



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين  
الموضوع الأول

**التمرين الأول: (04 نقاط)**

1. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$

$$Z^2 - 2Z + 4 = 0 \quad Z: \text{المعادلة ذات المجهول}$$

2. لتكن النقط  $A; B; C$  لواحقتها

$$Z_C = 1 - \sqrt{3}i; \quad Z_B = 1 + \sqrt{3}i; \quad Z_A = 2$$

أ/ اكتب كل من:  $Z_C; Z_B; Z_A$  على الشكل الأسّي

ب/ بين أن النقط  $A; B; C$  تنتمي لدائرة  $(\Gamma)$  يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

3. انشئ النقط  $A; B$  و  $C$  ثم عين طبيعة الرباعي  $OBAC$  . معللا اجابتك .

$$\left(\frac{Z_C}{2}\right)^{1993} + \left(\frac{Z_B}{2}\right)^{2017} = 1 \quad \text{ب/ بين أن :}$$

ج/ عين قيم العدد الطبيعي  $n$  حتى يكون  $(Z_B)^n$  عدد حقيقي سالب

$$L = \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} \quad \text{د/ عين طول و عمدة العدد المركب}$$

✓ استنتج طبيعة المثلث  $ABC$  .

$$(\bar{Z} - 1 + i\sqrt{3})(Z - 1 - i\sqrt{3}) = |Z_B| \quad \text{4. عين وانشئ مجموعة النقط التي تحقق:}$$

5. أ- عين العبارة المركبة للتحاكي  $(h)$  الذي مركزه  $A$  ونسبته 2

ب- أكتب العبارة المركبة للدوران  $(r)$  الذي مركزه  $A$  ويحول  $B$  إلى  $C$

ج- استنتج مركز ونصف قطر الدائرة  $(\Gamma')$  صورة الدائرة  $(\Gamma)$  بالتحويل النقطي  $(s)$  حيث  $S = hor$

**التمرين الثالث: (04 نقاط)**

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  بواقي القسمة الإقليدية للعدد  $3^n$  على 10

2. استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد  $(7^{1439} - 9^{2018} \times 1962)$  على 10

3. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  يكون :  $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1)3^{2n+1} [10]$

4. عين قيم العدد الطبيعي  $n$  حتى يكون :  $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0 [10]$



## التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \overset{I}{i}; \overset{II}{j}; \overset{III}{k})$

نعتبر النقط  $A(-2; 0; 0); B(0; -2; 0); C(0; 0; -2)$  ولتكن النقطة:  $I$  منتصف القطعة المستقيمة  $[AB]$ .

1. بين أن النقط  $A; B; C$  تعين مستويا نرمز له بالرمز  $(Q)$ .

2. بين أن للمستوي  $(Q)$  معادلة من الشكل:  $x + y + z + 2 = 0$ .

3.  $(P)$  المستوي الذي يشمل النقطة  $I$  ويعامد الشعاع  $\overset{III}{AB}$ .

أ/ اكتب معادلة للمستوي  $(P)$ . ماذا يمثل المستوي  $(P)$ .

ب/ بين أن المستويين  $(P)$  و  $(Q)$  متقاطعان وفق مستقيم  $(D)$ . اكتب تمثيلا وسيطيا له.

4. اوجد المسقط العمودي للنقطة  $A$  على المستقيم  $(D)$ . ثم استنتج المسافة بين النقطة  $A$  والمستقيم  $(D)$ .

## التمرين الرابع: (07ن)

I. نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $g(x) = 2x^2 - \ln x$

1. ادرس اتجاه تغيرات الدالة  $g$ .

2. استنتج إشارة  $g(x)$  على المجال  $]0; +\infty[$ .

II. نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = 2x - 1 + \frac{1 + \ln x}{x}$

وليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \overset{I}{i}; \overset{II}{j})$

1. عين نهاية الدالة  $f$  بجوار  $0$  و  $+\infty$ .

2. ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$ ، ثم شكل جدول التغيرات.

3. أثبت أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = 2x - 1$  مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$ .

4. تحقق أن المستقيم  $(\Delta)$  يقطع المنحنى  $(C_f)$  في نقطة  $A$  يطلب تعيين إحداثياتها.

5. حدد وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$  في المجال  $]0; +\infty[$ .

6. أثبت أنه توجد نقطة وحيدة  $B$  للمنحنى  $(C_f)$  يكون المماس  $(T)$  عندها موازي للمستقيم  $(\Delta)$

يطلب كتابة معادلة  $(T)$

7. برهن أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث:  $0,39 < \alpha < 0,40$ .

8. ارسم  $(C_f)$  و  $(\Delta)$  و  $(T)$  ( $\| \overset{I}{i} \| = 2cm$ ;  $\| \overset{II}{j} \| = 1cm$ )

9. ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي  $m$  عدد حلول المعادلة  $(m+1)x - 1 - \ln x = 0$

III. نعتبر الدالة العددية  $h$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $h(x) = \frac{1}{x}(1 + \ln x)$

1. عين دالة أصلية للدالة  $h$  التي تنعدم عند 1.

2. استنتج مساحة الحيز المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  والمستقيمت  $(\Delta)$ ،  $x = e^{-1}$ ،  $x = e$

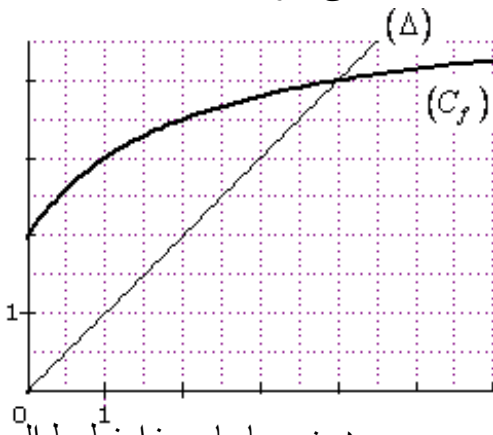
## الموضوع الثاني

### التمرين الأول: (04 نقاط)

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مثلثا المستقيم  $(\Delta)$  و  $(C_f)$  معادلتيهما على الترتيب :

$$y = x \text{ و } y = \frac{5x+4}{x+2} \text{ على المجال } [0; +\infty[$$

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \text{ المتتالية المعرفة بـ:}$$



(أ) انقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية :  $u_2; u_1; u_0$  ، دون حسابها مبرزاً خطوط الرسم .  
(ب) أعط تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  وتقاربها .

I-  $(u_n)$  المتتالية المعرفة بـ  $u_0 = 0$  ، ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  لدينا :  $u_{n+1} = \frac{5u_n+4}{u_n+2}$

1. احسب  $u_1$  و  $u_2$  .
2. أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم  $0 \leq u_n \leq 4$
3. برهن أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة . ماذا تستنتج

II-  $(v_n)$  المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ :  $v_n = \frac{u_n-4}{u_n+1}$

1. بين ان  $(v_n)$  متتالية هندسية ، ثم استنتج عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  .
2. اوجد عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  . ثم استنتج نهاية المتتالية  $(u_n)$  .

### التمرين الثاني : (05 نقاط)

1-  $z_1$  و  $z_2$  عدنان مركبان ، \*حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  ، الجملة التالية :

$$\begin{cases} z_1\sqrt{3} - z_2 = -2 \\ z_1 - z_2\sqrt{3} = -2i \end{cases}$$

2- نعتبر في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد  $(O, i, j)$  ، النقطتين  $A$  و  $B$  ذات اللاحقتين  $z_A$  و  $z_B$  على الترتيب

$$z_A = -\sqrt{3} + i \text{ و } z_B = -1 + i\sqrt{3} \text{ وليكن العدد المركب: } z_C = 1 - i$$

(أ) اكتب  $z_B$  و  $z_A$  على الشكل الأسّي

(ب) اكتب العدد المركب  $L$  على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي حيث:  $L = z_A \cdot z_C$

$$\checkmark \text{ استنتج القيمة المضبوطة لكل من } \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) \text{ و } \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$\checkmark \text{ اوجد قيمة تقريبية لـ: } \tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

- 3- لتكن  $M$  نقطة لاحقتها  $Z$  . أ/ عين طبيعة مجموعة  $(T)$  التي تحقق :  $Z + \sqrt{3} - i = ke^{i\frac{2\pi}{3}}$   
ب/ عين طبيعة المجموعة  $(\Gamma)$  التي تحقق:  $Z + \sqrt{3} - i = 2e^{i\theta}$   
ج) استنتج نقطة تقاطع المجموعتين  $(T)$  و  $(\Gamma)$



### التمرين الثالث : (04 نقاط)

يحتوي صندوق على ثماني كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس وتحمل كل واحدة منها عددا كما هو مبين في الشكل :

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 2 | 2 |
| 0 | 1 | 2 | 4 |

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الصندوق .

I. نعتبر الحدث A : "من بين الكرات الثلاث المسحوبة لا توجد اية كرة تحمل العدد 0"

الحدث B : " جداء الاعداد التي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة يساوي 8"

الحدث C : " من بين الكرات المسحوبة توجد على الاقل كرة تحمل الرقم 2"

✓ احسب كل من  $P(A)$  و  $P(B)$  و  $P(C)$

II. ليكن المتغير العشوائي X الذي يربط كل سحبة بجداء الاعداد التي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة .

أ/ عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون الاحتمال في جدول .

ب/ احسب كل من الامل الرياضي والتباين للمتغير العشوائي X .

### التمرين الرابع: (07 نقاط) المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

I. لتكن g دالة عددية معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = (a - 2x)e^x + b$  ، a و b أعداد حقيقية ،  $(C_g)$  تمثيلها البياني

✓ عين العددان a و b حيث :  $g(x)' - g(x) = -2e^x - 2$

و المنحني  $(C_g)$  يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 معامل توجيهه 1.

II. نعتبر الان الدالة g المعرفة على  $\mathbb{R}$  :  $g(x) = (3 - 2x)e^x + 2$

أ. أدرس تغيرات الدالة g

ب. بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث :  $\alpha \in ]1.68, 1.69[$

ت. استنتج إشارة  $g(x)$

ث. باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب مساحة الحيز المحدد بـ  $(C_g)$  ومحور الفواصل والمستقيمين ذوي المعادلتين

$x = \alpha$  و  $x = 2$  .

III. f دالة عددية معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = 1 + \frac{4x-2}{e^{x+1}}$  ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني .

1. أحسب  $f'(x)$  ثم بين أن :  $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^{x+1})^2}$

2. استنتج إشارة  $f'(x)$  على  $\mathbb{R}$  ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. بين أنه يمكن كتابة  $f(x)$  بالشكل :  $f(x) = 4x - 1 + \frac{(2-4x)e^x}{e^{x+1}}$

✓ استنتج أن  $(C_f)$  يقبل مقارب مائل  $(\Delta)$  عند  $-\infty$  يطلب تعيين معادلته .

✓ أدرس وضعية  $(C_f)$  و  $(\Delta)$

4. بين أن :  $f(\alpha) = 4\alpha - 5$  ، عين حصرا لـ  $f(\alpha)$  .

5. ارسم المنحني  $(C_f)$  .



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

### الموضوع الأول

#### التمرين الأول: (04 نقاط)

صندوق يحتوي على 6 كرات . الكرات متماثلة و لا نفرّق بينها باللمس، تحمل الأعداد  $2, 1, 1, 0, -1, -2$  نسحب عشوائيا و في آن واحد 3 كرات من الكيس .

(1) أحسب احتمال كل من الأحداث التالية :

A "توجد على الأقل كرة تحمل الرقم 1 ."

B "مجموع الأعداد المكتوبة على الكرات المسحوبة معدوم ."

(2) ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع الأرقام المحصل عليها .

(أ) أعط قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  و أحسب أمله الرياضي.

(ب) احسب التباين والانحراف المعياري.

#### التمرين الثاني: (04 نقاط)

في هذا التمرين سوف نقوم بتعيين الأعداد الصحيحة  $N$  التي تحقق الجملة (S) 
$$\begin{cases} N \equiv 5 \pmod{13} \\ N \equiv 1 \pmod{17} \end{cases}$$

(1) تحقق أن العدد 239 حل للجملة (S).

(2) أثبت أن العدد  $N$  يكتب على الشكل  $N = 1 + 17x = 5 + 13y$ ، حيث  $x$  و  $y$  عدنان صحيحان نسبيا يحققان  $17x - 13y = 4$ .

(3) حل في  $Z^2$  المعادلة  $17x - 13y = 4$ ، للمجهولين الصحيحين  $x$  و  $y$ .

(4) استنتج أنه يوجد عدد صحيح  $k$  يحقق  $N = 18 + 221k$ ، ثم استنتج حلول الجملة (S).

#### التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) نعتبر كثير الحدود  $P(z)$  للمتغير المركّب  $z$  المعرّف بـ  $P(z) = z^3 - (8 + 3i)z^2 + (25 + 24i)z - 75i$ .

(أ) أحسب  $P(3i)$  ثم حلّل  $P(z)$  إلى جداء عاملين.

(ب) حل، في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$ ، المعادلة  $P(z) = 0$ .

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . نعتبر النقط  $A, B, C$  و  $D$  التي

$$z_D = 4 - 3i \text{ و } z_C = 3i, z_B = 4 + 3i, z_A = -1 + 2i$$

(أ) علّم النقط  $A, B, C$  و  $D$ . ثم بين أن النقط تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها  $\omega$  ذات اللاحقة  $z_\omega = 2$ .

(ب) أكتب على الشكل الأساسي العددين  $L_1 = \frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$  و  $L_2 = \frac{z_C - z_B}{z_D - z_B}$  ثم استنتج طبيعة المثلثين  $ACD$  و  $BCD$ .

(ج) عين قيمة العدد  $n$  حتى يكون  $((L_1)^{2018})^n$  حقيقي.

(3) ليكن  $T$  الانسحاب الذي شعاعه  $\overrightarrow{AD}$ .

(أ) أكتب العبارة المركبة للانسحاب  $T$ .

(ب) أوجد  $z_E$  لاحقة النقط  $E$  صورة النقط  $C$  بالانسحاب  $T$ ، ثم علّمها.

## التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $g(x) = -x - 1 + e^x$ .

(1) أدرس تغيرات الدالة  $g$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) استنتج أنه من أجل كل  $x$  من  $]0, +\infty[$ ،  $g(x) > 0$ .

II. لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة بـ

$$\begin{cases} f(x) = e^{-x} + \ln(x+1) & x \geq 0 \\ f(x) = \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} + 1 & x < 0 \end{cases}$$

و ليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس للمستوي.

(1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  فسر هندسياً النتيجة.

(2) (أ) بين أن الدالة  $f$  مستمرة عند  $0$ .

(ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  عند  $x_0 = 0$ . فسر هندسياً النتيجة

(3) (أ) عين الدالة المشتقة للدالة  $f$  على  $]0, +\infty[ \cup ]-\infty, 0[$ .

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكّل جدول تغيراتها.

(4) أرسم  $(C_f)$ .

(5) لتكن  $H$  دالة عددية معرفة على  $]0, +\infty[$  بـ  $H(x) = -x - 1 - e^{-x} + (x+1)\ln(x+1)$ ، بين

أن  $H$  دالة أصلية لـ  $f$  على المجال  $]0, +\infty[$ ، ثم أحسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين  $(C_f)$  و

محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتها  $x = 0$  و  $x = 1$ .

انتهى الموضوع الأول

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول: (04 نقاط)

- (1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي  $n$ ، بواقي قسمة العددين  $3^n$  و  $4^n$  على 7.
- (2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ : العدد  $3(1954)^{6n+2} + 6 \times (1439)^{6n+4} + 1$  مضاعف لـ 7.
- (3) أ) أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  بحيث  $u_n = 2 \times 3^n + 3 \times 4^n$ .  
ب) عين الأعداد الطبيعية  $n$  حتى يقبل  $S_n$  القسمة على 7.
- (4) نعتبر المجموع  $S'_n = 4^{n+1} - 3(n+1) - 1$  ، بين أن  $S'_n = C_{n+1}^2 3^2 + C_{n+1}^3 3^3 + \dots + C_{n+1}^{n+1} 3^{n+1}$

### التمرين الثاني: (04 نقاط)

- (1) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. نعتبر النقط  $A(2, 1, 3)$ ،  $B(-3, -1, 7)$  و  $C(3, 2, 4)$ .  
أثبت أن النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  تعين مستويا وحيدا  $(ABC)$ .

$$(2) \text{ ليكن } (\Delta) \text{ المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيط } \begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} . (\Delta)$$

بين أن المستقيم  $(\Delta)$  يُعامد المستوي  $(ABC)$ ، ثم أكتب معادلة ديكرتية للمستوي  $(ABC)$ .

- (3) نسمي  $H$  النقطة المشتركة بين  $(\Delta)$  و  $(ABC)$ .

بين أن  $H$  هي مرجح الجملة المثقلة  $(A, -2); (B, -1); (C, 2)$

- (4) نعتبر  $(T_1), (T_2)$  مجموعتي النقط من الفضاء والتي تحقق :

$$(T_2) : \left\| -2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} \right\| = \sqrt{29} \text{ و } (T_1) : (-2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC})(\vec{MB} - \vec{MC}) = 0$$

عين طبيعة كل من المجموعتين  $(T_1), (T_2)$ ، ثم عين طبيعة تقاطعهما.

### التمرين الثالث: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

عين الاقتراح الصحيح مع التعليل من بين الاقتراحات التالية :

- (1) المعادلة  $z^3 - 2z^2 + 16 = 0$  للمتغير المركب  $z$  حيث  $z_0 = -2$  حلا لها تقبل ثلاث حلول هي:

$$S = -2, 2 + 2i, 2 - 2i \quad (أ) \quad S = -2, 4 + 2i, 4 - 2i \quad (ب) \quad S = 2, 4 + 2i, 4 - 2i \quad (ج)$$

- (2) نعتبر النقطتين  $A, B$  ذات اللواحق  $z_A = 2 + 2i$  و  $z_B = 2 - 2i$  على الترتيب فإن المثلث  $OAB$ :

أ) قائم في  $O$  (ب) قائم في  $O$  ومتساوي الساقين (ج) متساوي الساقين.

- (3) نعتبر التحويل النقطي  $T$  المعرف بـ  $z' = e^{\frac{i\pi}{3}} z$ ، طبيعة هذا التحويل .

أ) تشابه مباشر (ب) تحاكي (ج) دوران.

- (4) لدينا  $z' = e^{\frac{i\pi}{3}} z$  حيث  $\theta$  عمدة العدد المركب  $z$ ، الشكل الجبري للعدد  $z'$  هو :

$$z' = 2 + i \quad (ج) \quad z' = (\cos \frac{\pi}{3}) + i(\sin \frac{\pi}{3}) \quad (ب) \quad z' = (\cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \theta - \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin \theta) + i(\cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin \theta + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \theta) \quad (أ)$$

- (5)  $(T)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي والتي تحقق :  $\arg(z - z_A) = \arg(iz - z_B)$  هي :

أ) المستقيم (AB) ب) دائرة قطرها [AB] ج) نصف دائرة قطرها [AB'] بإستثناء A, B' لاحقتها  $-iz_B$

### التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على المجال بـ:  $]0, +\infty[$  بـ:  $g(x) = x + 2 - 2\ln(x)$ .

(1) أدرس تغيرات الدالة  $g$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) تحقق أن  $g(2) > 0$  ثم استنتج أن  $g(x) > 0$

II. لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $]0, +\infty[$  بـ:  $f(x) = x - \ln(x - 1)^2$

و ليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس للمستوي.

(1) أحسب نهايات الدالة  $f$  بجوار أطراف مجموعة تعريفها. ثم فسر النتائج هندسياً.

(2) أثبت أن إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $g(x)$  ثم استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$ . شكّل جدول تغيراتها.

(3) أثبت أن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = x$  مستقيم مقارب مائل لـ  $(C_f)$ . ثم أدرس الوضع النسبي لـ  $(C_f)$  و  $(\Delta)$ .

(4) بين أن  $f''(x) = \frac{2}{x^2}(\ln x - 2)$  ثم استنتج أن  $(C_f)$  يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

(5) أنشئ  $(C_f)$  و  $(\Delta)$ . ثم ناقش، بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة، ذات المجهول الحقيقي  $x$ ، حيث  $\ln(x - 1)^2 = -m$

انتهى الموضوع الثاني

بالتوفيق في شهادة البكالوريا

اماتعة المادة



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

**التمرين الأول (4 نقاط) :**

(1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  بواقي قسمة العدد  $3^n$  على 10 ثم استنتج باقي قسمة  $A_n$  على 10 حيث

$$A_n = 1993^{16n+6} - 2 \times 1439^{2n+3} + 2018$$

(2) بين انه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $[10]3^{2n}(3n+1) \equiv 2017^{2n+1} + 1439^n(3n+4)$  ثم أستنتج قيم العدد

الطبيعي  $n$  التي يكون من أجلها  $2017^{2n+1} + 1439^n(3n+4)$  مضاعف للعدد 10 .

(3)  $N$  عدد طبيعي يكتب  $\overline{02\alpha\alpha\alpha\alpha\beta}$  في النظام التعداد ذي الأساس 3 و يكتب  $\overline{126\beta}$  في نظام التعداد ذي

الأساس 7 أوجد العددين  $\alpha$  ;  $\beta$  ثم أكتب  $N$  في النظام العشري .

(4) يحتوي كيس على 4 كرات مرقمة ببواقي قسمة  $3^n$  على 10 نسحب عشوائياً كرتين في آن واحد .

أ - أحسب احتمال الحصول على رقمين مجموعهما يساوي مجموع أرقام العدد 2017 .

ب -  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق عملية السحب بمجموع الرقمين المتحصل عليهما

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  ثم أحسب أمله الرياضي.

**التمرين الثاني (4 نقاط) :**

نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بـ  $u_0 = 3$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}$  .

(1) أحسب الحدود  $u_1$  و  $u_2$  و  $u_3$  ثم برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n > 1$  .

(2) بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماماً على  $IN$  ثم أستنتج أنها متقاربة معيماً نهايتها .

(3) نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = u_n^2 - 1$  .

أ - بين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .

ب - أكتب بدلالة  $n$  كلا من  $u_n$  ;  $v_n$  ثم أحسب  $\lim u_n$  .

ج - أحسب بدلالة  $n$  كلا من المجاميع التالية  $S_n = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2$  و

$$L_n = \ln(v_0) + \ln(v_1) + \ln(v_2) + \dots + \ln(v_n) \quad \text{و} \quad T_n = v_0 + 2v_1 + 2^2v_2 + \dots + 2^n v_n$$

## التمرين الثالث (5 نقاط )

نعتبر في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  النقط  $A; B; C; D$  التي لواحقتها على الترتيب

$$z_D = e^{\frac{3\pi}{4}i}; \quad z_C = i\sqrt{2}; \quad z_B = \overline{z_A}; \quad z_A = 1+i$$

و لتكن النقطة  $L$  نظيرة النقطة  $C$  بالنسبة إلى  $D$ .

(1) بين أن لاحقة النقطة  $L$  تساوي  $-\sqrt{2}$ .

(2) أثبت أن النقط  $A; B; C; L$  تنتمي إلى نفس الدائرة  $(C)$  يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

(3) نعتبر النقطة  $K$  ذات اللاحقة  $z_K = -z_B$  و الدوران ذات المركز  $O$  و يحول  $C$  إلى  $K$ .

عين قياس زاوية الدوران  $R$  ثم عين لاحقة النقطة  $L'$  صورة  $L$  بالدوران  $R$  محدداً طبيعة الرباعي  $ABL'K$ .

(4) نعتبر التحويل النقطي  $T$  المعروف بـ:  $T = R \circ h$  حيث  $h$  هو التحاكي الذي نسبته  $\sqrt{2}$  و مركزه  $O$ . حدد طبيعة التحويل  $T$  ثم عين عناصره المميزة.

(5) عين  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوى ذات اللاحقة  $z$  و التي تحقق:  $|z - z_A| = |\overline{z} - 2z_D|$  حيث  $\overline{z}$  مرافق  $z$ .

## التمرين الرابع (7 نقاط )

I - نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $] -1; +\infty[$  بـ  $g(x) = \frac{x}{1+x} - 2\ln(1+x)$ .

أ - أدرس تغيرات الدالة  $g$  على  $] -1; +\infty[$ .

ب-بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلين إحداها معدوم و الآخر  $\alpha$  حيث  $-0,72 < \alpha < -0,71$

ج-استنتج إشارة  $g(x)$

II - نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $] -1,0 [ \cup ] 0; +\infty [$  بـ  $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد

و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  وحدة الطول هي  $2\text{ cm}$ .

(1) أحسب نهايات الدالة  $f$  عند أطراف مجموعة تعريفها.

(2) أدرس تغيرات الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أنشئ المنحنى  $(C_f)$  نضع  $\alpha \approx -0,715$  و  $f(\alpha) \approx -2,46$ .

(4) ليكن  $\lambda$  عدد حقيقي موجب تماماً نضع  $I(\lambda) = \int_1^\lambda f(t)dt$

أ - أعط تفسيراً هندسياً للعدد  $I(\lambda)$  حسب قيم العدد الحقيقي  $\lambda$

ب - بملاحظة أنه من أجل كل  $x$  عدد حقيقي من  $] 1; +\infty [$ :  $\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}$

أحسب  $I(\lambda)$  باستعمال التكامل بالتجزئة ثم احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(\lambda)$

انتهى الموضوع الأول

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول (4 نقاط )

- (1) نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بـ  $u_0 = 0$  من أجل كل عدد طبيعي  $n : u_{n+1} = 3u_n - 2^n$  .  
برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n : u_n \leq 0$  ثم أستنتج أن  $(u_n)$  متناقصة .
- (2) نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n : v_n = 2^n - u_n$  .  
أ - بين أن  $(v_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .  
ب - عبر عن كلا من  $u_n$  و  $v_n$  بدلالة  $n$  .
- (3) أ - أحسب  $\lim u_n$  ماذا تستنتج ؟  
ب - أحسب المجموع  $S_n$  بدلالة  $n$  حيث  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
- (4) أ - أدرس حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  بواقي قسمة  $2^n$  على 5 و بواقي قسمة  $3^n$  على 4  
ب - عين قيم العدد الطبيعي  $n$  التي تحقق  $2018 + 1962^{2^n} + 1439^n \equiv 0 [5]$

### التمرين الثاني (5 نقاط )

- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  و نعتبر النقط  $A; B; C; D; E$  التي لواحقها على الترتيب  
 $z_A = 1$  و  $z_B = 4 + i$  و  $z_C = 3i$  و  $z_D = -1 + i$  و  $z_E = -2i$  .
- (1) بين أن  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{z_E - z_A}{z_D - z_A}$  ثم استنتج أنه يوجد تحويل قطبي  $T$  يحول  $D$  إلى  $E$  و يحول  $B$  إلى  $C$  يطلب تعيين طبيعته و عناصره المميزة .
- (2) عين لاحقة النقطة  $C'$  صورة  $C$  بالتشابه المباشر  $S$  الذي مركزه  $A$  و زاويته  $\frac{\pi}{4}$  و نسبته  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  .
- (3) لتكن  $M$  نقطة من المستوي لاحقتها  $z$  صورتها  $M'$  ذات اللاحقة  $z'$  بالتشابه  $S$  .  
بين أن  $z' = \frac{1}{2}[(1+i)z + 1 - i]$  .
- (4) لتكن  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي ذات اللاحقة  $z$  و التي تحقق  $z = (1+i)(1+e^{i\theta})$  حيث  $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$   
أ - عين طبيعة مجموعة النقط  $(\Gamma)$  لما  $\theta$  يسمح المجال  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  .  
ب - اوجد طبيعة  $(\Gamma')$  صورة  $(\Gamma)$  بالتشابه  $S$  .
- (5) لتكن  $(\gamma)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي ذات اللاحقة  $z$  حيث  $\arg(z - z_B) - \arg(z - z_A) \equiv \pi [2\pi]$  عين طبيعة مجموعة النقط  $(\gamma)$  .



### التمرين الثالث (4 نقاط) :

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  نعتبر النقطتين  $A(12; 7; -13)$  و  $B(3; 1; 2)$  والمستويان  $(P_1): 3x + 2y - 5z - 1 = 0$  و  $(P_2): x + y - 2z = 0$ .

- (1) بين المستويان  $(P_1)$  و  $(P_2)$ . متقاطعان وفق مستقيم يشمل النقطة  $B$  و شعاع توجيهه  $\vec{v}(1; 1; 1)$ .
- (2) أثبت أن  $B$  هي المسقط العمودي للنقطة  $A$  على المستوي  $(P_1)$ .

$$(3) \text{ ليكن } (Q) \text{ المستوي المعروف بتمثيله الوسيطى التالى } (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x = 2\alpha - 2\beta + 6 \\ y = 2\alpha + 3\beta + 5 \\ z = 2\alpha - 6 \end{cases}$$

- أ- بين أن  $(Q)$  و  $(P_1)$  متوازيان
- ب- تحقق أن المعادلة الديكارتية للمستوي  $(Q)$  هي  $3x + 2y - 5z = 58$ .
- ج- تحقق أن  $I$  منتصف القطعة المستقيمة  $[AB]$  تنتمي للمستوي  $(Q)$  ثم أستنتج أن  $(Q)$  هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[AB]$ .
- (4) أ- بين أن  $(S)$  مجموعة النقط  $M$  من الفضاء حيث  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  هي سطح كرة يطلب تعيين عناصره المميزة.
- ب- عين طبيعة مجموعة نقاط تقاطع  $(S)$  والمستوي  $(Q)$ .

### التمرين الرابع (7 نقاط) :

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- (1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $1 - \frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{1 + e^{-x}}$  ثم بين أن  $f$  دالة فردية.
- (2) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

$$(3) \text{ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي } x : f'(x) = -\frac{1}{2} \left( \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2 \text{ ثم شكل جدول تغيرات الدالة } f \text{ على } \mathbb{R}^+$$

$$(4) \text{ أستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب } x : 1 - \frac{2}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2}x$$

$$(5) \text{ أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f(x) - \left( 1 - \frac{1}{2}x \right) \right] \text{ ثم فسر النتيجة هندسياً}$$

$$(6) \text{ أنشئ المستقيم } (\Delta) \text{ ذو المعادلة } y = -\frac{1}{2}x + 1 \text{ و المنحنى } (C_f).$$

$$(7) \text{ أ- بين أن الدالة } x \mapsto \ln(e^{-x} + 1) \text{ دالة أصلية للدالة } x \mapsto -\frac{1}{e^x + 1} \text{ على } \mathbb{R}$$

ب- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  و حامل محور الفواصل و المستقيمان اللذان معادلتهما  $x = 0$  ;  $x = 1$

انتهى الموضوع الثاني

## الموضوع الأول

التمرين الأول (4 نقاط) :

(5) أدراسة بواقي قسمة العدد  $3^n$  على 10 لدينا  $3^0 \equiv 1[10]$

| $n =$        | $4k$ | $4k+1$ | $4k+2$ | $4k+3$ | $k \in \mathbb{N}$ |
|--------------|------|--------|--------|--------|--------------------|
| $3^n \equiv$ | 1    | 3      | 9      | 7      | [10]               |

باقي قسمة  $3^n$  على 10

لما  $n = 4k$  هو 1

و لما  $n = 4k+1$  هو 3

و لما  $n = 4k+2$  هو 9

و لما  $n = 4k+3$  هو 7

استنتاج باقي قسمة  $A_n$  على 10 : لدينا  $1993 \equiv 3[10]$  و منه  $1993^{16n+6} \equiv 3^{16n+6}[10]$  يعني أن

$$1993^{16n+6} \equiv 9[10] \text{ من ما سبق نجد أن } 1993^{16n+6} \equiv 3^{4(4n+1)+2}[10]$$

و لدينا  $1439 \equiv -1[10]$  و منه  $1439^{2n+3} \equiv -1[10]$  إذن  $-2 \times 1439^{2n+3} \equiv 2[10]$

و  $2018 \equiv 8[10]$

بالجمع نجد  $1993^{16n+6} - 2 \times 1439^{2n+3} + 2018 \equiv 9 + 2 + 8[10]$  و منه  $A_n \equiv 9[10]$

باقي قسمة  $A_n$  على 10 هو 9

(6) إثبات انه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $(3n+4) \times 1439^n + 2017^{2n+1} \equiv 3^{2n}(3n+1)[10]$

لدينا  $1439 \equiv 9[10]$  أي أن  $1439 \equiv 3^2[10]$  بالرفع إلى قوى  $n$  نجد  $1439^n \equiv 3^{2n}[10]$  بالضرب في  $3n+4$

$$\text{نجد (1) } (3n+4) \times 1439^n \equiv 3^{2n}(3n+4)[10] \dots\dots\dots$$

و لدينا  $2017 \equiv -3[10]$  بالرفع إلى قوى  $2n+1$  نجد  $2017^{2n+1} \equiv -3^{2n+1}[10] \dots\dots\dots$  (2)

بجمع (1) و (2) نجد  $(3n+4) \times 1439^n + 2017^{2n+1} \equiv 3^{2n}(3n+4) - 3^{2n} \times 3[10]$

$$(3n+4) \times 1439^n + 2017^{2n+1} \equiv 3^{2n}(3n+1)[10]$$

استنتاج قيم العدد الطبيعي  $n$  التي يكون من أجلها  $(3n+4) \times 1439^n + 2017^{2n+1}$  مضاعف للعدد 10 :

يعني أن  $(3n+4) \times 1439^n + 2017^{2n+1} \equiv 0[10]$  مما سبق نجد أنه يعني أن  $3^{2n}(3n+1) \equiv 0[10]$  بما أن 3

و 10 أوليان فيما بينهما فحسب نظرية غوس  $3^{2n}(3n+1) \equiv 0[10]$  يكافئ  $(3n+1) \equiv 0[10]$  يكافئ

$3n \equiv -1[10]$  بالضرب في 3 نجد  $9n \equiv -3[10]$  و  $9 \equiv -1[10]$  إذن  $-n \equiv -3[10]$  بالضرب في -1

نجد  $n \equiv 3[10]$  أي أن  $n = 3 + 10k$  و  $k$  عدد طبيعي .....

(7)  $N$  عدد طبيعي يكتب  $\overline{\alpha\alpha0\alpha\alpha02}$  في النظام التعداد ذي الأساس 3 و يكتب  $\overline{\beta612}$  في نظام التعداد ذي الأساس 7

ننشر  $N$  في النظامين ثلاثة و سبعة نجد

$$N = 2 + 1008\alpha \text{ منه } N = 2 + 9\alpha + 27\alpha + 243\alpha + 729\alpha$$

$$N = 303 + 343\beta \text{ منه } N = 2 + 7 \times 1 + 49 \times 6 + 343 \times \beta$$

$$343\beta = 1008\alpha - 301 \text{ أي أن } 2 + 1008\alpha = 303 + 343\beta \text{ و منه } \alpha \text{ عدد طبيعي أصغر تماماً من 3}$$

$$\text{لما } \alpha = 1 \text{ نجد أن } 343\beta = 1008 - 301 \text{ أي أن } \beta = \frac{707}{343} \text{ مرفوض}$$

$$\text{لما } \alpha = 2 \text{ نجد أن } 343\beta = 2016 - 301 \text{ أي أن } \beta = 5 \text{ مقبول و منه } N = 2018$$

(8) يحتوي كيس على 4 كرات مرقمة ببواقي قسمة  $3^n$  على 10 نسحب عشوائياً كرتين في آن واحد .  
ت - حساب احتمال الحادثة A "الحصول على رقمين مجموعها يساوي مجموع أرقام العدد 2017"

| + | 1  | 3  | 7  | 9 |
|---|----|----|----|---|
| 1 |    |    |    |   |
| 3 | 4  |    |    |   |
| 7 | 8  | 10 |    |   |
| 9 | 10 | 12 | 16 |   |

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ث - المتغير العشوائي الذي يرفق عملية السحب بمجموع الرقمين المتحصل عليهما قيمه هي 4 و 8 و 10 و 12 و 16 .  
قانون الاحتمال

| $x_i$        | 4             | 8             | 10            | 12            | 16            |
|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

$$\text{حساب أمل الرياضياتي : } E(X) = 4\left(\frac{1}{6}\right) + 8\left(\frac{1}{6}\right) + 10\left(\frac{2}{6}\right) + 12\left(\frac{1}{6}\right) + 16\left(\frac{1}{6}\right) \text{ و منه } E(X) = 10$$

**التمرين الثاني (4 نقاط) :**

$$(4) \text{ حساب الحدود } u_1 \text{ و } u_2 \text{ و } u_3 : u_1 = \sqrt{\frac{1+u_0^2}{2}} = \sqrt{5} \text{ و } u_2 = \sqrt{\frac{1+u_1^2}{2}} = \sqrt{3}$$

$$u_3 = \sqrt{\frac{1+u_2^2}{2}} = \sqrt{2}$$

البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n : u_n > 1$  : لدينا  $u_0 > 1$  محققة لان  $3 > 1$

نفرض أن  $u_n > 1$  و لنبرهن أن  $u_{n+1} > 1$

$u_n > 1$  بالتربيع نجد  $u_n^2 > 1$  بإضافة 1 نجد  $1 + u_n^2 > 2$  بالقسمة على 2 نجد  $\frac{1+u_n^2}{2} > 1$  بالجذر نجد  $\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} > 1$  و منه نجد  $u_{n+1} > 1$  محققة

و منه من أجل كل عدد طبيعي  $n : u_n > 1$ .

(5) إثبات أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما على  $IN$  : لدينا

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} - u_n = \frac{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} - u_n\right)\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\frac{1+u_n^2}{2} - u_n^2}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)} = \frac{1 - u_n^2}{2\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)} = \frac{(1+u_n)(1-u_n)}{2\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)}$$

متناقصة .  $(u_n)$

بما أن  $(u_n)$  متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة .

ولتكن نهايتها هي  $l$  :  $\lim u_{n+1} = \lim \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}$  يعني أن  $l = \sqrt{\frac{1+l^2}{2}}$  يكافئ  $l^2 = 1$  و منه  $l = 1$

(6) نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = u_n^2 - 1$

ت-إثبات أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول :

$$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 1 = \frac{1+u_n^2}{2} - 1 = \frac{u_n^2 - 1}{2} = \frac{1}{2} v_n$$

$v_0 = u_0^2 - 1 = 8$

ث-الكتابة بدلالة  $n$  كلا من  $u_n$  ;  $v_n$  :  $v_n = v_0 \cdot q^n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-3}}$  و لدينا  $v_n = u_n^2 - 1$  و منه

$$u_n = \sqrt{\frac{1}{2^{n-3}} + 1} \quad \text{و} \quad u_n = \sqrt{v_n + 1}$$

حساب النهاية  $\lim u_n = 1$ .

ج-حساب بدلالة  $n$  كلا من المجاميع التالية :

• لدينا

$u_n^2 = 1 + v_n$  و  $v_n = u_n^2 - 1$  و منه  $S_n = (1 + v_0) + (1 + v_1) + (1 + v_2) + \dots + (1 + v_n)$  أي أن

$$S_n = (n+1) + 16 \left( 1 + \frac{1}{2^{n+1}} \right) \text{ و منه } S_n = (n+1) + v_0 \frac{1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

• حساب المجموع  $T_n$  لدينا  $v_n = \frac{1}{2^{n-3}}$  و منه  $w_n = 2^n v_n = 2^3 = 8$  إذن  $(w_n)$  متتالية ثابتة إذن

$$T_n = v_0 + 2v_1 + 2^2v_2 + \dots + 2^n v_n \text{ أي } T_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n \text{ و منه } T_n = 8(n+1)$$

• حساب المجموع  $L_n$  لدينا  $v_n = \frac{1}{2^{n-3}}$  و منه  $k_n = \ln(v_n) = (3-n)\ln(2)$  إذن  $(k_n)$  متتالية حسابية أساسها  $\ln(2)$

و منه  $L_n = \ln(v_0) + \ln(v_1) + \ln(v_2) + \dots + \ln(v_n)$  أي أن  $L_n = k_0 + k_1 + k_2 + \dots + k_n$  و منه

$$L_n = \frac{n+1}{2} [3\ln(2) + (3-n)\ln(2)] \text{ إذن } L_n = \frac{n+1}{2} [k_0 + k_n]$$

$$\text{و منه } L_n = \frac{(n+1)(6-n)\ln(2)}{2}$$

### التمرين الثالث (5 نقاط)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  النقط  $A; B; C; D$  التي لواحقها على الترتيب

$$z_A = 1+i; \quad z_B = \overline{z_A}; \quad z_C = i\sqrt{2}; \quad z_D = e^{\frac{3\pi i}{4}}.$$

و لتكن النقطة  $L$  نظيرة النقطة  $C$  بالنسبة إلى  $D$ .

(6) إثبات أن لاحقة النقطة  $L$  تساوي  $-\sqrt{2}$  : لدينا النقطة  $L$  نظيرة النقطة  $C$  بالنسبة إلى  $D$  يعني أن  $\overrightarrow{LD} = \overrightarrow{DC}$  يعني

$$\text{أن } z_D - z_L = z_C - z_D \text{ و منه } z_L = 2z_D + z_C \text{ أي } z_L = 2e^{\frac{3\pi i}{4}} + i\sqrt{2}$$

$$\text{يكافئ } z_L = 2 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + i\sqrt{2} = -\sqrt{2} \text{ و هو المطلوب.}$$

(7) إثبات أن النقط  $A; B; C; L$  تنتمي إلى نفس الدائرة  $(C)$  بما أن

$$|z_A| = \sqrt{2}; \quad |z_B| = \sqrt{2}; \quad |z_C| = \sqrt{2}; \quad |z_L| = \sqrt{2} \text{ فإن النقط تنتمي إلى الدائرة } (C) \text{ ذات المركز } O \text{ و نصف القطر } \sqrt{2}.$$

(8) نعتبر النقطة  $K$  ذات اللاحقة  $z_K = -z_B$  و  $R$  الدوران ذات المركز  $O$  و يحول  $C$  إلى  $K$  أي أن

$$R(O) = O ; R(C) = K \text{ يعني أن زاوية الدوران هي } \arg\left(\frac{z_K}{z_C}\right) \text{ لدينا}$$

$$\arg\left(\frac{z_K}{z_C}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ منه } \left(\frac{z_K}{z_C}\right) = \left(\frac{-z_B}{z_C}\right) = \left(\frac{-1+i}{i\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

تعيين لاحقة النقطة  $L'$  صورة  $L$  بالدوران  $R$  : العبارة المركبة هي  $z' = e^{\frac{\pi}{4}i} z$  و منه  $z_{L'} = e^{\frac{\pi}{4}i} z_L$  أي أن

$$z_{L'} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-\sqrt{2}) \text{ و } z_{L'} = -1 - i \text{ منه}$$

طبيعة الرباعي  $ABL'K$  : لدينا  $z_{L'} = -z_A$  ;  $z_K = -z_B$  و منه  $|z_K - z_B| = |z_{L'} - z_A| = 2|z_A| = 2\sqrt{2}$  إذن قطرا الرباعي متقايسان و

$$\arg\left(\frac{z_A - z_{L'}}{z_B - z_K}\right) = \arg\left(\frac{2z_A}{2z_B}\right) = \arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = 2\arg(z_A) = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

هو مربع قطراه متقايسان و متعامدان

(9) نعتبر التحويل النقطي  $T$  المعروف بـ :  $T = R \circ h$  حيث  $h$  هو التحاكي الذي نسبته  $\sqrt{2}$  و مركزه  $O$  لدينا

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{2}z \\ z' = e^{\frac{\pi}{4}i} z_1 \end{cases} \text{ أي أن } \underbrace{z \xrightarrow{h} z_1 \xrightarrow{R} z'}_T$$

مركزه  $O$  و زاويته  $\frac{\pi}{4}$ .

(10) تعيين  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي ذات اللاحقة  $z$  و التي تحقق :  $|z - z_A| = |\bar{z} - 2z_D|$  يعني أن

$$|z - z_A| = |z - 2\bar{z}_D| \text{ يعني أن } MA = MN \text{ حيث } N \text{ النقطة ذات اللاحقة } 2\bar{z}_D \text{ و منه مجموعة النقط } (\Gamma) \text{ هي محور القطعة المستقيمة } [AN].$$

**التمرين الرابع (7 نقاط) :**

III - نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $]-1; +\infty[$  بـ  $g(x) = \frac{x}{1+x} - 2\ln(1+x)$ .

ب - دراسة تغيرات الدالة  $g$  على  $]-1; +\infty[$ .

$$\text{النهايات : } \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x - 2(1+x)\ln(1+x)}{1+x} \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \text{ و منه}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{1+x} = -\infty \text{ أي أن } \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x - 2(1+x)\ln(1+x)}{1+x}$$

لان  $\lim_{x \rightarrow -1^+} (1+x)\ln(1+x) = 0$

المشتقة :  $g'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{2}{1+x} = \frac{-1-2x}{(1+x)^2}$  إشارتها سالبة على المجال  $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$  و منه

الدالة  $g$  متناقصة على هذا المجال و متزايدة على المجال  $\left]-1; -\frac{1}{2}\right]$ .

ت-إثبات أن المعادلة  $g(x)=0$  تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر  $\alpha$  حيث  $-0,72 < \alpha < -0,71$

بما أن  $g(0)=0$  منه المعادلة  $g(x)=0$  تقبل حل معدوم .

ولدينا  $g(-0,71)=0,03$  و  $g(-0,72)=-0,03$  بما الدالة  $g$  متزايدة تماما على  $\left]-1; -\frac{1}{2}\right]$  و

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x)=0$  تقبل حلا وحيد  $\alpha$  حيث  $-0,72 < \alpha < -0,71$

| $x$ | -1 | $\alpha$ | 0 | $+\infty$ |
|-----|----|----------|---|-----------|
| $g$ | —  | 0        | + | —         |

ج-استنتاج إشارة  $g(x)$  :

IV - نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $]0; +\infty[ \cup ]-1, 0]$  بـ  $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}$

(5) حساب نهايات الدالة  $f$  عند أطراف مجموعة تعريفها :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{1+x} \times \frac{1}{x} \right] = +\infty \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ \frac{1}{1+x} \times \frac{1}{x} \right] = -\infty$$

(6) دراسة تغيرات الدالة  $f$  :  $f'(x) = \frac{x^2 - 2x \ln(1+x)}{1+x} = \frac{x \cdot g(x)}{x^4}$  و منه إشارتها من إشارة البسط

| $x$                  | -1 | $\alpha$ | 0 | $+\infty$ |
|----------------------|----|----------|---|-----------|
| إشارة $g(x)$         | —  | 0        | + | —         |
| إشارة $x$            | —  | —        | 0 | +         |
| إشارة $x \cdot g(x)$ | +  | —        | 0 | —         |

من جدول الإشارة نستنتج أن  $f$  متزايدة على المجال

$]-1; \alpha]$  و متناقصة على المجالين  $[\alpha; 0]$  و

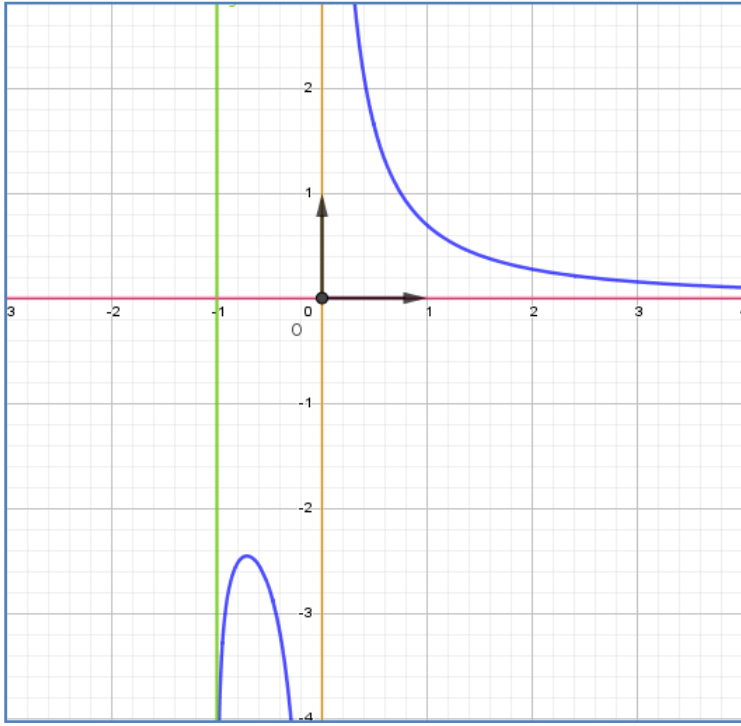
$]0; +\infty[$ .

جدول تغيراتها :

| $x$     | -1        | $\alpha$    | 0         | $+\infty$ |
|---------|-----------|-------------|-----------|-----------|
| $f'(x)$ | +         | 0           | —         | —         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $f(\alpha)$ | $+\infty$ | 0         |



## (7) إنشاء المنحنى $(C_f)$



(8) ليكن  $\lambda$  عدد حقيقي موجب تماماً نضع

$$I(\lambda) = \int_1^\lambda f(t) dt$$

ت-تفسيراً هندسياً للعدد  $I(\lambda)$  حسب قيم العدد

الحقيقي  $\lambda$ :

- لما  $\lambda > 1$  فإن  $I(\lambda)$  هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  والمستقيمتين التي معادلتها  $x=1$  ;  $x=\lambda$  ;  $y=0$ .
- لما  $0 < \lambda < 1$  فإن  $-I(\lambda)$  هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  والمستقيمتين التي معادلتها  $x=1$  ;  $x=\lambda$  ;  $y=0$ .

ث- بملاحظة أنه من أجل كل  $x$  عدد حقيقي من

$$\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \quad : ]1; +\infty[$$

$$\text{حساب } I(\lambda) : I(\lambda) = \int_1^\lambda f(t) dt = \int_1^\lambda \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt = -\frac{\ln(1+t)}{t} \Big|_1^\lambda + \int_1^\lambda \frac{1}{t(1+t)} dt$$

$$\text{و منه } I(\lambda) = -\frac{\ln(1+\lambda)}{\lambda} + \ln(2) + [\ln(t) - \ln(1+t)]_1^\lambda \quad \text{إذن } I(\lambda) = -\frac{\ln(1+\lambda)}{\lambda} + \ln(2) + \int_1^\lambda \left[ \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right] dt$$

$$\text{و منه } I(\lambda) = -\frac{\ln(1+\lambda)}{\lambda} + 2\ln(2) + \ln\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right) \quad \text{و منه } I(\lambda) = -\frac{\ln(1+\lambda)}{\lambda} + \ln(2) + \ln\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda) = 2\ln(2) : \lim_{x \rightarrow +\infty} I(\lambda) \quad \text{حساب}$$

انتهى الموضوع الأول

(5) نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بـ  $u_0 = 0$  من أجل كل عدد طبيعي  $n : u_{n+1} = 3u_n - 2^n$ .

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n : u_n \leq 0$  : لدينا  $u_0 \leq 0$  محققة

نفرض أن  $u_n \leq 0$  و لبرهن أن  $u_{n+1} \leq 0$

$u_n \leq 0$  يعني أن  $3u_n \leq 0$  و منه  $3u_n - 2^n \leq -2^n$  و  $-2^n \leq 0$  و منه  $u_{n+1} \leq 0$  محققة إذن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n : u_n \leq 0$ .

لدينا  $u_{n+1} - u_n = 2u_n - 2^n = 2(u_n - 2^{n-1})$  و  $u_n \leq 0$  إذن الفرق سالب إذن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة.

(6) نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n : v_n = 2^n - u_n$ .

ت - إثبات أن  $(v_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول : لدينا  $v_{n+1} = 2^{n+1} - u_{n+1} = 2 \times 2^n - 3u_n + 2^n$ .

أن  $v_{n+1} = 2^{n+1} - u_{n+1} = 3 \times 2^n - 3u_n = 3(2^n - u_n) = 3v_n$  و منه المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها 3 و حدها

الأول  $v_0 = 2^0 - u_0 = 1$ .

ث - تعبير عن كلا من  $u_n$  و  $v_n$  بدلالة  $n$  :  $u_n = 2^n - 3^n$  و  $v_n = 3^n$

(7) أ - حساب  $\lim u_n = \lim [2^n - 3^n] = \lim 3^n \left[ \left( \frac{2}{3} \right)^n - 1 \right] = -\infty$  و منه المتتالية  $(u_n)$  متباعدة.

ب - حساب المجموع  $S_n$  بدلالة  $n$  حيث  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  و منه

$$S_n = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} - \frac{1-3^{n+1}}{1-3} \quad \text{و} \quad S_n = (2^0 - 3^0) + (2^1 - 3^1) + (2^2 - 3^2) + \dots + (2^n - 3^n)$$

$$S_n = -\frac{1}{2} + 2^{n+1} - 3^{n+1} \quad \text{إذن} \quad S_n = -1 + 2^{n+1} + \frac{1}{2}(1 - 3^{n+1})$$

(8) أ - الدراسة حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  بواقي قسمة  $2^n$  على 5

|              |      |        |        |        |     |
|--------------|------|--------|--------|--------|-----|
| $n =$        | $4k$ | $4k+1$ | $4k+2$ | $4k+3$ |     |
| $2^n \equiv$ | 1    | 2      | 4      | 3      | [5] |

و منه لما  $n = 4k$  فإن باقي قسمة  $2^n$  على 5 هو 1 و لما  $n = 4k+1$  فإن باقي قسمة  $2^n$  على 5 هو 2

لما  $n = 4k+2$  فإن باقي قسمة  $2^n$  على 5 هو 4 و لما  $n = 4k+3$  فإن باقي قسمة  $2^n$  على 5 هو 3.

و بواقي قسمة  $3^n$  على 4

|              |      |        |     |
|--------------|------|--------|-----|
| $n =$        | $2k$ | $4k+1$ |     |
| $3^n \equiv$ | 1    | 3      | [4] |

و منه لما  $n = 2k$  فإن باقي قسمة  $3^n$  على 4 هو 1 و لما  $n = 2k+1$  فإن باقي قسمة  $3^n$  على 4 هو 3.

ب - تعيين قيم العدد الطبيعي  $n$  التي تحقق  $2018 + 1962^{2^n} + 1439^n \equiv 0[5]$  لدينا  $2018 \equiv 3[5]$  و

$1962 \equiv 2[5]$  و منه  $2^{2^n} \equiv 0[5]$  و  $1439 \equiv 9[5]$  و منه  $1439^n \equiv 3^{2^n}[5]$  إذن

$$2018+1962^{2n}+1439^n \equiv 3+2^{2n}+3^{2n} [5] \text{ يكافئ أن}$$

$$2018+1962^{2n}+1439^n \equiv 3+4^n+9^n [5] \text{ ولدينا } 9 \equiv 1 [5] \text{ و } 4 \equiv -1 [5] \text{ و منه } 9^n \equiv 1 [5] \text{ أي أن}$$

$$2018+1962^{2n}+1439^n \equiv 4+(-1)^n [5] \text{ حتى يكون } 2018+1962^{2n}+1439^n \equiv 0 [5] \text{ يجب أن}$$

يكون  $n$  عدد زوجي .

### التمرين الثالث (5 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  ونعتبر النقط  $E; D; C; B; A$  التي لواحقها على الترتيب  $z_E = -2i$  و  $z_D = -1+i$  و  $z_C = 3i$  و  $z_B = 4+i$  و  $z_A = 1$

$$(6) \text{ إثبات أن } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3i-1}{4+i-1} = \frac{3i-1}{3+i} = \frac{i(3+i)}{3+i} = i \text{ لدينا } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{z_E - z_A}{z_D - z_A}$$

$$\cdot \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{z_E - z_A}{z_D - z_A} \text{ و منه } \frac{z_E - z_A}{z_D - z_A} = \frac{-2i-1}{-1+i-1} = \frac{i(-2+i)}{-2+i} = i$$

نستنتج أنه يوجد تحويل نقطي  $T$  يحول  $D$  إلى  $E$  و يحول  $B$  إلى  $C$  و هو الدوران الذي مركزه  $A$  و زاويته

$$\arg(i) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$(7) \text{ تعيين لاحقة النقطة } C' \text{ صورة } C \text{ بالتشابه المباشر } S \text{ الذي مركزه } A \text{ و زاويته } \frac{\pi}{4} \text{ و نسبته } \frac{\sqrt{2}}{2} :$$

$$z_{C'} = \frac{1}{2}(1+i)3i + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) = i-1 \text{ و منه } z_{C'} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi i}{4}} z_C + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi i}{4}}\right) z_A$$

$$(8) \text{ لتكن } M \text{ نقطة من المستوي لاحقتها } z \text{ صورتها } M' \text{ ذات اللاحقة } z' \text{ بالتشابه } S.$$

$$\text{إثبات أن } z' = \frac{1}{2}[(1+i)z + 1-i] \text{ لدينا } z' = \frac{1}{2}(1+i)z + \frac{1}{2}(1-i) \text{ و } z' = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi i}{4}} z + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi i}{4}}\right) z_A \text{ و منه}$$

$$z' = \frac{1}{2}[(1+i)z + 1-i]$$

$$(9) \text{ لتكن } (\Gamma) \text{ مجموعة النقط } M \text{ من المستوي ذات اللاحقة } z \text{ و التي تحقق } z = (1+i)(1+e^{i\theta}) \text{ حيث } \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{تعيين طبيعة مجموعة النقط } (\Gamma) \text{ لما } \theta \text{ يسمح المجال } \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ لدينا } z = (1+i) + (1+i)e^{i\theta} \text{ و منه}$$

$$z - (1+i) = (1+i)e^{i\theta} \text{ يعني أن } |z - (1+i)| = |1+i| \text{ يعني أن } |z - (1+i)| = \sqrt{2} \text{ و } MD = \sqrt{2}$$

$$\text{منه لما } \theta \text{ يسمح المجال } \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ هي قوس من دائرة أي هي ربع الدائرة ذات المركز } D \text{ و نصف القطر } \sqrt{2}$$

$$\text{ث - طبيعة } (\Gamma') \text{ صورة } (\Gamma) \text{ بالتشابه } S \text{ هي ربع دائرة مركزها هو } D' \text{ ذو اللاحقة}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = 1 \text{ و نصف قطرها } z_{D'} = \frac{1}{2}[(1+i)^2 + 1-i] = \frac{1}{2}(1+i)$$

$$(10) \text{ لتكن } (\gamma) \text{ مجموعة النقط } M \text{ من المستوي ذات اللاحقة } z \text{ حيث } \arg(z - z_B) - \arg(z - z_A) \equiv \pi [2\pi]$$

طبيعة مجموعة النقط  $(\gamma)$  :  $\arg(z - z_B) - \arg(z - z_A) \equiv \pi[2\pi]$  يكافئ  $\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) \equiv \pi[2\pi]$  يكافئ  $\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) \equiv \pi[2\pi]$  .  
 $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) \equiv \pi[2\pi]$  مجموعة النقط هي القطعة المستقيمة  $[AB]$  .

### التمرين الثالث (4 نقاط) :

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  نعتبر النقطتين  $A(12; 7; -13)$  و  $B(3; 1; 2)$  و المستويان  $(P_1): 3x + 2y - 5z - 1 = 0$  و  $(P_2): x + y - 2z = 0$  .

(5) إثبات أن المستويان  $(P_1)$  و  $(P_2)$  متقاطعان بما أن شعاعيهما الناظميان على الترتيب  $\vec{n}_1(3; 2; -5)$  و  $\vec{n}_2(1; 1; -2)$  غير مرتبطان خطياً لأن  $\frac{3}{1} \neq \frac{2}{1}$  فهما متقاطعان وفق مستقيم

$B \in (P_1)$  يعني أن  $3(3) + 2(1) - 5(2) - 1 = 0$  أي أن  $0 = 0$  محققة

$B \in (P_2)$  يعني أن  $(3) + (1) - 2(2) = 0$  أي أن محققة و منه  $B$  تنتمي إلى مستقيم التقاطع .

لدينا  $\vec{n}_1 \cdot \vec{v} = 3 + 2 - 5 = 0$  و  $\vec{n}_2 \cdot \vec{v} = 1 + 1 - 2 = 0$  و منه شعاع توجيه مستقيم التقاطع هو  $\vec{v}(1; 1; 1)$

(6) إثبات أن  $B$  هي المسقط العمودي للنقطة  $A$  على المستوي  $(P_1)$  : يعني أن  $B \in (P_1)$  محققة

و  $\overrightarrow{AB}(-9; -6; 15)$  مرتبط خطياً مع  $\vec{n}_1(3; 2; -5)$  لدينا  $\frac{-9}{3} = \frac{-6}{2} = \frac{15}{-5} = -3$  و منه محققة .

(7) ليكن  $(Q)$  المستوي المعروف بتمثيله الوسيطى التالى  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$  :  

$$\begin{cases} x = 2\alpha - 2\beta + 6 \\ y = 2\alpha + 3\beta + 5 \\ z = 2\alpha - 6 \end{cases}$$

ت-إثبات أن  $(Q)$  و  $(P_1)$  متوازيان يعني أن الشعاع  $\vec{n}_1(3; 2; -5)$  عمودي على الشعاعين المعينين للمستوي  $(Q)$  و هما  $\vec{v}_1(2; 2; 2)$  و  $\vec{v}_2(-2; 3; 0)$  :

$\vec{n}_1 \cdot \vec{v}_1 = 3(2) + 2(2) - 5(2) = 0$  و  $\vec{n}_1 \cdot \vec{v}_2 = 3(-2) + 2(3) - 5(0) = 0$  محققة .

ث-التحقق أن المعادلة الديكارية للمستوي  $(Q)$  هي  $3x + 2y - 5z = 58$  نعوض التمثيل الوسيطى في المعادلة الديكارية  $3(2\alpha - 2\beta + 6) + 2(2\alpha + 3\beta + 5) - 5(2\alpha - 6) = 58$  يكافئ  $58 = 58$  محققة .

ج-التحقق أن  $I$  منتصف القطعة المستقيمة  $[AB]$  تنتمي للمستوي  $(Q)$  : لدينا  $I\left(\frac{15}{2}; 4; -\frac{11}{2}\right)$  بالتعويض في المعادلة

الديكارية للمستوي  $(Q)$  :  $3\left(\frac{15}{2}\right) + 2(4) - 5\left(-\frac{11}{2}\right) = 58$  محققة

و بما أن  $\vec{n}_1(3; 2; -5)$  الشعاع الناظمي للمستوي  $(Q)$  و  $\overrightarrow{AB}(-9; -6; 15)$  مرتبطان خطياً و المستوي يشمل  $I$  فهو المستوي المحور للقطعة المستقيمة  $[AB]$  .

(8) أ-إثبات أن  $(S)$  مجموعة النقط  $M$  من الفضاء حيث  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  هي سطح كرة ذات القطر  $[AB]$

أو بطريقة أخرى  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  يكافئ  $(x-12)(x-3) + (y-7)(y-1) + (z+13)(z-2) = 0$  يكافئ

$x^2 + y^2 + z^2 - 15x - 8y + 11z + 17 = 0$  و هي سطح الكرة الذي مركزه  $I\left(\frac{15}{2}; 4; -\frac{11}{2}\right)$  و نصف قطره

$$\frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{342}}{2}$$

ب- تعيين طبيعة مجموعة نقاط تقاطع (S) والمستوي (Q) بما أن I نقطة من المستوي (Q) يعني أن (S) والمستوي (Q) يتقاطعان وفق دائرة مركزها  $I\left(\frac{15}{2}; 4; -\frac{11}{2}\right)$  و نصف قطرها هو  $\frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{342}}{2}$ .

### التمرين الرابع (7 نقاط) :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بـ  $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

$$(8) \text{ التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي } x : 1 - \frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

$$\text{لدينا بتوحيد المقامات نجد } 1 - \frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{\frac{1}{e^{-x}}}{\frac{1}{e^{-x}} + 1} = \frac{1}{1 + e^{-x}} \text{ محققة .}$$

بما أن IR متناظرة بالنسبة O و

$$f(-x) = 1 - \frac{1}{2}(-x) - \frac{2}{e^{-x} + 1} = 1 + \frac{1}{2}x - 2\left[1 - \frac{1}{e^x + 1}\right] = -1 + \frac{1}{2}x + \frac{2}{e^x + 1} = -f(x)$$

فإن f دالة فردية .

$$(9) \text{ حساب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) : \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}\right] = -\infty$$

$$(10) \text{ إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي } x : f'(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{-(e^x + 1)^2 + 4e^x}{2(e^x + 1)^2} = \frac{-(e^x - 1)^2}{2(e^x + 1)^2} \text{ محققة}$$

• جدول تغيرات الدالة f على  $IR^+$  بما أن  $f'(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$  فإن الدالة f متناقصة على  $IR^+$

|       |   |           |
|-------|---|-----------|
| x     | 0 | $+\infty$ |
| f'(x) |   | —         |
| f(x)  | 0 | $+\infty$ |

(11) استنتاج انه من أجل كل عدد حقيقي موجب x :

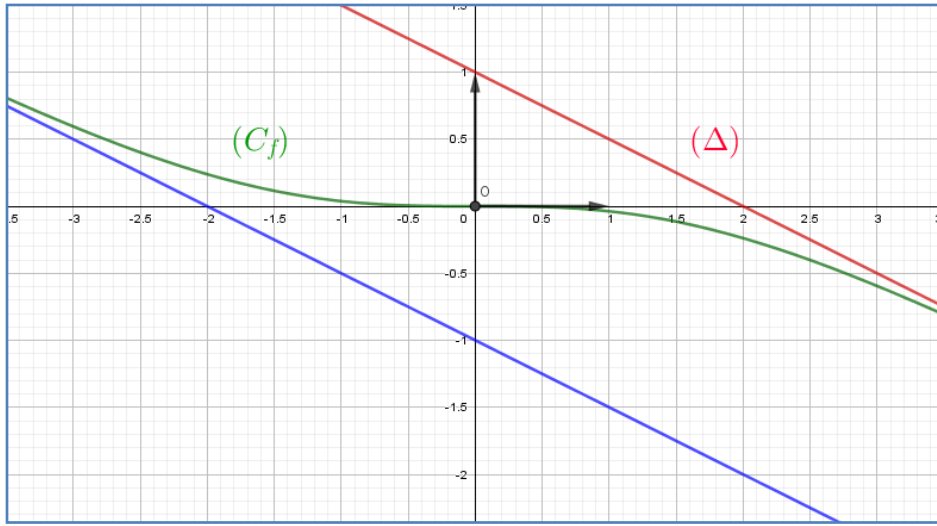
$$1 - \frac{2}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2}x \text{ من جدول تغيرات الدالة } f \text{ نلاحظ أن الدالة تقبل قيمة حدية كبرى هي 0 أي أنه من أجل كل عدد حقيقي}$$

$$\text{موجب } x : f(x) \leq 0 \text{ أي أن } 1 - \frac{2}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2}x$$

$$(12) \text{ حساب } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{e^x + 1} = 0 : \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right) \right]$$

التفسير الهندسية : من ما سبق نستنتج أن المنحنى  $(C_f)$  له مستقيم مقارب معادلته  $y = 1 - \frac{1}{2}x$  جهة  $+\infty$ .

(13) إنشاء المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  
 $y = -\frac{1}{2}x + 1$  و المنحنى  $(C_f)$ :



(14) أ-إثبات أن الدالة  $x \mapsto \ln(e^{-x} + 1)$  دالة أصلية للدالة  $x \mapsto -\frac{1}{e^x + 1}$  على  $\mathbb{R}$  بالاشتقاق:

دالتها المشتقة هي  $x \mapsto \frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1}$  بالضرب في  $e^x$  في البسط و المقام نجد  $x \mapsto \frac{-1}{1 + e^x}$  و منه محققة .

ب-حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  و حامل محور الفواصل و المستقيمان اللذان معادلاتهما  $x = 0$  ;  $x = 1$

$$A = \int_0^1 -f(t)dt = \int_0^1 \left[ -1 + \frac{1}{2}t + \frac{2}{e^t + 1} \right] dt = \left[ -t + \frac{1}{4}t^2 - 2\ln(e^{-t} + 1) \right]_0^1$$

$$A = \left[ -\frac{3}{4} - 2\ln\left(\frac{1}{e} + 1\right) + 2\ln(2) \right] u.a \approx 0,01 u.a$$

انتهى الموضوع الثاني

# الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية  
مديرية التربية لولاية سعيدة  
ثانوية الدكتور يوسف الدمرجي

البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات  
\*\*\*دورة ماي 2018\*\*\*

المدة: 4 ساعات ونصف .

تقني رياضي .

المستوى السنة الثالثة :

\*\*\*\* على الطالب أن يختار أحد الموضوعين التاليين \*\*\*\*

## الموضوع الأول

**التمرين الأول: ( 04.00 نقاط )**

يحتوي كيس غير شفاف على 4 كريات تحمل العدد  $a$  و 5 كريات تحمل العدد  $(a-1)$  لا نفرق بينها عند اللمس ، نسحب عشوائيا من هذا الكيس ثلاث كريات دفعة واحدة .

(1) أحسب احتمال الحادثتين التاليتين :

A : سحب ثلاث كريات تحمل نفس العدد .

B : سحب كريتين بالضبط تحمل نفس العدد .

(2) نعرف المتغير العشوائي  $X$  وهو الذي يأخذ مجموع الأعداد المسجلة على الكريات المسحوبة .

أ - عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي  $X$  .

ب - أكتب قانون الإحتمال للمتغير العشوائي  $X$  .

ج - أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي  $E(X)$  بدلالة  $a$  ثم حدد قيمة  $a$  من أجل  $E(X)=0$  .

**التمرين الثاني: ( 04.00 نقاط )**

ليكن كثير الحدود  $P(z)$  للمتغير المركب  $z$  والمعروف كما يلي :  $p(z) = (iz + 4)(z + 1 - 6i)(z - 3 + 2i)$

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $p(z) = 0$  .

II. نعتبر في المستوي المركب المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$

النقط A ، B ، C لواقعها على الترتيب  $3-2i$  ،  $-1+6i$  ،  $4i$  .

(1) أ - أكتب العدد  $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$  على الشكل الأسّي ، ماذا تستنتج ؟ .

ب - حدد طبيعة التحويل  $h$  الذي مركزه C و يحول A إلى B مع تحديد العناصر المميزة له .

(2) لتكن  $\Omega$  نقطة من محور الفواصل مركز الدوران  $\Re$  الذي يحول A إلى B يطلب تحديد زاويته  $\beta$  .

(3) لتكن  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M(x,y)$  من المستوي ذات اللاقطة  $Z$  والتي تحقق :  $|Z - 4i| = \sqrt{5}$  .

أ - عين طبيعة المجموعة  $(\Gamma)$  ثم تحقق أن النقطة B تنتمي إلى  $(\Gamma)$  .

ب - عين  $(\gamma)$  صورة  $(\Gamma)$  بالتحويل  $h$  و  $(\gamma')$  صورة  $(\Gamma)$  بالدوران  $\Re$  مع تحديد العناصر المميزة لكل منهما .

\*\*\*الصفحة 4/1\*\*\*

( $u_n$ ) متتالية عددية معرفة بحددها الأول  $u_0 = \frac{1}{5}$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$ .

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 < u_n < \frac{1}{2}$ .
2. أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n + 1}$  ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية ( $u_n$ ) .  
ب) بين أن المتتالية ( $u_n$ ) متقاربة ثم أحسب نهايتها .
3. لتكن المتتالية العددية ( $v_n$ ) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  كمايلي :  $v_n = \frac{5^n u_n}{2u_n - 1}$  .  
أ - بين أن المتتالية ( $v_n$ ) هندسية أساسها 10 يطلب حساب حددها الأول .  
ب - أكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم بين أن  $u_n = \frac{2^n}{2^{n+1} + 3}$  ، أحسب نهاية ( $u_n$ ) .
4. أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  :  $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$  .

التمرين الرابع: (07.00 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  كمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - \ln x^2) + 1 & ; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

و ( $C_f$ ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ( $O, \vec{i}, \vec{j}$ ) . (الوحدة 2cm)

1 أ - أحسب:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  .

ب - أدرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  عند 0 ثم فسر النتيجة هندسيا .

2 أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها .

3 بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha$  حيث :  $\alpha \geq 0$  و  $f(\alpha) = 0$  ثم تحقق أن :  $4,6 < \alpha < 4,7$  .

4 أكتب معادلة للمستقيم ( $\Delta$ ) مماس للمنحنى ( $C_f$ ) في النقطة ذات الفاصلة 1 .

II. لتكن الدالة  $g$  المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  كمايلي :  $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$  .

1 أ - أحسب  $g'(x)$  و  $g''(x)$  ثم أدرس اتجاه تغير الدالة  $g'(x)$  ثم استنتج إشارتها على المجال  $[0; +\infty[$  .

ب - حدد اتجاه تغير الدالة  $g(x)$  ، ثم استنتج وضعية ( $C_f$ ) بالنسبة إلى المستقيم ( $\Delta$ ) .

ج - أنشئ : ( $\Delta$ ) و ( $C_f$ ) .

2 من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم نضع :  $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 \ln x dx$

أ - باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب  $I_n$  بدلالة  $n$  .

ب - استنتج بدلالة  $n$  المساحة  $A(n)$  بـ  $cm^2$  للحيز المستوي المحدد بالمستقيم ( $\Delta$ ) والمنحنى ( $C_f$ )

والمستقيمين اللذين معادلتيهما  $x=1$  و  $x = \frac{1}{n}$  ، ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(n)$  .

\*\*\*الصفحة 4/2\*\*\*



## الموضوع الثاني

التمرين الأول : ( 05.00 نقط )

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة : (1)  $z^2 - 2z + 2 = 0$ .....

II. نعتبر في المستوي المركب المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$

النقط  $A, B, C, M$  لواقعها على الترتيب  $1+i, 1-i, 2+\beta i, z=x+iy$ ، (حيث  $x, y, \beta$  أعداد حقيقية و  $\beta < 0$ ) .

وليكن العدد المركب  $L$  المعروف من أجل كل  $z \neq 2i$  ب :  $L = \frac{z+2i}{z-2i}$

(1) أكتب العدد  $L$  على الشكل الجبري .

(2) أوجد المجموعة  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M(z)$  من المستوي في الحالتين الآتيتين والتي تحقق :

أ -  $L$  عدد تخيلي صرفا .

ب -  $|L|=1$

(3) أ - بين أنه من أجل  $z=4+2i$  فإن :  $L=z_A$  و  $\bar{L}=z_B$

ب - بين أن النقطتين  $A$  و  $B$  متناظرتين بالنسبة إلى المجموعة  $(\Gamma)$  في الحالة (2) ب .

(4) أوجد لاحقة النقطة  $D$  صورة النقطة  $B$  بالتشابه المباشر الذي مركزه  $A$  ونسبته 2 وزاويته  $\frac{\pi}{6}$  .

(5) أوجد العدد الحقيقي  $\beta$  بحيث تكون النقط  $A, C, D$  في استقامية ، ثم استنتج نوع التحويل النقطي

الذي يحول النقطة  $C$  إلى  $D$  مع تعيين خصائصه المميزة .

التمرين الثاني : ( 04.00 نقط )

I. عين قيم العدد الصحيح  $m$  بحيث تقبل المعادلة :  $2014\alpha = 475\beta + m$  حولا في  $\mathbb{Z}^2$  .

II. نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة  $\mathbb{Z}$  المعادلة ذات المجهول  $(x, y)$  : (I)  $2014x - 475y = -19$ .....

(1) عين الحل الخاص  $(x_0, y_0)$  للمعادلة (I) والذي يحقق :  $y_0 - 4x_0 = 1$

(2) حل في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة (I) .

(3) بين أن العددين  $x$  و  $y$  أوليان فيما بينها باعتبار الثنائية  $(x, y)$  من  $\mathbb{N}^2$  حل للمعادلة (I) .

(4) عين قيم العدد الطبيعي  $n$  بحيث  $n \equiv 4[25]$  وباقي قسمة  $n$  على العدد 106 هو 17 .

(5) عين كل الثنائيات  $(x, y)$  من  $\mathbb{Z}^2$  حلول المعادلة (I) بحيث يكون العدد  $x+y$  مضاعفا للعدد 10 .

**التمرين الثالث : ( 04.00 نقط )**

- $\vec{GO} + 2\vec{GA} + 3\vec{GB} = \vec{0}$  : أربع نقط من الفضاء و  $G$  نقطة تحقق :
- (1) عين  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M(x, y, z)$  من الفضاء والتي تحقق :  $(\vec{MO} + 2\vec{MA} + 3\vec{MB}) \cdot \vec{MC} = 0$  .
- (2) الفضاء منسوب إلى معلم، متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  . تعتبر مجموعة المستويات  $(\pi_m)$  المعرفة بالمعادلة :  $(2-m)x + y + mz + 6m - 6 = 0$  حيث  $m$  وسيط حقيقي .
- أ - بين أن كل المستويات  $(\pi_m)$  تشمل مستقيما ثابتا يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له
- ب - اكتب معادلة لسطح الكرة  $(S)$  التي مركزها  $\Omega(2;1;2)$  ونصف قطرها 3 .
- ج - عين قيم العدد الحقيقي  $m$  بحيث يكون المستوي  $(\pi_m)$  مماسا لسطح الكرة  $(S)$  .
- (3) هل توجد قيمة للعدد الحقيقي  $m$  بحيث يكون المستقيم  $(\Delta)$  الموجه بالشعاع  $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$  عمودي على  $(\pi_m)$  ؟ علل .

**التمرين الرابع : (07.00 نقط)**

- I.** لتكن الدالة  $g$  المعرفة على  $IR$  كمايلي :  $g(x) = xe^{-x} - 1$  .
- (1) أدرس إتجاه تغير الدالة  $g$  ثم أنشئ جدول تغيرات الدالة  $g$  .
- (2) استنتج إشارة  $g(x)$  على  $IR$  .
- II.** نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$ ، المعرفة على  $IR$  كمايلي :  $f(x) = (xe^{-x} - 1)^2$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  . (الوحدة 2cm)
- (1) أ - أحسب :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  .
- ب - بين أن  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب بجوار  $+\infty$  و أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$  ، ماذا تستنتج ؟
- (2) أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$   $f'(x) = 2g(x)g'(x)$  ، ثم استنتج إشارة  $f'(x)$  .
- ب - أنشئ جدول تغيرات الدالة  $f$  .
- (3) أكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
- (4) أرسم :  $(T)$  و  $(C_f)$  .
- III.** لتكن  $h(x)$  دالة معرفة على  $IR$  كما يلي :  $h(x) = -\frac{1}{4}e^{-2x}(2x^2 + 2x + 1) + 2e^{-x}(x + 1) + x$  .
- (1) بين أن الدالة  $h(x)$  أصلية للدالة  $f$  على  $IR$  .
- (2) أحسب بـ  $cm^2$  المساحة  $A$  للحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  والمستقيمتين  $x=1$  و  $x=2$  ،  $y=1$  .

\*\*\*الصفحة 4/4\*\*\*



# تصحيح الامتحان التجريبي [3 تر]

## المستوى الأول

### التجربة الأولى:

1/ عدد الحالات الكلية هو:

$$C_9^3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3!} = 84$$

$$P(A) = \frac{C_4^3 + C_5^3}{84} = \frac{14}{84} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{C_4^2 \times C_5^1 + C_5^2 \times C_4^1}{84} = \frac{5}{6}$$

$$X = \{3a, 3a-1, 3a-2, 3a-3\}$$

$$P(3a) = \frac{C_4^3}{84} = \frac{1}{21}$$

$$P(3a-1) = \frac{C_4^2 \times C_5^1}{84} = \frac{5}{14}$$

$$P(3a-2) = \frac{C_4^1 \times C_5^2}{84} = \frac{10}{21}$$

$$P(3a-3) = \frac{C_5^3}{84} = \frac{5}{42}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 X_i P(X_i)$$

$$= 3a \times \left(\frac{1}{21}\right) + (3a-1) \times \left(\frac{5}{14}\right) + (3a-2) \times \left(\frac{10}{21}\right) + (3a-3) \times \left(\frac{5}{42}\right)$$

$$E(X) = \frac{9a-5}{3} \quad (\text{بعد الحذف})$$

$$a = \frac{5}{9}$$

$$9a-5=0 \quad \text{لأن } E(X)=0$$

$$9a=5$$

$$a = \frac{5}{9}$$

### التجربة الثانية:

$$P(z)=0 \quad \text{I}$$

$$|z+4|=0, |z+1-6i|=0, |z-3+2i|=0$$

$$z = -4, z = -1+6i, z = 3-2i$$

$$S = \{4i, -1+6i, 3-2i\}$$

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-1+2i}{3-6i} = \frac{(-1+2i)}{-3(-1+2i)} = -\frac{1}{3}$$

$$\left| \frac{-1+2i}{3-6i} \right| = \left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3}$$

$$\arg\left(\frac{-1+2i}{3-6i}\right) = \pi + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\frac{-1+2i}{3-6i} = \frac{1}{3} e^{\pi i}$$

نستخرج أن النقطة A تقع في

الخط المستقيم

ب- المعادلة المركبة

$$z' = az + b$$

$$h(C) = C \quad C \rightarrow C$$

$$h(A) = B \quad A \rightarrow B$$

$$\begin{cases} z_B = az_A + b & (1) \\ z_C = az_C + b & (2) \end{cases}$$

$$a = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = -\frac{1}{3}$$

لأن  $a \in \mathbb{R}$  ومنه  $h$  دالة حقيقية

النقطة C هي نقطة



١- (أ) صورة (S) بالنموذج R  
 هي دائرة مركزها النقطة  
 C ونصف قطرها R حيث  
 $R = |-1 - \frac{1}{3}| \times \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

(أ) صورة (S) بالدوران  
 دائرة نصف قطرها  $R = \sqrt{5}$   
 ومركزها C' حيث C صورة C  
 بالدوران R لـ C

$$z_{C'} = -7 + 3i$$

العلاقة الرباعية للدوران هي

$$z' = iz + 3i - 3$$

$$z_{C'} = iz_C + 3i - 3 = -7 + 3i$$

١/2 من تنص الى  $(x, x)$  معناه

$$z(x, 0) \text{ وبما أن الدوران}$$

$$\text{تقاسيا في } A = B \text{ فإن}$$

$$|z_A - z_n| = |z_B - z_n|$$

$$|3 - 2i - x| = |-1 + 6i - x|$$

$$(3-x)^2 + 4 = (-1-x)^2 + 36 \quad (\text{التريع})$$

$$\text{بعدالة في } x = -3 \text{ في } z(-3, 0)$$

$$z_B = 1 \text{ معناه } A = B$$

$$z_A$$

$$\beta = (\vec{z_A}, \vec{z_B})$$

$$= \arg(z_B - z_n) - \arg(z_A - z_n)$$

$$= \arg(3 + 6i) - \arg(6 + 2i)$$

$$= \arg\left(\frac{3+6i}{6+2i}\right) = \arg\left(\frac{1+3i}{3-i}\right)$$

$$= \arg(i)$$

$$\beta = \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ ومنه}$$

١/3

$$|z_M - z_C| = \sqrt{5} \quad |z - 4i| = \sqrt{5}$$

$$CM = \sqrt{5}$$

ومنه (S) هي عبارة عن دائرة  
 مركزها النقطة C ونقطتها  
 $\sqrt{5}$

$$|z_B - z_C| = \sqrt{5} \text{ فإن } B \in (S)$$

$$|z_B - z_C| = |-1 + 6i - 4i| = |-1 + 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$B \in (S)$$

ومنه



## التمرين الثالث :

$$U_{n+1} = 1 - \frac{1}{2U_n + 1} \quad | \quad U_0 = \frac{1}{2}$$

1/ مرحلة التحقق : ما أجل  $n=0$

$$0 < U_0 < \frac{1}{2} \quad \text{لدينا}$$

دفعته من أجل  $n=1$

مرحلة الفرضية : نفرض أننا  $0 < U_n < \frac{1}{2}$

دفعته ونبرهن على صحتها من أجل  $n+1$

$$0 < U_{n+1} < \frac{1}{2} \quad \text{أي}$$

$$0 < U_n < \frac{1}{2} \quad \text{لدينا}$$

$$0 < 2U_n < 1 \quad \text{(العدد في العدد)}$$

$$1 < 2U_n + 1 < 2 \quad \text{(الخاصة 1)}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2U_n + 1} < 1 \quad \text{(المعكوس)}$$

$$-1 < -\frac{1}{2U_n + 1} < -\frac{1}{2} \quad \text{(العدد في العدد)}$$

$$0 < 1 - \frac{1}{2U_n + 1} < \frac{1}{2}$$

$$0 < U_{n+1} < \frac{1}{2}$$

ما 1 : ما دفعته من أجل  $n+1$

$$0 < U_n < \frac{1}{2} \quad \text{لدينا}$$

$$U_{n+1} - U_n = 1 - \frac{1}{2U_n + 1} - U_n \quad \text{2/}$$

$$= \frac{2U_n + 1 - 1 - U_n - 2U_n^2}{2U_n + 1}$$

$$= \frac{U_n - 2U_n^2}{2U_n + 1}$$

$$= \frac{U_n (1 - 2U_n)}{2U_n + 1} \quad \text{دفعته}$$

$$0 < U_n < \frac{1}{2} \quad \text{لدينا} \quad \frac{U_n}{2U_n + 1} > 0$$

$$(1 - 2U_n) \quad \text{لدينا}$$

$$U_n = X \quad \text{فرض}$$

$$X = \frac{1}{2} \quad \text{لدينا} \quad 1 - 2X = 0$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$0 < 1 - 2U_n < 1$$

لدينا  $(U_n)$  متزايدة كما قلنا

4- بما أن  $(U_n)$  متزايدة من أجل

ومتزايدة كما قلنا فهي متقاربة

نحو العدد  $\frac{1}{2}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l = f(l)$$

$$1 - \frac{1}{2l+1} = l \quad \text{فإن} \quad f(l) = l$$

$$l(2l+1) = 2l+1-1$$

$$2l^2 - l = 0$$

$$l(2l-1) = 0$$

$$l = 0 \quad \text{أو} \quad l = \frac{1}{2}$$

بما أن  $(U_n)$  متزايدة كما قلنا فإن  $l = \frac{1}{2}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{1}{2} \quad \text{لدينا}$$

$$V_n = \frac{5^n U_n}{2U_n - 1}$$

$$V_{n+1} = \frac{5^{n+1} U_{n+1}}{2U_{n+1} - 1}$$

$$= \frac{5^{n+1} \left( \frac{2U_n}{2U_n + 1} \right)}{2 \left( \frac{2U_n}{2U_n + 1} \right) - 1}$$

$$= \frac{5^n \times 5 \times 2 \times U_n}{2U_n - 1}$$

$$= \frac{5^n \times 5^1 \times 2 \times U_n}{2U_n - 1}$$



2 لول لول في اشارة 2^n و 2

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty \text{ و } 2 \text{ ل } 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2^n} = 0$$

$$S_n = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \dots + \frac{1}{U_n} \quad 14$$

اذا  $U_n = \frac{2^n}{2^{n+1} + 3}$  ليلا

$$\frac{1}{U_n} = \frac{2^{n+1} + 3}{2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} + \frac{3}{2^n}$$

$$= \frac{2 \times 2^n}{2^n} + \frac{3}{2^n}$$

$$= 2 + \frac{3}{2^n}$$

$$S_n = 2 + \frac{3}{2^0} + 2 + \frac{3}{2^1} + \dots + 2 + \frac{3}{2^n}$$

$$= 3 \left( \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) + 2(n+1)$$

لما 1/2 لول لول في اشارة 1/2^n

$$1 = \frac{1}{1/2} \text{ و 2 ل } 1$$

$$S_n = 3 \left[ \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right] + 2(n+1)$$

$$= 6 \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right] + 2n + 2$$

$$= 2n + 8 - 6 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

4 و

$$V_{n+1} = \frac{10 \times 5^n U_n}{2U_n - 1} \rightarrow V_n$$

$$= 10V_n$$

لما 10 لول لول في اشارة V\_n

$$V_0 = \frac{U_0}{2U_0 - 1} = -\frac{1}{3}$$

$$V_n = V_p q^{n-p} = -\frac{1}{3} \times 10^n$$

$$V_n = \frac{5^n U_n}{2U_n - 1}$$

-4

ليلا

$$2U_n V_n - V_n = 5^n U_n$$

$$2U_n V_n - 5^n U_n = V_n$$

$$U_n (2V_n - 5^n) = V_n$$

$$U_n = \frac{V_n}{2V_n - 5^n} = \frac{-\frac{1}{3} \times 10^n}{2 \times \left(-\frac{1}{3} \times 10^n\right) - 5^n}$$

$$= \frac{-\frac{10^n}{3}}{-\frac{2}{3} \times 10^n - 5^n}$$

$$= \frac{10^n}{2 \times 10^n + 3 \times 5^n}$$

$$= \frac{10^n}{2 \times 10^n + 3}$$

$$= \frac{5^n \times 2^n}{2 \times 2^n \times 5^n + 3 \times 5^n}$$

$$= \frac{2^n}{2^{n+1} + 3}$$

$$10^n = (2 \times 5)^n$$

$$= 2^n \times 5^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{2^{n+1} + 3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{2^n \left(2 + \frac{3}{2^n}\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 + \frac{3}{2^n}} = \frac{1}{2}$$



13 من جدول التغيرات في  $x$

$f(x)$  متزايدة ورتبة تماثل  
على المجال  $[e, +\infty[$

وليس كذلك  $f(x) = \frac{1}{2}e^x + 1$  و  $f'(x) = \frac{1}{2}e^x$

إذاً  $f(x)$  متزايدة على المجال  $[e, +\infty[$   
 $f(x) = 0$  لا يمكن أن يكون  $f(x) = 0$  في  $[e, +\infty[$

$f(x) = 0$  في  $[0, e[$

بما أن  $f(4,6)$  و  $f(4,7)$

في  $f(4,6) \times f(4,7) < 0$

14  $\Delta$   $y = f(1)(x-1) + f(1)$

$= 2x + \frac{1}{2}$

II  $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

$g$  قابلة للتفاضل على  $[0, +\infty[$

$g'(x) = f'(x) - 2$

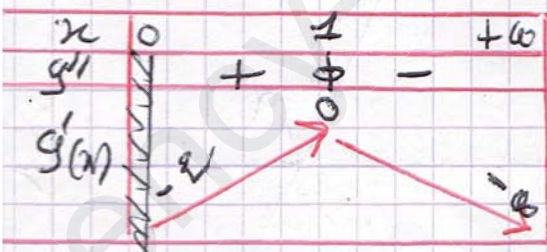
$= 2x(1 - \ln x) - 2$

$g''$  قابلة للتفاضل على  $[0, +\infty[$

$g''(x) = -2 \ln x$

$-2 \ln x = 0$   $g''(x) = 0$   $x = 1$

$x = 1$   $0 \quad + \quad - \quad +\infty$



ومن هنا  $(g'(x) < 0)$

بما أن  $g'(x) < 0$  فإن  $g(x)$

في  $[0, +\infty[$  متناقصة

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

-1/1

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

-1

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2(3 - \ln x^2)}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2}x - \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$

ومن هنا  $f(x)$  قابل للتفاضل في  $x=0$

لعموم القوائم عند النقطة  $A(0,1)$

2  $f$  قابلة للتفاضل على المجال  $[0, +\infty[$

في  $[0, +\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{2}x(3 - \ln x^2) + \frac{1}{2}x^2(-\frac{2x}{x^2})$

$= 3x - x \ln x^2 - x$

$= x(-\ln x^2 + 2)$

$f(x) = 0$   $x = 0$  أو  $2 - \ln x^2 = 0$

$x = 0$  أو  $\ln x^2 = 2$

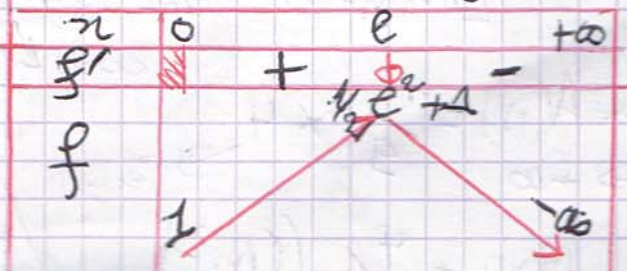
$x = 0$  أو  $x^2 = e^2$   $x = \pm \sqrt{e^2} = \pm e$

$x = e$   $f'(x) = 0$   $x \in ]0, e[$

$x \in ]e, +\infty[$   $f'(x) < 0$

$x \in ]e, +\infty[$   $f(x) < 0$

ولذلك التغيرات:



$f(e) = \frac{1}{2}e^2 + 1$



$$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 \ln x dx$$

$$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 \ln x dx$$

$$f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g(x) = x^2 \rightarrow g'(x) = \frac{1}{3} x^3$$

$$I_n = \left[ \frac{1}{3} x^3 \ln x \right]_{\frac{1}{n}}^1 - \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{3} x^2 \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \left[ \frac{1}{3} x^3 \ln x \right]_{\frac{1}{n}}^1 - \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{3} x dx$$

$$= \left[ \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{6} x^2 \right]_{\frac{1}{n}}^1$$

بعد التفاضل نجد

$$I_n = \frac{1}{3n^3} \left[ \frac{1}{3} + \ln(n) \right] - \frac{1}{6} g$$

$$A(n) = \int_{\frac{1}{n}}^1 [f(x) - y_{(n)}] dx$$

$$f(x) - y_{(n)} = g(n) = \frac{3}{2} x^2 - 2x + \frac{1}{2} - I_n$$

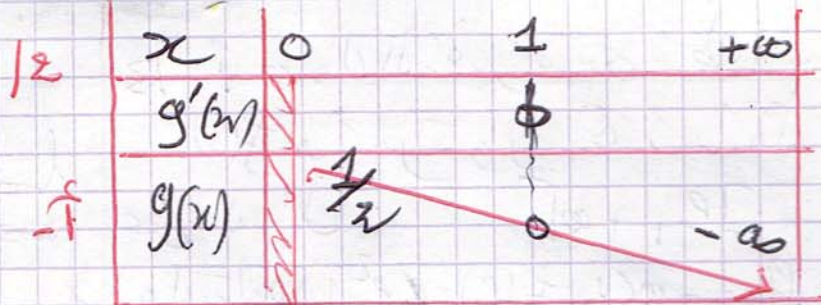
$$A(n) = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left[ \frac{3}{2} x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right] dx - I_n$$

$$= \left[ \frac{3}{2} x^3 - x^2 + \frac{1}{2} x \right]_{\frac{1}{n}}^1 - I_n$$

$$A(n) = \left[ \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} - \frac{1}{2n} + \frac{\ln(n)}{3n^2} + \frac{1}{6} g \right] \times 4$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A(n) = \frac{1}{6} \times 4 \rightarrow \text{الحد}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A(n) = \frac{4}{6} \text{ (cm}^2\text{)}$$

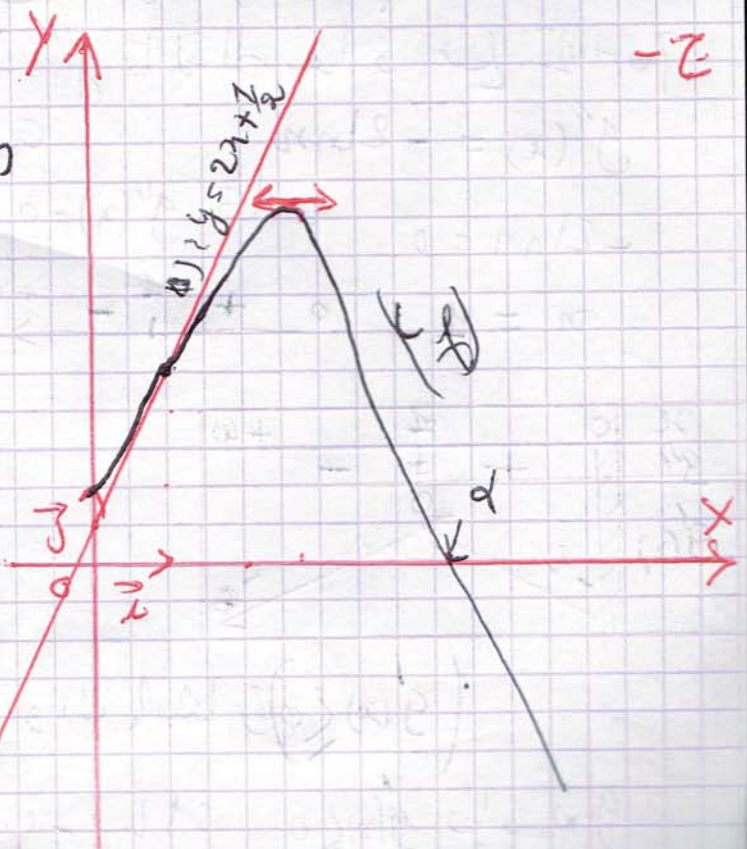


ومنه  $g(x)$  كارتة

| x    | 0 | 1 | +∞ |
|------|---|---|----|
| g(x) | 0 | + | -  |

ومنه  $f(x)$  كارتة  
الفرق  $[f(x) - y_{(n)}] = g(n)$   
لذا اسكارتة من  $g(n)$  رة  
ويتا

| x     | 0       | 1     | +∞      |
|-------|---------|-------|---------|
| الفرق | +       | 0     | -       |
| الوضع | فوق (د) | تقاطع | تحت (د) |





## التمرين الأول:

I

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

$$\Delta = (1)^2 - (1)(2) = -1 = 1^2$$

$$z_1 = \frac{1+1}{2} = 1+i$$

$$z_2 = \bar{z}_1 = 1-i$$

$$S = \{1+i; 1-i\}$$

(1/II)

$$L = \frac{z+z_1}{z-z_1} = \frac{x+iy+2i}{x+iy-2i}$$

$$= \frac{x+(y+2)i}{x+(y-2)i} = \frac{[x+(y+2)i][x-(y-2)i]}{x^2+(y-2)^2}$$

بعد التمر والتبسيط نجد:

$$L = \frac{x^2+y^2-4}{x^2+(y-2)^2} + \frac{4x}{x^2+(y-2)^2} i$$

(2)  $L$  تخيل صفاً معناه حركته

$$\frac{x^2+y^2-4}{x^2+(y-2)^2} = 0$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-4=0 & (1) \\ x^2+(y-2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow (x,y) \neq (0,2) \end{cases}$$

$$(x-0)^2+(y-0)^2=2^2$$

ومنه (1) دائرة مركزها 0 و  $r=2$

ب-  $|L|=1$  معناه (كل مصوريته)

$$L = \frac{z+z_1}{z-z_1} = \frac{4+2i+2i}{4+2i-2i} = z_A$$

ولسنا  $z_B = \bar{z}_A$  أي  $z_B = L$

$$\left| \frac{z_A+z_1}{z_B-z_1} \right| = 1 \text{ كما في } |L|=1$$

$$|z_A+2i| = |z_B-2i|$$

$$|1+3i| = |1-3i|$$

$$\sqrt{10} = \sqrt{10}$$

ومنه A ومضاهيها بالمثل (5)

(4) العبارة المركبة للكتابة هي -

$$z' = (\sqrt{3}+i)z - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}i$$

وبالعكس نجد  $z_D = 3+i$

(5) A, C, D في استقامة معناه الشعاعان

AD و AC مرتبطان خطياً أي

$$\vec{AD} = k \vec{AC} \quad (k \in \mathbb{R}^*)$$

$$k = \frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{2}{1+(3-1)i}$$

حيث يكون k حركتي معناه  $3-1=0$

$$\boxed{3=1}$$

$$\vec{AD} = 2 \vec{AC} \text{ ومنه}$$

التحويل هو تكاثر نسبة 2

ومركزه A

التمرين الثاني:

$$2014d = 475\beta + m \quad (I)$$

$$2014d - 475\beta = m$$

$$p \in \mathbb{C}D(2014, 475) = 19 \text{ وليسا}$$

$$19(106d - 25\beta) = m \text{ إذا}$$

معناه 19 قاسم لـ m، إذاً

$$m = 19K \quad (K \in \mathbb{Z})$$

$$2014x - 475y = -19 \quad (II) \quad (1/II)$$

$$19(106x - 25y) = -19 \text{ كما في } (I)$$

$$106x - 25y = -1 \text{ كما في}$$

(1) نبحث  $(x_0, y_0)$  لدينا  $4x_0 - y_0 = 1$

$$y_0 = 4x_0 + 1$$



ومن ثم  $x$  و  $y$  أوليان فيما بينهما.

$$\begin{cases} n \equiv 4 [25] \\ n \equiv 17 [106] \end{cases} \quad \text{حل الصلة} \quad (4)$$

$$\begin{cases} n = 25\alpha + 4 \\ n = 106\beta + 17 \end{cases} \quad \text{ومن ثم}$$

$$25\alpha + 4 = 106\beta + 17$$

$$106\beta - 25\alpha = -13$$

لدينا  $(4, 17)$  حل خاص للمعادلة

$$106\beta - 25\alpha = -1 \quad \text{متبقية}$$

ومن ثم  $(4 \times 13; 17 \times 13)$  حل خاص

$$106\beta - 25\alpha = -13 \quad \text{للمعادلة}$$

بعد حل هذه المعادلة باستعمال طريقة

$$\begin{cases} \beta = 25p + 52 \\ \alpha = 106p + 221 \end{cases} \quad \text{عوضا نجد} \quad (p \in \mathbb{N})$$

$$n = 106\beta + 17$$

$$n = 106(25p + 52) + 17$$

$$= 2650p + 5529 \quad (p \in \mathbb{N})$$

$x+y$  مضاعف لـ 10 منه

$$x+y \equiv 0 [10]$$

$$x+y = 25K+4 + 106K+17 = 131K+21$$

$$131K+21 \equiv 0 [10] \quad \text{ومن ثم}$$

$$131 \equiv 1 [10] \text{ و } 21 \equiv 1 [10]$$

$$K+1 \equiv 0 [10] \quad \text{كذلك ومن ثم}$$

$$K \equiv 9 [10] \text{ أي } K = 10K' + 9 \quad (K' \in \mathbb{Z})$$

$$x = 25(10K' + 9) + 4$$

$$= 250K' + 229$$

$$y = 106(10K' + 9) + 17 = 1060K' + 971$$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد

$$106x_0 - 25(4x_0 + 1) = -1$$

بعد حل هذه المعادلة نجد

$$x_0 = 4, y_0 = 17$$

$$(x_0, y_0) = (4, 17)$$

(2) المعادلة (I) كما قلنا

$$106x - 25y = -1$$

ولدينا  $(4, 17)$  حل خاص للمعادلة

$$\begin{cases} 106x - 25y = -1 \\ 106(4) - 25(17) = -1 \end{cases}$$

$$106(x-4) = 25(y-17)$$

لدينا  $x$  و  $y$  أوليان فيما بينهما

كذلك حسب طريقة عوض

$$x-4 = 25k$$

$$x = 25k + 4$$

$$x = 25k + 4 \quad \text{ومن ثم}$$

$$y = 106k + 17$$

$$S = \{(25k+4; 106k+17) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

(3) لدينا  $d$  قاسم مشترك لـ

$x$  و  $y$  ومن ثم  $d$  قاسم

لـ  $106x$  و  $25y$

$$d \mid 106x - 25y$$

$d$  قاسم لـ  $-1$  وبما أن

$$d = 1 \quad (d \in \mathbb{N})$$

$$p \in \mathbb{C}D(x, y) = 1 \quad \text{كذلك}$$



1/ لدينا  $G$  مرجع الصيغة

$\{(0,1), (A,2), (B,3)\}$   
إذا أخذنا كل نقطة  $M$  من الفضاء

$$\vec{MO} + 2\vec{MA} + 3\vec{MB} = (1+3+2)\vec{MG}$$

$$= 6\vec{MG}$$

$$6\vec{MG} \cdot \vec{MG} = 0$$

وننتج  
 $\vec{MG} \cdot \vec{MG} = 0$   
إذا المصنوعة  $(G)$  هي سطح كرة مركزها  $G$

$$(2-m)x + y + mz + 6m - 6 = 0 \quad 1/2$$

$$2x - mx + y + mz + 6m - 6 = 0$$

$$2x + y - 6 + (3 - x + 6)m = 0$$

$$\begin{cases} 2x + y - 6 = 0 \\ 3 - x + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y - 6 = 0 \\ 3 - x + 6 = 0 \end{cases}$$

وهذا صيغة معادلتين ديكارتية

لمستقيم في الفضاء

إذا  $D$  كل المستويات  $(\Delta_m)$  تشمل

مستقيم ثابت  $(\Delta)$  أصلي

$$A) \begin{cases} 2x + y - 6 = 0 \\ 3 - x + 6 = 0 \end{cases}$$

نضع  $x = t$  ونصل ونصل

$$\begin{cases} x = t \\ y = -2t + 6 \\ z = t - 6 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$(t \in \mathbb{R})$$

$$z = t - 6$$

$$B) (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 3^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 4z = 0$$

2-  $(m)$  معاملا ل  $(S)$  معناه

$$d[\sqrt{2}, (S_m)] = 3$$

$$\frac{|(2-m)x + 1 + m(2) + 6m - 6|}{\sqrt{(2-m)^2 + 1^2 + m^2}} = 3$$

$$\frac{|6m - 1|}{\sqrt{2m^2 - 4m + 5}} = 3$$

$$\sqrt{2m^2 - 4m + 5}$$

بتربيع الطرفين وحذف الطرفين

سيؤدي حذف الوسطين نجد

$$18m^2 + 24m - 44 = 0$$

$$\Delta' = 936$$

$$m_1 = \frac{-2 - \sqrt{26}}{3}, m_2 = \frac{-2 + \sqrt{26}}{3}$$

$$\vec{u}_A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{n}_m \begin{pmatrix} 2-m \\ 1 \\ m \end{pmatrix} \quad 1/3$$

$$\vec{n}_m \perp \vec{u}_A$$

معناه  $(\Delta_m) \perp (\Delta)$

مربعاته متساوية معناه

$$\frac{2-m}{1} = \frac{1}{-2} = \frac{m}{1}$$

$$m = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{2-m}{1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2-m = -\frac{1}{2}$$

$$-2m + 4 = -1 \Rightarrow -2m = -4 - 1$$

$$m = \frac{5}{2}$$

وهنا  $m$  قيمة غير ثابتة

وبالتالي لا توجد مستقيمة

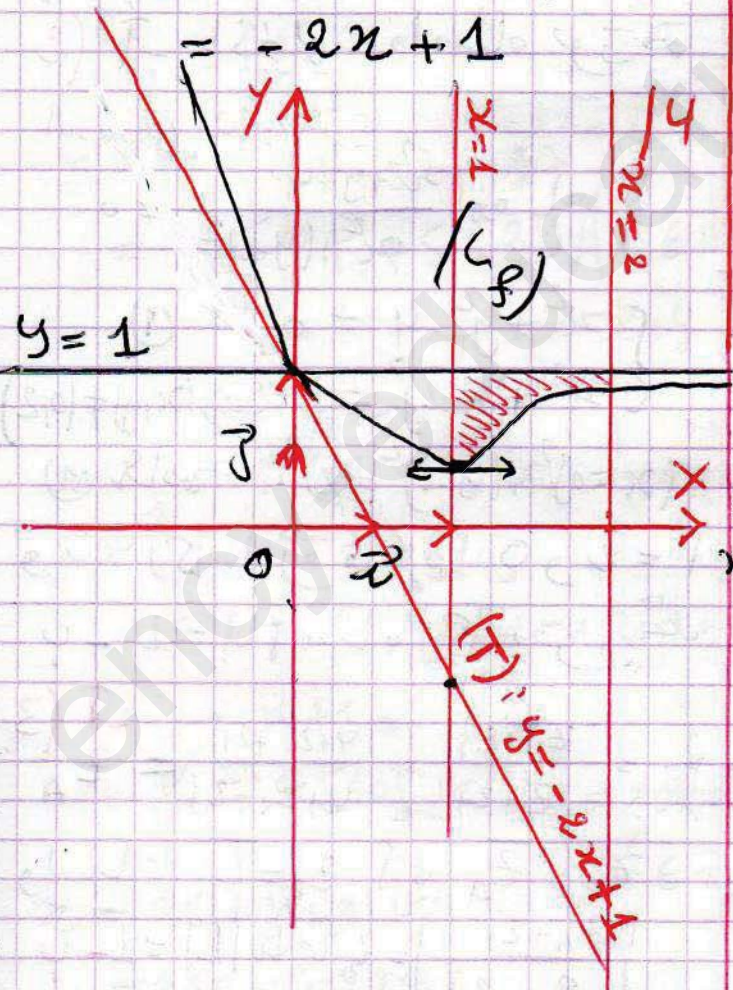


12)  $f(x) = 2(e^x - xe^x)(xe^x - 1)$   
 $= 2g'(x) \times g(x)$   
 إشارة  $g(x)$  و  $g'(x)$

| $x$     | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----|-----------|
| $g'(x)$ | +         | 0   | -         |
| $g(x)$  | -         | 0   | +         |
| $f(x)$  | -         | 0   | +         |

| $x$  | $-\infty$ | $1$           | $+\infty$ |
|------|-----------|---------------|-----------|
| $f'$ | -         | 0             | +         |
| $f$  | $+\infty$ | $(e^1 - 1)^2$ | $1$       |

$f(1) = (e^1 - 1)^2 \approx 0,39$   
 (T)  $y = f'(0)(x-0) + f(0)$



$g(x) = xe^x - 1$   
 $D_g = ]-\infty, +\infty[$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -1$  |  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = 0$   
 $g'(x) = e^x - xe^x = e^x(1-x)$

| $x$  | $-\infty$ | $1$       | $+\infty$ |
|------|-----------|-----------|-----------|
| $g'$ | +         | 0         | -         |
| $g$  | $-\infty$ | $e^1 - 1$ | $-1$      |

$g(1) = e^1 - 1 > 0$   
 $g(x) < 0$  من أجل  $x > 1$   
 $f(x) = (xe^x - 1)^2$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

ب- لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$   
 من أجل  $x > 1$   $f(x) < 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(xe^x - 1)^2}{x} = 0$   
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 e^{2x} - 2xe^x + 1}{x}$   
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{2x} - 2e^x + \frac{1}{x})$   
 $= (-\infty)(+\infty) - 2(+\infty) + 0 = -\infty$

نتيجة (4) أن  $f(x)$  قريب من 1 كلما  $x$  كبير  
 بارز اتجاه محور التفاضل



IV

$$h(x) = -\frac{1}{4} e^{2x} (2x^2 + 2x + 1) + 2e^{-x}(x+1) + x$$

→ R (60 km) d'altitude h (1

$$h'(x) = -\frac{1}{4}(-2)(2x^2 + 2x + 1)e^{-2x} + (4x+2)(-\frac{1}{4}e^{-2x}) + 2e^{-x} + (x+1)(-2e^{-x}) + 1$$

$$h'(x) = x^2 e^{-2x} + x e^{-2x} + 1 e^{-2x} - x e^{-2x} - \frac{1}{2} e^{-2x} + 2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2 e^{-x} + 1$$

$$h''(x) = x^2 e^{-2x} - 2x e^{-x} + 1$$

$$= (x e^{-x} - 1)^2 = f(x)$$

f(x) = distance h(x) along

(2

$$A = \int_1^2 [f(x) - f(x)] dx$$

$$= [x - h(x)]_1^2$$

$$= [2 - h(2)] - [1 - h(1)]$$

$$\approx 0,54 \times 2 \times 2$$

$$\approx 2,16 \text{ cm}^2$$



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :  
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 ن)

يحتوي صندوق على 4 كرات تحمل رقم  $a$  و 5 كرات تحمل الرقم  $(a-1)$  ،  $a \in \mathbb{R}$  .  
نسحب عشوائيا في آن واحد 3 كرات من الصندوق .  
(1) احسب احتمال الحوادث التالية:

A: سحب 3 كرات تحمل نفس العدد.

B: سحب كرتين بالظبط تحمل نفس العدد.

(2) ليكن  $X$  المتغير العشوائي المرتبط بمجموع الاعداد المسجلة على الكرات المسحوبة لكل سحب.

أ- حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي  $X$  .

ب- حدد قانون الاحتمال  $X$  .

ج- أحسب الأمل الرياضي بدلالة  $a$  و حدد  $a$  من أجل  $E(x)=0$

التمرين الثاني: (4.5 ن)

$(U_n)$  متتالية معرفة بـ:  $U_0=0$  ،  $U_1=1$  ، و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $U_{n+2}=5U_{n+1}-4U_n$  .

1- احسب  $U_2$  و  $U_3$  .

2- أ) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  أن:  $U_{n+1}=4U_n+1$

ب) تحقق أن:  $U_n$  عدد طبيعي ، ثم استنتج أن:  $U_n$  و  $U_{n+1}$  أوليان بينهما.

3-  $(V_n)$  متتالية معرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:  $V_n=U_n+\frac{1}{3}$  .

أ) بين أن المتتالية  $(V_n)$  هندسية ، عين أساسها و حدها الأول.

ب) اكتب  $V_n$  ثم  $U_n$  بدلالة  $n$  .

4- أ) احسب  $PGCD(4^6-1; 4^5-1)$

ب) عين من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $PGCD(4^{n+1}-1; 4^n-1)$

5- أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  بواقي قسمة  $4^n$  على 7 .

ب) احسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث:  $S_n=V_0+V_1+.....+V_{3n}$  .

ج) عين قيم العدد الطبيعي  $n$  حيث العدد  $9S_n+8n$  يقبل القسمة على 7 .

I. كثير حدود المتغير المركب  $Z$  حيث :  $p(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$  .

(1) عين العددين الحقيقيين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث من أجل كل  $Z$  :  $p(z) = (z-6)(z^2 + \alpha z + \beta)$

(2) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $p(z) = 0$  .

II. في المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  نعتبر النقط  $A; B; C$  ذات اللواحق

$$Z_C = \overline{Z_B} , Z_B = 3 + i\sqrt{3} , Z_A = 6$$

أ) أكتب  $Z_A, Z_B, Z_C$  على الشكل الأسّي.

ب) أكتب العدد  $\frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C}$  على الشكل الجبري ثم الشكل الأسّي ، استنتج طبيعة المثلث  $ABC$  .

III. ليكن  $(S)$  التشابه المباشر الذي مركزه  $C$  ونسبته  $\sqrt{3}$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  .

أ) أوجد الكتابة المركبة للتشابه المباشر  $(S)$  .

ب) بين أن النقط  $A', B, A$  على استقامية علما أن  $A' = S(A)$  .

التمرين الرابع : (07 ن)

I. الدالة العددية المعرفة على  $]0; +\infty[$  بـ :  $g(x) = 1 + x^2 + 2 \ln(x)$  .

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$  .

(2) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل في المجال  $]0,52; 0,53[$  حلا وحيدا  $\alpha$  .

(3) استنتج إشارة  $g(x)$  على  $]0; +\infty[$  .

II. الدالة العددية المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ :  $f(x) = -x + \frac{3 + 2 \ln x}{x}$  .

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  .

(1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  .

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]0; +\infty[$   $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$  ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  .

ب) تحقق أن :  $f(\alpha) = 2\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)$  ثم عين حصره له .

(3) أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) + x]$  ثم فسر النتيجة هندسيا .

ب) ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة الى مستقيمه المقارب المائل  $(\Delta)$  .

ج) بين أن  $(C_f)$  يقبل مماسا  $(T)$  يوازي  $(\Delta)$  يطلب كتابة معادلة ديكارتية له .

(4) نقبل أن  $(C_f)$  يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيها  $x_0, x_1$  حيث :

$$2,11 < x_1 < 2,13 \text{ و } 0,22 < x_0 < 0,23$$

أنشئ  $(T)$  ،  $(\Delta)$  ،  $(C_f)$  .

(5) احسب مساحة الحيز  $A$  المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  و المستقيمت التي معادلتها  $y = -x$  ،  $x = 2$  ،  $x = 1$  .

انتهى الموضوع الأول



## الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 ن)

اخترت مجلة عشرة كتب مختلفة مثنى مثنى و مكونة من 4 كتب في الرواية ، 4 كتب في العلوم و كتابين في التاريخ .

و قررت اعداد لائحة تتضمن ترتيبا لعناوين ثلاث كتب من بين العشرة عن طريق القرعة لسحب ثلاث عناوين واحد تلو الآخر دون ارجاع .

(1) بين أن عدد اللوائح الممكنة هو 720.

(2) احسب احتمال الحادثين

A : الحصول على لائحة يكون أولها عنوان كتاب التاريخ.

B : الحصول على لائحة تتضمن اي عنوان لكتب التاريخ.

(3)  $X$  المتغير العشوائي الذي يربط كل لائحة بعدد عناوين كتب التاريخ .

(أ) حدد قيم المتغير العشوائي  $X$  .

(ب) أعط قانون الاحتمال  $X$  ثم أحسب الأمل الرياضي  $E(X)$  .

التمرين الثاني: (04.5 ن)

(1) (أ)  $n$  عدد طبيعي ، عين قيم  $n$  حيث:  $2n+27 \equiv 0[n+1]$  .

(ب) عين الثنائيات الطبيعية  $(a;b)$  التي تحقق  $(b-a)(b+a)=24$  .

(2)  $\alpha$  و  $\beta$  عددان طبيعيين يكتبان في النظام ذو الأساس 5 كما يلي :  $\alpha = \overline{10141}^5$  ،  $\beta = \overline{3403}^5$

(أ) اكتب  $\alpha$  و  $\beta$  في النظام العشري .

(ب) عين الثنائيات  $(a;b)$  التي تحقق :  $\begin{cases} a^2 - b^2 = 24 \\ \alpha a - \beta b = 9 \end{cases}$

(3) اوجد  $PGCD(1434;2013)$  و  $PGCD(478;671)$  .

(4) حل في  $\mathbb{Z}$  المعادلة  $2013x - 1434y = 27$  .

التمرين الثالث: (04.5 ن)

نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O;\vec{u};\vec{v})$  النقط  $A, B, C$  التي لواحقها

على الترتيب :  $Z_A = -i$  ،  $Z_B = 2+3i$  ،  $Z_C = -4+i$  .

(1) (أ) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب  $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$  .

(ب) عين طوليلة و عمدة العدد المركب  $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$  ثم استنتج طبيعة المثلث  $ABC$  .

(2) نعتبر التحويل النقطي (T) في المستوى الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات

$$Z' = iZ - 1 - i \text{ حيث: } Z' \text{ اللاحقة}$$

أ) عين طبيعة التحويل T و عناصره المميزة.

ب) ماهي صورة النقطة B بالتحويل T.

(3) لتكن D النقطة ذات اللاحقة  $Z_D = -6 + 2i$ .

أ) بين أن النقط A، B، C على استقامية.

ب) عين نسبة التحاكي h الذي مركزه A ويحول النقطة C الى النقطة D.

ج) عين العناصر المميزة للتشابه S الذي مركزه A ويحول B الى D

التمرين الرابع: (07 ن)

I. لتكن f دالة عددية معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = x - \frac{1}{4}(x+1)e^{-x}$  و (C) تمثيلها البياني في

المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  [وحدة 3cm].

1. احسب النهايات للدالة f عند  $+\infty$  وعند  $-\infty$ .

2. احسب  $f'(x)$  و  $f''(x)$  ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f'.

3. بين ان المعادلة  $f'(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $-1,3 < \alpha < -1,2$ .

4. استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

5. بين أن المستقيم ( $\Delta$ ) الذي معادلته  $y = x$  هو مقارب مائل للمنحنى (C) عند  $+\infty$ ، ثم أدرس الوضع

النسبي بين (C) و ( $\Delta$ ).

6. انشئ المستقيم ( $\Delta$ ) والمنحنى (C).

II. نفرض المتتالية  $(U_n)$  المعرفة بـ  $U_0 = 0$  و من أجل كل عدد طبيعي n  $U_{n+1} = f(U_n)$

(1) أ- مثل على محور الفواصل  $U_0, U_1, U_2$ .

ب- أعط تخمينا حول اتجاه تغير و تقارب المتتالية  $(U_n)$ .

(2) برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n  $-1 < U_n < 0$ .

(3) بين أن  $(U_n)$  متتالية متناقصة و استنتج تقاربها.

(4) برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n  $0 < U_{n+1} + 1 < \frac{3}{4}(U_n + 1)$ .

(5) استنتج أن  $0 < U_n + 1 < \left(\frac{3}{4}\right)^n$ ، ماهي نهاية  $(U_n)$ ؟

بالتوفيق و النجاح في شهادة البكالوريا مع دعوات استاذة المادة



## الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية شاذلي قادة فرندة

دورة : ماي 2018

مديرية التربية لولاية تيارت

امتحان بكالوريا تجريبي

الشعبة : تقني رياضي

المدة : 04 سا و 30 د

اختبار في مادة : الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

### الموضوع الأول

#### التمرين الأول :

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على  $N$  كمايلي :  $u_0 = \frac{1}{2}$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}n + \frac{2}{3}$$

(1) أحسب  $u_1$  ،  $u_2$ .

(2) نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $N$  كمايلي :  $v_n = u_n - \frac{2}{3}n$  .

(أ) بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول

(ب) احسب  $v_n$  بدلالة  $n$  واستنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  .

(ج) احسب المجموع  $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  بدلالة  $n$  .

(3) نعتبر في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  التي احداثياتها على الترتيب  $(0; u_0)$  ،  $(1; u_1)$  ،  $(2; u_2)$  وليكن  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان حقيقيان مفروضان حيث  $2\alpha + \beta + 1 \neq 0$  .

عين  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث يكون مرجح الجملة المثقلة  $\{(A; \alpha), (B; \alpha+1), (C; \beta)\}$  ينطبق على النقطة  $O$  .

#### التمرين الثاني :

المستوي المركب منسوب الى المعلم التعامد والمتجانس  $(o; \vec{u}; \vec{v})$  ( وحدة الرسم : 4cm )

نعتبر النقطة  $A$  ذات اللاحقة  $z_A = i$  والنقطة  $B$  ذات اللاحقة  $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$  .

(1) دوران  $r$  مركزه النقطة  $O$  وقيس زاويته  $\frac{2\pi}{3}$  . نضع النقطة  $C$  صورة النقطة  $B$  بالدوران  $r$

(أ) عين الكتابة المركبة للدوران  $r$  .

(ب) بين أن لاحقة النقطة  $C$  هي  $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$  .

(ت) أكتب  $z_B$  و  $z_C$  على الشكل الجبري .

(ث) علم النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  .

(2) نعتبر النقطة  $D$  مرجح الجملة المثقلة  $\{(A; 2), (B; -1), (C; 2)\}$  .

- (أ) عين لاحقة النقطة  $D$  ، علم النقطة  $D$  .  
 (ب) بين أن النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  و  $D$  تنتمي الى دائرة واحدة .  
 (3) نضع التحاكي  $h$  الذي مركزه النقطة  $A$  و نسبته 2 ، نضع النقطة  $E$  صورة النقطة  $D$  بالتحاكي  $h$  .  
 (أ) عين الكتابة المركبة للتحاكي  $h$  .  
 (ب) عين لاحقة النقطة  $E$  بالتحاكي  $h$  ، علم النقطة  $E$  .  
 (4) (أ) أكتب العدد المركب  $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$  على الشكل الأسّي  
 (ب) استنتج طبيعة المثلث  $CDE$  .

### التمرين الثالث :

- مربيان للطيور النادرة يقومان بتربية طيور يظهر لونها بعد شهر من تفقيس بيضها.  
 - بالنسبة للمربي الأول، بين اليوم الأول والشهر، 20% من الطيور ماتت و 70% تصبح ملونة و 10% تبقى بيضاء.  
 - بالنسبة للمربي الثاني، بين اليوم الأول والشهر، 7% من الطيور ماتت و 80% تصبح ملونة و 13% تبقى بيضاء.  
 بائع طيور اشترى كتابت عمرها يوم واحد: 70% من المربي الأول و 30% من المربي الثاني.  
 (1) يشتري طفل طائر من عند البائع يوم بعد وصولها إلى محل البائع، أي عمره يومان.  
 (أ) انجز شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية  
 (ب) بين أن احتمال أن يكون الطائر حيا بعد شهر هو 0.839 .  
 (ج) عين احتمال أن يكون الطائر ملون بعد شهر.  
 (د) علما أن الطائر بقي أبيض بعد شهر، ما احتمال أن يكون من عند المربي الأول؟  
 (2) قرر بائع الطيور الاحتفاظ بالطيور حتى يظهر لونها أي بعد شهر، حتى يبيعه بلونها النهائي.  
 يربح  $300DA$  عن كل طائر ملون و  $50DA$  عن كل طائر أبيض و يخسر  $10DA$  عن كل طائر مات. نسمي  $X$  المتغير العشوائي المساوي للربح الجبري لبائع الطيور عن كل طائر اشتراه.  
 عين قانون الاحتمال لـ  $X$  وأمله الرياضي.

### التمرين الرابع :

- (1)  $g$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $g(x) = 1 + (x^2 + 2x - 1)e^{-x}$  .  
 أ- أدرس النهايتين للدالة  $g$  عند  $+\infty$  و عند  $-\infty$  .  
 ب- أحسب  $g'(x)$  ثم استنتج جدول تغيرات  $g$  .  
 ج- بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر  $\alpha$  حيث:  $-2.4 < \alpha < -2.3$  .  
 د- استنتج إشارة  $g(x)$  حسب قيم  $x$  .  
 (2)  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = x - (x^2 + 4x + 3)e^{-x}$  .  
 (Cf) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$   
 (أ) أحسب النهايتين للدالة  $f$  عند  $+\infty$  و عند  $-\infty$  .  
 (ب) بين أن  $f'(x) = g(x)$  ثم شكل جدول تغيرات  $f$  .  
 (ج) بين أن المستقيم  $(D)$  ذو معادلة  $y = x$  هو مستقيم مقارب للمنحنى (Cf)  
 (د) أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (Cf) و المستقيم  $(D)$



هـ) أنشئ  $(Cf)$  و  $(D)$  ( نأخذ  $f(\alpha) \approx 6.9$  )

3) ليكن  $H$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$  .  
أ) عين الأعداد الحقيقية  $a$  ،  $b$  ،  $c$  حتى تكون  $H$  دالة أصلية للدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  :  
ب)  $h(x) = (x^2 + 4x + 3)e^{-x}$  .

ب) عين مساحة، بوحدة المساحة، للحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(Cf)$  والمستقيم  $(D)$  والمستقيمين اللذين معادلتاهما  $x = -3$  و  $x = 2$  .

## الموضوع الثاني

### التمرين الاول :

- نعتبر في الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس  $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  النقطة  $A(2;1;0)$  ،  
 $B(2;-1;-2)$  و  $C(0;1;-2)$  والمستوي  $(P)$  ذو معادلة :  $x + y - z - 3 = 0$  .  
 (1) بين أن النقطة  $A$  ،  $B$  و  $C$  تنتمي الى  $(P)$  .  
 (2) نعتبر  $(S)$  مجموعة النقطة  $M(x; y; z)$  من الفضاء التي تحقق :  
 $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z + 5 = 0$  .  
 أ) بين أن  $(S)$  سطح كرة يطلب نعين مركزها  $I$  ونصف قطرها  $R$  .  
 ب) بين أن  $(S)$  و  $(P)$  يتقاطعان وفق دائرة  $(\gamma)$  محيطة بالمثلث  $ABC$   
 ت) بين أن المثلث  $ABC$  مثلث متقايس الاضلاع  
 (3)  $(\Delta)$  مستقيم يشمل النقطة  $I$  وعمودي على  $(P)$  . عين تمثيلاً وسيطياً للمستقيم  $(\Delta)$  .  
 أ) عين احداثيات  $G$  نقطة تقاطع  $(\Delta)$  و  $(P)$  .  
 ب) تحقق أن  $G$  مركز ثقل المثلث  $ABC$  ثم استنتج مركز الدائرة  $(\gamma)$  ونصف قطرها .

### التمرين الثاني :

- المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر  $(o; \vec{u}; \vec{v})$  .  
 (1) علم النقطة  $A$  ،  $B$  و  $C$  نقط لاحقتها على الترتيب  $z_A = -2 - 3i$  ،  $z_B = 1 - 2i$  و  $z_C = -3$  .  
 (2)  $f(z)$  عدد مركب معرف بـ :  $f(z) = \frac{z_C - z}{z_B - z}$  مع  $z \neq z_C$  و  $z \neq z_B$  .  
 أ- أكتب  $f(z_A)$  على الشكل الأسّي .  
 ب- استنتج طبيعة وعناصر التحويل النقطي  $R$  الذي مركزه  $A$  و يحول  $B$  إلى  $C$  . ما هو نوع المثلث  $ABC$   
 (3)  $M$  نقطة لاحقتها  $z$   
 أ- أعط تفسيراً هندسياً لطويلة وعمدة للعدد  $f(z)$   
 ب- لتكن  $(\Delta)$  مجموعة النقطة  $M$  حيث :  $|f(z)| = 1$  . تحقق أن  $A$  نقطة من  $(\Delta)$  ثم عين و أنشئ المجموعة  $(\Delta)$   
 (4) لتكن  $(\Gamma)$  مجموعة النقطة  $M$  حيث :  $\arg[f(z)] = \frac{\pi}{2} + k\pi$  مع عدد صحيح  $k$  صحيح  
 تحقق أن  $A$  نقطة من  $(\Gamma)$  ثم عين و أنشئ المجموعة  $(\Gamma)$   
 (5) عين و أنشئ المجموعة  $(D)$  مجموعة النقطة  $M$  حيث :  $\arg[f(z)] = \pi$  .

### التمرين الثالث :

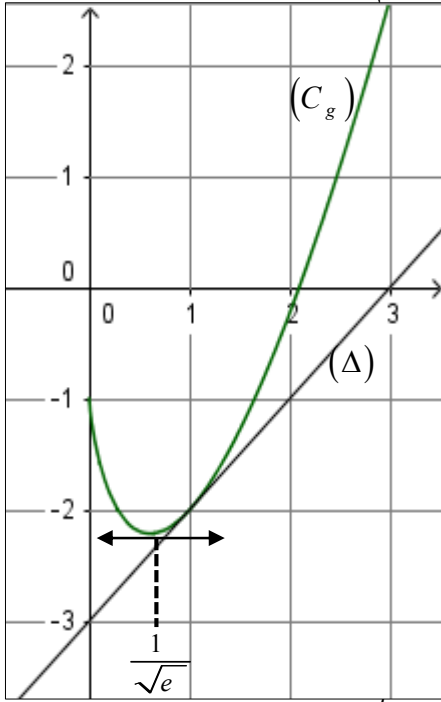
- (1) نعتبر في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة ذات المجهول  $(x; y)$  التالية: (1)  $64x - 48y = 160$  ..... حل المعادلة (1)  
 (2) أثبت أن 2017 عدد أولي.  
 (3)  $N$  عدد طبيعي يكتب  $3a3b$  في النظام ذو الأساس 8 ويكتب  $5b05$  في النظام ذو الأساس 7 .  
 عين  $a$  و  $b$  ثم أكتب  $N$  في النظام العشري  
 (4) أ- أدرس، حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  ، بواقي قسمة  $5^n$  على 13  
 ب- عين قيم العدد الطبيعي  $n$  ، التي من أجلها يكون :  $2014^{1436} + 1435^n \equiv 0 [13]$  .



### التمرين الرابع :

الجزء I : الدالة العددية المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ:  $g(x) = 2x \ln x - x - 1$ .

المنحنى  $(C_g)$  المقابل هو التمثيل البياني للدالة  $g$  في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .



المنحنى  $(C_g)$  يقبل مماسا موازيا لمحور الفواصل عند النقطة التي فاصلتها  $\frac{1}{\sqrt{e}}$  و  $(\Delta)$  هو المماس لـ  $(C_g)$  في النقطة التي فاصلتها  $x = 1$ .

(1) بقراءة بيانية:

(أ) حدد  $g'(1)$  ;  $g(1)$  ;  $g'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$  ثم عين معادلة للمماس  $(\Delta)$ .

(ب) شكل جدول تغيرات الدالة  $g$ .

(2) (أ) علل وجود عدد حقيقي  $\alpha$  حيث  $2 < \alpha < 2,1$  و يحقق  $g(\alpha) = 0$ .

(ب) استنتج إشارة  $g(x)$  على المجال  $]0; +\infty[$ .

الجزء II : دالة معرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 (\ln x - 1) - x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$(C_f)$  تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

(1) (أ) بين أن الدالة  $f$  مستمرة عند الصفر من اليمين.

(ب) بين أن:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = -1$  ، ماذا يمكن أن تستنتج؟

(ج) أكتب معادلة نصف المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة  $O$  من اليمين.

(2) (أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

(ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x > 0$  ،  $f'(x) = g(x)$  ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

(3) بين أن:  $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + \alpha}{2}\right)$  ، ثم استنتج حصرا لـ  $f(\alpha)$ .

(4) ليكن  $(D)$  المماس الذي معادلته  $y = -x$ .

(أ) ادرس الوضعية النسبية بين  $(C_f)$  و  $(D)$ .

(ب) انشئ  $(D)$  و  $(C_f)$ . نأخذ  $f(3,55) \approx 0$ .

(5) دالة معرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ:  $F(x) = \frac{x^3}{9}(3 \ln x - 4)$ .

(أ) احسب  $F'(x)$  ، ثم استنتج دالة أصلية للدالة  $h: x \mapsto f(x) + x$  على المجال  $]0; +\infty[$ .

(ب)  $A$  هي مساحة الحيز المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  و المستقيم  $(D)$  و المستقيمين اللذين معادلتاهما  $x = 1$  و  $x = e$ .

بين أن:  $A = \frac{e^3 - 4}{9} u.a$  بعد تمثيلها على الرسم. (يرمز  $u.a$  إلى وحدة المساحة).

ency-education.com/exams

ملاحظة: على المترشح أن يختار احد الموضوعين التاليين.

الموضوع الأول

التمرين الأول: 4ن

- 1- عين الاعداد الصحيحة  $x$  التي تحقق:  $x^2 - x + 6 \equiv 0[9]$
- 2- أ) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي  $n$  باقي القسمة الاقليدية للعدد  $7^n$  على 9 ، ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  أن :  $7^{2n} \equiv 4^n[9]$
- ب) استنتج تبعا لقيم  $n$  الطبيعية باقي القسمة الاقليدية للعدد  $4^n$  على 9 .
- 3- أ) ما هو باقي قسمة العدد:  $5^{2017} + 25^{2018}$  على 9 .
- ب) عين الاعداد الطبيعية  $n$  التي يكون من أجلها العدد :  $7^{2n} - 7^n + 6$  مضاعف للعدد 9
- 4- عين الثنائيات  $(x, y)$  من الأعداد الطبيعية بحيث :  $7^x + 4^y \equiv 2[9]$

التمرين الثاني: 04ن

- يحتوي كيس على 12 كرة منها: 3 بيضاء تحمل الأرقام 1;2;2 وأربع كرات حمراء تحمل الأرقام 1;1;2;2 وخمس كرات خضراء تحمل الأرقام 1;2;2;2;3.
- نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من هذا الكيس
1. نعتبر الحادثتين:  $A$ : "سحب كرتين من نفس اللون"  $B$ : "سحب كرة خضراء على الأقل"
  - أحسب احتمال كل حادثة من الحوادث التالية:  $A$  و  $B$  و  $A \cap B$
  2. نعتبر المتغير العشوائي  $X$  الذي يرفق بكل سحب لكرتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما .
  - عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  , ثم احسب أمله الرياضي.

التمرين الثالث: 5ن

- 1- نعتبر في  $\mathbb{C}$  كثير الحدود  $p(z)$  حيث :  $p(z) = z^4 + 6z^3 + 30z^2 + 48z + 40$
- أ) - بين أنه من أجل كل عدد مركب  $z$  لدينا:  $p(z) = (z + 1 - i)g(z)$  حيث  $g(z)$  كثير حدود يطلب تعيينه.
- ب) - تحقق ان :  $g(-1 - i) = 0$  ثم حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $p(z) = 0$
- 2- نعتبر في المستوى المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس  $(o, \vec{u}, \vec{v})$  النقط :
- $A, B, C$  و  $D$  صور الاعداد المركبة :  $2 + 4i$  ,  $-2 - 4i$  ,  $2 + 3i$  ,  $2 - 3i$  على الترتيب .
- أ) - اكتب العدد المركب  $z$  حيث :  $z = z_A + z_D + 1$  على شكله المثلثي ثم الأسّي. ثم أحسب  $\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^{2018}$ .
- ب) - عين الاعداد الطبيعية  $n$  حتى يكون العدد  $\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^n$  عددا حقيقيا .
- 3- عين مجموعة النقط  $M$  صور العدد المركب  $z$  حيث:  $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$  مع  $k \in \mathbb{Z}$



4- عين العدد المركب  $Z_F$  لاحقة النقطة  $F$  حيث  $i = \frac{Z_F - Z_C}{Z_F - Z_A}$  ثم استنتج طبيعة المثلث  $AFC$ .

5- عين مجموعة النقط  $M$  من المستوي صور العدد المركب  $Z$  حيث:  $z = z_A + ke^{i\frac{\pi}{3}}$  مع  $k \in \mathbb{R}_+$

### التمرين الرابع: 07 ن

المستوى منسوب إلى المعلم المتعاقد و المتجانس  $(0; \vec{i}; \vec{j})$

(1) لتكن  $u$  الدالة المعرفة على  $[0; +\infty[$  كما يلي :  $u(x) = x - \ln(1+x)$  .

✓ ادرس اتجاه تغير الدالة  $u$  .

✓ احسب  $u(0)$  ثم استنتج إشارة  $u(x)$  .

(2)  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = \ln(x + e^{-x})$

أ ( ) تحقق أنه من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$  :  $f(x) = -x + \ln(1 + xe^x)$  .

ب ( ) تحقق أنه من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$  :  $f(x) - \ln(x) = \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right)$  .

ج ( ) احسب نهاية  $f(x)$  عند  $-\infty$  و عند  $+\infty$  و استنتج أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = -x$

مقارب مائل للمنحني  $(c_f)$  التمثيل البياني للدالة  $f$  في المستوي .

(3) ليكن  $(\Gamma)$  المنحني ذو المعادلة :  $y = \ln x$  ، بين أن  $(\Gamma)$  منحنى مقارب للمنحني  $(c_f)$  في جوار  $+\infty$  .

(4) أ ( ) ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها ، ( نقبل أن :  $x + e^{-x} > 0$  من أجل  $x \in \mathbb{R}$  ) .

ب ( ) انشئ كلا من  $(\Delta)$  و  $(c_f)$  و  $(\Gamma)$  في نفس المعلم  $(0; \vec{i}; \vec{j})$  .

(5) نعتبر  $x$  عدد حقيقي من المجال  $[0; +\infty[$  ولتكن  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}^*$  كما يلي :

$$u_n = \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$$

أ ( ) باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب  $u_1$  .

ب ( ) باستعمال الجزء الأول (السؤال 01) بين أن :  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$  .

ج ( ) ادرس رتبة المتتالية  $(u_n)$  ، ثم احسب نهاية  $u_n$  عند  $+\infty$  .

انتهى الموضوع الأول

التمرين الأول: 4 نقاط

كيس به كريات منها أربعة حمراء و  $n$  كرة سوداء حيث  $n$  عدد طبيعي و  $n \geq 2$  كلها متماثلة.

(1) نعتبر  $n = 5$ ، ثم نسحب من الكيس على التوالي دون إرجاع، ثلاث كرات.

(أ) احسب احتمال الحادثتين الآتيتين:

$A$ : "الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون"

$B$ : "الحصول على كرة واحدة حمراء على الأقل"

(ب) بين أن احتمال الحصول على كرة واحدة حمراء فقط هو:  $\frac{10}{21}$ .

(2) نسحب على التوالي مع الإرجاع كرتين.

ونعتبر المتغير العشوائي  $Y$  الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات السوداء المسحوبة.

(أ) عرف قانون احتمال  $Y$ .

(ب) بين أن:  $E(Y) = \frac{2n}{n+4}$

(ج) عين  $n$  حيث:  $E(Y) = \frac{42}{25}$ .

التمرين الثاني: 5 نقاط

I. نعتبر في  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  الآتية:  $(E) \dots z^2 - 2z\sqrt{2} + 4 = 0$

(أ) حل المعادلة  $(E)$ ، نعتبر  $z_1$  هو الحل الذي جزأه التخيلي موجب و  $z_2$  هو الحل الآخر.

(ب) اكتب على الشكل الأسّي العدد المركب  $\frac{z_1}{z_2}$ .

(ج) عين قيم العدد الطبيعي  $n$  التي من أجلها يكون العدد  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$  حقيقياً.

II. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، الوحدة  $1 \text{ cm}$ ، نعتبر النقط  $A$ ،  $B$  و  $\Omega$

لواحقها على الترتيب  $z_A = \sqrt{2}(1 + i)$ ،  $z_B = \sqrt{2}(1 - i)$  و  $z_\Omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

(1) أ) عين لاحقة النقطة  $C$  صورة النقطة  $B$  بالتحاكي  $h$  ذو المركز  $\Omega$  والنسبة  $-3$ .

ب) عين لاحقة النقطة  $D$  صورة النقطة  $B$  بالدوران  $R$  ذو المركز  $O$  والزاوية  $-\frac{\pi}{2}$ .

(2) مثل النقط  $\Omega$ ،  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$ . في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$

(3) أكتب العدد  $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$  على الشكل الجبري، ثم فسر النتيجة هندسياً.

(4) لتكن  $I$  منتصف القطعة  $[CD]$ ، و  $E$  نظيرة  $A$  بالنسبة إلى  $I$ .

بين أن الرباعي  $ACED$  مربع.

التمرين الثالث: 4 نقاط

I. نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $[1; 10]$  بـ:  $g(x) = 3 - x + \ln(x)$ .

(أ) ادرس تغيرات الدالة  $g$  على المجال  $[1; 10]$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(ب) بين أن للمعادلة  $g(x) = 0$  حلاً وحيداً  $\alpha$  في المجال  $[1; 10]$ ، ثم تحقق أن  $4,50 < \alpha < 4,51$ .

(ج) استنتج، حسب قيم  $x$ ، إشارة  $g(x)$  على  $[1; 10]$ .

II. نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

حيث  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بالشكل:  $f(x) = 3 + \ln x$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- (1) أ) مثل على محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية  $(u_n)$ ، لاحظ أن المنحنى  $(C_f)$  هو صورة منحنى الدالة  $\ln$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{v}(0; 3)$ .
- ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  وحول تقاربها.
- (2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  لدينا:  $1 \leq u_n < \alpha$ .
- ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  لدينا:  $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$  واستنتج اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ .
- ج) هل المتتالية  $(u_n)$  متقاربة؟ علل.
- د) استنتج بالضبط نهاية المتتالية  $(u_n)$ .

### التمرين الرابع: 7 نقاط

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  كما يلي:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$$

(C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . الوحدة  $4 \text{ cm}$ .

- 1- نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  بـ:  $g(x) = x + 2 - e^x$ 
  - أ- ادرس تغيرات الدالة  $g$  على المجال  $]0; +\infty[$ .
  - ب- بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  في المجال  $]0; +\infty[$ . ثم تحقق أن:  $1,14 < \alpha < 1,15$ .
  - ت- استنتج إشارة  $g(x)$  حسب قيم  $x$ .
- 2- أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$ :  $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$ .
- ب- احسب نهاية الدالة  $f$  بجوار  $+\infty$ ، وفسر النتيجة بيانياً.
- ت- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$ :  $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$ .
- د- استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$  وشكل جدول تغيراتها.
- 3- بين أن:  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$ ، ثم استنتج حصر  $f(\alpha)$ .
- 4- اكتب معادلة للمستقيم المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C)$  في النقطة ذات الفاصلة  $0$ .
- 5- أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$ :  $f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1}$  حيث  $u$  الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ:  $u(x) = e^x - xe^x - 1$ .
- ب) ادرس اتجاه تغير الدالة  $u$  ثم استنتج إشارة  $u(x)$  على المجال  $]0; +\infty[$ .
- ج) استنتج وضعية المستقيم  $(T)$  مع المنحنى  $(C)$ .
- 6- ارسم  $(T)$  و  $(C)$ .
- 7- أ- عين دالة أصلية  $F$  للدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$ . (استعمل عبارة  $f$  في السؤال 2)
- ب- احسب بالسنتيمتر المربع  $\mathcal{A}$  مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C)$ ، والمستقيم  $(T)$  والمستقيمين اللذين معادلتيهما  $x = 0$  و  $x = 2$ . (تعطى النتيجة بالتقريب إلى  $10^{-2}$ ).

انتهى الموضوع الثاني



**على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:**  
**الموضوع الأول**

✳️ **التمرين الأول:** (4.5 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$  و أكتب الحلول على الشكل الأسّي
2. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  نعتبر النقط  $A, B, C, D$  و لواحقها:  
أح أنشئ النقط  $A, B, C, D$   
ب) أكتب العدد المركب  $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$  على الشكل الأسّي، ثم إستنتج طبيعة المثلث  $ABC$   
ج) عيّن مركز و نصف قطر الدائرة  $(C)$  المحيطة بالمثلث  $ABC$
3. يبين أن العدد  $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2018} \times \left(\frac{z_B}{2}\right)^{1439} \times \left(\frac{z_D}{2}\right)^{1954}$  حقيقي.
4. لتكن  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  حيث:  $(z - z_A)(\bar{z} - z_D) = z_B \cdot \bar{z}_B$   
أح عيّن طبيعة المجموعة  $(E)$  مع تحديد عناصرها المميزة.  
ب) عيّن  $(E')$  صورة  $(E)$  ب التحاكي  $h$  الذي مركزه  $A$  و نسبته  $-2$
5. لتكن  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  حيث:  $\arg(i(\bar{z} - z_A)) = \frac{\pi}{2} + k\pi$  حيث  $(k \in \mathbb{Z})$   
- عيّن طبيعة المجموعة  $(\Gamma)$ .

✳️ **التمرين الثاني:** (4.5 نقاط)

- يحتوي صندوق  $U_1$  على 4 كرات مرقمة بـ: 1، 1، 2، 2 و يحتوي صندوق  $U_2$  على 5 كرات مرقمة بـ: 1، 1، 2، 2، 3 نعتبر أن جميع الكرات متماثلة و لا يمكن التمييز بينها باللمس.
- نسحب كرة واحدة من الصندوق  $U_1$  و نسحب في آن واحد كرتين من الصندوق  $U_2$
1. أحسب إحتمال الحوادث التالية:  
الحادثة  $A$ : الحصول على 3 كرات تحمل نفس الرقم  
الحادثة  $B$ : من بين الكرات المسحوبة توجد على الأقل كرتين تحملان الرقم 2 .  
الحادثة  $C$ : جداء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاثة يساوي 6 .
  2. ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات المسحوبة التي تحمل الرقم 1  
أح عيّن قانون الإحتمال للمتغير العشوائي  $X$  و أحسب أمله الرياضي  
ب) أحسب التباين و الإنحراف المعياري للمتغير العشوائي  $X$ .

$$(I) \quad \begin{cases} U_1 + 2U_2 + U_3 = 100 \\ U_1 \times U_3 = 256 \end{cases} : \text{أساسها } q$$

1. أحسب كل من  $U_1$  ،  $U_2$  ،  $U_3$  و الأساس  $q$  ، ثم تحقق أن  $U_n = 4^n$  .
2. أحسب بدلالة  $n$  كل من المجموع:  $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$  و الجداء  $P_n = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$
- (II) 1. أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي  $n$  بواقي القسمة الإقليدية لـ  $5^n$  على 7
2. يبين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $19^{6n+9} + 2^{6n+4} + 50^{3n+2} - 5^{6n+4} \equiv 0 [7]$
3. نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم :  $S'_n = \frac{1}{\ln 2} [\ln 4 + \ln 4^2 + \dots + \ln 4^n]$
- أحسب  $S'_n$  بدلالة  $n$  ، ثم عيّن قيم العدد الطبيعي  $n$  بحيث يكون:  $S'_n + 3n^2 - n - 5^{2018} \equiv 0 [7]$

### التمرين الرابع: (7 نقاط)

$$(I) \quad \text{نعتبر الدالة } g \text{ المعرفة على المجال } ]0; +\infty[ \text{ بـ: } g(x) = x^2 - 1 - 2 \ln(x)$$

1. أدرس تغيرات الدالة  $g$  ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2. إستنتج إشارة  $g(x)$  على المجال  $]0; +\infty[$

$$(II) \quad \text{نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة على المجال } ]0; +\infty[ \text{ بـ } f(x) = x + \frac{1 - (\ln x)^2}{x}$$

( $C_f$ ) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  (وحدة الطول 1cm)

1. أ) أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  ، ثم فسر النتيجة هندسيا

ب) برهن أن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$  ، ثم إستنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$  لدينا:  $f'(x) = \frac{g(x) + (\ln x)^2}{x^2}$

ب) أحسب  $f'(1)$  ، ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة  $f$  و شكل جدول تغيراتها.

ج) إستنتج أن ( $C_f$ ) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثيها.

3. أ) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$  و فسر النتيجة هندسيا.

ب) أدرس الوضع النسبي لـ ( $C_f$ ) بالنسبة إلى مستقيم المقارب المائل ( $\Delta$ ) .

4. أ) يبين أن المنحنى ( $C_f$ ) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها  $\alpha$  حيث:  $0.3 < \alpha < 0.4$

ب) أنشئ ( $\Delta$ ) و ( $C_f$ ) .

5. أ) أحسب  $S(\lambda)$  مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى ( $C_f$ ) و المستقيمت التي معادلاتها:  $y = x$  ،  $x = 1$  و  $x = \lambda$

حيث  $\lambda$  عدد حقيقي أكبر تماما من  $e$

ب) عيّن قيمة العدد الحقيقي  $\lambda$  بحيث:  $S(\lambda) = \frac{4}{3} \text{ cm}^2$

## الموضوع الثاني

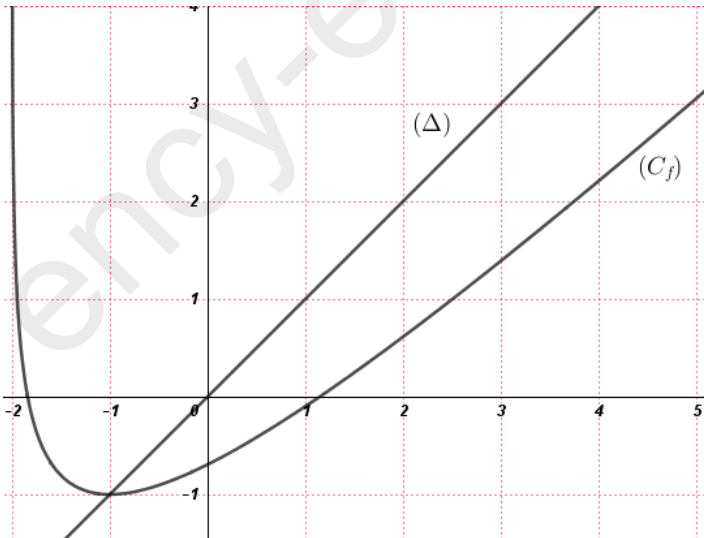
### \* التمرين الأول: (5 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول المركب  $z$  الآتية:  $(z-3)(z^2-4z+13)$
2. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$   
نعتبر النقط  $A, B, C$  و  $D$  لواقعها:  $z_A = i, z_B = 3, z_C = 2 - 3i, z_D = 2 + 3i$  على الترتيب.  
أ) أكتب العدد المركب  $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$  على الشكل الأسّي، ثم إستنتج طبيعة المثلث  $ABC$ .  
ب) أكتب العبارة المركبة للتشابه  $S$  الذي مركزه  $A$  و يحول  $B$  إلى  $C$ ، ثم حدّد نسبته و زاويته
3. أ) عيّّن المجموعة  $(\Gamma)$  للنقط  $M(z)$  من المستوي بحيث:  $\arg(z - z_A)^2 = 2 \arg(z_A) + \arg(z - z_B)^2$   
ب) عيّّن طبيعة المجموعة  $(\Gamma')$  صورة  $(\Gamma)$  بالتحويل  $S$  مع تحديد عناصرها المميزة.
4. نعرف متتالية النقط  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  كما يلي:  $A_{n+1} = S(A_n)$  و  $z_0 = 1 + i$  حيث  $(z_n)$  لاحقة النقط  $(A_n)$   
أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $z_n = (1 - i)^n + i$   
ب) عيّّن قيم  $n$  الطبيعية حتى تنتمي النقط  $A_n$  إلى المستقيم  $(AD)$ .

### \* التمرين الثاني: (4 نقاط)

- (I) نعتبر في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة:  $5x - 6y = 3 \dots (1)$   
1. بيّن أنه إذا كانت الثنائية  $(x; y)$  حلا للمعادلة (1) فإنّ  $x$  مضاعف للعدد 3.  
2. حل في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة (1)، ثم عيّّن الأعداد الصحيحة  $b$  بحيث:  $\begin{cases} b \equiv -1 [6] \\ b \equiv -4 [5] \end{cases}$
- (II) 1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  بواقي القسمة الإقليدية للعدد  $2^n$  على 9  
2. بيّن أنه إذا كانت الثنائية  $(x; y)$  حلا للمعادلة (1) حيث  $x$  و  $y$  عددين طبيعيين، فإن العدد:  $2^{2017} \times 3 - 4^{3y} - 2^{x-1}$  مضاعف للعدد 9.
- (III)  $A$  و  $B$  عددان طبيعيين حيث:  $A$  يكتب  $\overline{1\alpha 0\alpha 00^3}$  في النظام ذي الأساس 3 و  $B$  يكتب  $\overline{\alpha\beta 0\alpha^5}$  في النظام ذي الأساس 5  
- عيّّن  $\alpha$  و  $\beta$  حتى تكون الثنائية  $(A; B)$  حل للمعادلة (1).

### التمرين الثالث: (4 نقاط)



نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[-2; +\infty[$  كما يلي:

$$f(x) = x - \ln(x+2)$$

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد

و المتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  و المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = x$

1. أحسب  $f(-1)$  ثم بقراءة بيانية حدّد إتجاه تغير الدالة  $f$

2. نعرف المتتالية العددية  $(U_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:

$$U_{n+1} = f(U_n) : n \text{ عدد طبيعي}$$

أ) أنقل الشكل المقابل، ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود  $U_0, U_1, U_2, U_3$  (دون حساب الحدود)



- ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية  $(U_n)$  و تقاربها إطلاقاً من التمثيل السابق

2. أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n : U_n \geq -1$

ب) بين أن  $(U_n)$  متناقصة تماماً، ثم استنتج أنها متقاربة و أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

3. نعتبر المتتالية العددية  $(V_n)$  المعرفة بحدّها الأول  $V_0 = 0$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم:

$$V_n = \ln [(U_0 + 2) (U_1 + 2) \times \dots \times (U_{n-1} + 2)]$$

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n : V_n = 3 - U_n$

ب) استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} [(U_0 + 2) (U_1 + 2) \times \dots \times (U_{n-1} + 2)]$

التمرين الرابع: (7 نقاط)

(I) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $g(x) = (2x + 1)e^x - 1$

1. أدرس تغيرات الدالة  $g$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2. أحسب  $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$

(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = x(1 - e^{-x})^2$

$(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  (وحدة الطول 1cm)

1. أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

2. أ) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$  و فسر النتيجة هندسياً.

ب) أدرس الوضع النسبي لـ  $(C_f)$  بالنسبة إلى مستقيمه المقارب المائل  $(\Delta)$ .

3. أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  لدينا:  $f'(x) = (e^{-x} - 1)g(-x)$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  و شكل جدول تغيراتها.

4. أ) أكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 0

ب) أدرس الوضع النسبي لـ  $(C_f)$  بالنسبة إلى المماس  $(T)$

ج) استنتج أن  $(C_f)$  يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثيها،

د) أنشئ  $(\Delta)$ ،  $(T)$  و  $(C_f)$ .  $(f(-\frac{5}{4}) \approx -7.75)$

5. ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد و إشارة حلول المعادلة:  $f(x) = mx$

6. أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x : 2f(x) + 3f'(x) + f''(x) = 3 + 2x - 2e^{-x} - e^{-2x}$

ب) أحسب  $S$  مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  و المستقيمات التي معادلاتها:  $y = x$ ،  $x = 0$  و  $x = 1$

إتتهى الموضوع الثاني

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

### الموضوع الأول

#### التمرين الأول: (4 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقط  $A, B, C, D$  التي لواحقها على الترتيب ،  $z_A = 2 - 2i$  ،  $z_B = -z_A$  ،  $z_C = z_B e^{i\frac{\pi}{2}}$  و  $z_D = 2 - 6i$  .

(1) أكتب كل من الأعداد  $z_A, z_B, z_C$  و  $z_C$  على الشكل الأسّي ، و بين أن  $z_A^{2018} + z_C^{2018} = 0$

(2) أ) علم النقط  $A, B, C$  و  $D$  .

ب) بين أن النقطه  $D$  هي صورة النقطه  $C$  بالدوران الذي مركزه النقطه  $A$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  .

ج) ما طبيعة الرباعي  $ABCD$  ؟ مع التعليل .

(3)  $\alpha$  عدد حقيقي غير معدوم ، نسمي النقطه  $G_\alpha$  مرجح الجملة المثقله :  $\{(A,1); (B,-1); (C,\alpha)\}$

أ) بين أن  $\overrightarrow{CG_\alpha} = \frac{1}{\alpha} \overrightarrow{BA}$  ، استنتج طبيعة المجموعه  $(\Delta)$  مجموعه النقط  $G_\alpha$  عندما يمسح  $\alpha$  مجموعه الأعداد

الحقيقية الغير معدومه ، ثم أنشئ  $(\Delta)$  .

ب) عين قيمة  $\alpha$  لكي تنطبق النقطه  $G_\alpha$  على النقطه  $D$  .

(4) أ) عين لاحقه النقطه  $G_2$  مرجح الجملة المثقله  $\{(A,1); (B,-1); (C,2)\}$  .

ب) حدد طبيعة  $(\Gamma)$  مجموعه النقط  $M$  من المستوي حيث  $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{2}$  وعناصرها

المميزه و أنشئها.

#### التمرين الثاني: (5 نقاط)

نعتبر المعادله (1) ذات المجهول  $(x;y): (1) : 2688x + 3024y = -3360$  حيث  $x$  و  $y$  عدنان صحيحان .

(1) أ) عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 2688 و 3024 .

ب) استنتج أن المعادله (1) تكافئ المعادله (2)  $8x + 9y = -10$  .

(2) حل المعادله (2) اذا علمت أن الثنائيه  $(1,-2)$  حلا خاصا لها

(3) عين الثنائيات  $(x;y)$  حلول المعادله (2) بحيث  $x^2 \equiv y + 3 [5]$

(4) في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ، نعتبر النقط  $A(2,-2,0)$  ،  $B(0,1,4)$  و  $C(1,0,3)$

ونعتبر المستوي  $(P_1)$  المعروف بالمعادله  $3x - y + 5z = 0$

- (أ) بين أن النقط  $A, B, C$  تعين مستويا  $(P_2)$  حيث  $x + 2y - z + 2 = 0$  معادلة ديكارتية له .  
 (ب) اثبت أن المستويين  $(P_1)$  و  $(P_2)$  متقاطعان .  
 (ج) ليكن  $(\Delta)$  مستقيم تقاطع المستويين  $(P_1)$  و  $(P_2)$   
 أثبت أن إحداثيات نقط المستقيم  $(\Delta)$  تحقق المعادلة (2) .

### التمرين الثالث : ( 4 نقاط )

نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة كمايلي :  $u_0 = -3$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 3n - 1$

- (1) (أ) أحسب  $u_1, u_2, u_3$   
 (ب) بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 3$  :  $u_n > 0$  .  
 (ج) أستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 4$  :  $u_n > 3n - 4$  ، ثم استنتج نهاية المتتالية  $(u_n)$  .

(2) نعرف المتتالية  $(v_n)$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$  كما يلي :  $v_n = u_n - 9n + 30$   
 (أ) برهن أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول  $v_0$

(ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = 27\left(\frac{2}{3}\right)^n + 9n - 30$

- (3) (أ) أحسب بدلالة  $n$  الجداء ،  $\tau_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \dots \times e^{v_n}$   
 (ب) احسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

### التمرين الرابع : ( 7 نقاط )

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $]-1, +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = x + 1 + \ln(x+1) - \ln(x+2)$   
 وليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

(1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  ، و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  . (لاحظ أن  $f(x) = x + 1 + \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$  )

(2) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]-1, +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{(x+1)(x+2)}$

(ب) أستنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) (أ) بين  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 1$  ثم أستنتج أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا  $(\Delta)$  يطلب كتابة معادلة له .

(ب) أدرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$  .

(4) بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $\alpha$  حيث  $-0.5 < \alpha < 0$

(5) أرسم  $(\Delta)$  و  $(C_f)$  .

(6) (أ)  $\lambda$  عدد حقيقي ، بين أن الدالة  $x \mapsto (x - \lambda) \ln(x - \lambda) - x$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \ln(x - \lambda)$  على المجال  $[\lambda, +\infty[$

(ب) أحسب العدد  $S = \int_0^1 (x+1 - f(x)) dx$  ، وفسر بيانها النتيجة .

(7) لتكن الدالة العددية  $h$  المعرفة على المجال  $]-1, +\infty[$  كمايلي :  $h(x) = [f(x)]^2$   
 أدرس تغيرات الدالة  $h$  ، ثم شكل جدول تغيراتها ( دون تعيين عبارة  $h(x)$  )



## الموضوع الثاني

### التمرين الأول: (4 نقط )

صندوق به ثلاث كرات خضراء تحمل الرقم 0، كرتان حمراوان تحملان الرقم 5 وكرة واحدة بيضاء تحمل العدد  $\alpha$  ( $\alpha$  عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 5 و 10)، كل الكرات لا نميز بينها عند اللمس. يسحب لاعب ثلاث كرات في آن واحد

(I) احسب احتمال الحوادث التالية :

A " اللاعب يسحب ثلاث كرات من نفس اللون "

B " اللاعب يسحب ثلاث كرات من ألوان مختلفة "

C " اللاعب يسحب كرتين فقط من نفس اللون "

(II) اللاعب يربح بالدينار مجموع الأرقام المسجلة على الكرات المسحوبة .

نعرف المتغير العشوائي  $X$  الذي يرفق بكل عملية سحب ثلاث كرات الربح بالدينار الذي يتحصل عليه اللاعب

(1) عين قيم المتغير العشوائي، و بين أن  $P(X = \alpha) = \frac{3}{20}$

(2) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  .

(3) أحسب بدلالة  $\alpha$  الأمل الرياضي  $E(X)$  للمتغير العشوائي، وعين قيمة العدد  $\alpha$  حتى يربح اللاعب 20 ديناراً.

### التمرين الثاني: (5 نقاط )

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة :  $z^2 - 6z + 13 = 0$

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس.  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  .

نعتبر النقط  $A, B, C$  و  $D$  التي لواحقها  $z_A = i$  ،  $z_B = 2$  ،  $z_C = 3 + 2i$  ، و  $z_D = \overline{z_C}$  على الترتيب.

(1) أ) علم النقط  $A, B, C$  و  $D$  .

ب) حدد الكتابة المركبة للتشابه المباشر الذي مركزه  $A$  ويحول  $B$  إلى  $C$  .

ج) بين أن  $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = -i$  ، ثم استنتج طبيعة المثلث  $ABC$  .

د) برهن أن النقطة  $B$  هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث  $ADC$

(2)  $S$  التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة  $M$  ذات اللاحقة  $Z$  النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z'$  حيث  $z' = (1+i)z + 1$

أ) عين طبيعة التحويل  $S$  وعناصره المميزة ، ثم عين لاحقة صورة النقطة  $B$  بالتحويل  $S$  .

ب) عين  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  بحيث  $z = 2 + \sqrt{5}e^{i\theta}$  و  $\theta$  يمسح  $\mathbb{R}$  .

ج) برهن أن  $z' - z_C = (1+i)(z - z_B)$

د) استنتج انه اذا كانت  $M$  نقطة من المجموعة  $(E)$  فإن  $M'$  تنتمي إلى دائرة  $(H)$  يطلب تحديد مركزها ونصف

قطرها ثم أنشئ كل من  $(E)$  و  $(H)$  في نفس المعلم السابق .

### التمرين الثالث: (4 نقاط)

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $]-1, +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$  ، و  $(c)$  تمثيلها البياني المعطى في الشكل

(1) أ) أدرس اتجاه تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $]-1, +\infty[$

ب) أستنتج أنه إذا كان:  $x \in [1, 2]$  فإن  $f(x) \in [1, 2]$

(2)  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بعدها الأول  $u_0 = 2$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = f(u_n)$

- أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود  $u_0$  ،  $u_1$  و  $u_2$  مبرزا خطوط التمثيل، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغيرات  $(u_n)$  وتقاربها.

(3) أ) برهن بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $1 < u_n \leq 2$

ب) بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما .

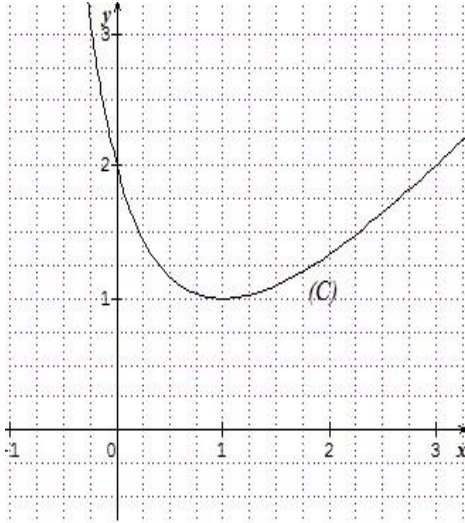
ج) استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة وحدد نهايتها.

(4) أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن:  $0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{3}(u_n - 1)$

ب) أستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن:  $0 < u_n - 1 \leq \frac{1}{3^n}$

ج) نضع :  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  فإن:  $n < S_n \leq n + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$  ، ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .



### التمرين الرابع: (7 نقاط)

(I) نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $g(x) = 1 - xe^{1-x}$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$

(2) أستنتج حسب قيم العدد الحقيقي  $x$  إشارة  $g(x)$ .

(II) نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = x + (x+1)e^{1-x}$

وليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) أ) بين أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  ، وأحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب) بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = g(x)$  ، ثم أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  و شكل جدول تغيراتها .

ج) استنتج أن للمنحنى  $(C_f)$  نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثيها .

(2) أ) بين أن المستقيم  $(\Delta)$  المعروف بالمعادلة  $y = x$  مقارب مائلا للمنحنى  $(C_f)$ .

ب) أدرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$ .

(3) (T) مستقيم معادلته  $y = x + e$  ، بين أن المستقيم (T) مماس للمنحنى  $(C_f)$  في نقطة يطلب تحديدها .

(4) أ) بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $\alpha$  حيث  $-0.9 < \alpha < -0.8$

ب) أحسب  $f(-1.5)$  ثم أرسم  $(T)$  ،  $(\Delta)$  والمنحنى  $(C_f)$ .

(5) ناقش بيانها وحسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة  $(x+1)e^{1-x} = |m|$ .

## على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين: الموضوع الأول:

التمرين الأول: ( 05 نقاط )

- في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .  
نعتبر النقطتين  $A(3; 0; -2)$  و  $B(3; 3; 1)$  والمستقيمين  $(\Delta)$  الذي يشمل  $A$  و  $\vec{u}(3; 1; -1)$  شعاع توجيه له  
و  $(d)$  الذي يشمل  $B$  و  $\vec{v}(0; 2; 2)$  شعاع توجيه له.  
1/ تحقق ان المستقيم  $(\Delta)$  هو تقاطع المستويين :  $(P_1) : x - 2y + z - 1 = 0$  و  $(P_2) : x - y + 2z + 1 = 0$ .  
2/ نعتبر المجموعة  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  من الفضاء متساوية المسافة عن المستويين  $(P_1)$  و  $(P_2)$ .  
أ ) بين ان النقطة  $I(3; \alpha + 2; \alpha)$  تنتمي إلى المجموعة  $(\Gamma)$  حيث  $\alpha$  وسيط حقيقي.  
ب ) بين ان مجموعة النقط  $I$  ، لما تمسح  $\alpha$  مجموعة الاعداد الحقيقية، هي المستقيم  $(d)$ .  
ج ) جد نقطة تقاطع المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(d)$  وبين أن النقطة  $A$  هي المسقط العمودي للنقطة  $B$  على  $(\Delta)$ .  
د ) أكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة  $(S)$  التي مركزها النقطة  $B$  وتمس المستويين  $(P_1)$  و  $(P_2)$  في النقطتين  $C$  و  $D$  على الترتيب.

3/ أ ) بين أن المجموعة  $(\Gamma)$  هي اتحاد مستويين  $(Q_1)$  و  $(Q_2)$  يطلب تعيين معادلة ديكارتية لكل منهما

( حيث  $(Q_1)$  المستوي الذي يشمل المستقيم  $(d)$  )

ب ) تحقق أن المستويين  $(Q_1)$  و  $(Q_2)$  متعامدان .

ج ) نسمي  $d_1$  المسافة بين النقطة  $C$  والمستوي  $(Q_1)$  ،  $d_2$  المسافة بين النقطة  $C$  والمستوي  $(Q_2)$ .

• بين أن :  $d_1 = \frac{\sqrt{22}}{4}$  و  $d_2 = \frac{11\sqrt{2}}{4}$

التمرين الثاني: ( 04 نقاط )

$(u_n)$  المتتالية المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية غير المعدومة  $\mathbb{N}^*$  بـ:

$$\begin{cases} u_1 = e^2 \\ u_{n+1} = e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{u_n} \end{cases}$$

1/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n : u_n > \frac{1}{e}$ .

2/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n : \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$  ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ .

3/ استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة ثم احسب نهايتها .

4/ نعتبر من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n : v_n = \frac{1}{2} + \ln \sqrt{u_n}$ .

أ ) برهن أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.



- ب ( أكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  واستنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .  
 ج ( أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  :  $S_n = \frac{1}{1 + \ln u_1} + \frac{1}{1 + \ln u_2} + \dots + \frac{1}{1 + \ln u_n}$  .  
 التمرين الثالث: ( 05 نقاط )

- (I) 1/ اكتب على الشكل الجبري العدد المركب :  $(\sqrt{3} - i)^2$  .  
 2/ حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $(z^2 - 2 + 2i\sqrt{3})(z^2 - 8\sqrt{3}z + 64) = 0$  .  
 (II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  نعتبر النقط  $A, B, C$  و  $D$  التي لواحقها على الترتيب  $z_A = 4\sqrt{3} - 4i, z_B = 4\sqrt{3} + 4i, z_C = -\sqrt{3} + i$  و  $z_D = 2i$  .  
 1/ اكتب على الشكل الاسي العدد المركب  $\frac{z_B}{z_A}$  ثم استنتج طبيعة المثلث  $OAB$  .  
 2/ ليكن  $G$  مرجح الجملة  $\{(O; -1), (D; 1), (B; 1)\}$  . تحقق أن  $G$  موجودة وأحسب لاحقها  $z_G$  .  
 • عين المجموعة  $(\Gamma)$  للنقط  $M$  من المستوي حيث :  $\|\vec{MB} + \vec{MD} - \vec{MO}\| = \|\vec{MB} - \vec{MG}\|$  .  
 3/ احسب العدد المركب  $\frac{z_G - z_C}{z_D - z_C}$  ، ثم استنتج محول النقطة  $D$  الى النقطة  $G$  مع ذكر عناصره المميزة .  
 4/ عين مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  بحيث يكون العدد  $\frac{z - z_G}{z - z_D}$  حقيقيا موجبا تماما .  
 5/ عين لاحقة النقطة  $F$  حتي يكون الرباعي  $ACGF$  معيناً ثم أحسب مساحته .  
 التمرين الرابع: ( 06 نقاط )

- (I)  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  ب :  $f(x) = x - (x^2 + 1)e^{-x+1}$  .  
 ليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .  
 1/ أ ( أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  وبين أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  .  
 ب ( بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = 1 + (x - 1)^2 e^{-x+1}$  .  
 ج ( استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها .  
 2/ • بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة :  $y = x$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$  .  
 • حدد وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة الى  $(\Delta)$  .  
 3/ بين ان المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $1.8 < \alpha < 1.9$  .  
 4/ اكتب معادلة للمماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 1 .  
 5/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f''(x) = -(x - 1)(x - 3)e^{-x+1}$  ثم استنتج أن  $(C_f)$  يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيينهما .  
 6/ أحسب  $f(0)$  ثم ارسم المستقيمين  $(T)$  و  $(\Delta)$  والمنحنى  $(C_f)$  .  
 7/ ناقش بياننا حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة :  $f(x) = x + m$  .  
 (II) 1/ نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  :  $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x+1} dx$  . بين أن الدالة  $G$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  ب :  $G(x) = -(x + 1)e^{-x+1}$  هي أصلية للدالة  $x \mapsto xe^{-x+1}$  وأحسب  $I_1$  .  
 2/ باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن :  $I_{n+1} = -1 + (n + 1)I_n$  من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  .  
 وأحسب  $I_2$  ، استنتج مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  والمستقيم  $(\Delta)$  والمستقيمين اللذين معادلتيهما :  $x = 0$  و  $x = 1$  .

## الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (05 نقاط)

1/ نعتبر في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلتين: (E)  $2081x - 2018y = 1$  و (E')  $2081x - 2018y = 3$ .

- أ) بين ان العددين 2018 و 2081 أوليان فيما بينهما .  
 ب) باستعمال خوارزمية إقليدس عين حلا خاصا للمعادلة (E) ثم استنتج حلا خاصا للمعادلة (E').  
 ج) حل في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة (E').

2/ نرسم ب d الى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y .

أ) ماهي القيم الممكنة للعدد d ؟

ب) عين حلول المعادلة (E') حتي يكون  $d = 3$  .

3/ A و B عددين طبيعيين يكتبان على الترتيب في النظام الذي أساسه 5 على الشكل:  $\overline{\alpha\beta 0\alpha\alpha}^5$  ،  $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\beta}^5$

أ) بين أنه إذا كان:  $B - A = 63$  فإن:  $19\alpha + 6\beta = 63$  (\*)

ب) بين انه توجد ثنائية وحيدة  $(\alpha; \beta)$  من  $\mathbb{N}^2$  تحقق المعادلة (\*) ثم استنتج كتابة A و B في النظام العشري

التمرين الثاني: (05 نقاط)

P(z) كثير الحدود للمتغير المركب z المعروف كيلي:  $P(z) = z^3 + (2 - \sqrt{3})z^2 + (3 - 2\sqrt{3})z + 6$

1/ أ) احسب  $P(-2)$  ثم عين العددين  $\alpha$  و  $\beta$  حتي يكون:  $P(z) = (z + 2)(z^2 + \alpha z + \beta)$  (\*)

ب) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة:  $P(z) = 0$  (نرمز لحلي المعادلة (\*)) ب  $z_1$  و  $z_2$  حيث  $\text{Im}(z_1) > 0$

2/ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المركب  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  نعتبر النقط A، B و C ذات

اللواحق على الترتيب  $z_A = \frac{2}{\sqrt{3}}z_1$  ،  $z_B = \overline{z_A}$  و  $z_C = -2$

أ) اكتب كلا من الأعداد  $z_A, z_B, z_C$  على الشكل الأسّي ، ثم استنتج ان النقط A، B و C تنتمي الى

دائرة (C) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتي يكون العدد  $(\frac{z_A}{z_B})^n$  حقيقي.

ج) عين ثم أنشئ المجموعة  $(\Delta)$  مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث:  $\bar{z} = ke^{-i\frac{2\pi}{3}}$  عندما k يسمح  $\mathbb{R}$

3/ أ) عين الشكل الأسّي للعدد:  $L = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$

ب) استنتج طبيعة التحويل r الذي يحول B إلى A ثم عين عناصره المميزة وكتابته المركبة.

ج) حدد مع التعليل طبيعة المثلث ABC.

د) عين قيم العدد الطبيعي n' حتي يكون العدد  $L^{2018n'}$  تخيلي.

هـ) عين اللاحقة  $z_D$  للنقطة D حتي يكون الرباعي ABCD متوازي أضلاع .

و) استنتج أن النقطتين B و D تنتميان إلى حامل  $(\Delta)$  .

4/ ليكن h التحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 .

أ) عين الكتابة المركبة ل h.

ب) استنتج صورة لكل من من المستقيم (BD) والدائرة (C) بالتحاكي h.

ج) عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل  $h \circ r$  ( يطلب تعيين الكتابة المركبة )

### التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 10 كريات منها 05 كريات حمراء تحمل الارقام -2 ، -1 ، 0 ، 1 ، 2 ، و 3 كريات خضراء تحمل الارقام -1 ، 0 ، 1 ، و كرتان سوداوان تحملان على الترتيب الرقنين -1 ، 0 .  
1/ نسحب عشوائيا وفي آن واحد ، كرتين من هذا الكيس ، نفترض أن كل الكريات لها نفس احتمال السحب.

نعتبر المتغير العشوائي  $X$  الذي يرفق بكل سحبة ممكنة بالعدد الحقيقي  $\ln|x-y|$  حيث  $x$  و  $y$  هما الرقنان اللذان تحملهما الكرتان المسحوبتان من الكيس.  
أ) عين قيم المتغير العشوائي  $X$ .

ب) أكتب قانون احتمال  $X$  واحسب أمله الرياضي  $E(X)$ .  
2/ نعيد كل الكريات المسحوبة إلى الكيس ونسحب منه كرتين على التوالي دون إرجاع .  
أ) احسب عدد الحالات الممكنة للسحب.

ب) احسب  $P(A)$  و  $P(B)$  ، حيث الحدثان  $A$  و  $B$  معرفان كما يلي :

$A$  : "الكرتان المسحوبتان لونيهما مختلفان".

$B$  : "الكرتان المسحوبتان تحمل كل منهما عددا موجبا تماما".

### التمرين الرابع: (06 نقاط)

I) نعتبر الدالتين  $g$  و  $h$  والمعرفتين على  $]0; +\infty[$  كمايلي :  $g(x) = x - 1 - \ln x$  و  $h(x) = x + (x - 2)\ln x$ .  
1/ أ) احسب  $g'(x)$  واستنتج اتجاه تغير الدالة  $g$ .

ب) استنتج أن :  $g(x) \geq 0$  من أجل كل  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$ .

ج) بين أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$  :  $h(x) = 1 + g(x) + (x - 1)\ln x$ .

د) بين أن من أجل كل  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$  فإن :  $h(x) > 0$ .

II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  بـ :  $f(x) = 1 + x\ln x - (\ln x)^2$ .

و ليكن  $(C_f)$  التمثيل البياني لـ  $f$  في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1/ احسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  و بين أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  ، ثم فسر النتيجة الاولى هندسيا .

2/ أ) بين أن من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$  : بـ :  $f'(x) = \frac{h(x)}{x}$ .

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها .

ج) بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $\alpha \in ]0, 4; 0, 5[$ .

3/ أ) أكتب معادلة  $(\Delta)$  مماس  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

ب) تحقق أن من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$  :  $f(x) - x = (\ln x - 1)g(x)$ .

ج) استنتج الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  مع المستقيم  $(\Delta)$ .

4/ ارسم  $(C_f)$  والمستقيم  $(\Delta)$ .

III)  $(U_n)$  المتتالية المعرفة من اجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ :  $U_0 = \sqrt{e}$  و  $U_{n+1} = f(U_n)$ .

أ) برهن بالتراجع أنه اجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $1 \leq U_n \leq e$ .

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية  $(U_n)$  ، ثم برر تقاربها و عين نهايتها.

تمنياتنا لكم بالنجاح في بكالوريا -2018



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

### الموضوع الأول :

#### **التمرين الأول: (04 ن)**

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O, \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقط  $A ; B ; C ; D$  التي لواحقها على الترتيب :  $z_A = 2 - 2i ; z_B = -z_A ; z_C = z_B e^{\frac{\pi}{2}} ; z_D = 2 - 6i$

(1) اكتب كل من الأعداد  $z_A ; z_B ; z_C$  على الشكل الأسّي وبين أن  $z_A^{2018} + z_C^{2018} = 0$

(2) أ - علم النقط  $A ; B ; C ; D$  .

ب - بين أن النقط  $D$  هي صورة النقط  $C$  بالدوران الذي مركزه  $A$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  .

ج - ما طبيعة الرباعي  $ABCD$  ؟ مع التعليل .

(3)  $\alpha$  عدد حقيقي غير معدوم ؛ نسمي النقط  $G_\alpha$  مرجح الجملة المثقلة  $\{(A, 1), (B, -1), (C, \alpha)\}$

أ - بين أن  $\overrightarrow{CG_\alpha} = \frac{1}{\alpha} \overrightarrow{BA}$  . استنتج طبيعة المجموعة  $(\Delta)$  مجموعة النقط  $G_\alpha$  عندما يسمح  $\alpha$  مجموعة الأعداد الحقيقية الغير معدومة ثم أنشئ  $(\Delta)$  .

ب - عين قيمة  $\alpha$  لكي تنطبق النقط  $G_\alpha$  على النقط  $D$  .

(4) أ- عين لاحقة النقط  $G_2$  مرجح الجملة المثقلة  $\{(A, 1), (B, -1), (C, 2)\}$  .

ب - حدد طبيعة  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي حيث :  $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{2}$  وعناصرها المميزة ثم أنشئها .

#### **التمرين الثاني: (05 ن)**

نعتبر في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة ذات المجهول  $(x, y)$  : (1)  $2688x + 3024y = -3360$ .....

(1) أ - عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 2688 و 3024 .

ب - استنتج أن المعادلة (1) تكافئ المعادلة (2)  $8x + 9y = -10$ .....

(2) حل المعادلة (2) إذا علمت أن الثنائية  $(1, -2)$  حل خاص لها .

(3) عين الثنائيات  $(x, y)$  حلول المعادلة 2 بحيث :  $x^2 \equiv y + 3[5]$

(4) في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ؛ نعتبر النقط  $A(2, -2, 0)$  ؛  $B(0, 1, 4)$  و  $C(1, 0, 3)$

ونعتبر المستوي  $(p_1)$  المعرف بالمعادلة  $3x - y + 5z = 0$

أ - بين أن النقط  $A ; B ; C$  تعين مستويا  $(p_2)$  حيث  $x + 2y - z + 2 = 0$  معادلة ديكارتية له .

ب- اثبت أن المستويين  $(p_1)$  و  $(p_2)$  متقاطعان .

ج- ليكن  $(\Delta)$  مستقيم تقاطع المستويين  $(p_1)$  و  $(p_2)$   
أثبت أن احداثيات نقط تقاطع المستقيم  $(\Delta)$  تحقق المعادلة (2) .

### التمرين الثالث (04ن)

نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة كما يلي :  $u_0 = -3$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؛  $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 3n - 1$

(1) أ - احسب  $u_1$  ؛  $u_2$  و  $u_3$

ب - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 3$  :  $u_n > 0$

ج - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 4$  :  $u_n > 3n - 4$  ؛ ثم استنتج نهاية المتتالية  $(u_n)$  .

(2) نعرف المتتالية  $(v_n)$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$  كما يلي :  $v_n = u_n - 9n + 30$

أ - برهن أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول  $v_0$  .

ب - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = 27\left(\frac{2}{3}\right)^n + 9n - 30$

(3) أ- احسب بدلالة  $n$  الجداء :  $\tau_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \dots \times e^{v_n}$

ب- احسب بدلالة  $n$  المجموع :  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

### التمرين الرابع: (07ن)

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $]-1, +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = x + 1 + \ln(x+1) - \ln(x+2)$

وليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

(1) احسب  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  . ( لاحظ أن  $f(x) = x + 1 + \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$  )

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]-1, +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{(x+1)(x+2)}$

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) أ - بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 1$  ثم استنتج أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا  $(\Delta)$  يطلب كتابة معادلة له .

ب- ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$  .

(4) بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $\alpha$  حيث  $-0,5 < \alpha < 0$  .

(5) أنشئ  $(\Delta)$  و  $(C_f)$  .

(6) أ  $\lambda$  عدد حقيقي . بين أن الدالة  $x \mapsto (x-\lambda)\ln(x-\lambda) - x$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \ln(x-\lambda)$  على المجال  $]\lambda, +\infty[$  .

ب- احسب العدد  $S = \int_0^1 (x+1 - f(x))dx$  ؛ وفسر النتيجة بيانيا .

(7) لتكن الدالة العددية  $h$  المعرفة على المجال  $]-1, +\infty[$  كما يلي :  $h(x) = [f(x)]^2$

- ادرس تغيرات الدالة  $h$  ؛ ثم شكل جدول تغيراتها ( دون تعيين عبارة  $h(x)$  )

انتهى الموضوع الأول

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول: (04 ن)

صندوق به ثلاث كرات خضراء تحمل الرقم 0، كرتان حمراوان تحملان الرقم 5 وكرة واحدة بيضاء تحمل العدد  $\alpha$ .

( $\alpha$  عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 5 و 10)، كل الكرات لا نميز بينها عند اللمس.

سحب لاعب ثلاث كرات في أن واحد

(1) احسب احتمال الحوادث التالية :

A: اللاعب يسحب ثلاث كرات من نفس اللون

B: اللاعب يسحب ثلاث كرات من ألوان مختلفة

C: اللاعب يسحب كرتين من نفس اللون.

(2) اللاعب يربح بالدينار مجموع الأرقام المسجلة علي الكرات المسحوبة.

نعرف المتغير العشوائي  $X$  الذي يرفق بكل عملية سحب ثلاث كرات الربح بالدينار الذي يتحصل عليه اللاعب.

أ- عين قيم المتغير العشوائي ، وبين أن  $P(X = \alpha) = \frac{3}{20}$ .

ب- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$ .

ج- احسب بدلالة  $\alpha$  الأمل الرياضي  $E(X)$  للمتغير العشوائي  $X$  ، وعين قيمة العدد  $\alpha$  حتى يربح اللاعب 20 دينارا

### التمرين الثاني: (05 ن)

أ. حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة:  $Z^2 - 6Z + 13 = 0$

أ. المستوي المركب منسوب إلي المعلم المتعامد و المتجانس  $(O, \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقط  $A, B, C$  و  $D$  التي لواحقها  $z_A = i$  ؛  $z_B = 2$  ؛  $z_C = 3 + 2i$  و  $z_D = \overline{z_C}$  علي الترتيب

(1) أ- علم النقط  $A, B, C$  و  $D$

ب- حدد الكتابة المركبة للتشابه المباشر الذي مركزه الذي مركزه  $A$  ويحول  $B$  الي  $C$

ج- بين أن  $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = -i$  ، ثم استنتج طبيعة المثلث  $ABC$ .

د- برهن أن النقط  $B$  هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث  $ADC$ .

(2)  $S$  التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطه  $M$  ذات اللاحقه  $z$  النقطه  $M'$  ذات اللاحقه  $z'$  حيث:  $z' = (1+i)z + 1$

أ- عين طبيعة التحويل  $S$  و عناصره المميزة ، ثم عين لاحقه صورة النقطه  $B$  بالتحويل  $S$ .

ب- عين ( $E$ ) مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقه  $z$  بحيث:  $z = 2 + \sqrt{5}e^{i\theta}$  و  $\theta$  يمسح  $\mathbb{R}$ .

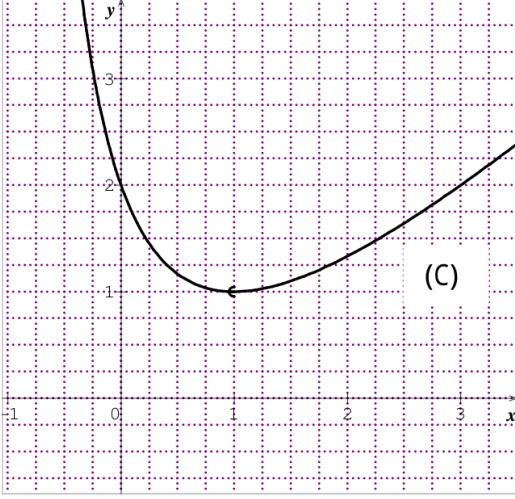
ج- برهن أن:  $z' - z_C = (1+i)(z - z_B)$



د - استنتج أنه إذا كانت  $M$  نقطة من المجموعة  $(E)$  فإن  $M'$  تنتمي إلى دائرة  $(H)$  يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها ثم أنشئ كل من  $(E)$  و  $(H)$  في نفس المعلم السابق .

### التمرين الثالث (04 ن)

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $]-1, +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$  و  $(C)$  تمثيلها البياني المعطى في الشكل



(1) أ- ادرس تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $]-1, +\infty[$

ب- استنتج أنه إذا كان  $x \in [1, 2]$  فإن  $f(x) \in [1, 2]$

(2)  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول  $u_0 = 2$

ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = f(u_n)$

- أعد رسم الشكل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود

$u_0, u_1, u_2$  مبرزاً خطوط التمثيل ، ثم ضع تخميناً حول اتجاه تغير  $(u_n)$

(3) أ- برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $1 < u_n \leq 2$

ب- بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماماً .

ج- استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة وحدد نهايتها .

(4) أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :  $0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{3} (u_n - 1)$

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :  $0 < u_n - 1 \leq \frac{1}{3^n}$

ج- نضع  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  فإن :  $n < S_n \leq n + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{3^n} \right)$  ثم احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

### التمرين الرابع : (07 ن)

نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = 1 - xe^{1-x}$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$

(2) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي  $x$  إشارة  $g(x)$

(II) نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = x + (x+1)e^{1-x}$

و ليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ- بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  ، و احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب - بين من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = g(x)$  ثم ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  وشكل جدول تغيراتها

ج - استنتج أن للمنحنى  $(C_f)$  نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها .

(2) أ- بين أن المستقيم  $(\Delta)$  المعروف بالمعادلة  $y = x$  مقارب مائلاً للمنحنى  $(C_f)$

ب - ادرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$

(3)  $(T)$  مستقيم معادلته :  $y = x + e$  ، بين أن المستقيم  $(T)$  مماس للمنحنى  $(C_f)$  في نقطة يطلب تحديدها .

(4) أ- بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $\alpha$  حيث  $-0,9 < \alpha < -0,8$

ب - ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد و إشارة حلول المعادلة  $(x+1)e^{1-x} = |m|$

انتهى الموضوع الثاني