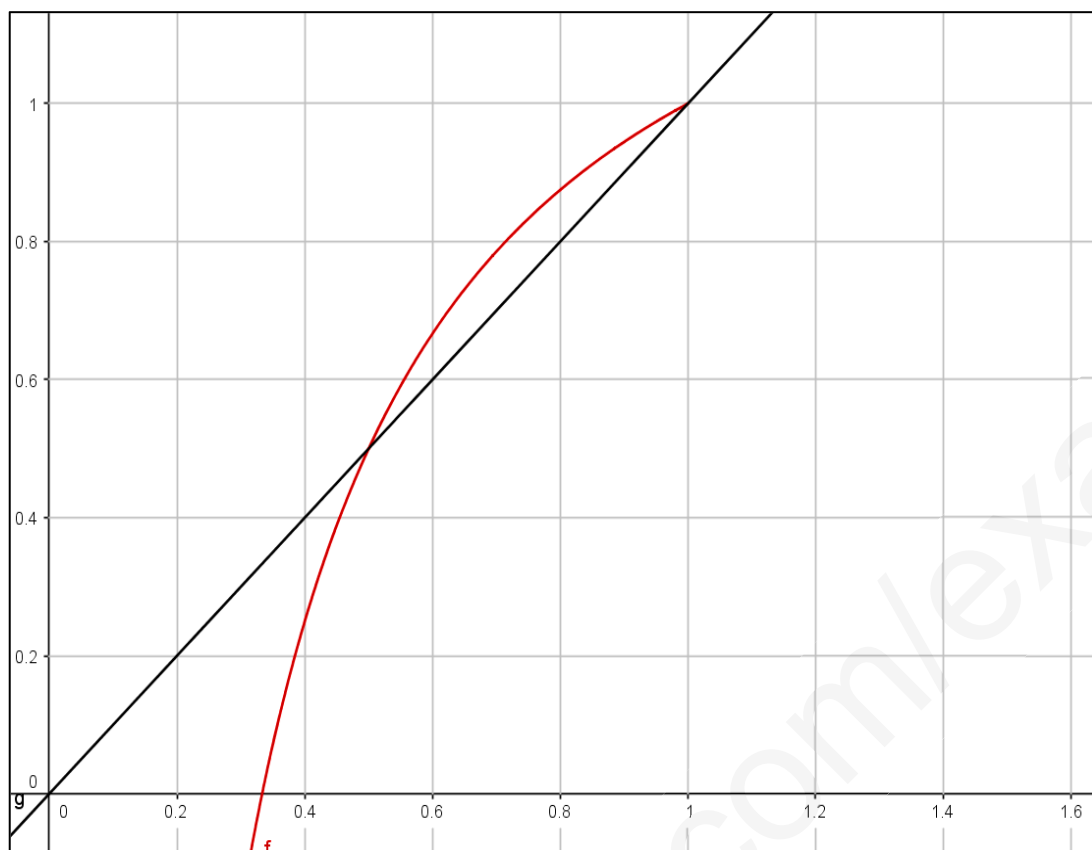
(6) بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يحقق: $4.6 < \alpha < 4.7$

(7) ارسم في المعلم السابق (Δ) و (C_f) على المجال $[0; 5]$

(8) ا) باستعمال المكاملة بالتجزئة جد الدالة الاصلية للدالة $x^2 \ln x \mapsto x$ والتي تنعدم عند القيمة 1

(ب) احسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = 1$ و $x = \alpha$ و $y = 0$

(ج) بين ان: $A(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + 12\alpha - 29}{18} \alpha$





ثانوية الدكتور بو عمران الشيخ بالبيض
دورة : ماي 2019



مديرية التربية لولاية البيض
امتحان تجريبي بكالوريا التعليم الثانوي

المدة: ثلاث ساعات و 30 دقيقة .

اختبار مادة: الرياضيات

على المترشح التطرق الى أحد الموضوعين على الخيار.

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (4 نقط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}$.

(1) أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 .

(2) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leq u_n \leq 4$.

(3) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة نحو عدد حقيقي l يطلب تعيينه جبريا .

(4) برهن من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_{n+1} \leq \frac{4 - u_n}{2}$.

(5) استنتج أن : $0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثاني: (4 نقط)

يحتوي كيس U على خمس كرات بيضاء و ثلاث كرات حمراء و كرتين خضراوين ، لا نفرق بينها باللمس .
نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كرات في آن واحد .

(1) احسب احتمال كل من الحادثتين :

A : " الكرات المسحوبة من نفس اللون " ؛ C : " من بين الكرات الثلاث توجد كرة واحدة فقط خضراء " .

(2) نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الألوان المسحوبة الظاهرة "

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم أكتب قانون احتماله .

(ب) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ و التباين $V(X)$.

(3) في تجربة عشوائية ثانية نعتبر الكيس U وكيس آخر V يحوي كرتين بيضاوين و كرتين حمراوين و كرة خضراء .

لإختيار كيس للسحب نرم حجر نرد غير مزيفة فإذا ظهر الرقم 5 نسحب كرة واحدة من الكيس U وفي الحالات الأخرى نسحب كرة واحدة من الكيس V .

(أ) مثل هذه التجربة بشجرة الإمكانات

(ب) لتكن الحادثة B : "الحادثة سحب كرة بيضاء " . بين أن احتمال سحب كرة بيضاء هو : $P(B) = \frac{5}{12}$.

(ج) علما أن الكرة المسحوبة بيضاء ، فما هو احتمال أن تكون من الكيس V .

التمرين الثالث: (5 نقط)

- (I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z + \sqrt{3} - 3i)(z^2 - 6z + 12) = 0$.
- (II) في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C التي لواحقتها :
- $z_C = -\sqrt{3} + 3i$ ، $z_B = 3 - i\sqrt{3}$ ، $z_A = 3 + i\sqrt{3}$
- (1) أ) أكتب z_A على الشكل الأسّي ثم استنتج z_B على الشكل الأسّي .
- ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $L_n = \left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^n + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^n$.
- أكتب L_n على الشكل الجبري ثم أحسب العدد $L_{2019} + L_{1440}$.
- (2) تحقق أن : $z_C = iz_A$ ثم استنتج طبيعة المثلث OAC .
- (3) لتكن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 3 - \sqrt{3}$ والتشابه S الذي مركزه E ويحول A الى C .
- أ) عين نسبة وزاوية التشابه S .
- ب) بين أن النقط : O ، A ، E و C تنتمي الى نفس الدائرة يطلب تعيين عناصرها .
- (4) عين ثم أرسم (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي من أجلها يكون العدد : $\frac{z_C - z}{z_A - z}$ تخيليا بحتا .

التمرين الرابع: (7 نقط)

- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = -x + 1 + e^{2x} - e^x$.
- (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$.
- (1) أ) أحسب نهايتي الدالة f عند طرفي مجال تعريفها .
- ب) برهن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = -x + 1$ مقارب للمنحني (C_f) في جوار $-\infty$.
- ج) ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمقارب (Δ) .
- (2) أ) أحسب $f'(x)$ ثم بين من أجل كل عدد حقيقي x أن : $f'(x) = (2e^x + 1)(e^x - 1)$.
- ب) استنتج اتجاه تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها
- ج) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلته .
- د) بين أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثيها
- هـ) أرسم في نفس المعلم كلا من : (Δ) ، (T) ، (C_f) .
- (3) أحسب بالسنتمتر المربع مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمت :
- $y = 0$ ، $x = -2$ ، $x = 0$
- (4) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود وإشارة حلول المعادلة : $m = 1 + e^{2x} - e^x$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (4نقط)

نعتبر في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقاط :

$$A(-1; -1; 0) , B(6; -5; 1) , C(1; 2; -2) , S(13; 37; 57)$$

(1) علم النقطتين : A و C .

(2) أ) بين أن النقط A ، B ، C تعين مستويا .

ب) تحقق أن الشعاع $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 29 \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ، ثم أكتب معادلة ديكرتية له .

(3) أ) عين طبيعة المثلث ABC ثم أحسب مساحته .

ب) بين أن النقطة S لا تنتمي الى المستوي (ABC) ، ثم أحسب المسافة $d(S, (ABC))$.

ج) أحسب حجم رباعي الوجوه $SABC$.

(4) أ) أكتب معادلة لسطح الكرة (Γ) التي قطرها $[BC]$.

ب) عين طبيعة وعناصر مجموعة النقط من الفضاء تقاطع سطح الكرة (Γ) والمستوي $p(O; \vec{i}, \vec{j})$.

التمرين الثاني: (4 نقط)

f الدالة المعرفة على المجال $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ بـ : $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ ،

تمثيلها البياني في معلم متعامد كما هو موضح بالشكل .

1. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول : $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n - 1}$.

(1) باستخدام التمثيل البياني المرفق مثل الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مبينا خطوط الإنشاء .

(2) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

(3) برهن بالتراجع من أجل عدد طبيعي n : $u_n \geq 1$.

II. (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \ln \left(1 - \frac{1}{u_n} \right)$.

① بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحددها الأول v_0

② أكتب بدلالة n ثم استنتج أن : $u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{2^n}}$.

③ أحسب العددين : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، $S'_n = \frac{(u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1)}{u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n}$.

التمرين الثالث: (5 نقط)

(I) عين عددين مركبين α و β حيث :
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 8 \\ i\alpha - i\beta = -2 \end{cases}$$

(II) نعتبر النقط A, B, C, D حيث : $z_A = -i + 4, z_B = 4 + i, z_C = 1 + 2i, z_D = -i$.

1. أكتب العدد المركب $\frac{z_B - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الجبري ثم استنتج طبيعة المثلث BCD .

2. أ) أكتب العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه النقطة A ويحول B الى D .
ب) أحسب z_E لاحقة النقطة E علما أن O هي صورة E بالتشابه S .

3. بين أن النقط A, B, C, D تنتمي الى دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

4. (Γ) هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $|2iz + 2 - 9i| = 1$.

أ) تحقق أن النقطة B تنتمي الى (Γ)

ب) عين طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة.

5. عين وأرسم مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\arg(z + i) = \arg(\bar{z} - i) + \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$.

التمرين الرابع: (7 نقط)

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$

1) أحسب النهايتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

2) أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة التي ترتيبها 0.

4) برهن أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب حساب إحداثياتها.

5) بين أن المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}$ تقبل حلين α و β حيث : $0.4 \leq \alpha \leq 0.5$ و $5.3 \leq \beta \leq 5.4$ فسر الحلين بيانيا.

6) أرسم (T) و (C_f) .

7) أ) بين أن الدالة $H : x \rightarrow \frac{1}{2}(\ln x)^2$ دالة أصلية للدالة $h : x \rightarrow \frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0; +\infty[$

ب) بملاحظة أن : $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$ ، استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

ج) أحسب مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات : $x=1, y=0, x=3$.

(II) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x^2}{2x}$.

أ) بين أن g دالة فردية وفسر النتيجة بيانيا.

ب) بين أن $g(x) = f(x)$ في مجال يطلب تعيينه ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة g دون دراسة دالتها المشتقة.

ج) بين كيف يمكنك رسم (C_g) اعتمادا على المنحني (C_f) .

انتهى الموضوع الثاني.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية العقيد احمد بن عبد الرزاق

دورة ماي 2019

الشعبة : علوم تجريبية

المدة : 03 ساعات ونصف

مديرية التربية لولاية وهران

امتحان البكالوريا التجريبي

المستوى : سنة ثالثة

اختبار في مادة : الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + 1}{2}} \end{cases}$$

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

1/ أ- احسب الحدود u_1, u_2, u_3 ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > 1$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

ج- بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم استنتج نهايتها .

2/ نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n^2 - 1$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 .

ب- اكتب بدلالة n كلا من u_n و v_n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

3/ احسب بدلالة n كلا من المجاميع التالية : $T_n = v_0 + 2v_1 + \dots + 2^n v_n$ ، $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$

$$L_n = \ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n \text{ و}$$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $(z-2)(z^2+2z+4)=0$

أ- نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقط :

$$A, B, C \text{ التي لاحقاتها على الترتيب } z_A = -1 + i\sqrt{3}, z_B = -1 - i\sqrt{3}, z_C = 2$$

1) بين أن $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم عين طبيعة المثلث ABC .

2) عين مركز ونصف قطر الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC . ارسم (C) .

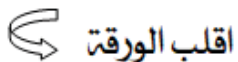
3) عين الطبيعة والعناصر الهندسية للمجموعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة التي تحقق :

$$2(z + \bar{z}) + z \cdot \bar{z} = 0 \text{ . ثم تحقق أن النقطتين } A \text{ و } B \text{ تنتميان إلى } (\Gamma) \text{ .}$$

4) أكتب العبارة المركبة للدوران R الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ، ثم عين صورة النقطة B بالدوران R .

ثم z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

- عين صورة المجموعة (Γ) بالدوران R .



اقلب الورقة

التمرين الثالث : (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم المتعامد والمتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$
 نعتبر النقط $A(0;0;1)$, $B(2;2;-1)$, $C(-2;-7;-7)$ و $D(-3;4;4)$ والمستوي (P) المعروف بالتمثيل الوسيطى :

$$\alpha, \beta \text{ وسيطان حقيقيان } \begin{cases} x = 3\alpha + \beta + 1 \\ y = -2\alpha + 1 \\ z = \alpha + \beta + 4 \end{cases}$$

1. أدين أن النقط A, B, C تعين مستويا
 بد تحقق أن الشعاع $\vec{n}(3;-2;1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم أكتب معادلة ديكرتية له.
2. أكتب معادلة ديكرتية للمستوي (P) ثم بين أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان.
- جـ. أحسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC) والمسافة بين النقطة D والمستوي (P)
 ثم استنتج المسافة بين النقطة D والمستقيم (Δ)
3. المستوي الذي يشمل النقطة D والعمودي على كل من المستويين (P) و (ABC)
 أ. أكتب معادلة ديكرتية للمستوي (q)
 بد بين أن المستويات الثلاثة (P) و (ABC) و (q) تتقاطع في نقطة واحدة H ثم عين إحداثيات H
 جـ. أحسب بطريقة ثانية المسافة بين النقطة D والمستقيم (Δ)

التمرين الرابع : (07 نقاط)

- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x + 1 + \ln(x+1) - \ln(x+2)$
 (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$ وحدة الطول 2 cm .
1. أحسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.
 2. بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = 0$ ، ثم استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.
 3. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$
 ثم أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.
 4. أدرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
 5. أكتب معادلة المماس (T) عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$.
 6. بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$.
 7. أرسم المنحنى (C_f) والمستقيمان (T) و (Δ) .
 8. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة $f(x) = \frac{3}{2}x + m$.
 9. أ. بين أن الدالة $F_a : x \rightarrow (x+a) \ln(x+a) - x$ هي دالة أصلية للدالة $f_a : x \rightarrow \ln(x+a)$
 على المجال $]-a; +\infty[$.
 بد. أحسب بالسنتر مربع مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين $y = x + 1$ ، $x = 0$ ،
 $x = 1$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

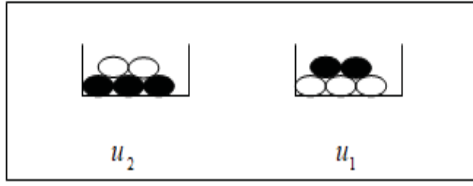
التمرين الأول: (05 نقاط)

1. نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير $p(z)$ ذات المتغير z حيث : $p(z) = z^3 - 6z^2 + 4z + 40$.
 - أ. عين العددين الحقيقيين a و b حيث : $p(z) = (z+2)(z^2 + az + b)$.
 - ب. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z) = 0$.
2. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.
 - أ. نعتبر النقط A, B و C ذات اللواحق : $Z_A = -2$, $Z_B = 4 + 2i$, $Z_C = 5 - i$.
 - أ. أكتب العدد المركب $L = \frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$ على الشكل الجبري، وعلى الشكل الأسّي . ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .
 - ب. أحسب قيمة العدد : $\left(\frac{L}{2}\right)^{2019} - i\left(\frac{L}{2}\right)^{1440}$.
 - ج. أوجد قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون L^n عدد حقيقي موجب تماماً .
3. ليكن f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث : $Z' = -2iZ + 10i$.
 - أ. عين طبيعة التحويل f محددا عناصره المميزة .
 - ب. أكتب العبارة المركبة للدوران الذي مركزه B وزاويته $\theta = -\frac{\pi}{2}$.
 - ج. أوجد لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران r .
4. بين أن النقط : A, B و D على استقامية، ثم استنتج أن التحويل f مركب من تحويلين يطلب تعيينهما .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{2x+2}{x+3}$.
1. ادرس تغيرات الدالة f ، ثم بين أنه من أجل كل x من المجال $[0; 1]$ فإن $f(x) \in [0; 1]$.
 2. نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بـ : $U_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1} = f(U_n)$.
 في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس، مثلنا الدالة f بالمنحني (C) و المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ كما هو في الشكل (في الورقة المرفقة (1) تعاد مع ورقة الإجابة).
 أ. مثل على محور الفواصل الحدود U_0, U_1, U_2 ، دون حسابها مع إظهار خطوط التمثيل.
 ب. ما هو تخمينك حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) و تقاربها؟
 3. أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq U_n \leq 1$.
 ب. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n + 2)(1 - U_n)}{U_n + 3}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (U_n) .
 ج. استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة. احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.
 4. نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2}$.
 أ. بين أن المتتالية (V_n) هندسية. يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
 ب. اكتب بدلالة n عبارة الحد العام V_n ، واستنتج عبارة U_n بدلالة n . ثم احسب مرة أخرى $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

التمرين الثالث : (04.5 نقاط)



إناءان u_1 و u_2 حيث u_1 يحتوي على ثلاث كرات بيضاء و كرتان سوداوان و u_2 يحتوي على كرتان بيضاوان و ثلاث كرات سوداء .
نسحب كرتان دفعة واحدة من كل منهما
(علما أن الكرات متجانسة في اللمس) فنحصل بذلك على أربع كرات .

1. نهتم بعدد الكرات البيضاء المسحوبة من الإناء u_1 وعدد الكرات البيضاء المسحوبة من الإناء u_2 .
• بين أن احتمال سحب كرتين بيضاوين من الإناء u_1 هو $p_1 = 0,3$ ومن الإناء u_2 هو $p_2' = 0,1$.
• شكل الشجرة المثقلة المناسبة .
• برهن أن احتمال الحادثة E "ضمن الكرات المسحوبة يوجد بالضبط كرتان بيضاوان" هو: $0,46$.
2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات البيضاء المحصل عليها .
أ- حدد قانون الاحتمال لـ X .
ب- اللاعب يدفع $2,50DA$ قبل إجراء السحب . ويكسب $1DA$ لكل كرة بيضاء مسحوبة . هل اللعبة مربحة له؟
3. احسب احتمال الحصول على كرة بيضاء فقط من الإناء u_2 علما أنه حصل على كرتين بيضاوين .

التمرين الرابع : (06.5 نقاط)

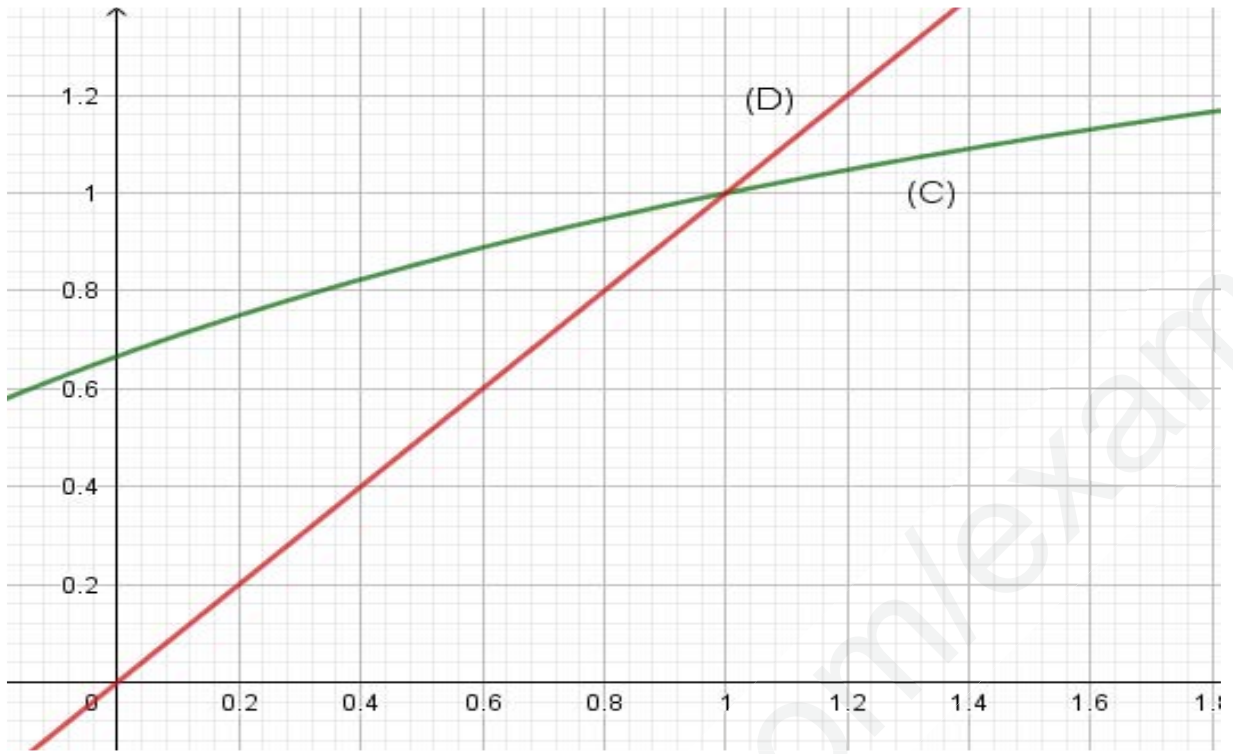
لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

حيث a ؛ b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس

1. عين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0; -3)$ مماسا معاملا توجيهه 3 و العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x) = 0$.
2. نضع $a = 1$ ، $b = 0$ ، $c = -3$.
أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .
3. أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$ ثم عين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .
4. أرسم (T) و (C_f) .
5. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن $f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.
6. أحسب بوحدة المساحات ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 3$.
7. m وسيط حقيقي ؛ ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2 - 3 + me^x = 0$.

انتهى الموضوع الثاني

😊 اساتذة المادة يتمنون لكم النجاح في شهادة البكالوريا 😊

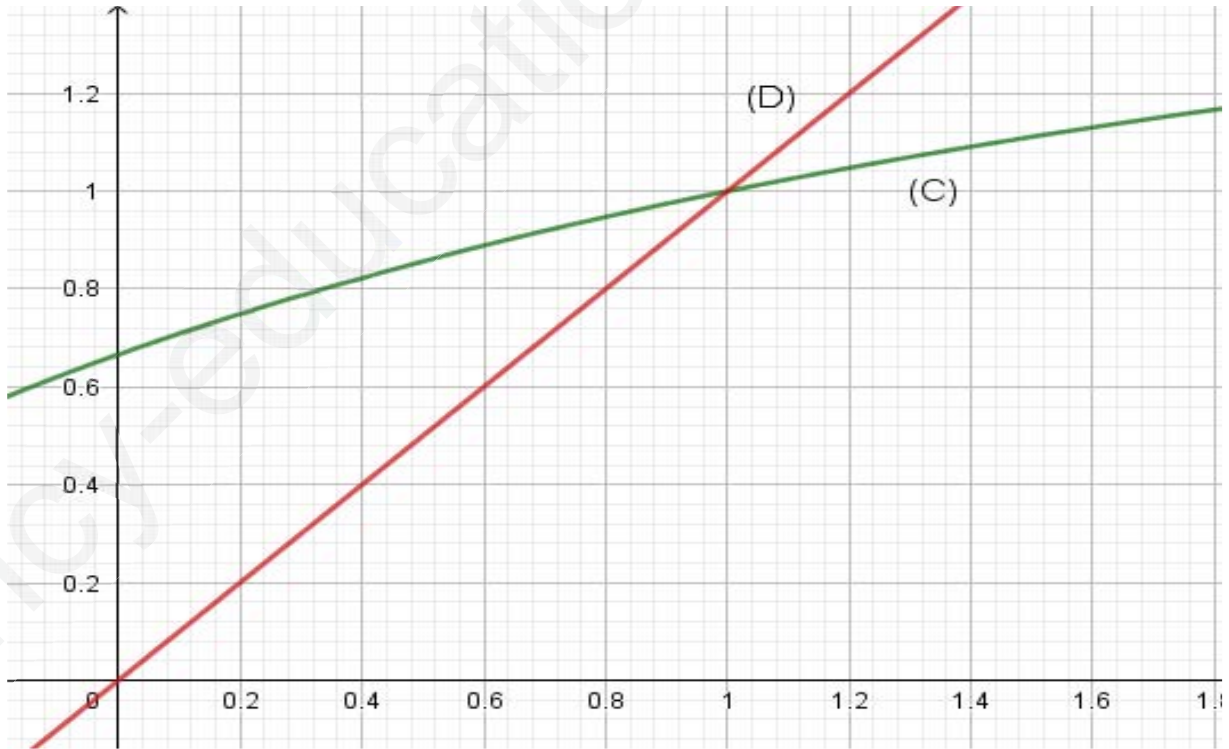


الورقة المرفقة (1) تعاد مع ورقة الإجابة

الإسم:

اللقب:

صفحة 5 من 5



الورقة المرفقة (1) تعاد مع ورقة الإجابة

الإسم:

اللقب:

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:
الموضوع الأول

التمرين الأول :

- (1) نعرف في $\mathbb{C}$ كثير الحدود P كثير حدود للمتغير المركب z بـ : $P(z) = z^3 - 4z^2 + 8z - 8$
(1) تحقق انه من اجل كل z من $\mathbb{C}$ لدينا : $P(z) = (z - 2)(z^2 - 2z + 4)$
(2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{u}; \vec{v})$

نعتبر النقط A ، B و C ذات اللواحق $z_A = 2$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = \overline{z_B}$ على الترتيب .

(1) اكتب على الشكل الاسي العدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$

(2) عين طبيعة التحويل النقطي f الذي يحول النقطة C الى النقطة B مع ذكر عناصره المميزة

(3) استنتج نوع المثلث ABC

(4) (E) مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة z التي تحقق : $|z^2| - (z + \bar{z}) - 2 = 0$

(أ) تحقق ان النقطة B من المجموعة (E)

(ب) عين ثم انشئ المجموعة (E) في المعلم $(O, \vec{u}; \vec{v})$

التمرين الثاني :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = -1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3}$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $0 < u_n < 2$

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(3) بين مع التبرير أن المتتالية (u_n) متقاربة.

(4) من اجل كل n من $\mathbb{N}$ نضع : $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$

(أ) أكتب $5v_{n+1}$ بدلالة v_n ثم استنتج طبيعة المتتالية (v_n)

(ب) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

(ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثالث :

- يحتوي وعاء على ثلاث قريصات بيضاء مرقمة بالشكل 1، 5، 5 واربعة قريصات حمراء مرقمة بالشكل 1، 3، 3 .
 القريصات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس،
 نسحب عشوائيا من هذا الوعاء قريصتين في آن واحد .
 (1) أحسب احتمال الحدثين التاليين:
 A : " الحصول على قريصتين من نفس اللون"
 B : " الحصول على قريصتين مجموع رقميهما 6"
 (2) احسب $P(A \cap B)$ ، هل الحدثين A ، B مستقلين ؟
 (3) المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لقريصتين مجموع الرقميين المسجلين عليهما.
 أ) ما هي قيم المتغير العشوائي X ؟
 ب) أعط قانون احتمال المتغير العشوائي X
 ج) احسب أمله الرياضي و انحرافه المعياري.

التمرين الرابع:

- (I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[-4; +\infty[$ بـ: $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2}$
 و (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$ (الوحدة 2cm)
 (1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 (2) أ) اثبت أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$
 ب) ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (D) .
 (3) أ) بين انه من اجل كل x من $[-4; +\infty[$ لدينا : $f'(x) = \left(\frac{e^x - 2}{e^x + 2} \right)^2$
 ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $[-4; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f
 ج) استنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تحديد احداثيها.
 د) بين أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $-1.7 < \alpha < -1.6$
 (4) أنشئ (C_f) و (D) في المعلم $(O, \vec{i}; \vec{j})$.
 (II) (1) اوجد مجموعة الدوال الاصلية للدالة $x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 2}$ على $[-4; +\infty[$.
 (2) λ عدد حقيقي حيث $\lambda > 0$
 احسب بـ cm^2 المساحة $A(\lambda)$ للسطح المستوي المحدد بـ (C_f) و (D)
 و المستقيمين الذين معادلتيهما $x = \lambda$ و $x = 0$
 (3) احسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.

التمرين الأول :

- (I) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 = 3z - 9$
 (II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{u}; \vec{v})$

نعتبر النقطتين A, B ذات اللاحقتين $z_A = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ على الترتيب .

(1) احسب $|z_A|$ ، $|z_B|$ ثم استنتج ان النقطتين A, B تنتميان الى دائرة (C) يطلب تحديد عناصرها المميزة.

(2) T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$
 (أ) حدد طبيعة التحويل النقطي T ، مع ذكر عناصره المميزة
 (ب) عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحويل النقطي T .

(3) (أ) اكتب العدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الأسّي.

(ب) استنتج طبيعة التحويل النقطي S الذي يحول النقطة C الى النقطة B ، مع ذكر عناصره المميزة.

التمرين الثاني :

المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2}$$

(1) أحسب u_1, u_2

(2) بين أن المتتالية العددية (u_n) ليست حسابية و ليست هندسية

(3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n = u_n^2 + 3$

(أ) برهن أن المتتالية (v_n) حسابية اساسها 2 ، ثم احسب حدها الاول v_0

(ب) أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n

(ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) أكتب بدلالة n المجموعين S, S' ، حيث :

$$S = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$S' = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$$

التمرين الثالث :

- الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
 نعتبر النقط $A(0;4;1)$ ، $B(1;3;0)$ ، $C(2;-1;-2)$ ، $E(7;-1;4)$
 (1) بين أن النقط A ، B و C تشكل مستو.
 (2) ليكن (D) المستقيم المار من النقطة E و $\vec{u}(2;-1;3)$ شعاع توجيه له.
 أ) بين أن المستقيم (D) عمودي على المستوي (ABC) .
 ب) استنتج معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) .
 (3) ليكن (P) و (P') مستويين معرفين بمعادلتيهما كما يلي :

$$(P) : x + y + z = 0$$

$$(P') : x + 4y + 2 = 0$$

أ) بين أن (P) و (P') متقاطعين وفق مستقيم (D') المعروف بتمثيله الوسيط :

$$(D') : \begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = t \\ z = 2 + 3t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

ب) ادرس الوضع النسبي بين المستقيم (D') و المستوي (ABC) .

التمرين الرابع :

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$ ، $\|\vec{i}\| = 1cm$ ،

(I) الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$: $g(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$

(1) ادرس تغيرات الدالة g على المجال $[0; +\infty[$

(2) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[0; +\infty[$

(II) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$: $f(x) = e^{-x} \ln(e^x + 1)$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المعلم $(O, \vec{i}; \vec{j})$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة ببيان.

(2) أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x) = e^{-x} g(e^x)$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

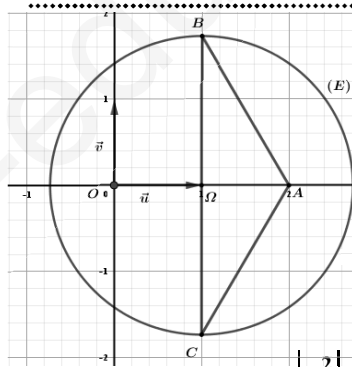
(3) أنشئ (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}; \vec{j})$

(4) أ) بين أن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$: $F(x) = x - (e^{-x} + 1) \ln(e^x + 1)$ هي دالة أصلية لدالة f على $\mathbb{R}$

ب) A مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و المستقيمات $y = 0$ ، $x = 0$ ، $x = \ln 2$ ، احسب بـ cm^2 المساحة A

بالتوفيق في شهادة البكالوريا

العلامة	محاور الموضوع	عناصر الإجابة الموضوع الاول
05	الأعداد المركبة	التمرين الاول: (I) أ) التحقق انه من اجل كل z من $\mathbb{C}$ فان $P(z) = (z-2)(z^2-2z+4)$: $(z-2)(z^2-2z+4) = z^3 - 4z^2 + 8z - 8 = P(z)$ ب) الحل في $\mathbb{C}$ ، للمعادلة $P(z) = 0$: $P(z) = 0$ معناه: $(z-2)(z^2-2z+4) = 0$ ومنه $z = 2$ أو $z = 1 - i\sqrt{3}$ أو $z = 1 + i\sqrt{3}$ $S = \{z = 2 ; z = 1 - i\sqrt{3} ; z = 1 + i\sqrt{3}\}$ أي $z = 1 + i\sqrt{3}$ (II) (1) كتابة الشكل الاسي للعدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{-1 - i\sqrt{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$: (2) تعيين طبيعة التحويل النقطي f : لدينا : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ أي : $z_B - z_A = e^{-i\frac{2\pi}{3}} (z_C - z_A)$ ومنه : التحويل النقطي f هو دوران مركزه النقطة A وزاويته $\theta = -\frac{2\pi}{3}$ (3) استنتاج نوع المثلث ABC : لدينا $AB = AC$ ومنه $z_B - z_A = e^{-i\frac{2\pi}{3}} (z_C - z_A) = e^{-i\frac{2\pi}{3}} z_C - z_A = z_C - z_A$ إذن: المثلث ABC متساوي الساقين . (4) أ) التحقق من ان النقطة B من المجموعة (E) : $z_B ^2 - (z_B + \bar{z}_B) - 2 = 4 - 2 - 2 = 0$ إذن: النقطة B من المجموعة (E) . ب) تعيين و انشاء المجموعة (E) في المعلم $(O, \vec{u}; \vec{v})$: لتكن النقطة M من المستوي المركب لاحقتها $z = x + iy$ لدينا M من المجموعة (E) معناه ان : $z ^2 - (z + \bar{z}) - 2 = 0$ ومنه $x^2 + y^2 - 2x - 2 = 0$ أي $(x-1)^2 + y^2 = 3$ وبالتالي مجموعة النقط (E) هي عبارة عن الدائرة التي مركزها النقطة $\Omega(1;0)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{3} u.m$



التمرين الثاني:

(1) البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n : 0 < u_n < 2$:

- من اجل $n = 1$ لدينا $u_1 = \frac{1}{2}$ ومنه $0 < u_1 < 2$ وبالتالي الخاصية محققة من اجل $n = 1$
- نفرض ان $0 < u_n < 2$ محققة من اجل العدد الطبيعي n ونبرهن ان $0 < u_{n+1} < 2$ محققة كذلك
لنا $0 < u_n < 2$ ومنه $3 < u_n + 3 < 5$ ومنه $\frac{1}{5} < \frac{1}{u_n + 3} < \frac{1}{3}$ ومنه $-\frac{5}{3} < -\frac{5}{u_n + 3} < -1$
ومنه $3 - 1 < 3 - \frac{5}{u_n + 3} < 3 - \frac{5}{3}$ ومنه $\frac{4}{3} < \frac{3u_n + 4}{u_n + 3} < 2$ أي $0 < \frac{3u_n + 4}{u_n + 3} < 2$
أي $0 < u_{n+1} < 2$ ومنه الخاصية $0 < u_{n+1} < 2$ محققة من اجل العدد الطبيعي n .
- نستنتج مما سبق ان الخاصية $0 < u_n < 2$ محققة اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

(2) دراسة اتجاه تغير المتتالية العددية (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(2 + u_n)}{u_n + 3} > 0$$

(3) تبرير ان المتتالية (u_n) متقاربة:

بما ان (u_n) متتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي اذن متقاربة

(4) ا) كتابة $5v_{n+1}$ بدلالة v_n ثم استنتاج طبيعة المتتالية (v_n) :

$$5v_{n+1} = \frac{15u_{n+1} + 20}{u_{n+1} + 3} = \frac{5u_n - 10}{5u_n + 10} = \frac{u_n - 2}{u_n + 2} = v_n : \mathbb{N} \text{ من } n \text{ كل اجل}$$

ومنه المتتالية (v_n) متتالية هندسية اساسها $q = \frac{1}{5}$ وحدها الاول

$$v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 2} = \frac{-1 - 2}{-1 + 2} = -3$$

ب) كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج u_n بدلالة n : $n \in \mathbb{N}$ ، $v_n = -3 \left(\frac{1}{5} \right)^n$ بالتعويض نجد

$$u_n = \frac{-2v_n - 2}{v_n - 1} = \frac{2(5^n) - 6}{5^n + 3}, n \in \mathbb{N}$$

$$\text{ج) استنتاج } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(5^n) - 6}{5^n + 3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(5^n)}{5^n + 3} = 2 : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

(1) حساب احتمال الحدثين A ، B :

$$P(B) = \frac{C_2^1 \times C_3^1 + C_2^2}{C_7^2} = \frac{1}{3} \quad , \quad P(A) = \frac{C_3^2 + C_4^2}{C_7^2} = \frac{3}{7}$$

(2) حساب احتمال $P(A \cap B)$ ، و هل الحدثين A ، B مستقلين :

$$P(A \cap B) = \frac{C_2^1 \times C_1^1 + C_2^2}{C_7^2} = \frac{1}{7}$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{7} \quad \text{لدينا:}$$

اذن : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ أي الحدثين A ، B مستقلين(3) أ) القيم الممكنة للمتغير العشوائي X :

$$X \in \{ 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 \}$$

ب) اعطاء قانون احتمال للمتغير العشوائي X :

$$P(X=2) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{3}{21}$$

$$P(X=4) = \frac{C_3^1 \times C_2^1}{C_7^2} = \frac{6}{21}$$

$$P(X=6) = \frac{7}{21}$$

$$P(X=8) = \frac{C_2^1 \times C_2^1}{C_7^2} = \frac{4}{21}$$

$$P(X=10) = \frac{C_2^2}{C_7^2} = \frac{1}{21}$$

x_i	2	4	6	8	10
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{21}$	$\frac{6}{21}$	$\frac{7}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{21}$

ب) حساب $E(X)$ ، $\sigma(X)$ للمتغير العشوائي X :

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 x_i P(X=x_i) = (2)\left(\frac{3}{21}\right) + (4)\left(\frac{6}{21}\right) + (6)\left(\frac{7}{21}\right) + (8)\left(\frac{4}{21}\right) + (10)\left(\frac{1}{21}\right) = \frac{38}{7}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{i=1}^5 x_i^2 P(X=x_i) - (E(X))^2 \\ &= (2)^2 \left(\frac{3}{21}\right) + (4)^2 \left(\frac{6}{21}\right) + (6)^2 \left(\frac{7}{21}\right) + (8)^2 \left(\frac{4}{21}\right) + (10)^2 \left(\frac{1}{21}\right) - \left(\frac{38}{7}\right)^2 \\ &= \frac{680}{147} \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{680}{147}} \approx 2.15$$

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$: نجد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(2) أ) إثبات أن المستقيم (D) ذي المعادلة $y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$:

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)] = 0$

إذن المستقيم (D) ذي المعادلة $y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

ب) دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (D) : لدينا : $d(x) = f(x) - (x - 2) = \frac{8}{e^x + 2}$

بما أنه من أجل كل x من $[-4; +\infty[$: $0 < \frac{8}{e^x + 2}$ أي : $0 < d(x)$

أي أن (C_f) يقع فوق المستقيم (D) .

(3) أ) حساب $f'(x)$: $f'(x) = 1 - \frac{8e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{(e^x - 2)^2}{(e^x + 2)^2} = \left(\frac{e^x - 2}{e^x + 2} \right)^2$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f على $[-4; +\infty[$ وتشكيل جدول تغيراتها :

دراسة إشارة $f'(x)$:

لدينا من أجل كل x من $[-4; +\infty[$: $(e^x + 2)^2 > 0$ و $(e^x - 2)^2 \geq 0$ ومنه $f'(x) \geq 0$

و لدينا $f'(x) = 0$ يكافئ أن $(e^x - 2)^2 = 0$ يكافئ أن $e^x - 2 = 0$ يكافئ أن $x = \ln 2$.

تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	-4	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-2 - \frac{4}{2e^4 + 1}$		$+\infty$

(ج) استنتاج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف مع تحديد احداثيها:

بما أن $f'(x)$ تنعدم من أجل القيمة $\ln 2$ ولا تغير إشارتها عند القيمة $\ln 2$ فإن النقطة

$\Omega(\ln 2; \ln 2)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f)

(د) تبين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث:

$$-1.7 < \alpha < -1.6$$

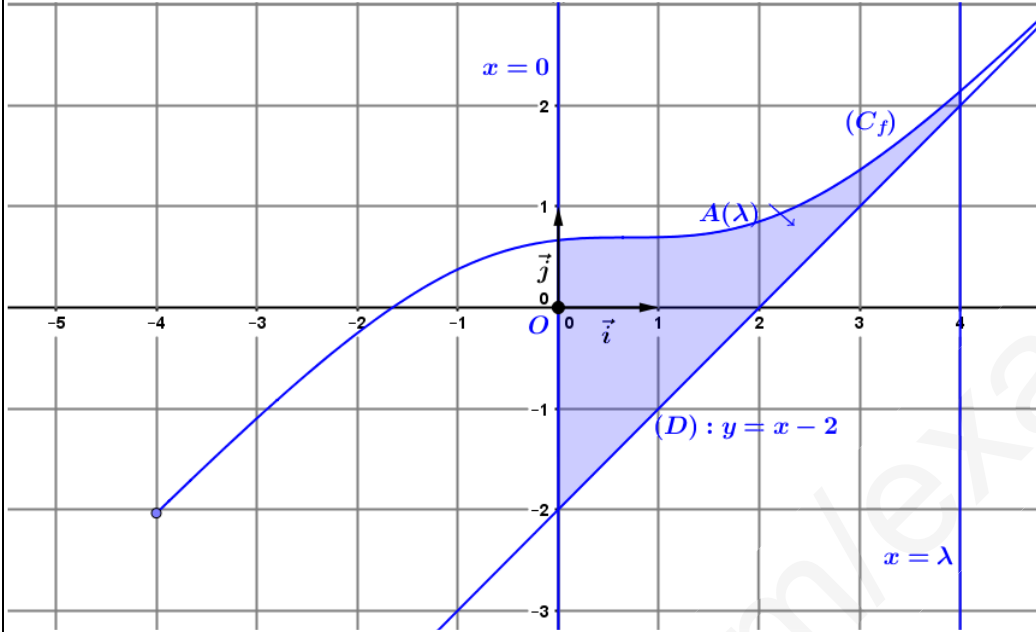
لدينا دالة f مستمرة و متزايدة تماماً على $[-4; +\infty[$ و $f(-1.7) \times f(-1.6) < 0$ إذن

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث :

$$-1.7 < \alpha < -1.6$$

أي أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α .

(4) إنشاء (C_f) و (D) في المعظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$:



(II) 1) إيجاد الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 2}$ على المجال $[-4; +\infty[$:

الدالة $x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 2}$ معرفة ومستمرة على المجال $[-4; +\infty[$ فهي تقبل دوال أصلية .

نضع $u(x) = e^x + 2$ ومنه $u'(x) = e^x$ ومنه نجد ان الدالة $x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 2}$ مكتوبة على

الشكل $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ اي ان مجموعة الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 2}$ على المجال

$[-4; +\infty[$ هي : $x \mapsto \ln(e^x + 2) + k$; $k \in \mathbb{R}$.

(2) حساب المساحة $A(\lambda)$:

$$A(\lambda) = 2 \times 2 \left[\int_0^\lambda \left(\left(x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2} \right) - (x - 2) \right) dx \right] = 8 \left[\int_0^\lambda \left(4 - \frac{4e^x}{e^x + 2} \right) dx \right]$$

$$= 8 \left[4x - 4 \ln(e^x + 2) \right]_0^\lambda = 8 \left(4\lambda - 4 \ln(e^\lambda + 2) + 4 \ln 3 \right) cm^2$$

(3) حساب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} 8 \left(4\lambda - 4 \ln(e^\lambda + 2) + 4 \ln 3 \right) = +\infty$$

الدوال
العديدية
و
الحساب
التكاملي

التمرين الأول:

(I) الحل في $\mathbb{C}$ للمعادلة $z^2 = 3z - 9$:

المعادلة $z^2 = 3z - 9$ تكافئ $z^2 - 3z + 9 = 0$ ومنه $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (1)(9) = -27$

ومنه نجد $S = \left\{ \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i ; \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right\}$

(II) حساب $|z_A|, |z_B|$:

$$|z_B| = |z_A| = 3, \quad |z_A| = \left| 3e^{i\frac{\pi}{6}} \right| = 3$$

لدينا $|z_A| = OA = 3$ وأيضا $|z_B| = OB = 3$ إذن نستنتج أن النقطتين A و B تنتميان للدائرة ذات المركز O ونصف القطر R=3.

(2) أ) تحديد طبيعة التحويل T:

لنا العبارة المركبة لهذا الدوران هي $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$ وهي من الشكل $z' - z_0 = e^{i\frac{2\pi}{3}} (z - z_0)$ وحسب الدرس يتضح ان هذه العبارة هي لدوران مركزه النقطة O وزاويته $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

ب) تعيين z_C لاحقة النقطة C صورة A بالتحويل T:

$$z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times \left(3e^{i\frac{\pi}{6}} \right) = \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

(3) أ) كتابة العدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الأسّي:

$$\text{لنا } \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \right) - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \right)}{\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \right) - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}i = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ب) استنتاج طبيعة التحويل النقطي S الذي يحول C الى B مع ذكر عناصره المميزة:

$$\text{لنا } \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ ومنه } z_B - z_A = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_C - z_A) \text{ وهو من الشكل}$$

$z' - z_0 = re^{i\theta}(z - z_0)$ أي ان النقطة B هي صورة C بتشابه مباشر وعليه نستنتج ان S هو

$$\text{التشابه المباشر الذي نسبته } r = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ومركزه النقطة A وزاويته } \theta = \frac{\pi}{2}.$$

التمرين الثاني:(1) حساب الحدود u_1, u_2 :

$$u_2 = \sqrt{u_1^2 + 2} = \sqrt{3 + 2} = \sqrt{5}, \quad u_1 = \sqrt{u_0^2 + 2} = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}$$

(2) تبين ان المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية:

$$\sqrt{5} \neq 3 \text{ أي } u_2 u_0 \neq u_1^2 \text{ اذن المتتالية } (u_n) \text{ ليست هندسية خاصة الوسط الهندسي غير محققة}$$

$$1 + \sqrt{5} \neq 2\sqrt{3} \text{ أي } u_0 + u_2 \neq 2u_1 \text{ اذن المتتالية } (u_n) \text{ ليست حسابية الوسط الحسابي غير محقق}$$

(أ) اثبات ان المتتالية (v_n) حسابية أساسها 2 و حساب حدها الاول v_0 :

$$v_{n+1} = u_{n+1}^2 + 3 = (u_n^2 + 3) + 2 = v_n + 2 : \mathbb{N} \text{ من } n \text{ كل}$$

$$\text{ومنه المتتالية } (v_n) \text{ متتالية حسابية أساسها } r = 2 \text{ وحدها الاول } v_0 = u_0^2 + 3 = 1 + 3 = 4$$

(ب) كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج u_n بدلالة n :

$$\text{لنا } v_n = 2n + 4, n \in \mathbb{N} \text{ ومنه } u_n = \sqrt{v_n - 3} = \sqrt{2n + 1}, n \in \mathbb{N}$$

(ج) حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{2n + 1} = +\infty$$

(4) كتابة بدلالة n المجموعين S, S' :

$$\text{نجد } S = v_0 + v_1 + \dots + v_n \text{ ومنه } S = (n+1)(n+4)$$

$$\text{أيضا } S' = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2 \text{ ومنه } S' = 3(n+1) \text{ و } S' = S - 3(n+1)$$

التمرين الثالث:(1) تبين أن النقط A, B, C تشكل مستو:

$$\text{لدينا : } \overrightarrow{AB} (1; -1; -1), \overrightarrow{AC} (2; -5; -3) \text{ ولنا : } \frac{x_{\overrightarrow{AC}}}{x_{\overrightarrow{AB}}} \neq \frac{y_{\overrightarrow{AC}}}{y_{\overrightarrow{AB}}}$$

إذن فإن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي النقاط A, B, C تشكل مستو

(2)

(أ) تبين ان المستقيم (D) عمودي على المستوي (ABC) :

لدينا :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = (1)(2) + (-1)(-1) + (-1)(3) = 0 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \vec{u} = (2)(2) + (-5)(-1) + (-3)(3) = 0 \end{cases}$$

اذن المستقيم (D) عمودي على المستوي (ABC) لان شعاع توجيهه يعامد شعاعي توجيهه.(ب) استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :بما أن المستقيم (D) عمودي على المستوي (ABC) فإن الشعاع $\vec{u}(2; -1; 3)$ هو شعاع ناظمي

$$\text{للمستوي } (ABC) \text{ ومنه نجد : } 2x - y + 3z + d = 0$$

$$A \in (ABC) : -2(0) - 3(4) + 3(1) + d = 0 \text{ اذن : } d = 4$$

$$\text{و بالتالي : } (ABC) : 2x - y + 3z + 4 = 0$$

المتتاليات
العدديةالهندسة
الفضائية

(3)

(أ) تبين ان المستويين (P) و (P') متقاطعين وفق مستقيم (D') :

$$\begin{cases} x = -2 - 4t & \text{.....(1)} \\ y = t & \text{.....(2)} \\ z = 2 + 3t & \text{.....(3)} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

و المستويين (P) و (P') معرفين بمعادلتهم :

$$(P) : x + y + z = 0 \text{.....(4)} \quad (P') : x + 4y + 2 = 0 \text{.....(5)}$$

بتعويض (1) و (2) و (3) في (4) و (5) على التوالي نجد :

$$(-2 - 4t) + (t) + (2 + 3t) = 0 \quad \text{و} \quad (-2 - 4t) + 4(t) + 2 = 0$$

اذن : $(P) \cap (P') = (D')$.

(ب) دراسة الوضع النسبي بين المستوي (ABC) والمستقيم (D') :

$$\text{لدينا : } \vec{u}_{(D')} \cdot \vec{c} \vec{n}_{ABC} = (2)(-4) + (-1)(1) + (3)(3) = 0$$

اذن : $B \notin (D') \parallel (ABC)$.

التمرين الرابع:

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g على $[0; +\infty[$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \quad \text{(أ) النهايات :}$$

(ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g على $[0; +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{-x}{(x+1)^2} \quad \text{حساب } g'(x) :$$

دراسة إشارة $g'(x)$: لدينا من اجل كل x من $[0; +\infty[$: $(x+1)^2 > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ تعتمد على إشارة البسط $-x$ لدينا من اجل كل x من $[0; +\infty[$: $-x \leq 0$ وبالتالي : من اجل كل x من $[0; +\infty[$: $g'(x) \leq 0$ (ج) تشكيل جدول تغيرات الدالة g على المجال $[0; +\infty[$:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	0	—
$g(x)$	0	$-\infty$

(2) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $[0; +\infty[$:

x	0	$+\infty$
$g(x)$	0	—

(II) (1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

(ب) التفسير الهندسي :

(C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أفقيين معدلتيهما $y = 1$ و $y = 0$

(2) (أ) تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^{-x} g(e^x)$

$$f'(x) = (e^{-x} \ln(e^x + 1))' = e^{-x} \left(\frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(e^x + 1) \right) = e^{-x} g(e^x)$$

(ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم تشكيل جدول تغيراتها:

دراسة إشارة $f'(x)$:

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^{-x} > 0$

و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^x > 0$

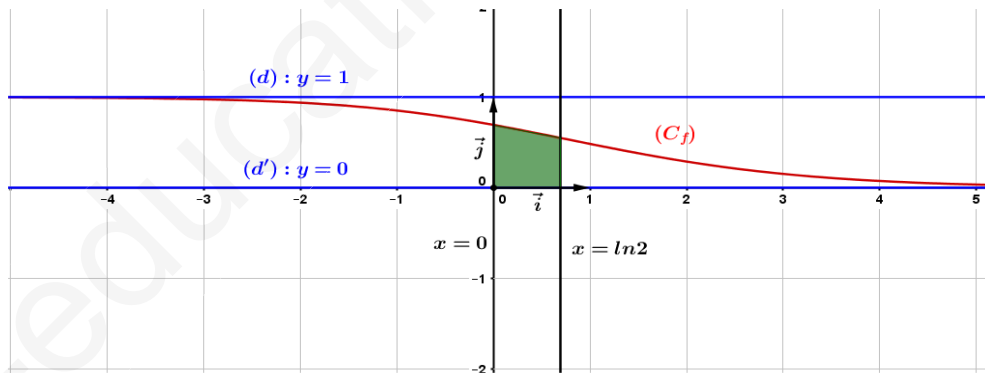
وبما أن $g(x)$ سالبة على المجال $[0; +\infty[$ فإن $g(e^x) < 0$

وبالتالي : من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) < 0$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	1	0

(3) إنشاء (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}; \vec{j})$:



(4) (أ) تبين أن الدالة $F(x) = x - (e^{-x} + 1) \ln(e^x + 1)$ هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:
لدينا الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$F'(x) = (x - (e^{-x} + 1) \ln(e^x + 1))' = e^{-x} \ln(e^x + 1) = f(x)$$

ومنه الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

(ب) حساب بـ cm^2 المساحة A :

$$A = 1 \times 1 \left[\int_0^{\ln 2} (e^{-x} \ln(e^x + 1)) dx \right] = [x - (e^{-x} + 1) \ln(e^x + 1)]_0^{\ln 2} \approx 0.43 cm^2$$

لوطاية في 2019/05/23

الدوال
الأصلية
وحساب
المساحات

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية سطيف

ثانوية بورقبة العيفة

دورة: ماي 2019 .

امتحان بكالوريا تجريبي.

الشعبة : علوم تجريبية

المدة: 03 سا و 30 د

اختبار في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين:
الموضوع الأول:

التمرين الأول:

(U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدّها الأول $U_1 = -1$ و من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

$$U_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} ;$$

1 - برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $U_n \leq 3$

2 - ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ، ثم استنتج انها متقاربة

3 - احسب نهاية المتتالية (U_n)

II - لتكن المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $V_n = n(3 - U_n)$

1 - برهن ان المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين اساسها و حدّها الأول V_1

2 - عبر عن V_n بدلالة n ثم استنتج U_n بدلالة n

3 - احسب نهاية (U_n) مرة اخرى

4 - احسب المجموعين S_n ؛ S'_n حيث : $S_n = \frac{V_1}{3 - U_1} + \frac{V_2}{3 - U_2} + \dots + \frac{V_n}{3 - U_n}$

$$S'_n = U_1 + 2U_2 + 3U_3 + \dots + nU_n$$

التمرين الثاني:

I - جد قيم العددين المركبين Z ؛ Z' حيث:

$$\begin{cases} Z - Z' = -2\sqrt{3} \\ Z \cdot Z' = -4 \end{cases}$$

II - المستوي منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A ، B و C نقط من المستوي لواحقتها على

$$\text{الترتيب } Z_D = \overline{Z_C} \text{ و } Z_C = 2(\sin \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{\pi}{3}) ; Z_B = \overline{Z_A} ; Z_A = -2e^{\frac{-i\pi}{6}}$$

1 - اكتب كلاً من Z_A ؛ و Z_C على الشكل الاسي

ب - عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $(Z_A \times Z_C \times Z_B)^n$ تخيلياً صرفاً

2- 1 - اكتب العدد $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$ على الشكل الجبري

ب - استنتج انه يوجد تشابه مباشر S يحول النقطة C إلى النقطة B ، يطلب تعيين عناصره المميزة

3 - حدد طبيعة الرباعي $ABDC$

4 - 1 - عين ثم انشئ (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z التي تحقق : $Z + \sqrt{3} - i = -2e^{i\theta}$

حيث θ يمسح $\mathbb{R}$

ب - عين (Γ') صورة (Γ) بالتشابه المباشر S

التمرين الثالث :

الفضاء منسوب إلى العلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(-1; 2; 1)$ ؛ $B(2; 1; 3)$ و $C(0; -1; 2)$

1 - جد معادلة ديكارتية لـ (P) المستوي المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$

2 - عين معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل النقطة A و يوازي المستوي (P)

3 - 1 - عين تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة C و يعامد المستوي (P)

ب - عين أحداثيات النقطة E نقطة تقاطع المستوي (Q) و المستقيم (Δ)

ج - احسب المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ)

4 - عين تمثيلاً وسيطياً للمستوي (R) الذي يحوي المستقيم (AC) و يعامد المستوي (P) ثم استنتج

معادلة ديكارتية له

التمرين الرابع :

I - لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty, 3[$ ب : $g(x) = \frac{x+1}{x-3} + \ln(3-x)$

1 - ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

2 - بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0.7 < \alpha < 0.8$

3 - استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x من المجال $]-\infty, 3[$

II - لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty, 3[$ ب : $f(x) = (x+1) \ln(3-x)$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى العلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 - احسب $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ فسر النتيجة هندسية ثم احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2 - 1 - بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty, 3[$: $f'(x) = g(x)$

ب - ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3 - بين ان $f(\alpha) = \frac{(\alpha+1)^2}{3-\alpha}$ ؛ ثم استنتج حصرًا لـ $f(\alpha)$

4 - حل في المجال $]-\infty, 3[$ المعادلة $f(x) = 0$ ؛ انشئ (C_f)

5 - 1 - تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty, 3[$: $\frac{x^2+2x}{-2x+6} = \frac{-x-5}{2} + \frac{15}{-2x+6}$

ب - باستعمال التكامل بالتجزئة احسب العدد A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمت

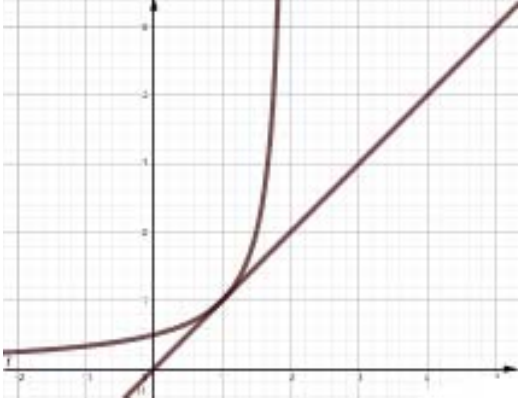
التي معادلاتها $x = -1$ ، $x = 2$ و $y = 0$

الموضوع الثاني:

التمرين الأول:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-\infty; 2[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{2-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوى

المنسوب إلى المعلم لتعتمد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، وليكن المستقيم ذا المعادلة $y = x$



(U_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول U_0 حيث $U_0 = -1$

و من اجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1} = f(U_n)$

1- ا - مثل على حامل محور الفواصل الحدود U_0 ؛ U_1 ؛ U_2 و U_3

ب - ضع تخمينًا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) و تقاربها

2 - برهن بالتراجع ان : من اجل كل عدد طبيعي n ، $U_n < 1$

3 - ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج انها متقاربة

4 - نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة كمايلي : من اجل كل عدد طبيعي n : $V_n = \frac{2}{1-U_n}$

ا - برهن ان المتتالية (V_n) حسابية اساسها 2 ثم عين عبارة حددها العام V_n بدلالة n

ب - استنتج عبارة الحد العام U_n بدلالة n ثم احسب نهاية المتتالية (U_n)

5 - احسب المجموع S_n حيث : $S_n = U_0 \times V_0 + U_1 \times V_1 + \dots + U_n \times V_n$

التمرين الثاني:

يحتوي كيس على 12 كرة منها 3 بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 ، و 5 خضراء تحمل الأرقام 1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 3 و 4 حمراء تحمل الأرقام 1 ; 2 ; 2

نسحب عشوائيًا و في ان واحد ، كرتين من الكيس

نعتبر الحادثين A (سحب كرتين من نفس اللون) ، B (سحب كرة خضراء على الأقل)

1- ا - احسب احتمال كل حادثة من الحوادث : A ، B ، $A \cap B$

ب - هل الحادثتان A ، B مستقلتان

2 - ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب جداء العددين المسجلين على الكرتين المسحوبتين

ا - عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عرف قانون احتماله

ب - احسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير X

ج - احسب احتمال الحادثة $|X - 4| = 2$

التمرين الثالث:

I - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $(Z + 4)(2\overline{Z}^2 + 6\overline{Z} + 17) = 0$

II - المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، A ، B و C نقط من المستوي لواقعها على الترتيب $Z_C = \overline{Z_B}$ ؛ $Z_B = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$ ، $Z_A = -4$

1 - (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z التي تحقق : $\arg(Z + 4)^2 = \frac{\pi}{2}$

ا - تحقق ان النقطة B تنتمي إلى المجموعة (Γ)

ب - عين المجموعة (Γ)

2 - ا - تحقق ان : $(Z_B - Z_A) = i(Z_C - Z_A)$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

ب - استنتج ان النقطة B صورة النقطة C بتحويل نقطي يطلب تعيينه و تحديد عناصره المميزة

3 - لتكن النقطة D صورة النقطة B بالانسحاب الذي شعاعه $2\vec{AC}$

حدد طبعة الرباعي $ACDB$

التمرين الرابع:

I - نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x) = \frac{1}{2} - \frac{1+2x}{2e^{2x}}$

1 - ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

2 - استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x

II - لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(1+x)e^{-2x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ؛ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2 - ا - بين انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

ج - بين ان المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيتها

3 - بين ان المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α ، حيث : $-0.9 < \alpha < -0.8$

4 - ا - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \frac{1}{2}x]$ ؛ فسر النتيجة هندسيا

ب - ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x$

5 - انشئ (C_f) و المستقيم (Δ)

6 - ا - عين مجموعة النقط $M(x; y)$ من المنحنى (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (Δ)

ب - ناقش بياننا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x : $(1+x) = me^{2x}$

7 - H الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $H(x) = (ax+b)e^{-2x}$ حيث a ؛ b عددان حقيقيان

ا - عين a و b بحيث تكون H دالة اصلية للدالة $(x+1)e^{-2x}$

ب - احسب العدد A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمت التي معادلاتها $x = \alpha$ ، $x = 0$

و $y = \frac{1}{2}x$

تمنيتي لكم بالنجاح و التوفيق في شهادة البكالوريا

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين:

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقط $A(1;0;2)$ ؛ $B(0;1;2)$ ؛ $C(1;-2;0)$ والمستوي (P) الذي معادلته : $3x - 2y + z + 3 = 0$.

(1) أ) بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا.

(ب) تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1;1;-1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكارتية له.

(2) أ) بين أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان .

(ب) بين أن تقاطع المستويين (P) و (ABC) هو المستقيم (Δ) المعرف بتمثيله الوسيطى : $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 4t \\ z = 5t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$

(ج) أحسب المسافة بين النقطه $H(-1;6;-2)$ و المستويين (P) و (ABC) ، ثم بين أن المسافة بين النقطه H والمستقيم (Δ) تساوي $\sqrt{\frac{106}{3}}$.

(3) ليكن المستوي (Q) ذو المعادلة : $x - y + z - 1 = 0$

- عين تقاطع المستويات الثلاثة (P) ، (ABC) و (Q) .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 7 كريات منها ثلاث حمراء تحمل الارقام 1.1.2 وأربعة بيضاء تحمل الارقام 3.2.1.1 نسحب من الكيس كرتين على التوالي وبدون ارجاع .

1- شكل شجرة الاحتمالات الموافقة لهذه الوضعية في الحالتين الاتيتين :

أ) باعتماد الوان الكرات (ب) باعتماد الارقام المسجلة على الكرات .

2- نعتبر الحادثتان التاليتان : A " الحصول على كرتين من نفس اللون "

B " الحصول على كرتين مجموع رقميهما ثلاثة "

أ) احسب $p(A)$ و $p(B)$ وبين ان : $p(A \cap B) = \frac{4}{21}$ ، هل الحادثتين A و B مستقلتان ؟ (مع التعليل)

ب) علما ان الكرتين من نفس اللون ما احتمال ان يكون مجموع رقميهما ثلاثة .

ج) علما ان الكرتين مجموع رقميهما ثلاثة ما احتمال ان يكونا من نفس اللون .

3- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الرقمين المحصل عليهما.

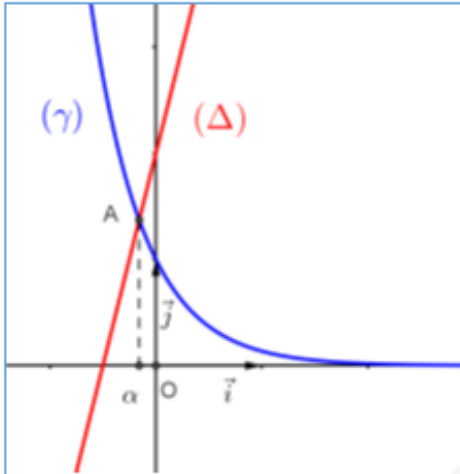
أ) عين قيم المتغير العشوائي X .

ب) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب امله الرياضي.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(\bar{z} + 3 + i)(z^2 - 2z + 10) = 0$.
- (2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C و D التي لواحقتها على الترتيب :
 $z_A = 2 + i$ و $z_B = 1 + 3i$ و $z_C = -3 + i$ و $z_D = \bar{z}_B$.
- (أ) أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي ، و استنتج طبيعة المثلث ABC .
- (ب) أكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر s الذي مركزه B ويحول A إلى C .
- (ج) عين z_E لاحقة النقطة E بحيث تكون النقطة D صورة E بالتشابه s .
- (د) عين المجموعة (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ بحيث : $z = z_E + 2e^{i\theta}$ ، $\theta \in \mathbb{R}$.
- (3) (أ) عين z_F لاحقة النقطة F و التي تحقق : $\overline{DF} = 3\overline{DB}$.
- (ب) استنتج نسبة التحاكي h الذي مركزه B ويحول D إلى F .
- (ج) عين عناصر التحويل s' بحيث : $s' = h \circ s$.
- (د) استنتج طبيعة المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل s' ، محددا عناصرها المميزة .

التمرين الرابع: (07 نقاط)



(1) (γ) التمثيل البياني للدالة : $x \mapsto e^{-2x}$ و (Δ) المستقيم ذو

المعادلة : $y = 4x + 2$ ؛ α هي فاصلة نقطة تقاطع (Δ) و (γ) .

g الدالة المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = e^{-2x} - 4x - 2$.

(أ) بقراءة بيانية حدد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على $\mathbb{R}$ ،

ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(ب) تحقق أن : $-0.16 < \alpha < -0.15$.

(2) لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x + 3 - 2xe^{2x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، وحدة الطول 2cm .

(أ) أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

(ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x) = e^{2x}g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x + 3$ مستقيما مقاربا مائلا للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D) .

(4) بين أن : $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + 6\alpha + 3}{2\alpha + 1}$.

(5) أرسم المستقيم (D) والمنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha) \approx 3.07$) .

(6) (أ) أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا موازيا للمستقيم (D) يطلب تعيين معادلة له .

(ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين متمايزين .

(7) (أ) x عدد حقيقي ، باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_0^x 2te^{2t} dt$.

(ب) λ عدد حقيقي أصغر تماما من 0 ، احسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و

بالمستقيمات ذات المعادلات : $x = 0$ ، $x = \lambda$ و $y = x + 3$ ، ثم جد $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$.

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

(1) (v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما معرفة على $\mathbb{N}$ حيث: $v_0 = \frac{4}{3}$ و $v_1 \times v_2 \times v_3 = \frac{27}{64}$.

(أ) أحسب v_2 ، ثم استنتج أن أساس المتتالية (v_n) هو $q = \frac{3}{4}$.

(ب) أكتب v_n بدلالة n .

(2) (u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0 = -\frac{2}{3}$ و من اجل كل n طبيعي $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - \frac{1}{2}$.

(أ) أحسب الحدود u_1 و u_2 .

(ب) برهن أنه من اجل كل n طبيعي: $u_n > -2$.

(ج) عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج انها متقاربة.

(3) (w_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = u_n - v_n$.

(أ) أثبت بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $w_n = -2$.

(ب) استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم أحسب نهايتها.

(ج) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{u_1}{v_1} + \frac{u_2}{v_2} + \dots + \frac{u_n}{v_n}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس U على 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس منها خمس كريات بيضاء و ثلاث كريات حمراء و كريتان خضراء.

نسحب عشوائيا و في آن واحد 3 كريات من الكيس U .

نعتبر الحادثتين: A "من بين الكريات الثلاث المسحوبة توجد كرة خضراء واحدة فقط"

B "الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون".

(1) احسب $P(A)$ و $P(B)$.

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الألوان الظاهرة في السحب.

(أ) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X .

(ب) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

(3) نعتبر الكيس الأول U وكيس آخر V يحتوي على كريتان بيضاء و كريتان حمراء و كرة واحدة خضراء.

نرمي زهرة نرد غير مزيفة مرقمة من 1 إلى 6، فإذا ظهر الرقم 6 فنسحب كرة من الكيس الأول U وإلا فنسحب

كرة من الكيس V .

(أ) بين أن احتمال سحب كرة بيضاء هو $p(C) = \frac{5}{12}$.

(ب) علما أن الكرة المسحوبة بيضاء، فما احتمال أن تكون من الكيس الثاني V .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) (أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - 6z + 21 = 0 \dots (I)$.

(ب) استنتج حلول المعادلة: $(\bar{z} + 3 + i\sqrt{3})^2 - 6\bar{z} - i6\sqrt{3} + 3 = 0 \dots (II)$.

(2) في المستوى المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C و D

$$z_D = \overline{z_C} \text{ و } z_C = 3 + 2i\sqrt{3}, z_B = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}, z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

أ) يبين أن النقط A, B, C و D تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = 3$ ويطلب تعيين نصف قطرها .

ب) لتكن النقطة E نظيرة النقطة D بالنسبة إلى المبدأ O .

$$\text{- بين أن } \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} \text{ , ثم استنتج طبيعة المثلث } BEC .$$

ج) يبين أنه يوجد دوران r مركزه B ويحول النقطة E إلى C ، يطلب تعيين زاويته .

(3) نعتبر التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M من المستوى ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$$z' + i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}(z + i\sqrt{3})$$

أ) عيّن طبيعة التحويل S و حدد عناصره المميزة .

ب) عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق : $|z - z_\Omega|^2 = -(z_A - z_B)^2$.

ج) عيّن طبيعة المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S ، محددا عناصرها المميزة .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

(1) g دالة معرفة على $]0; +\infty[$ ب : $g(x) = \frac{\ln x}{x} + e$.

أ) أدرس تغيرات الدالة g .

ب) أحسب $g\left(\frac{1}{e}\right)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.

(2) f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ ب : $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + ex - e$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (نأخذ : $\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm}$; $\|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$)

أ) يبين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

ب) عيّن نهايات الدالة f عند 0 و $+\infty$ ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

(4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (T) .

(5) أرسم (T) والمنحنى (C_f) .

(6) h الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $h(x) = x \left[(\ln x)^2 + a \ln x + b \right]$ ، حيث a و b عدنان حقيقيان .

أ) عيّن a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $(\ln x)^2$. $x \mapsto (\ln x)^2$

ب) أحسب بـ cm^2 المساحة A للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $x = \frac{1}{e}$ ، $x = 1$ ، $y = ex - e$.

(7) لتكن k الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $k(x) = f(e^{2x})$.

- باستعمال مشتقة دالة مركبة عيّن اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها .

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نعتبر النقط: $A(1; -2; 4)$, $B(-2; -6; 5)$, $C(-4; 0; -3)$

$$D\left(-\frac{1}{2}; -3; 2\right) \text{ و}$$

- (1) أ) بين أن النقط A , B و C ليست على استقامة واحدة.
- ب) بين أن الشعاع $\vec{n}(1; -1; -1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكارتية له .
- (2) أ- عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة D و العمودي على المستوي (ABC) .
ب- استنتج إحداثيات النقطة G المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .
ج- تحقق أن النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 2), (B; 1), (C; 1)\}$.
- (3) عين مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $\|2\vec{AM} + \vec{BM} + \vec{CM}\| = d(O; (ABC))$.
- (4) احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_1 = e^2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n , $u_{n+1} = e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{u_n}$.
- (1) أ) أحسب u_2 و u_3 .
ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > \frac{1}{e}$.
 - (2) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
ب) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .
 - (3) أ) (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ: $v_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln(u_n)$.
ب) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول .
ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n , ثم استنتج u_n بدلالة n و أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
 - (4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{1}{1 + \ln u_1} + \frac{1}{1 + \ln u_2} + \dots + \frac{1}{1 + \ln u_n}$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- 1/ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - 2\sqrt{2}z + 3 = 0$.
- 2/ المستوي المركب منسوب معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
نعتبر النقط A , B , C , D و G لواحدها على الترتيب $z_A = \sqrt{2} + i$, $z_B = \overline{z_A}$, $z_C = 2\sqrt{2}$, $z_G = 2i$ و $z_D = -\sqrt{2} + 3i$.
أ. أثبت أن النقطتين A و B تنتمي إلى دائرة مركزها C يطلب تعيين نصف قطرها .

ب. تحقق من أن $z_C = z_A + z_B$ و $|z_A| = |z_B|$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $OACB$ و احسب مساحته .

3 / بين أن النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(C;1), (D;2)\}$.

4 / (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $\sqrt{(iz+2)(\overline{iz+2})} = 6$ ، عين المجموعة (Γ) .

5 / S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطة $M'(z')$ من المستوي حيث :

$$z' = 2e^{i\pi}z + 4 + 2i$$

عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل النقطي S ثم أوجد صورة (Γ) بالتحويل S .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;e[\cup]e;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ، (الوحدة 2 cm) .

1(I) / احسب نهايتي الدالة f عند e وعند $+\infty$ ، ثم فسّر النتائج هندسيا .

2 / بين أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ثم فسّر النتائج هندسيا . (لاحظ أن $x(1-\ln x) = x - x \ln x$) .

3 / بين أنه من أجل كل x من $]0;e[\cup]e;+\infty[$: $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f .

4 / ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

II) لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس (انظر الشكل)

1 / أ. بقراءة بيانية حدّد عدد حلول المعادلة (E) التالية :

$$g(x) = 0 \text{ في المجال }]0;+\infty[$$

ب . باستعمال جدول القيم التالي :

x	2,1	2,2	2,3	2,4
$g(x)$	-0,14	-0,02	0,12	0,28

بين أن المعادلة (E) تقبل حلاً α بحيث $2,2 < \alpha < 2,3$

2 / أ. تحقق أنه من أجل كل x من D_f ، $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1-\ln x)}$.

ب . بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ يقطع المنحنى (C_f) في النقطتين ذات الفاصلتين 1 و α .

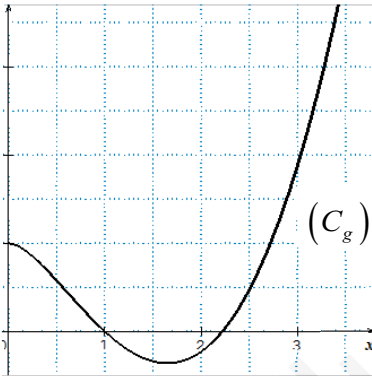
ج . حدد انطلاقاً من (C_g) إشارة $g(x)$ على المجال $[1;\alpha]$ وبين أن $f(x) - x \leq 0$ لكل x من المجال $[1;\alpha]$.

3 / أنشئ في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ، المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) .

4 / أ. بين أن $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)} dx = \ln 2$ ، (لاحظ أن $\frac{1}{x(1-\ln x)} = \frac{1}{1-\ln x}$ لكل x من D_f) .

ب . نعتبر المساحة A لمجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي حيث : $1 \leq x \leq \sqrt{e}$ و $f(x) \leq y \leq x$

احسب A بـ cm^2 .



البكالوريا التجريبية في مادة الرياضيات

المدة: 3 ساعات ونصف

المستوى: ثالثة علوم تجريبية

على المترشح اختيار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (4 نقاط)

يحتوي صندوق على ثماني كرات منهم: 3 كرات حمراء و 3 كرات خضراء و كرتين بيضاوين الكرات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس. نسحب عشوائيا على التوالي ودون ارجاع كرتين من الصندوق (1) نعتبر الحدث A التالي: الحصول على كرة بيضاء واحدة على الأقل. و الحدث B : الحصول على كرتين من نفس اللون.

$$(أ) \text{ بين أن } P(B) = \frac{1}{4}, P(A) = \frac{13}{28}$$

(ب) نضيف الى الصندوق n كرة بيضاء، نعتبر الحدث C : الحصول على كرتين بيضاوين

$$\text{بين أن: } P(C) = \frac{(n+2)(n+1)}{(n+8)(n+7)}, \text{ ثم أحسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} p(C) \text{ و ماذا تستنتج.}$$

(2) نسحب عشوائيا و في أن واحد 3 كرات من الصندوق -وضعية الصندوق الأولى- و نعتبر المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

(أ) أعط قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضي. (ب) احسب التباين والانحراف المعياري.

التمرين الثاني: (4 نقاط)

$$\text{نعتبر المتتالية } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ المعرفة ب: } u_0 = \frac{3}{4} \text{ و } u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n^2 - 2u_n + 1}$$

(1) برهن بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $\frac{1}{2} < u_n < 1$.

(2) بين أن (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة.

$$(3) \text{ نعتبر المتتالية } (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ المعرفة ب: } t_n = \ln \left(\frac{1 - u_n}{u_n} \right)$$

أ- بين أن المتتالية t_n هندسية أساسها 2 ثم عبر عن t_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n

ب- عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (t_n)$.

$$(4) \text{ أحسب الجداء } P_n = t_0 \times t_1 \times \dots \times t_n$$

$$\text{أحسب المجموع } S_n = \frac{1}{t_0} + \frac{1}{t_1} + \dots + \frac{1}{t_n}$$

التمرين الثالث: (5 نقاله)

- (1) حل، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $(z - i\sqrt{3})(z^2 + -2z + 4) = 0$.
- (2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط A, B, C التي لواحقتها على الترتيب: $z_C = i\sqrt{3}, z_B = 1 - i\sqrt{3}, z_A = 1 + i\sqrt{3}$.
- (أ) أكتب على الشكل الأسّي z_C, z_B, z_A ثم أحسب العدد $(z_A)^{2019} + (z_B)^{1440} + (z_C)^{2969}$.
- (ب) أكتب على الشكل الأسّي العدد $L = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ثم حدد طبيعة المثلث ABC .
- (ت) استنتج طبيعة التحويل S الذي مركزه A ويحول النقطة B إلى النقطة C مبرزاً عناصره المميزة.
- (3) لتكن G مرجح الجملة $\{(A, 1); (B, \alpha); (C, 1)\}$ حيث $\alpha \neq -2$ عيّن قيمة α حتى تنتمي النقطة G إلى المتوسط المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث ABC .
- (4) حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $|iz + \sqrt{3} - i| = |\bar{z} + i\sqrt{3}|$.

التمرين الرابع: (07 نقاله)

- I. لتكن g دالة عددية معرفّة على $]-2, +\infty[$ بـ: $g(x) = -1 + (x + 2)e^x$.
- (1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
- (2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α بحيث $-0,5 < \alpha < -0,4$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.
- II. لتكن f دالة عددية معرفّة على $]-2, +\infty[$ بـ $f(x) = e^x - \ln(x + 2)$.
- و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس للمستوي.
- (1) أحسب نهايات الدالة f بجوار أطراف مجموعة تعريفها. ثم فسر النتائج هندسياً.
- (2) أثبت أنه من أجل كل x من $]-2, +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x + 2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
- (3) أكتب معادلة (Δ) مماس المنحنى (C_f) عند مبدأ المعلم O .
- (4) أنشئ (C_f) و (Δ) . تعطى $f(\alpha) \simeq 0,2$.
- (5) أحسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) و $x = 0$ و $x = 1$.
- (6) ناقش، بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة، ذات المجهول الحقيقي x ، حيث $e^x + \ln\left(\frac{m + 2}{x + 2}\right) = e^m$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

لتكن h دالة عددية مُعرّفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ $h(x) = \frac{4x-1}{x+2}$ و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس للمستوي. (أنظر الملحق) و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

$$(1) \text{ نعتبر المتتالية } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ المُعرّفة بـ: } u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} \text{ و } u_0 = 5$$

أ- مثل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على حامل محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط الرسم

ب- أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية وتقاربها (u_n)

$$(2) \text{ بين أنه من أجل كل } x \text{ من }]0, +\infty[\text{ أنه } h'(x) = \frac{9}{(x+2)^2} \text{ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة } f.$$

(3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 1$.

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$(4) \text{ نعتبر المتتالية } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ المُعرّفة بـ: } v_n = \frac{1}{u_n - 1}$$

أ- بين أن (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- عبر عن (v_n) بدلالة n ثم استنتج (u_n) بدلالة n . عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n)$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$.

$$(5) \text{ أحسب الجداء } P_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times e^{v_2} \times \dots \times e^{v_n}$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس. نعتبر النقط $A(2,1,3)$ ، $B(-3,-1,7)$ و $C(3,2,4)$.

(1) أثبت أن النقط A ، B و C تعين مستويا وحيدا (ABC) .

$$(2) \text{ ليكن } (\Delta) \text{ المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطى } (\Delta) \text{ بـ } \begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

بين أن المستقيم (Δ) يُعامد المستوي (ABC) ، ثم أكتب معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) .

(3) نسمي H النقطة المشتركة بين (Δ) و (ABC) .

بين أن H هي مرجع الجملة المثقلة $\{(A, -2); (B, -1); (C, 2)\}$

(4) نعتبر $(T_1), (T_2)$ مجموعتي النقط من الفضاء والتي تحقق :

$$(T_1) : (-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0 \text{ و } (T_2) : \left\| -2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = \sqrt{29}$$

عين طبيعة كل من المجموعتين $(T_1), (T_2)$ ، ثم عين طبيعة تقاطعهما.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

نعتبر في مايلي النقط A ، B و C التي لواحقتها $z_A = 4 - 3i$ ، $z_B = 4 + 3i$ و $z_C = 7$ على الترتيب عين الاقتراح الصحيح مع التعليل من بين الاقتراحات التالية :

(1) المعادلة $z^3 - 15z^2 + 81z - 175 = 0$ للمتغير المركب z حيث $z_0 = 7$ حلا لها تقبل ثلاث حلول هي:

$$S = \{7, 4 - 3i, 4 + 3i\} \quad (\text{أ}) \quad S = \{7, -4 - 3i, -4 + 3i\} \quad (\text{ب}) \quad S = \{-7, 4 - 3i, 4 + 3i\} \quad (\text{ج})$$

(2) العدد $\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right)^{2018}$ يساوي:

$$1 \quad (\text{أ}) \quad 0 \quad (\text{ب}) \quad -1 \quad (\text{ج})$$

(3) لدينا $z_A - z_C = i(z_B - z_C)$ المثلث ABC

(أ) قائم في C (ب) قائم في C و متساوي الساقين (ج) متساوي الساقين .

(4) العبارة المركبة للدوران R الذي مركزه ω ذات اللاحقة $z_\omega = 4$ ويحول النقطة C إلى النقطة B فإن العبارة المركبة لهذا التحويل :

$$z' = iz + 4 - 4i \quad (\text{أ}) \quad z' = 2iz + 3 - 4i \quad (\text{ب}) \quad z' = iz + 3 - 4i \quad (\text{ج})$$

(5) (T) مجموعة النقط M ، ذات اللاحقة z ، من المستوي المركب حيث يكون $\frac{z - z_B}{z - z_C}$ تخيلياً صرفاً جزؤه

التخيلي موجب. هي :

(أ) المستقيم (AB) (ب) دائرة قطرها $[AB]$ (ج) هي نصف دائرة قطرها $[BC]$ باستثناء النقطتين B و C

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln(x)$.

(1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يحقق $1 < \alpha < 2$

(3) استنتج إشارة $g(x)$ من أجل كل x من $]0, +\infty[$.

II. لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس للمستوي. وحدة الطول : محور الفواصل $1 \rightarrow 1 \text{ cm}$ ، محور الترتيب $1 \rightarrow 5 \text{ cm}$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ فسّر هندسياً النتائج.

(2) أ- بين أنه من أجل كل x من المجال $]0, +\infty[$ أن $f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} g(x)$.

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) عين معدلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة 1

(4) أنشئ (Δ) و (C_f) . تعطى $f(\alpha) = 0,4$

(5) ناقش، بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة، ذات المجهول الحقيقي x ،

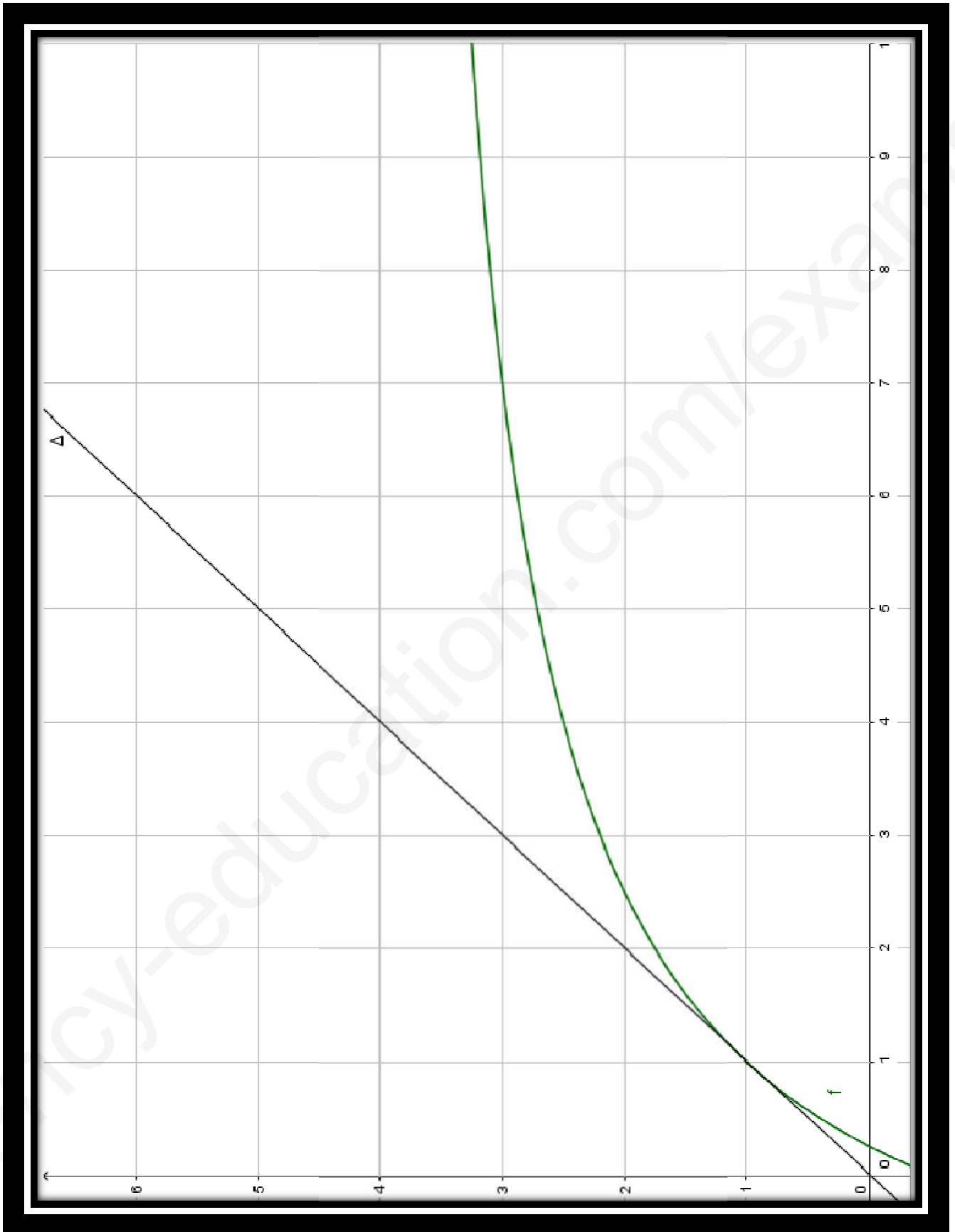
$$\text{حيث } x^2 + x + 2 \ln x = m(x^3 + x^2)$$

انتمى الموضوع الثاني

بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا 2019

المستأذنة

الملحق خاص بالتمرين الأول الموضوع الثاني



التصحيح المفصل للبيكأوريا التجريبي دورة ماي 2019 الموضوع 01

تصحيح التمرين الأول (04 نقاط) (الإحتمالات) التقط

1 (I) أولاً نحسب عدد الحالات الممكنة للسحب : $A_8^2 = \frac{(8)!}{(8-2)!} = 8 \times 7 = 56$

$$C_{n+8}^2 = \frac{(n+8)!}{2!(n+6)!} = \frac{(n+8)(n+7)(n+6)!}{2(n+6)!} = \frac{(n+8)(n+7)}{2}$$

1 (I) الحدث A احتمال سحب كرة بيضاء على الأقل :

$$P(A) = \frac{A_2^1 \times A_6^1 + A_6^1 \times A_2^1 + A_2^2}{56} = \frac{26}{56} = \frac{13}{28}$$

الحدث B احتمال سحب كرتين من نفس اللون:

$$P(B) = \frac{A_3^2 + A_3^2 + A_2^2}{56} = \frac{14}{56} = \frac{1}{4}$$

ب. الحدث C احتمال سحب كرتين بيضاوين بعد اضافة n كرة بيضاء :
أولاً نحسب عدد الحالات الممكنة للسحب :

$$A_{8+n}^2 = \frac{(8+n)!}{(6+n)!} = \frac{(8+n)(7+n)(6+n)!}{(6+n)!} = (8+n)(7+n)$$

ثانياً نحسب عدد الحالات الملائمة للسحب :

$$A_{n+2}^2 = \frac{(n+2)!}{(n+2-2)!} = \frac{(n+2)(n+1)(n)!}{(n)!} = (n+2)(n+1)$$

$$P(C) = \frac{(n+2)(n+1)}{(n+8)(n+7)}$$

إذن احتمال سحب كرتين بيضاوين هو :

(ب) حساب $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n)$ ، ثم نفسر النتيجة :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)}{(n+8)(n+7)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$$

التفسير : الحادثة "سحب كرتين بيضاوين" تكون حادثة أكيدة لما n يكون كبيراً بالقدر الكافي.

(II) 1 قيم المتغير العشوائي X :

المتغير العشوائي يعبر عن عدد الكرات الحمراء المسحوبة

و منه قيم المتغير العشوائي X هي : $(X=0), (X=1), (X=2), (X=3)$

2) تعيين قانون الإحتمال ، وحساب أمله الرياضي :

- حالة $(X = 0)$ أي الكرات المسحوبة من لون آخر ، إذن : $P(X = 0) = \frac{C_5^3}{C_8^3} = \frac{10}{56}$ ، أي : $\therefore$

- حالة $(X = 1)$ أي سحب كرة حمراء وكرتين من الباقي $P(X = 1) = \frac{C_5^2 C_3^1}{C_8^3} = \frac{30}{56}$

. حالة $(X = 2)$ أي سحب كرتين حمراء وكرة من الباقي $P(X = 2) = \frac{C_5^1 C_3^2}{C_8^3} = \frac{15}{56}$

حالة $(X = 3)$ أي سحب ثلاثة كرات حمراء $P(X = 3) = \frac{C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}$

حساب الأمل الرياضي : $E(X) = \sum_{i=0}^3 X_i \cdot P_i$ ، أي : $E(X) = \frac{63}{56}$.

حساب التباين : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ ، أي : $V(X) = \frac{99}{56} - \left(\frac{63}{56}\right)^2 = 0,36$

حساب الانحراف المعياري : $\delta(X) = \sqrt{V(X)}$ ، أي : $\delta(X) = \sqrt{0,36} = 0,6$

التقيط

(المتتاليات العددية)

تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط)

لدينا : $u_0 = \frac{3}{4}$ و $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n^2 - 2u_n + 1}$

_____ $P(n) : \frac{1}{2} < u_n < 1$

المرحلة 1: من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = \frac{3}{4}$ أي : $\frac{1}{2} < u_0 < 1$ ومنه $P(0)$ محققة .

المرحلة 2: نفرض صحة $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n .

ونبرهن صحة $P(n+1)$ من أجل كل عدد طبيعي n . أي نفرض أن $\frac{1}{2} < u_n < 1$ صحيحة ونبين

أن : $\frac{1}{2} < u_{n+1} < 1$.

- لدينا فرضاً أن : $\frac{1}{2} < u_n < 1$ ، يكفي أن نبرهن أن : $u_{n+1} < 1$ و $\frac{1}{2} < u_{n+1}$ ،

نبين أن : $u_{n+1} < 1$.

نحسب $u_{n+1} - 1$:

$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n^2}{2u_n^2 - 2u_n + 1} - 1 = \frac{u_n^2 - 2u_n^2 + 2u_n - 1}{2u_n^2 - 2u_n + 1} = \frac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{2u_n^2 - 2u_n + 1} = \frac{-(u_n - 1)^2}{2u_n^2 - 2u_n + 1}$$

أن : $u_{n+1} < 1$

نبين أن : $\frac{1}{2} < u_{n+1}$. نحسب $u_{n+1} - \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} < u_{n+1} < 1 \text{ : أي أن } u_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{u_n^2}{2u_n^2 - 2u_n + 1} - \frac{1}{2} = \frac{2u_n^2 - 2u_n^2 + 2u_n - 1}{2(2u_n^2 - 2u_n + 1)} = \frac{2u_n - 1}{2(2u_n^2 - 2u_n + 1)}$$

وعليه : $\frac{1}{2} < u_{n+1} < 1$.

وأخيرا الخاصية $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n .

(2) دراسة رقابة المتتالية (u_n) :

من أجل كل عدد طبيعي n ندرس إشارة الفرق : $u_{n+1} - u_n$:

$$\text{لدينا : } u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{2u_n^2 - 2u_n + 1} - u_n = \frac{u_n^2 + 2u_n^2 - 2u_n^3 - u_n}{2u_n^2 - 2u_n + 1} - u_n = \frac{u_n(-2u_n^2 + 3u_n + 1)}{2u_n^2 - 2u_n + 1}$$

$$\text{لدينا } \frac{1}{2} < u_n < 1 \text{ ، لدينا : } -2u_n^2 + 3u_n + 1 > 0$$

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

(3) استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة وحساب نهايتها:

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ 1 ، إذن هي متقاربة.

(3أ) بيان أن (t_n) متتالية هندسية:

$$\text{لدينا : } t_n = \ln\left(\frac{1-u_n}{u_n}\right) \text{ ، أي :}$$

$$t_{n+1} = \ln\left(\frac{1-u_{n+1}}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{1 - \frac{u_n^2}{2u_n^2 - 2u_n + 1}}{\frac{u_n^2}{2u_n^2 - 2u_n + 1}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2u_n^2 - 2u_n + 1}}{\frac{u_n^2}{2u_n^2 - 2u_n + 1}}\right) = \ln\left(\frac{(1-u_n)^2}{u_n^2}\right) = \ln\left(\frac{1-u_n}{u_n}\right)^2 = 2\ln\left(\frac{1-u_n}{u_n}\right) = 2t_n$$

ومنه : $t_{n+1} = 2t_n$ ، إذن المتتالية (t_n) هندسية أساسها $q = 2$ ، وحدها الأول :

$$t_0 = \ln\left(\frac{1-u_0}{u_0}\right) = \ln\left(\frac{1-\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln 3$$

(ب) التعبير عن t_n بدلالة n و u_n بدلالة n :

$$\text{- عبارة } t_n : t_n = t_0 \times q^n \text{ ، أي : } t_n = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \times (2)^n .$$

$$\text{- عبارة } u_n : \text{لدينا } t_n = \ln\left(\frac{1-u_n}{u_n}\right) \text{ أي : } e^{t_n} = \frac{1-u_n}{u_n} \text{ ، أي : } u_n e^{t_n} = 1 - u_n$$

$$u_n e^{t_n} + u_n = 1 \text{ أي : } u_n(e^{t_n} + 1) = 1 \text{ أي : } u_n = \frac{1}{(e^{t_n} + 1)} \text{ أي أن } u_n = \frac{1}{(e^{t_n} + 1)}$$

$$u_n = \frac{1}{\left(e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)(2)^n} + 1 \right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3} \right)^{2n} + 1}$$

(ج) حساب نهاية المتتالية (u_n) :

نعلم أن: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} \right)^{2n} = 0$ ، لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \times (2)^n = -\infty$ و $u_n = \frac{1}{(e^{t_n} + 1)}$ ، ومنه:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$$

(5) حساب الجداء المجموع S_n :

حساب الجداء $P_n = t_0 \times t_1 \times \dots \times t_n$ تكافئ $P_n = (t_0 \times q^0) \times (t_0 \times q^1) \times \dots \times (t_0 \times q^n)$

تكافئ $P_n = (t_0 \times t_0 \times \dots \times t_0) \times (q^0 \times q^1 \times \dots \times q^n)$ تكافئ

$$P_n = \left(\ln\left(\frac{1}{3}\right) \right)^{n+1} \times (2)^{\frac{(n)(n+1)}{2}} \quad \text{تكافئ} \quad P_n = (t_0)^{n+1} \times (q^{0+1+2+\dots+n}) = (t_0)^{n+1} \times (q)^{\frac{(n)(n+1)}{2}}$$

حساب المجموع $S_n = \frac{1}{t_0} + \frac{1}{t_1} + \dots + \frac{1}{t_n} = \frac{1}{t_0 \times q^0} + \frac{1}{t_0 \times q^1} + \dots + \frac{1}{t_0 \times q^n}$

تكافئ $S_n = \frac{1}{t_0} \left(\frac{1}{q^0} + \frac{1}{q^1} + \dots + \frac{1}{q^n} \right)$ تكافئ $S_n = \frac{1}{t_0} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{q}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{q}\right)} \right)$ تكافئ

$$S_n = \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} \right)$$

التقريب

(الأعداد المركبة)

تصحيح التمرين الثالث (05 نقاط)

(1) حل، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $(z - i\sqrt{3})(z^2 + -2z + 4) = 0$.

(ب) المستوي المركب منسوب إلى لدينا $P(z) = 0$ يكافئ $(z - i\sqrt{3})(z^2 + -2z + 4) = 0$ يكافئ

$$\begin{cases} (z - i\sqrt{3}) = 0 \dots\dots\dots (1) \\ (z^2 + -2z + 4) = 0 \dots\dots (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (z - i\sqrt{3}) = 0 \dots\dots\dots (1) \\ (z^2 + -2z + 4) = 0 \dots\dots (2) \end{cases}$$

من المعادلة (1) نجد أن $z = i\sqrt{3}$.

المعادلة (2) من الدرجة الثانية، نحلها باستخدام المميز Δ حيث $\Delta = -12 = 12i^2$ ، إذن

فهو تقبل حلين مترافقين هما $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 1 - i\sqrt{3}$ و

و عليه مجموعة حلول المعادلة $P(z) = 0$ هي $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 1 + i\sqrt{3}$
 $S = \{i\sqrt{3}, 1 + i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}\}$

(أ) كتابة على الشكل الأسّي z_C, z_B, z_A ثم أحسب العدد $(z_A)^{2019} + (z_B)^{1440} + (z_C)^{2969}$

$$z_C = i\sqrt{3} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \quad z_B = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \quad z_A = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

● حساب العدد $(z_A)^{2019} + (z_B)^{1440} + (z_C)^{2969}$

$$(z_A)^{2019} + (z_B)^{1440} + (z_C)^{2969} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2019} + \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{1440} + \left(\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{2969}$$

$$\left(2^{2019}e^{i\frac{2019\pi}{3}}\right) + \left(2^{1440}e^{-i\frac{1440\pi}{3}}\right) + \left(\sqrt{3}^{2969}e^{i\frac{2969\pi}{2}}\right) = 2^{2019}e^{i673\pi} + 2^{1440}e^{-i480\pi} + \sqrt{3}^{2969}e^{i\left(1484\pi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$2^{2019}e^{i\pi} + 2^{1440}e^{i0} + \sqrt{3}^{2969}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -2^{2019} + 2^{1440} + \sqrt{3}^{2969}i$$

(ب) كتابة على الشكل الأسّي العدد $L = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ثم تحديد طبيعة المثلث ABC .

$$L = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}} = \frac{1}{i2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}i = \frac{\sqrt{3}}{6}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

لدينا $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = |L| = \frac{\sqrt{3}}{6}$ أي أن $AC \neq BC$ ، كذلك لدينا

مع $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(L) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ ، ومنه $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ ، و عليه يكون المثلث ABC قائم في A .

(ت) استنتاج طبيعة التحويل S الذي مركزه A ويحول النقطة B إلى النقطة C و عناصره المميزة.

لدينا $\begin{cases} z_A = az_A + b \dots (1) \\ z_C = az_B + b \dots (2) \end{cases}$ بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) نحصل على

$z_C - z_A = a(z_B - z_A)$ ومنه $a = L = \frac{\sqrt{3}}{6}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ إذن، و عليه التحويل S تشابه مباشر نسبته

$|L| = \frac{\sqrt{3}}{6}$ وزاويته $\arg(L) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ و مركزه A .

(ب) لدينا $z_D = iz_B + 4 - 4i$ ومنه $z_D = 7$

(3) لتكن G مرجح الجملة $\{(A, 1); (B, \alpha); (C, 1)\}$ حيث $\alpha \neq -2$ عيين قيمة α حتى تنتمي النقطة G إلى المتوسط المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث ABC .

لاحقة النقطة G هي $z_G = \frac{z_A + \alpha z_B + z_C}{\alpha + 2} = \frac{1 + \alpha + i(2 - \alpha)\sqrt{3}}{\alpha + 2}$ لتكن النقطة D

$$z_D = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{1}{2} \text{ إذن } [BC] \text{ منتصف الضلع}$$

حتى تنتمي النقطة G إلى المتوسط المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث ABC ، يجب أن يكون

$$\text{العدد } K = \frac{z_G - z_A}{z_G - z_D} \text{ حقيقيا بحتا و حتى يكون كذلك } \bar{K} = K \text{ تكافئ } \alpha^2 + \alpha - 2 = 0$$

$$\text{تكافئ } \alpha = -2 \text{ مرفوض أو } \alpha = 1$$

(4) تحديد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $|iz + \sqrt{3} - i| = |\bar{z} + i\sqrt{3}|$ تكافئ

$$\text{تكافئ } |i(z - i\sqrt{3} - 1)| = |\bar{z} - (-i\sqrt{3})| \text{ تكافئ } |i|(z - i\sqrt{3} - 1)| = |\bar{z} - (-i\sqrt{3})|$$

$$\text{تكافئ } |z - z_A| = |\bar{z} - \bar{z}_C| \text{ تكافئ } |z - z_A| = |\bar{z} - \bar{z}_C| \text{ تكافئ } |z - (i\sqrt{3} + 1)| = |\bar{z} - (-i\sqrt{3})|$$

تكافئ $|z - z_A| = |z - z_C|$ تكافئ $AM = CM$ ومنه مجموعة النقط $M(z)$ هي المستقيم المحوري للقطعة $[AC]$

التنقيط

(الدالة الأسية)

تصحيح التمرين الرابع (7 نقاط)

الجزء الأول:

(1) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

x	-2	$+\infty$
$g'(x)$		$+$
$g(x)$	-1	$+\infty$

الدالة g قابلة للإشتقاق على $]-2; +\infty[$ و دالتها المشتقة

جدول التغيرات الدالة g

هي:

$$g'(x) = (x+3)e^x$$

نلاحظ أنه من أجل كل $x \in [0; +\infty[$: $g'(x) \leq 0$

الخلاصة: الدالة g متزايدة على $]-2; +\infty[$

- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)e^x - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (x+2)e^x - 1 = -1$$

(2) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $]-2; +\infty[$:

الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على $]-2; +\infty[$ ولدينا،

$$\left\{ \begin{array}{l} g(-0,5) = -0, \\ g(-0,4) = +0, \end{array} \right. \text{ بما أن } -0,5 < \alpha < -0,4 \text{ أي } g(-0,5) \times g(-0,4) < 0 \text{، وبتالي حسب}$$

نظرية القيم المتوسطة فإنه $g(x) = 0$: تقبل حل وحيد α على $]-0,5; -0,4[$

إشارة $g(x)$:-

x	-2	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$		$+$

الجزء الثاني: لدينا : $f(x) = e^x - \ln(x+2)$

$$\text{حساب } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} [e^x - \ln(x+2)] = +\infty$$

المستقيم الذي معادلته $x = -2$ مقارب عمودي لـ (C_f)

نهاية f عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x - \ln(x+2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \left[\frac{e^x}{x+2} - \frac{\ln(x+2)}{x+2} \right] = +\infty$$

(2) أ) بيان أنه من أجل كل $x \in]-2; +\infty[$: $f'(x) = \frac{e^x \times g(x)}{(xe^x + 1)^2}$:

الدالة f قابلة للإستقاق على $[0; +\infty[$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x+2} = \frac{xe^x + 2e^x - 1}{x+2} = \frac{(x+2)e^x - 1}{x+2} = \frac{g(x)}{x+2}$$

ب) إستنتاج إتجاه تغيّر الدالة f ، و تشكيل جدول تغيّراتها : نلاحظ أن إشارة

x	-2	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	+

$f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

- الدالة f متناقصة تماما على $]-2; \alpha[$

- الدالة f متزايدة تماما على $]\alpha; +\infty[$

x	-2	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

- جدول التغيرات

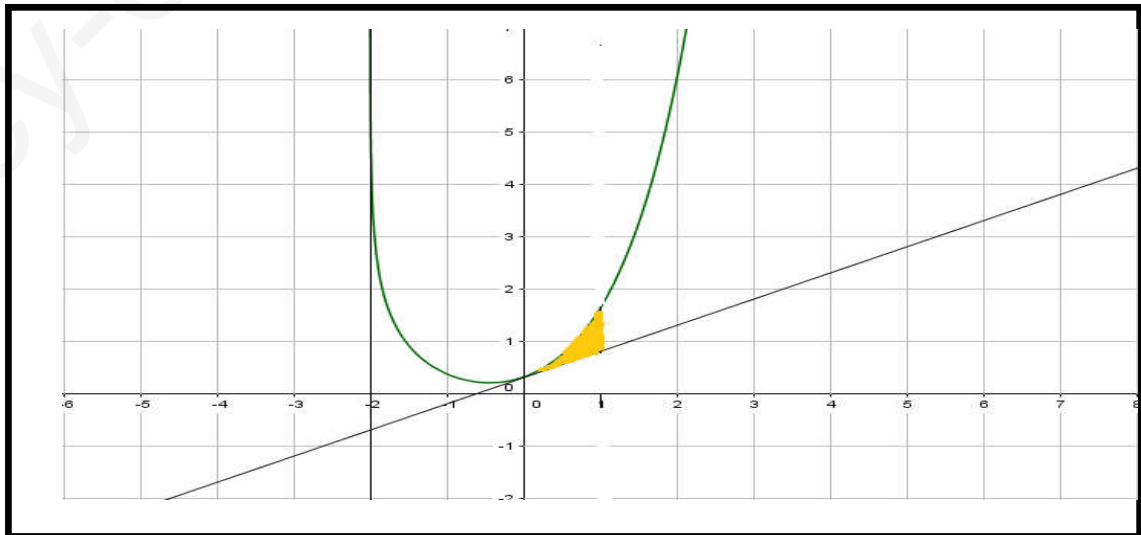
(3) كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

$$(\Delta): y = \frac{1}{2}x + 1 - \ln 2$$

أي

$$(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

(4) رسم كلا من (Δ) والمنحني (C_f) :

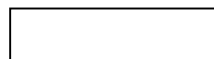


الجزء الثالث :

(5) حساب بـ cm^2 مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و (T) و محور الترتيب و $x = 1$: —————

$$A = \int_0^1 \left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1 - \ln(2) \right) \right] dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x + 1 - \ln(2) \right) dx$$

$$A = \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 \ln(x+2) dx - \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x + 1 - \ln(2) \right) dx$$



$$A = \left[e^x - (x+2)\ln(x+2) - \frac{1}{4}x^2 + x\ln 2 \right]_0^1 \approx 0,25u.c^2$$

المناقشة بيانيًا، $e^x + \ln\left(\frac{m+2}{x+2}\right) = e^m$ تكافئ $e^x + (m+2) - \ln(x+2) = e^m$ تكافئ

$f(x) = f(m)$ وهي مناقشة أفقية حلولها فواصل نقط

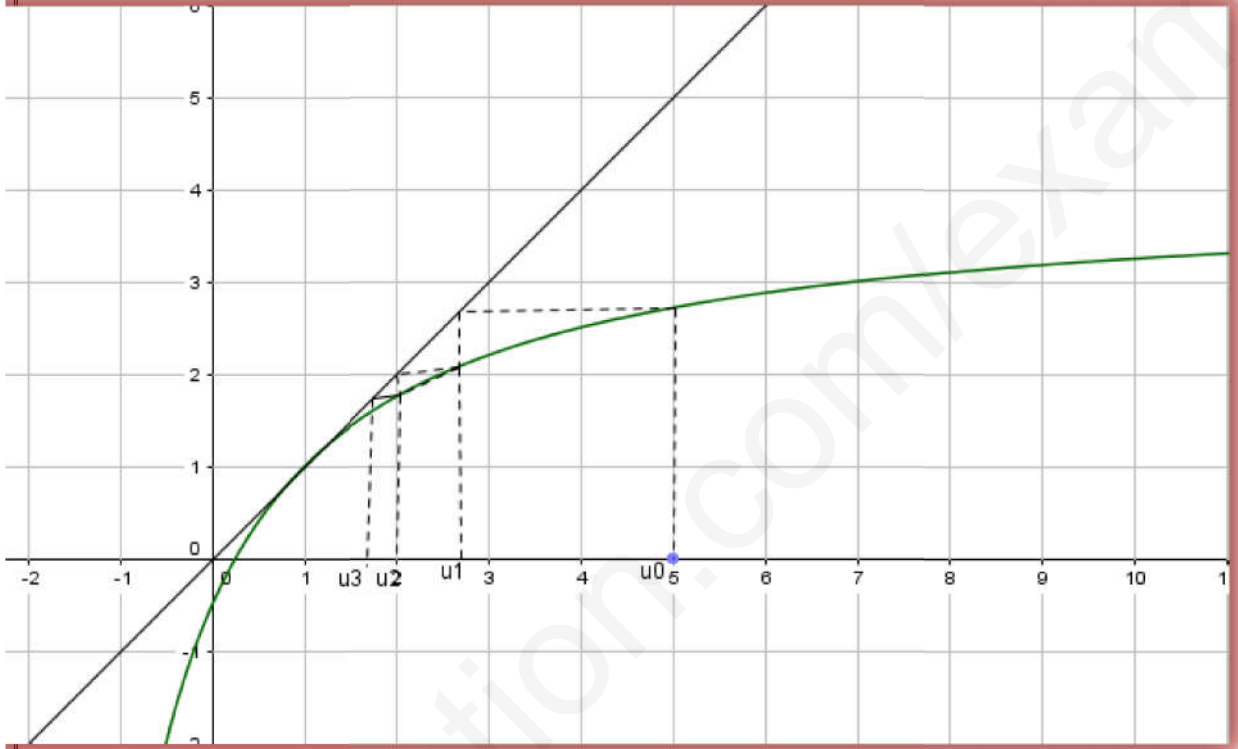
تقاطع (C_f) مع المستقيم المتحرك ذو المعادلة $y = f(m)$

من أجل $m = \alpha$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا

من أجل $m \in]-2; \alpha[\cup]\alpha; +\infty[$ المعادلة تقبل حلا ن متمايزان

إعداد الاستاذ : زايدي علاء الدين

1- أ- تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على حامل محور الفواصل



ب- التخمين $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$ إذن من الواضح أن المتتالية u_n متناقصة تماما
بما أن المتتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو نقطة تقاطع .

2- نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ: $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$ و $u_0 = 5$

من أجل كل x من $]0, +\infty[$ أنه $h'(x) = \frac{4(x+2) - 1(4x-1)}{(x+2)^2} = \frac{8+1}{(x+2)^2}$ تكافئ

$h'(x) = \frac{9}{(x+2)^2} > 0$ ومنه الدالة h متزايدة تماما على $]0, +\infty[$

(3) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 1$.

الشرط الأول

لنتأكد من صحة $P(0)$ لدينا $u_0 = 5$ تكافئ : $u_0 > 1$ ومنه $P(0)$ صحيحة.

الشرط الثاني

لنفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي

$$u_{n+1} > 1$$

حسب فرضية التراجع $u_n > 1$ نلاحظ أن $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} = f(u_n)$

تكافئ: $f(u_n) > f(1)$ و تكافئ $u_{n+1} > 1$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة. $P(n)$ ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه ن أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 1$.

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - u_n = \frac{4u_n - 1 - (u_n)^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \frac{-(u_n)^2 + 2u_n - 1}{u_n + 2}$$

نلاحظ أن $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n + 2} < 0$ المتتالية u_n متناقصة تماما.

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

أ- (v_n) حسابية معناه أن $v_{n+1} - v_n = r$

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{\frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1} = \frac{1}{\frac{4u_n - 1 - u_n - 2}{u_n + 2}} = \frac{u_n + 2}{3u_n - 3} \quad \text{تكافئ} \quad v_n = \frac{1}{u_n - 1} \quad \text{لدينا}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{3u_n + 2}{3u_n - 3} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n + 2 - 3}{3u_n - 3} = \frac{1}{3} \left(\frac{u_n - 1}{u_n - 1} \right) = \frac{1}{3}$$

ومن (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{4}$

ب- عبارة v_n بدلالة n : $v_n = v_0 + nr = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{7}\right)n$

استنتج (u_n) بدلالة n لدينا: $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ تكافئ $1 = v_n(u_n - 1)$ تكافئ

$$u_n = \frac{1 + v_n}{v_n} = \frac{1}{v_n} + 1 = \frac{1}{\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{7}\right)n} + 1 = \frac{28}{4n + 7} + 1$$

تعين $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 1$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = +\infty$

$$P_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times e^{v_2} \times \dots \times e^{v_n} = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_n} = e^{\frac{(n+1)(v_0 + v_n)}{2}} \quad \text{حساب الجداء} \quad (4)$$

تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط)

(الهندسة الفضائية)

التنقيط

لدينا: $A(2; 1; 3)$ ، $B(-3; -1; 7)$ ، $C(3; 2; 4)$.

(1) أ) بيان أن النقط $C; B; A$ تعين مستويا:

1- لدينا: $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ، $\left(\frac{-2}{1} \neq \frac{-5}{1} \right)$. أي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا، ومنه النقط $C; B; A$ تعين مستويا.

(2) المعادلة الديكارتية هي

$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (\Delta) \text{ المستقيم المعروف بالتمثيل الوسيطى}$$

المستقيم (Δ) يُعَامِدُ المستوي (ABC) ، معناه أن $\vec{n}_{(ABC)} = \vec{u}_{(\Delta)}$

$$\begin{cases} b = \frac{-3}{2}a \\ c = -a - b \end{cases} \quad \text{ومنهم} \quad \begin{cases} 5a + 2b - 4c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \quad \text{إذن} \quad \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \quad \text{ومنهم} \quad \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\text{نفرض أن} \quad \begin{cases} a = a \\ b = -\frac{3}{2}a \\ c = \frac{1}{2}a \end{cases} \quad \text{إذن} \quad \text{وبالتالي} \quad \vec{n}(a, \frac{-3}{2}a, \frac{1}{2}a) \quad a \in \mathbb{R}^* \quad \text{يوجد عدد غير منته من الأشعة تكون ناظمية}$$

للمستوى (ABC) من أجل $a = 2$ فإن $\vec{n}(2, -3, 1)$ معناه أن $\vec{n}_{(ABC)} = \vec{u}_{(\Delta)}$ أي أن المستقيم (Δ) يُعَامِدُ المستوي (ABC)

المعادلة الديكارتية هي $(ABC): 2x - 3y + z + d = 0$ وبما أن $A \in (ABC)$ فإن $(ABC): 2x - 3y + z - 4 = 0$

3. إحدائيات H :

لدينا H النقطة المشتركة بين (Δ) و (ABC) . أي أن إحدائيات H تحقق الجملة

$$\begin{cases} x = -7 + 2t \dots\dots\dots (1) \\ y = -3t \dots\dots\dots (2) \\ z = 4 + t \dots\dots\dots (3) \\ 2x - 3y + z - 4 = 0 \dots\dots\dots (4) : (ABC) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

بالتعويض نجد $t = 1$ وبتعويض قيمتها في المعادلات نجد $H(-5; -3; 5)$

H هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A, -2); (B, -1); (C, 2)\}$ لدينا $\alpha + \beta + \gamma = -2 + 2 - 1 \neq 0$ إذن H موجود ووحيد

$$\begin{cases} x_H = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} = -5 \\ y_H = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} = -3 \\ z_H = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma} = 5 \end{cases}$$

تعين طبيعة كل من المجموعتين $(T_1), (T_2)$ ، ثم عين طبيعة تقاطعهما .

$(T_1): (-2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC})(\vec{MB} - \vec{MC}) = 0$ تكافئ $(\vec{MH})(\vec{BC}) = 0$ هي المستوي الذي ناظمه

$$\vec{BC} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{ويشمل النقطة } H \quad \text{المعادلة الديكارتية له هي } 6x + 3y - 3z + d = 0 \quad \text{وبما أن } G \in (T_1)$$

$$(T_1): 2x + y - z + 18 = 0 \quad \text{فإن}$$

تعين طبيعة (T_2)

$$(T_2): \left\| -2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = \sqrt{29}$$

تكافئ $MH = \sqrt{29}$ إذن مجموعة النقط (T_2) هي سطح كرة مركزها H ونصف قطرها $\sqrt{29}$.

$$d(H; (S)) = \frac{|ax_H + by_H + cz_H + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2(-5) + -3 + -5 + 18|}{\sqrt{6}} = 0$$

• بما أن $d(H; (S)) < R$ فإن المستوي يقطع سطح الكرة (S) في دائرة مركزها النقطة G ونصف قطرها r

$$\text{حيث: } r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

التنقيط

(الأعداد المركبة)

تصحيح التمرين الثالث (05 نقاط)

إختيار من متعدد

(1) لدينا $P(7) = 0$ ، باستخدام خوارزمية القسمة الإقليدية نجد أن $P(z) = (z - 7)(z^2 - 8z + 25)$.

$$\begin{cases} z - 7 = 0 \dots\dots\dots(1) \\ z^2 - 8z + 25 = 0 \dots\dots(2) \end{cases} \text{ يكافئ } (z - 7)(z^2 - 8z + 25) = 0$$

من المعادلة (1) نجد أن $z = 7$.

المعادلة (2) من الدرجة الثانية، نحلها باستخدام المميز Δ حيث $\Delta = -36$ ، إذن فهي تقبل

$$\text{حليّن مترافقين هما } z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 4 - 3i \text{ و } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 4 + 3i \text{، وعليه}$$

مجموعة حلول المعادلة $P(z) = 0$ هي $S = \{7, 4 - 3i, 4 + 3i\}$. **الاقتراح - أ-**

$$(2) \text{ العدد } \left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \right)^{2018} = i^{2018} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^{2018} = e^{i\frac{2018\pi}{2}} = e^{i1009\pi} = e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

الاقتراح - ج-

(3) المثلث ABC قائم في C ومتقايس الساقين. **الاقتراح - ب-**

$$\text{لدينا } z_A - z_C = i(z_B - z_C) \text{ و منه } \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = i \text{، كذلك لدينا } \left| \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \right| = |i| = 1 \text{ أي أن}$$

$$AC = BC \text{، كذلك لدينا } \arg \left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ مع } k \in \mathbb{Z} \text{، و منه}$$

$$\arg(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ مع } k \in \mathbb{Z} \text{، و عليه يكون المثلث } ABC \text{ قائم في } C \text{ ومتقايس الساقين.}$$

(4) أ) العبارة المركبة للدوران R من الشكل $z' = az + b$.

$$\text{لدينا } \begin{cases} z_\Omega = az_\Omega + b \dots\dots(1) \\ z_B = az_C + b \dots\dots(2) \end{cases} \text{ بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) نحصل على}$$

$$z_B - z_\Omega = a(z_C - z_\Omega) \text{ و منه } a = i \text{ إذن } b = 4 - 4i \text{، و عليه العبارة المركبة للدوران } R \text{ هي}$$

$$z' = iz + 4 - 4i \quad \text{الاقتراح - أ-}$$

(5) العدد $\frac{z - z_B}{z - z_C}$ تخيلي صرف جزؤه التخيلي موجب يعني أن $\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أي أن

$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ، و عليه (Ψ) هي نصف دائرة قطرها $[BC]$ باستثناء النقطتين B و

C و الزاوية $\widehat{MBC}$ موجهة في الاتجاه الموجب. الاقتراح - ج-

التنقيط

(الدالة اللوغاريتمية)

تصحيح التمرين الرابع (7 نقاط)

الجزء الأول: لدينا: $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln(x)$.

1 دراسة تغيرات الدالة
تعيين نهايات الدالة g :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x+1}{2x+1} - \ln(x) \right] = +\infty$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x+1}{2x+1} - \ln(x) \right] = -\infty$$

دراسة اتجاه تغير الدالة g و تشكيل جدول تغيراتها:
— دالة g قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و دالتها المشتقة هي:

$$g'(x) = \frac{-1}{(2x+1)^2} - \frac{1}{x} = -\frac{(4x^2 + 5x + 1)}{(2x+1)^2}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة: $(x-1)(3x^2 + 3x + 2)$.

جدول التغيرات:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	—	
$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$

◆

(2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $]-2; +\infty[$:
الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على $]0; +\infty[$ و لدينا، .

$1 < \alpha < 2$ بما أن: $\begin{cases} g(1) = 0,66 \\ g(2) = -0,09 \end{cases}$ أي $g(1) \times g(2) < 0$ ، و بتالي حسب نظرية القيم المتوسطة

فإنه $g(\alpha) = 0$: تقبل حل وحيد α على $]1; 2[$ $g(\alpha) = 0$

◆ إشارة $g(x)$

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	+		—

الجزء الثاني: لدينا: $f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$

حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln x}{x^2 + x} = -\infty$

المستقيم الذي معادلته $x = 0$ **مقارب عمودي لـ** (C_f)

نهاية f **عند** $+\infty$: _____

المستقيم الذي معادلته $y = 0$ **مقارب أفقي** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x+1} \times \frac{\ln x}{x} \right] = 0$
لـ (C_f)

(2) ا) بيان أنه من أجل كل $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} g(x)$: _____

الدالة f **قابلة للاستقار على** $]0; +\infty[$ **و دالتها المشتقة هي :**

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x}(x^2+x) - 2x \ln x}{(x^2+x)^2} = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} g(x)$$

ت) إستنتاج إتجاه تغير الدالة f ، **و تشكيل جدول تغيراتها :** _____

نلاحظ أن إشارة $f'(x)$ **من إشارة** $g(x)$.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-

الدالة f **متزايدة تماما على** $]0; \alpha[$

الدالة f **متناقصة تماما على** $]\alpha; +\infty[$

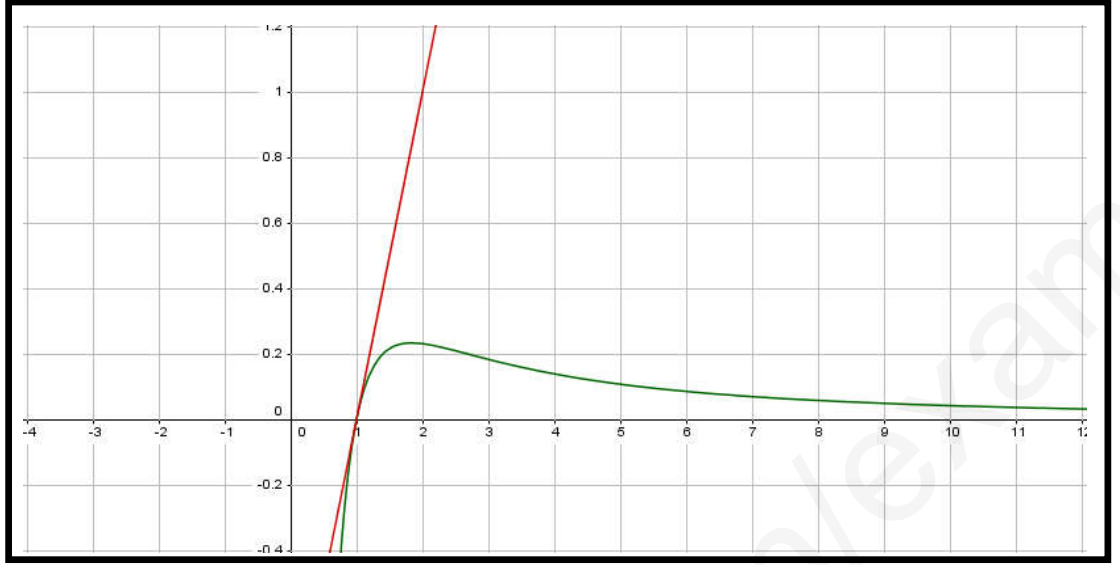
جدول التغيرات -

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$f(\alpha)$	
	$-\infty$		0

(3) كتابة معادلة المماس (Δ) **لـ** (C_f) **عند النقطة ذات الفاصلة** 1 : _____

$$(\Delta): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

أي : $(\Delta): y = x + 1$ ، **لأن :** $\begin{cases} f'(1) = 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$.



الجزء الثالث :

المناقشة بيانياً، $x^2 + x + 2 \ln x = m(x^3 + x^2)$ تكافئ $x^2 + x + 2 \ln x = mx(x^2 + x)$ تكافئ

$\frac{2 \ln x}{(x^2 + x)} = mx - 1$ تكافئ $\frac{x^2 + x}{(x^2 + x)} + \frac{2 \ln x}{(x^2 + x)} = mx$ تكافئ $f(x) = mx - 1$ وهي مناقشة

دوارنية حولها فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم المتحرك ذو المعادلة $y = mx - 1$ الذي يدور حول نقطة ثابتة $(0; -1)$

من أجل $m \in]-\infty; 0[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا

من أجل $m \in]0; 1[$ المعادلة تقبل حلان متمايزان

من أجل $m = 1$ المعادلة تقبل حلا وحيدا

من أجل $m \in]1; +\infty[$ المعادلة لا تقبل حولا

إعداد الأستاذ : زايدي علاء الدين

بالتوفيق في البكالوريا 2019 إن شاء الله

التمرين 01:

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

$z_D = 5 + 8i$ ، $z_C = 3 + 2i$ ، $z_B = 2 - i$ ، $z_A = 1 + i$ ، $z_\Omega = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$ ونقطة Ω على الترتيب : A, B, C, D ونقطة Ω على الترتيب : A, B, C, D

1- أ- أكتب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي واستنتج طبيعة المثلث ABC

ب- عين طبيعة وعناصر التحويل النقطي R الذي مركزه A ويحول B إلى C

2- عين نسبة التحاكي h الذي مركزه B ويحول C إلى D

3- نضع: $S = h \circ R$

أ- تحقق أن $S(B) = D$

ب- ما هي طبيعة وعناصر التحويل S ؟

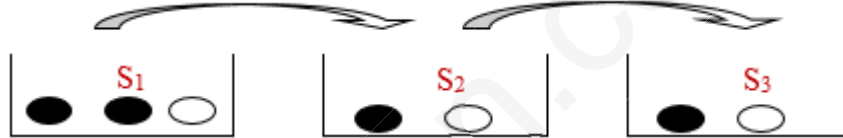
4- لتكن E, F, G نقط حيث: $S(D) = E$ ، $S(E) = F$ ، $S(F) = G$

أ- بين أن النقط Ω, E و B في استقامية

ب- بين أن النقط Ω, G و B في استقامية

التمرين 02:

لدينا n كيس $S_1, S_2, \dots, S_n$ يحوي كل منهم على قريصات غير معروفة عند اللمس. n عدد طبيعي غير معدوم.



S_1 يحوي قريصتان سوداوان وواحدة بيضاء وكل الأكياس الأخرى تحوي قريصة سوداء وقريصة بيضاء.

نفترض دراسة تطور السحوبات المتتالية لقريصة حسب البروتوكول التالي:

■ سحب قريصة من S_1 :

■ نضعها في S_2 ثم نسحب قريصة من S_2 :

■ نضعها في S_3 وهكذا....

■ من أجل كل عدد طبيعي k حيث: $1 \leq k \leq n$ ، نرمز بـ E_k الحادثة " القريصة المسحوبة من S_k بيضاء " و $\overline{E_k}$ حادته المعاكسة.

■ احتمال الحادثة E_k هو p_k .

1- بداية العملية:

أ- مثل بشجرة السحب في S_1 ثم في S_2 .

ب- أذكر p_1 ثم أحسب p_2 .

2- علاقة بين p_k و p_{k+1} :

أ- عين $p_{E_k}(E_{k+1})$ و $p_{\overline{E_k}}(E_{k+1})$

ب- أتمم الشجرة المقابلة و التي تمثل السحوبات في الكيسين S_k و S_{k+1} ، $(1 \leq k \leq n)$.

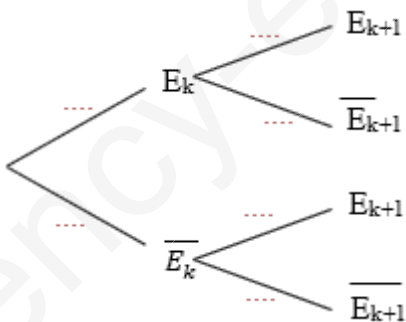
ج- استنتج أن: $p_{k+1} = \frac{1}{3} p_k + \frac{1}{3}$

3- دراسة متتالية (p_n) :

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $p_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right)$

ب- استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$

ج- ما هو التفسير العملي لهذه النتيجة؟



التمرين 03:

- نقط من الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ $A(1;2;4)$ ، $B(-1;3;2)$ ، $C(4;-1;1)$ ، $D(-5;-1;0)$ و $G(-2;3;-1)$
- 1- أ - بين أن النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة
ب - بين أن النقط A ، B ، C و G تنتمي إلى نفس المستوي
ج - استنتج أن G مرجح للنقط A ، B و C مرفقة بمعاملات يطلب تعيينها
 - 2- أ - بين أن النقطة G هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)
ب - استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)
 - 3- أ - أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ والطولين AB و AC
ب - استنتج القيم المضبوطة لكل من $\cos \widehat{BAC}$ و $\sin \widehat{BAC}$
ج - استنتج مساحة المثلث ABC ثم أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$
 - 4- لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء حيث $4MA^2 - 6MB^2 - MC^2 = -54$
أ - عين طبيعة وعناصر (S)
ب - عين معادلتين ديكارتيتين للمستويين (P_1) و (P_2) الماسين لسطح الكرة (S) والموازيين للمستوي (ABC)

التمرين 04:

- الجزء I : f دالة معرفة على $]-\infty; 1]$ ب: $f(x) = -1 - \sqrt{1-x}$. (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 1- أ - أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
ب - أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها
 - 2- عين إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$
 - 3- أرسم (C_f) و (Δ)
- الجزء II : (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$
- 1- مثل في الشكل السابق على محور الفواصل، الحدود u_0 ، u_1 و u_2 (دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء
 - 2- ضع تخمينا حول تغيرات (u_n) و تقاربها
 - 3- أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-3 \leq u_n \leq 0$
ب - ادرس اتجاه تغير (u_n)
ج - استنتج أن (u_n) متقاربة
 - 4- أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-3; 0]$ ، $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$
ب - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{1}{4}(u_n + 3) \leq u_{n+1} + 3 \leq \frac{1}{2}(u_n + 3)$
ج - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3 \leq u_n \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3$
د - استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين 05:

- f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{2\ln x}{x^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 1- أحسب النهايات للدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. ماذا تستنتج؟
 - 2- أدرس اتجاه تغير f ثم شكل جدول التغيرات.
 - 3- عين نقطة تقاطع (C_f) مع $(x'x)$
 - 4- أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x = 1$
 - 5- أنشئ (C_f) و (T)
 - 6- باستعمال مكاملة بالتجزئة؛ أحسب مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمتين ذات معادلات: $x = e$ و $x = 1$ ، $y = 0$
 - 7- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $f(x) = f(m)$

التمرين 06: (خاص بالقسم 3 رياضي)

1. أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين: 1440 و 276
2. ليكن x و y عددين طبيعيين غير معدومين أوليين فيما بينهما. بين أن العددين $(x+y)$ و (xy) أوليان فيما بينهما.
3. a و b عددان طبيعيين غير معدومان و m المضاعف المشترك الأصغر لهما.
أ - برهن أن: $PGCD(a+b; m) = PGCD(a; b)$ حيث $PGCD(a+b; m) = PGCD(a; b)$ هو القاسم المشترك الأكبر.
ب - أوجد كل الثنائيات $(a; b)$ التي تحقق: $a+b = 276$ و $m = 1440$

التمرين 01:

$$z_{\Omega} = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i \text{ و } z_D = 5+8i, z_C = 3+2i, z_B = 2-i, z_A = 1+i$$

1- أ - كتابة $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي:

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3+2i-1-i}{2-i-1-i} = \frac{2+i}{1-2i} = \frac{(2+i)(1+2i)}{5} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC :

$$ABC \text{ مثلث قائم ومتساوي الساقين في } A \Leftrightarrow \begin{cases} AC = AB \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ب - طبيعة وعناصر التحويل النقطي R :

$$R(B)=C \Leftrightarrow \begin{cases} AC = AB \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow C \text{ صورة } B \text{ بالدوران } R \text{ الذي مركزه } A \text{ وزاويته } \frac{\pi}{2} \text{ أي } R(B)=C$$

2 - تعيين نسبة التحاكي h :

h تحاكي مركزه B ونسبته k

$$k = 3 \Leftrightarrow 3(1+3i) = k(1+3i) \Leftrightarrow 5+8i-2+i = k(3+2i-2+i) \Leftrightarrow z_D - z_B = k(z_C - z_B) \Leftrightarrow h(C)=D$$

h تحاكي مركزه B ونسبته k = 3

3 - نضع: $S=hoR$ أ - التحقق من أن $S(B)=D$

$$S(B) = hoR(B) = h[R(B)] = h(C) = D$$

ب - طبيعة وعناصر التحويل S :

 $S=hoR$: S تشابه مباشر مركزه ω ، نسبته 3 وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} 5 + 8i - z_{\omega} &= 3i(2 - i - z_{\omega}) \Leftrightarrow z_D - z_{\omega} = 3e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_{\omega}) \Leftrightarrow S(B) = D \\ \omega = \Omega \Leftrightarrow z_{\omega} &= \frac{-2-2i}{-1+3i} = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i = z_{\Omega} \Leftrightarrow (-1 + 3i)z_{\omega} = -2 - 2i \Leftrightarrow \\ S &\text{ تشابه مباشر مركزه } \Omega, \text{ نسبته } 3 \text{ وزاويته } \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

4 - لتكن E ، F ، G نقط حيث: $S(D)=E$ ، $S(E)=F$ ، و $S(F)=G$ أ - تبيان أن النقط Ω ، E و B في استقامية:

$$\text{لدينا: } E = S(D) = S[S(B)] = SoS(B)$$

 SoS : تشابه مباشر مركزه Ω ، ونسبته $3 \times 3 = 9$ وزاويته $2 \left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$: $SoS \Leftrightarrow$ تحاكي مركزه Ω ونسبته 9-

$$\overrightarrow{\Omega E} = -9\overrightarrow{\Omega B} \Leftrightarrow SoS(B) = E \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega B} \text{ و } \overrightarrow{\Omega E} \text{ مرتبطان خطيا} \Leftrightarrow \Omega, E \text{ و } B \text{ في استقامية}$$

ب - تبيان أن النقط Ω ، G و B في استقامية:

$$\text{لدينا: } G = S(F) = S[S(E)] = SoS[S(D)] = SoSoS[S(B)] = SoSoSoS(B)$$

 $SoSoSoS$: تشابه مباشر مركزه Ω ، ونسبته $3^4 = 81$ وزاويته $4 \left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi \equiv 0$: $SoSoSoS \Leftrightarrow$ تحاكي مركزه Ω ونسبته 81

$$\overrightarrow{\Omega G} = 81\overrightarrow{\Omega B} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega B} \text{ و } \overrightarrow{\Omega G} \text{ مرتبطان خطيا} \Leftrightarrow \Omega, E \text{ و } G \text{ في استقامية}$$

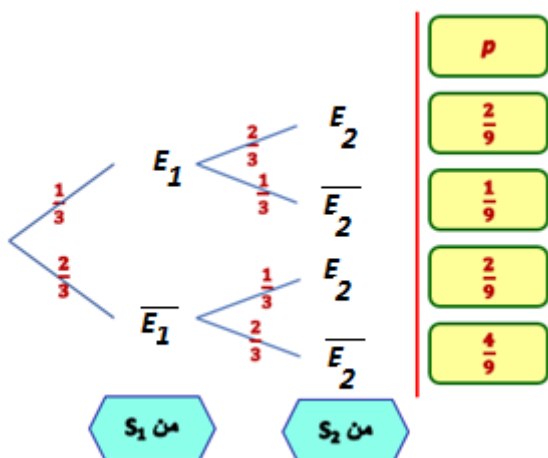
التمرين 02:

لدينا n كيس $S_1, S_2, \dots, S_n$ يحوي كل منهم على قريصات غير معروفة عند اللمس. n عدد طبيعي غير معدوم.



1 - بداية العملية:

أ - تمثيل بشجرة السحب في S_1 ، ثم في S_2 :

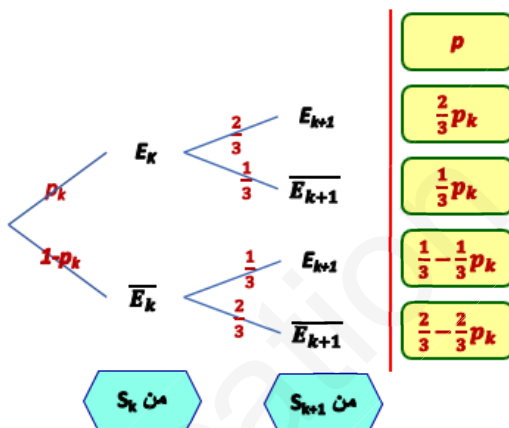


ب - أذكر p_1 ثم حساب p_2 :

$$p_1 = \frac{1}{3} \text{ و } p_2 = p(E_2) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

2- علاقة بين p_k و p_{k+1} :

أ - إتمام الشجرة:



ب - استنتاج أن: $p_{k+1} = \frac{1}{3} p_k + \frac{1}{3}$:

لدينا: $p_{E_k}(E_{k+1}) = \frac{2}{3}$ و $p_{\bar{E}_k}(E_{k+1}) = \frac{1}{3}$

$$p_{k+1} = \frac{1}{3} p_k + \frac{1}{3} \text{ ومنه } p_{k+1} = p_k \times p_{E_k}(E_{k+1}) + (1-p_k) p_{\bar{E}_k}(E_{k+1}) = \frac{2}{3} p_k + \frac{1}{3} (1-p_k) = \frac{1}{3} p_k + \frac{1}{3}$$

3- دراسة متتالية (p_n) :

أ - نبرهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $p_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$:

○ نتحقق من صحتها من أجل $n=1$

لدينا: $p_1 = \frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$ (صحيحة)

○ نفرض أنها صحيحة من أجل n ولنبرهن أنها صحيحة من أجل $n+1$ أي لنبرهن أن $p_{n+1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$

$$p_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \right] + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) + 1 \right] = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3^n} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$$

○ الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $p_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$

ب - استنتاج النهاية لـ p_n لما n يؤول إلى $+\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{2}$$

ج - التفسير العملي لهذه النتيجة:

عندما نعيد العملية عدد كبير من المرات بالقدر الكافي نجد فإن احتمال سحب كرة بيضاء يقترب من $\frac{1}{2}$

1- أ - تبيان أن النقط $A(1;2;4)$ ، $B(-1;3;2)$ ، $C(4;-1;1)$ ، $D(-5;-1;0)$ و $G(-2;3;-1)$ نقط من الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$
 أ - تبيان أن النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة:

$$\vec{AB}(-2; 1; -2) \quad , \quad \vec{AC}(3; -3; -3)$$

لدينا: $\frac{-2}{3} \neq \frac{1}{-3}$ $\Leftrightarrow \vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطان خطيا $\Leftrightarrow A$ ، B و C ليست على استقامة واحدة

ب - تبيان أن النقط A ، B ، C و G تنتمي إلى نفس المستوي:

$$\vec{GA}(-3; 1; -5) \quad , \quad \vec{GB}(-1; 0; -3) \quad , \quad \vec{GC}(-6; 4; -2)$$

$$\begin{cases} \beta = \frac{1}{4} \\ \alpha = \frac{3}{2} \\ -5 = -3\left(\frac{3}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = -\alpha - 6\beta \\ 1 = 4\beta \\ -5 = -3\alpha - 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \vec{GA} = \alpha \vec{GB} + \beta \vec{GC} \quad \text{حيث } \alpha \text{ و } \beta \text{ حقيقيين}$$

لدينا: $\vec{GA} = \frac{3}{2} \vec{GB} + \frac{1}{4} \vec{GC}$ $\Leftrightarrow \vec{GA}$ ، $\vec{GB}$ و $\vec{GC}$ مرتبطة خطيا $\Leftrightarrow A$ ، B ، C و G تنتمي إلى نفس المستوي

ج - استنتاج أن G مرجح للنقط A ، B و C مرفقة بمعاملات يطلب تعيينها:

$$\text{لدينا: } \vec{GA} = \frac{3}{2} \vec{GB} + \frac{1}{4} \vec{GC} \Leftrightarrow 4\vec{GA} - 6\vec{GB} - \vec{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow G = \{(A, 4); (B, -6); (C, -1)\} \quad (1) \dots$$

2- أ - تبيان أن النقطة G هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) :

$$GE(ABC) \Leftrightarrow (1)$$

$$\vec{DG}(3; 4; -1)$$

$$\text{لدينا: } \vec{DG}(3; 4; -1) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{DG} \perp \vec{AB} \\ \vec{DG} \perp \vec{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{DG} \cdot \vec{AB} = -6 + 4 + 2 = 0 \\ \vec{DG} \cdot \vec{AC} = 9 - 12 + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{لدينا: } G \Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{DG}) \perp (ABC) \\ G \in (ABC) \end{cases} \quad \text{حيث } G \text{ هي المسقط العمودي للنقطة } D \text{ على المستوي } (ABC)$$

ب - استنتاج معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) :

$$(ABC): 3x+4y-z+d=0 \Leftrightarrow (ABC) \text{ ناظمي للمستوي } \vec{DG}(3; 4; -1)$$

$$(ABC): 3x+4y-z-7=0 \text{ ومنه } d=-7 \Leftrightarrow 3+8-4+d=0 \Leftrightarrow A \in (ABC)$$

3- أ - حساب الجداء السلمي $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ والطولين AB و AC :

$$AC = 3\sqrt{3} \quad , \quad AB = 3 \quad , \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -6 - 3 + 6 = -3$$

ب - استنتاج القيم المضبوطة لكل من $\cos \widehat{BAC}$ و $\sin \widehat{BAC}$:

$$\text{لدينا: } \cos \widehat{BAC} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC} = \frac{-3}{9\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$

$$\sin \widehat{BAC} = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{BAC}} = \sqrt{1 - \frac{1}{27}} = \sqrt{\frac{26}{27}} = \frac{\sqrt{78}}{9} \quad \text{وبالتالي}$$

ج - استنتاج مساحة المثلث ABC ثم أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$:

$$S_{ABC} = \frac{AB \times AC \times \sin \widehat{BAC}}{2} = \frac{9\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{78}}{9}}{2} = \frac{3\sqrt{26}}{2} \text{ u. a.}$$

$$\text{لدينا: } DG = \sqrt{26} \quad \text{وبالتالي} \quad V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times S_{ABC} \times DG = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{26}}{2} \times \sqrt{26} = 13 \text{ u. v.}$$

4- لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء حيث $4MA^2 - 6MB^2 - MC^2 = -54$
 أ - تعيين طبيعة وعناصر (S) :

$$4\vec{MA}^2 - 6\vec{MB}^2 - \vec{MC}^2 = -54 \Leftrightarrow 4MA^2 - 6MB^2 - MC^2 = -54 \Leftrightarrow M \in (S)$$

$$4(\vec{MG} + \vec{GA})^2 - 6(\vec{MG} + \vec{GB})^2 - (\vec{MG} + \vec{GC})^2 = -54 \Leftrightarrow$$

$$-3MG^2 + 4GA^2 - 6GB^2 - GC^2 = -54 \Leftrightarrow$$

$$GC^2 = 56 \quad , \quad GB^2 = 10 \quad , \quad GA^2 = 35$$

$$MG^2 = 26 \Leftrightarrow -3MG^2 + 140 - 60 - 56 = -54 \Leftrightarrow M \in (S)$$

(S) سطح كرة مركزه G ونصف قطره $R = \sqrt{26}$

ب - تعيين معادلتين ديكرتيتين للمستويين (P_1) و (P_2) المماسين لسطح الكرة (S) والموازيين للمستوي (ABC)

$$(P): 3x+4y-z+d=0 \quad \text{وبالتالي} \quad (P) \text{ هو ناظمي للمستوي } (ABC) \Leftrightarrow \vec{DG}(3; 4; -1) \Leftrightarrow (P) \parallel (ABC)$$

$$(P) \text{ مماس لسطح الكرة } (S) \Leftrightarrow d(G; (P)) = \sqrt{26} \Leftrightarrow \frac{|7+d|}{\sqrt{26}} = \sqrt{26} \Leftrightarrow d = -33 \text{ أو } d = 19$$

$$\text{ومنه } (P_1): 3x+4y-z+19=0 \text{ و } (P_2): 3x+4y-z-33=0$$

الجزء I : f دالة معرفة على $] -\infty; 1]$ بـ : $f(x) = -1 - \sqrt{1-x}$. (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$
 1- أ- حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب - دراسة اتجاه تغير الدالة f

f تقبل الاشتقاق على $] -\infty; 1[$ و $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} > 0 \Leftrightarrow f$ متزايدة تماما على $] -\infty; 1]$

جدول تغيرات f : $f(1) = -1$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	-1	$+\infty$

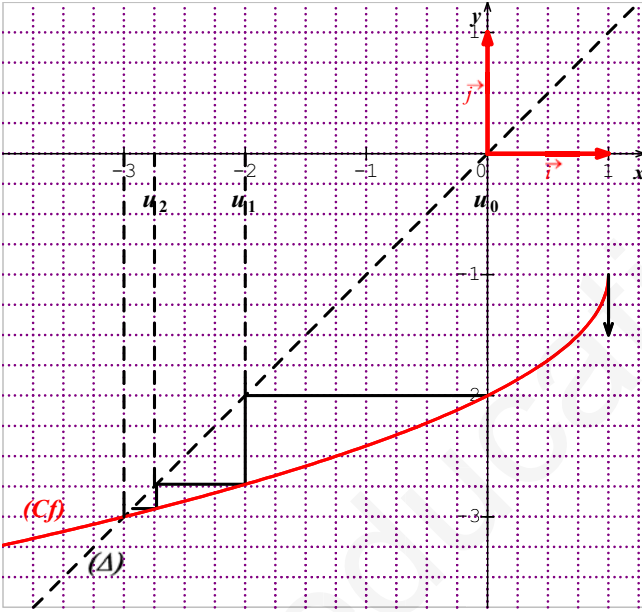
2 - تعيين إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ x^2 + 3x = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 1 \geq 0 \\ 1 - x = x^2 + 2x + 1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x} = -x - 1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - \sqrt{1-x} = x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ هي $(-3; -3)$

3 - رسم (C_f) و (Δ)



$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) = -1 - \sqrt{1-u_n} \end{cases} \text{ الجزء I}$$

2 - تخمين حول تغيرات (u_n) وتقاربها:

(u_n) متناقصة تماما

(u_n) متقاربة وتقارب 3-

3 - أ - البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-3 \leq u_n \leq 0$

- نتحقق من أنها صحيحة من أجل $n = 0$

لدينا: $u_0 = 0 \in [-3; 0]$ (صحيحة)

- نفرض أنها صحيحة من أجل n أي نفرض أن $-3 \leq u_n \leq 0$

- نبرهن أنها صحيحة من أجل $n+1$ أي نبرهن أن $-3 \leq u_{n+1} \leq 0$

لدينا: $-3 \leq u_n \leq 0 \Leftrightarrow f(-3) \leq f(u_n) \leq f(0)$

(لأن f متزايدة على $[-3; 0]$)

$$-3 \leq u_{n+1} \leq -2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$-3 \leq u_{n+1} \leq 0 \Leftrightarrow \text{(صحيحة)}$$

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n : $-3 \leq u_n \leq 0$

ب - دراسة اتجاه تغير (u_n)

(C_f) يقع تحت (Δ) على $[-3; 0] \Leftrightarrow (f(x) \leq x \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 0)$

لدينا: $\forall n \in \mathbb{N}; f(u_n) \leq u_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; -3 \leq u_n \leq 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} \leq u_n \Leftrightarrow$$

$$(u_n) \text{ متناقصة تماما} \Leftrightarrow$$

ج - استنتاج أن (u_n) متقاربة

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}; -3 \leq u_n \leq 0 \\ (u_n) \text{ متناقصة تماما} \\ f(-3) = -3 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -3 \text{ أي } (u_n) \text{ متقاربة وتقارب } -3 \Leftrightarrow$$

4 - أ - تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-3; 0]$ ، $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \leq 2\sqrt{1-x} \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{1-x} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 1-x \leq 4 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \text{من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من } [-3; 0] , \frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$$

ب - استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{1}{4}(u_n + 3) \leq u_{n+1} + 3 \leq \frac{1}{2}(u_n + 3)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}; \int_{-3}^{u_n} \frac{1}{4} dx \leq \int_{-3}^{u_n} f'(x) dx \leq \int_{-3}^{u_n} \frac{1}{2} dx \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in [-3; 0]; \frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}; -3 \leq u_n \leq 0 \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; \frac{1}{4}(u_n + 3) \leq [f(x)]_{-3}^{u_n} \leq \frac{1}{2}(u_n + 3) \Leftrightarrow$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; \frac{1}{4}(u_n + 3) \leq f(u_n) - f(-3) \leq \frac{1}{2}(u_n + 3) \Leftrightarrow$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; \frac{1}{4}(u_n + 3) \leq u_{n+1} + 3 \leq \frac{1}{2}(u_n + 3) \Leftrightarrow$$

ج - استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3 \leq u_n \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3$:

من السؤال السابق نجد:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(u_0 + 3) \leq u_1 + 3 \leq \frac{1}{2}(u_0 + 3) \\ \frac{1}{4}(u_1 + 3) \leq u_2 + 3 \leq \frac{1}{2}(u_1 + 3) \\ \frac{1}{4}(u_2 + 3) \leq u_3 + 3 \leq \frac{1}{2}(u_2 + 3) \\ \dots \dots \dots \\ \frac{1}{4}(u_{n-1} + 3) \leq u_n + 3 \leq \frac{1}{2}(u_{n-1} + 3) \end{cases}$$

بالضرب نجد:

$$\forall n \in \mathbb{N}; 3\left(\frac{1}{4}\right)^n \leq u_n + 3 \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; \left(\frac{1}{4}\right)^n (u_0 + 3) \leq u_n + 3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 + 3)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; 3\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3 \leq u_n \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3 \Leftrightarrow$$

د - استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}; 3\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3 \leq u_n \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[3\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3 \right] = -3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3 \right] = -3 \end{cases} \quad \text{لدينا:}$$

التمرين 05:

f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{2\ln x}{x^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- حساب النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

الاستنتاج: $x = 0$ و $y = 0$ معادلتين لمقاربين للمنحنى (C_f)

2- دراسة اتجاه تغير f :

f' تقبل الاشتقاق على $]0; +\infty[$ و $f'(x) = \frac{2x-4x\ln x}{x^4} = \frac{2-4\ln x}{x^3}$

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-

f متزايدة تماما على $]0; \sqrt{e}]$ و متناقصة تماما على $[\sqrt{e}; +\infty[$
جدول التغيرات:

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$\frac{1}{e}$	0

3- نقطة تقاطع (C_f) مع $(x'x)$:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\ln x}{x^2} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

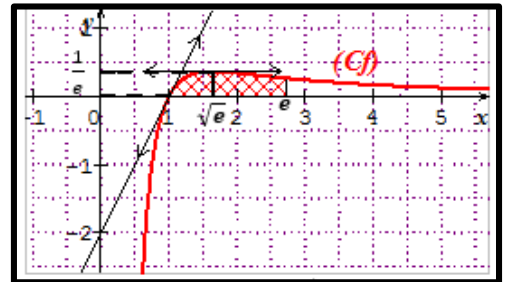
إحداثيتي نقطة تقاطع (C_f) مع $(x'x)$ هي $(1; 0)$

4- معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x = 1$:

$$f(1) = 0 \text{ و } f'(1) = 2$$

$$(T): y = 2x - 2 \Leftrightarrow (T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

5- إنشاء (C_f) و (T) :



6- حساب المساحة:

$$\mathcal{A} = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \frac{2\ln x}{x^2} dx$$

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{2}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = -\frac{2}{x} \end{cases} \text{ نضع:}$$

$$\mathcal{A} = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^e + \int_1^e \frac{2}{x^2} dx = \left[-\frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x} \right]_1^e = \left(-\frac{4}{e} + 2 \right) u.a. \approx 0,53 u.a.$$

7- المناقشة:

$$(\Delta): y = f(m)$$

$$(x'x): y = 0$$

$$(\Delta'): y = \frac{1}{e}$$

من البيان نستنتج ما يلي:

$$0 < m \leq 1 \Leftrightarrow f(m) \leq 0 \text{ حل وحيد}$$

$$0 < f(m) < \frac{1}{e} \Leftrightarrow m \in]1; \sqrt{e}] \cup [\sqrt{e}; +\infty[\text{ حلان متمايزان}$$

$$f(m) = \frac{1}{e} \Leftrightarrow m = \sqrt{e} \text{ حل مضاعف}$$

التمرين 06: (خاص بالقسم 3 رياضي)

1. حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين: 1440 و 276 :

$$PGCD(276; 1440) = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} 276 = 12 \times 23 \\ 1440 = 12 \times 120 \\ PGCD(23; 120) = 1 \end{cases} \text{ لدينا:}$$

2. تبين أن العددين $(x+y)$ و (xy) أوليان فيما بينهما:

x و y عددين طبيعيين غير معدومين أوليين فيما بينهما

لدينا: $x \wedge y = 1 \Leftrightarrow$ يوجد عدنان صحيحان α و β حيث: $\alpha x + \beta y = 1$ (مبرهنة بيزو)

$$\begin{cases} \alpha(x+y) + (\beta-\alpha)y = 1 \\ \beta(x+y) + (\alpha-\beta)x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(مبرهنة بيزو) \begin{cases} (x+y) \wedge y = 1 \\ (x+y) \wedge x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(x+y) \wedge (xy) = 1 \Leftrightarrow$$

3. a و b عدنان طبيعيين غير معدومان و m المضاعف المشترك الأصغر لهما.

أ - برهان على أن: $PGCD(a+b; m) = PGCD(a; b)$

$$\begin{cases} a = d \times a' \\ b = d \times b' \\ PGCD(a'; b') = 1 \end{cases} \Leftrightarrow PGCD(a; b) = d \text{ نضع:}$$

$$m = d a' b' \Leftrightarrow md = ab = d^2 a' b' \text{ لدينا:}$$

$$PGCD(a+b; m) = PGCD(d(a'+b'); da'b') = d PGCD(a'+b'; a'b') = d = PGCD(a; b)$$

(لأن $(a' + b') \wedge (a'b') = 1$ من السؤال السابق)

ب - إيجاد $(a; b)$:

$$m = 1440 \text{ و } a+b = 276$$

$$\begin{cases} a = 12a' \\ b = 12b' \\ PGCD(a'; b') = 1 \end{cases} \Leftrightarrow PGCD(a; b) = PGCD(a+b; m) = PGCD(276; 1440) = 12$$

$$a'b' = 120 \Leftrightarrow 12a'b' = 1440 \Leftrightarrow m = d a' b' \text{ لدينا:}$$

$$a' + b' = 23 \Leftrightarrow a + b = 12(a' + b') = 276 \text{ و}$$

$$a' \text{ و } b' \text{ هما حلا المعادلة: } x^2 - 23x + 120 = 0$$

$$x_2 = 8, x_1 = 15 \quad \Delta = 23^2 - 4(120) = 49$$

$$(a; b) = (180; 96) \text{ أو } (a; b) = (96; 180) \Leftrightarrow (a'; b') = (15; 8) \text{ أو } (a'; b') = (8; 15) \text{ وبالتالي}$$

امتحان بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول : (05 نقاط)

نعتبر $P(z)$ كثير حدود لمتغير مركب z حيث : $P(z) = z^3 - (4 + 3i)z^2 + (13 + 12i)z - 39i$ (1) أ) بين أن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل حلاً تخيلياً صرفاً يطلب تعيينه .

ب) عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z - 3i)(az^2 + bz + c)$ (ج) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $P(z) = 0$.

(2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

نعتبر أربع نقط A ، B ، C و D من المستوي لواحقها على الترتيب : $z_A = 3i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 2 - 3i$ و $z_D = i$. أ) أكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه B و يحول C إلى A .

ب) استنتج طبيعة المثلث ABC ثم أحسب مساحته .

ج) لتكن النقطة E صورة A بالتحويل S ، استنتج مساحة المثلث ABE .

(3) أ) أحسب العدد $\frac{z_A - z_B}{z_D - z_B}$ ، ثم استنتج أن صورة A بتحويل نقطي f يطلب تعيين طبيعته و عناصره المميزة .

ب) عيّن طبيعة التحويل $f \circ S$ و عناصره المميزة (الرمز يدل على عملية تركيب التحويلات النقطية) .

(4) لتكن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $z = z_A + 6e^{i\theta}$ ، $\theta \in \mathbb{R}$.

أ) تحقق أن B تنتمي إلى (Γ) .

ب) عيّن المجموعة (Γ) .

التمرين الثاني : (04 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

(1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq n + 3$.

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ج) استنتج أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل . هل هي متقاربة ؟ برّر .

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n - n$.

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج) أحسب المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

- (3) نعتبر المتتالية (t_n) المعرفة بـ : $t_n = \ln(v_n)$
 (أ) برهن أن المتتالية (t_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .
 (ب) أحسب المجموع : $S'_n = t_0 + t_1 + \dots + t_n$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

- يحتوي وعاء على n كرة بيضاء، 5 كرات حمراء و 3 خضراء، نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد.
 (1) ما هو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين ؟
 (2) نرمز بـ $P(n)$ إلى احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون .

(أ) أثبت أن : $P(n) = \frac{n^2 - n + 26}{(n+7)(n+8)}$

(ب) أحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n)$ ثم فسّر النتيجة .

- (3) نضع $n = 4$ يقوم لاعب بسحب كرتين من الوعاء في آن واحد ثم يرجعهما و يسحب كرتين أخريين. لإجراء هذين السحبين يدفع اللاعب مبلغا قدره 30 ديناراً و بعد كلّ سحب يتحصّل على 40 دينار إذا كانت الكرتان من نفس اللون، وإلا يتحصّل على 5 دنائير فقط.
 ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ سحبين ربح هذا اللاعب .
 (أ) عيّن قيم المتغيّر العشوائي X .
 (ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X .
 (ج) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغيّر العشوائي X .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الجزء الأول : g دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 2 \ln x$

- (1) أدرس تغيّرات الدالة g .
 (2) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0,75 < \alpha < 0,76$.
 (3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = 1 - x + \frac{2}{x}(1 + \ln x)$

- نسّمى (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
 (1) (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

(ب) بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = -x + 1$ مقارب للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$ ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(2) (أ) أثبت أنّه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$.

(ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f و شكّل جدول تغيّراتها .

(3) (أ) بيّن أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يطلب كتابة معادلة له .

(ب) أثبت أن : $f(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{2}{\alpha}$ و استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

(ج) أحسب $f(2)$ و $f(3)$ ثم أرسم المستقيمين (Δ) ، (T) و المنحني (C_f) في المعلم السابق.

(4) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة : $\frac{2}{x}(1 + \ln x) = m$.

(5) λ عدد حقيقي أكبر تماما من 1 .

أ) أحسب $A(\lambda)$ مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = \lambda$ ، $x = 1$ و $y = -x + 1$.
 ب) عيّن قيمة λ بحيث يكون : $A(\lambda) = \ln \lambda^3$.

الجزء الثالث : a عدد حقيقي موجب تماما ، f_a دالة معرفّة على المجال $]0; +\infty[$: $f_a(x) = 1 - x + \frac{a}{x}(1 + \ln x)$

و ليكن (C_a) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أثبت أنّ جميع المنحنيات (C_a) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين احداثيها .

(2) نعتبر النقط : $A\left(-2; \frac{4}{a}\right)$ ، $B\left(1; \frac{2 \ln a}{a}\right)$ و $C(-2a; 2a - 2)$ ، ولتكن النقطة G_a مرجح الجملة المثقلة :

$$\{(A; 1), (B; 2), (C; -1)\}$$

أ) عيّن بدلالة a احداثي النقطة G_a .

ب) استنتج مجموعة النقط G_a عندما يمسخ العدد a المجموعة $\mathbb{R}_+^*$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط A, B, C التي لواحقها على الترتيب $Z_C = 4$ و $Z_B = \sqrt{3} - i, Z_A = 1 + i$.

- (1) أكتب الأعداد المركبة Z_A و Z_B و $\frac{Z_A}{Z_B}$ على الشكل المثلثي ثم على الشكل الأسّي.
- (ب) أكتب العدد المركب $\frac{Z_A}{Z_B}$ على شكله الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.
- (2) أوجد قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون: $\left(\frac{Z_A}{Z_B}\right)^n = \frac{1}{8}(1 - i\sqrt{3})$ ثم أحسب $\left(\frac{Z_A}{Z_B}\right)^8$.
- (3) ليكن التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:
$$Z' = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{5\pi}{12}} Z$$

- عين طبيعة التحويل النقطي S ومع تحديد عناصره المميزة.
- (4) أوجد المجموعة (Γ_1) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث $Z = Z_C + 2e^{i\theta}$ لما تتغير في $\mathbb{R}$.
 - (ب) أوجد المجموعة (Γ_2) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث $\text{Arg}(z - z_c) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.
 - (5) أوجد المجموعة (Γ) صورة (Γ_1) بالتحويل النقطي S محددا عناصرها المميزة.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

يحتوي كيس على 12 كرة منها 3 بيضاء تحمل الأرقام 1، 1، 3 و أربعة حمراء تحمل الأرقام 1، 1، 2، 2، 2، 3. و خمس خضراء تحمل الأرقام: 1، 2، 2، 2، 3. و سحب في آن واحد كرتين من هذا الكيس.

- (1) نعتبر الحادثتين: A : " سحب كرتين من نفس اللون " و B : " سحب كرة خضراء على الأقل ".
 (أ) أحسب احتمال الحوادث التالية: A ، B و $A \cap B$.
 (ب) هل الحادثتين: A و B مستقلتان؟
- (2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب كرتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما.
 عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

f دالة عددية معرفة على $[-1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - \ln(x+2)$.

- (1) أدرس تغيرات الدالة f .

- (2) (u_n) متتالية معرفة كما يلي: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.
 (أ) برهن بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -1$.
 (ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

جـ) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة واحسب نهايتها.

3) (v_n) متتالية معرفة كما يلي: $v_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_n = \ln[(u_0 + 2) \times (u_1 + 2) \times \dots \times (u_{n-1} + 2)]$$

أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3 - u_n$.

ب) استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} [(u_0 + 2) \times (u_1 + 2) \times \dots \times (u_{n-1} + 2)]$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 2e \cdot e^{-\frac{x}{2}} - e^{-x}$.

و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$.

1) أدرس تغيرات الدالة f (لاحظ أن $f(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(2e - e^{-\frac{x}{2}} \right)$)

2) أثبت أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .

3) أكتب معادلة المماس (D) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

4) عين احداثيي نقطة تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل .

5) أرسم المماس (D) ثم المنحنى (C) .

6) λ عدد حقيقي أكبر تماماً من -2 .

أ) أحسب $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمت التي معادلاتها: $x = -2$ ،

$x = \lambda$ و $y = 0$.

ب) عين قيمة λ التي من أجلها يكون $S(\lambda) = 2e + 1$.

جـ) أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S(\lambda)$.

7) ناقش بيانا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = m^2$.

انتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

السنة الدراسية: 2019/2018

المستوى: السنة الثالثة ثانوي

الشعبة: علوم تجريبية

وزارة الدفاع الوطني

أركان الجيش الوطني الشعبي

دائرة الاستعمال والتحضير

مديرية مدارس أشبال الأمة

امتحان بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات

تصحيح الموضوع الأول

العلامة		عناصر الإجابة	محاو الموضوع	
كاملة	مجزأة			
05 ن		أ- إذا كانت المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلاً تخيلياً صرفاً فهو من الشكل $z=ai$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$ $P(ai)=0$ يكافئ $(4a^2-12a)+(-a^3+3a^2+13a-39)i=0$ يكافئ $\begin{cases} 4a^2-12a=0 \\ -a^3+3a^2+13a-39=0 \end{cases}$ و منه $a=3$ إذن $\begin{cases} a=0a=3i \\ -a^3+3a^2+13a-39=0 \end{cases}$ فعلاً المعادلة تقبل حلاً تخيلياً صرفاً هو $z=3i$ ب- تعيين الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث : $P(z)=(z-3i)(az^2+bz+c)$ باستعمال إحدى الطرق المعروفة نجد : $a=1, b=-4, c=13$ و عليه $P(z)=(z-3i)(z^2-4z+13)$ ج- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ تكافئ $z=3i$ أو $z^2-4z+13=0$ ، $\Delta'=(3i)^2$ و عليه الحلان الآخران هما $z=2+3i$ أو $z=2-3i$ و منه $S=\{3i; 2-3i; 2+3i\}$ أ- العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه B و يحوّل C إلى A هي : $z'=3iz-9-3i$ ب- إستنتاج طبيعة المثلث ABC : $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}\right)=\arg(3i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ و $\left \frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}\right =3$ ، $k \in \mathbb{Z}$ و منه ABC قائم في B ، مساحته : $ua=6$ ، $z_C-z_B ^2=\frac{1}{2}.3. z_C-z_B ^2=6$ ، حيث $k=3$ هي نسبة التشابه S ج- صورة A و صورة E إذن مساحة المثلث ABE هي $S_{ABE}=3^2.S_{ABC}=54ua$: 3) أ) لدينا $\frac{z_A-z_B}{z_D-z_B}=\frac{3}{2}$		
	0.5			
	0.75			
	0.5			
	0.5			
	0.5			
	0.25			
	0.25			
	0.5			

أ- إذا كانت المعادلة $P(z) = 0$ تقبل حلاً تخيلياً صرفاً فهو من الشكل $z = ai$

حيث $a \in \mathbb{R}^*$

$$P(ai) = 0 \text{ يكافئ } (4a^2 - 12a) + (-a^3 + 3a^2 + 13a - 39)i = 0$$

$$\text{يكافئ } \begin{cases} 4a^2 - 12a = 0 \\ -a^3 + 3a^2 + 13a - 39 = 0 \end{cases} \text{ و منه } \begin{cases} a = 0a = 3i \\ -a^3 + 3a^2 + 13a - 39 = 0 \end{cases} \text{ إذن } a = 3$$

فعلا المعادلة تقبل حلاً تخيلياً صرفاً هو $z = 3i$

ب- تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث :

$$P(z) = (z - 3i)(az^2 + bz + c)$$

باستعمال إحدى الطرق المعروفة نجد : $a = 1, b = -4, c = 13$ و عليه

$$P(z) = (z - 3i)(z^2 - 4z + 13)$$

ج- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$

تكافئ $z = 3i$ أو $z^2 - 4z + 13 = 0$ ، $\Delta' = (3i)^2$ و عليه الحلان الآخران هما

$$z = 2 + 3i \text{ أو } z = 2 - 3i$$

و منه $S = \{3i; 2 - 3i; 2 + 3i\}$

أ- العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه B و يحول C إلى A هي :

$$z' = 3iz - 9 - 3i$$

ب- إستنتاج طبيعة المثلث ABC :

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}\right) = \arg(3i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ و } \left|\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}\right| = 3 \text{ ، } k \in \mathbb{Z} \text{ و منه } ABC \text{ قائم في } B$$

$$\text{مساحته : } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot |z_C - z_B|^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot |z_C - z_B|^2 = 6ua$$

التشابه S

ج- صورة A و E صورة C إذن مساحة المثلث ABE هي

$$S_{ABE} = 3^2 \cdot S_{ABC} = 54ua$$

$$(3) \text{ أ) لدينا } \frac{z_A - z_B}{z_D - z_B} = \frac{3}{2}$$

04 ن	0.25	إذن A صورة D بواسطة تحاكي مركزه B و نسبته $k' = \frac{3}{2}$	التمرين الثاني
	0.25	ب- طبيعة التحويل foS وعناصره المميزة: foS تشابه مباشر مركزه B ، نسبته $\frac{3}{2} = 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ و زاويته $k \times k' = 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$	
	0.75	4 أ- التحقق أن B تنتمي إلى (Γ) : لاحقة B تحقق العلاقة $z_B = z_A + 6e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ، إذن $B \in (\Gamma)$ ب- تعيين المجموعة (Γ) : (Γ) دائرة مركزها A و نصف قطرها 6.	
	0.25		
	0.25		
	0.5	أ- برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n \leq n+3$ نتحقق من صحة الخاصية من أجل $n=0$ ، $u_0 \leq 0+3$ ، صحيحه لأن $u_0 = 2$ نفرض صحة الخاصية من أجل n أي $u_n \leq n+3$ نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ ، أي $u_{n+1} \leq n+4$: لدينا $u_n \leq n+3$ (الفرضية) و عليه $\frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3}n+2$ و منه $\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n+1 \leq n+3$ أي $u_{n+1} \leq n+4$ ما يستلزم أن $u_{n+1} \leq n+4$ الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n . ب- اتجاه تغير (u_n) : ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n+1 = -\frac{1}{3}(u_n - (n+3))$ ، بما أن $u_n \leq n+3$ فإن $u_{n+1} - u_n \geq 0$ و عليه (u_n) متزايدة ج- (u_n) متزايدة و حدّها الأول $u_0 = 2$ إذن هي محدودة من الأسفل بـ 2.	
	0.5	(u_n) غير متقاربة لأنها ليست محدودة من الأعلى	
	0.5	2 أ- إثبات أن (v_n) هندسية أساسها q ، معناه من أجل كل عدد	
	0.5	طبيعي $n: v_{n+1} = v_n \times q$	
	0.25	فعلا (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ و $v_{n+1} = u_{n+1} - n - 1 = \frac{2}{3}(u_n - n) = \frac{2}{3}v_n$ حدّها الأول $v_0 = 2$	
0.75	ب- عبارة v_n ثم u_n بدلالة n : $v_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2^{n+1}}{3^n}$ و منه $u_n = v_n + n = \frac{2^{n+1}}{3^n} + n$ ج- حساب المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$		
0.25	$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n^2 + n + 12}{2} - \frac{2^{n+2}}{3^n}$		
0.25	3 أ- (t_n) متتالية حسابية أساسها r معناه من أجل كل عدد طبيعي $n: t_{n+1} = t_n + r$		
0.25	فعلا (t_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{2}{3}$ و حدّها $r = \ln \frac{2}{3}$ و $t_{n+1} = \ln v_{n+1} = t_n + \ln \frac{2}{3}$ الأول $v_0 = \ln 2$ ب- حساب المجموع $S'_n = t_0 + t_1 + \dots + t_n$ $S'_n = \frac{n+1}{2} \ln \frac{2^{n+2}}{3^n}$		

04 ن	0.5	حساب احتمال الحصول على كرتين بيضاوين : $P_B = \frac{C_n^2}{C_{n+8}^2} = \frac{(n-1)n}{(n+7)(n+8)}$	التمرين الثالث								
	0.25	أ- إثبات أن : $P(n) = \frac{n^2 - n + 26}{(n+7)(n+8)}$									
	0.5	ب- حساب $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n)$ وتفسير النتيجة :									
	0.75	التفسير : كلما زاد عدد الكرات البيضاء زاد احتمال سحب كرتين من نفس اللون (بيضاوين) حتى تصبح الحادثة شبه أكيدة									
	0.25	3- أ- قيم المتغير العشوائي : $X \in \{-20, 15, 50\}$									
	0.25	ب- قانون احتمال X :									
	0.25	<table border="1" data-bbox="842 779 1302 904"> <tr> <td>$X = X_i$</td><td>-20</td><td>15</td><td>50</td></tr> <tr> <td>$P(X = X_i)$</td><td>$\frac{2209}{4356}$</td><td>$\frac{1786}{4356}$</td><td>$\frac{361}{4356}$</td></tr> </table>	$X = X_i$	-20	15	50	$P(X = X_i)$	$\frac{2209}{4356}$	$\frac{1786}{4356}$	$\frac{361}{4356}$	
$X = X_i$	-20	15	50								
$P(X = X_i)$	$\frac{2209}{4356}$	$\frac{1786}{4356}$	$\frac{361}{4356}$								
	0.75	ج- الأمل الرياضي $E(X)$:									
	0.75	$E(X) = -20 \times \frac{2209}{4356} + 15 \times \frac{1786}{4356} + 50 \times \frac{361}{4356} = \frac{5}{33}$									
07 ن	0.75	<u>الجزء الأول :</u>	التمرين الرابع								
	0.25	تغيرات الدالة g :									
	0.25	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$									
	0.25	لاحظ أن $g'(x) = \frac{2x^2 + 2}{x}$ ، $g'(x) > 0$ على $]0; +\infty[$ و عليه فإن g متزايدة تماما على $]0; +\infty[$									
	0.25	إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.75 < \alpha < 0.76$									
	0.25	g مستمرة و متزايدة تماما على $[0.75; 0.76]$ و $g(0.75) \times g(0.76) < 0$ لأن									
	0.25	إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.75 < \alpha < 0.76$									
	0.25	إشارة $g(x)$: $g(x) < 0$ من أجل $x \in]0; \alpha[$ و $g(x) > 0$ من أجل $x \in]\alpha; +\infty[$									
	0.25	<u>الجزء الثاني :</u>									
	0.5	أ- أحساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$									
	0.25	ب- لدينا $f(x) = 1 - x + \frac{2}{x}(1 + \ln x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x}(1 + \ln x) = 0$ ، إذن $y = 1 - x$: (Δ) مقارب لـ (C_f) في جوار $+\infty$.									

• الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

x	0	$+\infty$
$f(x)-y$	-	+
الوضعية	يقع تحت (C_f) (Δ)	يقع فوق (C_f) (Δ)

0.25

0.25

0.5

أ- إثبات أن $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$
 ب- إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $g(x)$ ، إذن f متزايدة تماماً على $]0; \alpha]$ و متناقصة تماماً على $[\alpha; +\infty[$
 جدول تغيرات f :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		$f(\alpha)$	

0.25

0.25

3) أ- تبين أن المنحني (C_f) يقبل مماساً (T) يوازي (Δ) و كتابة معادلة له:
 $(\Delta) // (T)$ يكافئ $f'(x) = -1$ و منه $x = 1$ ، فعلا يوجد مماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة $P(1; 2)$ يوازي (Δ) .
 معادلة له : $y = -x + 3$

0.25

ب- التحقق من أن $f(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{2}{\alpha}$
 • استنتاج حصر $f(\alpha)$: باستعمال قواعد الحصر نجد : $2.11 < f(\alpha) < 2.17$

ج- $f(3) = -\frac{4}{3} + \ln 3$ ، $f(2) = \ln 2$

رسم المستقيمين (Δ) ، (T) و المنحني (C_f)

0.25

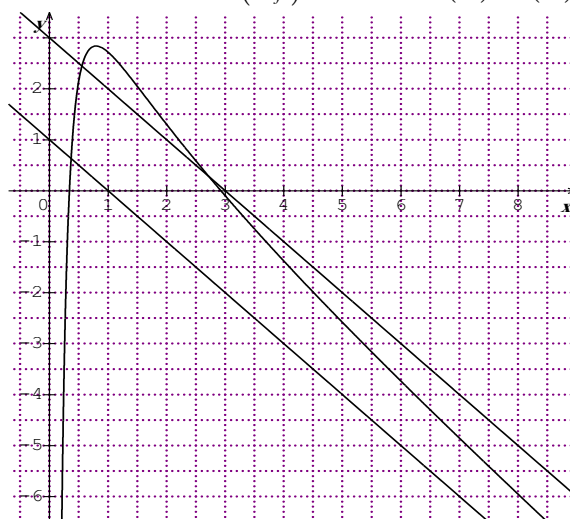
0.25

0.25

0.25

0.25

01 ن



المناقشة البيانية :

		المعادلة $\frac{2}{x}(1+\ln x) = m$ تكافئ $f(x) = -x + m + 1$ حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم (Δ_m) الذي معادلته $y = -x + m + 1$ والموازي لـ (T) و (Δ). • من أجل $m \in]-\infty; 0]$ ، المعادلة تقبل حلا وحيدا • من أجل $m \in]0; 2[$ ، المعادلة تقبل حلين متمايزين • من أجل $m = 2$ ، المعادلة تقبل حلا مضاعفا • من أجل $m \in [2; +\infty[$ ، المعادلة لا تقبل حلا أ- حساب المساحة $A(\lambda) = \int_1^{\lambda} \frac{2}{x}(1+\ln x) dx = 2 \ln \lambda + (\ln \lambda)^2 = [(2 + \ln \lambda) \ln \lambda] ua :$ ب- تعيين λ حيث $A(\lambda) = \ln \lambda^3$ المعادلة تكافئ $\ln \lambda = 0$ أو $\ln \lambda = 1$ أي $\lambda = 1$ و هو مرفوض أو $\lambda = e$ و هو المناسب . الجزء الثالث : إثبات أن جميع المنحنيات (C_a) تشمل نقطة ثابتة : لتكن $M_0(x_0; y_0) \in (C_a) \cap (C_{a'})$ معناه $1 - x_0 + \frac{a}{x_0}(1 + \ln x_0) = 1 - x_0 + \frac{a'}{x_0}(1 + \ln x_0)$ حيث $a \neq a'$ أي $\frac{a - a'}{x_0}(1 + \ln x_0) = 0$ عليه $1 + \ln x_0 = 0$ و منه $x_0 = \frac{1}{e}$ فعلا جميع المنحنيات (C_a) تشترك في النقطة الثابتة $H\left(\frac{1}{e}; \frac{e-1}{e}\right)$ أ- إحداثيا النقطة G_a $G_a\left(a; 1 - a + \frac{2}{a}(1 + \ln a)\right)$ ب- مجموعة النقط G_a لما يسمح العدد a المجموعة $\mathbb{R}_+^*$ هي المنحني (C_f).
0.5		
0.25		
0.25		
0.25		
0.25		
0.25		
0.25		

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

السنة الدراسية: 2019/2018

المستوى: السنة الثالثة ثانوي

الشعبة: علوم تجريبية

وزارة الدفاع الوطني

أركان الجيش الوطني الشعبي

دائرة الاستعمال والتحضير

مديرية مدارس أشبال الأمة

امتحان بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات

تصحيح الموضوع الثاني

العلامة	مجاورة	عناصر الإجابة	محاو الموضوع
05 ن	0.25	1 - أ - $z_A = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$	التمرين الأول
	0.25	$z_B = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)$	
	0.25	$\frac{z_A}{z_B} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right)$	
	0.75	ومنه $z_A = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $z_B = 2 e^{i(-\frac{\pi}{6})}$ و $\frac{z_A}{z_B} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\frac{5\pi}{12})}$	
	0.25	ب - $\frac{z_A}{z_B} = \frac{\sqrt{3}-1}{4} + i \frac{\sqrt{3}+1}{4}$	
	0.5	ومنه $\begin{cases} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$	
		2 - نعلم ان $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{5n\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5n\pi}{12}\right) \right)$ (مع $n \in \mathbb{N}$)	
		و لدينا $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1}{8} (1 - \sqrt{3}i) = \frac{1}{4} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right)$ (مع $n \in \mathbb{N}$)	
		معناه $\begin{cases} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = \frac{1}{4} \\ \frac{5n\pi}{12} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$ (مع $n \in \mathbb{N}$)	
	0.5	معناه $n = 4$ و لدينا $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^8 = \left(\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^4\right)^2 = \left(\frac{1}{8} (1 - \sqrt{3}i)\right)^2 = \left(\frac{1}{4} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right)\right)^2$	

		$= \frac{1}{16} \left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right) = \frac{1}{16} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = -\frac{1}{32} (1 + \sqrt{3}i)$													
0.25		3 - s هو تشابه مباشر مركزه 0 و نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و زاويته $\frac{5\pi}{12}$.													
0.5		4 - أ - (Γ_1) هي الدائرة ذات المركز c ونصف القطر 2.													
0.5		ب - (Γ_2) هي نصف المستقيم الذي مبدؤه c و $\vec{\omega}$ شعاع توجيه له مع $(\vec{u}, \vec{\omega}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$													
0.5		5 - صورة (Γ_1) بالتحويل s هي الدائرة ذات نصف القطر $\sqrt{2}$ والمركز c' ذات الاحقة $z_{c'}$ حيث $z_{c'} = s(c) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\frac{5\pi}{12})} (4) = 2\sqrt{2} e^{i(\frac{5\pi}{12})} = \sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1)$													
0.5		اي $c'(\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+1)$													
04 ن		$P(A) = \frac{C_3^2 + C_4^2 + C_5^2}{C_{12}^2} = \frac{19}{66}$ أ. 1	التمرين الثاني												
0.5		$P(B) = \frac{C_5^1 \times C_7^1 + C_5^2}{C_{12}^2} = \frac{15}{22}$													
0.5		$P(A \cap B) = \frac{C_5^2}{C_{12}^2} = \frac{5}{33}$													
0.5		ب. بما أن: $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ فإن الحادثتان A و B غير مستقلتان .													
0.5		2. المتغير العشوائي X قيمه $X = \{2; 3; 4; 5; 6\}$													
0.25		قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X هو :													
		قانون الاحتمال للمتغير العشوائي													
1.25		<table><tr><td>$X = x_i$</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>$P(X = x_i)$</td><td>$\frac{6}{66}$</td><td>$\frac{24}{66}$</td><td>$\frac{23}{66}$</td><td>$\frac{12}{66}$</td><td>$\frac{1}{66}$</td></tr></table>	$X = x_i$	2	3	4	5	6	$P(X = x_i)$	$\frac{6}{66}$	$\frac{24}{66}$	$\frac{23}{66}$	$\frac{12}{66}$	$\frac{1}{66}$	
$X = x_i$	2	3	4	5	6										
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{66}$	$\frac{24}{66}$	$\frac{23}{66}$	$\frac{12}{66}$	$\frac{1}{66}$										
0.5		الأمل الرياضي: $E(X) = 2 \frac{1}{11} + 3 \frac{4}{11} + 4 \frac{23}{66} + 5 \frac{2}{11} + 6 \frac{1}{66} = \frac{242}{66} = \frac{11}{3}$													
04 ن		$f'(x) = \frac{x+1}{x+2} (1)$ و $f'(x) > 0$ مع $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1$ من أجل $x > 0$	التمرين الثالث												
0.5		2 (أ) $u_0 > -1$ و $u_n > -1$ فإن $f(u_n) > -1$.													
0.5		ب) $u_{n+1} - u_n \leq 0$.													
0.5		ج) محدودة من الأسفل و متناقصة فهي متقاربة.													
0.5															

$\lim u_n = \ell$ حل المعادلة $f(\ell) = \ell$ $\ell = -1$

$$v_n = 3 - u_n$$

$$\lim (u_0 + 2) \times \dots \times (u_{n-1} + 2) = \lim e^{v_n} = e^4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad (1)$$

$$f'(x) = -ee^{-\frac{x}{2}} + e^{-x} = e^{-\frac{x}{2}} \left(e^{-\frac{x}{2}} - e \right)$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	e^2	0

$$f''(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(\frac{e}{2} - e^{-\frac{x}{2}} \right) \quad (2)$$

x	$-\infty$	$2 \ln 2 - 2$	$+\infty$
$f''(x)$		$+$	$-$

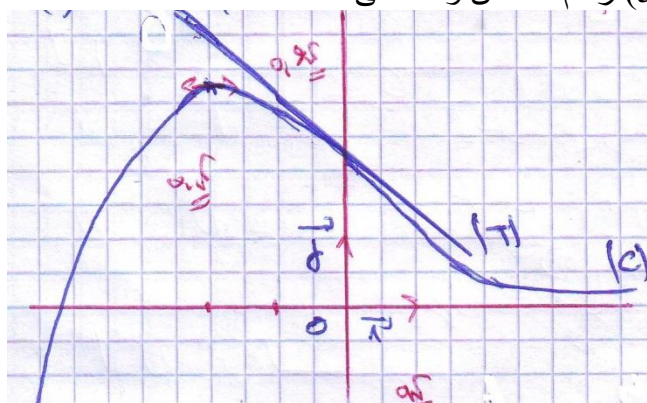
النقطة $A(2 \ln 2 - 2, f(2 \ln 2 - 2))$ ، نقطة إنعطاف .

(3) معادلة المماس (T) .

$$(T): y = (1 - e)x + 2e - 1$$

(4) نقطة تقاطع المنحنى مع محور الفواصل

(5) رسم المماس والمنحنى



(6) أ

$$S_\lambda = \int_{-2}^{\lambda} f(x) dx = \left[-4ee^{-\frac{x}{2}} \right]_{-2}^{\lambda} + \left[e^{-x} \right]_{-2}^{\lambda} = \left(-4ee^{-\frac{\lambda}{2}} + e^{-\frac{\lambda}{2}} + 3e^2 \right)$$

$$S_\lambda = 2e + 1 \quad \text{ua}$$

$$-4ee^{-\frac{\lambda}{2}} + e^{-\frac{\lambda}{2}} + 3e^2 = 2e + 1 \quad \text{ب)}$$

التمرين
الرابع

		$\left(e^{-\frac{\lambda}{2}}\right)^2 - 4e\left(e^{-\frac{\lambda}{2}}\right) + 3e^2 - 2e - 1 = 0$ نضع $t = e^{-\frac{\lambda}{2}}$ مع $t > 0$ $t^2 - 4et + 3e^2 - 2e - 1 = 0$ $t_2 = \frac{4e - 2e - 2}{2} \quad t_1 = \frac{4e + 2e + 2}{2}$ $= e - \frac{1}{2} = 3e + 1$ $-\frac{\lambda}{2} = \ln(3e + 1)$ $\lambda = -2 \ln(3e + 1)$ $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S(\lambda) = 3e^2 \quad (\text{ج})$ (7) المناقشة البيانية $\begin{cases} \text{المعادلة} & \text{تقبل} & \text{وحيد} & : m = 0 \Leftrightarrow m^2 = 0 \\ \text{المعادلة} & \text{تقبل} & \text{حليين} & : 0 < m^2 < e \\ \text{المعادلة} & \text{تقبل} & \text{حل مضاعف} & : m = -e \vee m = e \Leftrightarrow m^2 = e \\ \text{المعادلة} & \text{لا تقبل} & \text{حل} & : m < -em \vee m^2 > e^2 \end{cases}$	
01	0.25		
01			