البرنامج السنوي لمادة الرياضيات:

1) **التقويم التشخيصي .**

2) **المتتاليات العددية :** - المتتاليات المحدودة .
- المتتاليات الرتيبة والمتقاربة .
- التعرف على متتالية معرفة بالعلاقة التراجعية : $u_{n+1} = au_n + b$.
- البرهان بالتراجع .

3) **الاحصـــــاء :** - السلاسل الاحصائية ذات متغيرين عدديين .
- تمثيل سلسلة احصائية لمتغيرين عدديين بسحابة نقط .
- تعيين احداثيي النقطة المتوسطة .
- انشاء مستقيم التعديل الخطي .

4) **الـــــدوال :** - الاستمرارية , مبرهنة القيم المتوسطة , المعادلات .
- الدالة المركبة , العمليات على النهايات , المستقيمات المتقاربة .
- مسائل حول دراسة دوال عددية .
- الدوال الأصلية لدالة على مجال .
- الدالة اللوغاريتمية النيبيرية .
- الدالة الأسية , دراسة الدوال $EXPoU$.

5) **الاحتمـــالات :** - قانون احتمال مرفق بتجربة عشوائية .
- الاحتمال الشرطي والشجرة المتوازنة .
- الأمل الرياضي , التباين و الانحراف المعياري .
- استقلال حادثتين .

6) **الـدوال (تابع) :** - الدوال اللوغالريتمية و الأسية ذات الأساس a.
- دوال القوى .
- حل مشكلات متعلقة بايداع أو تسديد تتدخل فيها اللوغاريتميات و الأسيات .
- التزايد المقارن للدوال اللوغاريتمية و الأ سية .

- اذا سمعت فقد أنسى , واذا رأيت فقد أتذكر , واذا عملت فاني أفهم **-**

الأستاذ : سي محمد .

ثانوية فارس بن مهل الشهبونية المستوى : 3 تسيير و اقتصاد	الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية	السنة الدراسية : 2014/2013

تقويم تشخيصي:

التمرين الأول: لتكن (u_n) متتالية معرفة على N بـ : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$

1) أحسب : u_2, u_1.

نضع من اجل كل n عدد طبيعي $v_n = u_n + 3$.

2) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين الأساس q وحدها الأول v_0.
3) أوجد عبارة الحد العام لـ v_n ثم استنتج عبارة الحد العام لـ u_n.
4) عين اتجاه تغير المتتالية (v_n).
5) احسب مجموع خمسة حدود الأولى : (v_n).
6) عين قيمة n حتى تكون : $v_n = 80$.

التمرين الثاني: شخص له رأس مال يقدر بـ : 20000 دج أراد أن يضع هذا المال في بنك

فعرضت عليه طريقتين لوضع هذا المال.

الطريقة 1: يوضع هذا المال بفائدة بسيطة قدرها 5% ونرمز لرأس المال بـ : u_n.

الطريقة 2: يوضع هذا المال بفائدة مركبة قدرها 2% ونرمز لرأس المال بـ : v_n.

1) عين u_0 و u_1 ثم v_0 و v_1.
2) أوجد علاقة بين u_{n+1} و u_n ثم تحقق أن u_n متتالية حسابية يطلب تحديد أساسها r .
3) عبر عن u_n بدلالة n .
4) أوجد علاقة بين v_{n+1} و v_n ثم تحقق أن v_n متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها q .
5) عبر عن v_n بدلالة n .

التمرين الثالث : صندوق يحتوي على 5 كرات مرقمة من 1 إلى 5 .

1) نسحب كرة واحدة من الصندوق بصفة عشوائية .
أ) احسب احتمال الحصول على كرة تحمل رقم فردي .
ب) احسب احتمال الحصول على كرة تحمل رقم مضاعف للعدد 2 .
2) نسحب كرتين دون ارجاع من الصندوق بصفة عشوائية .
أ) انجز شجرة تبين فيها كل الامكانيات .
ب) ماهو عدد امكانيات هذه التجربة .
ت) ماهو احتمال الحصول على كرتين تحمل رقم أولي .
ث) ماهو احتمال الحصول على كرتين مجموع أرقامهما 6 .

التمرين الرابع :

عين الدالة المشتقة و اشارتها لكل من الدوال التالية :

1) $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$ 2) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x - 3$

3) $C(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ 4) $h(x) = (x+1)(x^2 - 2x + 1)$

التمرين الخامس :

عين نهايات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5}{x^2 - 1}$. 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1}$. 3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{2}x^3 + x + 2$.

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \frac{1}{1+x}$. 5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right)(-2x+1)$. 6) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{2x+4}{x-1}$.

التمرين السادس :

لتكن f دالة معرفة على المجال $]-2;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x^2+5}{x+2}$.

1) احسب النهايات على أطراف مجموعة التعريف .
2) ادرس اتجاه تغير الدالة f وأنجز جدول تغيراتها .
3) عين الأعداد الحقيقية a, b و c حيث : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$.
4) أكتب معادلة المماس (Δ) عند: $x_0 = -1$.

الأستاذ : سي محمد .

المستوى المعرفي: تقويم تشخيصي. المستوى: 3 ت و إ.

الأستاذ: بن محمد سمير.

تقويم تشخيصي.

التمرين ①: لدينا: $\begin{cases} U_0=2 \\ U_{n+1}=2U_n+3 \end{cases}$

① حساب U_1، U_2:

لدينا، $U_1=7$ ، $U_2=17$

② إثبات أن (V_n) متتالية هندسية وتعيين q و V_0: $V_n=U_n+3$

(a لدينا، $V_{n+1}=U_{n+1}+3$ أي: $V_{n+1}=2U_n+3+3$

أي: $V_{n+1}=2(U_n+3)$ ومنه: $V_{n+1}=2V_n$ إذن (V_n) م هـ أساسها $q=2$

وحدها الأول: $V_0=5$

(b لدينا: $V_{n+1}/V_n=2U_n+6/U_n+3$ أي: $\frac{V_{n+1}}{V_n}=2$.

بما أن ناتج عدد ثابت فإن (V_n) م هـ أساسها $q=2$ و $V_0=5$.

③ إيجاد عبارة الحد العام لـ V_n و استنتاج U_n:

لدينا: $V_n=V_0\times q^n$ ، $V_n=5\times 2^n$

ولدينا $U_n=V_n-3$ أي: $U_n=5\times 2^n-3$

④ تعيين اتجاه تغير المتتالية V_n:

بما أن $q>1$ و $V_0=5$ فإن المتتالية V_n متزايدة تماما.

⑤ حساب مجموع خمسة حدود الأولى لـ: V_n

$$V_0+V_1+\dots+V_4=V_0\times\frac{q^5-1}{q-1}=5(2^5-1)=155.$$

⑥ تعيين قيمة n حتى يكون: $V_n=80$

لدينا: $V_n=80$ أي: $5\times 2^n=80$ ، أي $2^n=16$ ومنه: $n=4$

التمرين ②:

① تعيين U_0 و U_1 ثم V_0 و V_1:

* لدينا: $U_0=20000$ وهو المبلغ الابتدائي.

ولدينا، $U_1=20000+20000\times\frac{5}{100}$ ومنه: $U_1=21000$

* $V_0=20000$ وهو المبلغ الابتدائي

$V_1=20000+20000\times\frac{2}{100}$ ومنه: $V_1=20400$

② إيجاد علاقة بين U_{n+1} و U_n:

لدينا، $U_0=20000$ إذن: $U_{n+1}=U_n+1000$

$U_1=U_0+1000$

$U_2=U_1+1000$

⋮

تقويم تشخيصي .

* التحقق أن u_n م ح وتعيين r :

لدينا : $u_{n+1} = u_n + 1000$ عبارتها على الشكل : $u_{n+1} = u_n + r$

إذن : u_n م ح أساسها $r = 1000$

③ التعبير عن u_n بدلالة n :

لدينا ، $u_n = u_0 + nr$ ومنه ، $u_n = 20000 + 1000n$

④ إيجاد علاقة بين V_{n+1} و V_n :

لدينا ، $V_0 = 20000$

$V_1 = V_0(1,02)$ إذن ، $V_{n+1} = 1,02 V_n$

$V_2 = V_1(1,02)$

$V_{n+1} = V_n(1,02)$

* التحقق أن V_n م هـ وتعيين q :

لدينا ، $V_{n+1} = 1,02 V_n$ عبارتها من الشكل : $V_{n+1} = qV_n$

إذن : V_n م هـ أساسها $q = 1,02$

⑤ التعبير عن V_n بدلالة n :

لدينا ، $V_n = V_0 \times q^n$ ومنه ، $V_n = 20000 \times (1,02)^n$

التمرين ③ :

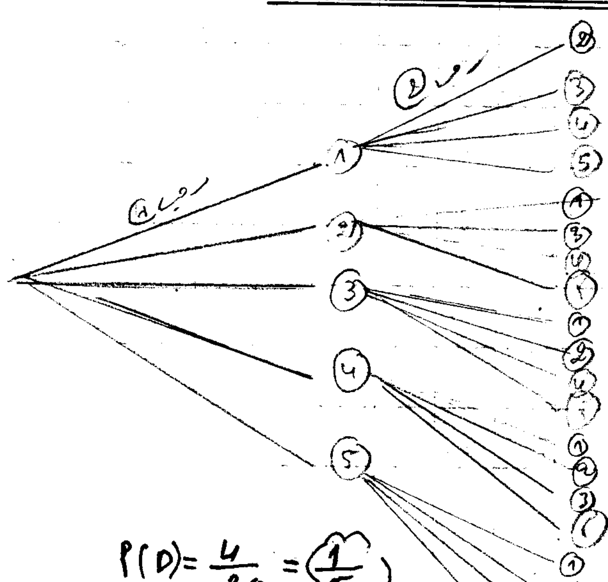
1) أ) حساب احتمال الحصول على كرة تحمل رقم فردي :

لدينا ، $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ ، لتكن الحادثة A ، $P(A) = \frac{3}{5}$

ب) حساب " " " " " " مضاعف للعدد 2 :

لتكن هذه الحادثة B . $P(B) = \frac{2}{5}$

2) أ) إنجاز شجرة تبين فيها كل الإمكانيات :



ب) عدد إمكانيات هذه التجربة :

لدينا : $n = 5 \times 4 = 20$

ومنه : $n = 20$

ت) احتمال الحصول على كرتين تحملان رقم أولي :

$C = \{(2,3),(2,5),(3,2),(3,5),(5,2),(5,3)\}$

إذن ، $P(C) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

ث) احتمال كرتين مجموع أرقامهما 6 :

$P(D) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

المحور: المتتاليات العددية — المستوى: 3 ت إ

الأستاذ: بن محمد

خلاصة

تذكير حول المتتاليات:

العنوان	المتتاليات الحسابية	المتتاليات الهندسية.
التعريف	الانتقال من حد إلى الحد التالي يكون بإضافة نفس الثابت r و يسمى أساس المتتالية حيث من أجل كل عدد طبيعي n فإن $U_{n+1} = U_n + r$	الانتقال من حد إلى الحد التالي يكون بالضرب في نفس الثابت q و يسمى أساس المتتالية. حيث: من أجل كل عدد طبيعي n $U_{n+1} = q\,U_n$
عبارة الحد العام	الحد الأول: $U_0 \rightarrow U_n = U_0 + nr$ " " : $U_1 \rightarrow U_n = U_1 + (n-1)r$ الحالة العامة : $U_n = U_p + (n-p)r$	الحد الأول: $U_0 \rightarrow U_n = U_0 q^n$ " " : $U_1 \rightarrow U_n = U_1 \times q^{n-1}$ الحالة العامة : $U_n = U_p \times q^{n-p}$
مجموع حدود متتابعة.	$S = U_0 + U_1 + \dots + U_n = (n+1)\left(\frac{U_0+U_n}{2}\right)$ بصفة عامة: $S =$ ع الحدود $\times \frac{\text{ح الأول} + \text{ح الأخير}}{2}$ حالة خاصة أساسية: $1+2+3+\dots+n = n\left(\frac{n+1}{2}\right)$	$S = U_0 + U_1 + \dots + U_n = U_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ بصفة عامة: $S =$ ح الأول $\times \frac{q^{\text{ع ح}}-1}{q-1}$ حالة خاصة أساسية: $1+q+q^2+\dots+q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ ع : $q \neq 1$
الوسط الحسابي و الوسط الهندسي	الوسط الحسابي: (a, b, c حدود متتابعة من متتالية حسابية) $\Updownarrow$ $2b = a + c$ يسمى العدد b الوسط الحسابي للعددين a و c	الوسط الهندسي: (a, b, c ح م من م هندسية) $\Updownarrow$ $b^2 = a \cdot c$ يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و c.

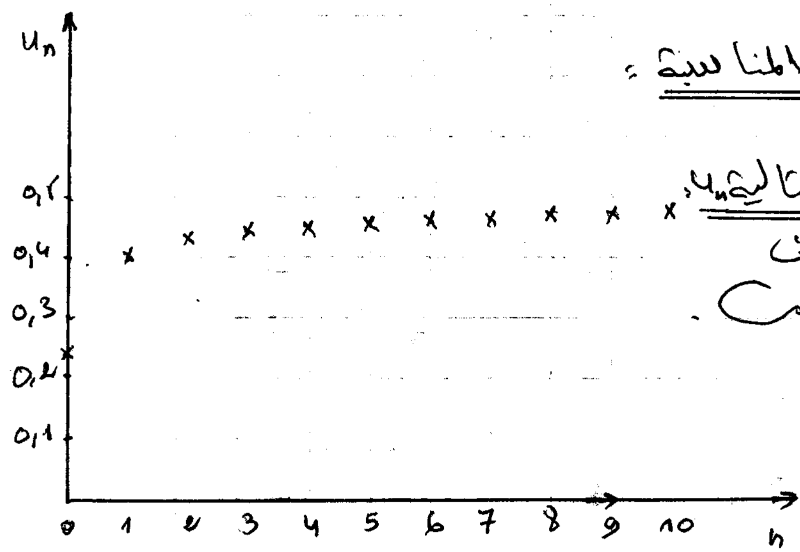
المحور: المتتاليات العددية. المستوى: 3 ت ر.

الكفاءات المستهدفة: تبيان أن متتاليات محدودة من الأعلى أو محدودة من الأسفل أو محدودة.

سير الدرس

نشاط ② ص 6:

① إنشاء سحابة النقط المناسبة:



② وضع تخمينات حول المتتالية u_n:
من الشكل نستنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

③ دراسة إشارة كل من $u_n-\frac{1}{3}$ و $u_n-\frac{1}{2}$ مع الاستنتاج:

أ) إشارة $u_n-\frac{1}{3}$:

لدينا: $u_n-\frac{1}{3}=\frac{n+1}{2n+3}-\frac{1}{3}$ ومنه: $u_n-\frac{1}{3}=\frac{n}{3(2n+3)}$

من أجل $n\in\mathbb{N}$ فإن: $\frac{n}{3(2n+3)}>0$ ومنه: $u_n-\frac{1}{3}>0$

إذن إشارة $u_n-\frac{1}{3}$ موجبة.

ب) إشارة $u_n-\frac{1}{2}$:

لدينا: $u_n-\frac{1}{2}=\frac{-1}{2(2n+3)}$ من أجل $n\in\mathbb{N}$ فإن: $u_n-\frac{1}{2}<0$

إذن إشارتها سالبة.

الاستنتاج:

لدينا: $u_n-\frac{1}{3}>0$ أي: $u_n>\frac{1}{3}$

و $u_n-\frac{1}{2}<0$ أي: $u_n<\frac{1}{2}$

ومنه نستنتج أن u_n محصورة بين $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ أي: $\frac{1}{3}<u_n<\frac{1}{2}$.

④ دراسة تغيرات الدالة f وتشكيل جدول التغيرات:

لدينا: $f(x)=\frac{x+1}{2x+3}$

لدينا: $f'(x)=\frac{1}{(2x+3)^2}$

$f'(x)\neq 0$ لدينا: $f'(x)>0$

إذن: إشارة المشتقة موجبة. إذن الدالة f متزايدة تماما من $[0,+\infty[$.

محتوى الدرس.

جدول التغيرات :

x قيم	0	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{3}$ ↗	$\frac{1}{2}$

⑤ التخمينات صحيحة :

بما أن : $f(n) = u_n$

والدالة f متزايدة تماما فإن

المتتالية (u_n) "

* المتتاليات المحدودة :

تعاريف :

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$.

1) محدودة من الأعلى : (u_n) متتالية محدودة من الأعلى يعني وجود عدد حقيقي A حيث من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \leq A$. ونقول A ع ح م ع

2) محدودة من الأسفل : (u_n) م محدودة من الأسفل يعني وجود ع ح B حيث من أجل كل عدد طبيعي n، $B \leq u_n$

ونقول أن B عنصر حاد من الأسفل.

3) محدودة : (u_n) محدودة يعني أنها محدودة من الأعلى ومن الأسفل أي : $B \leq u_n \leq A$.

طريقة :

لإثبات أن المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ محدودة من الأعلى بعدد حقيقي A أو من الأسفل بعدد حقيقي B نتبع ما يلي :

* دراسة إشارة الفرق $u_n - A$ أو $u_n - B$.

* إذا كانت : $u_n = f(n)$ ندرس تغيرات الدالة f على المجال $[0,+\infty[$.

مثال :

لتكن (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

بـ : $u_n = 1 + \frac{5}{n}$

لدينا من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{5}{n} \leq 5$ ومنه : $u_n \leq 6$

وهذا يعني أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بـ : 6.

ومن جهة أخرى لدينا : $0 < \frac{5}{n}$ ومنه : $1 < u_n$ يعني م م من أ بـ : 1

إذن من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ فإن : $1 < u_n \leq 6$ نستنتج أن المتتالية (u_n) محدودة.

المستوى: 3 ع و إ.

تقويم تشخيصي

التمرين ①:

تعيين الدالة المشتقة وإشارتها لكل من الدوال التالية:

① $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$

لدينا: $f'(x) = 4x - 8$

إشارة المشتقة: $f'(x) = 0$ أي $4x - 8 = 0$ ومنه $x = 2$.

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$f'(x)$	− 0 +

② $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x - 3$

المشتقة: $g'(x) = x^2 - 2$

إشارتها: $g'(x) = 0$ أي: $x = \sqrt{2}$ أو $x = -\sqrt{2}$

x	$-\infty$ $-\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$ $+\infty$
$g'(x)$	+ 0 − 0 +

③ $c(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

المشتقة: $c'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

إشارتها: $c'(x) > 0$

x	$-\infty$ -1 $+\infty$
$c'(x)$	+ ‖ +

④ $\cancel{h(x) = \frac{x+2}{x-2}}$ $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + 1$

المشتقة: $h'(x) = x^2 - 2x - 8$

إشارتها: $h'(x) = 0$ أي $x^2 - 2x - 8 = 0$ المعادلة حلين م

$\sqrt{\Delta} = 6$ ، $x_1 = -2$ ، $x_2 = 4$

x	$-\infty$ -2 4 $+\infty$
$h'(x)$	+ 0 − 0 +

⑤ $h(x) = (x+1)(x^2 - 2x + 1)$

المشتقة: $h'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

إشارتها: $h'(x) = 0$ أي: $3x^2 - 2x - 1 = 0$ أي $h'(x) = 0$

$\sqrt{\Delta} = 4$ ، $x_1 = -\frac{1}{3}$ ، $x_2 = 1$

x	$-\infty$ $-\frac{1}{3}$ 1 $+\infty$
$h'(x)$	+ 0 − 0 +

التمرين ②:

تعيين نهايات الدالة f في كل حالة:

① $\lim_{x \to +\infty} \frac{5}{x^2 - 1} = \boxed{0}$ لأن: $\lim_{x \to +\infty} \frac{5}{+\infty} = 0$

② $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} = \boxed{3}$ لأن: $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$

تقويم تشخيصي.

3) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}x^3+x+2=\boxed{-\infty}$ لأن: $\lim_{x\to-\infty} x+2=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}x^3=-\infty$.

4) $\lim_{x\to+\infty} 2-\frac{1}{1+x}=\boxed{2}$ لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x}=0$

5) (ح ع ت) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)(-2x+1)$ لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)(-2x+1)=0\times(-\infty)$

6) $\lim_{x\to1^{>}}\frac{2x+4}{x-1}=\boxed{+\infty}$ لأن: $\lim_{x\to1^{>}}\frac{6}{0^+}=+\infty$

التمرين 6:

1) حساب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف:

$\lim_{x\to-2^{>}}\frac{x^2+5}{x+2}=\boxed{+\infty}$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5}{x+2}=\boxed{+\infty}$

2) دراسة اتجاه تغير الدالة f وإنجاز جدول تغيراتها:

المشتقة: $f'(x)=\frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}$

إشارة المشتقة: نبحث عن $f'(x)=0$ أي: $x^2+4x-5=0$

$\sqrt{\Delta}=6$ ، $x_1=-5$ ، $x_2=1$

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
		$+$		$-$		$-$		$+$	

x	-2		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

الدالة f متزايدة على المجال $[1,+\infty[$ ومتناقصة على المجال $]-2,1]$

جدول التغيرات:

x	-2		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

3) تعيين الأعداد الحقيقية a، b، c:

طريقة 1:

$f(x)=\frac{x^2+4-4+5}{x+2}=\frac{x^2-4+9}{x+2}$

$=\frac{(x-2)(x+2)+9}{x+2}=x-2+\frac{9}{x+2}$ ومنه: $a=1$ ، $b=-2$ و $c=9$

4) كتابة معادلة المماس (Δ) عند: $x_0=-1$:

لدينا: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ ، $f(-1)=6$ ، $f'(-1)=-8$

أي: $y=-8(x+1)+6$

ومنه: $y=-8x-2$

المستوى: 3ت إ.

محتوى الدرس.

أنشطة تقويمية:

نشاط:

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام $U_n = \dfrac{3n^2+2}{n^2+1}$

بين أن المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى بالعدد 3 ومن الأسفل بـ 2.

وماذا تستنتج؟

الحل:

ندرس إشارة الفرق $U_n - 3$ أي: $U_n - 3 = \dfrac{3n^2+2}{n^2+1} - 3$ ومنه: $U_n - 3 = \dfrac{-1}{n^2+1}$

من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $\dfrac{-1}{n^2+1} < 0$ لأن: $n^2+1 > 0$

وبالتالي فإن: $U_n - 3 < 0$ أي: $U_n < 3$

إذن المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى بالعدد 3.

من جهة أخرى لدينا، $U_n - 2 = \dfrac{3n^2+2}{n^2+1} - 2$ ومنه: $U_n - 2 = \dfrac{n^2}{n^2+1}$

من أجل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $\dfrac{n^2}{n^2+1} \geq 0$ وبالتالي فإن: $U_n - 2 \geq 0$

ومنه، $U_n \geq 2$ إذن المتتالية (U_n) محدودة من الأسفل بالعدد 2.

نستنتج أن: بما أنه: $2 \leq U_n < 3$ محدودة من الأعلى والأسفل

فإن المتتالية (U_n) محدودة.

عمل منزلي: تمارين رقم 15، 18 ص سلسلة طريق 13 ص 23.

الكفاءات المستهدفة : التعرف إن كانت متتالية رتيبة .
تبيان إن كانت متتالية متقاربة .

المستوى : 3 ع إ .

محتوى الدرس .

نشاط :

① نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $U_n = \dfrac{3n+2}{n+1}$

أ) أدرس إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$ ثم إستنتج إتجاه تغير المتتالية U_n.

ب) عين نهاية U_n لما يؤول n إلى $+\infty$.

② أ) أعط الدالة f التي تحقق $U_n = f(n)$.

ب) بإستعمال إتجاه تغير الدالة f تحقق من نتيجة السؤال ①أ).

مناقشة النشاط :

① أ) دراسة إشارة $U_{n+1} - U_n$ وإستنتاج إتجاه تغير U_n :

لدينا : $U_{n+1} = \dfrac{3(n+1)+2}{(n+1)+1}$ أي : $U_{n+1} = \dfrac{3n+5}{n+2}$

إذن : $U_{n+1} - U_n = \dfrac{3n+5}{n+2} - \dfrac{3n+2}{n+1}$ ومنه : $U_{n+1} - U_n = \dfrac{1}{(n+2)(n+1)}$

لدينا من أجل $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$ وبالتالي : $U_{n+1} - U_n > 0$

ومنه : $U_{n+1} > U_n$ إذن المتتالية (U_n) متزايدة تماما .

ب) نهاية U_n لما يؤول n إلى $+\infty$:

لدينا ، $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3n}{n}$ ومنه ، $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 3$

② أ) إعطاء الدالة f :

بما أن الدالة f تحقق $U_n = f(n)$ فإن : $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+1}$.

② ب) التحقق من نتيجة السؤال ①أ) :

إتجاه تغير الدالة f :

$f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ إذن : $f'(x) > 0$

ومنه نستنتج أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0, +\infty[$

إذن نتيجة السؤال ①أ) صحيحة .

①- المتتاليات الرتيبة :

تعاريف : (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$

1) نقول عن (U_n) أنها متزايدة إذا كانت : $U_{n+1} \geq U_n$.

2) " " " " " متناقصة " : $U_{n+1} \leq U_n$

3) " " " " " ثابتة " " : $U_{n+1} = U_n$

4) " " " " " رتيبة " " إما متزايدة وإما متناقصة

المستوى: 3 ث إ

محتوى الدرس:

ملاحظات:
* توجد متتاليات ليست متزايدة وليست متناقصة، نقول عنها أنها غير رتيبة. مثال: المتتالية: $U_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
* في حالة متتالية حدها العام: $U_n=f(n)$ ندرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0,+\infty[$.

مثال:
- أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام: $U_n=3n+1$.
- هل المتتالية (U_n) رتيبة؟

الحل:
* نحسب الفرق $U_{n+1}-U_n$ لدينا: $U_{n+1}-U_n=3$ ومنه: $U_{n+1}>U_n$
إذن: المتتالية U_n متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$.
* بما أن المتتالية متزايدة نقول رتيبة.

⑧ المتتاليات المتقاربة:

تعريف:
(U_n) متتالية عددية و l عدد حقيقي.
نقول عن المتتالية (U_n) أنها متقاربة وتتقارب إلى l إذا وفقط إذا كان: $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=l$ ونكتب كذلك: $\lim U_n=l$.

ملاحظات:
* ندرس نهاية متتالية دائما عند $+\infty$.
* إذا لم تكن متتالية متقاربة فنقول أنها متباعدة.

مثال:
لتكن (U_n) المعرفة من أجل $n\in\mathbb{N}^*$ ب: $U_n=2+\frac{4}{n}$
يمكن إثبات أن U_n يبقى قريب من 2 بالقدر الذي نريد بشرط أن يكون n كبير بالقدر الكافي:
نستنتج أن المتتالية (U_n) تتقارب نحو العدد 2 ونكتب $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=2$

ملاحظة:
* إذا كانت متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فإنها متقاربة.
* " " متناقصة و " " من الأسفل " "

محتوى الدرس .

تمرين تقويمي :
لتكن المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_n = 2+\left(\frac{1}{2}\right)^n$
① أدرس اتجاه تغير المتتالية U_n .
② بين أن المتتالية U_n محدودة من الأسفل بالعدد 2 .
③ إستنتج أن (U_n) متتالية متقاربة ثم عين نهايتها .

الحل :

① دراسة إتجاه تغير المتتالية U_n :
لدينا $U_{n+1}-U_n = 2+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-2-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ أي : $U_{n+1}-U_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$
من أجل $n \in \mathbb{N}$ فإن $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0$ إذن : $U_{n+1} < U_n$
ومنه المتتالية U_n متناقصة .

② تبيين أن المتتالية U_n م من الأسفل بـ 2 :
لدينا : $U_n - 2 = 2+\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2$ ومنه $U_n - 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$
من أجل : $n \in \mathbb{N}$ فإن $\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$ وبالتالي : $U_n - 2 > 0$
ومنه : $U_n > 2$ إذن المتتالية U_n محدودة من الأسفل بالعدد 2 .

③ إستنتاج أن (U_n) م متقاربة ثم تحديد نهايتها :
بما أن المتتالية U_n متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة .
تحديد نهايتها :
لأن : $\lim_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ، $\lim_{n \to +\infty} U_n = 2$

تمارين منزلية : ت 16 ، 18 ص 23
ت 27 ، 28 ص 24 .

2 * المتتاليات ذات الحد العام $U_n = f(n)$:

خاصية : α عددا حقيقيا ، $-\infty$ أو $+\infty$ ، (U_n) م معرفة من أجل كل n ط ع يحدها العام $U_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على المجال $[0, +\infty[$
إذا كانت : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \alpha$ فإن : $\lim_{n \to +\infty} U_n = \alpha$

* نهاية متتالية هندسية : مثال :

مبرهنة : ① إذا كان : $-1 < q < 1$ فإن : $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$
② " " : $q = 1$: " $\lim_{n \to +\infty} q^n = 1$
③ " " : $q > 1$: " $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
④ " " : $q \leq -1$ فإنه ليس للمتتالية (q^n) نهاية .

* نهاية متتالية حسابية : ① إذا كان $r < 0$ فإن : $\lim_{n \to +\infty} U_n = -\infty$
② " $r > 0$ "

المستوى: 3 ت إ.

المحتوى المعرفي: المتتاليات (u_n) بحيث: $u_{n+1} = au_n + b$.

الكفاءات المستهدفة: التعرف على متتالية معرفة بالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = au_n + b$ وحساب حدودها.

محتوى الدرس

حل التمرين 4 ص 7:

① تعيين u_0 والتحقق أن: $u_{n+1} = 1{,}05u_n + 2000$؛

من المعطيات لدينا: $u_0 = 10\,000$ المبلغ المودع لدى البنك.

لدينا: $u_1 = u_0 + u_0\left(\frac{5}{100}\right) + 200$ أي: $u_1 = (1{,}05)u_0 + 2000$

$u_2 = (1{,}05)u_1 + 2000$

ونعمم بـ: $u_{n+1} = 1{,}05u_n + 2000$

② تبيان أن المتتالية (u_n) ليست حسابية ولا هندسية:

لدينا: $u_{n+1} - u_n = 0{,}05u_n + 2000$ بما أن الفرق ليس ثابت فإن المتتالية ليست حسابية. لأنه بدلالة n.

ولدينا: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1{,}05 + \frac{2000}{u_n}$ بما أن حاصل القسمة غ ثابت فإن u_n ليست هندسية.

③ أ) تبيين أن (v_n) هندسية أساسها $1{,}05$:

لدينا: $v_n = u_n + 40\,000$ ، $v_{n+1} = u_{n+1} + 40000$

ط1) أي: $v_{n+1} = 1{,}05u_n + 42000$

ولدينا: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1{,}05u_n + 42000}{u_n + 40000}$ أي: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1{,}05(u_n + \cancel{40000})}{(u_n + \cancel{40000})}$

ومنه: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1{,}05$ بما أن الناتج ثابت فإن المتتالية u_n هندسية أساسها $q = 1{,}05$

ط2: لدينا $v_{n+1} = 1{,}05u_n + 42000$ أي: $v_{n+1} = 1{,}05(u_n + 40000)$ ومنه $v_{n+1} = 1{,}05v_n$

ومنه: v_n م هـ أساسها $q = 1{,}05$.

* حساب u_n ثم v_n بدلالة n:

لدينا: $v_n = v_0 \cdot q^n$ ، $v_0 = u_0 + 40000$ ومنه: $v_0 = 50000$

ومنه $v_n = 50000(1{,}05)^n$ ولدينا: $u_n = v_n - 40000$

ومنه: $u_n = 50\,000(1{,}05)^n - 40000$

* رصيد نبيل في سنة 2010:

في سنة 2010: لدينا: $2010 = 2000 + n$ ومنه: $n = 10$

إذن: $u_{10} = 50000(1{,}05)^{10} - 40000$ ومنه: $u_{10} = 41\,444{,}73$

يكون رصيد نبيل في سنة 2010 $41444{,}73$ DA

محتوى الدرس

* **المتتاليات من الشكل: $U_{n+1}=aU_n+b$ $(a\neq 0)$:**

لتكن (U_n) متتالية معرفة بحدها الأول U_0 ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1}=aU_n+b$ حيث: a و b من $\mathbb{R}$ و $a\neq 0$

نلاحظ أن $U_{n+1}=f(U_n)$ حيث f هي الدالة التالية: $f(x)=ax+b$.

ندرس حالتين:

1) الحالة الأولى $a=1$:

تكون المتتالية على الشكل: $U_{n+1}=U_n+b$ إذن (U_n) متتالية حسابية أساسها b.

2) الحالة الثانية $a\neq 1$:

أ) إذا كانت $a\neq 1$ و $b=0$ فإن (U_n) متتالية هندسية.

ب) إذا كانت $a\neq 1$ و $b\neq 0$:

• لدراسة اتجاه تغير المتتالية (U_n) ندرس إشارة الفرق $U_{n+1}-U_n$ وبعد عملية الاختزال نتحصل على: $U_{n+1}-U_n=a^n(U_1-U_0)$

* إذا كان $a>0$: أي إذا كانت f متزايدة تماما فإن المتتالية (U_n) رتيبة وإشارة U_1-U_0 هي التي تحدد إذا كانت متزايدة أو متناقصة أو ثابتة.

* إذا كان $a<0$: أي إذا كانت f متناقصة تماما فإن المتتالية (U_n) غير رتيبة والفرق $U_{n+1}-U_n$ لا يحتفظ بإشارة ثابتة لأن: a^n لا يحتفظ بإشارة ثابتة.

دراسة التقارب:

• لدراسة تقارب المتتالية (U_n) نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $V_n=U_n-\frac{b}{1-a}$ أي: $U_n=V_n+\frac{b}{1-a}$

ولدينا: $V_{n+1}=aV_n$ ومنه المتتالية (V_n) م ه أساسها a وحدها الأول V_0 وعبارة الحد العام هي: $V_n=V_0\cdot a^n$ مناقشة:

* إذا كان $-1<a<1$ فإن (U_n) متتالية متقاربة نحو $\frac{b}{1-a}$

لأن: $\lim_{n\to+\infty} a^n=0$ ومنه: $\lim_{n\to+\infty} U_n=\frac{b}{1-a}$

* إذا كان $a>1$ فإن (U_n) متتالية متباعدة وليست متقاربة.

لأن: $\lim_{n\to+\infty} a^n=+\infty$ ومنه: $\lim_{n\to+\infty} U_n=\mp\infty$

* إذا كانت $a<-1$ فإن (U_n) متباعدة وليست متقاربة.

لأنه ليس للمتتالية (a^n) نهاية.

المستوى: 3 ع إ.

محتوى الدرس

نتيجة:

1) $-1<a<1$ المتتالية (U_n) متقاربة.

2) $a>1$ و $a<-1$ " " ليست متقاربة.

تمرين تطبيقي: BAC 2009 . نعتبر المتتالية العددية (U_n) ~~متتالية~~ المعرفة بحدها الأول: $U_0=-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $U_{n+1}=3U_n-2$.

1) أحسب U_1 و U_2.

2) لتكن (V_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $V_n=U_n-1$

أ) أثبت أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول V_0.

ب) أكتب عبارة الحد العام V_n بدلالة n.

3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1}-U_n=(-4)\times 3^n$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (U_n).

4) عين العدد الطبيعي n بحيث يكون: $U_0+U_1+\dots+U_n=n-79$

حل التمرين التطبيقي:

1) حساب U_1 و U_2: $U_1=-5$ ، $U_2=-17$

2) أ) إثبات أن V_n هـ وتعيين q و V_0:

لدينا: $V_n=U_n-1$ و $V_{n+1}=U_{n+1}-1$ أي: $V_{n+1}=3U_n-2-1$

ومنه: $V_{n+1}=3(U_n-1)$ إذن: $V_{n+1}=3V_n$

إذن المتتالية (V_n) هندسية وأساسها $q=3$

وحدها الأول $V_0=U_0-1$ ومنه: $V_0=-2$

ب) كتابة عبارة الحد العام لـ V_n:

$V_n=V_0\times q^n$ ومنه: $V_n=(-2)\times 3^n$

3) تبيين أن $U_{n+1}-U_n=(-4)\times 3^n$:

لدينا: $U_n=V_n+1$ أي: $U_{n+1}=3U_n-2$ و ~~$U_{n+1}=$~~

أي: $U_{n+1}-U_n=3U_n-2-U_n$ أي: $U_{n+1}-U_n=2U_n-2$

أي: $U_{n+1}-U_n=2(U_n-1)$ أي: $U_{n+1}-U_n=2V_n$

أي: $U_{n+1}-U_n=2(-2)\times 3^n$ ومنه: $U_{n+1}-U_n=(-4)\times 3^n$

مضمون الدرس .

بما أن : $(-4)\times 3^n < 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

4) تعيين العدد الطبيعي n : $u_n = v_n + 1$

لدينا :

$$u_0+u_1+\dots+u_n = (v_0+1)+(v_1+1)+\dots+(v_n+1)$$

$$= v_0+v_1+\dots+v_n+\underbrace{(1+1+\dots+1)}_{(n+1)}$$

$$= v_0\,\frac{q^{n+1}-1}{q-1}+(n+1)\times 1$$

$$= (-2)\,\frac{3^{n+1}-1}{3-1}+n+1$$

$$= 1-3^{n+1}+n+1$$

من جهة أخرى : $u_0+u_1+\dots+u_n = n-79$

وعليه : $n-3^{n+1}+2 = n-79$ أي أن : $3^{n+1} = 81 = 3^4$

ومنه : $n=3$.

عمل منزلي : ت 41 ، 44 ص 24 .

ت 49 ص 26 .

تمرين :

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{1}{2}u_n+3$.

1) أحسب u_1 ، u_2

2) نعتبر المتتالية (v_n) ذات الحد الأول v_0 والمعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n - 6$

أ) أثبت أن المتتالية v_n هندسية يطلب تعيين أساسها q .

ب) استنتج اتجاه تغير المتتالية v_n .

3) أكتب عبارة الحد العام لـ v_n ثم u_n بدلالة n .

4) أحسب المجموع : $S_n = v_0+v_1+\dots+v_n$

ثم : $T_n = u_0+u_1+\dots+u_n$.

الكفاءة المستهدفة: البرهان بالتراجع على صحة خاصية في حالة بسيطة.

المستوى: 3 ث إ.

محتوى الدرس.

نشاط تمهيدي:

لتكن الخاصية التالية من أجل كل عدد طبيعي n حيث: $(n \geq 1)$.

$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ نرمز لهذه الخاصية بالرمز $P(n)$

1) أكتب (عيّن) $P(1)$ وتأكد أنها صحيحة.

2) أحسب $P(n+1)$

3) أثبت أنه إذا كانت $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n حيث $(n \geq 1)$ فإن $P(n+1)$ صحيحة من أجل ~~كل عدد طبيعي n حيث $(n \geq 1)$~~ $n+1$.

الحل:

1) تعيين $P(1)$ والتأكد من صحتها:

لدينا: من أجل $n=1$ نجد: $P(1)=1$

التأكد: ولدينا: $1=\frac{1(1+1)}{2}$ أي: $1=1$

ومنه: $P(1)$ صحيحة.

2) حساب $P(n+1)$:

$P(n+1): 1+2+3+\dots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

3) الإثبات: نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من أجل $(n \geq 1)$ ونبرهن صحتها من أجل $n+1$

أي لدينا: $P(n+1): 1+2+3+\dots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

لدينا: $1+2+3+\dots+n+(n+1) = (1+2+3+\dots+n)+(n+1)$

ومنه: $= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

ومنه: $P(n+1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

خلاصة:

بما أن $P(1)$ صحيحة.

وإذا كانت $P(n)$ صحيحة من أجل $(n \geq 1)$ فإن $P(n+1)$ صحيحة

من أجل $n \geq 1$ فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$.

أي أن: $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

* مبدأ الاستدلال بالتراجع :

قاعدة :

$P(n)$ خاصية تتعلق بعدد طبيعي n و n_0 عدد طبيعي .

للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n حيث: $n \geq n_0$

1- نتأكد من صحة الخاصية $P(n_0)$ من أجل n_0 .

2- نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$

و نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي : $P(n+1)$.

المرحلة (1) : $P(n_0)$ صحيحة

المرحلة (2) : إذا كانت $P(n)$ صحيحة فإن $P(n+1)$ صحيحة .

إذن : من أجل $n \geq n_0$ فإن : $P(n)$ صحيحة .

مثال :

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$0+2+4+6+\dots+2n=n(n+1)$$

الحل :

نسمي هذه الخاصية بـ : $P(n)$.

المرحلة (1) : نتأكد أن $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$.

لدينا : الطرف الأول : 0 ؛ الطرف الثاني : $0(0+1)=0$ } الطرفان متساويان .

ومنه : $P(0)$ صحيحة .

المرحلة (2) : نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من أجل n أي: $0+2+4+\dots+2n=n(n+1)$

ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة من أجل $n+1$

أي أن: $P(n+1): 0+2+4+6+\dots+2(n+1)=(n+1)(n+2)$

ولدينا: $P(n+1): \underbrace{0+2+4+6+\dots+2n}_{n(n+1)}+2(n+1) =$

$$= n(n+1)+2(n+1)$$

$$= (n+2)(n+1)$$

ومنه : $P(n+1)$ صحيحة من أجل

إذن : من (1) و (2) نجد أن $P(n)$ صحيحة من أجل $n \in \mathbb{N}$.

المستوى: 3 ت ر.

محتوى الدرس

أنشطة تقويمية:

تمرين ①:

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

الحل: نسمي هذه الخاصية بـ: $P(n)$.

المرحلة ①: من أجل $n=0$ نجد $0^2=\frac{0(0+1)(0+1)}{6}$ أي: $0=0$

ومنه نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

المرحلة ②: نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من أجل n طبيعي حيث: $n\geq 0$

ونبرهن أن الخاصية $P(n+1)$ صحيحة من أجل $n+1$.

الطرف الأول: $P(n+1):\ 1^2+2^2+3^2+\cdots(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

الطرف الثاني: $\underbrace{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}_{P(n)}+(n+1)^2=$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

بعد التبسيط نجد: $=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

الطرفان متساويان ومنه الخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: مما (1) و(2) نستنتج أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

تمرين ②: BAC 2009 ت ر.

1) نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بـ: $U_0=-2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n يكون: $3U_{n+1}=U_n+4$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n<2$

ب) بين أن المتتالية (U_n) متزايدة.

ج) استنتج مع التبرير أن المتتالية (U_n) متقاربة.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $V_n=U_n-2$

أ) بين أن المتتالية (V_n) م هندسية يطلب تحديد حدها الأول وأساسها.

ب) أكتب عبارة الحد العام V_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام U_n بدلالة n.

ج) أحسب $\lim_{n\to+\infty}U_n=$

د) // بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=U_0+U_1+\cdots+U_n$.

• مضمون الدرس .

الحل :

1) أ) إثبات بالتراجع أن $u_n \leq 2$: لتكن $p(n)$ الخاصية : $u_n \leq 2$

المرحلة ① : من أجل $n=0$ نجد : $u_0 \leq 2$ لأن : $-1 \leq 2$ ..

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

المرحلة ② :

نفرض أن $p(n)$ صحيحة أي : $u_n \leq 2$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $u_{n+1} \leq 2$

نعلم أن : $3u_{n+1} = u_n + 4$ يعني أن : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3}$

لدينا : $u_n \leq 2$ و $\frac{1}{3}u_n \leq \frac{2}{3}$ ومنه : $\frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} \leq \frac{2}{3} + \frac{4}{3}$

ومنه : $u_{n+1} \leq 2$ إذن : $p(n+1)$ صحيحة .

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن : $u_n \leq 2$ من أجل كل n من ط.

ب) التحقق أن (u_n) متزايدة :

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} - u_n$ أي : $u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3}$

أي : $u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{3}(u_n - 2)$

لدينا : $u_n - 2 \leq 0$ لأن : $u_n \leq 2$ ومنه : $-\frac{2}{3}(u_n - 2) \geq 0$

أي : $u_{n+1} - u_n \geq 0$ إذن : (u_n) متزايدة.

ج) استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة :

(u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ 2 فهي متقاربة .

2) أ) إثبات أن المتتالية (v_n) هندسية :

لدينا : $v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - 2)$ أي : $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$ إذن : (v_n) م ه

أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 2 = -3$

ب) كتابة عبارة الحد العام v_n : $v_n = v_0 q^n = (-3)\left(\frac{1}{3}\right)^n$

استنتاج عبارة الحد العام u_n :

لدينا : $u_n = v_n + 2$ أي : $u_n = (-3)\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2$

ج) حساب $\lim_{n \to +\infty} u_n$:

لدينا : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$ لأن : $\lim_{n \to +\infty} \left[(-3)\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = 0$

ولأن : $-1 < \frac{1}{3} < 1$

3) حساب المجموع S_n :

لدينا : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (v_0 + 2) + (v_1 + 2) + \dots + (v_n + 2)$

أي $= v_0 + v_1 + \dots + v_n + 2(n+1)$

ومنه : $S_n = \frac{9}{2}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right] + 2n + 2$

المستوى : 3 ت إ.

سلسلة تمارين حول المتتاليات.

التمرين ①:

(U_n) م ع متزايدة تماما حدها الأول U_1 و أساسها q حيث :

$$\begin{cases} U_1 + 2U_2 + U_3 = 32 \\ U_1 \times U_2 \times U_3 = 216 \end{cases}$$

① أحسب U_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول U_1.

② أكتب عبارة الحد العام U_n بدلالة n.

③ أحسب S_n حيث : $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ بدلالة n

ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n = 728$.

التمرين ②:

(U_n) م ح معرفة على $\mathbb{N}$ حدها الأول $U_0 = 1$

و $U_3 + U_4 + U_2 = -33$

① أحسب U_4 والأساس r

② أكتب U_n بدلالة n.

③ نضع : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

أحسب S_n بدلالة n.

④ عين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $S_n = -12321$

التمرين ③:

(U_n) م عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n - 3 \end{cases}$.

① أحسب U_1, U_2, U_3

② أثبت أن (U_n) ليست متتالية حسابية ولا هندسية.

③ برهن بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_n = 3 - 2^{n+1}$

④ أحسب الحد العاشر.

⑤ عين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $U_n = -16381$

التمرين ④:

(U_n) م ع معرفة بـ : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - 1 , n \in \mathbb{N} \end{cases}$

① أحسب U_1 و U_2.

② لتكن (V_n) متتالية ع معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $V_n = U_n + \frac{3}{2}$

سلسلة تمارين حول المتتاليات.

أ) أثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) أكتب V_n ثم U_n بدلالة n.

2) أحسب $\lim_{n\to+\infty} U_n$ ثم استنتج أن المتتالية U_n متقاربة.

3) أحسب كل من S_n و T_n حيث: $S_n = V_0+V_1+\cdots+V_n$

$T_n = U_0+U_1+\cdots+U_n$

تمرين 5 ، BAC 2008 (05) الموضوع 2

المتتالية العددية (U_n) معرفة كمايلي: $U_0=1$

ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن: $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n-1$.

1) أحسب U_1 ، U_2 و U_3

2) أ) أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n \geq -2$

ب) جد إتجاه تغير المتتالية (U_n) ، ماذا تستنتج ؟.

3) (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كمايلي: $V_n=U_n+2$

أ) بين أن المتتالية (V_n) متتالية هندسية.

ب) عبر بدلالة n عن الحد العام V_n ثم U_n.

ج) أحسب $\lim_{n\to+\infty} U_n$

د) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=U_0+U_1+\cdots+U_n$

تمرين 6 BAC 2008 (04) الموضوع 1.

(U_n) متتالية عددية معرفة كمايلي:
$$\begin{cases} U_0=\alpha ,\ (\alpha\in\mathbb{R}) \\ U_{n+1}=\frac{2}{3}U_n-\frac{8}{9} ,\ (n\in\mathbb{N})\end{cases}$$

1) برهن بالتراجع أنه في حالة $\alpha=-\frac{8}{3}$ تكون المتتالية (U_n) ثابتة.

2) في كل مايلي: $\alpha=2$ ، ونعرف المتتالية العددية (V_n) كما يلي:

$$V_n=U_n+\frac{8}{3}$$

أ) أحسب U_1 ، U_2.

ب) أثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها

ج) وحدها الأول V_0.

د) أكتب عبارة U_n بدلالة n وأحسب $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

المستوى: 3 ت ا.

سلسلة تمارين حول المتتاليات.

تمرين 7: BAC 2010 (ت ر ا) م 2.

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n

$$u_{n+1}=\frac{3u_n+2}{4}$$

1) أحسب u_1 ، u_2 و u_3.

2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n<2$.

ب- برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

جـ- إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=u_n-2$

أ- بين أن المتتالية (v_n) م هـ يطلب تحديد حدها الأول وأساسها.

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_n=2-\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

جـ- ماهي نهاية المتتالية (u_n) ؟.

4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=v_0+v_1+\dots+v_n$

وإستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_0+u_1+\dots+u_n=4\left(\frac{3}{4}\right)^n+2n-2$

تمرين 8:

في 1 جانفي 2004 أودع فاروق 20.000 دج ببنك يقترح فائدة مركبة نسبتها 6% سنويا. بالإضافة إلى ذلك فإنه يودع في كل أول جانفي من السنوات الموالية مبلغ 3000 دج.

نرمز بـ u_n إلى رصيد فاروق في أول جانفي من السنة $2004+n$.

1) عين u_0 ، u_1 و u_2.

2) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=1{,}06\,u_n+3000$

3) بين أن (u_n) متتالية ليست حسابية وليست هندسية.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n+50000$

أ) بين أن (v_n) م هـ أساسها $1{,}06$، عين حدها الأول.

ب) عبر عن v_n بدلالة n ثم إستنتج u_n بدلالة n.

جـ) كم يكون رصيد فاروق في سنة 2014 ؟.

سلسلة تمارين حول المتتاليات.

تمرين ④:

يزداد عدد سكان مدينة A بـ 125 نسمة كل سنة في حين يزداد عدد سكان مدينة B بنسبة 3% من سنة لأخرى، في سنة 2009 بلغ عدد سكان كل مدينة من المدينتين 8000 نسمة.

نرمز بـ U_n إلى عدد سكان المدينة A وبـ V_n إلى العدد س م B خلال السنة $2009+n$

1) عين U_0 و U_1 ثم V_0 و V_1.

2) أ) أوجد علاقة بين U_{n+1} و U_n ثم تحقق أن (U_n) م ح يطلب تحديد أساسها r.

ب) عبر عن U_n بدلالة n.

3) أ) أوجد علاقة بين V_{n+1} و V_n ثم تحقق أن (V_n) م هـ " " " q

ب) عبر عن V_n بدلالة n.

4) قارن بين عددي سكان المدينتين في سنة 2014

5) إبتداء من أية سنة يتضاعف عدد سكان المدينة A.

تمرين 05: BAC 2012 (ن5) م ⓐ.

في بداية جانفي 2008 وضع شخص مبلغا من المال قدره 50000DA في صندوق التوفير والاحتياط، يقدم الصندوق فائدة قدرها 5% سنويا. يسحب هذا الشخص نهاية كل سنة مبلغا قدره 5000 DA (بعد حساب الفائدة)، يرمز U_n إلى المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية جانفي من السنة $2008+n$.

1) أ- أحسب كلا من U_0، U_1 و U_2.

ب- هل المتتالية (U_n) هندسية؟ هل هي حسابية؟ برر إجابتك.

جـ- بين لماذا من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $U_{n+1} = 1{,}05\, U_n - 5000$

2) نضع من أجل عدد طبيعي n، $V_n = U_n - 100\,000$.

أ- بين أن المتتالية (V_n) هندسية، حدد أساسها وحدها الأول.

ب- أكتب V_n بدلالة n، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$$U_n = -50000 \times (1{,}05)^n + 100\,000$$

3) أ- ما هو المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية عام 2014؟

ب- إبتداء من أية سنة لا تسمح إدارة الصندوق لهذا الشخص سحب المبلغ المعتاد على سحبه في نهاية كل سنة؟

المستوى: 3 ت 1.

حلول سلسلة تمارين حول المتتاليات.

التمرين ①:

1) حساب u_2 و q واستنتاج u_1:

بما أن (u_n) م هـ فإن: $u_1 \times u_3 = u_2^2$ أي: $u_1 \times u_3 = \frac{216}{u_2} = u_2^2$ أي: $\frac{216}{u_2} = u_2^2$

أي: $u_2^3 = 216$ أي: $u_2 = \sqrt[3]{216}$ ومنه: $u_2 = 6$

نعوض u_2 في جملة المعادلتين لحساب q و u_1:

$$\begin{cases} u_1 + 2(6) + u_3 = 32 \\ u_1 \times 6 \times u_3 = 216 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 + u_3 = 20 & \text{--- (1)} \\ u_1 \times u_3 = 36 & \text{--- (2)} \end{cases}$$

من (1) نجد: $u_1 = 20 - u_3$ ثم نعوض في (2): $(20-u_3)u_3 = 36$

أي: $-u_3^2 + 20u_3 - 36 = 0$

لدينا: $\Delta = 400 - 144$ أي $\Delta = 256$ ومنه: $\sqrt{\Delta} = 16$

للمعادلة حلين: $u_3 = 2$ (مرفوضة) أو $u_3 = 18$

لأن المتتالية متزايدة تماما إذن: $u_3 = 18$

لدينا: $u_3 = q u_2$ ومنه: $q = \frac{u_3}{u_2} = \frac{18}{6}$ إذن: $q = 3$

ولدينا: $u_2 = q u_1$ ومنه: $u_1 = \frac{u_2}{q} = \frac{6}{3}$ إذن: $u_1 = 2$

2) عبارة الحد العام u_n:

لدينا: $u_n = u_p \times q^{n-p}$ أي: $u_n = u_1 \times 3^{n-1}$ ومنه: $u_n = 2 \times 3^{n-1}$

3) حساب S_n:

لدينا: $S_n = u_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1}$ أي: $S_n = 2 \times \frac{3^n - 1}{3 - 1}$.

ومنه: $S_n = 3^n - 1$

تعيين العدد الطبيعي n:

لدينا: $S_n = 3^n - 1 = 728$ أي: $3^n = 729$ أي: $3^n = 3^6$

ومنه: $n = 6$.

التمرين ②:

لدينا: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_3 + u_4 + u_5 = -33 & \text{--- (1)} \end{cases}$

1) حساب u_4 والأساس r:

لدينا: u_3, u_4, u_5 حدود متتابعة من متتالية حسابية ومنه: $2u_4 = u_3 + u_5$

بالتعويض في (1) نجد: $2u_4 + u_4 = -33$ أي: $3u_4 = -33$ ومنه: $u_4 = -11$

الأساس r:

لدينا: $u_4 = u_0 + 4r$ ومنه: $-11 = 1 + 4r$ ومنه: $r = -3$

حلول سلسلة تمارين حول المتتاليات.

② كتابة u_n بدلالة n:

لدينا: $u_n=u_0+nr$ ومنه: $u_n=1-3n$

③ حساب S_n بدلالة n: $\quad S_n=u_0+u_1+\dots+u_n$

لدينا: $S_n=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$ ومنه: $S_n=(n+1)\left(\frac{2-3n}{2}\right)$

④ تعيين قيمة n: $\quad S_n=-15351$

لدينا: $S_n=(n+1)\left(\frac{2-3n}{2}\right)=-15351$ أي: $\frac{(n+1)(2-3n)}{2}=-15351$

أي: $(n+1)(2-3n)=-30702$ ومنه: $-3n^2-n+30704=0$

$\sqrt{\Delta}=607$ ، $n_1=\frac{1+607}{-6}=\frac{608}{-6}\notin\mathbb{N}$ (مرفوض)

$n_2=\frac{1-607}{-6}=101\in\mathbb{N}$ (مقبول)

إذن قيمة n هي: 101

التمرين ③:

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=2u_n-3 \end{cases} \quad n\in\mathbb{N}$$

① حساب u_1 ، u_2 و u_3:

$u_1=-1$ ، $u_2=-5$ ، $u_3=-13$

② إثبات أن (u_n) ليست حسابية ولا هندسية:

(u_n) ليست حسابية لأن:

بما أن: $u_2-u_1\neq u_3-u_2$ $\qquad u_2-u_1=-4$ ، $u_3-u_2=-8$

فإن (u_n) ليست حسابية.

(u_n) ليست هندسية لأن:

بما أن: $\frac{u_2}{u_1}\neq\frac{u_3}{u_2}$ $\qquad \frac{u_2}{u_1}=5$ ، $\frac{u_3}{u_2}=\frac{13}{5}$

فإن (u_n) ليست م هـ.

③ البرهان بالتراجع على أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $u_n=3-2^{n+1}$:

المرحلة ①: من أجل $n=0$ نجد: $u_0=3-2^1$ ومنه: $u_0=1$

إذن الخاصية محققة من أجل $n=0$.

المرحلة ②:

نفرض أن: $u_n=3-2^{n+1}$ ، $n\in\mathbb{N}$ ونبرهن أن: $u_{n+1}=3-2^{n+2}$ ، $n\in\mathbb{N}$

لدينا: $u_{n+1}=2u_n-3$ أي: $u_{n+1}=2(3-2^{n+1})-3$

$= 6-2^{n+2}-3 = 3-2^{n+1}$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل: $n+1$

إذن: $u_n=3-2^{n+1}$ من أجل $n\in\mathbb{N}$

المستوى: 3 ع إ.

حلول سلسلة تمارين حول المتتاليات

④ حساب المراتب:

لدينا، $u_9 = 3 - 2^{10}$ ومنه: $u_9 = -1021$

⑤ تعيين قيمة n حتى يكون: $u_n = -16381$

لدينا: $3 - 2^{n+1} = -16381$ أي: $2^{n+1} = 16384$ أي: $2^{n+1} = 2^{14}$

ومنه $n+1 = 14$: $n = 13$

التمرين ④:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n - 1 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

① حساب u_1، u_2: $u_1 = -\frac{1}{3}$ ، $u_2 = -\frac{10}{9}$

② أ) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية وتعيين q و v_0:

لدينا، $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{3}{2}$ أي: $v_{n+1} = \frac{1}{3} u_n - 1 + \frac{3}{2}$

ومنه: $v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n$ إذن: (v_n) م ه أساسها: $q = \frac{1}{3}$

وحدها الأول: $v_0 = u_0 + \frac{3}{2}$ ومنه: $v_0 = \frac{7}{2}$

ب) كتابة v_n ثم u_n بدلالة n:

$v_n = \frac{7}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ، $u_n = \frac{7}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}$

ج) حساب $\lim u_n$ واستنتج أن م متقاربة:

لدينا: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\frac{3}{2}$ لأن: $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{7}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\frac{3}{2}$ فهي متقاربة.

③ حساب المجموع S_n و T_n:

$$T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$
$$= \left(v_0 - \frac{3}{2}\right) + \left(v_1 - \frac{3}{2}\right) + \cdots + \left(v_n - \frac{3}{2}\right)$$
$$= (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) - \frac{3}{2}(n+1)$$
$$T_n = -\frac{21}{4}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right] - \frac{3}{2}(n+1)$$

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$
$$S_n = v_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$
$$S_n = -\frac{21}{4}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right]$$

التمرين ⑤: BAC 2008

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n - 2 \end{cases}$$

① حساب u_1، u_2 و u_3:

$u_1 = -\frac{1}{2}$ ، $u_2 = -\frac{5}{4}$ ، $u_3 = -\frac{13}{8}$

② أ) إثبات بالتراجع أن: $u_n \geq -2$ ؛ نرمز لهذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة ①، من أجل $n = 0$ نجد: $u_0 \geq -2$ أي $1 \geq -2$

إذن الخاصية محققة من أجل $n = 0$.

المرحلة ②: نفرض أن الخاصية $P(n)$ أي $u_n \geq -2$ صحيحة ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي $u_{n+1} \geq -2$.

حلول تمارين سلسلة المتتاليات .

لدينا : $u_n \geq -2$ ومنه : $\frac{1}{2}u_n \geq -1$ ومنه ، $\frac{1}{2}u_n - 1 \geq -2$

إذن : $u_{n+1} \geq -2$ ومنه الخاصية $p(n+1)$ صحيحة من أجل $n+1$

إذن ، من م (1) و م (2) فإن الخاصية $p(n)$ صحيحة أي أن ، $u_n \geq -2$

ب) إيجاد اتجاه تغير المتتالية (u_n) مع الاستنتاج :

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n - 1 - u_n$ أي : $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n - 1$

أي : $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}(u_n + 2)$ ، لدينا ، $u_n + 2 \geq 0$ لأن : $u_n \geq -2$

إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

الاستنتاج : بما أن (u_n) م متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد -2 فإنها متقاربة .

3) أ) تبيين أن (v_n) م هـ : $v_n = u_n + 2$

لدينا : $v_{n+1} = u_{n+1} + 2 = \frac{1}{2}u_n - 1 + 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 = \frac{1}{2}(u_n + 2)$

أي : $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ إذن المتتالية (v_n) هـ وأساسها $q = \frac{1}{2}$

وحدها الأول $v_0 = 3$

ب) التعبير بدلالة n عن v_n ثم u_n :

لدينا : $v_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2$

ج) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -2$ لأن : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

4) حساب بدلالة n المجموع S_n :

لدينا : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (v_0 - 2) + (v_1 - 2) + \cdots + (v_n - 2)$

$= (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) - 2(n+1)$

$S_n = \frac{3}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right] - 2n - 2$

التمرين 6 : BAC 2008

1) البرهان بالتراجع أن (u_n) ثابتة من أجل $\alpha = -\frac{8}{3}$:

المرحلة 1 ، من أجل $n = 0$. $u_1 = -\frac{8}{3}$

وعليه فإنه : $u_1 = u_0$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

المرحلة 2 : نفرض أن الخاصية $u_n = -\frac{8}{3}$ صحيحة ونبرهن صحة الخاصية $u_{n+1} = -\frac{8}{3}$

لدينا : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9} = \frac{2}{3}\left(-\frac{8}{3}\right) - \frac{8}{9} = -\frac{24}{9} = -\frac{8}{3}$

أي : $u_{n+1} = -\frac{8}{3}$

ومنه الخاصية $u_{n+1} = -\frac{8}{3}$ صحيحة . إذن من م (1) وم (2) فإنه من أجل كل عدد طبيعي $u_n = -\frac{8}{3}$ من أجل $\alpha = -\frac{8}{3}$ فإن م u_n ثابتة .

المستوى: 3ت إ

حلول تمارين سلسلة المتتاليات.

تابع للتمرين ⑥:

$$\begin{cases} \alpha = 2 \text{ أي: } u_0 = 2 \\ V_n = u_n + \frac{8}{3} \end{cases}$$

ⓐ) حساب u_1 ، u_2 :

$u_1 = \frac{4}{9}$ ، $u_2 = \frac{-16}{27}$

ب) إثبات أن (V_n) م ه وتعيين q و V_0 :

لدينا: $V_{n+1} = \frac{2}{3} V_n$ ومنه: (V_n) م ه أساسها $q = \frac{2}{3}$ و $V_0 = \frac{14}{3}$

ج) كتابة عبارة u_n وحساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$:

$V_n = \frac{14}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$u_n = \frac{14}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{8}{3}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\frac{8}{3}$

لأن: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

التمرين ⑦: BAC 2010

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{4} = \frac{3}{4} u_n + \frac{1}{2} \end{cases}$$

1) حساب u_1 ، u_2 و u_3 :

$u_1 = \frac{5}{4}$ ، $u_2 = \frac{23}{16}$ ، $u_3 = \frac{101}{64}$

ⓐ2) البرهان بالتراجع أن: $u_n < 2$ ؛

المرحلة ①: من أجل $n = 0$ نجد: $u_0 < 2$ أي $1 < 2$

ومنه نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

المرحلة ②: نفرض صحة الخاصية $u_n < 2$ ونبرهن أن الخاصية $u_{n+1} < 2$ صحيحة من أجل $n+1$.

لدينا: $u_n < 2$ أي $\frac{3}{4} u_n < \frac{3}{4} \times 2$ أي: $\frac{3}{4} u_n + \frac{1}{2} < 2$ يعني: $u_{n+1} < 2$.

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

إذن من م(1) و م(2) الخاصية $u_n < 2$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

ب) البرهان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما،

ط1) نلاحظ أن $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث، $f(x) = \frac{3}{4} x + \frac{1}{2}$

بما أن $\frac{3}{4} > 0$ و $u_1 - u_0 = \frac{1}{4}$ أي: $u_1 - u_0 > 0$.

فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

ط2) باستعمال البرهان بالتراجع: البرهان أن المتتالية (u_n) متزايدة

يعني نثبت أن: $u_{n+1} > u_n$ من أجل $n \in \mathbb{N}$. أي: $u_{n+1} - u_n > 0$.

المرحلة ①، من أجل $n = 0$ نجد: $u_1 > u_0$ ومنه نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

المرحلة ②، نفرض صحة الخاصية $u_{n+1} > u_n$ من أجل $n \in \mathbb{N}$

ونبرهن صحة أن الخاصية $u_{n+2} > u_{n+1}$ صحيحة من أجل $n+1$

حلول سلسلة تمارين حول المتتاليات

لدينا: $u_{n+1} > u_n$ أي: $\frac{3}{4}u_{n+1} > \frac{3}{4}u_n$ أي $\frac{3}{4}u_{n+1}+\frac{1}{2} > \frac{3}{4}u_n+\frac{1}{2}$

يعني: $u_{n+2} > u_{n+1}$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

إذن من (1) و(2) نستنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$، $u_{n+1} > u_n$

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

ج) إستنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة:

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ 2 فإنها متقاربة.

3) أ) تبيين أن المتتالية (v_n) هـ مع تحديد q و v_0:

لدينا: $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$ إذن المتتالية (v_n) هـ وأساسها $q = \frac{3}{4}$

وحدها الأول $v_0 = -1$

ب) كتابة عبارة v_n واستنتاج أن: $u_n = 2-\left(\frac{3}{4}\right)^n$:

لدينا: $v_n = -\left(\frac{3}{4}\right)^n$ و $u_n = 2-\left(\frac{3}{4}\right)^n$

ج) نهاية المتتالية u_n:

$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$ لأن: $\lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] = 0$

4) حساب المجموع S_n واستنتاج أن: $u_0+u_1+\cdots+u_n = 4\left(\frac{3}{4}\right)^n+2n-2$:

لدينا: $S_n = (-1)\dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1}{\frac{3}{4}-1}$ ومنه: $S_n = 4\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]$

الإستنتاج: لدينا: $u_0+u_1+\cdots+u_n = (v_0+2)+(v_1+2)+\cdots+(v_n+2)$

$= S_n + 2(n+1)$

$= 4\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}+2n-2$

التمرين 8:

1) تعيين u_0، u_1 و u_2:

u_0 رصيد فاروق في 1 جانفي 2004 ومنه $u_0 = 20000\ DA$

u_1 " " " " 2005 $u_1 = u_0 + \frac{6}{100}u_0 + 3000$

$u_1 = 24200\ DA$

u_2 " " " " 2006 $u_2 = u_1 + \frac{6}{100}u_1 + 3000$

$u_2 = 28652\ DA$

2) التحقق أن $u_{n+1} = 1,06u_n + 3000$:

لدينا:

$u_1 = 1,06u_0 + 3000$

$u_2 = 1,06u_1 + 3000$

$\vdots$

نعم: $u_{n+1} = 1,06u_n + 3000$

المستوى: 3 ت إ.

حلول تمارين سلسلة المتتاليات.

تابع للتمرين (8):

3) تبيين أن (U_n) م ليست ح و م هـ:

* من أجل $n\in\mathbb{N}$ لدينا: $U_{n+1}-U_n = 1{,}06U_n+3000-U_n$

ومنه: $U_{n+1}-U_n = 0{,}06U_n+3000$ وعليه الفرق غير ثابت وبالتالي (U_n) ليست م ح.

* من أجل $n\in\mathbb{N}$ لدينا، $U_{n+1}=1{,}06U_n+3000$ وبالتالي لا يمكن كتابة U_{n+1} على الشكل $U_{n+1}=qU_n$ ومنه (U_n) ليست م هـ.

4) أ) تبيين أن V_n م هـ أساسها $1{,}06$ وتعيين V_0:

لدينا: $V_{n+1}=U_{n+1}+50000$ أي $V_{n+1}=1{,}06U_n+53000$ أي $V_{n+1}=1{,}06\left(U_n+\frac{53000}{1{,}06}\right)$

ومنه: $V_{n+1}=1{,}06V_n$ ومنه V_n م هـ أساسها $q=1{,}06$

وحدها الأول $V_0=70000$

ب) التعبير عن V_n واستنتاج U_n:

$V_n=70000(1{,}06)^n$ و $U_n=70000(1{,}06)^n-50000$

ج) يكون رصيد فاروق في سنة 2014:

لدينا: $2004+n=2014$ ومنه: $n=10$ وهي رتبة 2014

إذن: $U_{10}=70000(1{,}06)^{10}-50000$ ومنه: $U_{10}=\cancel{307...}$

$U_{10}=75359{,}33\ DA$

التمرين (9):

1) تعيين U_0 و V_0 ثم U_1 و V_1:

U_0 هو عدد سكان A خلال السنة 2009 ومنه: $U_0=8000$

V_0 〃 〃 〃 B 〃 〃 〃 〃 $V_0=8000$

U_1 〃 〃 〃 A خلال سنة $2009+1$ أي 2010 ومنه $U_1=8000+150=8150$

V_1 〃 〃 〃 B 〃 〃 〃 〃 ومنه:

$V_1=8000+\frac{3}{100}8000=8000+240=8240$

2) أ) إيجاد علاقة بين U_{n+1} و U_n:

$n\in\mathbb{N}$: $U_{n+1}=U_n+150$ ومنه (U_n) م ح أساسها $r=150$

وحدها الأول $U_0=8000$

ب) التعبير عن U_n بدلالة n: $U_n=8000+150n$

3) أ) إيجاد علاقة بين V_{n+1} و V_n: $V_{n+1}=1{,}03V_n$

ومنه: V_n م هـ أساسها $q=1{,}03$ وحدها الأول $V_0=8000$

ب) التعبير عن V_n بدلالة n : $V_n = (1{,}03)^n \times 8000$

4) المقارنة بين عددي سكان المدينتين في سنة 2014 :

ع س المدينتين A و B خلال 2014 هو عدد سكان خلال سنة 2009+5

أي تمثل U_5 و V_5 على الترتيب ومنه : $U_5 = 8750$ ، $V_5 = 9274{,}19$

ومنه نجد : $U_5 < V_5$ أي عدد سكان A أقل من ع س B سنة 2014.

5) السنة التي يبدأ فيها تضاعف ع س المدينة A : أي : $U_n = 16000$

لدينا : $8000 + 150n = 16000$ ، ومنه $n = 54$

أي أن : $2009 + 54 = 2063$ ومنه يتضاعف عدد س A ابتداءا من 2063

التمرين 16 : BAC 2012

1) أ) حساب كلا من U_0 ، U_1 و U_2 :

لدينا ، $U_0 = 50000$ ، $U_1 = 1{,}05U_0 - 5000$ ومنه ؛ $U_1 = 47500$

$U_2 = 1{,}05U_1 + 5000$ ومنه ؛ $U_2 = 44875$

ب) (U_n) ليست هندسية : لأن : $\frac{U_2}{U_1} \neq \frac{U_1}{U_0}$ أو : $U_0 \times U_2 \neq U_1^2$

(U_n) " حسابية لأن ،

$U_2 - U_1 \neq U_1 - U_0$ أو : $U_0 + U_2 \neq 2U_1$

2) تبيين أن : $U_{n+1} = 1{,}05U_n - 5000$:

$U_1 = U_0 + \frac{5}{100}U_0 - 5000$

$U_2 = U_1 + \frac{5}{100}U_1 - 5000$

$\vdots$

$U_{n+1} = U_n + \frac{5}{100}U_n - 5000 = 1{,}05U_n - 5000$

3) إيجاد علاقة بين ~~V_n و V_{n+1}~~

4) أ) تبيين أن V_n م هـ وتحديد q و U_0 : $V_{n+1} = 1{,}05V_n$

(V_n) م هـ أساسها $q = 1{,}05$ وحدها الأول $V_0 = -50000$

ب) كتابة V_n بدلالة n ثم استنتاج أن : $U_n = -50000 \times (1{,}05)^n + 100000$ ؛

لدينا : $V_n = -50000\,(1{,}05)^n$ و $U_n = -50000 \times (1{,}05)^n + 100000$

5) أ) المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية 2015 :

لدينا ، رتبة 2015 في بداية السنة هي ، $2008 + n = 2015$ أي : $n = 7$

أكن رتبة 2015 في نهاية " هي $n = 8$ إذن : $U_8 = 26127{,}23$

ب) السنة التي تبدأ فيها إدارة الصندوق بعدم السماح بالسحب المعتاد :

من أجل : $U_n < 5000$ أي : $-50000\,(1{,}05)^n + 100000 < 5000$

أي : $(1{,}05)^n > 1{,}9$ أي : $(1{,}05)^{14} > 1{,}9$ ومنه : $n = 14$

إذن : $2008 + n = 2008 + 14 = 2022$ إذن : إبتداءا من سنة 2022 لا يسمح لهذا

الشخص بسحب المبلغ المعتاد

المستوى : 3 ت إ

المحور: الإحصاء

الكفاءات المستهدفة: ① تعريف سلسلة إحصائية لمتغيرين عدديين.
② تمثيل " " " " بسحابة نقط.
③ تعيين إحداثيي النقطة المتوسطة.
④ إنشاء مستقيم تعديل خطي.

الأستاذ: سي محمد

محتوى الدرس.

نشاط تمهيدي:

الجدول التالي يمثل عدد المنخرطين في قاعة للرياضة بين 2001 و 2005

السنة	2001	2002	2003	2004	2005
رتبة السنة x_i	1	2	3	4	5
عدد المنخرطين y_i	126	201	275	375	438

① مثل سحابة النقط $M_i(x_i, y_i)$ في معلم متعامد بوحدة 2cm لكل رتبة السنة و 1cm لكل 50 منخرط.

② أحسب كل من $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ ثم عين النقطة $G(\bar{X}, \bar{Y})$

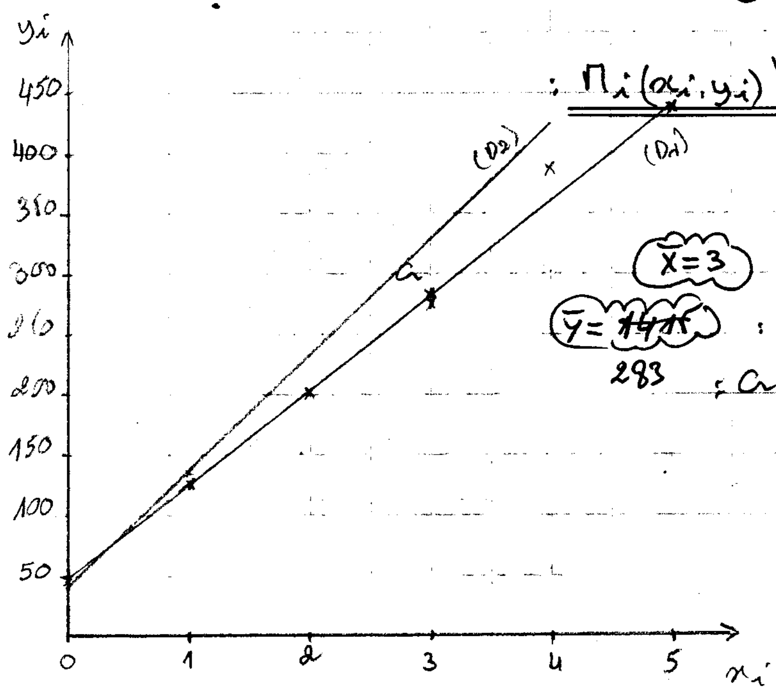
③ أنشئ (D_1) المستقيم الذي يشمل $M_1(1,126)$ و $M_5(5,438)$ ثم أكتب معادلة ديكارتية لـ (D_1).

④ أنشئ في نفس المعلم المستقيم (D_2) ذا المعادلة: $y=90x+45$
أي المستقيمين أقرب إلى السحابة؟

⑤ من المستقيم (D_1) إستنتج توقعات عدد المنخرطين سنة 2013.

الحل:

① تمثيل سحابة النقط $M_i(x_i, y_i)$:



② حساب كل من $\bar{X}$ و $\bar{Y}$:

لدينا: $\bar{X} = \sum_{i=1}^{5} \frac{x_i}{N}$ ومنه: $\bar{X} = 3$

ولدينا: $\bar{Y} = \sum_{i=1}^{5} \frac{y_i}{N}$ ومنه: $\bar{Y} = \cancel{1414}$ 283

تعيين النقطة $G(\bar{X}, \bar{Y})$:

أي: $G(3, \cancel{1414}$ 283$)$

③ إنشاء المستقيم (D_1):

محتوى الدرس .

كتابة معادلة ديكارتية لـ (D_1) ؛ $f(1) = 126$ ؛ $f(5) = 438$

لدينا : $a = \frac{438 - 126}{5 - 1}$ ومنه : $a = 78$

ولدينا : $f(x_1) = ax_1 + b$ أي : $f(1) = 78(1) + b$ ومنه : $b = 48$

إذن : $y = 78x + 48$ وهي معادلة ديكارتية لـ (D_1) .

4) إنشاء المستقيم (D_2) :

المستقيم الأقرب إلى السحابة هو المستقيم (D_1) .

5) استنتاج توقعات عدد المنخرطين سنة 2013 :

لدينا رتبة السنة 2013 هي : $x = 13$

نعوض في معادلة المستقيم (D_1) نجد : $y = 1062$

إذن توقعات عدد المنخرطين سنة 2013 هو 1062 منخرط .

* السلسلة الإحصائية لمتغيرين :

تعريف :

نعتبر متغيرين إحصائيين عدديين على نفس المجتمع ذي n فردا

- تشكل القيم x_1 ، x_2 ، ...... ، x_n للمتغير الأول X سلسلة إحصائية أولى ونرمز إليها بـ (x_i) .

- وتشكل القيم y_1 ، y_2 ، ...... ، y_n للمتغير الثاني Y سلسلة إحصائية ثانية ونرمز إليها بـ (y_i) .

- تشكل الثنائيات $(x_1; y_1)$ ، $(x_2; y_2)$ ، ...... ، $(x_n; y_n)$ سلسلة إحصائية لمتغير مضاعف ونرمز إليها بـ $(x_i; y_i)$ حيث : $1 \leq i \leq n$.

مثال :

أثناء دراسة على مجتمع إحصائي نتم أحيانا ملاحظة طابعين كميين (مثل : القامة والوزن، الأجرة والسن ....) عندئذ نعرف متغيرين X و Y تأخذ قيمها x_i و y_i في جدول على الشكل التالي :

X	x_1	x_2	----	x_n
Y	y_1	y_2	----	y_n

حيث أن مجموعة الثنائيات $(x_i; y_i)$ تشكل سلسلة إحصائية ذات متغيرين .

محتوى الدرس.

ملاحظة:

إذا كان المتغير الأول x_i يدل على الزمن "ساعات، أيام، سنوات"
تدعى السلسلة (x_i, y_i) سلسلة زمنية.

- سحابة النقط و النقطة المتوسطة:

> في مستوي مزود بمعلم متعامد "مناسب" مجموعة النقط $M_i(x_i, y_i)$
> هي سحابة نقط السلسلة ذات المتغيرين x و y.
> * النقطة المتوسطة لهذه السلسلة هي النقطة $G(\bar{X}, \bar{Y})$
> حيث: $\bar{X}$ معدل القيم x_i و $\bar{Y}$ معدل القيم y_i.
>
> $$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad , \quad \bar{Y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{n} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$$

ملاحظة:

حتى يكون لدراسة سحابة نقط معنى ينبغي أن يكون عدد النقط كبيرا
ويأخذ شكلا متطاولا. ~~وتتعلق بإمكانية إنشاء مستقيم قريب~~
~~حول نقط السحابة.~~

مثال:

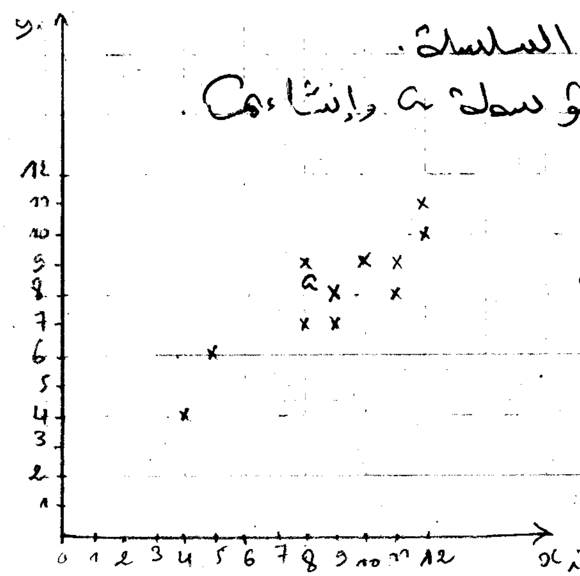
يوضح الجدول التالي علامات 10 تلاميذ في مادة المحاسبة (y)
وفي مادة الرياضيات (x).

x_i	8	10	12	11	11	9	12	5	4	8
y_i	9	9	10	9	8	7	11	6	4	7

1) أنشئ سحابة النقط لهذه السلسلة.
2) عين إحداثيات النقطة المتوسطة G وإنشاءها.

الحل:

1) إنشاء سحابة النقط:



2) تعيين إحداثيات النقطة G وإنشاؤها:

لدينا: $\bar{X} = 9$ و $\bar{Y} = 8$

إذن: $G(9, 8)$

محتوى الدرس .

* التعديل الخطي :

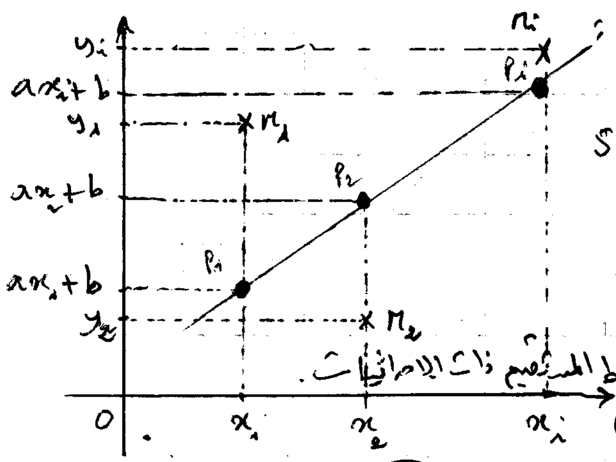
تعريف :

القيام بتسوية خطية أو بتعديل خطي لسحابة نقط $M_i(x_i;y_i)$ يعني إيجاد دالة تآلفية تعبر بكيفية تقريبية عن y بدلالة x .

التعديل الخطي بالمربعات الدنيا :

عند تمثيل سلسلة إحصائية مزدوجة بسحابة نقط نلاحظ في بعض الحالات هذه السحابة لها شكل متطاول أي يبدو أنه يمكن رسم مستقيم تتوزع حوله نقط السحابة و يسمح بالقيام بأحسن تسوية .
لذلك نعتمد على طريقة المربعات الدنيا التي نلخص فيما يلي :

مبدأ التسوية بالمربعات الدنيا :



نحسب المجموع :

$$S = M_1P_1^2 + M_2P_2^2 + \dots + M_nP_n^2$$

أي :

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_iP_i^2$$

حيث : M_i هي نقط السحابة ذات الإحداثيات $(x_i;y_i)$ و P_i هي نقط المستقيم ذات الإحداثيات (x_i, ax_i+b) .

نقبل بوجود مستقيم يسمى مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا حيث يشمل النقطة المتوسطة للسحابة و يجعل S أصغر ما يمكن .

تعريف و مبرهنة :

مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا هو مستقيم الانحدار y وفق x الذي يشمل النقطة المتوسطة و معادلته المختصرة هي من الشكل $y = ax+b$ حيث :

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \quad , \quad a = \frac{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right) - \bar{x}\bar{y}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

المستوى: 3 ت إ.

سير الدرس.

ملاحظة:

يمكن إيجاد a بالعلاقة التالية: $a = \frac{cov(x,y)}{V(x)}$ حيث:

التغاير $cov(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})(y_i-\bar{y})$ و التباين $V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2$

تمرين تطبيقي: BAC 2011 (04ن).

يمثل الجدول التالي الكميات المنتجة لسلعة شركة من سنة 2006 إلى سنة 2010. (الكميات مقدرة بالطن).

السنة	2006	2007	2008	2009	2010
رتبة السنة x_i	1	2	3	4	5
كمية الإنتاج y_i	2,6	2,8	3,2	4	4,4

1) مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد.
(2cm يمثل رتبة واحدة على محور الفواصل، 1cm يمثل 0,4 طن على محور التراتيب).

2) عين إحداثيي G النقطة المتوسطة للسحابة و مثلها في المعلم السابق.

3) أ) جد معادلة مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا.

ب) أرسم هذا المستقيم في المعلم السابق.

4) ما هي كمية الإنتاج المتوقعة خلال سنة 2011؟

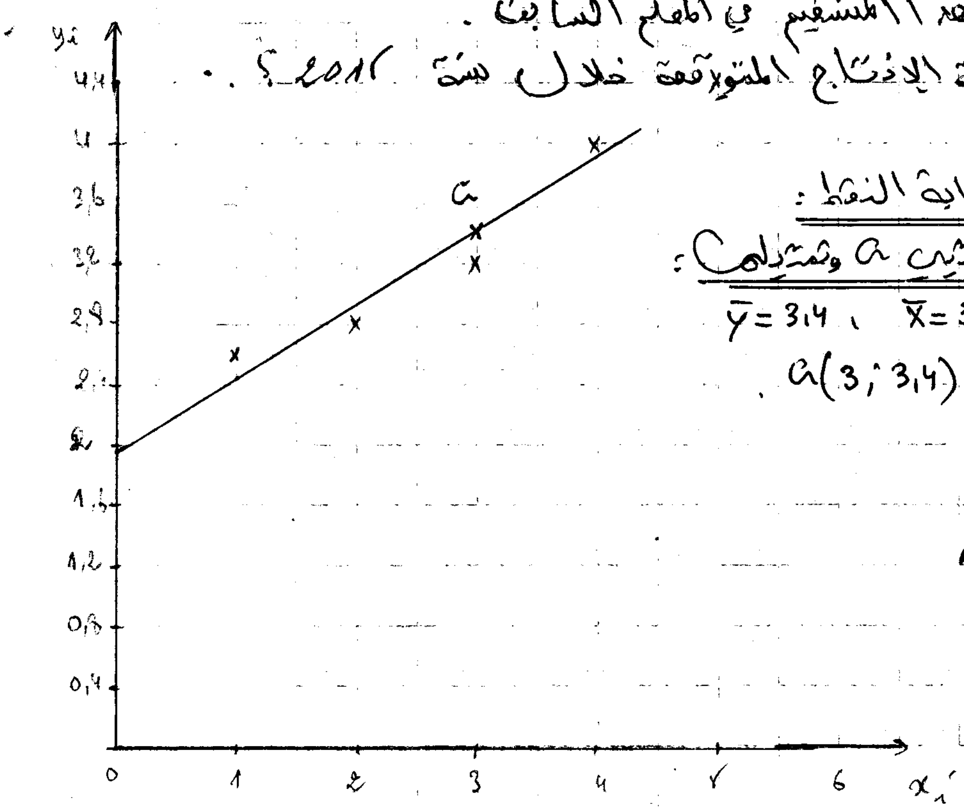
الحل:

1) **تمثيل سحابة النقط:**

2) **تعيين إحداثيي G وتمثيلها:**

لدينا: $\bar{X} = 3$ ، $\bar{y} = 3,4$

ومنه: $G(3;3,4)$.



سير الدرس .

3) أ) معادلة مستقيم الانحدار :

لدينا : $y = ax + b$ حيث : $a = \dfrac{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} x_i y_i\right) - \bar{x}\bar{y}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2}$

و $b = \bar{y} - a\bar{x}$

						المجموع Σ
رتبة السنة x_i	1	2	3	4	5	المجموع 15
كمية الانتاج y_i	2,6	2,8	3,2	4	4,4	17
$x_i y_i$	2,6	5,6	9,6	16	22	55,8
$(x_i - \bar{x})^2$	4	1	0	1	4	10

$a = \dfrac{\frac{55,8}{5} - (3 \times 3,4)}{\frac{10}{5}} = \dfrac{11,16 - 10,2}{2}$ ومنه : $a = 0,48$

اذن : $b = 3,4 - (0,48 \times 3) = 3,4 - 1,44$ ومنه : $b = 1,96$

اذن معادلة مستقيم الانحدار هي : $y = 0,48x + 1,96$

ب) رسم هذا المستقيم في المعلم السابق انظر الشكل :

4) كمية الانتاج المتوقعة سنة 2015 :

رتبة 2015 هي : $x = 10$ بالتعويض في y نجد : $y = (0,48 \times 10) + 1,96$ ومنه : $y = 6,76$

اذن كمية الانتاج المتوقعة سنة 2015 هي : 6,76 طن .

عمل منزلي : BAC 2013 : م ② .

الجدول التالي يعطي تطور النسب المئوية من ميزانية إحدى الجامعات والمخصصة للإنفاق على البحث العلمي بين سنتي 2005 و 2012 :

السنة	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
رتبة السنة x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
النسبة المئوية y_i %	3,3	3,8	4,5	4,7	5	5,2	5,7	6,2

1) مثل سحابة النقط $M_i(x_i ; y_i)$ في معلم متعامد .

2) جد إحداثيي G النقطة المتوسطة لسحابة النقط ، ثم مثلها .

3) بين أن المعادلة المختصرة لمستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا هي : $y = 0,38x + 3,09$ ثم أرسمه . 4) بفرض أن تغير النسب المئوية يبقى على هذه الوتيرة في السنوات القادمة . أ) قدر النسبة المئوية لإنفاق هذه الجامعة على البحث العلمي في سنة 2015

ب) في أية سنة تصبح النسبة المئوية المتوقعة للإنفاق على البحث العلمي لهذه الجامعة هي 9,93% ؟ .

المستوى: 3 ث إ.

المحور: الدوال العددية.

المحتوى المعرفي: الاستمرارية.

الكفاءة المستهدفة: فهم معنى دالة مستمرة على مجال.

سير الدرس.

نشاط:

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-3,2]$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x^2-3 \ ; \ x \in [-3,0[\\ f(x) = -2x+1 \ ; \ x \in [0,2] \end{cases}$$

1) أحسب $f(-3)$ ، $f(-1)$ ، $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(2)$ ..

2) أرسم في معلم التمثيل البياني للدالة f.

هل نستطيع رسم الدالة f دون رفع القلم باليد على كل من المجالين $[-3,2]$ ، $[-3;0[$ ؟

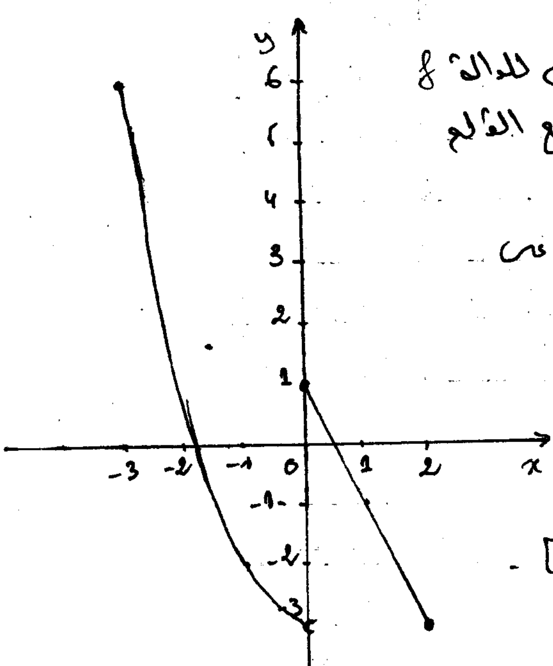
ماذا تستنتج ؟

مناقشة النشاط:

1) حساب كل من: $f(-3)$ ، $f(-1)$ ، $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(2)$:

$f(-3)=6$ ، $f(-1)=-2$ ، $f(0)=1$ ، $f(1)=-1$ و $f(2)=-3$.

2) رسم التمثيل البياني للدالة f:



أ) نلاحظ أنه عند رسم المنحنى الممثل للدالة f على المجال $[-3,2]$ نقوم حتمي برفع القلم عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

ومنه نستنتج أن الدالة f ليست مستمرة على المجال $[-3,2]$.

ب) نلاحظ أنه عند رسم المنحنى الممثل للدالة f على المجال $[-3,0[$ بإمكاننا عدم رفع القلم ومنه فنستنتج أن الدالة f مستمرة على المجال $[-3,0[$.

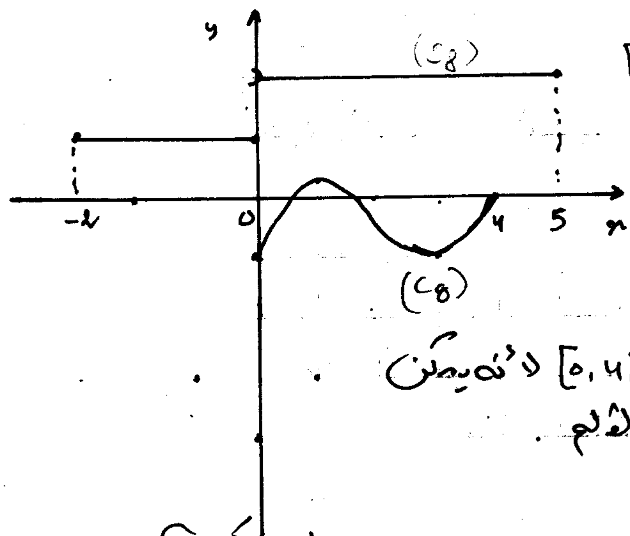
الاستمرارية:

1) **المفهوم الحدسي:**

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ وليكن (C) منحنيها البياني في معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ نقول عن f أنها مستمرة على I إذا استطعنا رسم منحنيها (C) بدون رفع القلم وفق خط مستمر.

سير الدرس .

مثال:



① الدالة f غير مستمرة على المجال $[-2,5]$ لأنه لا يمكن رسم منحنيها البياني دون رفع القلم.
بينما الدالة f مستمرة على كل من المجالين : $[-2,0]$ و $]0,5]$.

② الدالة g مستمرة على المجال $[0,4]$ لأنه يمكن رسم منحنيها البياني دون رفع القلم .

② **خواص** : " تقبل دون برهان " : أو بتركيبهم

نقبل بأن الدوال المحصل عليها بالعمليات على دوال مألوفة مستمرة على كل من المجالات التي تكون معرفة عليها .

نتائج :

① الدوال المرجعية " (الدالة التآلفية ، الدالة مربع ، الدالة مقلوب ، الدالة جذر تربيعي) " مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
② الدوال كثيرات الحدود مستمرة على $\mathbb{R}$.
③ الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

أمثلة :

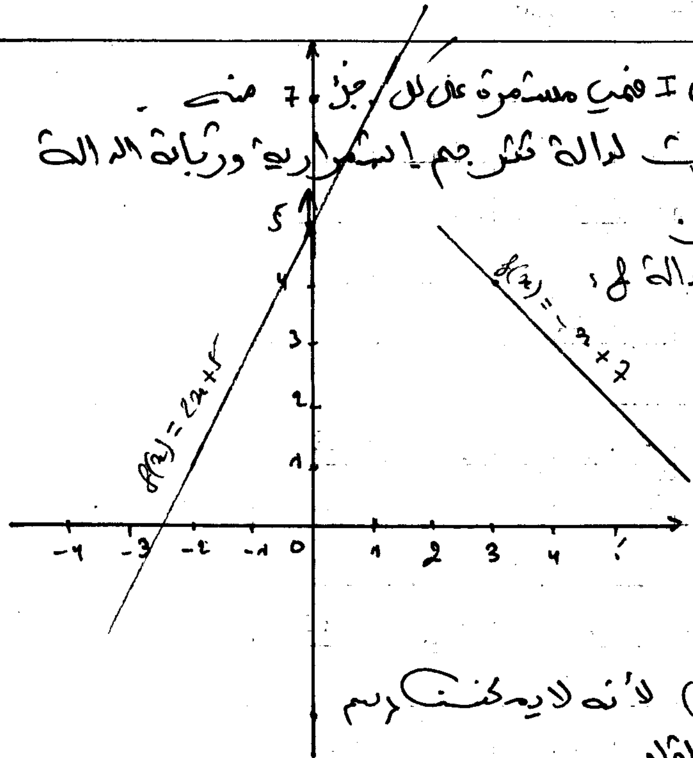
① الدالة $x \mapsto 2x+1$ مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها دالة تآلفية .
② الدالة $x \mapsto 5x^3-2x^2+3$ مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها كثير حدود .
③ الدالة $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-2}$ مستمرة على كل من المجالين : $]-\infty,2[$ و $]2,+\infty[$.
④ الدالة $x \mapsto x^2-1+\sqrt{x}$ مستمرة على المجال $[0,+\infty[$.
⑤ الدالة $x \mapsto (2x^2+1)\left(3+\frac{1}{x}\right)$ مستمرة على كل من المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$.

المستوى : 3 ث إ .

سير الدرس .

ملاحظة : - إذا كانت f مستمرة على I فهي مستمرة على كل جزء منه .

- الأسهم المائلة في جدول تغيرات لدالة تترجم استمرارية ورتابة الدالة على المجال المعتبر .



نشاط تقويمي : 1) رسم منحنى الدالة f :

تمرين 3 ص 48 :

القيم المساعدة :

على المجال $]-\infty,2[$

x	0	1
y	5	7

على المجال $]2,+\infty[$

x	3	4
y	4	3

2) الدالة f غير مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنه لا يمكننا رسم منحنى الدالة f دون رفع القلم .

تمارين للمراجعة : ت 1 و 2 ص 35 .

عمل منزلي : ت 6 ص 48 ؛ ش2 .

الحل :

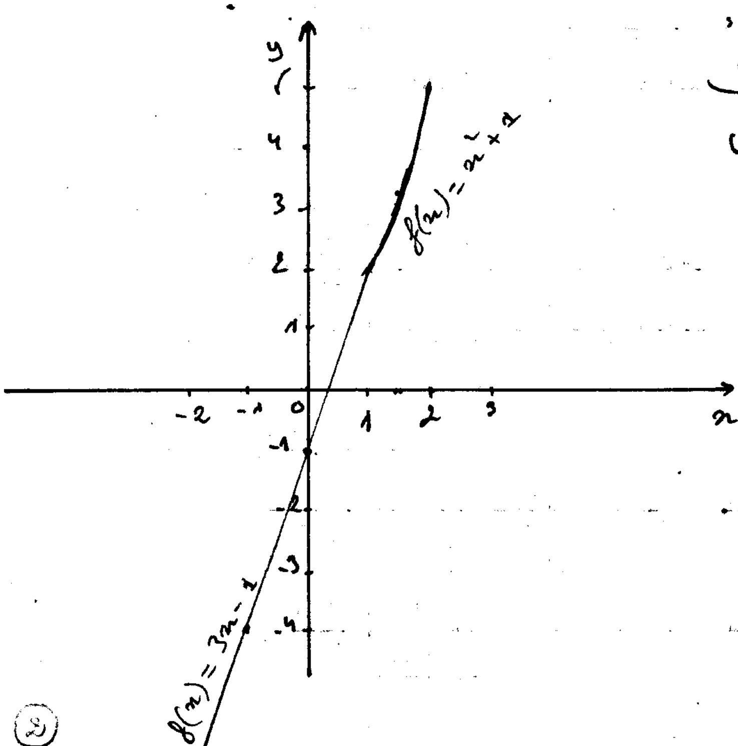
1) نعم الدالة f مستمرة على $[1,+\infty[$ و مستمرة على $]-\infty,1[$.

2) لكي تكون الدالة مستمرة على $\mathbb{R}$ ، يجب أن تكون مستمرة عند 1 أي :

$3(1)+m = 1^2+1$ أي : $m = 2-3$ و منه $m=-1$

3) المنحنى الممثل للدالة f :

ملاحظة : نختار العدد m بحيث يكون جزئي المنحنى في المجالين $]-\infty,1[$ و $[1,+\infty[$ متصلين .



قيم مساعدة : $f(x) = 3x-1$

x	-1	0
y	-4	-1

x	1	$3/2$	2
y	2	3,25	5

المحور المعرفي : الاستمرارية والمعادلات : نظرية القيم المتوسطة   المستوى : 3 ث إ .

الكفاءة المستهدفة : - فهم خاصية القيم المتوسطة وتطبيقها في البحث عن الحلول المقربة لمعادلات من الشكل : $f(x) = k$.

سير الدرس .

نشاط ② ص 32 :

① f و g مستمرتان على المجال $[-1,2]$. و h ليست مستمرة على المجال $[-1,2]$ لأن h ليست مستمرة عند 0 .

② تحديد حسب قيم العدد الحقيقي k ، عدد حلول كل معادلة :

(1) $f(x)=k$: للمعادلة (1) حل وحيد ~~في المجال~~ من أجل $k \in [-2,3]$

(2) $g(x)=k$ ، من أجل :

أ) للمعادلة (2) حل وحيد ~~على المجالين~~ : $k \in [-2,0[\cup]1,3]$

ب) للمعادلة (2) حلان ~~عندما~~ لما من أجل $k=0$ أي : $f(x)=0$ و $k=1$ أي $f(x)=1$.

ج) للمعادلة (2) ثلاثة حلول ~~في المجال~~ ، $k \in]0,1[$ ، $f(x)=k$:

③ تمثل القيمتان -2 و 3 قيم حدية . أ) للمعادلة (3) حل وحيد لما : $k \in [-2,0]$ ، $k \in]2,3]$

ب) المعادلة (3) ليس لها حلول لما : $k \in]0,2]$

④ من أجل $k \in [-2,3]$:

أ) المعادلة (3) لا تقبل حلا وحيدا على الأقل في المجال $[-1,2]$

لأن الدالة h غير مستمرة في 0 ومن أجل $k \in]0,2]$ لا توجد حلول .

ج) المعادلتين (1) و (2) تقبل حلا على الأقل في المجال $[-1,2]$.

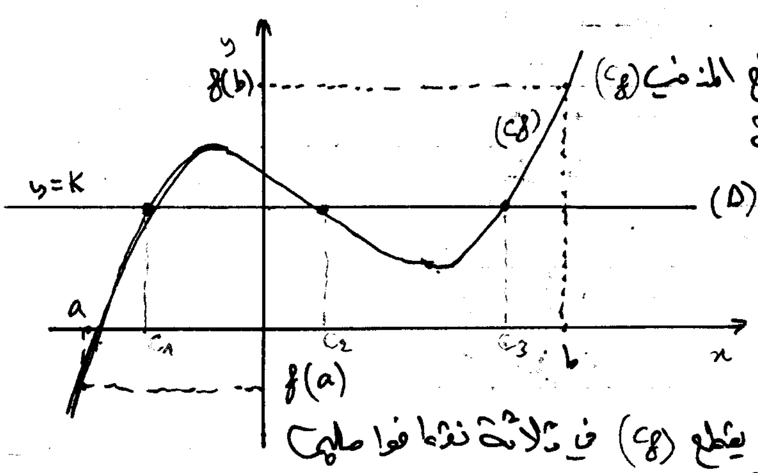
ب) المعادلة (1) تقبل حلا وحيدا في المجال $[-1,2]$

بينما المعادلتين (2) و (3) لا تقبل حلا وحيدا على المجال $[-1,2]$.

مبرهنة القيم المتوسطة :

> f دالة معرفة ومستمرة على مجال $[a;b]$.
> من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث : $f(c)=k$.

التفسير الهندسي :



المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=k$ يقطع المنحنى (C_f) على الأقل مرة واحدة في نقطة فاصلتها c محصورة بين a و b .
حيث : k عدد حقيقي محصور بين $f(a)$ و $f(b)$.

بالنسبة للشكل المقابل (Δ) يقطع (C_f) في ثلاثة نقاط فواصلها على الترتيب (c_1, c_2, c_3)

المستوى: 3ت1.

سير الدرس

حالة خاصة:

> إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ وكان: $f(a) \times f(b) < 0$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث: $f(c) = 0$

نتيجة:

إذا كانت الدالة f مستمرة و رتيبة تماما (متزايدة تماما أو متناقصة تماما) على مجال $[a,b]$ فإن جدول تغيراتها يأخذ أحد الشكلين التاليين:

x	a	x_0	b
$f(x)$	$f(a)$ ↗	K	↗ $f(b)$

x	a	x_0	b
$f(x)$	$f(a)$ ↘	K	↘ $f(b)$

وبالتالي فإنه من أجل كل عدد حقيقي K محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=K$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $[a,b]$.

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^2 + 3x - 2$.

- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[-1,1]$

الحل: تبيين أن: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[-1,1]$:

بما أن f دالة كثير حدود فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ وبصفة خاصة على المجال $[-1,1]$ ولدينا: $f(-1) = -4$ و $f(1) = 2$ وبما أن: $f(1) \times f(-1) < 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[-1,1]$.

نشاط تقويمي:

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2,2]$ بـ: $f(x) = x^2 - 2$.

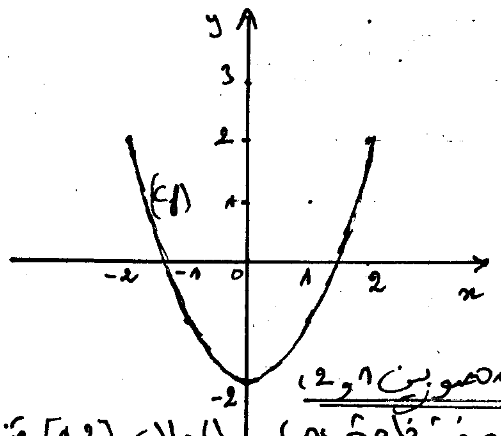
① أرسم التمثيل البياني للدالة f.

② إستنتج عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$.

③ بين أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين 1 و 2.

سير الدرس .

حل النشاط التمهيدي :



1) **رسم التمثيل البياني للدالة f :**
أنظر الشكل المقابل

2) **إستنتاج عدد حلول المعادلة $f(x)=0$:**
من الشكل نستنتج أن للمعادلة $f(x)=0$ حلان مختلفان .

3) **تبيين أن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين 1 و 2 :**
الدالة f كثير حدود فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ وبصفة خاصة على المجال $[1,2]$ ومتزايدة تماما على المجال.
ولدينا : $f(1)=-1$ و $f(2)=2$ وبما أن 1 محصور بين -1 و 2
أي : $f(1)<1<f(2)$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين 1 و 2 .
نلاحظ من التمثيل البياني أن الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[1,2]$.

عمل منزلي : ت 9 و 10 ، 13 و 14 ص 49 .

حل التمرين 9 ص 49 : **تمارين للمراجعة :** ت 1 و 2 ص 37 مع الحلول .

1) **تشكيل جدول تغيرات الدالة f :**

x	0	2	4
$f(x)$	0 ↗	2	↘ -2

ب) نعم الدالة f مستمرة على المجال $[0,4]$

ج) 1) **عدد حلول المعادلة $f(x)=\frac{3}{2}$:**
على المجال $[2,4]$ تقبل حلا واحدا.

2) **بقراءة بيانية** نلاحظ أن حل المعادلة $f(x)=\frac{3}{2}$ هو بالتقريب $x_0=2{,}7$

حل التمرين 10 ص 49 :

1) **حساب $f'(x)$ وتشكيل جدول تغيرات الدالة f :**
الدالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$
و $f'(x)=6x^2+2$. من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ؛ $f'(x)>0$ إذن : f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

النهايات : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\boxed{-\infty}$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\boxed{+\infty}$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2) **تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α :**
لاحظ من جدول التغيرات أن
الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما أي رتيبة تماما على المجال $]-1,0[$ ولدينا : $f(-1)=-1$ و $f(0)=3$
وبما أن : $f(-1)\times f(0)<0$ إذن حسب نظرية القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1<\alpha<0$.

حل التمرين 14 ص 49 : 1) $f(x)=7$ لا توجد حلول . 2) $f(x)=-2$ يوجد حل وحيد!
3) $f(x)=-\frac{9}{4}$ توجد 3 حلول .

المستوى : 3 ت إ .

الكفاءات المستهدفة : - تعريف مركب دالتين .

- التعرف على دالة كمركب دالتين بسيطتين .

سير الدرس .

نشاط :

لتكن الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$g(x) = -3x+1 \quad , \quad f(x) = x^2+1$$

① أحسب $g[f(x)]$.

② ماهي مجموعة تعريف الدالة ، $g[f(x)]$.

③ ماذا تستنتج ؟

الحل :

① حساب $g[f(x)]$:

$$g[f(x)] = -3(x^2+1)+1 = -3x^2-3+1$$

ومنه : $g[f(x)] = -3x^2-2$

② مجموعة تعريف الدالة $g[f(x)]$ هي $\mathbb{R}$.

③ نستنتج أن : $f(x) \in \mathbb{R}$ وتركيب الدالتين f و g معرف على $\mathbb{R}$.

الدالة مركب دالتين :

تعريف :

> v دالة معرفة على مجال J و u دالة معرفة على مجال I بحيث من أجل كل x من I . $u(x) \in J$.
> الدالة المركبة من الدالتين u و v بهذا الترتيب هي الدالة التي نرمز لها بالرمز $v o u$ والمعرفة على I بـ : $(v o u)(x) = v[u(x)]$
> ونقرأ v دائرة u لـ x .

مثال ① لتكن الدالتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$v(x) = x+1 \quad , \quad u(x) = x^2-3$$

① أحسب كل من $v o u$ و $u o v$

② ماذا تستنتج ؟ .

الحل :

① حساب $v o u$:

$$(v o u)(x) = v[u(x)] = v(x^2-3) = x^2-3+1$$

ومنه : $(v o u)(x) = x^2-2$

② حساب $u o v$:

$$(u o v)(x) = u[v(x)] = u(x+1)$$

$$= (x+1)^2-3 = x^2+2x+1-3$$

ومنه : $(u o v)(x)$ ...

سير الدرس.

مثال ②:

الدالة f المعرفة على المجال $]2,+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+1}{x-2}}$

نلاحظ أن الدالة f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب.

حيث: $u(x)=\frac{x^2+1}{x-2}$ و $v(x)=\sqrt{x}$ ،

نشاط تقويمي:

تمرين 47 ص 53:

لدينا: $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=\frac{x-1}{x}$ $\qquad D_f=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$

1) مجموعة تعريف كل من: $f\circ g$ و $g\circ f$ ؛ لدينا: $D_g=\mathbb{R}^*=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

أ) مجموعة تعريف $f\circ g$ هي مجموعة تعريف الدالة g.

أي أن: $D_{f\circ g}=\mathbb{R}^*$

ب) مجموعة تعريف $g\circ f$ هي مجموعة تعريف الدالة f. أي أن: $D_{g\circ f}=\mathbb{R}$

2) حساب $(f\circ g)(x)$ و $(g\circ f)(x)$.

$$* \ (f\circ g)(x)=f[g(x)]=f\left(\frac{x-1}{x}\right)$$
$$=\left(\frac{x-1}{x}\right)^2+1$$
$$(f\circ g)(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}+1$$

$$* \ (g\circ f)(x)=g[f(x)]=g(x^2+1)$$
$$=\frac{x^2+\cancel{1}-\cancel{1}}{x^2+1}$$
$$(g\circ f)(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$$

عمل منزلي: ت 48 ص 53، ت 49 ص 54:

المستوى:3 تسيير وإقتصاد (تذكير حول الاشتقاقية) الموسم الدراسي: 2014/2013

1. العدد المشتق . الدالة المشتقة

تعريف: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$. a و $a+h$ عددان حقيقيان من I مع $h \neq 0$.
القول أن f تقبل الاشتقاق عند a يعني أنه لما يؤول h إلى 0 النسبة $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
تؤول إلى عدد حقيقي نرمز له بالرمز $f'(a)$ و يسمى العدد المشتق للدالة f عند a .

ملاحظة : إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I نقول أنها تقبل الاشتقاق على I
وتسمى الدالة $f':x \mapsto f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f.

2. التفسير البياني . التفسير الاقتصادي

- **التفسير البياني**

إذا قبلت f الاشتقاق عند a فإن تمثيلها البياني (C_f) يقبل عند النقطة $A(a;f(a))$
مماسا معامل توجيهه $f'(a)$ و معادلته: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

- **التفسير الاقتصادي**

الكلفة الهامشية للإنتاج هي تزايد الكلفة الناتج عن صنع وحدة إضافية. تعطى الكلفة الهامشية بالعلاقة:
$C_m(q)=C(q+1)-C(q)$ حيث C هي الدالة " الكلفة الإجمالية " نلاحظ أن $C'(q)$ هو تقريب جيد.
لـ $C_m(q)$. في الاقتصاد نضع $C_m(q)=C'(q)$ حيث C' هي الدالة المشتقة للدالة الكلفة الإجمالية C.

3. قواعد الاشتقاق . العمليات على المشتقات

- **قواعد الاشتقاق**

$f(x)$	a	x	x^n $(n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N})$	$1/x$	$1/x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\sqrt{x}$
$f'(x)$	0	1	nx^{n-1}	$-\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
مجالات قابلية الاشتقاق	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$	$]0;+\infty[$

- **العمليات على المشتقات**

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي.

الدالة	$u+v$	ku	uv	$\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{u}{v}$ (الدالة v لا تنعدم على I)
المشتقة	$u'+v'$	ku'	$u'v+v'u$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	$\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

الأستاذ : سي محمد

المستوى: 3 ث إ.

الميدان المعرفي: الاشتقاقية.

الكفاءة المستهدفة: حساب $(f\circ g)'$ في حالة f قابلة للاشتقاق على مجال I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$.

سير الدرس.

* تذكير حول الاشتقاقية *

نشاط:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x)=3(2x^2-4)^3+1$.

① لاحظ أن: $f=v\circ u$ - عين عبارتي الدالتين v و u.

② أحسب $f'(x)$ - ماذا تستنتج؟

الحل:

① تعيين عبارتي الدالتين v و u:

لدينا:
$$f(x)=(v\circ u)(x)$$
$$= v[u(x)]$$
$$= 3[u(x)]^3+1$$

إذن: $u(x)=2x^2-4$ و $v(x)=3x^3+1$

② حساب $f'(x)$:

لدينا:
$$f'(x)=(v\circ u)'(x)=[v(u(x))]'(x)$$
$$=u'(x)\times v'[u(x)]$$
$$=4x\times 9(2x^2-4)^2$$
$$f'(x)=36x(2x^2-4)^2$$

الاستنتاج: نستنتج أن: $(v\circ u)'(x)=[v(u(x))]'(x)$

$$(v\circ u)'(x)=u'(x)\cdot v'[u(x)]$$

* إشتقاق دالة مركب دالتين:

مشتق الدالة $v\circ u$:

مبرهنة:

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ وكانت v قابلة للاشتقاق على $u(I)$ فإن الدالة $v\circ u$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا: $(v\circ u)'(x)=u'(x)\cdot v'[u(x)]$

مثال:

لتكن f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x)=(3x+2)^2$

حساب $f'(x)$:

نلاحظ أن الدالة f تركيب دالتين u و v حيث: $u(x)=3x+2$ ، $v(x)=x^2$

إذن:
$$f'(x)=(v\circ u)'(x)=u'(x)\cdot v'[u(x)]$$
$$=3\times 2(3x+2)$$

سير الدرس .

نتائج :

مبرهنة ①

مشتقة الدالة $x \mapsto \sqrt{u(x)}$:

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ وكانت موجبة تماما على I فإن الدالة $\sqrt{u}$ تقبل الاشتقاق على I ولدينا :
$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

مثال : لتكن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \sqrt{3x^2+1}$

نلاحظ أن : $f = \sqrt{u}$ مع : $u(x) = 3x^2+1$ وبما أن u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$: $u(x) > 0$ فإن الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :
$$f'(x) = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$$

مبرهنة ② :

مشتقة الدالة $[u(x)]^n$: $x \mapsto$ حيث : (n عدد طبيعي يفوق $n \geq 2$)

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ فإن الدالة u^n تقبل الاشتقاق على I
$$(u^n)' = n\, u'\, u^{n-1}$$

مثال :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (5x^2+3x-1)^3$

نلاحظ أن : $f = u^3$ مع $u(x) = 5x^2+3x-1$ وبما أن u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ولدينا :
$$f'(x) = (u^3)' = 3\, u'\, u^{n-1}$$
$$f'(x) = 3(10x+3)(5x^2+3x-1)^2$$

مبرهنة ③ :

مشتقة الدالة $x \mapsto \frac{1}{[u(x)]^n}$ حيث : (n عدد طبيعي يفوق $n \geq 1$)

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ ولا تنعدم على I فإن الدالة $\frac{1}{u^n}$ تقبل الاشتقاق على I.

ولدينا :
$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{n u'}{u^{n+1}}$$

مثال : $f(x) = \frac{1}{(2x^2+1)^3}$ إذن : $f'(x) = -\frac{3(4x)}{(2x^2+1)^4}$

عمل منزلي : 54 ، 55 ، 56 ص 79

تمارين المراجعة : 1 ، 2 ص 69 .

المستوى:3 تسيير واقتصاد	(تذكير حول النهايات)	الموسم الدراسي: 2014/2013

ـ تتمات على النهايات:

1. نهايات الدوال المرجعية :

* $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ * $\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$ * $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$

* $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ * $\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ * $\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ * $\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

* $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$ * $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}=0$ * $\lim_{x\xrightarrow{>}0} \frac{1}{x}=+\infty$ * $\lim_{x\xrightarrow{<}0} \frac{1}{x}=-\infty$

2. العمليات على النهايات :

f و g دالتان ، a يمثل عددا حقيقيا أو $+\infty$ أو $-\infty$ ، نقبل دون برهان المبرهنات التالية :

* **نهاية مجموع دالتين:**

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

* **نهاية جداء دالتين :**

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a}(f(x)\times g(x))$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

* **نهاية حاصل قسمة دالتين :**

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

ملاحظة: تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات "**عدم التعيين** "(ح ع ت)

3. نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$:

قواعد إجرائية ◦ النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة .

◦ النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة .

مثال: لتكن f الدالة الناطقة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ $f(x)=\frac{4x^2-2x+3}{x^2-1}$.

لدينا حالة عدم التعيين بالنسبة لنهاية f عند $+\infty$ إلا أنه بتطبيق القاعدة 2 نتحصل على $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{x^2}=4$

الأستاذ : سي محمد

الموضوع المعرفي : تتمات عن النهايات	المستوى : 3 ث ع .

الكفاءة المستهدفة : - تعيين نهاية دالة بتطبيق المبرهنات على النهايات مجموع أو جداء أو حاصل قسمة أو الرتابات المتعلقة بنهايات دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند ∞ .

سير الدرس .

النشاط 3 ص 33 : * تذكير حول النهايات *

لدينا : $f(x) = \frac{4x^2-3x-1}{x^2}$ ، $\mathbb{R}-\{0\}$

1) وضع تخمين خاص بنهاية الدالة f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$:

نلاحظ من التمثيل البياني أن : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4$ ، $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 4$

* البرهان على صحة التخمين :

لدينا : $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2-3x-1}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2}{x^2}$ ومنه $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4$ ،

ولدينا : $\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2-3x-1}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2}{x^2}$ ومنه $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 4$

* نستنتج فيما يخص المستقيم المقارب للمنحني (C_f) أن :

$y=4$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) يوازي محور الفواصل بجوار $-\infty$ و $+\infty$

2) وضع تخمين خاص بنهاية الدالة f عند 0 :

نلاحظ من التمثيل البياني أن $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{-1}{0^+} = (-\infty)$ ، $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{-1}{0^+} = (-\infty)$

* البرهان على صحة التخمين :

لدينا ، $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{-1}{0^+} = (-\infty)$ ، $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{-1}{0^+} = (-\infty)$

* نستنتج فيما يخص المستقيم المقارب للمنحني (C_f) :

$x=4$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) ويوازي محور التراتيب .

نهاية دالة مركب دالتين :

مبرهنة :

a ، b ، c تمثل أعداد حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$.

u ، v و f دوال حيث : $f = v \circ u$

إذا كانت : $\lim_{x \to a} u(x) = b$ وإذا كانت $\lim_{x \to b} v(x) = c$ فإن : $\lim_{x \to a} f(x) = c$

سير الدرس

مثال *

نعتبر الدالة f المعرفة من المجال $]2,+\infty[$ ب : $f(x)=\sqrt{\dfrac{5x+4}{x-2}}$.

لحساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

نلاحظ أن الدالة f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب حيث :

$u(x)=\dfrac{5x-4}{x-2}$ و $v(x)=\sqrt{x}$. ($f=v\circ u$).

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x}{x}=5$ ومنه $\lim\limits_{x\to 2} v(x)=\sqrt{5}$ ،

فإن :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\sqrt{5}$$

مثال ②

نعتبر الدالة f المعرفة من $\mathbb{R}^*$ كمايلي : $f(x)=\left(3+\dfrac{2}{x}\right)^2+1$.

لحساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

نلاحظ أن الدالة f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب حيث :

$u(x)=3+\dfrac{2}{x}$ و $v(x)=x^2+1$.

* $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3+\dfrac{2}{x}\right)=3$ و $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+1)=10$ فإن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=10$

* $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2}{x}\right)=\boxed{-\infty}$ ومنه ، $\lim\limits_{x\to 0^-} u(x)=-\infty$.

وبما أن ، $\lim\limits_{x\to-\infty} v(x)=+\infty$ ، فإن : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$

المستوى : 3 ث إ.

الكفاءة المستهدفة : النهايات بالمقارنة .
- نهاية دالة مركب .

سير الدرس.

نشاط :

1) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي : $f(x) = \left(3+\frac{2}{x}\right)^2+1$

أ) لاحظ أن : $f = v\circ u$ - عين عبارتي الدالتين : v و u.

ب) أحسب $\lim_{x\to-\infty} u(x)$ ، $\lim_{x\to 3} v(x)$ ثم أحسب نهاية $v(x)$ عند هذه النقطة ، ماذا تستنتج $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ؟

2) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty,0[$ حيث : $\frac{2x^2+1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{2x+3}{x}$

أ) أحسب كل من : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+1}{x^2}\right)$ ، $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{x}\right)$.

ب) إستنتج : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث : $f(x)\leq x+1$.

أ) أحسب $\lim_{x\to-\infty}(x+1)$ ثم إستنتج : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

مناقشة النشاط 1 :

1) أ) تعيين عبارتي الدالتين v و u : $f = v\circ u$

لدينا : $u(x)=3+\frac{2}{x}$ و $v(x)=x^2+1$.

ب) حساب $\lim_{x\to-\infty} u(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} u(x) = \boxed{3}$$

لدينا : $\lim_{x\to3}(x^2+1) = 10$

إستنتاج $\lim_{x\to-\infty} f(x)$:

بما أن : $\lim_{x\to-\infty}u(x)=3$ و $\lim_{x\to3}v(x)=10$ فإن : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=10$

2) أ) حساب كل من : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+1}{x^2}\right)$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{x}\right)$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}=\boxed{2} \quad و \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+1}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=\boxed{2}$$

ب) إستنتاج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$: بما أن $\frac{2x^2+1}{x^2}\leq f(x)\leq\frac{2x+3}{x}$

فإن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$

3) حساب $\lim_{x\to-\infty}(x+1)$: $\lim_{x\to-\infty}(x+1)=\boxed{-\infty}$

إستنتاج $\lim_{x\to-\infty} f(x)$: بما أن $\lim_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$ و $f(x)\leq x+1$

فإن : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\boxed{-\infty}$

سير الدرس .

٤) نهاية دالة مركب دالتين :

مبرهنة :

a ، b ، c تمثل أعداد حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$

u ، v و f دوال حيث : $f = v\circ u$

إذا كانت : $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ وإذا كانت $\lim\limits_{x\to b} v(x) = c$

فإن : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$.

مثال :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]2,+\infty[$ بـ : $f(x)=\sqrt{\frac{5x+4}{x-2}}$

لحساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

نلاحظ أن الدالة f هي مركب الدالتين u و v على الترتيب حيث :

$u(x)=\frac{5x-4}{x-2}$ و $v(x)=\sqrt{x}$ $(f=v\circ u)$.

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x}{x} = 5$ و $\lim\limits_{x\to 2} v(x)=\sqrt{5}$

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\sqrt{5}$

٥) النهايات بالمقارنة :

خاصية ① :

f ، g ، h دوال و l عدد حقيقي .

* إذا كانت : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=l$

وكانت $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$.

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$

مثال : نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty,0[$ حيث :

$\frac{1}{x^2}\leq f(x)\leq\frac{1}{x}$ *

- أحسب نهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

الحل :

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$

ومنه حسب الخاصية ① نستنتج أن :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

خاصية ② :

f ، g دالتان و l عدد حقيقي .

* إذا كانت : $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ وكانت : $f(x) \geq g(x)$ فإن :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

مثال :

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث : $f(x) \geq x^2 - 1$ ، أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

الحل :

لدينا : $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 1) = +\infty$ و $f(x) \geq g(x)$ فإن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

خاصية ③ :

f ، g دالتان و l عدد حقيقي .

* إذا كانت : $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ وكانت : $f(x) \leq g(x)$ فإن :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

مثال :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث : $f(x) \leq -x - 1$. أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

الحل :

لدينا : $\lim_{x \to +\infty} (-x - 1) = -\infty$ و $f(x) \leq -x - 1$ فإن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

ملاحظة :

تستعمل وتمدد هذه الخواص في حالات النهاية عند $-\infty$ أو عند عدد حقيقي .

تمارين للمراجعة : ت 1 و 2 و 3 ص 43 مع الحلول .

عمل مدرسي : نت ط ذ ت ح ص 2 ث 2 د ح 2 ت 2 ث

عمل منزلي : تمارين : 63 ، 64 و 65 ص 55 ؛

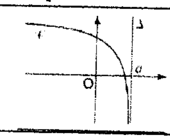
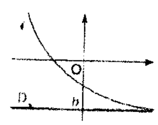
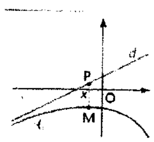
عمل منزلي : تمرين 66 ص 55 .

" 67 ص 56

المستوى: 3 تسيير وإقتصاد (تذكير حول المسقيمات المقاربة) الموسم د: 2014/2013

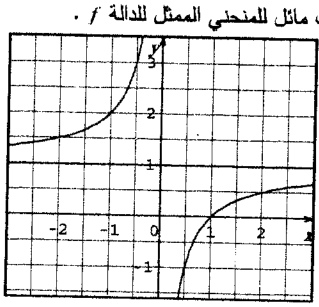
1) تذكير حول المستقيمات المقاربة:

a و b عددان حقيقيان . f دالة معرفة على مجال I و (C) تمثيلها البياني في معلم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

النهاية	المستقيم المقارب	التمثيل البياني
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$	المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=a$ و الموازي لمحور التراتيب مستقيم مقارب للمنحني (C)	
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$	المستقيم (D) ذو المعادلة $y=b$ و الموازي لمحور الفواصل مستقيم مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$ أو عند $-\infty$	
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$	المستقيم (d) ذو المعادلة $y=ax+b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C) عند $+\infty$ أو عند $-\infty$	

ملاحظة: إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي: $f(x)=ax+b+\varphi(x)$ مع $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$

فمن الواضح أن المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f .



مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$f:x\mapsto 1-\dfrac{1}{x}$ و ليكن (C) تمثيلها البياني .

لدينا: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مستقيم مقارب للمنحني (C).

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. و منه المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مستقيم مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

2) الوضع النسبي لمنحن والمستقيم المقارب:

لدراسة وضعية المنحني (C) الممثل لدالة f بالنسبة إلى مستقيم مقارب له معادلته $y=ax+b$ نقوم بدراسة إشارة الفرق $\left[f(x)-(ax+b)\right]$.

إذا كان: $f(x)-(ax+b)<0$ تكون وضعية (C) تحت المستقيم المقارب المائل .

إذا كان: $f(x)-(ax+b)>0$ تكون وضعية (C) فوق المستقيم المقارب المائل .

الأستاذ : سي محمد

الكفاءات المستهدفة : - المستقيمات المقاربة . المستوى : 3 آ م
- الوضع النسبي لمنحنى والمستقيم المقارب .

سير الدرس .

نشاط 3 ص (33) :

لدينا : $f(x) = \frac{4x^2 - 3x + 1}{x^2}$ ، $\mathbb{R} - \{0\}$.

1) وضع تخمين خاصا بنهاية الدالة f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$:

فلاحظنا من التمثيل البياني أن : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \boxed{4}$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{4}$

* البرهان على صحة التخمين :

لدينا : $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{4x^2 - 3x - 1}{x^2}\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{4\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = \boxed{4}$ ومنه $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4$

$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4x^2 - 3x - 1}{x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 4$ ومنه $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 4$

* نستنتج فيما يخص المستقيم المقارب للمنحنى (C_f) أن :

$y = 4$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ و $+\infty$ يوازي محور الفواصل .

2) * وضع تخمين خاصا بنهاية الدالة f عند 0 :

نلاحظ من التمثيل البياني أن : $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \boxed{-\infty}$ و $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \boxed{-\infty}$

* البرهان على صحة التخمين :

لدينا : $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \frac{-1}{0^+} = \boxed{-\infty}$ ، $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \frac{-1}{0^+} = \boxed{-\infty}$

* نستنتج فيما يخص المستقيم المقارب للمنحنى (C_f) :

$x = 0$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) ويوازي محور التراتيب .

* تذكير حول المستقيمات المقاربة *

تمارين للمراجعة : ت 1 ، 2 و 3 ص (41) مع الحلول .

المستوى: 3 ث ر.

الموضوع: مسائل حول دراسة الدوال العددية.

سير الدرس.

التمرين الأول:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ كمايلي: $f(x)=\dfrac{-x^2-3x-3}{x+2}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$

2) " " f " -2 ، أعط تفسيرا بيانيا للنتيجة.

3) عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x\neq-2$:

$f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$.

4) بين أن المستقيم (d) الذي معادلته $y=-x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

5) حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (d) .

6) أحسب $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيرات الدالة f .

7) أنشئ المستقيمات المقاربة والمنحنى (C_f) .

الحل:

1) حساب نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-x^2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=\boxed{-\infty}$ ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=\boxed{+\infty}$ ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

2) حساب نهاية f عند -2 :

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-2} f(x)=\dfrac{-1}{0^+}=\boxed{-\infty}$ ، $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-2} f(x)=\dfrac{-1}{0^-}=\boxed{+\infty}$

التفسير البياني:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب معادلته $x=-2$.

3) تعيين الأعداد الحقيقية a ، b ، c :

لدينا: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$ أي: $f(x)=\dfrac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2}$

أي: $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+2ax+2b+c}{x+2}$ ومنه: $f(x)=\dfrac{ax^2+(2a+b)x+2b+c}{x+2}$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a=-1\\2a+b=-3\\2b+c=-3\end{cases}$ أي: $\begin{cases}a=-1\\b=-1\\c=-1\end{cases}$ إذن: $f(x)=-x-1-\dfrac{1}{x+2}$

سير الدرس .

④ تبيين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = -x - 1$ مقارب مائل ،

بما أن : $\lim\limits_{|x| \to +\infty} (f(x) - y) = \lim\limits_{|x| \to +\infty} \left(\frac{-1}{x+2}\right) = 0$

فإن المستقيم (D) الذي معادلته $y = -x - 1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

⑤ وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) : ندرس إشارة العبارة $f(x) - y$ (الفرق) :

$$f(x) - (-x-1) = \frac{-1}{x+2}$$

x	$-\infty$ -2	$+\infty$
-1	$-$	$-$
$x+2$	$-$	$+$
$\frac{-1}{x+2}$	$+$	$-$

إذن : لما : $x \in]-\infty, -2[$ فإن (C_f) يقع فوق (D).

لما $x \in]-2, +\infty[$ فإن (C_f) يقع تحت (D).

⑥ حساب $f'(x)$:

لدينا : $f(x) = -1 + \frac{1}{(x+2)}$ ومنه : $f'(x) = \frac{-x^2 - 4x - 4 + 1}{(x+2)^2}$

إذن : $f'(x) = \frac{-x^2 - 4x - 3}{(x+2)^2}$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

إشارة المشتقة ، إشارة المشتقة من إشارة البسط .

حساب المميز ، $-x^2 - 4x - 3 = 0$ ، $D = (-4)^2 - 4(-1 \times -3)$ ومنه ، $D = 4$

$\sqrt{D} = 2$. أي : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ ومنه : $x_1 = \frac{4-2}{2 \times (-1)}$ ، $x_1 = -1$

أي : $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ ومنه ، $x_2 = \frac{4+2}{-2}$ ، $x_2 = -3$

$-\infty$ $-$ -3 $+$ -2 $+$ -1 $-$ $+\infty$

إذن : الدالة f متناقصة على المجالين $]-\infty, -3] \cup [-1, +\infty[$

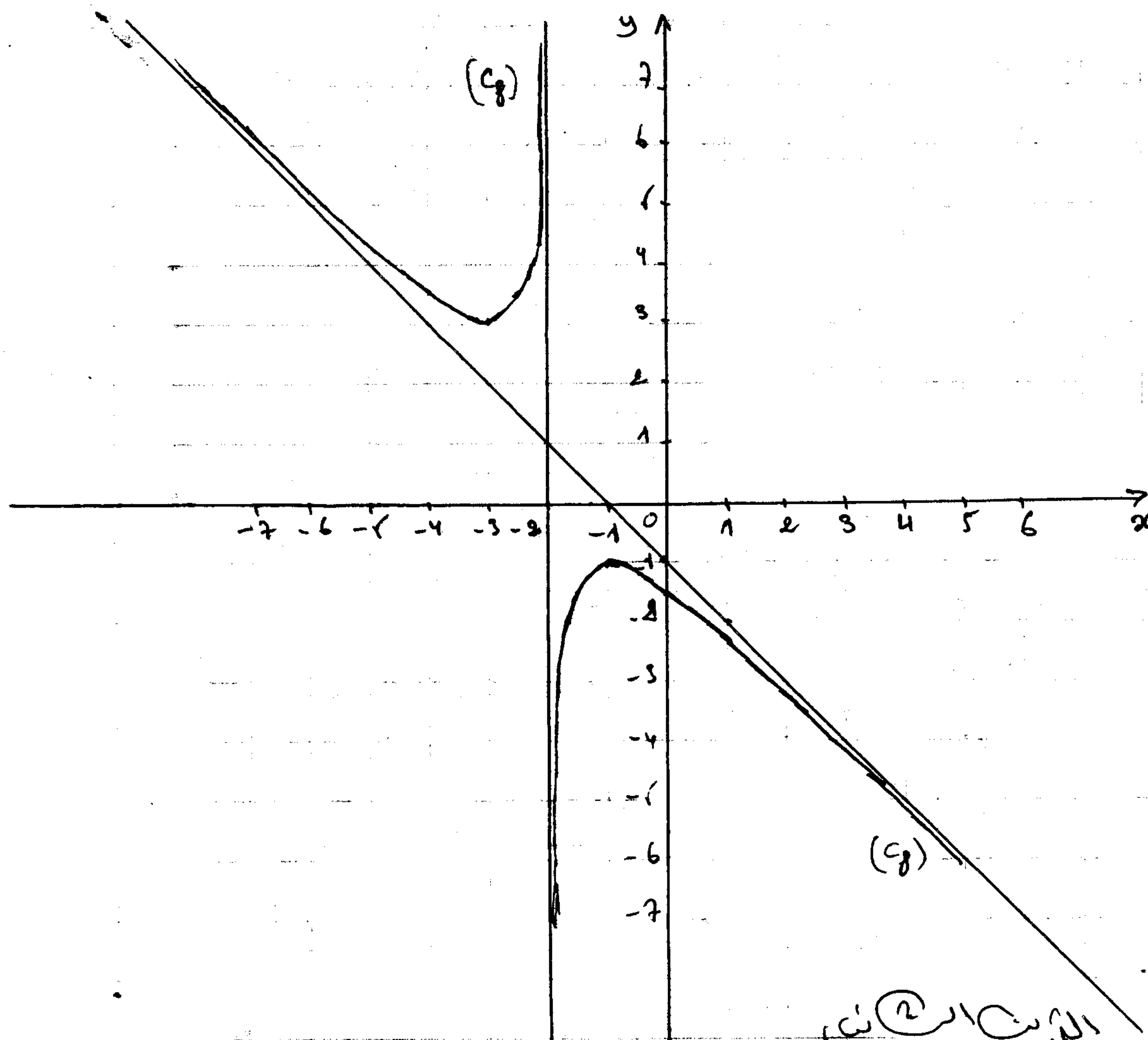
ومتزايدة على المجالين $[-3, -2[\cup]-2, -1]$.

تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	3	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	-1	↘	$-\infty$

سير الدرس :

7) إنشاء المستقيمات المقاربة والمنحنى (C_f) :



التمرين الثاني

لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+d}$

1) عين الأعداد a، b، c، d علما أن جدول تغيرات الدالة f هو :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

2) نضع : $f(x)=x+1+\frac{1}{x-2}$

أدرس اتجاه ~~تغيرات~~ تغير الدالة f .

3) برهن أن النقطة ω نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين للمنحنى (C_f) هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

4) برهن بأن المنحنى (C_f) يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما هو $\frac{3}{4}$.

5) أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة $x_0=4$.

6) أنشئ المنحنى (C_f) ومعادلة المماس والمستقيمات المقاربة .

سير الدرس .

الحل 1) تعيين الأعداد a ، b ، c و d :

* من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن الدالة f غير معرفة من أجل $x=2$
وهذا يعني أن : $d+2=0$ ومنه ، $d=-2$.

* الدالة f لها قيمة حدية صغرى (5) من أجل $x=3$ وقيمة حدية عظمى (1)
من أجل $x=1$ وهذا يعني : $f'(3)=0$ و $f(3)=5$ ، $f'(1)=0$ و $f(1)=1$

لدينا : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$ ومنه : $f'(x)=a-\frac{c}{(x-2)^2}=\frac{a(x-2)^2-c}{(x-2)^2}$

* $f'(3)=0$ معناه : $\frac{a(3-2)^2-c}{(3-2)^2}=0$ ومنه ، $a-c=0$ أي ، $a=c$.

* $f(3)=5$ يعني : $3a+b+\frac{c}{3-2}=5$ ومنه ، $3a+b+c=5$.
* $f(1)=1$ يعني $a+b+\frac{c}{1-2}=1$ ومنه ؛ $a+b-c=1$

إذن لدينا : $\begin{cases} a=c & \text{......}(1) \\ 3a+b+c=5 & \text{---}(2) \\ a+b-c=1 & \text{---}(3) \end{cases}$ نعوض a بـ c في المعادلتين (3) و (2)

نحصل على الجملة : $\begin{cases} 4c+b=5 \\ b=1 \end{cases}$ ومنه ؛ $4c+1=5$ ومنه ؛ $c=1$

إذن ؛ $a=b=c=1$ ومنه : $f(x)=x+1+\frac{1}{x-2}$

2) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

. الدالة f متزايدة تماما على المجالين : $]-\infty,1]$ ، $[3,+\infty[$.
. الدالة f متناقصة تماما على المجالين : $[1,2[$ ، $]2,3]$.

3) البرهان أن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

* **إيجاد النقطة ω :**

ω هي نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين للمنحنى (C_f) :
لدينا ، $x=2$ مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب .
و $y=x+1$ مستقيم مقارب مائل . إذن تقاطعهما هو النقطة ω
حيث ؛ $x_\omega=2$ و $y_\omega=x_\omega+1=2+1=3$ أي : $\omega(2,3)$

* **البرهان أن ω هي مركز تناظر :**

لدينا ، $\omega(a,b)$ أي : $\omega(2,3)$ ، يجب أن نتحقق من أن لدينا ،
$f(2a-x)+f(x)=2b$ أي ؛ $f(4-x)+f(x)=6$

سير الدرس

لدينا: $f(4-x)+f(x) = (4-\cancel{x})+1+\frac{1}{(4-x)-2}+\cancel{x}+1+\frac{1}{x-2}$

$$= 6+\frac{1}{-x+2}+\frac{1}{x-2} = 6-\cancel{\frac{1}{x-2}}+\cancel{\frac{1}{x-2}} = 6$$

ومنه بما أن: $f(4-x)+f(x)=6$ فالنقطة $w(2,3)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

④ البرهان أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما هو $\frac{3}{4}$:

نعلم أن معامل التوجيه للمماس للمنحنى الدالة f عند النقطة x_0 هو $f'(x_0)$

لدينا: $f'(x)=\frac{1(x-2)^2-1}{(x-2)^2}$ أي: $f'(x)=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$

وبالتالي: $f'(x_0)=\frac{3}{4}$ أي: $\frac{x_0^2-4x_0+3}{(x_0-2)^2}=\frac{3}{4}$ ومنه،

$$4(x_0^2-4x_0+3)=3(x_0-2)^2$$

ومنه، $x_0^2-4x_0=0$ أي: $x_0(x_0-4)=0$ ومنه $x_0=0$ أو $x_0=4$

إذن: يوجد مماسين لـ (C_f) عند النقطتين $x_0=0$ و $x_0=4$

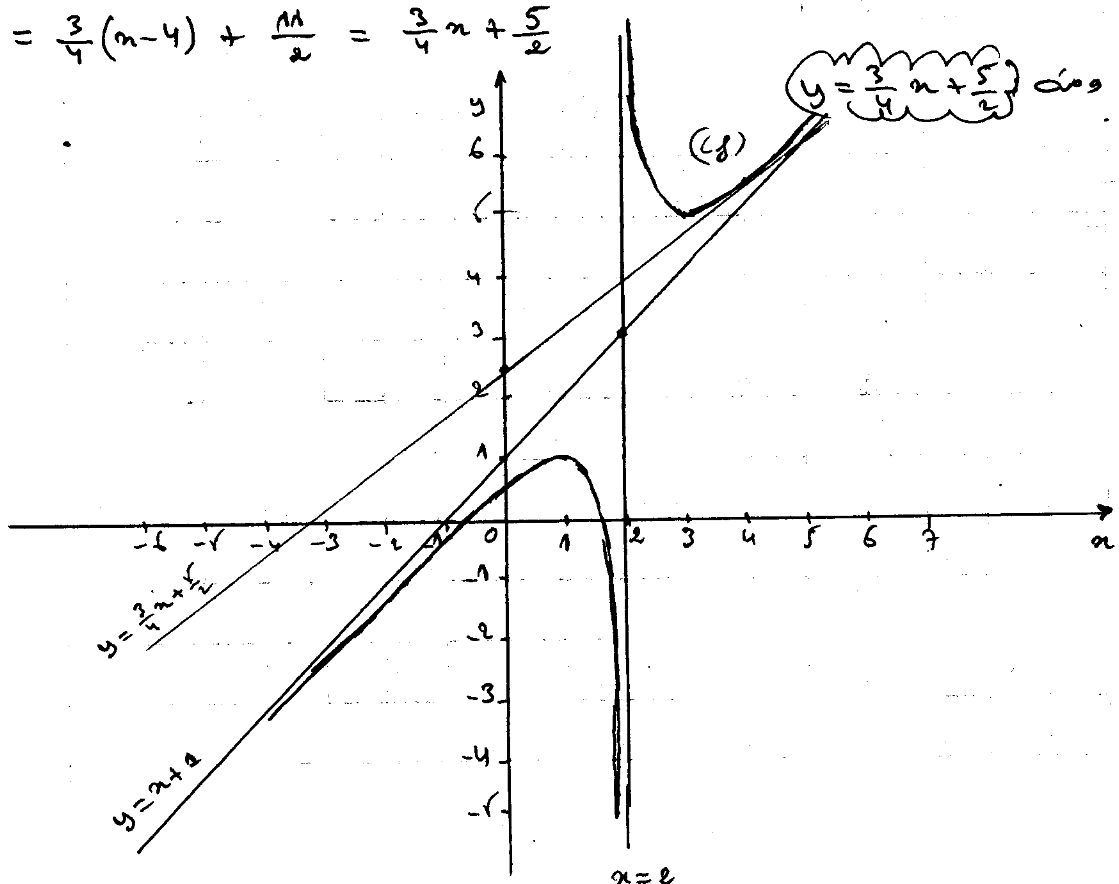
معامل التوجيه لهما هو $\frac{4}{3}$.

⑤ كتابة معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند $x_0=4$:

لدينا: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ أي $y=f'(4)(x-4)+f(4)$

$$=\frac{3}{4}(x-4)+\frac{11}{2}=\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$$

ومنه $y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$



الكفاءات المستهدفة: - تعريف دالة أصلية لدالة على مجال. المستوى: 3 ت ر

- تعيين دالة أصلية لدالة تحقق شرط معين و تفسير ذلك بيانيا.

سير الدرس.

نشاط 1 ص 88:

أ) نعتبر الدالتين f و F المعرفتين على $]-3,+\infty[$ كما يلي:

$$F(x)=\frac{2x-3}{x+3}-x \quad \text{و} \quad f(x)=\frac{-x^2-6x}{(x+3)^2}$$

1) تحقق أنه من أجل كل x من $]-3,+\infty[$ ، $F'(x)=f(x)$.

ب) اقترح دالة أخرى G بحيث من أجل كل x من $]-3,+\infty[$ ، $G'(x)=f(x)$

جـ) ماذا تستنتج؟

د)

مناقشة النشاط:

أ) 1) التحقق أن: $F'(x)=f(x)$:

الدالة F تقبل الاشتقاق على $]-3,+\infty[$ ولدينا:

$$F'(x)=\frac{2(x+3)-(2x-3)}{(x+3)^2}-1=\frac{\cancel{2x}+6-\cancel{2x}+3}{(x+3)^2}-1=\frac{9-(x+3)^2}{(x+3)^2}$$

ومنه: $F'(x)=\frac{-x^2-6x}{(x+3)^2}$ إذن: $F'(x)=f(x)$

ب) اقتراح دالة أخرى G بحيث $G'(x)=f(x)$:

لدينا: $G(x)=F(x)+1=\frac{2x-3}{x+3}-x+1$

ولدينا: $G'(x)=F'(x)=f(x)$

جـ) الاستنتاج:

نقول أن F و G دالتان أصليتان للدالة f على $]-3,+\infty[$.

د) تعيين الشكل البياني لدالة أصلية للدالة f ص 88:

من خلال الشكل الدالة f موجبة تماما على $]-1,1[$ وسالبة تماما على $]1,+\infty[\cup]-\infty,-1[$ إذن الدالة F متزايدة تماما على $[-1,1]$ ومتناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty,-1]$ ، $[1,+\infty[$

وهذا يتحقق في الشكل 3.

المستوى : 3 ث ا .

سير الدرس .

الدوال الأصلية :

1) الدالة الأصلية لدالة على مجال :

تعريف :

f دالة معرفة على مجال I .
نسمي دالة أصلية للدالة f على المجال I كل دالة F قابلة للاشتقاق على المجال I ، مشتقتها F' هي الدالة f
أي من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $F'(x)=f(x)$

مثال:

الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x)=x^2+4x+3$ هي دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x+4$ لأن : $F'(x)=2x+4=f(x)$

خواص :

1) إذا كانت f دالة مستمرة على المجال I فإنها تقبل دوال أصلية على I.
2) إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن كل الدوال الأصلية للدالة f هي الدوال ؛ $x \longmapsto F(x)+K$ حيث : K عدد حقيقي ثابت .

ملاحظة :

1) عند البحث عن الدوال الأصلية ، نقرأ جدول المشتقات عكسيا.
2) دالتان أصليتان لنفس الدالة تختلفان بثابت فقط.

~~2) الدالة الأصلية~~ **مثال :**

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=3x^2+2x-1$.
كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
$F(x)=x^3+x^2-x+K$ حيث : K عدد حقيقي ثابت

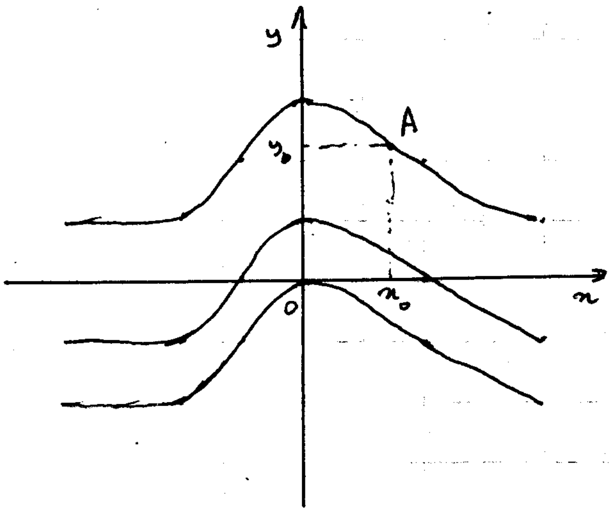
2) الدالة الأصلية التي تحقق شرطا معين :

حيث أنها تأخذ قيمة معلومة من أجل قيمة للمتغير

خاصية : f دالة ~~معرفة~~ مستمرة على مجال I ، x_0 عدد حقيقي من I
و y_0 عدد حقيقي كيفي .
توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على مجال I تحقق الشرط $F(x_0)=y_0$

سير الدرس.

التفسير البياني:



التمثيلات البيانية في معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ للدوال الأصلية للدالة f تستنتج من أحدها بواسطة انسحابات شعاعها $k\vec{j}$ حيث: k عدد حقيقي. وامدمن بين هذه التمثيلات البيانية يمر من النقطة $A(x_0,y_0)$.

أنشطة تكوينية:

تمرين ①:

لتكن الدالتين F و f المعرفتين على $]1,+\infty[$ كمايلي:

$$F(x)=\frac{2x+1}{x-1}+3 \quad , \quad f(x)=\frac{-3}{(x-1)^2}$$

بين أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]1,+\infty[$.

الحل:

F دالة ناطقة معرفة على $]1,+\infty[$ فهي إذن قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$ ولدينا:

$$F'(x)=\frac{2(x-1)-(2x+1)}{(x-1)^2}=\frac{\cancel{2x}-2-\cancel{2x}-1}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}$$

ومنه، $F'(x)=f(x)$ إذن F دالة أصلية لـ f على المجال $]1,+\infty[$.

تمرين ②:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=4x-3$

① عين كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

② عين الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ والتي تحقق، $F(1)=3$.

الحل:

① **تعيين كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:**

هي الدوال: $x \mapsto 2x^2-3x+K$ حيث: K عدد حقيقي.

② **تعيين الدالة الأصلية F للدالة f** حيث: $F(1)=3$.

لدينا من جهة $F(x)=2x^2-3x+K$ ولدينا من جهة ثانية: $F(1)=3$

$F(1)=3$ يعني: $2(1)^2-3(1)+K=3$ أي: $2-3+K=3$ ومنه، $K=4$

إذن: $F(x)=2x^2-3x+4$

تمارين للمراجعة: ت 1، 2، و 3 ص 91. **عمل منزلي:** تمارين من 3 إلى 12 ص 98.

المستوى: 3 ع ت!

الموضوع: حساب الدوال الأصلية.

سير الدرس.

1) الدوال الأصلية لدوال مألوفة:
2) الدوال " " لـ $f+g$ و Kf : } أنظر المطبوعة.
3) " " والعمليات على الدوال:

أنشطة تقويمية:

تمرين 1:

أحسب الدوال الأصلية للدوال التالية،

$$g(x)=6x^2-\frac{1}{x^5}+4 \quad ، \quad f(x)=\frac{3}{4}x^2+3x+2$$

$$h(x)=2x^2+\frac{1}{3\sqrt{x}}$$

الحل:

1) F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ معرفة بـ:

$$F(x)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2+1}x^{2+1}+3\times\frac{1}{1+1}x^{1+1}+2x=\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x$$

2) G دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}-\{0\}$ معرفة بـ:

$$G(x)=6\times\frac{1}{3}x^3-\left(-\frac{1}{(5-1)x^{5-1}}\right)+4x=2x^3+\frac{1}{4x^4}+4x$$

3) H دالة أصلية للدالة h على $]0,+\infty[$ معرفة بـ:

$$H(x)=2\times\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}\times2\sqrt{x}=\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}\sqrt{x}$$

تمرين 2:

أحسب الدوال الأصلية للدوال التالية:

$$k(x)=\frac{\cancel{4x}}{\sqrt{x^2+1}} \quad ، \quad g(x)=\frac{2x+1}{(x^2+x+3)^3} \quad ، \quad f(x)=(6x^2-1)(2x^3-x+1)^2$$

الحل:

حساب الدوال الأصلية للدوال التالية:

1) F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ معرفة بـ:

نلاحظ أن الدالة f من الشكل $u'u^n$ إذن: $F(x)=\frac{1}{2+1}(2x^3-x+1)^{2+1}$

مع $u(x)=2x^3-x+1$ ، $u'(x)=6x^2-1$ ، $n=2$: $F(x)=\frac{1}{3}(2x^3-x+1)^3$

2) G دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$:

نلاحظ أن الدالة g من الشكل $\frac{u'}{u^n}$ حيث $u'(x)=2x+1$ ، $u(x)=x^2+x+3$ ، $n=3$

$$G(x)=-\frac{1}{(3-1)(x^2+x+3)^{3-1}}=-\frac{1}{2(x^2+x+3)^2}$$

3) H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$ ؛ نلاحظ أن الدالة h من الشكل $\frac{u'}{\sqrt{u}}$.

حيث $u(x)=x^2+1$ ، $u'(x)=2x$ إذن: $H(x)=2\times2\sqrt{x^2+1}=4\sqrt{x^2+1}$

المستوى:3 تسيير واقتصاد	(حساب الدوال الأصلية)	الموسم الدراسي: 2014/2013

لـ حساب الدوال الأصلية

1. الدوال الأصلية لدوال مألوفة :

تم الحصول على النتائج الملخصة في الجدول الموالي انطلاقا من قراءة عكسية لمشتقات دوال مألوفة.
يمثل c عددا حقيقيا كيفيا.

المجال I هو	الدوال الأصلية لـ f على I هي الدوال المعرفة بـ $F(x)=$	f دالة معرفة على I بـ $f(x)=$
$\mathbb{R}$	$ax+c$	a (a عدد حقيقي)
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{2}x^2+c$	x
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	x^n ($\cancel{n\in\mathbb{N}^*}$)
$]0;+\infty[$ أو $]-\infty;0[$	$-\frac{1}{x}+c$	$\frac{1}{x^2}$
$]0;+\infty[$ أو $]-\infty;0[$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$	$\frac{1}{x^n}$ ($n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$)
$]0;+\infty[$	$2\sqrt{x}+c$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$

2. الدوال الأصلية لـ $f+g$ و kf (k عدد حقيقي):

خواص:

*إذا كانت F و G دالتين أصليتين على الترتيب لدالتين f و g على مجال I
فإن $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على المجال I.
*إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن kF دالة أصلية للدالة kf على I
~~($k\in\mathbb{R}$)~~

3. الدوال الأصلية و العمليات على الدوال:

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

شروط على الدالة u	الدوال الأصلية للدالة f على I	الدالة f
	$\frac{1}{2}u^2+c$	$u'u$
	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	$u'u^n$ ($n\in\mathbb{N}^*$)
من أجل كل x من I ، $u(x)\neq 0$	$-\frac{1}{u}+c$	$\frac{u'}{u^2}$
من أجل كل x من I ، $u(x)\neq 0$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$	$\frac{u'}{u^n}$ ($n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$)
من أجل كل x من I ، $u(x)>0$	$2\sqrt{u}+c$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$

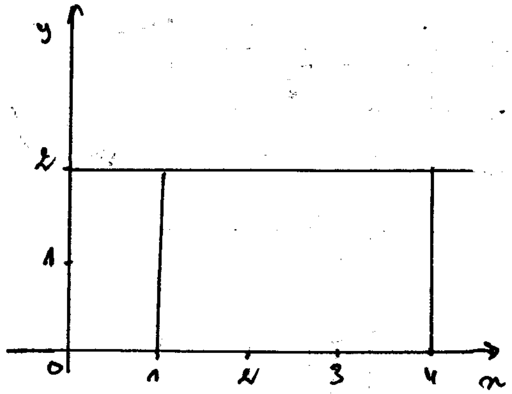
الأستاذ : سي محمد

المستوى: 3 ث !

الميدان المعرفي: تكامل دالة.

الكفاءة المستهدفة: حساب $\int_a^b f(t)\,dt$

سير الدرس.



نشاط 4 ص 106:

① نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2$.
وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$.
نهدف إلى حساب A مساحة الحيز الملون في الشكل المقابل.

أ) أحسب بـ cm^2 المساحة A.

ب) عين دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ ثم أحسب $F(4)-F(1)$

② ماذا تلاحظ؟.

الحل:

①أ) حساب بـ cm^2 المساحة A:

لدينا: $A = 3\times 2 = 6\ cm^2$ ومنه: $A=6\,cm^2$

ب) تعيين دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$:

لدينا: $F(x)=2x$.

حساب: $F(4)-F(1)$:

لدينا: $F(4)-F(1)=2(4)-(2\times 1)=6$ ومنه، $F(4)-F(1)=6\,cm^2$

② الملاحظة:

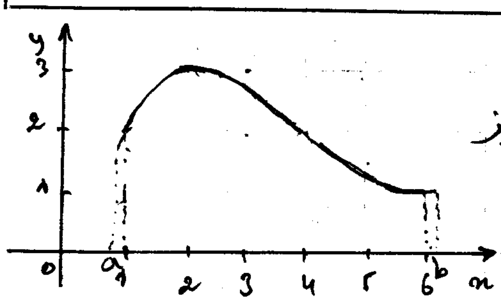
نلاحظ أن: $A=F(4)-F(1)=6\,cm^2$.

* تكامل دالة:

أ) الدالة الأصلية ومساحة حيز تحت منحنى:

خاصية:

f دالة مستمرة وموجبة على مجال I، a و b عددان حقيقيان من I حيث: $a<b$
(C_f) منحنى f في معلم متعامد (O,A,B) و F دالة أصلية لـ f على I.
* مساحة الحيز تحت المنحنى (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$.



ملاحظات:

أ) الحيز تحت المنحنى (C_f) بين العددين a و b هو الحيز المحدد بالمنحنى (C_f)، محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$.

سير الدرس .

① تعريف التكامل :

> f دالة مستمرة على مجال I ، a و b عددان حقيقيان من I .
> يسمى العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$ ، حيث F دالة أصلية لـ f على I
> التكامل من a إلى b لـ f ونرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x)\,dx$.

ملاحظات :

① علينا لحساب العدد $\int_a^b f(x)\,dx$ نقوم بتعيين دالة أصلية F للدالة f على مجال I يشمل العددين a و b ثم نكتب :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a).$$

② يمكن تبديل المتغير x بأحد الحروف t ، q ... فيكون لدينا مثلا :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt .$$

تعريف :

> مساحة الحيز تحت المنحنى (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي
> $\int_a^b f(x)\,d(x)$.

أنشطة تقويمية :

تمرين 4 ص 118 :

أحسب التكاملات التالية :

① $\int_0^3 (2x+3)\,d(x)$ ، ② $\int_{-5}^{5}(4-x)\,dx$ ، ③ $\int_0^2 (1-x^2)\,dx$

الحل : حساب التكاملات التالية :

لدينا : $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$

① $\int_0^3 (2x+3)\,dx = \left[x^2+3x\right]_0^3 = (3^2+3\times3)-(0^2+3\times0) = \boxed{18}$

② $\int_{-5}^{5}(4-x)\,dx = \left[4x-\frac{1}{2}x^2\right]_{-5}^{5} = \left(4\times5-\frac{1}{2}\times5^2\right)-\left(4\times(-5)-\frac{1}{2}\times(-5)^2\right)$

$= (20-12{,}5)-(-20-12{,}5)$

$= 8{,}5+32{,}5 = \boxed{40}$

③ $\int_0^2 (1-x^2)\,dx = \left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \left(2-\frac{1}{3}\times2^3\right)-\left(0-\frac{1}{3}\times0^3\right) = 2-\frac{8}{3} = \boxed{-\frac{2}{3}}$

تمارين للمراجعة ت 1 ، 2 و 3 ص 119 مع الحلول .

حل منزلي ، ت 5 ، 9 ، 12 ص 118 .

ت 13 ص 119

المستوى: 3ت إ.

سير الدرس.

حل التمرين 9 ص 118:

لدينا: $f(x) = x^3 + 1$.

1) تعيين إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$:

الدالة f موجبة على المجال $[-1, +\infty[$ وسالبة على المجال $]-\infty, -1]$.

2) حساب بوحدة المساحة $(u.a)$ مساحة الحيز المحصور بين العددين -1 و 1:

$$S = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (x^3+1)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{4}+1\right) - \left(\frac{1}{4}-1\right) = 2$$

ومنه: $S = 2$

3) حساب بـ cm^2 هذه المساحة: حيث: $\|\vec{i}\| = 1\,cm$ و $\|\vec{j}\| = 0{,}5\,cm$

ومنه: $S = 2 \times 0{,}5 \times 1\ cm^2 = 1\ cm^2$ $\quad S = 1\,cm^2$

تمارين للمراجعة: ت 1، 2 و 3 ص 109.

المحتوى المعرفي : خواص التكامل : الخطية ، علاقة شال ، الترتيب .   المستوى : 3 ع ت

سير الدرس .

نشاط : ش

لتكن الدالتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2$ ، $g(x)=6x^2+1$

1) أحسب كل من : $\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 g(x)\,dx$ ، $\int_0^1 [f(x)+g(x)]\,dx$

~~ماذا تستنتج ؟~~ .

2) ~~أحسب كل من~~ : $\int_0^1 5f(x)\,dx$ ، $5\int_0^1 f(x)\,dx$

ماذا تستنتج ؟ .

2) لدينا : $f(x)\leq g(x)$ ، قارن بين العددين : $\int_0^1 f(x)\,dx$ و $\int_0^1 g(x)\,dx$.

3) أحسب كل من : $\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx$ ، $\int_0^2 f(x)\,dx$

ماذا تستنتج ؟ .

مناقشة النشاط :

1) **حساب كل من :**

$$\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1 2\,dx+\int_0^1 (6x^2+1)\,dx=[2x]_0^1+[2x^3+x]_0^1$$
$$=2+3=5$$
$$\int_0^1 [f(x)+g(x)]\,dx=\int_0^1 (6x^2+3)\,dx=[2x^3+3x]_0^1=5$$
$$5\int_0^1 f(x)\,dx=5\,[2x]_0^1=5\times 2=10$$
$$\int_0^1 5f(x)\,dx=\int_0^1 5\times 2\,dx=[10x]_0^1=10$$

نستنتج أن : $\int_0^1 [f(x)+g(x)]\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 g(x)\,dx$

و $5\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 5f(x)\,dx$

2) **المقارنة بين العددين ،** $\int_0^1 f(x)\,dx$ و $\int_0^1 g(x)\,dx$:

لدينا : $f(x)\leq g(x)$ ولدينا : $\int_0^1 f(x)\,dx\leq\int_0^1 g(x)\,dx$

لأن : $2\leq 3$.

نستنتج أنه ، إذا كانت $f(x)\leq g(x)$ فإن $\int_0^1 f(x)\,dx\leq\int_0^1 g(x)\,dx$

3) **حساب كل من :**

$$\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx=[2x]_0^1+[2x]_1^2=(2-0)+(4-2)$$
$$=4$$
$$\int_0^2 f(x)\,dx=[2x]_0^2=4$$

نستنتج أن : $\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx=\int_0^2 f(x)\,dx$

المستوى : 3 ت ر .

سير الدرس .

خواص التكامل :

f و g دالتان معرفتان ومستمرتان على مجال I .

1) الخطية :

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I ومن أجل كل عدد حقيقي k لدينا :

① $$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

② $$\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

2) الترتيب :

a و b عددان حقيقيان من I حيث : $a \leq b$.

① إذا كان من أجل كل x من $[a,b]$: $f(x) \geq 0$ فإن : $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

② ~~[a,b] ...~~ $f(x) \leq g(x)$ فإن : $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

3) علاقة شال :

من أجل كل من a ، b و c أعداد حقيقية من I لدينا :

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx .$$

أنشطة تقويمية ، تمرين ①

f و g دالتان مستمرتان ومعرفتان بـ : $f(x)=x+1$ ، $g(x)=x^2-2$

1) أحسب كل من : $\int_1^2 [f(x)+g(x)]\,dx$ ، $\int_0^2 3f(x)\,dx$

$\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx$

2) قارن بين : $\int_0^2 f(x)\,dx$ و $-\int_2^0 f(x)\,dx$

ماذا تستنتج ؟ .

الحل :

1) حساب كل من :

$$\int_1^2 [f(x)+g(x)]\,dx = \int_1^2 (x^2+x-1)\,dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{2}x^2-x\right]_1^2$$

$$= \left(\tfrac{8}{3}+\cancel{2}-\cancel{2}\right)-\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}-1\right) = \left(\tfrac{8}{3}\right)-\left(\tfrac{2+3-6}{6}\right)$$

$$= \tfrac{8}{3}+\tfrac{1}{6} = \tfrac{17}{6}$$

$$\int_0^2 3f(x)\,dx = 3\int_0^2 f(x)\,dx = 3\left[\tfrac{1}{2}x^2+x\right]_0^2 = 3\left[(2+2)-0\right] = 12$$

سير الدرس.

$$\int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)\,dx = \int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^4 (x+1)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_2^4 = (8+4)-(4) = 8$$

@ المقارنة بين: $\int_0^2 f(x)\,dx$ و $-\int_2^0 f(x)\,dx$:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^2 = (2+2) - 0 = 4$$

$$-\int_2^0 f(x)\,dx = -\left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_2^0 = -(0-4) = 4$$

الاستنتاج:

نستنتج أن: $\int_0^2 f(x)\,dx = -\int_2^0 f(x)\,dx$.

تمارين للمراجعة: ت 1، 2، 3 و 4 ص ١٨٨ مع الحلول،

عمل منزلي: ت ٢١، 28 ص ١٩٠.

المستوى: 3 ث إ.

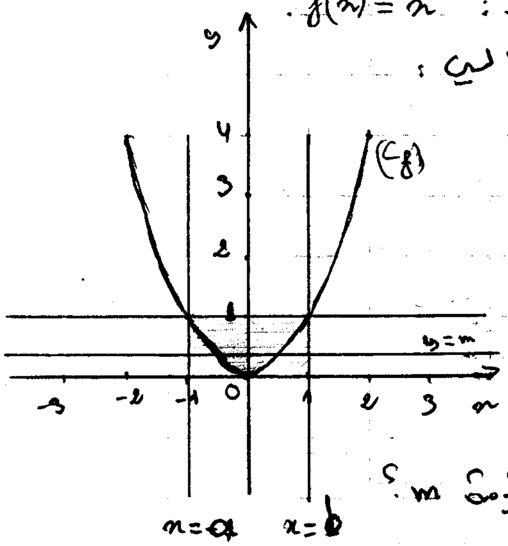
الكفاءة المستهدفة: حساب القيمة المتوسطة لدالة وتفسيرها.

سير الدرس.

نشاط:

إليك الدالة المرجعية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2$.

و (C_f) تمثيلها البياني في الشكل التالي:



1) أوجد دالة أصلية للدالة مربع.

2) أحسب التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$

حيث: $a=-1$ و $b=1$.

3) أحسب مساحة المستطيل S المحصورة

بين $y=m$ ومحور الفواصل

و $x=a$ و $x=b$. 4) ~~إحداث~~: نفرض أن

ب) ماذا تلاحظ ؟ . $S=\int_a^b f(x)\,dx$ أ) استنتج قيمة m ؟

نسمي m القيمة المتوسطة للدالة f.

مناقشة النشاط:

1) إيجاد دالة أصلية للدالة مربع: $F(x)=\frac{1}{3}x^3$.

2) حساب التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$$

3) حساب مساحة المستطيل:

$$S=m\times(b-a)=2m$$

4) أ) استنتاج قيمة m:

لدينا: $S=\int_a^b f(x)\,dx$ أي: $2m=\frac{2}{3}$ ومنه: $m=\frac{1}{3}$

ب) الملاحظة:

نلاحظ أن مساحة الحيز الواقع تحت المنحنى (C_f) بين a و b هي نفسها مساحة المستطيل الذي بعداه $b-a$ و m أي أن: $m(b-a)=\int_a^b f(x)\,dx$.

1) القيمة المتوسطة لدالة على مجال:

تعريف:

f دالة معرفة ومستمرة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I حيث $b>a$. القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a,b]$ هي العدد الحقيقي:

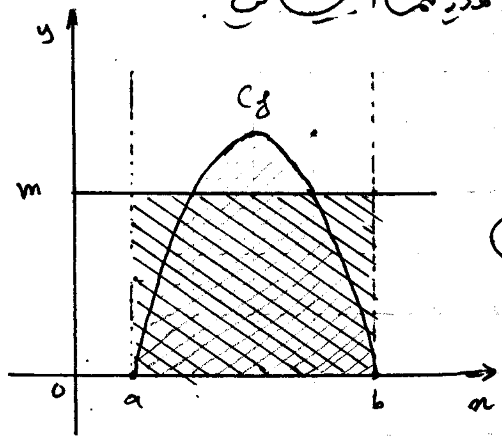
$$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

المستوى : 3 ت ر

سير الدرس.

التفسير البياني :

لتكن f دالة موجبة على المجال $[a,b]$ و (C_f) تمثيلها البياني.



حيث القيمة : $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

والتي تحقق : $m(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$

أي أن : $\int_a^b f(x)\,dx$ مساحة الحيز الواقع تحت المنحنى (C_f) بين a و b تمثل نفسها مساحة المستطيل الذي بعداه $m(b-a)$ و $b-a$ و m (القيمة المتوسطة).

مثال :

إليك الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x)=2x-3$

أحسب القيمة المتوسطة لـ f على المجال $[0,3]$.

الحل :

حساب القيمة المتوسطة لـ f على $[0,3]$:

لدينا :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{3-0}\int_0^3 (2x-3)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{2}x^2-3x\right]_0^3 = \frac{1}{3}(9-9) = \frac{1}{3}(0) = 0$$

ومنه : $m=0$

② **الدالة الأصلية لدالة والتي تنعدم من أجل قيمة :**

تعريف :

f دالة مستمرة على مجال I و a عدد حقيقي من I.
الدالة الأصلية الوحيدة ~~التي~~ للدالة f على I والتي تنعدم من أجل a هي الدالة $F: x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$.

مثال :

لتكن f الدالة المعرفة على $]0,+\infty[$ ب : $f(x) = 2x+\frac{1}{x^2}$.
الدالة الأصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل القيمة 2 هي الدالة F حيث : $F(x) = \int_2^x \left[2t+\frac{1}{t^2}\right]dt$

لدينا :

$F(x) = \left[t^2-\frac{1}{t}\right]_2^x = x^2-\frac{1}{x}-\left(4-\frac{1}{2}\right)$ ومنه : $F(x) = x^2-\frac{1}{x}-\frac{7}{2}$

تمارين للمراجعة : ت 1) ، 2) و 3) ص 113 مع الحلول.

المستوى: 3 ع ت.

سير الدرس

ثالثا: تقويمات: BAC 2010 التمرين ④

① تبيين أن $f(x)=x-5+\frac{a}{x^2}$ وتعيين a:

لدينا: $f(x)=\frac{x^3-5x^2+4}{x^2}=\frac{x^3}{x^2}-\frac{5x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}=x-5+\frac{4}{x^2}$

ومنه: $a=4$

② حساب كل من:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty} x=\boxed{+\infty}$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty} x=\boxed{-\infty}$

$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\frac{4}{0^+}=\boxed{+\infty}$ ، $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\frac{4}{0^+}=\boxed{+\infty}$

③ أ) تبيين أن: $f'(x)=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$

$f'(x)=\frac{(3x^2-10x)x^2-2x(x^3-5x^2+4)}{x^4}=\frac{3x^4-\cancel{10x^3}-2x^4+\cancel{10x^3}-8x}{x^4}$

$f'(x)=\frac{x^4-8x}{x^4}=\frac{x(x^3-8)}{x^4}=\frac{x^3-8}{x^3}$

ولدينا: $(x-2)(x^2+2x+4)=x^3-8$

ومنه: $f'(x)=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$

ـ استنتاج إتجاه تغير الدالة f:

إشارة $f'(x)$: لدينا: $x^2+2x+4>0$ و $x-2=0$ أي $x=2$.

$x^2=0$ أي $x=0$.

قيم x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
إشارة $x-2$	$-$		$-$	0	$+$
x^2+2x+4	$+$		$+$		$+$
إشارة: $(x-2)(x^2+2x+4)$	$-$		$-$	0	$+$
إشارة: x^3	$-$	0	$+$		$+$
إشارة: $f'(x)$	$+$	‖	$-$	0	$+$

إذن، f متزايدة تماما

لما: $x\in]-\infty,0[\cup[2,+\infty[$

و f متناقصة تماما

لما: $x\in]0,2]$

ب) تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

سير الدرس .

4) إثبات أن المنحنى (C_g) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل :

لدينا : $\lim_{x\to 0} g(x)=+\infty$ ومنه (C_g) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$

ولدينا : $\lim_{|x|\to +\infty} \frac{4}{x^2}=0$ ومنه (C_g) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=x-5$ بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

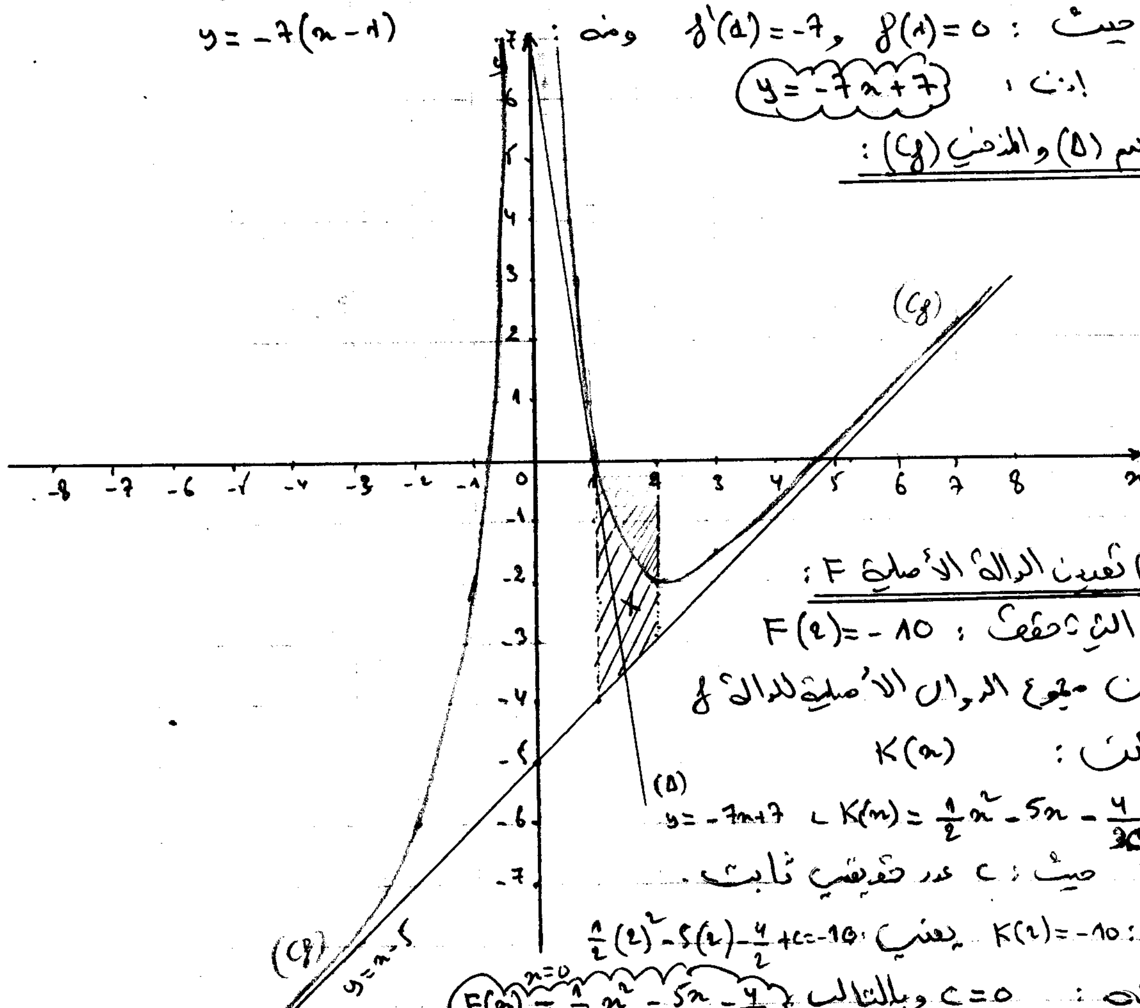
5) إيجاد معادلة لـ (Δ) مماس (C_g) عند الفاصلة 1 :

لدينا : $y=g'(a)(x-a)+g(a)$ أي : $y=g'(1)(x-1)+g(1)$

حيث : $g(1)=0$, $g'(1)=-7$ ومنه : $y=-7(x-1)$

إذن : $y=-7x+7$

6) رسم (Δ) والمنحنى (C_g) :



7) أ) تعيين الدالة الأصلية F :

والتي تحقق : $F(2)=-10$

نعين مجموع الدوال الأصلية للدالة g .

ولتكن : $K(x)$

$K(x)=\frac{1}{2}x^2-5x-\frac{4}{x}+c$

حيث : c عدد حقيقي ثابت .

نضع : $K(2)=-10$ يعني : $\frac{1}{2}(2)^2-5(2)-\frac{4}{2}+c=-10$

ومنه : $c=0$ وبالتالي $F(x)=\frac{1}{2}x^2-5x-\frac{4}{x}$

ب) حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_g) ومحور الفواصل والمستقيمين $x=1$ و $x=2$.

بما أن (C_g) يقع تحت محور الفواصل لما : $x\in[1,2]$ فإن :

$$S=\int_1^2 -g(x)\,dx=\int_2^1 g(x)\,dx=\left[F(x)\right]_2^1=\left[\frac{1}{2}x^2-5x-\frac{4}{x}\right]_2^1$$

$$S=\left(\frac{1}{2}(1)^2-5(1)-\frac{4}{1}\right)-\left(\frac{1}{2}(2)^2-5(2)-\frac{4}{2}\right)=\frac{1}{2}-5-4-2+10+2$$

ومنه : $S=\frac{3}{2}\ (u.s)$

المحتوى المعرفي: الدالة اللوغاريتم النيبيري. المستوى: 3 ت إ.

الكفاءة المستهدفة: تعريف الدالة اللوغاريتم النيبيري.

سير الدرس

نشاط 1 ص 124:

لدينا: f_n معرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي: $f_n(x) = \frac{1}{x^n}$

1) تعيين دالة أصلية للدوال التالية:

لدينا: الدالة الأصلية لـ $f_n(x)=\frac{1}{x^n}$ هي: $F_n(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$

إذن:

أ) الدالة الأصلية لـ f_2 هي: $F_2(x) = -\frac{1}{(2-1)x^{2-1}} = -\frac{1}{x}$

ب) الدالة الأصلية لـ f_3 حيث: $f_3(x) = \frac{1}{x^3}$ هي: $F_3(x) = -\frac{1}{(3-1)x^{3-1}} = -\frac{1}{2x^2}$

ج) الدالة الأصلية لـ f_4 حيث: $f_4(x) = \frac{1}{x^4}$ هي: $F_4(x) = -\frac{1}{(4-1)x^{4-1}} = \frac{-1}{3x^3}$

2) شرح لماذا لا تسمح التقنية المستعملة في السؤال الأول

من تعيين دالة أصلية للدالة $f(x)=\frac{1}{x}$

لأنه عندما نستعمل هذه الطريقة يكون المقام معدوم $(n=1)$

لا يمكن تعيين دالة أصلية بهذه الطريقة.

3) أ) التعبير عن $\ln(x)$ باستعمال التكامل:

لدينا: $\int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = [\ln(t)]_1^x$

$= \ln(x) - \ln(1) = \ln(x)$

إذن: $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln(x)$

ب) تعيين قيمة $\ln(1)$:

لدينا: $\ln(1) = 0$

ج) تعيين عبارة الدالة المشتقة للدالة $f(x)=\ln(x)$:

بما أن الدالة $\ln(x)$ دالة أصلية على المجال $]0,+\infty[$ للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$

فإن: $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$

4) استنتاج اتجاه تغير الدالة $\ln(x)$ على المجال $]0,+\infty[$: إشارة $(\ln)'(x)$:

لدينا من أجل كل x من $]0,+\infty[$: $\frac{1}{x} > 0$ إذن: $0 \;\|\; - \quad +$ دراسة الإشارة

ومنه الدالة "ln" متزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$.

سير الدرس

دالة اللوغاريتم النيبيري :

1) تعريف :

نسمي الدالة اللوغاريتم النيبيري ونرمز إليها بالرمز "ln" الدالة الأصلية على المجال $]0,+\infty[$ للدالة $t \mapsto \frac{1}{t}$ والتي تنعدم عند 1

بالتعريف من أجل $x>0$: $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$ و $\ln(1)=0$.

ترميز : نرمز إلى اللوغاريتم النيبيري لعدد x من $]0,+\infty[$ بـ $\ln(x)$ وأحيانا $\ln x$ ونكتب : $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$

2) إتجاه تغير الدالة "ln" وجدول التغيرات :

من أجل كل x من $]0,+\infty[$ ، $\frac{1}{x}>0$ ومنه الدالة "ln" متزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x)$	‖		$+$		
$\ln x$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

خواص :

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0,+\infty[$:

1) $\ln a = \ln b$ يعني : $a=b$

2) $\ln a < \ln b$ يعني : $a<b$

3) إشارة $\ln(x)$:

من أجل كل x من $]0,+\infty[$ لدينا :

1) $\ln x = 0$ يعني : $x=1$

2) $\ln x > 0$ يعني : $x>1$

3) $\ln x < 0$ يعني : $0<x<1$

نشاط تطبيقي :

لتكن لدينا الدالتين f و g حيث :

$f(x) = \ln(x+1)$ و $g(x) = \ln\left(\frac{1-x}{3+x}\right)$

1) عين مجموعة تعريف الدالتين f و g .

2) عين حسب قيم x إشارة $f(x)$.

المستوى: 3 ث إ.

سير الدرس.

حل التمرين 2 التقويمي:

1) تعيين مجموعة تعريف الدالتين f و g:

أ) الدالة f:

تكون الدالة f معرفة من أجل الأعداد الحقيقية x حيث: $x+1>0$ أي: $x>-1$

ومنه مجموعة تعريف الدالة f هي: $D_f =]-1,+\infty[$

ب) الدالة g:

تكون الدالة g معرفة من أجل كل الأعداد الحقيقية x حيث: $\frac{1-x}{3+x} > 0$ و $3+x \neq 0$

وهذا يعني أن: $(1-x)(3+x)>0$ أي أن: $-3<x<1$

ومنه مجموعة تعريف الدالة g هي: $D_g =]-3,1[$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$3+x$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(1-x)/(3+x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	

2) تعيين إشارة $\ln(x+1)$:

لدينا: * $\ln(x+1) \leq 0$ يعني: $0<x+1 \leq 1$ أي: $-1<x\leq 0$

* $\ln(x+1) > 0$ يعني: $x+1>1$ أي $x>0$

ومنه إشارة $\ln(x+1)$ ملخصة في الجدول التالي:

x	-1		0		$+\infty$
$\ln(x+1)$		$-$	0	$+$	

أي: لما $x \in]-1,0]$ إشارة $f(x)$ سالبة.

ولما $x \in]0,+\infty[$ إشارة $f(x)$ موجبة تماما.

تمارين للمراجعة: ت 1، 2 و 3 ص 131: مع الحلول.

عمل منزلي: ت 3، 7، 8 و 9 ص 142.

الكفاءات المستهدفة : - إستعمال حاسبة لحساب قيم دوال لوغاريتم نيبيري . المستوى : 3 ت إ.
- الخواص المميزة ، حل معادلات ومتراجحات لدوال لوغاريتمية .

سير الدرس .

نشاط :

① بإتباع المراحل التالية : $\boxed{1 \mid \ln \mid =}$ من اليسار إلى اليمين .
باستعمال ملمسة آلة لحاسبة علمية .
- أعط قيمة مقربة لكل عدد من الأعداد التالية : $\ln 1$ ، $\ln 2$ ، $\ln 3$ و $\ln(\frac{1}{2})$.

② أ) أنقل ثم أكمل الجدول التالي : القيم تكون مقربة . نعطي القيم مقربة .

$\ln(\frac{a}{b})$	$\ln a-\ln b$	$\ln(a\times b)$	$\ln a+\ln b$	$\ln b$	$\ln a$	b	a
						3	2

ب) قارن قيم $\ln(a\times b)$ مع قيم $\ln a+\ln b$
وكذا قيم $\ln(\frac{a}{b})$ مع قيم : $\ln a-\ln b$

③ باستعمال المقارنة السابقة حل المعادلة والمتراجحة التاليتين :
① $\ln(x+1)+\ln(x+2)=\ln 2$ ، ② $\ln(x+1)+\ln(x+2)<\ln 2$

ملاحظة : لحل المعادلة والمتراجحة نعين مجموعة التعريف D ثم نحل في D المعادلة أو المتراجحة .

مناقشة النشاط :

① إعطاء قيمة مقربة لكل عدد من الأعداد التالية :
$\ln 1=0$ ، $\ln 2=0{,}69$ ، $\ln(3)=1{,}10$ ، $\ln(\frac{1}{2})=-0{,}69$

② أ) نقل وإكمال الجدول :

$\ln(\frac{a}{b})$	$\ln a-\ln b$	$\ln(a\times b)$	$\ln a+\ln b$	$\ln b$	$\ln a$	b	a
$-0{,}41$	$-0{,}41$	$1{,}79$	$1{,}79$	$1{,}10$	$0{,}69$	3	2

ب) المقارنة :
من الجدول نلاحظ أن : $\ln(a\times b)=\ln a+\ln b$
و $\ln(\frac{a}{b})=\ln a-\ln b$

③ حل المعادلة والمتراجحة :

أ) حل المعادلة :
تكون المعادلة ① معرفة من أجل كل عدد حقيقي x حيث :
$x+1>0$ و $x+2>0$ وهذا يعني : $x>-1$ و $x>-2$
أي : $D_1=]-1,+\infty[$ و $D_2=]-2,+\infty[$ إذن : $D=D_1\cap D_2=]-1,+\infty[$
ومنه مجموعة التعريف هي :

المستوى : 3 ث ع .

سير الدرس .

من أجل كل x من D ، ① تعني: $\ln(x+1)(x+2)=\ln 2$ لأن $\ln a+\ln b=\ln(ab)$

وهذا يعني: $(x+1)(x+2)=2$ أي: $x^2+3x=0$ أي: $x(x+3)=0$

أي: $x=0$ أو $x=-3$ إذن للمعادلة $x^2+3x=0$ حلان هما (-3) و 0 .

كلا ما أن 0 عنصر من D بينما (-3) لا ينتمي إلى D .

إذن: مجموعة حلول المعادلة ① هي: $S=\{0\}$

ب) المتراجحة ②:

مجموعة تعريف المتراجحة ② هي نفسها $D=]-1,+\infty[$

من أجل كل x من D ، ② تعني: $\ln(x+1)(x+2)\leq \ln 2$ وهذا يعني:

$(x+1)(x+2)\leq 2$ أي: $x^2+3x\leq 0$

$+ \quad -3 \quad - \quad -1 \quad 0 \quad +$

يعني $-3\leq x\leq 0$ أي: $D_1=[-3,0]$

إذن: $S=D_1\cap D=]-1,0]$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة ② هي: $S=]-1,0]$

الخواص الجبرية:

نقبل دون برهان الخواص التالية:

من أجل كل عددين حقيقيين a و b ، ومن أجل كل n من $\mathbb{Z}$.

1) $\ln(ab)=\ln a+\ln b$

2) $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$ ، $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$

3) $\ln(a^n)=n\ln a$

4) $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln a$ ، $\ln\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\ln a$

أمثلة:

1) $\ln\frac{5}{2}+\ln\frac{2}{5}=\ln\left(\frac{5}{2}\times\frac{2}{5}\right)=\ln 1=0$

2) $\ln 10-\ln 5=\ln\left(\frac{10}{5}\right)=\ln 2=0,69314718$

3) $\ln\left(\frac{1}{3}\right)=-\ln 3=-1,09861229$

4) $\ln(2^4)=4\ln 2=2,77258872$

5) $\ln\sqrt{7}=\frac{1}{2}\ln 7=0,97295507$

سير الدرس .

حل معادلات ومتراجحات :

طريقة :

1) لحل المعادلة $\ln[u(x)] = \ln[v(x)]$ (على التوالي المتراجحة $\ln[u(x)] < \ln[v(x)]$) :
* نعين D مجموعة تعريف المعادلة " على التوالي المتراجحة ".
* نحل في D المعادلة $u(x) = v(x)$ " على التوالي المتراجحة $u(x) < v(x)$ ".

2) الكتابة $\ln a + \ln b$ تفرض أن يكون $a>0$ و $b>0$ بينما الكتابة $\ln(a\times b)$ تفرض أن يكون $ab>0$ ويعني هذا أنه يمكن للعددين a و b أن يكونا سالبين معا ، ولهذا فلابد من تعيين مجموعة التعريف قبل أي تغيير

3)

نشاط تقويمي : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات والمتراجحات التالية :

1) $3\ln(x+2) = \ln 27$ ، 2) $3\ln(x+2) > \ln 27$

3) $3\ln x - \ln 2x = \ln(3x-4)$ 4) $3\ln x - \ln 2x \le \ln(3x-4)$

5) $\ln(x^2-1) + \ln(2x-3) = \ln\frac{x+1}{x-1}$ يحذف

الحل : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات والمتراجحات التالية :

1) $3\ln(x+2) = \ln 27$ ، تكون المعادلة معرفة من أجل $x+2>0$ أي : $x>-2$

إذن مجموعة التعريف هي : $D =]-2,+\infty[$

المعادلة تكتب : $\ln(x+2)^3 = \ln 3^3$ ومنه : $(x+2)^3 = 3^3$

ومنه : $x+2 = 3$ ، ومنه $x = 1$ إذن : $S = \{1\}$.

2) $3\ln(x+2) > \ln 27$ مجموعة تعريف المتراجحة هي نفسها $D =]-2,+\infty[$

المتراجحة تكتب : $\ln(x+2)^3 > \ln 3^3$ ومنه : $(x+2)^3 > 3^3$ أي : $x+2>3$

ومنه : $x > +1$ أي : $D_1 =]+1,+\infty[$ إذن : $S = D\cap D_1 =]+1,+\infty[$

إذن مجموعة حلول المتراجحة هي : $S =]1,+\infty[$

3) $3\ln x - \ln 2x = \ln(3x-4)$ ، تكون المعادلة معرفة من أجل $x>0$ و $3x-4>0$

أي : $x>0$ و $x>\frac{4}{3}$ ومنه ، $D = D_1\cap D_2 =]0,+\infty[\cap]\frac{4}{3},+\infty[$

ومنه مجموعة التعريف هي : $D =]\frac{4}{3},+\infty[$

المعادلة تكتب : $\ln\frac{x^3}{2x} = \ln(3x-4)$ ومنه : $\frac{x^3}{2x} = 3x-4$ ومنه : $x(x^2-6x+8)=0$

أي $x=0$ أو $x^2-6x+8=0$ ($x=0$ مرفوض لأن $0\notin D$) . إذن المعادلة $x^2-6x+8=0$

تقبل حلين $x=4$ و $x=2$. إذن مجموعة حلول المعادلة هي ، $S=\{2,4\}$

3) لحل معادلة من الشكل : $a(\ln x)^2 + b\ln x + c = 0$ أو متراجحة من الشكل

$a(\ln x)^2 + b\ln x + c > 0$. نضع : $X = \ln x$ ثم نحل المعادلة : $aX^2 + bX + c = 0$

أو المتراجحة ثم نعين قيم x انطلاقا من العلاقة $X = \ln x$.

المستوى : 3 ث ا.

سير الدرس

4) $3\ln x - \ln 2x \leq \ln(3x-4)$

مجموعة تعريف المتراجحة هي: $D =]\frac{4}{3}, +\infty[$

المتراجحة تكتب: $\ln\frac{x^3}{2x} \leq \ln(3x-4)$ ومنه، $\frac{x^3}{2x} \leq 3x-4$

ومنه: $x(x^2-6x+8) \leq 0$.

x	$-\infty$ 0 2 4 $+\infty$
x	− 0 + + +
x^2-6x+8	− + 0 − 0 +
$x(x^2-6x+8)$	+ 0 + 0 − 0 +

يعني: $2 \leq x \leq 4$.

أي، $D_1 = [2,4]$

إذن: $S = D \cap D_1 = [2,4]$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي: $S = [2,4]$

5) $\ln(x^2-1) + \ln(2x-3) = \ln\frac{x+1}{x-1}$

تكون هذه المعادلة معرفة إذا كان: $x^2-1>0$ و $2x-3>0$ ومنه:

~~$D_1 =]\frac{3}{2}, +\infty[$ ، $D_2 =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$~~ ومنه $D = D_1 \cap D_2$

إذن مجموعة تعريف المعادلة هي: $D =]\frac{3}{2}, +\infty[$

المعادلة تكتب: $\ln(x^2-1)(2x-3) = \ln\frac{x+1}{x-1}$

ومنه، $(x^2-1)(2x-3) = \frac{x+1}{x-1}$ ومنه، $(x-1)(x^2-1)(2x-3) = x+1$

ومنه، $(x-1)^2(2x-3) = 1$ ومنه: $2x^3 - 7x^2 + 8x - 4 = 0$

نلاحظ أن: $x = 2$ هو حل ظاهر لهذه المعادلة والمعادلة تكتب:

$(x-2)(2x^2-3x+2) = 0$ ومنه $x = 2$ ، لأن: $2x^2-3x+2 \neq 0$ لأن $\Delta < 0$

إذن حل المعادلة هو $S = \{2\}$

تمارين للمراجعة: ت 6 ص 131 و ت 1) و 2) ص 133 مع الحلول.

عمل منزلي: ت 13) و 14) و 15) ص 142

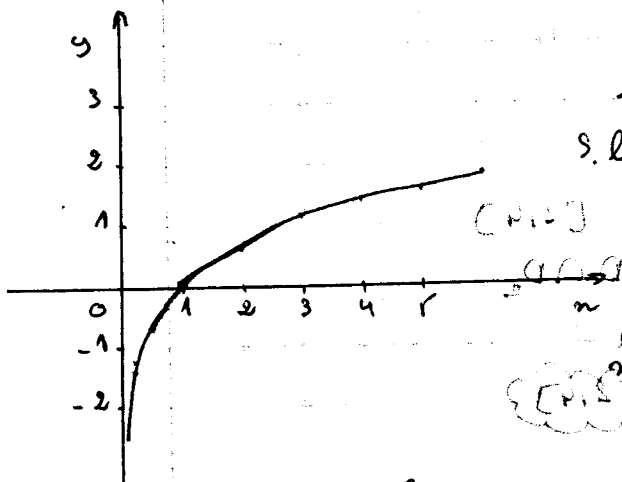
16) و 18) و 20) ص 143

الكفاءة المستهدفة: المشتقة، التمثيل البياني، السلوك التقاربي للدالة اللوغاريتمية. **المستوى: 3 ث ر.**

سير الدرس

نشاط:

إليك التمثيل البياني للدالة: $f(x)=\ln(x)$ المعرفة على $]0,+\infty[$.



1) * لاحظ الشكل جيدا ثم خمن حول: $\lim_{x\to 0}\ln x$ ، $\lim_{x\to +\infty}\ln x$

2) ما رأيك في اتجاه تغير الدالة ln؟

مناقشة النشاط:

1) **الملاحظة ثم التخمين:** $\lim_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$ ، $\lim_{x\to 0}\ln x=-\infty$

2) **إتجاه تغير الدالة ln:**

من أجل كل x من $]0,+\infty[$: الدالة ln متزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$.

دراسة دالة اللوغاريتم النيبيري:

1) **النهايات:**

لدينا النهايات التالية:

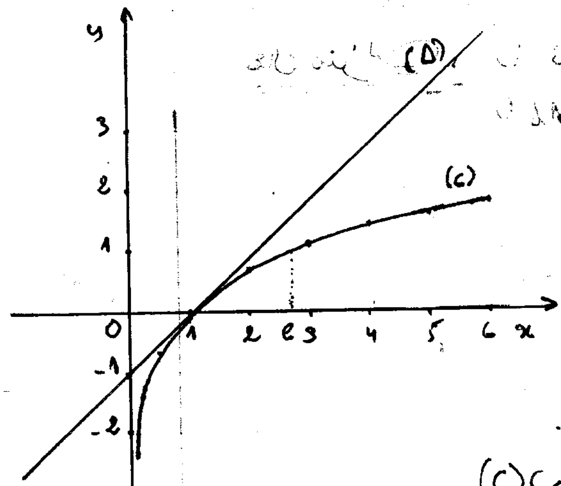
1) $\lim_{x\to +\infty}\ln x=\boxed{+\infty}$ 2) $\lim_{x\to 0^+}\ln x=\boxed{-\infty}$

3) $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=\boxed{0}$ 4) $\lim_{x\to 0^+}x\ln x=\boxed{0}$

2) **جدول التغيرات والمشتقة:**

لدينا من أجل كل x من $]0,+\infty[$ ، $\ln'(x)=\frac{1}{x}$

وتكون الدالة ln متزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$.



x	0	1	e	$+\infty$
$\ln'(x)$	‖	$+$		
$\ln x$	‖ $-\infty$	0	1	$+\infty$

3) **التمثيل البياني للدالة ln:**

* المنحنى (C) الممثل للدالة اللوغاريتمية النيبيرية يقبل محور التراتيب كمستقيم مقارب.

* لدينا $\ln'(1)=1$ و $\ln 1=0$ ، إذن يقبل المنحنى (C)

المستوى : 3 ت إ .

سير الدرس :

العدد e :

تعريف :

العدد e هو العدد الذي لوغاريتمه النيبيري يساوي 1 . ($\ln e = 1$)

تعطينا الحاسبة $e \simeq 2{,}718281828$.

نشاط تكويني :

لتكن الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$

1) أدرس نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفها .

2) أحسب $f'(x)$ ، ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة f .

3) شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) أنشئ منحنى الدالة f .

الحل :

1) دراسة نهايات الدالة f :

$\lim_{x\to 0^{+}} f(x)=\boxed{+\infty}$ لأن : $\lim_{x\to 0^{+}}\frac{1}{x}=+\infty$ و $\lim_{x\to 0^{+}}(-\ln x)=+\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\boxed{-\infty}$ لأن : $\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim_{x\to +\infty}(-\ln x)=-\infty$

2) حساب $f'(x)$:

أي : $f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$ ومنه $f'(x)=\frac{-x^2-x}{x^3}$ ، $f'(x)=\frac{-(x+1)}{x^2}$

إستنتاج إتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ ، $f'(x)=0$ أي : $\frac{-x^2-x}{x^3}=0$ ، $\frac{-(x+1)}{x^2}=0$

إشارة المشتقة من إشارة البسط و x^3 ومنه : $x=-1$

بما أن $x>0$ فإن إشارة السالب لها .

$-\infty$ $+$ -1 $-$ 0 $-$ $+\infty$

إذن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0,+\infty[$.

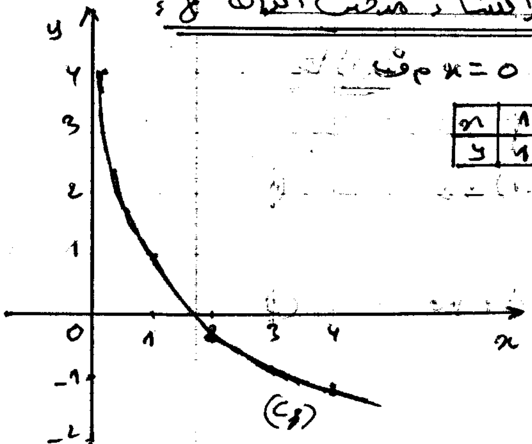
3) تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$

4) إنشاء منحنى الدالة f :

لدينا : $x=0$ مقارب

x	1	2	4
y	1	-0,19	-1,13



الكفاءات المستهدفة: - حساب نهايات جداءات أو حواصل قسمة يدخل فيها x^n ، $\ln x$. المستوى: 3 ت ر.
- دراسة الدوال من الشكل $\ln o u$.

سير الدرس .

نشاط:

لتكن الدالة f على $]-5,+\infty[$ بـ : $f(x)=\ln(x+5)$ ،

1) نضع : $x+5=X$ ، $f=\ln o u$ ، $f(x)=$ حيث $u(x)=x+5$

أحسب كل من : $\lim\limits_{x\to -5} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أحسب $f'(x)$ ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة f.

3) ماهي الدالة الأصلية لـ $x\mapsto \frac{1}{x+5}$ على $]-5,+\infty[$.

مناقشة النشاط:

1) حساب النهايات:

لدينا : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-5}(x+5)=0^+$ ، وبما أن : $\lim\limits_{X\to 0}\ln X=-\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-5}\ln(x+5)=\boxed{-\infty}$

أي : $\lim\limits_{x\to-5} f(x)=\boxed{-\infty}$

ولدينا، $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+5)=+\infty$ وبما أن : $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+5)=\boxed{+\infty}$

أي : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\boxed{+\infty}$

2) حساب $f'(x)$ وإستنتاج إتجاه تغير الدالة f :

لدينا ، $f=\ln o u$ حيث ، $u(x)=x+5$

ولدينا : $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ ومنه ، $f'(x)=\frac{1}{x+5}$

إشارة $f'(x)$: موجبة تماما على $]-5,+\infty[$

بما أن الدالة u متزايدة تماما على المجال $]-5,+\infty[$ فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-5,+\infty[$.

3) الدالة الأصلية لـ $x\mapsto\frac{1}{x+5}$ على $]-5,+\infty[$:

بما أن : $f'(x)=\frac{1}{x+5}$ فإن $f(x)=\ln(x+5)$ دالة أصلية لـ $x\mapsto\frac{1}{x+5}$.

* دراسة الدالة $\ln o u$:

1) النهايات :

لدراسة نهاية دالة $\ln o u$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة.

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]1,+\infty[$ بـ : $f(x)=\ln(x-1)$.

1) لدينا : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}(x-1)=0$ ومنه عند وضع : $x-1=X$ نجد : $\lim\limits_{X\to 0}\ln X=\boxed{-\infty}$

إذن : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\infty$

2) لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ أي $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=\boxed{+\infty}$ إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

المستوى: 3 ت 1.

سير الدرس:

② إتجاه التغيرات:

خاصية:

إذا كانت u دالة معرفة وموجبة تماما على مجال I فإن للدالتين u و $\ln\circ u$ نفس إتجاه التغيرات على المجال I.

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]2,+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln\left(\frac{5}{x-2}\right)$.

نلاحظ أن: $f=\ln\circ u$ حيث: $u(x)=\frac{5}{x-2}$.

بما أن u متناقصة تماما على المجال $]2,+\infty[$ فإن:

f متناقصة تماما على المجال $]2,+\infty[$.

③ المشتقة والدالة الأصلية:

خاصية:

إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق وموجبة تماما على مجال I فإن:

① الدالة $\ln\circ u$ قابلة للإشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I:

$$(\ln\circ u)'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

② الدالة $x\mapsto\ln[u(x)]$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{u'(x)}{u(x)}$ على I.

مثال:

① مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\ln(2x^2+x+3)$ هي: $f'(x)=\frac{4x+1}{2x^2+x+3}$.

② الدالة F حيث: $F(x)=\ln(3x-2)$ هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x)=\frac{3}{3x-2}$ على $]\frac{2}{3},+\infty[$.

تمارين للمراجعة: ت ①، ② و ③ ص 137. مع الحلول.

إستعد للبكالوريا: ص 140 و 141 ـ أعمال موجهة ص 139

عمل منزلي: BAC 2012 الموضوع الأول "تمرين 4".

BAC 2010 الموضوع " " تمرين 2".

المستوى: 3 ت ر.

سير الدرس

حل BAC2012 : م ت ق ق ④ :

① التخمين بقراءة بيانية لإتجاه تغير f ونهايتها f عند $+\infty$:

f دالة متزايدة تماما على $[1,\sqrt{e}]$ ومتناقصة تماما على $[\sqrt{e},+\infty[$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$$

② أ) حساب بدلالة a و c عبارة $f'(x)$:

لدينا : $f(x) = ax+b+cx\ln x$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$ والدالة المشتقة هي :

$f'(x) = a + c\ln x + cx\left(\frac{1}{x}\right)$ أي : $f'(x) = a + c(\ln x + 1)$

ب) تبيين أن : $f(x) = 3x+1-2x\ln x$:

لدينا : $f(5) = 16-10\ln 5$ و $f(1)=4$ و $f'(\sqrt{e})=0$

وعليه :

$$\begin{cases} a+b=4 & \text{①} \\ a+c(\ln\sqrt{e}+1)=0 & \text{②} \\ 5a+b+5c\ln 5 = 16-10\ln 5 & \text{③} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=4 & \text{①} \\ a+\frac{3}{2}c=0 & \text{②} \\ 5a+b=16 & \text{③} \end{cases}$$

من ③ نجد : $5c=-10$ وعليه : $\boxed{c=-2}$ وبالتالي تصبح الجملة :

من ② نجد : $\boxed{a=3}$

من ① نجد : $b=4-3=\boxed{1}$ وبالتالي : $a=3$ ، $b=1$ ، $c=-2$

وعليه : $f(x) = 3x+1-2x\ln x$

ج) التحقق من صحة التخمين في السؤال ① :

لدينا : ح ع ت من الشكل $+\infty-\infty$: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (3x+1-2x\ln x)$

إزالة ح ع ت .

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(3+\frac{1}{x}-2\ln x\right) = \boxed{-\infty}$$

لأن : $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ ، $\lim_{x \to +\infty}\left(3\times\frac{1}{x}\right)=0$ ، $\lim_{x \to +\infty}(2\ln x) = -\infty$

ومن جهة أخرى لدينا : $f'(x) = 3-2(\ln x+1)$ أي : $f'(x) = 3-2\ln x-2$

ومنه $f'(x) = 1-2\ln x$

وعليه : $f'(x)=0$ تعني : $2\ln x = 1$ أي $\ln x^2 = \ln e$ ومنه ،

$x^2 = e$ إذن : $\boxed{x=\sqrt{e}}$

$1 \quad + \quad \sqrt{e} \quad - \quad +\infty$

إذن ، الدالة f متزايدة تماما على $[1,\sqrt{e}]$ ومتناقصة تماما على $[\sqrt{e},+\infty[$

x	$1 \qquad \sqrt{e} \qquad +\infty$
إشارة $f'(x)$	$+ \qquad 0 \qquad -$

المستوى: 3 ث ر.

سير الدرس.

* تشكيل جدول تغيرات الدالة f

x	1		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	4	$\nearrow$	$2\sqrt{e}+1$	$\searrow$	$-\infty$

حيث:

$$f(\sqrt{e}) = 3\sqrt{e} + 1 - 2\sqrt{e}\ln\sqrt{e}$$
$$= 3\sqrt{e} + 1 - 2\sqrt{e}\ln(e)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 3\sqrt{e} + 1 - 2\sqrt{e}\left(\tfrac{1}{2}\right)\ln e$$
$$= 2\sqrt{e} + 1$$

③ تبيين أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من $]1,+\infty[$:

من التمثيل البياني نلاحظ أن المعادلة تقبل حلا وحيدا في المجال $]\sqrt{e},+\infty[$

لأن: $0 \in]-\infty, 2\sqrt{e}+1]$ أو من جدول التغيرات.

التحقق أن $4{,}92 < \alpha < 4{,}96$:

لدينا من جدول التغيرات الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما "رتيبة تماما" على المجال $]4{,}92, 4{,}96[$.

ولدينا، $f(4{,}92) \simeq +0{,}016$ و $f(4{,}96) \simeq -0{,}0059$.

وعليه: $f(4{,}92) \times f(4{,}96) < 0$ وبالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $4{,}92 < \alpha < 4{,}96$.

④ أ) تبيين أن الدالة g دالة أصلية للدالة f من $]1,+\infty[$:

لدينا، $g(x) = 2x^2 + x - x^2\ln x$، $g'(x) = 4x + 1 - \left(2x\ln x + x^2\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

$$g'(x) = 4x + 1 - 2x\ln x - x$$

$$g'(x) = 3x + 1 - 2x\ln x$$

إذن الدالة g دالة أصلية للدالة f على المجال $]1,+\infty[$

$g'(x) = f(x)$

ب) إعطاء تفسير هندسي للعدد S ثم حسابه بدلالة α:

S هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y=0$ و $x=1$ و $x=\alpha$.

حساب S بدلالة α:

لدينا:

$$S = \int_1^{\alpha} f(x)\,dx = [g(x)]_1^{\alpha} = \left[2x^2 + x - x^2\ln x\right]_1^{\alpha}$$

$$S = g(\alpha) - g(1) = 2\alpha^2 + \alpha - \alpha^2\ln\alpha - (2 + 1 - \ln 1)$$

$$S = 2\alpha^2 + \alpha - 3 - \alpha^2\ln\alpha$$

سير الدرس.

ج) تبيين أن $S=\frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)-3$:

لدينا: $f(\alpha)=0$ لأن α حل للمعادلة $f(x)=0$

يعني أن: $3\alpha+1-2\alpha\ln\alpha=0$ أي: $\ln\alpha=\frac{3\alpha+1}{2\alpha}$

وعليه: $S=2\alpha^2+\alpha-3-\alpha^2\ln\alpha$ أي:

أي: $S=2\alpha^2+\alpha-3-\alpha^2\left(\frac{3\alpha+1}{2\alpha}\right)$ أي: $S=2\alpha^2+\alpha-3-\frac{3\alpha^2+\alpha}{2}$

أي: $S=\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\alpha-3$ أي: $S=\frac{1}{2}(\alpha^2+\alpha)-3$

وعليه: $S=\frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)-3$

استنتاج حصرا لـ S:

لدينا: $4{,}95<\alpha<4{,}96$ وعليه: $5{,}95<\alpha+1<5{,}96$

وبالتالي: $29{,}45<\alpha(\alpha+1)<29{,}56$ أي: $14{,}72<\frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)<14{,}78$

أي: $11{,}72<\frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)-3<11{,}78$ إذن: $11{,}72<S<11{,}78$

حل م: BAC2010 ت.1 ②:

لدينا: $f(x)=(\ln(x))^2+2\ln(x)-3$

1) أ) حل في المجال $]0,+\infty[$ المعادلة $f(x)=0$ ... ①

نضع $y=\ln x$ ومنه تصبح المعادلة: $y^2+2y-3=0$ ... ②

حلول المعادلة ② هي: $y_1=1$ ، $y_2=-3$

لدينا: $y_1=1$ أي: $\ln x=1$ ومنه: $e^{\ln x}=e^{1}$ ومنه: $x=e$

$y_2=-3$ أي: $\ln x=-3$ أي: $e^{\ln x}=e^{-3}$ ومنه: $x=e^{-3}$

إذن حلول المعادلة ① هي المجموعة S حيث: $S=\{e,e^{-3}\}$

• التفسير الهندسي: (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما e و e^{-3}.

ب) تحليل $f(x)$ إلى جداء عاملين: $f(x)=(\ln x-1)(\ln x+3)$

ج) حل في المجال $]0,+\infty[$ المتراجحة: $2\ln x+2\geq 0$:

لدينا: $2\ln x+2\geq 0$ ومنه: $\ln x\geq -1$ أي: $x\geq e^{-1}$ ومنه حلول المتراجحة هي: $S=[e^{-1},+\infty[$

2) حساب $f'(x)$: لدينا: $f'(x)=2\cdot\frac{1}{x}\ln x+\frac{2}{x}=\frac{2\ln x+2}{x}$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f:

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط لأن المقام دوما موجب.

ومنه f متزايدة تماما لما $x\in[e^{-1},+\infty[$

ومتناقصة تماما لما $x\in]0,e^{-1}]$.

x	0		e^{-1}		$+\infty$
إشارة $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

x	0		1		$+\infty$
إشارة $f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	

3) تبيين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف:

لدينا: $f''(x)=\frac{(\frac{2}{x})(x)-1(2\ln x+2)}{x^2}=\frac{-2\ln x}{x^2}$

بما أن $f''(x)$ ينعدم عند $x=1$ ويغير من إشارتها بجوار 1 فإن (C_f) يقبل نقطة انعطاف $A(1,f(1))$

أي: $A(1,-3)$

المحتوى المعرفي : **الدالة الأسية .** المستوى : 3 ت ا

الكفاءات المستهدفة : تعريف الدالة الأسية وإستعمال حاسبة لحساب قيمها

سير الدرس .

نشاط 1 ص 158 الجزء 2 .

مثلا : | 0 | 2ndf | ln | =1 |

1) حساب الأعداد التالية ، بواسطة آلة حاسبة علمية حسب البرنامج التالي :

$\exp(2) = 7,389056099$ ، $\exp(1) = 2,718281828$ ، $\exp(0) = 1$

$\exp(3) = 20,08553692$

2) تعيين قيمة مقربة إلى 10^{-3} للعدد $\exp(2)$:

لدينا ، $\exp(2) = 7,389$

3) تبيين أن : $e^{-2} = \frac{1}{e^{2}}$:

a) بالضرب في e^{2} نجد : $e^{-2}\times e^{2} = \frac{e^{2}\times 1}{e^{2}}$ أي : $e^{-2+2} = \frac{e^{2}}{e^{2}}$

ومنه : $1 = 1$ إذن : $e^{-2} = \frac{1}{e^{2}}$

b) $e^{-2}\times e^{2} = e^{-2+2} = e^{0} = 1$ وبالتالي : $e^{-2} = \frac{1}{e^{2}}$

إستنتاج قيمة مقربة إلى 10^{-3} للعدد e^{-2} :

$e^{-2} = 0,135$

الدالة الأسية :

1) تعريف :

الدالة الأسية التي نرمز لها بالرمز "exp" هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ والتي ترفق بكل x من $\mathbb{R}$ العدد الحقيقي الموجب تماما y حيث : $x = \ln(y)$.

2) الرمز e^{x} :

خاصية : من أجل كل عدد صحيح نسبي n ، $\ln(e^{n}) = n$

نرمز للدالة الأسية "exp" بالكتابة المبسطة e^{x} (نقرأ : أسية x).

3) بعض خواص الدالة الأسية :

1) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $e^{x} > 0$

2) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ومن أجل كل y من $]0,+\infty[$ ، $y = e^{x}$ يعني $x = \ln(y)$

3) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $\ln(e^{x}) = x$

4) من أجل كل x من $]0,+\infty[$ ، $e^{\ln(x)} = x$

5) من أجل عددين حقيقيين a و b لدينا :

* $e^{a} = e^{b}$ يعني : $a = b$
* $e^{a} < e^{b}$ يعني : $a < b$

المستوى: 3ع

سير الدرس.

ملاحظة: الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

أمثلة:

1) $e^{3}>0$ ، $e^{-3}>0$.

2) $\ln(1)=0$ يعني: $1=e^{0}$. $\ln(e)=1$ يعني: $e=e^{1}$

3) $e^{\ln(2)}=\ln(e^{2})=2$.

4) $e^{x}=e^{4}$ يعني $x=4$ ، $e^{2}<e^{3}$ يعني: $2<3$.

نشاط تكويني:

حل في $\mathbb{R}$ مايلي:

1) $e^{2x+1}=1$ ، 2) $e^{2x-1}=e^{3x+4}$ 3) $e^{x^2+3x-2}=e^{x+1}$

4) $\ln(x+1)=3$. 5) $e^{2x+1}>e^{x-2}$ 6) $\ln(x+1)\leq 3$

الحل: حل في $\mathbb{R}$ مايلي

1) $e^{2x+1}=1$ يعني: $\ln e^{2x+1}=\ln 1$ أي: $2x+1=0$ ومنه: $x=-\frac{1}{2}$

إذن مجموعة حلول المعادلة هي: $S=\{-\frac{1}{2}\}$

2) $e^{2x-1}=e^{3x+4}$ يعني: $2x-1=3x+4$ أي: $2x-3x=1+4$

ومنه: $x=-5$ إذن مجموعة حلول المعادلة هي: $S=\{-5\}$

3) $e^{x^2+3x-2}=e^{x+1}$ يعني: $x^2+3x-2=x+1$ أي: $x^2+2x-3=0$

ولهذه المعادلة حلان هما 1 و -3 إذن مجموعة حلول المعادلة هي $S=\{-3,1\}$

4) $\ln(x+1)=3$

تكون المعادلة معرفة من أجل $x+1>0$ أي: $x>-1$ ومنه: $D=]-1,+\infty[$

من أجل كل x من D فإن: $\ln(x+1)=3$ تكافئ $x+1=e^{3}$

أي: $x=e^{3}-1$ إذن مجموعة حلول المعادلة هي: $S=\{e^{3}-1\}$

5) $e^{2x+1}>e^{x-2}$ تكافئ: $2x+1>x-2$ أي: $x>-3$

إذن مجموعة حلول المتراجحة هي: $S=]-3,+\infty[$

6) $\ln(x+1)<3$ مجموعة تعريف المتراجحة هي نفسها: $D=]-1,+\infty[$

من أجل كل x من D فإن: $\ln(x+1)<3$ تكافئ: $x+1<e^{3}$

أي: $x<e^{3}-1$ ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي: $S=]-1,e^{3}-1[$

لأن: $S=D\cap D_1=]-1,+\infty[\cap]-1,e^{3}-1[$

تمارين للمراجعة: ت 1، 2 و 3 ص 161 .

عمل منزلي: ت 1، 3، 5 و 10 ص 172 .

المستوى: 3 ث ا.

الكفاءات المستهدفة: - الخواص المميزة، حل معادلات ومتراجحات لدوال أسية.

سير الدرس

نشاط:

1) أ) انقل ثم أكمل الجدول التالي: تعطى القيم مقربة إلى 10^{-2}.

$(e^a)^n$	e^{na}	e^{a-b}	$\frac{e^a}{e^b}$	e^{a+b}	e^ae^b	e^b	e^a	n	b	a
								3	2	0

ب) قارن قيم: e^{a+b} مع قيم e^ae^b وكذا قيم: e^{a-b} مع قيم: $\frac{e^a}{e^b}$

ثم قيم: e^{na} مع قيم: $(e^a)^n$

2) باستعمال المقارنة السابقة حل المعادلة والمتراجحة التاليتين:

أ) $e^{-x+1}e^{3x-2}=2$ و ب) $e^{2x} > e^{x-1}$.

مناقشة النشاط:

1) أ) نقل وإكمال الجدول التالي:

$(e^a)^n$	e^{na}	e^{a-b}	$\frac{e^a}{e^b}$	e^{a+b}	e^ae^b	e^b	e^a	n	b	a
1	1	0,14	0,14	7,39	7,39	7,39	1	3	2	0

ب) المقارنة:

من الجدول السابق نستنتج أن:

1) $e^{a+b}=e^ae^b$ 2) $e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b}$ 3) $(e^a)^n=e^{an}$

2) حل المعادلة والمتراجحة التاليتين:

أ) $e^{-x+1}e^{3x-2}=2$ تعني: $e^{(-x+1)+(3x-2)}=2$ أي: $e^{2x-1}=2$ أي: $\ln e^{2x-1}=\ln 2$

أي: $2x-1=\ln 2$ أي: $x=\frac{\ln 2+1}{2}$

إذن مجموعة حلول المعادلة هي: $S=\left\{\frac{\ln 2+1}{2}\right\}$

ب) $e^{2x}>e^{x-1}$ تعني: $\frac{e^{2x}}{e^{x-1}}>1$ أي: $e^{2x-x+1}>1$

أي: $e^{x+1}>1$ أي: $\ln e^{x+1}>\ln 1$ أي: $x+1>0$ ومنه: $x>-1$

إذن مجموعة حلول المتراجحة هي: $S=]-1,+\infty[$

3) الخواص الجبرية:

من أجل كل عددين ~~حقيقيين~~ a و b ومن أجل ~~كل عدد صحيح نسبي~~ n.

من أجل a و b عددين حقيقيين و n عدد صحيح نسبي.

1) $e^{a+b}=e^ae^b$ 2) $e^{-a}=\frac{1}{e^a}$ و $e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b}$

3) $(e^a)^n=e^{an}$

المستوى 3 ع ت

سير الدرس .

أمثلة :

① $e^{1}e^{-1} = e^{0} = 1$ ، $e^{2}e^{3} = e^{5}$ ، $\dfrac{e^{3x+1}}{e^{2x}} = e^{3x+1-2x} = e^{x+1}$

② $\dfrac{e^{2}}{e^{1}} = e^{2-1} = e$ ، $e^{-2} = \dfrac{1}{e^{2}}$

③ $(e^{2})^{5} = e^{10}$ ، $\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)^{2} = e^{x^2}$

② حل معادلات ومتراجحات :

طريقة :

① المعادلة $e^{U(x)} = e^{V(x)}$ تعني $U(x)=V(x)$ ، المتراجحة $e^{U(x)} > e^{V(x)}$ تعني $U(x) > V(x)$

② لحل المعادلة $\ln[U(x)] = \lambda$ على التوالي المتراجحة $\ln[U(x)] \leqslant \lambda$

نقوم أولا بتعيين D مجموعة الأعداد الحقيقية التي تكون الدالة U معرفة من أجلها مع $U(x)>0$ ثم نحل في المجموعة D المعادلة $U(x) = e^{\lambda}$ على التوالي $U(x) \leqslant e^{\lambda}$.

③ لحل معادلة من الشكل $ae^{2x}+be^{x}+c=0$ أو متراجحة من الشكل : $ae^{2x}+be^{x}+c>0$

* نضع $X = e^{x}$ ثم نحل المعادلة $aX^2+bX+c=0$ أو المتراجحة $aX^2+bX+c>0$

* نعين قيم x إنطلاقا من العلاقة : $X = e^{x}$.

أنشطة تقويمية :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات والمتراجحات التالية :

~~①~~ $\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1} = \dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$ ② $\ln(x+1)+\ln(x-3) = 3\ln 2$

④ $(e^{x}-3)(4+e^{x}) = 0$

③ $2e^{2x}-e^{x}-6=0$ ⑤ $2e^{2x}-10e^{x}+12 \leqslant 0$

⑥ $(e^{x}-1)(e^{x}-3) > 0$

تمارين للمراجعة : ت 1 و 2 ص 163 .

عمل منزلي : ت 14 و 19 ص 172

ت 20 و 21 ص 173 .

المستوى : 3 ت إ.

سير الدرس

حل الأنشطة التمهيدية :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات والمتراجحات التالية :

1) $(e^x-2)(4+e^x)=0$ تعني : $4+e^x=0$ أو $e^x-2=0$

* $4+e^x=0$ أي : $e^x=-4$ (مرفوضة) لأن : $e^x>0$ لاتقبل حلول لأن

* $e^x-2=0$ أي : $e^x=2$ أي : $x=\ln 2$

إذن مجموعة حلول المعادلة هي : $S=\{\ln 2\}$

2) $2e^{2x}-e^x-6=0$ ... (1)

بوضع $X=e^x$ حيث : $X>0$ فإن : $2X^2-X-6=0$ ... (2)

للمعادلة (2) حلين : $X_1=2$ ، $X_2=-\frac{3}{2}$ (مرفوض) لأن $X_2<0$.

* $X_1=e^x=3$ ومنه $x=\ln 3$

إذن مجموعة حلول المعادلة هي $S=\{\ln 3\}$

3) $\ln(x+1)+\ln(x-3)=3\ln 2$ تعني : $\ln(x+1)(x-3)=\ln 8$

أي : $e^{\ln(x+1)(x-3)}=e^{\ln 8}$ أي : $(x+1)(x-3)=8$

أي : $x^2-4x-5=0$ للمعادلة حلين : $x_1=-1$ و $x_2=5$

إذن مجموعة حلول المعادلة هي : $S=\{-1,5\}$

4) $(e^x-1)(e^x-3)>0$

ندرس إشارة $(e^x-1)(e^x-3)$ ... (1)

$e^x-3=0$ أي : $e^x=3$ أي : $x=\ln 3$

$e^x-1=0$ أي : $e^x=1$ أي : $x=0$.

x	$-\infty$	0		$\ln 3$	$+\infty$
إشارة (1)	$+$	0	$-$	0	$+$

إذن مجموعة حلول المتراجحة هي : $S=]-\infty,0[\cup]\ln 3,+\infty[$

5) $2e^{2x}-10e^x+12\leq 0$

بوضع : $X=e^x$ نجد : $2X^2-10X+12\leq 0$

المعادلة : $2X^2-10X+12=0$ حلان هما : 2 و 3

وبالتالي فإشارة $2X^2-10X+12$ هي كالتالي :

X	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$2X^2-10X+12$	$+$	0	$-$	0	$+$

حلول المتراجحة $2X^2-10X+12\leq 0$ هي الأعداد الحقيقية X بحيث :

$2\leq X\leq 3$ وهذا يعني ،

* $2\leq e^x\leq 3$ أي : $\ln 2\leq x\leq \ln 3$

الكفاءات المستهدفة : المشتقة ، التمثيل البياني — المستوى : 3 ت إ.

السلوك التقاربي للدالة الأسية.

سير الدرس.

نشاط 1 ص 158 ج 2

2) يمكن القول عن النقطتين $M_1(x,y)$ و $M_1'(y,x)$:

نقول عن النقطتين أنهما متناظرتين بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

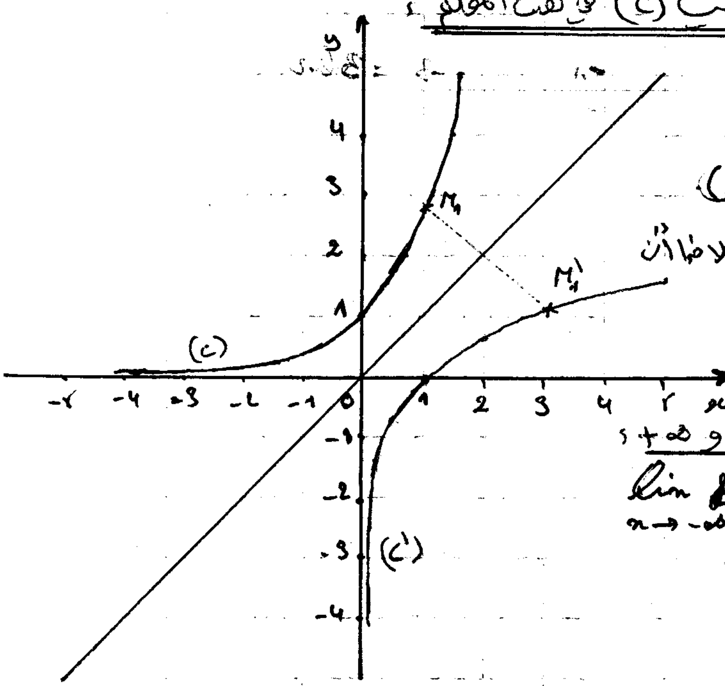
ب) تحديد أن النقطة $M(a,b)$ تنتمي إلى المنحنى (C) ، (ب ج د)

بما أن : $e^{b}=a$ يعني $b=\ln a$ فإن القول أن النقطة $M'(b,a)$ تنتمي إلى المنحنى (C) يعني أن النقطة $M(a,b)$ تنتمي إلى (C') .

ج) الاستنتاج بالنسبة للمنحنيين (C) و (C') :

بما أن $M(x,y)$ و $M'(y,x)$ متناظرتين بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y=x$ فإن المنحنيين (C) و (C') متناظرين بالنسبة إلى هذا المستقيم .

د) رسم المنحنى (C') ثم المنحنى (C) في نفس المعلم :



3) وضع التخمينات :

أ) إشارة $exp(x)$:

نلاحظ أن الدالة e^{x} موجبة تماما

ب) اتجاه تغير الدالة e^{x} على $\mathbb{R}$ ، نلاحظ أن الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ لأن : $e^{x}>0$.

ج) نهايات الدالة "exp" عند $-\infty$ و $+\infty$:

نلاحظ أن : $\lim_{x\to-\infty} e^{x} = \boxed{0}$

$\lim_{x\to+\infty} e^{x} = \boxed{+\infty}$

* دراسة الدالة الأسية :

1) النهايات :

خواص :

1) $\lim_{x\to-\infty} e^{x} = \boxed{0}$ 2) $\lim_{x\to+\infty} e^{x} = \boxed{+\infty}$

3) $\lim_{x\to-\infty} x^{n} e^{x} = \boxed{0}$ 4) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x^{n}} = \boxed{+\infty}$

المستوى: 3 ت إ.

سير الدرس.

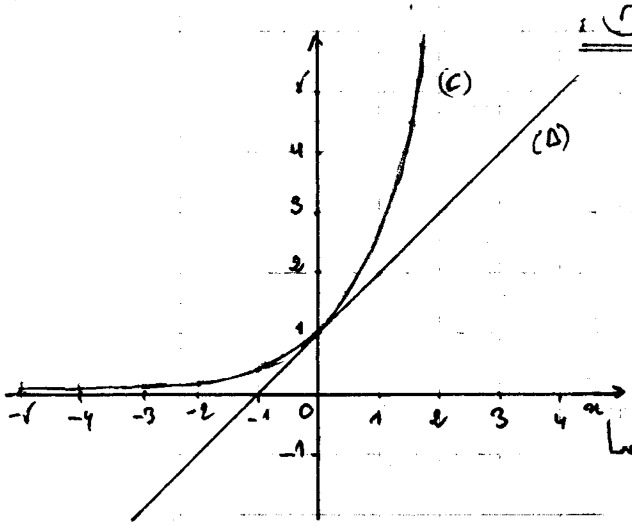
④ مشتقة الدالة الأسية:

خاصية: الدالة الأسية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$

نتائج:

① الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^{x}>0$.
② الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto e^{x}$ على $\mathbb{R}$ هي الدالة $x \mapsto e^{x}$ نفسها.

③ التمثيل البياني و جدول التغيرات:



x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$		
e^{x}	$-\infty$	1	e	$+\infty$

المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا
$(\Delta): y = x+1$

نشاط تقويمي:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = xe^{x}-x+1$
نرمز بـ (C_f) لمنحنيها البياني في معلم متعامد ومتجانس.
① أدرس نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفها.
② أحسب $f'(x)$ ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة f.
③ شكل جدول تغيرات الدالة f. ④ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+1)]$ ماذا تستنتج؟
⑤ أنشئ منحنى الدالة f.

الحل:

① نهايات f من أطراف مجموعة التعريف:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}-x+1 = \boxed{+\infty}$ لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{x}-x+1$ $(+\infty-\infty)$ ح ع ت، إزالة ح ع ت: $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{x}-x = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{x}-1\right)+1 = \boxed{+\infty}$

المستوى: 3ع إ.

سير الدرس.

② حساب $f'(x)$ و استنتج اتجاه تغير f

لدينا: $f'(x) = 1\times e^x + e^x x - 1$ أي: $f'(x) = e^x(x+1) - 1$

لدينا، $f'(0) = e^0(0+1) - 1$ ومنه: $f'(0) = 0$

إشارة $f'(x)$، بما أن $f'(0)=0$ فإن،

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty,0]$.

③ جدول تغيرات الدالة f،

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

④ حساب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+1)]$ والاستنتاج:

لدينا،

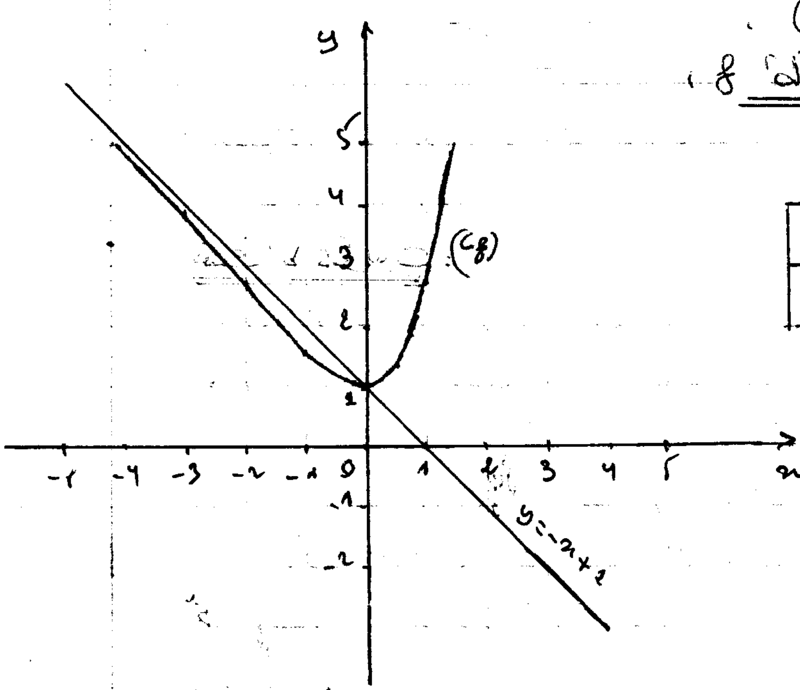
$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+1)] = \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y=-x+1$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) في جوار $(-\infty)$.

⑤ إنشاء منحنى الدالة f،

جدول قيم مساعد،

x	-3	-2	-1	$0{,}5$	1
y	$3{,}85$	$2{,}72$	$1{,}63$	$1{,}32$	$2{,}71$



عمل منزلي:

ت 32، 33 و 34 ص 173.

الكفاءات المستهدفة: - حساب نهايات جداءات أو حواصل قسمة تدخل فيها x^n ، e^x
- دراسة دوال من الشكل $\exp ou$

المستوى: 3 ث ا.

سير الدرس.

تمرين 1:

لتكن الدالة $u(x) = -3x+1$ المعرفة على $\mathbb{R}$

ونعرف الدالة f على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^{u(x)}$

1) أ) أحسب: $\lim_{x\to-\infty} u(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} u(x)$

ب) إستنتج كل من:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2) نذكر أن f' مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f'(x) = u'(x)\, e^{u(x)}$

أ) أحسب $f'(x)$ وأدرس إشارتها.

ب) إستنتج إتجاه تغير f ثم شكل جدول التغيرات.

3) قارن بين إتجاهي تغيرات الدالتين f و u.

مناقشة التمرين:

1) أ) حساب كل من:

$\lim_{x\to+\infty} u(x) = -\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} u(x) = +\infty$

ب) إستنتاج كل من:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{0}$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

2) أ) حساب $f'(x)$ ودراسة إشارتها:

لدينا: $f'(x) = u'(x)\, e^{u(x)}$ أي: $f'(x) = -3 e^{-3x+1}$

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة العدد -3 لأن $e^{-3x+1} > 0$

إذن $f'(x)$ سالبة تماما على $\mathbb{R}$.

ب) إستنتاج إتجاه تغير f:

الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

+ جدول التغيرات:

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow 0$

ج) المقارنة بين إتجاهي تغيرات f و u:

الدالتين f و u لهما نفس الإتجاه لأن u دالة تآلفية متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

سير الدرس .

* دراسة الدالة $\exp \circ u$:

① النهايات :

> لدراسة نهاية دالة $\exp \circ u$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة .

أمثلة :

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{2}{x}} - 1 = \boxed{0}$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x+1} = \boxed{+\infty}$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x^2+3x-1} = \boxed{+\infty}$

4) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} e^{2\ln(x+1)} = \boxed{0}$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{x^3-2x+1}{x^2+1}} = \boxed{+\infty}$

② إتجاه التغيرات :

> خاصية ، إذا كانت u دالة معرفة على مجال I فإن للدالتين u و $\exp \circ u$ نفس إتجاه التغيرات على المجال I

مثال :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = e^{x^2}$.

نلاحظ أن $f = \exp \circ u$ ، حيث $u(x) = x^2$

* بما أن الدالة u متناقصة تماما على المجال $]-\infty, 0]$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty, 0]$.

* بما أن الدالة u متزايدة تماما على المجال $[0, +\infty[$ فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0, +\infty[$

③ المشتقة ودوال أصلية :

> خاصية ، إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I فإن :
>
> ⓐ الدالة $\exp \circ u$ قابلة للإشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I
>
> $$(\exp \circ u)'(x) = u'(x)\, e^{u(x)}$$
>
> ⓑ الدالة $x \longmapsto e^{u(x)}$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto u'(x) e^{u(x)}$ على I .

أ) أمثلة :

المستوى: 3 ت ر.

سير الدرس

أمثلة: ① المشتقة:

$f(x) = e^{3x^2-2x+1}$ ، 1) $f'(x) = (6x-2)e^{3x^2-2x+1}$

$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ ، 2) $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ ، 3) $f(x) = e^{\sqrt{2x+1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} e^{\sqrt{2x+1}}$

$f(x) = e^{3-\ln x}$ ، 4) $f'(x) = -\frac{1}{x} e^{3-\ln x}$ ، 5) $f(x) = \ln(e^{3x}+1)$ ، $f'(x) = \frac{3e^{3x}}{e^{3x}+1}$

6) $f(x) = e^{\frac{x^2+1}{x}}$ ، $f'(x) = \frac{2x(x)-(x^2+1)}{x^2} e^{\frac{x^2+1}{x}} = \frac{x^2-1}{x^2} e^{\frac{x^2+1}{x}}$

② الدوال الأصلية:

① الدالة $x \mapsto e^{3x^2-2x+1}$ هي دالة أصلية للدالة: $x \mapsto (6x-2)e^{3x^2-2x+1}$

② " $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$

③ " $x \mapsto \frac{3e^{3x}}{e^{3x}+1}$ هي " " " $x \mapsto \ln(e^{3x}+1)$:

تمارين للمراجعة: 1، 2، 3 ص 167.

أعمال موجهة: ص 168، ص 169.

استعد للبكالوريا: ص 170 و 171.

عمل منزلي: BAC2012 م 2 ع 2.

ت 5، 6 و 62 ص 172

ت 68 ص 177 ، ت 72 ص 178 . الموضوع: مشكل حول دراسة الدالة الأسية.

نشاط تقويمي: BAC2012 .

لدينا: $f(x) = (x+1)e^{1-x}$

① تبيين أن معادلة المماس (D) عند 1 هي: $y = -x+3$:

لدينا: $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ أي: $y = f'(1)(x-1)+f(1)$

لدينا: $f'(x) = 1 \cdot e^{1-x} + (x+1)(-1)e^{1-x}$ أي: $f'(x) = (1-x-1)e^{1-x}$ أي $f'(x) = -xe^{1-x}$

وبالتالي: $f'(1) = -1e^{1-1} = -1$ ، $f(1) = (1+1)e^{1-1} = 2$

وعليه: $y = -1(x-1)+2$ ومنه: $(D): y = -x+3$

② 1) دراسة اتجاه تغير الدالة g:

لدينا: $g(x) = -xe^{1-x}+1$

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty, +\infty[$ ودالتها المشتقة هي:

$g'(x) = (-1)\times e^{1-x} + (-x)(-1)e^{1-x} = (x-1)e^{1-x}$

ومنه: $g'(x) = (x-1)e^{1-x}$

سير الدرس :

x	-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

إشارة g' من إشارة $(x-1)$ لأن: $e^{1-x}>0$

لما $x\in]-1;1]$ الدالة g متناقصة تماما

لما $x\in[1;+\infty[$ الدالة g متزايدة تماما .

ب) حساب $g(1)$ ثم استنتاج إشارة $g(x)$ على $[-1;+\infty[$:

$g(1) = (\cancel{1}\,1)e^{1-1} + 1 = 0$

x	-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\searrow$		0		$\nearrow$

وعليه إشارة $g(x)$ موجبة من أجل كل x من $[-1,+\infty[$ أي أن: $g(x)\geq 0 \Leftarrow$

3) أ) الملاحظة أن $h(x)=f(x)+x-3$

ثم استنتاج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$;

لدينا ، $h(x)=(x+1)e^{1-x}+x-3$ أي : $h(x)=f(x)+x-3$

من جدول تغيرات الدالة f لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

ونعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-3)=+\infty$ إذن ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$

ب) تبيين أن $h'(x)=g(x)$ ثم استنتاج جدول تغيرات الدالة h ،

لدينا ؛ $h'(x)=(1)e^{1-x}+(x+1)(-1)e^{1-x}+1$ أي $h'(x)=(1-x-1)e^{1-x}+1$

ومنه ؛ $h'(x)=g(x)$.

إشارة $h'(x)$ من إشارة $g(x)$

بما أن $g(x)\geq 0$ فإن $h'(x)\geq 0$ وعليه الدالة h متزايدة تماما على $[-1,+\infty[$

جدول التغيرات :

x	-1	1	$+\infty$
$h(x)$	-4	0	$+\infty$

جـ) التحقق أن $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $[-1,+\infty[$ وتعيينه

نلاحظ من جدول التغيرات أن

الدالة h مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[-1,+\infty[$

ولدينا $h(1)=0$ و (Δ) مماس لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 .

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا

على $[-1,+\infty[$ عند $x=1$.

د) تحديد إشارة $h(x)$ ثم استنتاج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

بما أن $h(1)=0$ فإن :

x	-1		1		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	

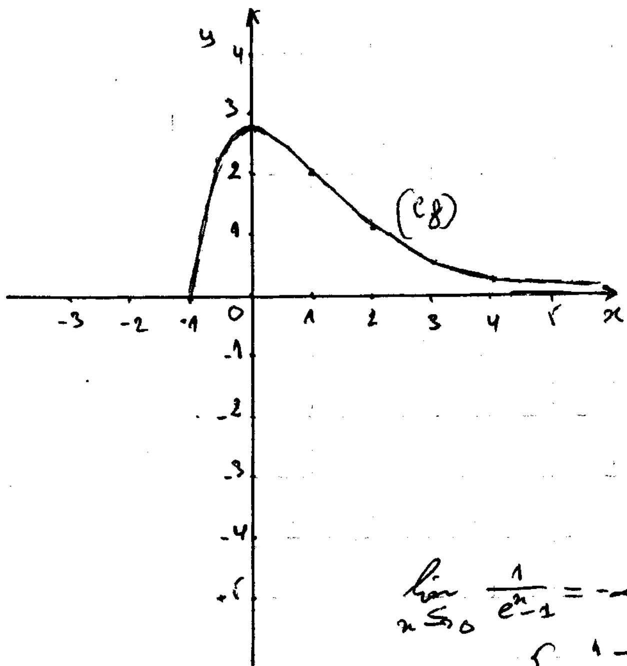
الاستنتاج، لدينا : $f(x)-y=h(x)$

إذن نستنتج من جدول إشارة $h(x)$ أن ؛

(C_f) يقع فوق (Δ) على المجال $[1,+\infty[$ و (C_f) يقع تحت (Δ) على المجال $[-1,1]$.

المستوى: 3ت ا

سير الدرس .



ج) رسم المماس (Δ) والمنحنى (C_f) :

جدول مساعد .

x	0,1	2	3	4
y	2,24	1,10	0,14	0,24

حل BAC 2013 م 2

لدينا: f معرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي :
$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}$$

1) أ) حساب كل من :

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \boxed{-\infty}$ لأن : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{e^x - 1} = -\infty$
$\begin{cases} 1 \to 1 \\ e^x - 1 \to 0^- \end{cases}$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \boxed{+\infty}$ لأن : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$ و $\begin{cases} 1 \to 1 \\ e^x - 1 \to 0^+ \end{cases}$

تفسير النتيجة هندسيا :

الدالة f تقبل مستقيم مقارب $x = 0$ للمنحنى (C_f) يوازي محور التراتيب .

ب) حساب كل من ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$ لأن: $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 1 = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$ لأن : $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x - 1 = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x - 1} = -1$

2- أ) تبيين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب مائل لـ (C_f) ؛

لدينا بما أن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0$ فإن $y = 2x - 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) التحقق أن : $f(x) = 2x - 2 + \frac{e^x}{e^x - 1}$:

لدينا :
$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1} = 2x - 1 + \frac{e^x - e^x + 1}{e^x - 1}$$
$$= 2x - 1 + \frac{e^x - (e^x - 1)}{e^x - 1} = 2x - 1 - \frac{e^x - 1}{e^x - 1} + \frac{e^x}{e^x - 1} = 2x - 2 + \frac{e^x}{e^x - 1}$$

* استنتج أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y = 2x - 2$ مقارب للمنحنى (C_f) ،

لدينا : بما أن : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 0$ فإن : $y = 2x - 2$
مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

حل الدرس.

③ تبيين أن $f'(x)=\dfrac{2e^{2x}-5e^{x}+2}{(e^{x}-1)^{2}}$:

لدينا، $f'(x)=2+\dfrac{-e^{x}\times 1}{(e^{x}-1)^{2}}=\dfrac{2\times(e^{x}-1)^{2}-e^{x}}{(e^{x}-1)^{2}}=\dfrac{2e^{2x}-4e^{x}+2-e^{x}}{(e^{x}-1)^{2}}$

ومنه $f'(x)=\dfrac{2e^{2x}-5e^{x}+2}{(e^{x}-1)^{2}}$

باستنتاج اتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط لأن المقام موجب

لدينا: $2e^{2x}-5e^{x}+2=0$ ، نضع $X=e^{x}$ نجد: $2X^{2}-5X+2=0$ --- ①

للمعادلة ① حلين هما، $X_1=2$ و $X_2=\frac{1}{2}$

لدينا، $X_1=e^{x_1}$ أي $e^{x_1}=2$ ، أي $x_1=\ln 2$

$X_2=e^{x_2}$ أي $e^{x_2}=\frac{1}{2}$ ، أي $x_2=\ln\frac{1}{2}$

إذن للمعادلة حلين هما: $x_1=\ln 2$ و $x_2=\ln\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\ln\frac{1}{2}$		0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

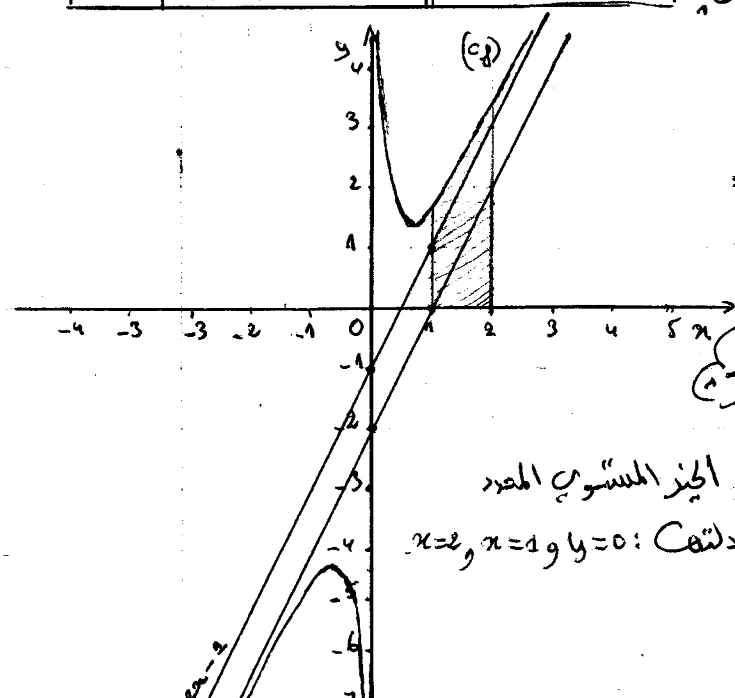
لما $x\in]-\infty,\ln\frac{1}{2}]\cup[\ln 2,+\infty[$ الدالة f متزايدة تماما

ولما $x\in[\ln\frac{1}{2},0[\cup]0,\ln 2]$ متناقصة تماما

تشكيل جدول التغيرات،

x	$-\infty$		$\ln\frac{1}{2}$		0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-4{,}38$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$1{,}38$	$\nearrow$	$+\infty$

④ تمثيل كلا من (Δ) و (Δ') و (C_f)،



⑤ حساب العدد $\int_1^2 f(x)\,dx$ ؛

$$\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2 2x-2+\frac{e^{x}}{e^{x}-1}$$

$$=\left[x^{2}-2x+\ln|e^{x}-1|\right]_1^2$$

$$=\left(2^{2}-(2\times 2)+\ln(e^{2}-1)\right)-\left(1^{2}-(2\times 1)+\ln(e-1)\right)$$

$$=1{,}85-(-0{,}45)$$

ومنه: $\int_1^2 f(x)\,dx=2{,}30\,(u.s)$

* التفسير الهندسي،

العدد $\int_1^2 f(x)\,dx$ هو مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلتها: $y=0$ و $x=1$ و $x=2$

المستوى: 3 ث إ.

المحور: الإحتمالات.

المحتوى المعرفي: قانون إحتمال مرافق بتجربة عشوائية.

الكفاءة المستهدفة: - تعيين قانون إحتمال مرفق بتجربة عشوائية لها عدد منته من الإمكانيات.

سير الدرس.

نشاط:

قمت برمي زهر نرد مزيف عدة مرات وهذه التجربة سمحت لنا باقتراح قانون الإحتمال التالي:

الوجه x_i	1	2	3	4	5	6
الإحتمال p_i	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

1) تأكد أن: $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$.

2) ماهو إحتمال الحصول على رقم فردي.

3) ماهو إحتمال الحصول على وجه رقمه أكبر أو يساوي 4.

مناقشة النشاط:

1) التحقق أن $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$:

لدينا: $0 \leq p_i \leq 1$،

$$\sum_{i=1}^{6} p_i = p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6$$

$$= \frac{1}{12}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4} = \frac{1}{12}+\frac{3}{12}+\frac{2}{12}+\frac{1}{12}+\frac{2}{12}+\frac{3}{12}$$

أي: $\sum_{i=1}^{6} p_i = \frac{12}{12}$ ومنه: $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$

2) إحتمال الحصول على رقم فردي:

لتكن A حادثة الحصول على رقم فردي. $A = \{1, 3, 5\}$

إذن: $P(A) = \frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$ ومنه: $P(A) = \frac{5}{12}$

3) إحتمال الحصول على رقم ≥ 4:

ولتكن B حادثة الحصول على رقم أكبر أو يساوي 4. $B = \{4, 5, 6\}$.

إذن: $P(B) = p_4+p_5+p_6$ أي: $P(B) = \frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$ ومنه: $P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

قانون الإحتمال:

لتكن Ω مجموعة ذات n إمكانية لتجربة عشوائية $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$،
يعرف قانون إحتمال P على Ω إذا أرفقنا كل قيمة x_i بعدد موجب p_i
حيث مجموع الأعداد p_i يساوي 1 مع: $0 \leq p_i \leq 1$ و $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

مثال:

عند رمي قطعة نقدية فإن قانون الإحتمال هو:

x_i	F	P
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

الأستاذ: بن محمد سمير

سير الدرس:

قانون متساوي الاحتمال واحتمال إمكانية:

تعريف:

لتكن Ω مجموعة إمكانيات تجربة عشوائية، إذا كانت لعناصر Ω نفس احتمال الوقوع، نقول إن قانون الاحتمال متساوي التوزيع أو الاحتمال.
أي أنه إذا كان: n عدد عناصر Ω، فإن احتمال وقوع كل عنصر x_i من Ω هو: $P_i = \frac{1}{n}$

مثال:

عند رمي زهر نرد غير مزيف، فإن احتمال الحصول على أحد الأوجه هو $\frac{1}{6}$.

نتيجة:

$\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ مجموعة إمكانيات تجربة عشوائية معرفا عليها قانون احتمال: $P: x_i \longmapsto p_i$ متساوي الاحتمال إذا: $A = \{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m\}$: $P(A) = \frac{a}{n}$ حيث: a عدد عناصر A و n عدد عناصر Ω. وتسمى هذه النتيجة بقانون لابلاس.

مثال:

عند رمي زهرة نرد، A حادثة ظهور رقم مضاعف للعدد 2 حيث: $A = \{2, 4, 6\}$
إذن: $P(A) = \frac{3}{6}$ ومنه $P(A) = \frac{1}{2}$.

خواص:

1. احتمال الحادثة A محصور بين 0 و 1 أي $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. احتمال الحادثة المستحيلة منعدم: $P(\emptyset) = 0$.
3. احتمال الحادثة الأكيدة يساوي 1: $P(\Omega) = 1$.
4. إذا كانت A و B حادثتين من نفس المجموعة Ω فإن:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
5. إذا كانت الحادثتين A و B غير متلائمتين فإن $(A \cap B = \emptyset)$ إذن:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$
6. A حادثة من المجموعة Ω و $\bar{A}$ الحادثة المعاكسة لها، في هذه الحالة يكون: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

المستوى: 3 ث إ.

سير الدرس

نشاط تقويمي:

تمرين (5):

كيس به 2 كريات حمراء، و 1 بيضاء، و 3 سوداء

نسحب منه دفعة واحدة كرتين بصفة عشوائية.

1) ما احتمال سحب 1 حمراء و 1 سوداء؟

2) " " كرتين حمراوين؟

3) " " " بيضاوين؟

الحل:

نرمز للأسود بـ N، والأبيض بـ B، والأحمر بـ R.

لدينا: مجموعة الإمكانيات Ω هي:

$$\Omega = \{(N_1,N_2),(N_1,N_3),(N_2,N_3),(N_2,R_1),(N_1,R_2),(N_1,R_1),(N_2,R_2),$$
$$(N_3,R_1),(N_3,R_2),(N_1,B),(N_2,B),(N_3,B),(R_1,R_2),(R_1,B),(R_2,B)\}$$

1) احتمال سحب 1 حمراء و 1 سوداء:

نرمز بـ A إلى هذه الحادثة إذن $P(A)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$، ومنه، $P(A)=\frac{2}{5}$

حيث: $A=\{(N_1,R_1),(N_1,R_2),(N_2,R_1),(N_2,R_2),(N_3,R_1),(N_3,R_2)\}$

2) احتمال سحب كرتين حمراوين:

نرمز بـ B إلى هذه الحادثة حيث: $B=\{(R_1,R_2)\}$.

إذن: $P(B)=\frac{1}{15}$

3) احتمال سحب كرتين بيضاوين:

نرمز بـ C إلى هذه الحادثة حيث: $C=\{\emptyset\}$.

إذن: $P(C)=0$.

تمرين بيتي:

(نرمي زهر نرد غير مزيف)

نرمي في الهواء قطعة نقدية ثلاث مرات نرمز للوجه بـ F والظاهر بـ P.

1) عين مجموعة إمكانيات هذه التجربة.

2) نسمي A حادثة ظهور الوجه مرتين عين A.

3) ما هو احتمال ظهور الوجه مرتين.

4) نسمي B حادثة ظهور الظاهر 3 مرات متتالية عين B.

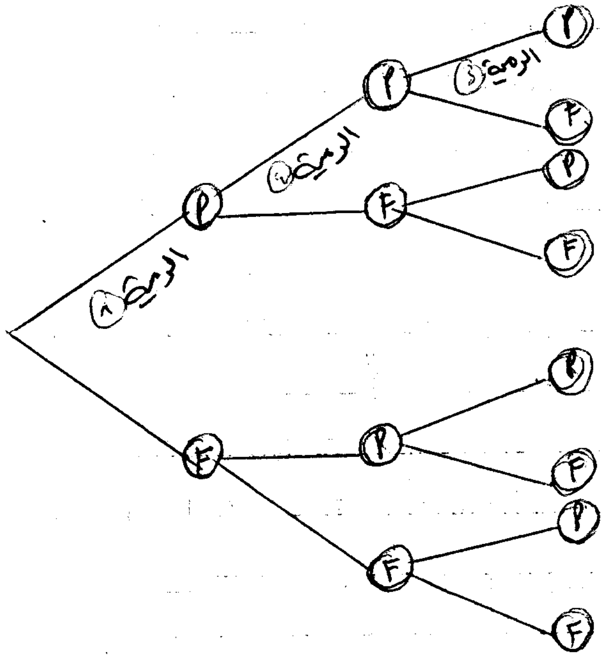
5) ما هو احتمال ظهور الظاهر 3 مرات متتالية.

تمرين الدرس.

الحل:

١) تعيين مجموعة إمكانيات هذه التجربة:

نعين كل الإمكانيات باستعمال الشجرة التالية:



$\Omega = \{(P,P,P),(P,P,F),(P,F,P),(P,F,F),(F,P,P),(F,P,F),(F,F,P),(F,F,F)\}$

٢) تعيين الحادثة A:

$A = \{(P,F,F),(F,P,F),(F,F,P)\}$

٣) احتمال ظهور الوجه F مرتين:

لدينا: $P(A) = \frac{a}{n}$

إذن: $P(A) = \frac{3}{8}$

٤) تعيين الحادثة B:

$B = \{(P,P,P)\}$

٥) احتمال ظهور الكتابة ٣ مرات:

$P(B) = \frac{1}{8}$

حل منزلي:

كيس به ٢ كريات حمراء، ١ بيضاء، ١ سوداء. نسحب منه كرتين على التوالي دون إرجاع و~~لتكن A هذه الحادثة~~. (بالإمكان دعم التمرين)

١) أحسب احتمال الحصول على كرة حمراء بالضبط.

٢) 〃 〃 〃 〃 〃 بيضاء وأخرى سوداء.

٣) 〃 〃 〃 〃 كرتين من نفس اللون.

الحل:

١) احتمال الحصول على كرة حمراء بالضبط:

لدينا: $\Omega = \{(R_1,R_2),(R_1,B),(R_1,N),(R_2,R_1),(R_2,B),(R_2,N),(B,R_1),(B,R_2),(B,N),(N,R_1),(N,R_2),(N,B)\}$

لدينا: $n = 12$

$P(A) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

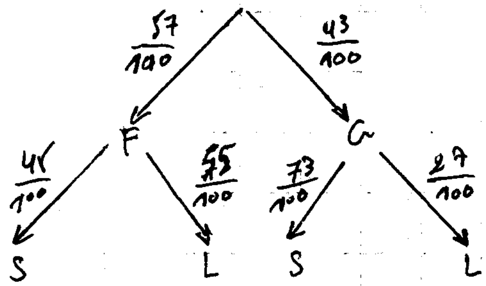
المحور المعرفي: الاحتمال الشرطي. المستوى: 3 ث ا.

الكفاءة المستهدفة: حساب احتمال حادثة علماً بحدوث حادثة أخرى. الشجرة الموازنة

سير الدرس.

نشاط 2 ص 232:

1) إكمال الشجرة التالية:



2) نسبة التلاميذ الذين لهم ملمح علمي:

نستخدم قانون النسبة المئوية لنسبة مئوية أخرى $\frac{x\times y}{100}\%$

إذن نسبة التلاميذ لديهم ملمح علمي هو:

نسبة الذكور ذو م ع + نسبة الإناث ذو ملمح علمي $= \frac{57\times 45}{100} + \frac{73\times 43}{100}$

$= \frac{2565+3139}{100} = 57{,}04\%$

3) a) احتمال أن يكون بنتاً: نرمز له بـ: $P(F)$

$P(F)=\frac{57}{100}$ ومنه: $P(F)=0{,}57$

b) احتمال أن يكون ولداً وذا ملمح علمي: نرمز له بـ: $P(G\cap S)$

إذن: $P(G\cap S)=\frac{43}{100}\times\frac{73}{100}=0{,}3139$ ومنه: $P(G\cap S)=0{,}3139$

4) احتمال أن يكون بنتاً علماً أن التلميذ أدبي: نرمز له بـ: $P_L(F)$

إذن: $P_L(F)=\frac{P(F\cap L)}{P(L)}=\frac{\left(\frac{57}{100}\times\frac{55}{100}\right)}{\left(\frac{57}{100}\times\frac{55}{100}\right)+\left(\frac{43}{100}\times\frac{27}{100}\right)}$ ومنه: $P_L(F)=0{,}72$

الاحتمالات الشرطية:

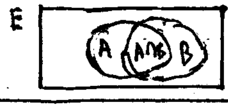
تعريف:

نعتبر ~~A و B~~ تجربة عشوائية مجموعة مخارجها E وقانون احتمال لها P

A و B حادثتان من E حيث ~~احتمال~~ A $P(A)\neq 0$.

يرمز لاحتمال الحادثة B علماً أن A محققة بالرمز $P_A(B)$ أو يعرف $P(B/A)$

ويعرف بالنسبة $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$



ملاحظة:

عند تساوي الاحتمال لدينا: $P_A(B)=\frac{A\cap B}{A}$ = عدد عناصر المجموعة / 〃 〃 〃

ينتج من التعريف:

$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$ ، $P(A\cap B)=P(B)\times P_B(A)$

مثال:

- يوجد كيس به 5 كريات مرقمة من 1 إلى 5. نسحب عشوائياً كرة واحدة من الكيس.

يتبع الدرس .

نعتبر الحادثتين A " الحصول على رقم فردي "، B " الحصول على رقم أولي ".
أحسب إحتمال تحقق الحادثة B علما أن A قد تحققت .

الحل : إحتمال تحقق الحادثة B .

لدينا : $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ ، $A = \{1,3,5\}$ ، $B = \{2,3,5\}$

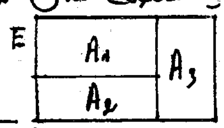
$A\cap B = \{3,5\}$

ولدينا ، $P_A(B) = \dfrac{\text{ع ع ج } A\cap B}{\text{ع ع ج } A}$ أي : $P_A(B) = \dfrac{2}{3}$

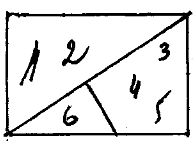
ب- تجزئة المجموعة E :

تعريف :

نقول أن الحوادث A_1 ، A_2 ، ... ، A_n تشكل تجزئة للمجموعة E إذا تحقق :
من أجل كل i و j من $[1;n]$ ، $i\neq j$ يكون : $A_i\cap A_j=\emptyset$ (أي منفصلة مثنى مثنى) .
و $A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n = E$ ومن أجل كل i يكون $A_i\neq\emptyset$.



مثال :



لدينا : $E = \{1,2,3,4,5,6\}$
وليكن : $A_1 = \{1,2\}$ ، $A_2 = \{3,4,5\}$ ، $A_3 = \{6\}$
إذن A_1 ، A_2 ، A_3 تشكل تجزئة للمجموعة E لأن $A_1\cap A_2\cap A_3=\emptyset$ و $A_1\cup A_2\cup A_3 = E$
وكل من A_1 ، A_2 ، A_3 غير خالية .

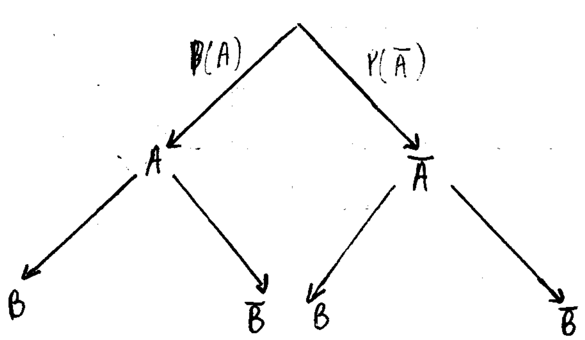
3) دستور الاحتمالات الكلية :

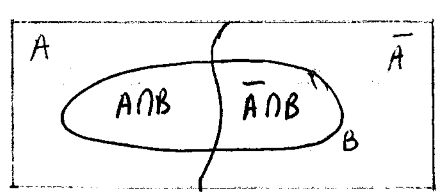
تعريف :

A حادثة حيث ، $P(A)\neq 0$ ، $\bar{A}$ حادثتها العكسية . A و $\bar{A}$ تشكل تجزئة لـ E
B حادثة من E . إذن الحادثتان $A\cap B$ و $\bar{A}\cap B$ غير متلائمتين (منفصلتين)
و $B = (A\cap B)\cup(\bar{A}\cap B)$ وبالتالي :

$$P(B) = P(A\cap B) + P(\bar{A}\cap B) = P(A)\times P_A(B) + P(\bar{A})\times P_{\bar{A}}(B)$$

بصفة عامة :





حل منزلي : (BAC 2012) ص(1) و (BAC 2005)
تمارين تدريبية : ت ٨ ص (233) .

المستوى: 3 ت إ.

سير الدرس.

نشاط تقويمي:

تمرين: ①

نعتبر ما يلي: - إحتمال أن ينجح تلميذ في البكالوريا هو $\frac{3}{4}$

- إحتمال أن التلميذ الذي نجح في البكالوريا يجد منصب شغل هو: $\frac{1}{3}$

- إحتمال أن التلميذ الذي لم ينجح " " " " " هو: $\frac{1}{2}$

ونعتبر الحادثتين A و B حيث:

A: التلميذ نجح في البكالوريا و يحصل على منصب شغل.

B: التلميذ لم ينجح في " و لم يحصل " " ".

① أحسب إحتمال كل من الحادثتين A و B.

② بين أن إحتمال حصول تلميذ على منصب شغل هو $\frac{7}{24}$.

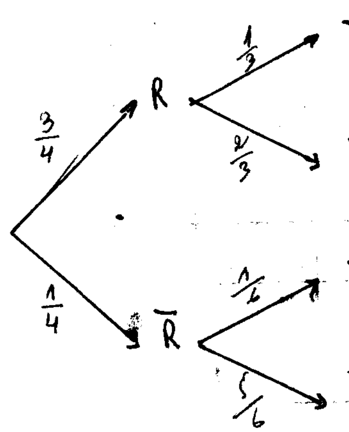
الحل:

نرمز إلى كل من: R: التلميذ الناجح في البكالوريا. $\overline{R}$: التلميذ الغير ناجح في البكالوريا.

T: " يحصل على منصب شغل $\overline{T}$: " لم يحصل على منصب شغل.

① حساب إحتمال كل من الحادثتين A و B:

نترجم الوضعية بشجرة متوازنة:



إذن، $P(A) = P(R)\cap P_R(T) = \frac{3}{4}\times\frac{1}{3}$

ومنه، $P(A)=\frac{1}{4}$

$P(B) = P(\overline{R})\cap P_{\overline{R}}(\overline{T}) = \frac{1}{4}\times\frac{5}{6}$

ومنه، $P(B)=\frac{5}{24}$

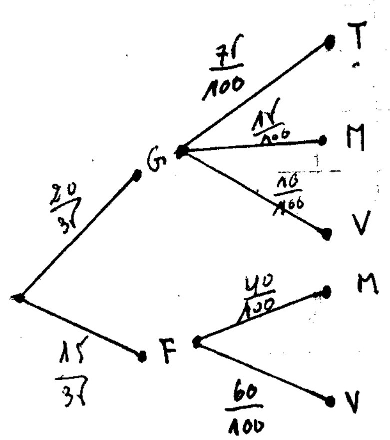
② تبيين أن إحتمال حصول تلميذ على منصب شغل هو $\frac{7}{24}$:

$$P(R\cap T)+P(\overline{R}\cap T) = \left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{24}$$

ومنه: $P(R\cap T)+P(\overline{R}\cap T)=\frac{7}{24}$

تمرين ②: BAC 2012 م (1) ت (3).



$P(G\cap T)=\frac{3}{14}$

$P(G\cap M)=\frac{3}{32}$

$P(G\cap V)=\frac{2}{32}$

$P(F\cap M)=\frac{6}{32}$

$P(F\cap V)=\frac{9}{32}$

① نقل الشجرة وإكمالها:

② حساب $P(V)$:

$P(V)=P(G\cap V)+P(F\cap V)=\frac{2}{32}+\frac{9}{32}$

ومنه: $P(V)=\frac{11}{32}$

سير الدرس .

③ حساب الاحتمال الشرطي $P_V(G)$:

لدينا : $P_V(G) = \frac{P(G\cap V)}{P(V)} = \frac{\frac{2}{35}}{\frac{11}{35}} = \frac{2}{35}\times\frac{35}{11}$ ومنه : $P_V(G)=\frac{2}{11}$

④ حساب احتمال أن يكون التلميذ المختار لا يمارس كرة القدم :

طـ① : لدينا : $P(\bar T) = P(G\cap M)+P(G\cap V)+P(F\cap M)+P(F\cap V)$

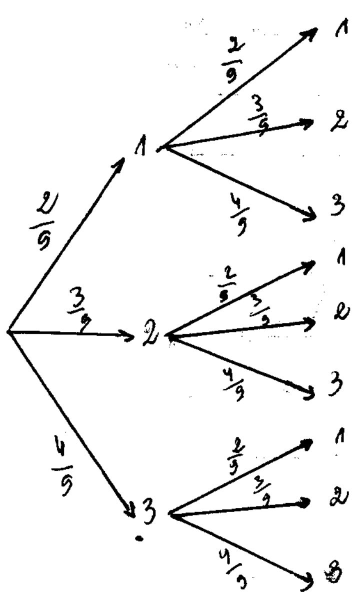
$= \frac{3}{35}+\frac{2}{35}+\frac{6}{35}+\frac{9}{35}=\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$

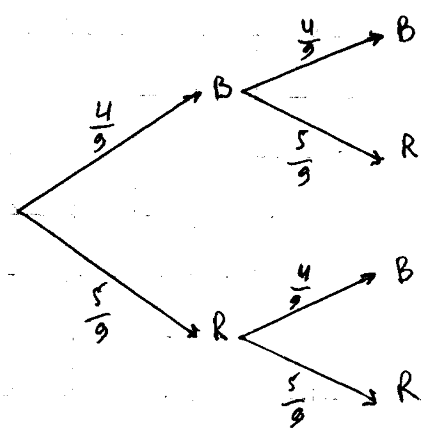
طـ② : لدينا : $P(\bar T)=1-P(T)$ أي : $P(\bar T)=1-\frac{3}{7}$ ومنه : $P(\bar T)=\frac{4}{7}$

تمرين ③ : (BAC 2009)

① تشكيل شجرة الاحتمالات :

بالاعتماد على ألوان الكرات وعلى الأرقام المسجلة على الكرات :





② حساب احتمال الحوادث :

A : الكرتان المسحوبتان بيضاوان :

$P(A)=\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{16}{81}$ ومنه : $P(A)=\frac{16}{81}$

B : إحدى الكرتين المسحوبتين فقط حمراء :

$P(B)=\left(\frac{4}{9}\times\frac{5}{9}\right)+\left(\frac{5}{9}\times\frac{4}{9}\right)=\frac{20}{81}+\frac{20}{81}$ ومنه : $P(B)=\frac{40}{81}$

C : لا يظهر الرقم 1 :

$P(C)=\frac{3}{9}\times\left(\frac{3}{9}+\frac{4}{9}\right)+\frac{4}{9}\times\left(\frac{3}{9}+\frac{4}{9}\right)=\frac{21}{81}+\frac{28}{81}$

ومنه : $P(C)=\frac{49}{81}$

عمل منزلي : BAC2008 م(1) و(2)

ت 24 ، 25 ، 29 ، 31 ص 252 و C 32 ص 254 .

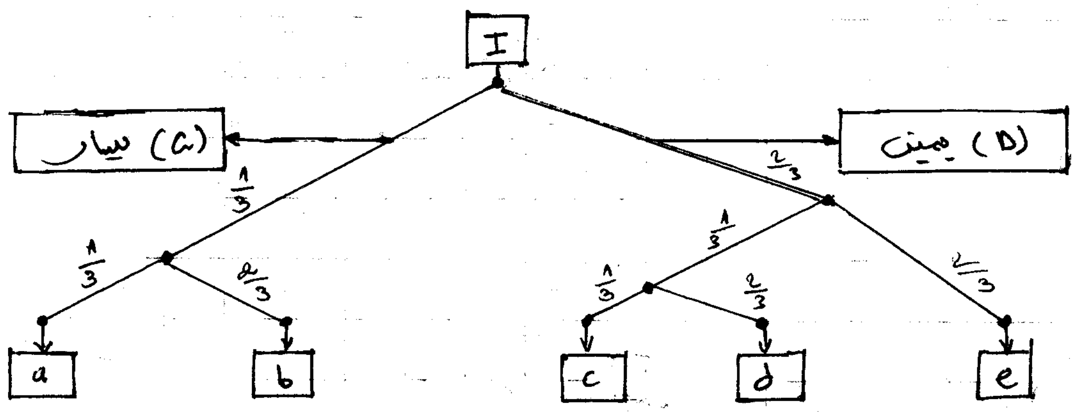
المحتوى المعرفي: الأمل الرياضي والتباين والانحراف المعياري المرفقة بقانون احتمال عددي. المستوى: 3 ث ل.

الكفاءة المستهدفة: - حساب الأمل الرياضي والتباين والانحراف المعياري المرفقة بقانون احتمال.

سير الدرس.

نشاط 1 ص 234:

1) وضع الشجرة المتمثلة لهذه التجربة:



2) حساب احتمالات الحوادث التالية: باستخدام الشجرة نجد: لدينا $P(A)=\frac{1}{9}$

أ) B "النملة تصل إلى الخانة b": $P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$

ب) C " " " " c": $P(C)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$ ومنه: $P(C)=\frac{2}{27}$

جـ) D " " " " d": $P(D)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$ ومنه: $P(D)=\frac{4}{27}$

د) E "النملة تصل إلى الخانة e": $P(E)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$ ومنه: $P(E)=\frac{4}{9}$

3) أ) كتابة قانون احتمال X:

النقط x_i	24	08	12	0	-16
الاحتمال $P(x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{4}{9}$

ب) حساب $E(x)$ الأمل الرياضياتي لـ X:

تعريف:

الأمل الرياضياتي لقانون احتمال هو المعدل μ حيث: $\mu=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ و $E(X)=\mu$

إذن: $E(x)=p_1x_1+p_2x_2+\dots+p_rx_r$

$$E(x)=\frac{24}{9}+\frac{16}{9}+\frac{24}{27}+\frac{0}{27}-\frac{64}{9}=\frac{24}{9}+\frac{16}{9}+\frac{8}{9}-\frac{64}{9}$$

أي: $E(x)=\frac{24+16+8-64}{9}$ ومنه: $E(x)=-\frac{16}{9}$

جـ) اللعبة ليست في صالح اللاعب: لأن النتيجة سالبة $(E(x)<0)$.

4) العدد المناسب عندئذ:

حيث يصبح $E(x)=0$ يجب: $\frac{24}{9}+\frac{16}{9}+\frac{8}{9}-\frac{x_r\times 4}{9}=0$ أي: $\frac{48}{9}=\frac{4x_r}{9}$

أي: $4x_r=48$ ومنه: $x_r=12$

إذن العدد المناسب من النقاط هو 12 نقطة التي يخسرها اللاعب في حالة وصول الكرية إلى الخانة e.

سير الدرس :

* الأمل الرياضياتي والتباين لقانون إحتمال :

1) الأمل الرياضياتي : ليكن لدينا قانون الاحتمال التالي :

x_i	x_1	....	x_n
P_i	P_1	....	P_n

تعريف :

الأمل الرياضياتي لقانون إحتمال المعدل μ حيث $\mu=\sum_{i=1}^{n} P_i x_i$ حيث :
x_i قيم x و $P_i = P(x=x_i)$

2) التباين : تعريف :

التباين لمتغير عشوائي x هو العدد V حيث : $V=\sum_{i=1}^{n} P_i(x_i-\mu)^2$
كما يمكن حساب V بالدستور $V=\sum_{i=1}^{n} P_i x_i^2-\mu^2$

3) الانحراف المعياري :

تعريف :

الانحراف المعياري σ هو : $\sigma=\sqrt{V}$.

مثال :

يرمي لاعب حجر نرد متوازن ويربح 20 دينارا إذا حصل على مضاعف للعدد 2 ويخسر 10 دنانير في الحالات الأخرى .

- القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي x هي : $20 ; -10$.

ومنه قانون إحتمال المتغير العشوائي :

x_i	20	-10
P_i	$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
x_i^2	400	100

1) الأمل الرياضي :

لدينا : $\mu=\sum_{i=1}^{n} P_i x_i$ أي : $\mu=\left(20\times\frac{1}{2}\right)-\left(10\times\frac{1}{2}\right)$

ومنه : $\mu=5$

2) التباين :

لدينا : $V=\sum_{i=1}^{n} P_i x_i^2-\mu^2$ أي : $V=\frac{1}{2}(400)+\frac{1}{2}(100)-5^2$

$V=200+50-25$

ومنه : $V=225$

3) الانحراف المعياري :

لدينا : $\sigma=\sqrt{V}$ أي : $\sigma=\sqrt{225}$ ومنه : $\sigma=15$

تمارين تدريبية : ت 1) و 2) ص 237 مع الحلول .

المستوى : 3 ث ع.

المحتوى المعرفي : استقلال حادثتين

الكفاءة المستهدفة : التعرف على حادثتين مستقلتين.

سير الدرس.

نشاط:

في ثانوية توزيع تلاميذ السنة النهائية حسب الجنس معطى في الجدول التالي:

السن / الجنس	أقل من 18 سنة	18 سنة	أكثر من 18 سنة	المجموع
بنات	2	30	28	60
ذكور	0	20	20	40
المجموع	2	50	48	100

لنختار تلميذ عشوائي:

1) أحسب احتمال أن يكون بنت وعمرها 18 سنة ..... $P(A\cap B)$

2) " " " " تلميذا عمره 18 سنة $P(A)$

3) " " " يكون بنت $P(B)$

4) " " كل منها: $P_B(A)$ ، $P(A)\times P(B)$ ، $P_A(B)$. ماذا تلاحظ؟

الحل:

1) حساب $P(A\cap B)$:

لدينا: $P(A\cap B)=\frac{30}{100}=0,3$ ومنه: $P(A\cap B)=0,3$

2) حساب $P(A)$:

لدينا: $P(A)=\frac{50}{100}=0,5$ ومنه: $P(A)=0,5$

3) حساب $P(B)$:

لدينا: $P(B)=\frac{60}{100}=0,6$ ومنه: $P(B)=0,6$

4) أ) حساب $P_B(A)$:

ط1) $P_B(A)=\frac{30}{60}=0,5$

ط2) $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0,3}{0,6}=0,5$

ومنه: $P_B(A)=0,5$

ب) حساب $P(A)\times P(B)$:

لدينا: $P(A)\times P(B)=0,5\times 0,6=0,3$ ومنه: $P(A)\times P(B)=0,3$

ج) حساب $P_A(B)$:

ط1) $P_A(B)=\frac{30}{50}=0,6$

ط2) $P_A(B)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{0,3}{0,5}=0,6$

ومنه: $P_A(B)=0,6$

د) الملاحظة:

نلاحظ أن: $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ ، $P_B(A)=P(A)$ و $P_A(B)=P(B)$

سير الدرس .

* نقول أن الحادثة A لا تؤثر في الحادثة B في وقوعها والعكس.
ومنه نستنتج أن الحادثتين A و B مستقلتان .

* الحوادث المستقلة :

1) تعريف :

لتكن E مجموعة الإمكانيات لتجربة عشوائية ، A و B حادثتان احتمالاهما غير معدومين
نقول عن A و B أنهما مستقلتان إذا وفقط إذا كان : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
أي أن : $P_B(A) = P(A)$ أو $P_A(B) = P(B)$

نتائج :

نقبل أنه إذا كانت A و B مستقلتين فإن $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ أي فإن :
1) $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P(B)$ 2) $P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P(\bar{B})$
3) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B})$

مثال :

يرمي لاعب قطعة نقدية مرتين فيتحصل على النتائج :
$E = \{(P,P), (P,F), (F,P), (F,F)\}$
نعتبر الحادثتين :
A : الحصول على وجه مرتين متتاليتين .
B : " " وجه على الأقل .
هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟

الحل :

لدينا : $A = \{(F,F)\}$ ، $B = \{(P,F), (F,P), (F,F)\}$
$A \cap B = \{(F,F)\}$. إذن : $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(B) = \frac{3}{4}$ ، $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$
ولدينا : $P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$.
بما أن : $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ فإن الحادثتان A و B غير مستقلتان .

2) المبدأ الضربي :

ملاحظة :

في حالة تجارب مستقلة متتابعة ، احتمال قائمة نتائج هو جداء كل احتمالات كل النتائج الموجودة على القائمة .

مثال محلول : ص 240

المحور المعرفي : استقلال حادثتين — المستوى : 3 ث .

الكفاءة المستهدفة : التعرف على حادثتين مستقلتين .

سير الدرس .

نشاط :

في ثانوية توزيع تلاميذ السنة النهائية حسب الجنس معطى في الجدول التالي :

الجنس \ السن	أقل من 18 سنة	18 سنة	أكثر من 18 سنة	المجموع
بنات	٤	30	٢٦	٦٠
ذكور	0	20	20	٤٠
المجموع	٤	٥٠	٤٦	١٠٠

نختار تلميذ عشوائيا :

1) أحسب احتمال أن يكون بنتا وعمرها 18 سنة ...... $P(A\cap B)$

2) " " " " تلميذا عمره 18 سنة $P(A)$

3) " " " " يكون بنتا $P(B)$

4) " " كل من : $P_B(A)$ ، $P(A)\times P(B)$ ، $P_A(B)$. ماذا تلاحظ ؟

الحل :

1) حساب $P(A\cap B)$:

لدينا : $P(A\cap B)=\frac{30}{100}=0,3$ ومنه : $P(A\cap B)=0,3$

2) حساب $P(A)$:

لدينا : $P(A)=\frac{50}{100}=0,5$ ومنه : $P(A)=0,5$

3) حساب $P(B)$:

لدينا : $P(B)=\frac{60}{100}=0,6$ ومنه : $P(B)=0,6$

4) أ) حساب $P_B(A)$:

ط1) $P_B(A)=\frac{30}{60}=0,5$

ط2) $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0,3}{0,6}=0,5$

ومنه : $P_B(A)=0,5$

ب) حساب $P(A)\times P(B)$:

لدينا : $P(A)\times P(B)=0,5\times 0,6=0,3$ ومنه : $P(A)\times P(B)=0,3$

ج) حساب $P_A(B)$:

ط1) $P_A(B)=\frac{30}{50}=0,6$

ط2) $P_A(B)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{0,3}{0,5}=0,6$

ومنه : $P_A(B)=0,6$

5) الملاحظة :

نلاحظ أن : $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ ، $P_B(A)=P(A)$ و $P_A(B)=P(B)$

المحور: الدوال العددية (تابع).

المستوى: 3 ث 1

المقطع المعرفي: الدالة اللوغاريتمية للأساس a مع $a\neq 1$ و $a>0$، الدالة اللوغاريتم العشري.

الكفاءة المستهدفة: الدوال اللوغاريتمية ذات الأساس a.

سير الدرس.

نشاط (1) ص (184): ش.

من أجل كل $a>0$ و $a\neq 1$ لدينا: $f_a(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

1) وضع الشرطان: $a>0$ و $a\neq 1$ لكي تكون $\ln(a)$ الدالة f_a معرفة.

التعرف على الدالتين f_e و f_{10}:

أ) إذا كان $a=e$ فإن $f_e(x)=\ln(x)$ لأن: $\ln(e)=1$، إذن دالة اللوغاريتم للأساس e هي الدالة "ln".

ب) إذا كان $a=10$ فإن $f_{10}(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(10)}$ إذن دالة اللوغاريتم للأساس 10 دالة اللوغاريتم العشري ونرمز لها بالرمز "log".

2) التبيين أن $f(x\times y)=f_a(x)+f_a(y)$:

لدينا $f_a(x\times y)=\frac{\ln(x\times y)}{\ln(a)}=\frac{\ln(x)+\ln(y)}{\ln(a)}=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}+\frac{\ln(y)}{\ln(a)}=f_a(x)+f_a(y)$

ومنه: $f_a(x\times y)=f_a(x)+f_a(y)$ باقي الأسئلة بنفس الطريقة.

3) لدينا: $f_a(x)=\frac{1}{\ln(a)}\times\ln(x)$

أ) تعيين اتجاه تغير الدالة f_a (نميز حالتين):

نلاحظ أن الدالة f_a من الشكل: $f_a(x)=K\times\ln(x)$

الحالة (1): إذا كان $0<a<1$ فإن $\ln(a)<0$ أي: $K<0$ وبالتالي تكون الدالة f_a متناقصة تماما على المجال $]0,+\infty[$.

الحالة (2): إذا كان $a>1$ فإن: $\ln(a)>0$ أي: $K>0$ وبالتالي تكون الدالة f_a متزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$.

ب) تعيين نهايات الدالة f_a عند 0 وعند $+\infty$:

الحالة (1): إذا كان $0<a<1$ فإن: $K<0$ إذن: $\lim_{x\to 0} f_a(x)=+\infty$

و: $\lim_{x\to+\infty} f_a(x)=-\infty$

الحالة (2): إذا كان $a>1$ فإن: $K>0$ فإن: $\lim_{x\to 0} f_a(x)=-\infty$

و $\lim_{x\to+\infty} f_a(x)=+\infty$

* حساب $f_a(a)$ و $f_a(1)$ ثم تشكيل جدول تغيراتها: "نميز حالتين لجدول التغيرات".

لدينا: $f_a(a)=\frac{\ln(a)}{\ln(a)}=1$

و $f_a(1)=\frac{\ln(1)}{\ln(a)}=0$

x	0	a	1	$+\infty$
$f_a(x)$	$+\infty$	1	0	$-\infty$

x	0	1	a	$+\infty$

سير الدرس .

* دالة اللوغاريتم للأساس a :

1) تعريف :

تسمى دالة اللوغاريتم للأساس a الدالة التي نرمز إليها بالرمز $\log_a$ والمعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي : $\log_a(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ حيث: $a>0$ و $a\neq 1$.

ملاحظة :

1) إذا كان $a=e$ فإن $\log_a(x)=\ln(x)$ لأن $\ln(e)=1$ ، إذن دالة اللوغاريتم للأساس e هي الدالة "ln".

2) إذا كان $a=10$ تسمى دالة اللوغاريتم للأساس 10 دالة اللوغاريتم العشري ونرمز لها بـ: "log".

2) خواص الدالة $\log_a$:

من أجل كل x ، y من $]0;+\infty[$ ومن أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

1) $\log_a(x\times y)=\log_a(x)+\log_a(y)$ 3) $\log_a(x^n)=n\log_a(x)$

2) $\log_a\left(\frac{1}{y}\right)=-\log_a(y)$ و $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a(x)-\log_a(y)$

3) التغيرات والتمثيل البياني للدالة $\log_a$:

أ) إتجاه التغيرات : من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $\log_a(x)=\frac{1}{\ln(a)}\times\ln(x)$

وهي من الشكل $\log_a(x)=K\times\ln(x)$ ومنه :

1) إذا كان $0<a<1$ فإن $\ln(a)<0$ وبالتالي تكون الدالة $\log_a$ متناقصة تماما على $]0;+\infty[$.

2) إذا كان $a>1$ فإن $\ln(a)>0$ وبالتالي تكون الدالة $\log_a$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

ب) الاشتقاقية :

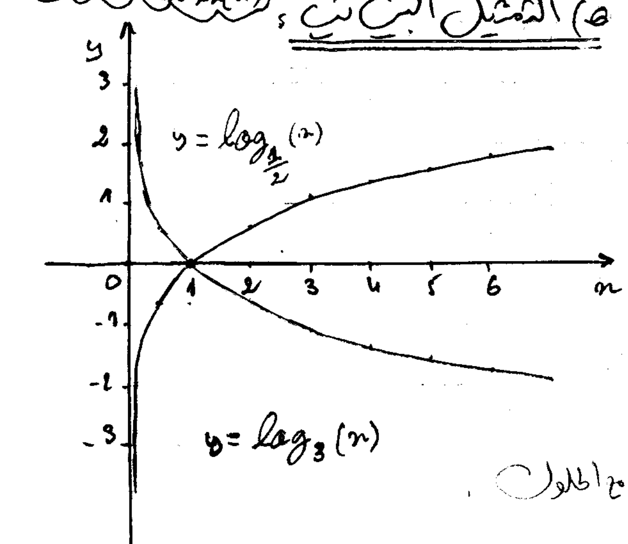
الدالة $\log_a$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي : $(\log_a)'(x)=\frac{1}{x\ln(a)}$

جـ) جدول التغيرات :

x	0	a	1	$+\infty$
$\log_a(x)$	$+\infty$ ↘	1 ↘	0 ↘	$-\infty$

x	0	1	a	$+\infty$
$\log_a(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

د) التمثيل البياني :



تمارين تدريبية : 1، 2 و 3 ص 187 مع الحلول .

المحتوى المعرفي: الدالة الأسية للأساس a مع a>0 و a≠1، الدوال القوى. المستوى: 3 ع ت

الكفاءة المستهدفة: الدوال الأسية ذات الأساس a.

سير الدرس.

نشاط ② ص (184): نش.

①أ) كتابة العدد $\ln(3^n)$ بكيفية أخرى ثم استنتاج أن $3^n = e^{n\ln 3}$:

لدينا: $\ln(3^n) = n\ln 3$

الاستنتاج، لدينا: $\ln(3^n) = n\ln 3$ وبالتالي: $e^{\ln(3^n)} = e^{n\ln 3}$، ومنه $3^n = e^{n\ln 3}$

ب) المدور إلى 10^{-2} لكل من:

لدينا: $3^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\ln 3} = 1,44$ ، $3^e = e^{e\ln 3} = 19,81$

② تبيين أن $\frac{3^x}{3^y} = 3^{x-y}$

لدينا: $\frac{3^x}{3^y} = \frac{e^{x\ln 3}}{e^{y\ln 3}} = e^{x\ln 3 - y\ln 3} = e^{(x-y)\ln 3} = 3^{x-y}$

③ أ) دراسة اتجاه تغير الدالة f: حيث $f(x) = 3^x$

لدينا: $f(x) = 3^x$ أي $f(x) = e^{x\ln 3}$ إذن $f'(x) = \ln 3\, e^{x\ln 3}$

بما أن: $e^{x\ln 3} > 0$ و $\ln 3 > 0$ فإن الدالة f' موجبة تماما على $\mathbb{R}$.

إذن، الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

ب) تعيين نهايتي f عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

لدينا، $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ ، $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

تمهيد:

* a عدد حقيقي موجب تماما و n عدد صحيح نسبي. نعلم أن $\ln(a^n) = n\ln a$ وبالتالي $a^n = e^{n\ln a}$.

* نضع $a^b = e^{b\ln a}$ من أجل كل عددين حقيقيين a و b حيث: $a>0$ و b كيفي.

مثال: $4^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln 4} \simeq 7,10$

Ⅰ الدالة الأسية ذات الأساس a:

① تعريف:

a عدد حقيقي موجب تماما ومختلف عن 1. تسمى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = a^x = e^{x\ln a}$، الدالة الأسية ذات الأساس a

② خواص:

من أجل كل a، b من $]0,+\infty[$ ومن أجل كل x، y من $\mathbb{R}$ لدينا:
① $\ln(a^x) = x\ln a$ ② $a^x a^y = a^{x+y}$ ③ $a^{-y} = \frac{1}{a^y}$ ④ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
⑤ $(a^x)^y = a^{xy}$ ⑥ $(ab)^x = a^x b^x$ ⑦ $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

سير الدرس .

II) الدالة الجذر النوني :

1) مبرهنة وتعريف :

من أجل كل عدد حقيقي موجب a ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n . يوجد عدد حقيقي موجب وحيد b حيث $b^n=a$. يسمى b الجذر النوني للعدد a ويرمز إليه بالرمز $\sqrt[n]{a}$ وتسمى الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ ، الدالة الجذر النوني.

مثال : $\sqrt[n]{0}=0$ ، $\sqrt[n]{1}=1$ ، $\sqrt[4]{16}=16^{\frac{1}{4}}=2$ ، $\sqrt[3]{27}=27^{\frac{1}{3}}=3$.

2) خاصية :

من أجل كل a من $]0;+\infty[$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$

نشاط تقويمي :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات والمتراجحات :

1) $5^{x-2}=2^{x-5}$ 2) $2^{2x}+6\times 2^{-x}-7=0$ 3) $\frac{3^x}{3^x+1}<\frac{1}{3}$

الحل :

1) $5^{x-2}=2^{x-5}$ ومنه : $(x-2)\times\ln 5=(x-5)\times\ln 2$

ومنه : $x\ln 5-2\ln 5-x\ln 2+5\ln 2=0$ ومنه : $x(\ln 5-\ln 2)=2\ln 5-5\ln 2$

ومنه : $x\ln\left(\frac{5}{2}\right)=\ln 5^2-\ln 2^5$ أي : $x\ln\frac{5}{2}=\ln\frac{25}{32}$ ومنه : $x=\frac{\ln\frac{25}{32}}{\ln\frac{5}{2}}$

2) $2^{2x}+6\times 2^{-x}-7=0$ معناه : $2^{2x}+\frac{6}{2^x}-7=0$ بالضرب في 2^x نجد : $2^{3x}-7\times 2^x-6=0$ بوضع : $y=2^x$ حيث : $y>0$ ومنه المعادلة تصبح :

$y^3-7y+6=0$ نلاحظ أن $y=1$ حل واضح للمعادلة ومنه :

$y^3-7y+6=(y-1)(y^2+y-6)=0$ ومنه : $y^2+y-6=0$ أو $y-1=0$

$y^2+y-6=0$ يعني $y=-3$ (مرفوض) أو $y=2$ (مقبول).

أو $y-1=0$ يعني : $y=1$ (مقبول) .

نعلم أن : $y=2^x$ ومنه : $2^x=1$ ، أي $2^x=e^{x\ln 2}=1$

أي $x\ln 2=\ln 1$ ومنه $x=0$ ، و $2^x=2$ ومنه : $x=1$

إذن مجموعة حلول المعادلة هي ، $S=\{0;1\}$

3) $\frac{3^x}{3^x+1}<\frac{1}{3}$ ومنه : $3\times 3^x<3^x+1$ أي : $3\times 3^x-3^x<1$ أي : $2\times 3^x<1$

أي : $3^x<\frac{1}{2}$ وبالتالي : $x\ln 3<\ln\frac{1}{2}$ أي : $x\ln 3<-\ln 2$

ومنه : $x<-\frac{\ln 2}{\ln 3}$ إذن مجموعة حلول المتراجحة هي $S=\left]-\infty;-\frac{\ln 2}{\ln 3}\right[$

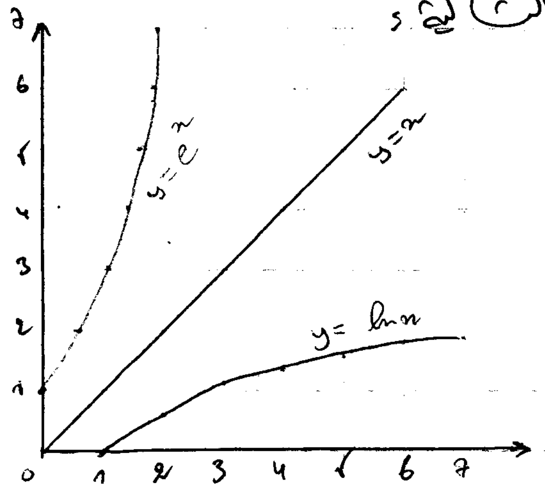
تمارين منزلية : 1 ، 2 ، و 3 ص (185) .

المحور المعرفي: التزايد المقارن للدوال اللوغارتمية والأسية والقوى. المستوى: 3 ت ر

الكفاءة المستهدفة: معرفة وتفسير النهايات: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ، $\lim_{x\to 0^+} x\ln x=0$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$.

سير الدرس

نشاط: ...



إليك التمثيلات البيانية للدوال التالية:

$f(x)=x$ ، $g(x)=\ln x$

$h(x)=e^x$ على المجال $]0,+\infty[$

1) خمن حول: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

$\lim_{x\to+\infty} h(x)$

2) ماذا تلاحظ بالنسبة للوضع النسبي لكل من (C_g) و (C_h) بالنسبة لـ (C_f).

مناقشة النشاط:

1) تخمين حول النهايات التالية:

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$

2) ملاحظة الوضع النسبي لكل من (C_g) و (C_h) بالنسبة لـ (C_f):

لدينا: على المجال $]0,+\infty[$ المنحنى (C_g) يقع تحت المنحنى (C_f)

وعلى المجال $]0,+\infty[$ المنحنى (C_h) يقع فوق المنحنى (C_f).

* التزايد المقارن:

1) التزايد المقارن للدالتين $x\mapsto e^x$ و $x\mapsto x$:

تؤول هذه الدالتين إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ لكن سلوكهما مختلف حيث نلاحظ تفوق الدالة الأسية عن الدالة القوة.

خواص:

$$1)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \qquad 2)\ \lim_{x\to-\infty} xe^x=0$$

2) التزايد المقارن للدالتين $x\mapsto \ln x$ و $x\mapsto x$:

تؤول هذه الدالتين إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ لكن سلوكهما مختلف عند اللانهاية تتفوق الدالة قوة عن الدالة اللوغاريتمية.

خواص:

$$1)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \ ، \quad 2)\ \lim_{x\to 0} x\ln x=0$$

سير الدرس .

③ **التزايد المقارن مع الدالة $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$:**

خواص :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$

4) $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln x = 0$

خلاصة :

كل الدوال $x \mapsto e^x$ ، $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ تؤول إلى $+\infty$ لما يؤول x إلى $+\infty$ إلا أن سلوكها مختلف.
عند اللانهاية تتفوق الدالة الأسية على الدالة قوة وتتفوق الدالة قوة على الدالة اللوغاريتمية النيبيرية.

ملاحظة :

نستعمل هذه النهايات لإزالة حالات عدم التعيين.

نشاط تقويمي :

أحسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3+2}$ ② $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3\ln x}{x^2+x}$ ③ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-3x}{e^x+2}$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x^2+3x+2)e^{3x+1}$ ⑤ $\lim\limits_{x \to 0^+} x^3(1-\ln x)$ ⑥ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2+3e^x-\ln x)$

الحل :

حساب النهايات الآتية :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3+2} = +\infty$ "لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3} = +\infty$".

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3\ln x}{x^2+x} = 0$ "لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$".

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-3x}{e^x+2} = 0$ "لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$".

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x^2+3x+2)e^{3x+1} = 0$ "لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x^2 e^{3x+1} = 0$".

5) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^3(1-\ln x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^3 - x^3\ln x) = 0$ "لأن $\lim\limits_{x \to 0^+} x^3 \ln x = 0$".

6) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2+3e^x-\ln x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(1+3\dfrac{e^x}{x^2}-\dfrac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$ "لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$".

تمارين تدريبية :

ت 1، 2، 3 و 4 ص 193

أعمال موجهة : ص 196 و 197

استعد للبكالوريا : ص 198 و 199 .