

الموضوع الأول

التمرين الأول: 04 نقاط

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

(Δ_1) و (Δ_2) مستقيمان من الفضاء معرفان بتمثيليهما الوسيطيين التاليين:

$$(\Delta_2): \begin{cases} x=1 \\ y=-1-t' \\ z=4+2t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R}) \quad \text{و} \quad (\Delta_1): \begin{cases} x=3+2t \\ y=-2-2t \\ z=1-t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- (1) أ) عيّن إحداثيات النقطة B تقاطع المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .
- ب) عيّن تمثيلاً وسيطياً للمستوي (P) المعين بالمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .
- (2) أ) أثبت أنّ النقطة $A(6;4;4)$ لا تنتمي للمستوي (P) .
- ب) بيّن أنّ النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) .
- (3) أ) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل النقطة A و $\vec{n}(5;1;-7)$ شعاع ناظمي له.
- ب) عيّن إحداثيات C و D نقطتي تقاطع (Q) مع كل من (Δ_1) و (Δ_2) على الترتيب.
- (4) أ) عيّن طبيعة المثلث BCD ، ثمّ احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.
- ب) استنتج مساحة المثلث ACD .

التمرين الثاني: 04 نقاط

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

لتكن A نقطة لاحقها: $z_A = i$ و B لاحقها $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

- (1) ليكن الدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ ، نسمي C صورة B بواسطة r .
 - أ - اعط الكتابة المركبة لـ r ثم عيّن z_C - الشكل الأسّي - لاحقاً C .
 - ب - اكتب كلا من z_C و z_B على الشكل الجبري.
 - ج - علم النقط A, B و C .
- (2) لتكن D مرجح النقط A, B و C المرفقة على الترتيب بالمعاملات $2, -1$ و 2 .
 - أ - عيّن لاحقاً D
 - ب - بيّن أنّ A, B, C و D تنتمي إلى نفس الدائرة.
- (3) ليكن H التحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 نسمي E صورة D بالتحاكي H .
 - أ - اعط الكتابة المركبة لـ H ثم عيّن لاحقاً z_E ، ثم علم E .
- (4) أ - احسب النسبة $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$ ، تعطى الكتابة على الشكل الأسّي.
- ب - استنتج طبيعة المثلث CDE

التمرين الثالث: 06 نقاط

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x + \frac{2}{e^x + 1}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب $f(x) + f(-x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ثم استنتج أن النقطة $\omega(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

2. أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب - ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أ - بين أن المستقيم ذا المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب - احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2)$ ، ثم فسّر النتيجة بيانياً.

4. أ - بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α بحيث $-1,7 < \alpha < -1,6$.

ب - من أجل أي قيمة للعدد الحقيقي k يكون العدد $(-\alpha)$ حلاً للمعادلة $f(x) = k$.

5. ارسم (C_f) ومستقيمي المقاربين.

التمرين الرابع: 06 نقاط

I - لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln(x)$

1. ادرس تغيرات الدالة g واحسب $g(1)$.

2. استنتج أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

II - دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x + \frac{2\ln x}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

ب - بين أن المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (D) ذا المعادلة $y = x$ مقارباً مائلاً له عند $+\infty$.

ج - حدّد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D) .

2. أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أ - بين أنه يوجد مماس وحيد (Δ) للمنحنى (C_f) ، مواز للمستقيم (D) .

ب - اكتب معادلة (Δ) .

ج - بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

د - أنشئ المستقيمين (Δ) و (D) والمنحنى (C_f) .

هـ - ناقش بيانياً، حسب قيم العدد الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $mx - 2\ln(x) = 0$.

حل الموضوع الأول:

التمرين الأول:

(1) أ) تعيين إحداثيات النقطة B تقاطع المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .

$$\text{نحل الجملة } \begin{cases} 3+2t=1 \dots\dots\dots (1) \\ -2-2t=-1-t' \dots\dots (2) \\ 1-t=4+2t' \dots\dots\dots (3) \end{cases} \text{ من (1) نجد } t=-1 \text{ بالتعويض عن } t \text{ في (2) نجد } 0=-1-t'$$

$$\text{ومنه } t'=-1$$

بتعويض t و t' في التمثيلين الوسيطيين لـ (Δ_1) و (Δ_2) على الترتيب نجد

$$\text{إذن المستقيمان } (\Delta_1) \text{ و } (\Delta_2) \text{ يتقاطعان في النقطة } B(1;0;2) \quad \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases}$$

(ب) تعيين تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) الذي يشمل المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .

$\vec{u}(2;-2;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ_1) و $\vec{v}(0;-1;2)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ_2) وهما أساس للمستوي (P) .
لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

$$M \in (P) \text{ معناه } \overrightarrow{BM} = t\vec{u} + t'\vec{v} \text{ و } \overrightarrow{BM}(x-1;y;z-2)$$

ملاحظة: أخذنا نفس الوسيطيين t و t'

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2t-t' \\ z=2-t+2t' \end{cases} \text{ أي } (t;t') \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} x-1=2t \\ y=-2t-t' \\ z-2=-t+2t' \end{cases} \text{ ومنه } (t;t') \in \mathbb{R}^2$$

في التمثيل الوسيطى للمستوي (P) لأننا أخذنا نقطة التقاطع B .(2) أ) إثبات أن النقطة $A(6;4;4)$ لا تنتمي للمستوي (P) .

$$\text{نفرض أن } A \text{ تنتمي للمستوي } (P) \text{ إذن } \begin{cases} 6=1+2t \dots\dots\dots (1) \\ 4=-2t-t' \dots\dots\dots (2) \\ 4=2-t+2t' \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

$$\text{من (1) نجد } t = \frac{5}{2} \text{ بالتعويض في (2) و (3) نجد } \begin{cases} t = \frac{5}{2} \\ 4 = 5 - t' \\ 4 = -\frac{1}{2} + 2t' \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} t = \frac{5}{2} \\ t' = 1 \\ t' = \frac{9}{4} \end{cases} \text{ تناقض}$$

إذن A لا تنتمي للمستوي (P) .(ب) تبين أن النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) .تكون B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) إذا وفقط إذا كان:

$$B \in (P) \text{ و } \overrightarrow{BA} \text{ شعاع ناظمي للمستوي } (P)$$

$$\text{لدينا } \overrightarrow{BA} \cdot \vec{u} = 5 \times 2 + 4(-2) + 2(-1) = 0 \text{ و } \overrightarrow{BA} \cdot \vec{v} = 5 \times 0 + 4(-1) + 2(2) = 0$$

وهذا يعني أن $\overrightarrow{BA} \perp \vec{u}$ و $\overrightarrow{BA} \perp \vec{v}$ بالتالي $\overrightarrow{BA}$ شعاع ناظمي للمستوي (P) وبما أن $B \in (P)$ فإن B هي

المسقط العمودي للنقطة A على المستوى (P) .

(3) أ) تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل النقطة A و $\vec{n}(5;1;-7)$ شعاع ناظمي له.

معادلة المستوي (Q) من الشكل $5x+y-7z+d=0$ وبما أن $A \in (Q)$ فإن $5(6)+4-7(4)+d=0$ ومنه $d=-6$ وعليه معادلة المستوي (Q) هي $5x+y-7z-6=0$.

ب) تعيين إحداثيات C و D نقطتي تقاطع (Q) مع كل من (Δ_1) و (Δ_2) على الترتيب.

تعيين إحداثيات C نقطة تقاطع (Q) مع (Δ_1) .

$$\text{نحل الجملة} \begin{cases} x=3+2t \\ y=-2-2t \\ z=1-t \\ 5x+y-7z-6=0 \end{cases} \text{ وعليه } 5(3+2t)-2-2t-7(1-t)-6=0 \text{ ومنه } 35t=0 \text{ أي } t=0$$

إذن $C(3;-2;1)$.

تعيين إحداثيات D نقطة تقاطع (Q) مع (Δ_2) .

$$\text{نحل الجملة} \begin{cases} x=1 \\ y=-1-t' \\ z=4+2t' \\ 5x+y-7z-6=0 \end{cases} \text{ وعليه } 5-1-t'-7(4+2t')-6=0 \text{ ومنه } -15t'-30=0 \text{ أي } t'=-2$$

إذن $D(1;1;0)$.

(4) أ) تعيين طبيعة المثلث BCD .

$$BC = \sqrt{4+4+1} = 3 \text{ ومنه } \overrightarrow{BC}(2;-2;-1)$$

$$BD = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \text{ ومنه } \overrightarrow{BD}(0;1;-2)$$

$$CD = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14} \text{ ومنه } \overrightarrow{CD}(-2;3;-1)$$

ومنه $BC^2 + BD^2 = CD^2$ إذن المثلث BCD قائم في B .

طريقة 2: لدينا $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 0 - 2(-1) - 1(2) = 0$ وهذا يعني أن $\vec{u} \perp \vec{v}$ ومنه المستقيمان (Δ_1) و (Δ_2) متعامدان

ومتقاطعان في النقطة B وبما أن $C \in (\Delta_1)$ و $D \in (\Delta_2)$ فإن المثلث BCD قائم في B .

حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

تذكر: حجم رباعي الوجوه يعطى كما يلي $\frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{BCD} \times AB \quad (AB \text{ هي المسافة بين } A \text{ والمستوي } (BCD) = (P))$$

$$\text{لدينا } AB = 3\sqrt{5} \text{ ، } S_{BCD} = \frac{BC \times BD}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2} ua$$

$$\text{وعليه } V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{5}}{2} \times 3\sqrt{5} = \frac{15}{2} uv$$

ب) استنتاج مساحة المثلث ACD .

$$\text{لدينا } V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ACD} \times d(B;(Q)) \text{ لأن } (ACD) = (Q)$$

$$d(B; (Q)) = \frac{|5-14-6|}{5\sqrt{3}} = \frac{15}{5\sqrt{3}} = \sqrt{3} \text{ ولدينا } S_{ACD} = \frac{3V_{ABCD}}{d(B; (Q))} \text{ ومنه}$$

$$S_{ACD} = \frac{3V_{ABCD}}{d(B; (Q))} = \frac{3 \times \frac{15}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{2} \text{ ua وعليه}$$

التمرين الثاني:

لتكن A نقطة لاحقتها: $z_A = i$ و B لاحقتها $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

(1) ليكن الدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ ، نسمي C صورة B بواسطة r .

أ - اعطاء الكتابة المركبة لـ r

لتكن M و M' نقطتان من المستوي لاحقتهما z و z' على الترتيب

$$r(M) = M' \text{ معناه } (z - z_O) = e^{i\frac{2\pi}{3}} (z' - z_O) \text{ أي } z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$$

تعيين z_C - الشكل الأسّي - لاحقة C .

$$r(B) = C \text{ يكافئ } z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{-i\frac{5\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ وعليه } z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

ب - كتابة كلا من z_C و z_B على الشكل الجبري.

$$z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}} = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

ج - انشاء النقط A, B, C .

(2) لتكن D مرجح النقط A, B, C المرفقة على الترتيب بالمعاملات $2, -1$ و 2 .

أ - تعيين z_D لاحقة D

$$z_D = \frac{2z_A - z_B + 2z_C}{2-1+2} = \frac{2i + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \sqrt{3} - i}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \text{ وعليه}$$

ب - تبين أن A, B, C, D تنتمي إلى نفس الدائرة.

و هذا يعني أن $OA = OB = OC = OD = 1$ بالتالي A, B, C, D تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1 أي الدائرة المثلثية.

(3) ليكن H التحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 نسمي E صورة D بالتحاكي H .

الكتابة المركبة لـ H .

$$\overrightarrow{AM'} = 2\overrightarrow{AM} \text{ معناه } z' - z_A = 2(z - z_A) \text{ أي } z' = 2z - z_A \text{ وعليه } z' = 2z - i$$

تعيين z_E لاحقة E .

$$H(D) = E \text{ يكافئ } z_E = 2z_D - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) - i = \sqrt{3} \text{ أي } z_E = \sqrt{3}$$

4 أ - حساب النسبة $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$.

$$\begin{aligned}\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{2i}{\sqrt{3} + i} \\ &= \frac{2i}{\sqrt{3} + i} = \frac{2i(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} = \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{4} \\ &= \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

$$\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ وعليه}$$

ب - استنتاج طبيعة المثلث CDE.

$$\text{لدينا } \frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ وهذا يعني أن } CD = CE \text{ و } (\overline{CE}; \overline{CD}) = \frac{\pi}{3}$$

المثلث CDE متساوي الساقين وإحدى زواياه $\frac{\pi}{3}$ بالتالي المثلث CDE متقايس الأضلاع

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x + \frac{2}{e^x + 1}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. حساب $f(x) + f(-x)$.

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) + f(-x) = x + \frac{2}{e^x + 1} - x + \frac{2}{e^{-x} + 1} = \frac{2}{e^x + 1} + \frac{2e^x}{e^x(e^{-x} + 1)} = \frac{2}{e^x + 1} + \frac{2e^x}{e^x + 1} = \frac{2e^x + 2}{e^x + 1} = 2$$

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$ ولدينا $f(x) + f(-x) = 2$ معناه $f(-x) = 2 - f(x)$ أي

$$f(2 \times 0 - x) = 2 \times 1 - f(x) \text{ إذن النقطة } \omega(0; 1) \text{ هي مركز تناظر للمنحنى } (C_f).$$

2. أ - حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{2}{e^x + 1} = +\infty$$

ب - استنتاج $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2 - f(-x)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} [2 - f(t)] = -\infty \text{ ومنه } f(x) = 2 - f(-x)$$

ب - دراسة اتجاه تغير الدالة f .

$$f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2} \text{ لدينا من أجل كل عدد حقيقي } x, e^{2x} + 1 > 0 \text{ و } (e^x + 1)^2 > 0$$

إن $f'(x) > 0$ وعليه الدالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

3. أ - تبين أن المستقيم ذا المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 0$$

إن المستقيم ذا المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب - احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^x + 1} - 2 = 2 - 2 = 0$$

تفسير النتيجة بيانياً.

بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2) = 0$ فإن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x + 2$ بجوار $-\infty$.

4. أ - تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α بحيث $-1,7 < \alpha < -1,6$.

لدينا الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ وبالخصوص على المجال $[-1,7; -1,6]$ و $f(-1,7) \approx -0,008$ و $f(-1,6) \approx -0,064$

$$f(-1,6) \approx -0,064$$

أي $f(-1,7) \times f(-1,6) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال

$$[-1,7; -1,6]$$

بحيث $f(\alpha) = 0$ وبما أن الدالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ فإن α وحيد.

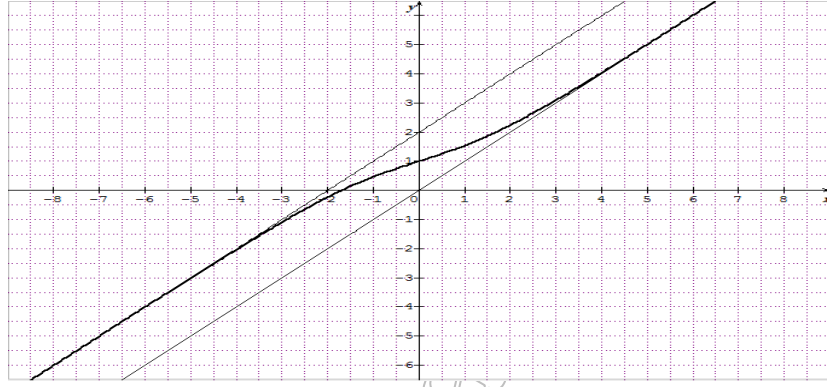
ب - من أجل أي قيمة للعدد الحقيقي k يكون العدد $(-\alpha)$ حلاً للمعادلة $f(x) = k$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) + f(-x) = 2$ وخاصة $f(\alpha) + f(-\alpha) = 2$ ومنه $f(-\alpha) = 2 - f(\alpha)$ لأن

$$f(\alpha) = 0$$

إن العدد $(-\alpha)$ هو حل للمعادلة $f(x) = 2$ وعليه $k = 2$.

5. رسم (C_f) ومستقيمه المقاربين.



التمرين الرابع:

I - لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln(x)$ 1. دراسة تغيرات الدالة g لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2\ln x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 2 = 2$ عندئذ $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 2 - 2\ln x = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(x + \frac{2}{x} - 2 \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

لدينا $x > 0$ ومنه إشارة $g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x}$ هي من نفس إشارة $x^2 - 1$

x	0	1	$+\infty$
$x^2 - 1$		- 0 +	

$$g(1) = 1 + 2 + 2\ln 1 = 3$$

جدول تغيرات الدالة g .

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	$+\infty$	3	$+\infty$

2. استنتاج أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.للدالة g قيمة حدية صغرى على المجال $]0; +\infty[$ وهي $g(1) = 3$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال

$$g(x) \geq 3, \quad]0; +\infty[\text{ وبالتالي } g(x) > 0.$$

II - دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x + \frac{2\ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.1. أ - حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln x}{x} = 0$ فيكون $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{2\ln x}{x} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \frac{2 \ln x}{x} = -\infty \text{ فيكون } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x}{x} = -\infty \text{ لدينا}$$

ب - تبين أن المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقاربا مائلا له عند $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} = 0 \text{ إذن المنحنى } (C_f) \text{ له مستقيم مقارب مائل } (\Delta) \text{ معادلته } y = x \text{ في جوار } +\infty$$

ج - تحديد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

$$\text{لدينا } f(x) - x = \frac{2 \ln x}{x} \text{ ومنه إشارة } f(x) - x \text{ هي من نفس إشارة } \ln x.$$

$$f(x) - x = 0 \text{ يكافئ } \ln x = 0 \text{ أي } x = 1$$

$$f(x) - x > 0 \text{ يكافئ } \ln x > 0 \text{ ويكافئ } x > 1$$

$$f(x) - x < 0 \text{ يكافئ } \ln x < 0 \text{ ويكافئ } 0 < x < 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - x$		0	+
الوضعية النسبية		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)
		(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;1)$	

$$2. \text{ أ - تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من المجال }]0; +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = 1 + 2 \left[\frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} \right] = 1 + \frac{2 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 2 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

ب - استنتاج اتجاه تغير الدالة f .

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[: g(x) > 0$ و $x^2 > 0$ إذن $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $]0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3. أ - تبين أنه يوجد مماس وحيد (T) للمنحنى (C_f) ، مواز للمستقيم (Δ) .

$$(T) \text{ يوازي } (\Delta) \text{ يعني } f'(x_0) = 1$$

$$\frac{g(x_0)}{x_0^2} = 1 \text{ يكافئ } x_0^2 + 2 - 2 \ln x_0 = x_0^2 \text{ ويكافئ } \ln x_0 = 1 \text{ أي } x_0 = e$$

إذن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) موازيا لـ (Δ) في النقطة التي إحداثياتها $\left(e; e + \frac{2}{e}\right)$.

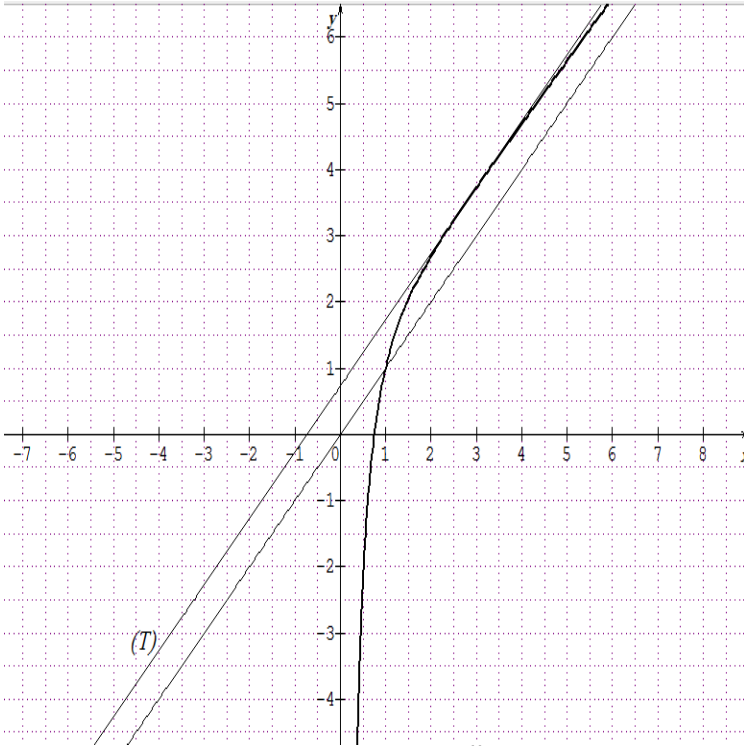
ب - كتابة معادلة (Δ) .

$$y = f'(e)(x - e) + f(e) \text{ ومنه } y = x + \frac{2}{e} \text{ أي } y = (x - e) + e + \frac{2}{e}$$

ج - تبين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

لدينا الدالة f مستمرة على المجال $]0; +\infty[$ وبالأخص على المجال $[0,5;1]$ و $f(0,5) \approx -2,27$ ، $f(1) = 1$ أي $f(0,5) \times f(1) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من المجال $]0,5;1[$ بحيث $f(\alpha) = 0$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $]0; +\infty[$ فإن α وحيد أي (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث $0,5 < \alpha < 1$

د - رسم المستقيمين (Δ) و (T) والمنحنى (C_f) .



هـ - المناقشة بيانيا، حسب قيم العدد الحقيقي m

عدد حلول المعادلة : $mx - 2\ln(x) = 0$

$$mx - 2\ln(x) = 0 \text{ تكافئ } mx = 2\ln(x)$$

$$\text{وتكافئ } m = \frac{2\ln(x)}{x} \text{ وتكافئ}$$

$$f(x) = x + m \text{ أي } x + m = x + \frac{2\ln(x)}{x}$$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل النقاط المشتركة بين

$$(C_f) \text{ والمستقيم ذي المعادلة } y = x + m$$

بقراءة بيانية:

إذا كان $m \leq 0$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا.

إذا كان $0 < m < \frac{2}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلين.

إذا كان $m = \frac{2}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا.

إذا كان $m > \frac{2}{e}$ فإن المعادلة لا تقبل أي حل.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: 5 نقاط

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

نعتبر النقط $A(0;0;1)$ ، $B(2;2;-1)$ ، $C(-2;-7;-7)$ و $D(-3;4;4)$

و المستوي (P) المعروف بالتمثيل الوسيطى: $\begin{cases} x=1+3\alpha+\beta \\ y=1-2\alpha \\ z=4+\alpha+\beta \end{cases}$ ، α و β وسيطيان حقيقيان.

1. أ - بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا.

ب - تحقق أن الشعاع $\vec{n}(3;-2;1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ، ثم اكتب معادلة ديكارتية له.

2. أ - اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) ، ثم بين أن المستويين (ABC) و (P) متعامدان .

ب - بين أن تقاطع (ABC) و (P) هو المستقيم (Δ) ذو التمثيل الوسيطى:

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=-7+4t; t \in \mathbb{R} \\ z=-7+5t \end{cases}$$

ج - احسب المسافة بين النقط D والمستوي (ABC) ، والمسافة بين النقط D والمستوي (P) ، ثم استنتج

المسافة بين النقط D والمستقيم (Δ)

3. (Q) المستوي الذي يشمل النقط D والعمودي على كل من المستويين (ABC) و (P) .

أ - اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q) .

ب - بين أن المستويات الثلاثة (ABC) ، (P) و (Q) تتقاطع في نقطة واحدة H ، ثم عيّن إحداثيات H .

ج - احسب بطريقة ثانية، المسافة بين النقط D والمستقيم (Δ) .

التمرين الثاني:

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = 0$.

(1) بين أن العدد -1 حلا لهذه المعادلة، ثم جد الحلين الآخرين.

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لتكن النقط: A ، B ، C ، G لواحقها

على الترتيب: z_1 ، z_2 ، z_3 و z_4 حيث $z_1 = -1$ ، $z_2 = 2 + \sqrt{3}i$ ، $z_3 = 2 - \sqrt{3}i$ و $z_4 = 3$.

- اكتب العدد $\frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3}$ على الشكل الأسى، ثم استنتج طبيعة المثلث ACG .

(3) نسمة (γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $(1) \dots \dots \dots \overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$.

أ - أثبت أن G هي مرجح الجملة: $\{(A; -1); (B; 2); (C; 2)\}$.

ب - بين أن المساواة (1) يمكن كتابتها على الشكل $(2) \dots \dots \dots \overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{CG} = -4$.

ج - تأكد أن النقط A تنتمي إلى المجموعة (γ) .

د - بين أنه يمكن كتابة المساواة (2) على الشكل $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$ ، ثم استنتج طبيعة (γ) وارسمها.

التمرين الثالث:

I - الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + (x^2 - 1)e^{-x}$.

1. أ - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

ب - ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها. (نأخذ: $g(1 - \sqrt{2}) \approx -0,25$ و $g(1 + \sqrt{2}) \approx 1,43$)

2. أ - بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقّق أنّ أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-0,8 < \alpha < -0,7$.

ب - استنتج إشارة $g(x)$ ؛ حسب قيم العدد الحقيقي x .

II - الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - (x+1)^2 e^{-x}$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب - بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ ، مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ج - ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

2. أ - بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$. (يرمز f' إلى الدالة المشتقة للدالة f).

ب - شكّل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$. (نأخذ: $f(\alpha) \approx -0,9$)

3. أ - بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين، معامل توجيه كل منهما يساوي 1، يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

ب - ممثّل (Δ) والمماسين والمنحنى (C_f) .

ج - ناقش بياناً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة ذات المجهول x : $(x+1)^2 + me^x = 0$.

التمرين الرابع:

I - الدالة العددية g معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.

1. ادرس اتجاه تغير الدالة g .

2. احسب $g(1)$ ثم استنتج تبعاً لقيم x إشارة $g(x)$.

II - الدالة العددية f معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$.

1. أ - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب - احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

2. أ - بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب - شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3. أ - بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب - ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) .

4. بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1 - \frac{1}{e}$ يمسّ المنحنى في نقطة A يطلب تعيين إحداثياتها.

5. ارسم (Δ) ، (D) و (C_f) .

حل الموضوع الثاني

التمرين الأول:

1. أ - إثبات أن النقط A, B, C تعين مستويا.

$$\text{لدينا } \overrightarrow{AB} (2; 2; -2) \text{ و } \overrightarrow{AC} (-2; -7; -8) \text{ و } \frac{-2}{2} \neq \frac{-7}{2}$$

إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه النقط A, B, C تعين مستويا.ب - التحقق أن الشعاع $\vec{n} (3; -2; 1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ، ثم كتابة معادلة ديكارتية له.

$$\text{لدينا } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 3(2) - 2(2) - 2 = 0 \text{ و } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 3(-2) - 2(-7) - 8 = 0$$

ومنه $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وبالتالي $\vec{n}$ ناظم للمستوي (ABC) .معادلة المستوي (ABC)

$$(ABC) \text{ هو مجموعة النقط } M(x; y; z) \text{ من الفضاء بحيث } \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \text{ و } \overrightarrow{AM}(x; y; z - 1)$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \text{ معناه } 3x - 2y + z - 1 = 0 \text{ وهي معادلة للمستوي } (ABC).$$

2. أ - كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P) ، ثم تبين أن المستويين (ABC) و (P) متعامدان.

$$\begin{cases} x = 1 + 3\alpha + \beta \dots\dots\dots (1) \\ y = 1 - 2\alpha \dots\dots\dots (2) \\ z = 4 + \alpha + \beta \dots\dots\dots (3) \end{cases} \text{ لدينا}$$

$$\text{بجمع (1) و (2) نجد } x + y = 2 + \alpha + \beta \text{ ومنه } x + y - 2 = \alpha + \beta$$

$$\text{ولدينا من (3) } z - 4 = \alpha + \beta \text{ ومنه } z - 4 = x + y - 2 \text{ و عليه } x + y - z + 2 = 0 \text{ هي}$$

$$\text{معادلة ديكارتية للمستوي } (P).$$

تبين أن المستويين (ABC) و (P) متعامدان.

$$\vec{n} (3; -2; 1) \text{ هو شعاع ناظمي للمستوي } (ABC) \text{ و } \vec{n}' (1; 1; -1) \text{ شعاع ناظمي للمستوي } (P).$$

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 3(1) - 2(1) - 1 = 0 \text{ وهذا يعني } \vec{n} \text{ يعامد } \vec{n}' \text{ ومنه } (ABC) \text{ و } (P) \text{ متعامدان.}$$

ب - تبين أن تقاطع (ABC) و (P) هو المستقيم (Δ) ذو التمثيل الوسيط:

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -7 + 4t; t \in \mathbb{R} \\ z = -7 + 5t \end{cases}$$

بالتعويض في معادلة (ABC) و (P) نجد:

$$3(-2 + t) - 2(-7 + 4t) + (-7 + 5t) - 1 = 0 \text{ ومنه } (\Delta) \text{ محتو في المستوي } (ABC).$$

$$\text{و } (-2 + t) + (-7 + 4t) - (-7 + 5t) + 2 = 0 \text{ ومنه } (\Delta) \text{ محتو في المستوي } (P).$$

وعليه تقاطع (ABC) و (P) هو المستقيم (Δ) .ج - المسافة بين النقط D والمستوي (ABC) .

$$d_1 = \frac{|3(-3) - 2(4) + 4 - 1|}{\sqrt{14}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

المسافة بين النقطة D والمستوي (P).

$$d_2 = \frac{|-3+4-4+2|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

استنتاج المسافة d₃ بين النقطة D والمستقيم (Δ).

المستويان (ABC) و (P) متعامدان ومنه حسب نظرية فيثاغورث $d_3^2 = d_1^2 + d_2^2$

$$d_3 = \sqrt{\frac{43}{3}} \text{ ومنه } d_3 = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} \text{ وعليه } d_3 = \sqrt{\frac{43}{3}}$$

3. (Q) المستوي الذي يشمل النقطة D والعمودي على كل من المستويين (ABC) و (P).

أ - كتابة معادلة ديكرتية للمستوي (Q).

(ABC) و (P) يتقاطعان في المستقيم (Δ) وبما أن (Q) يعامد (ABC) و (P) فإنه يعامد المستقيم (Δ) أي أن $\vec{u}(1;4;5)$ شعاع توجيه (Δ) هو شعاع ناظمي للمستوي (Q). معادلة المستوي (Q) من الشكل $x + 4y + 5z + d = 0$ وبما أن D تنتمي للمستوي (Q) فإن $-3+4(4)+5(4)+d=0$ ومنه $d = -33$ وعليه $x + 4y + 5z - 33 = 0$: (Q).

ب - تبين أن المستويات الثلاثة (ABC)، (P) و (Q) تتقاطع في نقطة واحدة H.

بما أن $(ABC) \cap (P) = (\Delta)$ فإن $(ABC) \cap (P) \cap (Q) = (\Delta) \cap (Q)$.

بما أن (Δ) يعامد (Q) فإن (Δ) و (Q) يتقاطعان في نقطة H.

تعيين H نقطة تقاطع (Δ) و (Q).

$$\begin{cases} x = -2+t & (1) \\ y = -7+4t & (2) \\ z = -7+5t & (3) \\ x + 4y + 5z - 33 = 0 & (4) \end{cases} \text{ إحداثيات H هي حل للجملية}$$

$$\text{ومنه } -2+t + 4(-7+4t) + 5(-7+5t) - 33 = 0 \text{ وعليه } t = \frac{7}{3} \text{ إذن } H\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}; \frac{14}{3}\right)$$

ج - حساب بطريقة ثانية، المسافة بين النقطة D والمستقيم (Δ).

المسقط العمودي لكل نقطة من (Q) على (Δ) هي النقطة H لأن (Δ) عمودي على (Q).

وبما أن D نقطة من (Q) فإن H هي المسقط العمودي للنقطة D على (Δ).

بالتالي $d(D;(\Delta)) = DH$

$$DH = \sqrt{\frac{100}{9} + \frac{25}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{129}{9}} = \sqrt{\frac{43}{3}} \text{ ومنه } DH = \sqrt{\frac{43}{3}} \text{ لدينا } \overrightarrow{DH}\left(\frac{10}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

التمرين الثاني:

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = 0$ المعادلة:

(1) إثبات أن العدد -1 حلا لهذه المعادلة.

$$(-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) + 7 = -1 - 3 - 3 + 7 = 0 \text{ ومنه العدد } -1 \text{ حل لهذه المعادلة.}$$

إيجاد الحلين الآخرين.

بما أن -1 حل للمعادلة فإن $(z^3 - 3z^2 + 3z + 7) = (z+1)(z^2 + az + b)$ حيث a و b عدنان حقيقيان.

$$b = 7 \text{ و } a + b = 3 \text{ و } a + 1 = -3 \text{ بالمطابقة نجد } (z+1)(z^2 + az + b) = z^3 + (a+1)z^2 + (a+b)z + b$$

$$أي $a = -4$ و $b = 7$ ومنه $(z+1)(z^2 - 4z + 7) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$.$$

$$z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = 0 \text{ معناه } (z+1)(z^2 - 4z + 7) = 0 \text{ أي } z = -1 \text{ أو } (1) z^2 - 4z + 7 = 0 \dots \dots \dots \text{ نحل المعادلة (1).}$$

$$\Delta = 16 - 28 = -12 = (2\sqrt{3}i)^2 \text{ للمعادلة حلان هما } z = 2 + \sqrt{3}i \text{ و } z = 2 - \sqrt{3}i.$$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لتكن النقط: A, B, C, G لواحقتها

$$\text{على الترتيب: } z_1, z_2, z_3, z_4 \text{ حيث } z_1 = -1, z_2 = 2 + \sqrt{3}i, z_3 = 2 - \sqrt{3}i, z_4 = 3.$$

- كتابة العدد $\frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3}$ على الشكل الأسّي.

$$\frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3} = \frac{-1 - 2 + \sqrt{3}i}{3 - 2 + \sqrt{3}i} = \frac{-3 + \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i} = \frac{(-3 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)}{(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)} = \frac{4\sqrt{3}i}{4} = \sqrt{3}i$$

$$\text{ومنه } \frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

استنتاج طبيعة المثلث ACG .

$$\text{لدينا } \arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ ومنه } (\overline{CG}; \overline{CA}) = \frac{\pi}{2} \text{ بالتالي المثلث } ACG \text{ قائم في } C.$$

(3) نسمي (γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: (1) $(-\overline{MA} + 2\overline{MB} + 2\overline{MC}) \cdot \overline{CG} = 12 \dots \dots \dots$

أ - إثبات أن G هي مرجح الجملة: $\{(A; -1); (B; 2), (C; 2)\}$.

$$\{(A; -1); (B; 2), (C; 2)\} \text{ هي مرجح الجملة: ومنه } \frac{-z_1 + 2z_2 + 2z_3}{3} = \frac{1 + 4 + 2\sqrt{3}i + 4 - 2\sqrt{3}i}{3} = 3 = z_4$$

ب - إثبات أن المساواة (1) يمكن كتابتها على الشكل (2) $\overline{GM} \cdot \overline{CG} = -4 \dots \dots \dots$.

G مرجح الجملة: $\{(A; -1); (B; 2), (C; 2)\}$ إذن من أجل نقطة M من المستوي يكون لدينا

$$-\overline{MA} + 2\overline{MB} + 2\overline{MC} = 3\overline{MG} \text{ أي } -\overline{MA} + 2\overline{MB} + 2\overline{MC} = (-1 + 2 + 2)\overline{MG}$$

$$\text{المساواة (1) تكافئ } 3\overline{MG} \cdot \overline{CG} = 12 \text{ ومنه } \overline{MG} \cdot \overline{CG} = 4 \text{ أي } \overline{GM} \cdot \overline{CG} = -4.$$

ج - التأكد أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (γ) .

$$A \text{ تنتمي إلى المجموعة } (\gamma) \text{ إذا كان } \overline{GACG} = -4.$$

$$\text{لدينا } \overline{CG}(1; \sqrt{3}), \overline{GA}(-4; 0), G(3; 0), C(2; -\sqrt{3}), A(-1; 0)$$

$$\overline{GACG} = -4(1) + 0(\sqrt{3}) = -4 \text{ وهذا يعني أن } A \text{ تنتمي إلى المجموعة } (\gamma).$$

د - تبين أنه يمكن كتابة المساواة (2) على الشكل $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$.

$$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CG} = -4 \text{ ومعناه } (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM}) \cdot \overrightarrow{CG} = -4$$

ولدينا $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{CG} = -4$ ومنه $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CG} = -4 + 4 = 0$ أي $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$.
استنتاج طبيعة (γ) .

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CG} = 0 \text{ وتكافئ } \overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{CG} = -4 \text{ تكافئ } (-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{CG} = 12$$

بالتالي (γ) هي المستقيم المار من A و $\overrightarrow{CG}$ شعاع ناظمي له.

التمرين الثالث:

1. أ - حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 1) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + (x^2 - 1)e^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + (x^2 - 1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x^2 e^{-x} - e^{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ و (التزايد المقارن) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

ب - دراسة اتجاه تغير الدالة g .

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x) = 2xe^{-x} - e^{-x}(x^2 - 1)$

$$= e^{-x} [2x - (x^2 - 1)]$$

$$= e^{-x} (-x^2 + 2x + 1)$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^{-x} > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $(-x^2 + 2x + 1)$.

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$-x^2 + 2x + 1$	—	0	+	—

الدالة g متناقصة تماماً على المجالين $]-\infty; 1 - \sqrt{2}]$ و $[1 + \sqrt{2}; +\infty[$ ومتزايدة تماماً على المجال $[1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}]$

جدول تغيرات الدالة g .

x	$-\infty$	α	$1 - \sqrt{2}$	0	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		—	0	+	0	—
$g(x)$	$+\infty$		$g(1 - \sqrt{2})$		$g(1 + \sqrt{2})$	1

2. أ - تبين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1-\sqrt{2}]$ و تأخذ قيمها في المجال $[g(1-\sqrt{2}); +\infty[$ ولدينا $-0,25 \leq g(1-\sqrt{2}) \leq 0$ إذن $0 \in [g(1-\sqrt{2}); +\infty[$ ومنه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty; 1-\sqrt{2}]$

ولدينا الدالة g مستمرة ومنتزعة تماما على المجال $[1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}]$ وتأخذ قيمها في المجال $[g(1-\sqrt{2}); g(1+\sqrt{2})]$ و $0 \in [g(1-\sqrt{2}); g(1+\sqrt{2})]$ ومنه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $[1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}]$ ولدينا كذلك الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[1+\sqrt{2}; +\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $[g(1+\sqrt{2}); 1]$ و $0 \notin [g(1+\sqrt{2}); 1]$ إذن على المجال $[1+\sqrt{2}; +\infty[$ ، $g(x) \neq 0$

خلاصة: المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.

التحقق أن أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-0,8 < \alpha < -0,7$

بما أن $g(0)=1+(0-1)e^0=0$ فإن $\beta=0$ ولدينا $g(-0,7) \leq -0,02$ و $g(-0,8) \leq 0,19$ أي $g(-0,7) \times g(-0,8) < 0$ ومنه $-0,8 < \alpha < -0,7$

ب - استنتاج إشارة $g(x)$ ؛ حسب قيم العدد الحقيقي x .

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$g(x)$	+	0	—	+

II - الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-(x+1)^2 e^{-x}$.1. أ - حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - (x+1)^2 e^{-x} = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - (x+1)^2 e^{-x} = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - (x+1)^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - (x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} + e^{-x}) = +\infty$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

ب - تبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ ، مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

$$f(x) - x = x - (x+1)^2 e^{-x} - x = -(x+1)^2 e^{-x} = -(x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} + e^{-x})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -(x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} + e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\left(\frac{x^2}{e^x} + 2\frac{x}{e^x} + e^{-x}\right) = 0$$

ومنه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ ، مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ج - دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

ليكن x عددا حقيقيا؛ $f(x) - x = -(x+1)^2 e^{-x}$

لدينا $e^{-x} > 0$ و $(x+1)^2 \geq 0$ إذن $f(x) - x \leq 0$

ومنه المنحنى (C_f) يوجد تحت المستقيم (Δ) .

2. أ - تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$.

$$f'(x) = 1 - [2(x+1)e^{-x} - e^{-x}(x+1)^2] = 1 - [e^{-x}(1-x^2)] = 1 + e^{-x}(x^2 - 1) = g(x)$$

ب - جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	-1	$+\infty$

3. أ - تبين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين، معامل توجيه كل منهما يساوي 1، يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

$$f'(x_0) = 1 \text{ يكافئ } 1 + (x_0^2 - 1)e^{-x_0} = 1 \text{ ويكافئ } (x_0^2 - 1)e^{-x_0} = 0 \text{ لدينا } e^{-x_0} \neq 0 \text{ ومنه } x_0^2 - 1 = 0 \text{ أي}$$

$$x_0 = 1 \text{ أو } x_0 = -1 \text{ إذن } (C_f) \text{ يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما يساوي 1 عند النقطتين } M(1; f(1)) \text{ و}$$

$$M'(-1; f(-1)).$$

كتابة معادلة المماسين

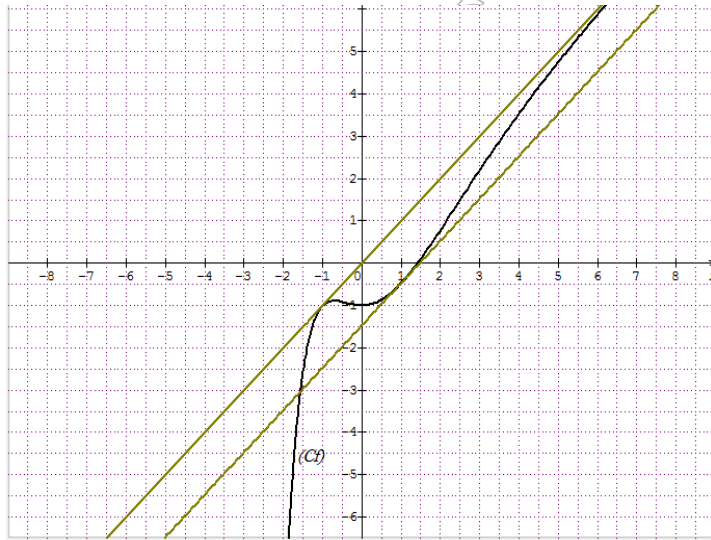
$$\text{المماس عند النقطة } M(1; f(1)) \text{ معادلته } y = f'(1)(x-1) + f(1) \text{ ومنه } y = x - 1 + (1 - 4e^{-1}) \text{ أي}$$

$$y = x - 4e^{-1}$$

$$\text{المماس عند النقطة } M'(-1; f(-1)) \text{ معادلته } y = f'(-1)(x+1) + f(-1) \text{ ومنه } y = x + 1 - 1 \text{ أي } y = x$$

ب - تمثيل (Δ) والمماسين والمنحنى (C_f)

ج - المناقشة بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة ذات المجهول x : $(x+1)^2 + me^x = 0$.



$$(x+1)^2 + me^x = 0 \text{ تكافئ}$$

$$me^x = -(x+1)^2$$

$$\text{وتكافئ } m = -(x+1)^2 e^{-x} \text{ و تكافئ}$$

$$x + m = x - (x+1)^2 e^{-x} \text{ أي}$$

$$f(x) = x + m$$

$$\text{إذا كان } m \in]-\infty; -4e^{-1}[\text{ فإن المعادلة تقبل}$$

حلاً وحيداً

$$\text{إذا كان } m = -4e^{-1} \text{ فإن المعادلة تقبل حلين}$$

أحدهما مضاعف

$$\text{إذا كان } m \in]-4e^{-1}; 0[\text{ فإن المعادلة تقبل}$$

ثلاثة حلول

$$\text{إذا كان } m = 0 \text{ فإن المعادلة تقبل حلاً واحداً مضاعفاً}$$

$$\text{إذا كان } m \in]0; +\infty[\text{ فإن المعادلة لا تقبل حلاً}$$

التمرين الرابع:

(I) الدالة العددية g معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.

1. دراسة اتجاه تغير الدالة g .

الدالة g تقبل الاشتقاق على $]0; +\infty[$ ولدينا: $g'(x) = -2x - \frac{1}{x}$

من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ ، $g'(x) < 0$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على $]0; +\infty[$.

2. حساب $g(1)$ واستنتاج تبعا لقيم x إشارة $g(x)$.

$$g(1) = 1 - 1^2 - \ln 1 = 0$$

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

(II) الدالة العددية f معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$

1. أ - حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 - \frac{\ln x}{x} = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty.$$

ب - حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty \text{ لدينا}$$

تفسير النتيجة هندسيا.

(C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = 0$ (محور الترتيب).

2. أ - تبين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = 1 - \left[\frac{\frac{1}{x}(x) - \ln x}{x^2} \right] = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{-g(x)}{x^2}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f .

إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(x)$

من أجل $x \in]0; 1[$ ، $g(x) > 0$ ومنه $f'(x) < 0$.

ومن أجل $x \in]1; +\infty[$ ، $g(x) < 0$ ومنه $f'(x) > 0$.

إذن الدالة f متناقصة تماما على $]0; 1[$ ومتزايدة تماما على $]1; +\infty[$.

ب - جدول تغيرات الدالة f .

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

3. أ - تبين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$$

ب - دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D).

$$\text{لدينا } f(x) - (x - 1) = \frac{-\ln x}{x} \text{ ومنه إشارة } f(x) - (x - 1) \text{ هي عكس إشارة } \ln x.$$

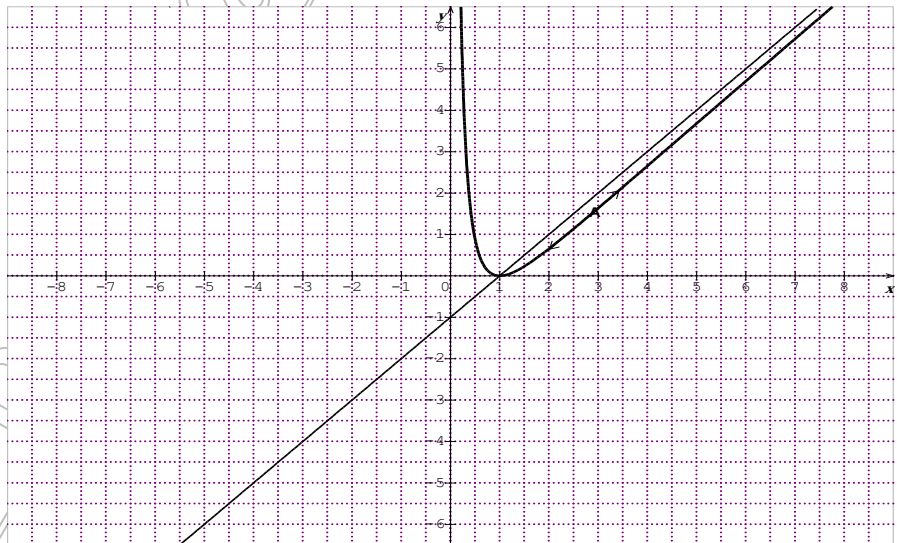
x	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$		+	0 -
الوضعية النسبية		(D) فوق (C_f)	(D) تحت (C_f)
		(C _f) يقطع (Δ)	
		في النقطة A(1;0)	

4. تبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1 - \frac{1}{e}$ يمسّ المنحنى (C_f) في نقطة A يطلب تعيين إحداثياتها.

$$f'(x_0) = 1 \text{ تعني } \frac{-g(x)}{x^2} = 1 \text{ وبكافئ } x^2 - 1 + \ln x = x^2 \text{ وبكافئ } \ln x = 1 \text{ أي } x = e$$

$$\text{ولدينا } f(e) = e - 1 - \frac{1}{e} \text{ و } y = e - 1 - \frac{1}{e} \text{ إذن المستقيم (Δ) يمسّ المنحنى } (C_f) \text{ في النقطة } A\left(e; e - 1 - \frac{1}{e}\right)$$

5. رسم (Δ)، (D) و (C_f) .



الموضوع الثالث

التمرين الأول:

- I / D و H نقطتان من الفضاء و I منتصف القطعة المستقيمة $[DH]$.
- (1) بين أنه، من أجل كل نقطة M من الفضاء يكون: $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MH} = MI^2 - ID^2$.
- (2) استنتج أن مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MH} = 0$ هي سطح كرة (S) يطلب تعيين مركزه ونصف قطره.
- II / الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط:
- $A(3;0;0)$ ، $B(0;6;0)$ ، $C(0;0;4)$ و $D(-5;0;1)$.
- (1) أ) تحقق أن النقط A ، B و C تعين مستويا.
 ب) بين أن الشعاع $\vec{n}(4;2;3)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .
 ج) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
- (2) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل D ويعامد المستوي (ABC) .
- (3) نسمي H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) ؛ احسب إحداثيات النقطة H .
- (4) احسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC) ، ثم اكتب معادلة لسطح الكرة (S) المذكورة في الجزء I.
- (5) نعتبر النقطة $N\left(\frac{12}{5}; \frac{6}{5}; 0\right)$.

- أ) أثبت أن N هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) .
 ب) احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

التمرين الثاني:

- 1- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$
- 2- لتكن النقط M, L, K لواحقها $z_M = -i\sqrt{3}$ ، $z_L = 1 - i$ ، $z_K = 1 + i$ في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
- علم هذه النقط .
- 3- أ) نسمي N نظيرة M بالنسبة إلى L ، عيّن z_N لاحقة N .
 ب) ليكن r الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ يحول M إلى A ويحول N إلى النقطة C .
- عيّن z_A و z_C لاحقتي النقطتين A و C على الترتيب.
 - عيّن لاحقة صورة النقطة L بالدوران r .
- 4- ليكن t الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ ذو اللاحقة $2i$ ويحول M إلى النقطة D و N إلى النقطة B .
- عيّن z_B و z_D لاحقتي النقطتين D و B على الترتيب.
 - عيّن لاحقة صورة النقطة L بالانسحاب t .
- 5- أ) بين أن: $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .
 ب) ما طبيعة الرباعي $ABCD$.

التمرين الثالث:

I- لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = ax + b - \frac{4e^x}{e^x + 2}$ حيث a و b عدنان حقيقيان.

نرمز بـ (C_g) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- عيّن a و b بحيث (C_g) يشمل النقطة $A(\ln 2; \ln 2)$ ويقبل عند النقطة A مماسا موازيا لمحور الفواصل

II - نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني

1. بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = x - 2 + \frac{8}{e^x + 2}$

2. احسب نهايتي الدالة عند $-\infty$ و $+\infty$.

3. ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

4. احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 2)$.

- استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) و (Δ') يطلب إعطاء معادلة لكل منهما.

5. بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثيتها.

6. بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-1,7 < \alpha < -1,6$.

7. ارسم (Δ) ، (Δ') و (C_f) .

III - نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = [f(x)]^2$

- عيّن اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها.

التمرين الرابع:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعلاقة : $f(x) = 1 - \frac{\ln x^2}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. ادرس تغيرات الدالة f .

2. أثبت أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم $y = 1$: (Δ) في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما.

3. احسب $f(-x) + f(x)$ ، ماذا تستنتج ؟

4. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-0,71; -0,70[$.

5. أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يشمل النقطة $A(0;1)$ ويمس المنحنى (C_f) في نقطتين

يطلب حساب إحداثيات كل منهما، اكتب معادلة المماس (T) .

6. أرسم المماس (T) والمنحنى (C_f) .

7. ناقش بيانها، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = mx + 1$

8. h الدالة العددية للمتغير الحقيقي x حيث: $h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|}$

أ) بين أن h دالة زوجية.

ب) دون دراسة تغيرات h ، أرسم (C_h) ، علل ذلك.

حل الموضوع الثالث

التمرين الأول:

الجزء I/

(1) إثبات أنه، من أجل كل نقطة M من الفضاء يكون: $\vec{MD} \cdot \vec{MH} = MI^2 - ID^2$.
 $\vec{MH} = -\vec{ID}$ فإن $[DH]$ منتصف القطعة المستقيمة MI وبما أن $\vec{MD} \cdot \vec{MH} = (\vec{MI} + \vec{ID})(\vec{MI} + \vec{IH})$
 ومنه $\vec{MD} \cdot \vec{MH} = (\vec{MI} + \vec{ID})(\vec{MI} - \vec{ID}) = MI^2 - ID^2$.

(2) استنتاج أن مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\vec{MD} \cdot \vec{MH} = 0$ هي سطح كرة (S)
 $\vec{MD} \cdot \vec{MH} = 0$ تكافئ $MI^2 - ID^2 = 0$ و تكافئ $MI = ID$ بالتالي مجموعة النقط M هي سطح كرة مركزه I ونصف قطره ID .

الجزء II/

(1 أ) التحقق أن النقط A, B, C تعين مستويا.

لدينا $\vec{AB}(-3; 6; 0)$ ، $\vec{AC}(-3; 0; 4)$ و $\frac{-3}{-3} \neq \frac{0}{6}$ إذن الشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطيا
 ومنه النقط A, B, C تعين مستويا.

(ب) تبين أن الشعاع $\vec{n}(4; 2; 3)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

لدينا $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 4(-3) + 2(6) + 3(0) = 0$ و $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 4(-3) + 2(0) + 3(4) = 0$

ومنه $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ وبالتالي $\vec{n}$ ناظم للمستوي (ABC) .

(ج) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

معادلة المستوي (ABC) من الشكل $4x + 2y + 3z + d = 0$ وبما أن A تنتمي للمستوي (ABC) فإن
 $4(3) + d = 0$ ومنه $d = -12$ وعليه معادلة المستوي (ABC) هي $4x + 2y + 3z - 12 = 0$.

(2) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل D ويعامد المستوي (ABC) .

بما أن (Δ) يعامد (P) فإن $\vec{n}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ)

من أجل كل نقطة $M(x; y; z)$ من المستقيم (Δ) لدينا: $\vec{DM} = t\vec{n}$ حيث t عدد حقيقي.

$$\begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \text{ أي } (t \in \mathbb{R}) \quad \begin{cases} x + 5 = 4t \\ y = 2t \\ z - 1 = 3t \end{cases} \text{ ومنه } (t \in \mathbb{R})$$

(3) نسمي H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .

حساب إحداثيات النقطة H .

H هي نقطة تقاطع (Δ) والمستوي (ABC) .

$$\begin{cases} x = -5 + 4t \dots\dots\dots (1) \\ y = 2t \dots\dots\dots (2) \\ z = 1 + 3t \dots\dots\dots (3) \\ 4x + 2y + 3z - 12 = 0 \dots\dots\dots (4) \end{cases} \text{ نحل الجملة}$$

نعوض كل من x و y و z من (1) و (2) و (3) بقيمهما في (4) نجد: $4(-5 + 4t) + 2(2t) + 3(1 + 3t) - 12 = 0$

$$H(-1; 2; 4) \text{ وعليه } \begin{cases} x = -5 + 4(1) \\ y = 2(1) \\ z = 1 + 3(1) \end{cases} \text{ ومنه } 29t - 29 = 0 \text{ أي } t = 1 \text{ إذن}$$

(4) حساب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC).

يمكن حساب المسافة بطريقتين

$$d(D; (ABC)) = \frac{|4(-5) + 2(0) + 3(1) - 12|}{\sqrt{29}} = \frac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29} \quad \text{طريقة 1:}$$

$$d(D; (ABC)) = DH \quad \text{طريقة 2:}$$

$$\text{لدينا } \overrightarrow{DH}(4; 2; 3) \text{ وعليه } DH = \sqrt{4^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{29} \text{ إذن } d(D; (ABC)) = \sqrt{29}.$$

كتابة معادلة لسطح الكرة (S).

I. تعيين إحداثيات I.

$$I\left(-3; 1; \frac{5}{2}\right) \text{ إذن } z_I = \frac{z_D + z_H}{2} = \frac{5}{2}, y_I = \frac{y_D + y_H}{2} = 1, x_I = \frac{x_D + x_H}{2} = -3$$

$$ID = \frac{DH}{2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$MI = ID \text{ معناه } (x+3)^2 + (y-1)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{29}{4} \text{ وهي معادلة السطح } (S).$$

$$(5) \text{ نعتبر النقطة } N\left(\frac{12}{5}; \frac{6}{5}; 0\right)$$

(أ) إثبات أن N هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB).

تكون N هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) إذا تحقق ما يلي: $\overrightarrow{CN} \perp \overrightarrow{AB}$ و $N \in (AB)$

$$\text{لدينا } \overrightarrow{CN}\left(\frac{12}{5}; \frac{6}{5}; 4\right) \text{ ومنه } \overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{12}{5}(-3) + \frac{6}{5}(6) + 0(0) = 0 \text{ وهذا يعني أن } \overrightarrow{CN} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$\text{ولدينا } \overrightarrow{AN}\left(-\frac{3}{5}; \frac{6}{5}; 0\right) \text{ و } \overrightarrow{AB}(-3; 6; 0) \text{ ومنه } \overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{AN} \text{ إذن الشعاعان } \overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{AN} \text{ مرتبطان خطياً ومنه}$$

N تنتمي للمستقيم (AB) وبالتالي N هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB).

(ب) حساب حجم رباعي الوجوه ABCD.

$$V = \frac{1}{3} S \times DH \text{ حيث } S \text{ هي مساحة المثلث } ABC.$$

$$\text{لدينا } CN = \sqrt{\frac{144}{25} + \frac{36}{25} + 16} = \sqrt{\frac{580}{25}} = \sqrt{\frac{116}{5}} = \frac{2\sqrt{29}}{\sqrt{5}}, \text{ } AB = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\text{ومنه } S = \frac{1}{2} AB \times CN = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{29}}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{29} \text{ وعليه } V = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{29} \times \sqrt{29} = 29uv$$

التمرين الثاني:

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $z^2 - 2z + 2 = 0$

$$\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2 \quad \text{للمعادلة حلان هما } z_1 = \frac{2+2i}{2} = 1+i \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{2-2i}{2} = 1-i$$

2- لتكن النقط M, L, K لواحقها $z_M = -i\sqrt{3}$ ، $z_L = 1-i$ ، $z_K = 1+i$

- تعليم النقط .

3- أ) نسمي N نظيرة M بالنسبة إلى L ،تعيين z_N لاحقة N .

$$\overrightarrow{LN} = -\overrightarrow{LM} \quad \text{معناه} \quad z_N - z_L = -(z_M - z_L) \quad \text{ومنه} \quad z_N = -(z_M - z_L) + z_L$$

$$\text{أي} \quad z_N = 2+i(\sqrt{3}-2) \quad \text{بالتالي} \quad z_N = -(-i\sqrt{3}-1+i) + 1-i$$

(ب) ليكن r الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ يحول M إلى A ويحول N إلى النقطة C - تعيين z_A و z_C لاحقتي النقطتين A و C على الترتيب.الكتابة المركبة للدوران r هي : $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z$ أي $z' = iz$.

$$r(M) = A \quad \text{معناه} \quad z_A = iz_M = i(-i\sqrt{3}) \quad \text{ومنه} \quad z_A = \sqrt{3}$$

$$r(N) = C \quad \text{معناه} \quad z_C = iz_N = i(2+i(\sqrt{3}-2)) \quad \text{ومنه} \quad z_C = 2-\sqrt{3}+2i$$

- تعيين لاحقة صورة النقطة L بالدوران r .

$$r(L) = K \quad \text{ومنه} \quad z' = iz_L = i(1-i) \quad \text{وعليه} \quad z' = 1+i = z_K$$

4- ليكن t الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ ذو اللاحقة $2i$ ويحول M إلى النقطة D و N إلى النقطة B .- تعيين z_D و z_B لاحقتي النقطتين D و B على الترتيب.العبارة المركبة للانسحاب t هي : $z' = z + z_u$ أي $z' = z + 2i$

$$t(M) = D \quad \text{معناه} \quad z_D = z_M + 2i \quad \text{ومنه} \quad z_D = -i\sqrt{3} + 2i = i(2-\sqrt{3})$$

$$t(N) = B \quad \text{معناه} \quad z_B = z_N + 2i \quad \text{ومنه} \quad z_B = 2+i(\sqrt{3}-2) + 2i \quad \text{أي} \quad z_B = 2+i\sqrt{3}$$

- تعيين لاحقة صورة النقطة L بالانسحاب t .

$$t(L) = K \quad \text{ومنه} \quad z' = z_L + 2i = 1-i + 2i \quad \text{وعليه} \quad z' = 1+i = z_K$$

$$5- أ) تبين أن: $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = i$.$$

$$z_A - z_B = \sqrt{3} - 2 - i\sqrt{3}$$

$$i(z_C - z_B) = i(2 - \sqrt{3} + 2i - 2 - i\sqrt{3}) = \sqrt{3} - 2 - i\sqrt{3}$$

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = i \quad \text{أي} \quad z_A - z_B = i(z_C - z_B) \quad \text{ومنه}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC .

$$\text{لدينا} \quad \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = i \quad \text{ومنه} \quad \left| \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \right| = 1 \quad \text{و} \quad \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$$

وهذا يعني أن $BA = BC$ و $(\overline{BC}; \overline{BA}) = \frac{\pi}{2}$ إذن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في B .

(ب) طبيعة الرباعي $ABCD$.

$$\left\{ \begin{array}{l} r(M) = A \\ r(N) = C \\ r(L) = K \end{array} \right. \text{ لدينا } [MN] \text{ ولدينا } [AC] \text{ منتصف } K \text{ وبما أن الدوران يحافظ على المنتصف فإن } K \text{ منتصف } [AC]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t(M) = D \\ t(N) = B \\ t(L) = K \end{array} \right. \text{ ولدينا } [BD] \text{ وبما أن الانسحاب يحافظ على المنتصف فإن } K \text{ منتصف } [BD]$$

ومنه الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع (قطراه متناصفان).

وزيادة على ذلك لدينا $BA = BC$ و $(\overline{BC}; \overline{BA}) = \frac{\pi}{2}$ إذن $ABCD$ مربع.

التمرين الثالث:

I - لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = ax + b - \frac{4e^x}{e^x + 2}$ حيث a و b عدنان حقيقيان.

نرمز بـ (C_g) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- تعيين a و b بحيث (C_g) يشمل النقطة $A(\ln 2; \ln 2)$ ويقبل عند النقطة مماسا موازيا لمحور الفواصل

$$(C_g) \text{ يشمل النقطة } A(\ln 2; \ln 2) \text{ معناه } g(\ln 2) = \ln 2 \text{ يكافئ } (\ln 2)a + b - \frac{4e^{\ln 2}}{e^{\ln 2} + 2} = \ln 2 \text{ وبكافئ } (\ln 2)a + b - 2 = \ln 2 \text{ أي } (\ln 2)a + b = \ln 2 + 2 \dots (1)$$

$$g'(x) = a - \frac{8e^x}{(e^x + 2)^2}, x \text{ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي } x$$

(C_g) يقبل عند النقطة A مماسا موازيا لمحور الفواصل معناه $g'(\ln 2) = 0$ وبكافئ $a - 1 = 0$ أي $a = 1$ بالتعويض عن قيمة a في المعادلة (1) نجد $(\ln 2) + b = \ln 2 + 2$ ومنه $b = 2$ وعليه $(a; b) = (1; 2)$

$$\text{II - نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة على } \mathbb{R} \text{ كما يلي: } f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$$1. \text{ تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي } x : f(x) = x - 2 + \frac{8}{e^x + 2}$$

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2} = x - 2 + 4 - \frac{4e^x}{e^x + 2} = x - 2 + \frac{4e^x + 8 - 4e^x}{e^x + 2} = x - 2 + \frac{8}{e^x + 2}$$

2. حساب نهايتي الدالة عند $-\infty$ و $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^x}{e^x + 2} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{e^x + 2} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 + \frac{8}{e^x + 2} = +\infty$$

3. دراسة اتجاه تغير الدالة f الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x) = 1 - \frac{8e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{e^{2x} + 4e^x + 4 - 8e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{e^{2x} - 4e^x + 4}{(e^x + 2)^2} = \frac{(e^x - 2)^2}{(e^x + 2)^2}$$

إذن الدالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.جدول تغيرات الدالة f

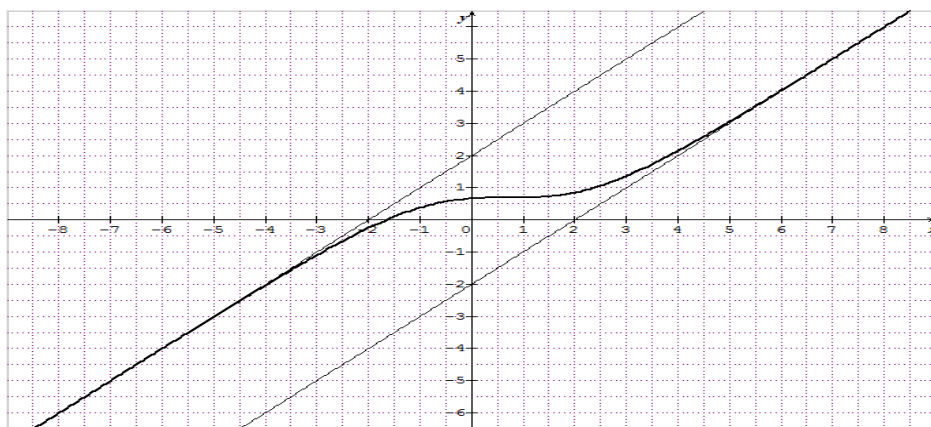
x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$

4. حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 2)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + 2 = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{e^x + 2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 2 = 2 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 4e^x = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{4e^x}{e^x + 2} = 0$$

- استنتاج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) و (Δ') يطلب إعطاء معادلة لكل منهما.لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 2) = 0$ ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y = x - 2$ بجوار $+\infty$.و لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2) = 0$ ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ') مائل معادلته $y = x + 2$ بجوار $-\infty$.5. تبين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثياتها.بما أن $f'(x)$ تنعدم عند العدد $\ln 2$ ولا تغير من إشارتها فإن النقطة $A(\ln 2; \ln 2)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) .6. تبين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-1,7 < \alpha < -1,6$.الدالة f مستمرة ومتزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ وبالخصوص على المجال $[-1,7; -1,6]$ ولدينا $f(-1,6) = 0,03$ و $f(-1,7) = -0,03$ أي $f(-1,7) \times f(-1,6) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[-1,7; -1,6]$ بحيث $f(\alpha) = 0$ وبالتالي (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-1,7 < \alpha < -1,6$.7. رسم (Δ) ، (Δ') و (C_f) .



III - نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = [f(x)]^2$.

- تعيين اتجاه تغير الدالة h .

نضع $u(x) = x^2$ عندئذ $h(x) = [f(x)]^2 = u[f(x)] = (u \circ f)(x)$ لدينا $u'(x) = 2x$ ومنه $h'(x) = f'(x) \times u'(f(x)) = f'(x) \times 2f(x) = 2f'(x) \times f(x)$ لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $2f'(x) \geq 0$ ومنه إشارة $h'(x)$ هي نفس إشارة $f(x)$.

x	$-\infty$	α	$\ln 2$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	+
$h'(x)$	-	0	+	+

الدالة h متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; \alpha]$ و متزايدة تماماً على المجال $[\alpha; +\infty[$.

يمكن اتباع طريقة اتجاه تغير مركب دالتين:

لدينا الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; \alpha]$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty; 0]$ والدالة u متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 0]$ وبالتالي الدالة h متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; \alpha]$.
و لدينا الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[\alpha; +\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $[0; +\infty[$ والدالة u متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$ وبالتالي الدالة h متزايدة تماماً على المجال $[\alpha; +\infty[$.

بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

جدول تغيرات الدالة h .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

$$h(\alpha) = [f(\alpha)]^2 = 0$$

التمرين الرابع:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعلاقة: $f(x) = 1 - \frac{\ln x^2}{x}$
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. دراسة تغيرات الدالة f .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{2 \ln -x}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2 \ln t}{t} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2 \ln x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - \frac{\ln x^2}{x} = -\infty \quad \text{إذن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln x^2}{x} = +\infty \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln x^2 = -\infty$$

$$\text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x^2 = -\infty \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x^2}{x} = -\infty \quad \text{إذن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{\ln x^2}{x} = +\infty$$

$$f'(x) = -\frac{\left(\frac{2}{x}\right)x - \ln x^2}{x^2} = \frac{\ln x^2 - 2}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $\ln x^2 - 2$.

$$f'(x) = 0 \quad \text{معناه} \quad \ln x^2 - 2 = 0 \quad \text{ويكافئ} \quad \ln x^2 = 2 \quad \text{ويكافئ} \quad x^2 = e^2 \quad \text{أي} \quad x = e \quad \text{أو} \quad x = -e$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{معناه} \quad \ln x^2 - 2 > 0 \quad \text{ويكافئ} \quad \ln x^2 > 2 \quad \text{ويكافئ} \quad x^2 > e^2 \quad \text{أي} \quad x > e \quad \text{أو} \quad x < -e$$

إشارة $f'(x)$.

x	$-\infty$	$-e$	0	e	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$

الدالة f متزايدة على كل من $[-e; -\infty[$ و $[e; +\infty[$ ومتناقصة على كل من $]-e; 0[$ و $]0; e]$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	$-e$	0	e	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$1 \nearrow \frac{e+2}{e} \searrow -\infty$			$+\infty \searrow \frac{e-2}{e} \nearrow 1$		

2. إثبات أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم $(\Delta): y=1$ في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما.

$$f(x) = 1 \quad \text{معناه} \quad 1 - \frac{\ln x^2}{x} = 1 \quad \text{يكافئ} \quad \ln x^2 = 0 \quad \text{ويكافئ} \quad x^2 = 1 \quad \text{أي} \quad x = 1 \quad \text{أو} \quad x = -1$$

$$\text{إذن} \quad (C_f) \cap (\Delta) = \{A(1;1), B(-1;1)\}$$

3. حساب $f(-x) + f(x)$.

$$f(-x) + f(x) = 1 - \frac{\ln(-x)^2}{-x} + 1 - \frac{\ln x^2}{x} = 2 + \frac{\ln x^2}{x} - \frac{\ln x^2}{x} = 2$$

ليكن x عددا حقيقيا غير معدوم؛

من أجل $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا $-x \in \mathbb{R}^*$ ولدينا $f(-x) + f(x) = 2$ وعليه النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

4. تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-0,71; -0,70[$

الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-0,71; -0,70[$ ولدينا $f(-0,71) \approx 0,04$ ، $f(-0,70) \approx -0,02$ أي $f(-0,71) \times f(-0,70) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α في المجال $]-0,71; -0,70[$ بحيث $f(\alpha) = 0$.

5. إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يشمل النقطة $A(0;1)$ ويمس المنحنى (C_f) في نقطتين.

لدينا معادلة المماس (T) من الشكل: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$$-x_0 \left(\frac{\ln x_0^2 - 2}{x_0^2} \right) + 1 - \frac{\ln x_0^2}{x_0} = 1 \text{ وتكافئ } 1 = f'(x_0)(0 - x_0) + f(x_0) \text{ معناه } A(0;1) \in (T)$$

$$\text{وتكافئ } \left(\frac{-\ln x_0^2 + 2}{x_0} \right) - \frac{\ln x_0^2}{x_0} = 0 \text{ وتكافئ } \frac{-2 \ln x_0^2 + 2}{x_0} = 0 \text{ وتكافئ } \ln x_0^2 = 1 \text{ ومنه } x_0^2 = e$$

أي $x_0 = \sqrt{e}$ أو $x_0 = -\sqrt{e}$. إذن (C_f) يقبل مماسين يشملان النقطة $A(0;1)$ عند النقطتين اللتين فاصلتيهما $\sqrt{e}$

و $-\sqrt{e}$ ولدينا $f'(\sqrt{e}) = -\frac{1}{e}$ و $f'(-\sqrt{e}) = -\frac{1}{e}$ إذن المماسان متوازيان وبالتالي هما متطابقان أي أن المنحنى

(C_f) يقبل مماسا (T) يشمل النقطة $A(0;1)$ ويمس المنحنى (C_f) في النقطتين اللتين إحداثيتيهما $(\sqrt{e}; f(\sqrt{e}))$ و $(-\sqrt{e}; f(-\sqrt{e}))$.

كتابة معادلة المماس (T) .

$$y = f'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e}) + f(\sqrt{e}) \text{ ومنه } y = -\frac{1}{e}x + 1$$

6. رسم المماس (T) والمنحنى (C_f) .

7. المناقشة بيانيا، وحسب قيم الوسيط الحقيقي

m عدد حلول المعادلة: $f(x) = mx + 1$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f)

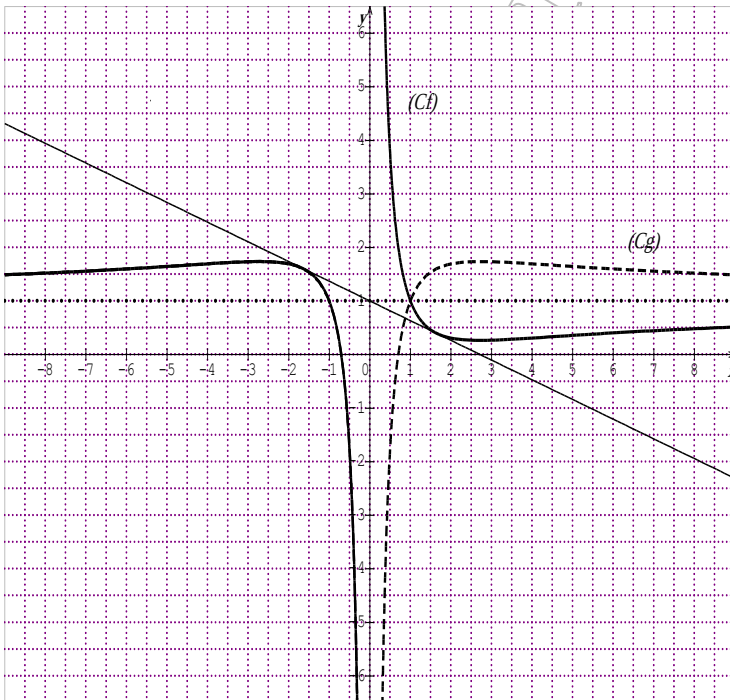
والمستقيم ذي المعادلة $y = mx + 1$.

إذا كان $m < -\frac{1}{e}$ فإن المعادلة ليس لها حلول.

إذا كان $m = -\frac{1}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلين مضاعفين.

إذا كان $-\frac{1}{e} < m < 0$ فإن المعادلة تقبل أربعة حلول.

إذا كان $m \geq 0$ فإن المعادلة تقبل حلين.



8. الدالة العددية للمتغير الحقيقي x حيث: $h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|}$.

أ) تبين أن h دالة زوجية.

من أجل $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا $-x \in \mathbb{R}^*$.

$$h(-x) = 1 + \frac{\ln(-x)^2}{|-x|} = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|} = h(x) \text{ لدينا}$$

$$\begin{cases} h(x) = f(-x); x > 0 \\ h(x) = f(x); x < 0 \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{x}; x > 0 \\ h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{-x}; x < 0 \end{cases}$$

إذن (C_h) ينطبق على (C_f) في المجال $]-\infty; 0]$ وبما أن h زوجية فإن (C_h) متناظر بالنسبة إلى حامل محور الترتيب.

الموضوع الرابع**التمرين الأول:**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط:

$$A(3; -2; -1), B(5; -3; 2), C(2; 3; 2), D(1; -5; -2).$$

- (1) بين أن النقط A, B, C تعين مستويا ؛ نرسم له بالرمز (P) .
- (2) بين أن الشعاع $\vec{n}(2; 1; -1)$ ناظمي للمستوي (P) ، ثم جد معادلة ديكارتية للمستوي (P) .
- (3) أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة D ويعامد (P) .
ب) عيّن إحداثيات النقطة E ؛ المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P) .
- (4) H المسقط العمودي للنقطة D على المستقيم (AB) ، و λ عدد حقيقي حيث: $\overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{AB}$.
أ) بين أن: $\lambda = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}$.
ب) استنتج العدد الحقيقي λ وإحداثيات النقطة H ، ثم المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB) .

التمرين الثاني:

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\square$ المعادلة: $(z-i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$.
- (2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
نسمي A, B, C نقط المستوي التي لاحتقاتها على الترتيب $z_1 = \sqrt{3} + i, z_2 = \sqrt{3} - i$ و $z_3 = i$.
أ) اكتب العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسّي.
ب) استنتج قياسا للزاوية $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA})$ وطبيعة المثلث OAB .
ج) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا موجبا.
د) هل توجد قيم للعدد الطبيعي n يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفا ؟ برّر إجابتك.
- (3) أ) عيّن العبارة المركبة للنشابه المباشر S الذي مركزه A ويحول B إلى C ، محددًا نسبته وزاويته.
ب) استنتج طبيعة المثلث ABC .
- (4) أ) عيّن العناصر المميزة لـ (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق:
$$|z - z_1|^2 + |z - z_3|^2 = 5$$

ب) عيّن (E') مجموعة النقط M من المستوي التي لاحتقتها z حيث: $|z - z_1| = |z - z_3|$.

التمرين الثالث:

- نعتبر الدالة f المعرفة على $\square$ كما يلي: $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- I** نعتبر الدالة g المعرفة على $\square$ كما يلي: $g(x) = e^x - x - 1$.
- (1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .
 - (2) استنتج أن $g(x) \geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x .

3) علل أنه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x - x > 0$.

II-1. أ) احسب نهايتي f عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب) فسّر النتائج هندسياً.

2. أ) احسب $f'(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أ) عيّن معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0.

ب) ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T) .

ج) علل أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف، يطلب تعيين إحداثياتها.

4. أرسم (T) و (C_f) .

التمرين الرابع:

I- g هي الدالة المعرفة على $]-1;3[$ كما يلي: $g(x) = 2\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$.

1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بين أن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α يحقق $-0,8 < \alpha < -0,7$.

3) عيّن، حسب قيم x إشارة $g(x)$.

4) h هي الدالة المعرفة على المجال $]-1;3[$ بـ: $h(x) = [g(x)]^2$.

أ) احسب $h'(x)$ بدلالة كل من $g(x)$ و $g'(x)$.

ب) عيّن إشارة $h'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة h .

II- f هي الدالة المعرفة على المجال $]-1;3[$ كما يلي:
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{\ln(x+1)}, x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- بين أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند الصفر، ثم اكتب معادلة (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

2- أ) بين أنه، من أجل كل x من $]-1;0[\cup]0;3[$ ، $f'(x) = \frac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب) بين أن: $f(\alpha) = 2\alpha(\alpha+1)$ ، ثم عيّن حصراً لـ $f(\alpha)$.

ج) احسب $f(3)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3- أ) بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1;3[$ فإن: $x - \ln(x+1) \geq 0$.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المماس (T) .

4- عيّن معادلة للمستقيم (T') الموازي لـ (T) والذي يتقاطع مع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3.

5- أرسم (T) ، (T') و (C_f) .

6- ناقش بياناً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$.

حل الموضوع الرابع

التمرين الأول:

(1) إثبات أن النقط A, B, C تعين مستويا. $\overrightarrow{AB} (2; -1; 3)$ و $\overrightarrow{AC} (-1; 5; 3)$ و $\frac{-1}{2} \neq \frac{5}{-1}$ ومنه إحداثيات الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير متناسبةأي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي النقط A, B, C تعين مستويا.(2) إثبات أن الشعاع $\vec{n} (2; 1; -1)$ ناظمي للمستوي (P) .

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2(2) + 1(-1) - 1(3) = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2(-1) + 1(5) - 1(3) = 0 \end{cases} \text{ لدينا}$$

ومن الشعاع $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وعليه فإن الشعاع $\vec{n}$ ناظمي للمستوي (ABC) .معادلة ديكارتية للمستوي (P) .من أجل كل نقطة $M (x; y; z)$ من (P) لدينا: $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ مع $\overrightarrow{AM} (x - 3; y + 2; z + 1)$ $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ معناه $2(x - 3) + (y + 2) - (z + 1) = 0$ ومنه $2x + y - z - 5 = 0$ هي معادلة المستوي (P) .(3) أ) التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة D ويعامد (P) .بما أن (Δ) يعامد (P) فإن $\vec{n}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) ولدينا $D \in (\Delta)$.لتكن $M (x; y; z)$ من المستقيم (Δ) فإنها تحقق: $\overrightarrow{DM} = t\vec{n} / t \in \mathbb{R}$ مع $\overrightarrow{DM} = (x - 1; y + 5; z + 2)$.

$$(\Delta): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -5 + t \\ z = -2 - t \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x - 1 = 2t \\ y + 5 = t \\ z + 2 = -t \end{cases} \text{ ومنه}$$

ب) تعيين إحداثيات النقطة E ؛ المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P) .إحداثيات النقطة E ؛ المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P) هي نقطة تقاطع المستقيمالعمودي على (P) والمار من النقطة D مع المستوي (P) أي هي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوي (P) .

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \dots\dots\dots (1) \\ y = -5 + t \dots\dots\dots (2) \\ z = -2 - t \dots\dots\dots (3) \\ 2x + y - z - 5 = 0 \dots\dots\dots (4) \end{cases} \text{ نحل الجملة}$$

نعوض كل من x و y و z من (1) و (2) و (3) بقيمهما في (4) نجد:

$$2(1 + 2t) + (-5 + t) - (-2 - t) - 5 = 0 \text{ ومنه } 6t - 6 = 0 \text{ أي } t = 1.$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \\ z = -3 \end{cases} \text{ ومنه } E (3; -4; -3) \text{ إذن}$$

$$(4) \text{ أ) إثبات أن: } \lambda = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}$$

لدينا H المسقط العمودي للنقطة D على المستقيم (AB) ومنه $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB}$

ولدينا $\overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{AB}$ إذن $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ ومنه $\lambda = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}$.

(ب) استنتاج العدد الحقيقي λ .

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 2(-2) - 1(-3) + 3(-1) = -4$ ومنه $\overrightarrow{AB} (2; -1; 3)$ و $\overrightarrow{AD} (-2; -3; -1)$

و $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{14}$ إذن $\lambda = \frac{-4}{14} = -\frac{2}{7}$.

إحداثيات النقطة H .

نضع $H(x'; y'; z')$.

لدينا $\overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{AB}$ وعليه $\overrightarrow{AH} (x' - 3; y' + 2; z' + 1)$ و $\lambda \overrightarrow{AB} (2\lambda; -\lambda; 3\lambda)$ معناه $x' - 3 = 2\lambda$ و $y' + 2 = -\lambda$ و $z' + 1 = 3\lambda$ ومنه $x' = 2\lambda + 3$ و $y' = -\lambda - 2$ و $z' = 3\lambda - 1$.

وبما أن $\lambda = -\frac{2}{7}$ فإن: $x' = \frac{17}{7}$ و $y' = -\frac{12}{7}$ و $z' = -\frac{13}{7}$ إذن $H\left(\frac{17}{7}; -\frac{12}{7}; -\frac{13}{7}\right)$.

المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB) .

$d(D; (AB)) = DH = \frac{3\sqrt{70}}{7}$

التمرين الثاني:

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة □ المعادلة: $(z - i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$.

$(z - i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$ يكافئ $z = i$ أو $(1) z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

نحل المعادلة (1).

$\Delta' = 3 - 4 = -1 = i^2$ للمعادلة حلان هما $z = \sqrt{3} + i$ أو $z = \sqrt{3} - i$.

(2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نسمي A, B, C ونقط المستوي التي لاحتقاتها على الترتيب $z_1 = \sqrt{3} + i$ ، $z_2 = \sqrt{3} - i$ و $z_3 = i$.

(أ) كتابة العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسّي.

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} = \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

(ب) استنتاج قياسا للزاوية $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA})$ وطبيعة المثلث OAB .

ولدينا $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 1$ ومنه $OA = OB$ إذن المثلث OAB متقايس الأضلاع. ومنه $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\pi}{3}$ ومنه $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{3}$.

(ج) تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا موجبا.

لدينا $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{3}}$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n \text{ حقيقي موجب معناه } \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = 2k\pi \text{ ومنه } \frac{n\pi}{3} = 2k\pi \text{ وعليه } n=6k \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}.$$

(د) هل توجد قيم للعدد الطبيعي n يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفا ؟

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n \text{ تخيلي صرف معناه } \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ومعناه } \frac{n\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ومنه } \frac{n}{3} = \frac{1}{2} + k$$

أي $n = \frac{3}{2} + 3k$ وتكافئ (1) $2n = 3 + 6k$ والمعادلة (1) لا تقبل حولا في $\mathbb{Z}$ لأن $2n$ زوجي و $3 + 6k$ فردي

ومنه لا يوجد عدد طبيعي n بحيث يكون العدد المركب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفا.

(3 أ) تعيين العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه A ويحول B إلى C ، محددا نسبته وزاويته.

العبارة المركبة للتشابه المباشر S من الشكل $z' - z_1 = \alpha(z - z_1)$ وبما أن S يحول B إلى C فإن

$$\alpha = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{i - \sqrt{3} - i}{\sqrt{3} - i - \sqrt{3} - i} = \frac{-\sqrt{3}}{-2i} = \frac{-\sqrt{3}}{2}i = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \text{ ومنه } z_3 - z_1 = \alpha(z_2 - z_1)$$

ومنه العبارة المركبة للتشابه المباشر S هي $z' - z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}(z - z_1)$ أي $z' = -\frac{\sqrt{3}}{2}iz + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$

نسبة التشابه S هي $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

(ب) استنتاج طبيعة المثلث ABC

بما أن $S(B) = C$ فإن $(\overline{AB}; \overline{AC}) = -\frac{\pi}{2}$ ومنه المثلث ABC قائم في A .

(4 أ) تعيين العناصر المميزة لـ (E) مجموعة النقاط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق:

$$|z - z_1|^2 + |z - z_3|^2 = 5$$

$$AM^2 + CM^2 = 5 \text{ تكافئ } |z - z_1|^2 + |z - z_3|^2 = 5$$

طريقة 1:

نضع $M(x; y)$

$$AM^2 = (x - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 \text{ ومنه } AM = \sqrt{(x - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2}$$

$$CM^2 = x^2 + (y - 1)^2 \text{ ومنه } BM = \sqrt{x^2 + (y + 1)^2}$$

$$AM^2 + CM^2 = (x - \sqrt{3})^2 + x^2 + 2(y - 1)^2 = 2x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 + 2(y - 1)^2 \text{ ومنه}$$

$$AM^2 + CM^2 = 5 \text{ معناه } 2x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 + 2(y - 1)^2 = 5 \text{ ومعناه } x^2 - \sqrt{3}x + (y - 1)^2 = 1$$

$$\text{وتكافئ } \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{7}{4} \text{ أي } \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} + (y - 1)^2 = 1$$

إذن (E) هي الدائرة التي مركزها $I\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$ ونصف قطرها $\sqrt{\frac{7}{4}}$.

طريقة 2:

لتكن I منتصف [AC] ومنه $z_I = \frac{z_1 + z_3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i$.

$$(\overline{AI} + \overline{IM})^2 + (\overline{CI} + \overline{IM})^2 = 5 \text{ معناه } AM^2 + CM^2 = 5$$

$$\text{ومعناه } AI^2 + IM^2 + 2\overline{AI} \cdot \overline{IM} + CI^2 + IM^2 + 2\overline{CI} \cdot \overline{IM} = 5$$

$$2IM^2 - 2\overline{IM}(\overline{IA} + \overline{IC}) + AI^2 + CI^2 = 5 \text{ تكافئ}$$

$$\text{ولدينا } \overline{IA} + \overline{IC} = \overline{0} \text{ ومنه } 2\overline{IM}(\overline{IA} + \overline{IC}) = 0 \text{ لأن } I \text{ منتصف } [AC] \text{ ومنه } 2IM^2 + AI^2 + CI^2 = 5 \dots (1)$$

$$CI^2 = |z_I - z_C|^2 = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} + i - 1\right|^2 = \frac{3}{4}, \quad AI^2 = |z_I - z_A|^2 = \left|-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\right|^2 = \frac{3}{4}$$

$$(1) \text{ تكافئ } 2IM^2 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 5 \text{ أي } IM^2 = \frac{7}{4} \text{ ومنه } IM = \sqrt{\frac{7}{4}}$$

بالتالي (E) هي الدائرة التي مركزها $I\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$ ونصف قطرها $\sqrt{\frac{7}{4}}$.

(ب) تعيين (E') مجموعة النقط M من المستوي التي لاحتقتها z حيث: $|z - z_1| = |z - z_3|$.

$$|z - z_1| = |z - z_2| \text{ تكافئ } AM = CM \text{ إذن } (E') \text{ هي محور القطعة } [AC].$$

التمرين الثالث:

I نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = e^x - x - 1$.

1) دراسة اتجاه تغير الدالة g.

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $g'(x) = e^x - 1$

$$g'(x) = 0 \text{ معناه } e^x - 1 = 0 \text{ ويكافئ } e^x = 1 \text{ أي } x = 0$$

$$g'(x) > 0 \text{ معناه } e^x - 1 > 0 \text{ ويكافئ } e^x > 1 \text{ أي } x > 0$$

$$g'(x) < 0 \text{ معناه } e^x - 1 < 0 \text{ ويكافئ } e^x < 1 \text{ أي } x < 0$$

إذن الدالة g متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 0]$ و متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$.

2) استنتاج أن $g(x) \geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x.

$$\text{لدينا } g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$$

الدالة g متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 0]$ و متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$ إذن فهي تقبل قيمة حدية صغرى

تبلغها عند $x = 0$ وعليه من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x) \geq g(0)$ أي $g(x) \geq 0$.

3) تحليل أنه، من أجل كل عدد حقيقي x، $e^x - x > 0$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x) \geq 0$ يكافئ $e^x - x - 1 \geq 0$ أي $e^x - x \geq 1$ وبالتالي $e^x - x > 0$

II-1. أ) حساب نهايتي f عند $-\infty$ و $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x} - 1 \right)} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x} - 1 \right)} = 0$$

(ب) تفسير النتائج هندسيا.

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = -1$ بجوار $-\infty$.و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 0$ بجوار $+\infty$.2. أ) حساب $f'(x)$.ليكن $x \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$f'(x) = \frac{1(e^x - x) - x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x - x - xe^x + x}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}$$

(ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f لدينا $e^x > 0$ و $(e^x - x)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(1 - x)$ من أجل $x \in]1; +\infty[$ ، $1 - x < 0$ ومنه $f'(x) < 0$ وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على المجال $[1; +\infty[$ من أجل $x \in]-\infty; 1]$ ، $1 - x > 0$ ومنه $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 1]$ جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	-1	$\frac{1}{e-1}$	0

3. أ) تعيين معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0.معادلة المماس (T) هي: $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ أي $y = x$.(ب) دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T) .

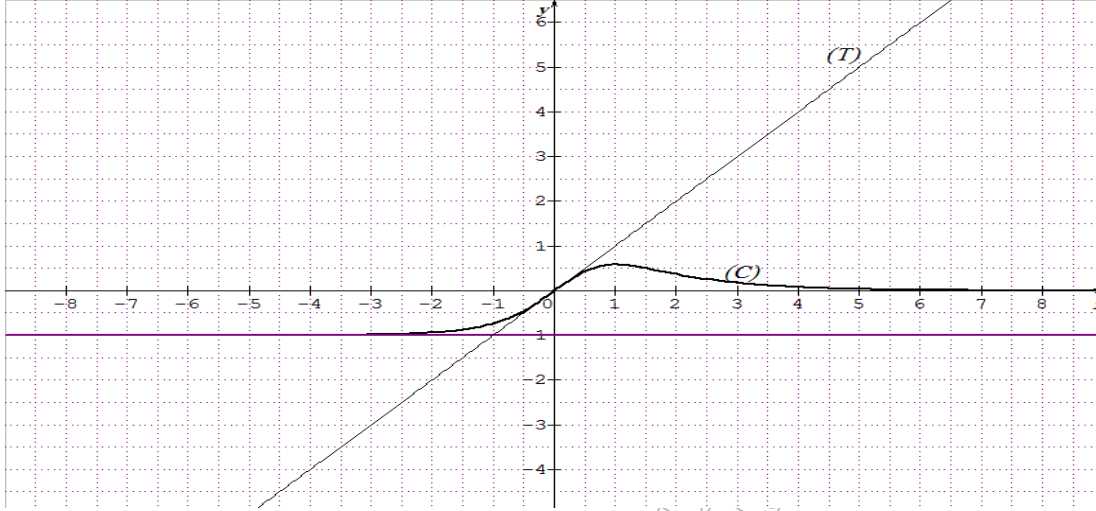
$$\text{ليكن } x \text{ عددا حقيقيا: } f(x) - x = \frac{x}{e^x - x} - x = \frac{x - xe^x + x^2}{e^x - x} = \frac{-x(e^x - x - 1)}{e^x - x} = \frac{-xg(x)}{e^x - x}$$

لدينا $g(x) \geq 0$ و $e^x - x > 0$ ومنه إشارة $f(x) - x$ هي نفس إشارة $-x$ إذا كان $x > 0$ فإن $-x < 0$ ومنه $f(x) - x < 0$ إذا كان $x < 0$ فإن $-x > 0$ ومنه $f(x) - x > 0$ وعليه من أجل $x \in]-\infty; 0]$ ، (C_f) يوجد فوق (T) ، ومن أجل $x \in]0; +\infty[$ ، (C_f) يوجد تحت (T)

و (T) يخرق (C_f) في النقطة O مبدأ المعلم.

(ج) تعليل أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف، يطلب تعيين إحداثياتها.

بما أن المماس (T) يخرق المنحنى (C_f) في نقطة التماس O فإن النقطة O هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).
رسم (T) و (C_f).



التمرين الرابع:

I- g هي الدالة المعرفة على $[-1; 3]$ كما يلي: $g(x) = 2\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$.

1) دراسة تغيرات الدالة g.

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} [2(x+1)\ln(x+1) - x] = +\infty$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} 2(x+1)\ln(x+1) = \lim_{x \rightarrow 0} 2t \ln t = 0$$

$$g(3) = 2\ln 4 - \frac{3}{4}$$

الدالة g تقبل الاشتقاق على $[-1; 3]$ ولدينا:

$$g'(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1)-1}{(x+1)^2} = \frac{2x+1}{(x+1)^2}$$

إشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة $2x+1$.

x	-1	$-\frac{1}{2}$	3
g'(x)	-	0	+

نستنتج هكذا أن الدالة g متناقصة تماماً على المجال $[-1; -\frac{1}{2}]$ و متزايدة تماماً على المجال $[-\frac{1}{2}; 3]$.

جدول تغيرات الدالة g .

x	-1	α	$-\frac{1}{2}$	0	3
$g'(x)$	-	-	0	+	+
$g(x)$	$+\infty$		$-2\ln 2 + 1$	$4\ln 2 - \frac{3}{4}$	

(2) تبين أن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α يحقق $-0,8 < \alpha < -0,7$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$ وتأخذ قيمها في المجال $[-2\ln 2 + 1; +\infty[$ و

$0 \in [-2\ln 2 + 1; +\infty[$ إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$ وكذلك لدينا الدالة g

مستمرة ومنتزعة تماما على المجال $\left[-\frac{1}{2}; 3\right]$ وتأخذ قيمها في المجال $\left[-2\ln 2 + 1; 4\ln 2 - \frac{3}{4}\right]$ و

$0 \in \left[-2\ln 2 + 1; 4\ln 2 - \frac{3}{4}\right]$ إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $\left[-\frac{1}{2}; 3\right]$. وبما أن

$$g(0) = 2\ln(0+1) - \frac{0}{0+1} = 0 \quad \text{فإن } \beta = 0 \text{ ولدينا } g(-0,8) \approx 0,8 \text{ و } g(-0,7) \approx -0,8 \text{ أي}$$

$$g(-0,8) \times g(-0,7) < 0 \text{ ومنه } -0,8 < \alpha < -0,7$$

(3) تعيين، حسب قيم x إشارة $g(x)$.

x	-1	α	0	3
$g(x)$	+	0	-	+

(4) h هي الدالة المعرفة على المجال $[-1; 3]$ بـ: $h(x) = [g(x)]^2$.

(أ) حساب $h'(x)$ بدلالة كل من $g(x)$ و $g'(x)$.

$$h'(x) = 2g'(x) \times g(x)$$

(ب) تعيين إشارة $h'(x)$.

x	-1	α	$-\frac{1}{2}$	0	3
$g(x)$	+	0	-	0	+
$g'(x)$	-	-	0	+	+
$h'(x)$	-	0	+	0	+

الدالة h متزايدة تماما على كل من $\left[\alpha; -\frac{1}{2}\right]$ و $[0; 3]$ ومتناقصة تماما على كل من $[-1; \alpha]$ و $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$.

جدول تغيرات الدالة h .

x	-1	α	$-\frac{1}{2}$	0	3
$h'(x)$	-	0	+	0	+
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		0	$(-2\ln 2 + 1)^2$	0	$h(3)$

$$\text{II- } f \text{ هي الدالة المعرفة على المجال }]-1; 3] \text{ كما يلي: } \begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{\ln(x+1)}, x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- تبين أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند الصفر.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{\ln(x+1)} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(x+1)}{x}} = 1$$

إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0.

كتابة معادلة لـ (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

$$(T): y = x \quad \text{ومنه} \quad y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$2- \text{ أ) بَيِّنْ أَنَّهُ، مِنْ أَجْلِ} \quad f'(x) = \frac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$$

من أجل $x \in]-1; 0[\cup]0; 3]$ لدينا:

$$f'(x) = \frac{2x \ln(x+1) - \frac{1}{x+1} \cdot x^2}{(\ln(x+1))^2} = \frac{x \left[2\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \right]}{(\ln(x+1))^2} = \frac{xg(x)}{(\ln(x+1))^2}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f

x	-1	α	0	3
$g(x)$	+	0	-	+
x	-	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+	+

نستنتج هكذا أن الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]-1; \alpha]$ و متزايدة تماماً على المجال $[\alpha; 3]$.

ب) تبين أن: $f(\alpha) = 2\alpha(\alpha+1)$.

$$g(\alpha) = 0 \quad \text{معناه} \quad 2\ln(\alpha+1) - \frac{\alpha}{\alpha+1} = 0 \quad \text{تكافئ} \quad \ln(\alpha+1) = \frac{\alpha}{2(\alpha+1)} \quad \text{تكافئ} \quad \frac{1}{\ln(\alpha+1)} = \frac{2(\alpha+1)}{\alpha}$$

$$\text{ومنه} \quad f(\alpha) = 2\alpha(\alpha+1) \quad \text{أي} \quad \frac{\alpha^2}{\ln(\alpha+1)} = \frac{2\alpha^2(\alpha+1)}{\alpha} = 2\alpha(\alpha+1)$$

تعيين حصرا لـ $f(\alpha)$.

$$-0,8 < \alpha < -0,7 \text{ معناه } -1,6 < 2\alpha < -1,4 \text{ ويكافئ (1) } 1,4 < -2\alpha < 1,6 \dots\dots\dots$$

$$\text{ولدينا (2) } 0,2 < \alpha + 1 < 0,3 \dots\dots\dots$$

$$\text{إذن } -0,48 < f(\alpha) < -0,28 \text{ أي } -0,48 < 2\alpha(\alpha+1) < -0,28 \text{ ومنه } 0,28 < -2\alpha(\alpha+1) < 0,48$$

(ج) حساب $f(3)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

$$f(3) = \frac{3^2}{\ln(3+1)} = \frac{9}{\ln 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} x^2 = 1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{\ln(x+1)} = 0$$

جدول تغيرات الدالة f .

x	-1	α	3
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	$\frac{9}{\ln 4}$

3- أ) تبين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; 3]$ فإن: $x - \ln(x+1) \geq 0$.

$$\text{نضع } u(x) = x - \ln(x+1)$$

$$\text{من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من }]-1; 3] \text{ لدينا: } u'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

إشارة $u'(x)$ هي نفس إشارة x .

$$\text{من أجل }]-1; 0], u'(x) < 0 \text{ ومن أجل }]0; 3], u'(x) > 0$$

إذن الدالة u متناقصة تماما على المجال $]-1; 0]$ و متزايدة تماما على المجال $]0; 3]$ ولها قيمة حدية صغرى على

المجال $]-1; 3]$ تبلغها من أجل $x = 0$ وعليه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; 3]$ ، $u(x) \geq 0$ أي

$$x - \ln(x+1) \geq 0$$

(ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المماس (T) .

$$f(x) - x = \frac{x^2}{\ln(x+1)} - x = \frac{x^2 - x \ln(x+1)}{\ln(x+1)} = \frac{x(x - \ln(x+1))}{\ln(x+1)} = \frac{xu(x)}{\ln(x+1)}$$

$$\ln(x+1) > 0 \text{ يكافئ } x+1 > 1 \text{ أي } x > 0$$

$$\ln(x+1) < 0 \text{ يكافئ } 0 < x+1 < 1 \text{ أي } -1 < x < 0$$

x	-1	0	3
x	-	0	+
$u(x)$	+	0	+
$\ln(x+1)$	-	0	+
$f(x)-x$	+	0	+
الوضعية	(C_f) فوق (T) (T) يمس (C_f) في النقطة O		

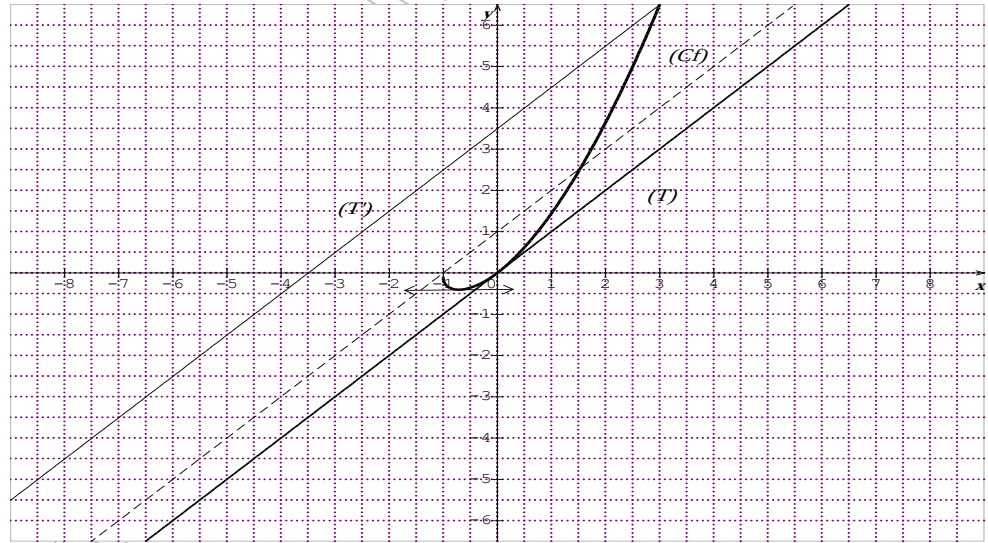
4- تعيين معادلة للمستقيم (T') الموازي لـ (T) والذي يتقاطع مع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3.

معادلة المستقيم (T') من الشكل $y = x + b$ وبما أنه يتقاطع مع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3 فهو يشمل النقطة

$$A\left(3; \frac{9}{\ln 4}\right) \text{ إذن } \frac{9}{\ln 4} = 3 + b \text{ ومنه } b = \frac{9}{\ln 4} - 3$$

وعليه معادلة المستقيم (T') هي $y = x + \frac{9}{2\ln 2} - 3$

5- رسم (T) ، (T') و (C_f) .



6- المناقشة بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$.

حلول المعادلة إن وجدت هي فواصل النقط المشتركة بين (C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y = x + m$.

إذا كان $m < 0$ أو $m > \frac{9}{2\ln 2} - 3$ فإن المعادلة لا تقبل حلاً.

إذا كان $m = 0$ فإن المعادلة لها حلاً واحداً مضاعفاً.

إذا كان $0 < m < 1$ فإن المعادلة لها حلان مختلفان.

إذا كان $1 \leq m \leq \frac{9}{2\ln 2} - 3$ فإن المعادلة لها حل وحيد.

الموضوع الخامس

التمرين الأول:

- الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط:
- $A(1; 4; -5)$ ، $B(3; 2; -4)$ ، $C(5; 4; -3)$ و $D(-2; 8; 4)$ والشعاع $\vec{u}(1; 5; -1)$.
1. بين أن $x - 2z - 11 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
 2. حدّد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (T) الذي يشمل النقطة D ويوازي $\vec{u}$.
 3. ليكن (P) المستوي ذو المعادلة: $x - y - z - 7 = 0$.

$$\begin{cases} x = 11 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

أ - بين أن المستويين (ABC) و (P) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) تمثيله الوسيطى

- ب - بين أن المستقيمين (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.
4. تعطى النقطتان $E(3; 0; -4)$ و $F(-3; 3; 5)$ ، تحقق أن: $E \in (\Delta)$ و $F \in (T)$.
5. لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء حيث: $\overline{ME} \cdot \overline{FE} = \alpha$ مع α عدد حقيقي.
- أ - جد بدلالة α معادلة ديكارتية لـ (Γ) واستنتج أن (Γ) مستو، $\overline{EF}$ شعاع ناظمي له.
- ب - عيّن قيمة α حتى يكون (Γ) المستوي المحوري للقطعة $[EF]$.

التمرين الثاني:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $z^3 + z^2 + 3z - 5 = 0$(1)
2. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط A ، B و C لواحقتها على الترتيب
- $$z_C = -1 - 2i \text{ ، } z_B = -1 + 2i \text{ ، } z_A = 1$$
- اكتب العدد $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي واستنتج طبيعة المثلث ABC .
3. لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث: $z = -1 + 2e^{i\theta}$ مع $\theta \in]-\pi; \pi[$
- ولتكن (F) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث: $z = -1 - 2i + \lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$ مع $\lambda \in \mathbb{R}$
- أ - تحقق أن النقطة A تنتمي إلى كل من (E) و (F) .
- ب - اكتب معادلة ديكارتية لكل من (E) و (F) ؛ و عيّن نقطتي تقاطعهما.
4. ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ويحول A إلى B
- أ - اكتب العبارة المركبة للتشابه S و عيّن نسبته وزاويته.
- ب - عيّن (E') و (F') صورتا (E) و (F) بالتشابه S .
- ج - استنتج تقاطع (E') و (F')

التمرين الثالث:

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$

1. ادرس تغيّرات الدالة g .
2. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,38 < \alpha < -0,37$.
3. استنتج إشارة $g(x)$ ؛ حسب قيم x .

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$.
2. ادرس تغيّرات الدالة f .
3. بيّن أنّ المستقيم (d) ذا المعادلة $y = 2x + 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.
4. ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (d) .
5. بيّن أنّ المنحنى يقبل نقطة انعطاف.

$$6. \text{ بيّن أنّ } f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$$

7. ارسم (d) و (C_f) ؛ نأخذ $\alpha \approx -0,375$.

III- (Δ_β) مستقيم معادلته $y = 2x + \beta$ حيث β عدد حقيقي.

1. عيّن β حتى يكون (Δ_β) مماسا للمنحنى في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.
2. ناقش بيانها، حسب قيم العدد الحقيقي β ، عدد حلول المعادلة: $-\frac{x}{e^x} + 1 - \beta = 0$

التمرين الرابع:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{1}{2}x + \ln(1+e^{-x})$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$$1. \text{ بيّن أنّه يمكن كتابة } f(x) \text{، على الشكل: } f(x) = -\frac{1}{2}x + \ln(1+e^x)$$

2. برهن أنّ الدالة f زوجية.

$$3. \text{ احسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

4. ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

5. أثبت أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') يطلب تعيين معادلتيهما.

6. ارسم (Δ) ، (Δ') و (C_f) .

$$7. \text{ نعتبر الدالة } g \text{ المعرفة على المجال } [1; +\infty[\text{ بـ: } g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)$$

أ - تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1; +\infty[$ ، $g(x) = f(\ln x)$

- استنتج اتجاه تغيّر الدالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

حل الموضوع الخامس

التمرين الأول:

1. إثبات أن $x - 2z + 11 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
 لدينا $x_B - 2z_B - 11 = 3 - 2(-4) - 11 = 0$ و $x_A - 2z_A - 11 = 1 - 2(-5) - 11 = 0$ و $x_C - 2z_C - 11 = 5 - 2(-3) - 11 = 0$ ومنه إحداثيات النقط A ، B و C تحقق المعادلة $x - 2z - 11 = 0$ وبالتالي $x - 2z - 11 = 0$ هي معادلة المستوي (ABC) .

2. تحديد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (T) الذي يشمل النقطة D ويوازي $\vec{u}$.
 لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء.

M تنتمي لـ (T) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{DM} = k\vec{u}$.
 ومنه $\begin{cases} x + 2 = k \\ y - 8 = 5k \\ z - 4 = -k \end{cases}$ أي $\begin{cases} x = -2 + k \\ y = 8 + 5k \\ z = 4 - k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$
 3. ليكن (P) المستوي ذو المعادلة: $x - y - z - 7 = 0$.

أ - إثبات أن المستويين (ABC) و (P) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) تمثيله الوسيطى $\begin{cases} x = 11 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

بالتعويض في معادلة كل من (ABC) و (P) نجد:

$$(11 + 2t) - (4 + t) - t - 7 = 11 - 11 + 2t - 2t = 0 \text{ و } (11 + 2t) - 2(t) - 11 = 0$$

ومنه (Δ) محتوئ في (ABC) ومحتوئ في (P) وعليه (ABC) و (P) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) .

ب - إثبات أن المستقيمين (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.

لدينا $\vec{u}(1; 5; -1)$ هو شعاع توجيه لـ (T) و $\vec{v}(2; 1; 1)$ هو شعاع توجيه لـ (Δ) .

و $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{5}$ إذن (T) و (Δ) غير متوازيين.

ندرس تقاطع (T) و (Δ) .

$$\begin{cases} 11 + 2t = -2 + k \dots\dots(1) \\ 4 + t = 8 + 5k \dots\dots\dots(2) \\ t = 4 - k \dots\dots\dots(3) \end{cases} \text{ نحل الجملة (*)}$$

ندرس إمكانية وجود ثنائية t و k من الأعداد الحقيقية تحقق الجملة (*).

بتعويض t بقيمتها من (3) في (2) نجد $4 + (4 - k) = 8 + 5k$ ومنه $k = 0$

بالتعويض في (3) نجد $t = 4$ وبتعويض t و k بقيمتهما في (1) نجد $19 = -2$ تناقض.

إذن (T) و (Δ) غير متقاطعين وبما أنهما غير متوازيين فإنهما ليسا من نفس المستوي.

4. تعطى النقطتان $E(3; 0; -4)$ و $F(-3; 3; 5)$ ، التحقق أن: $E \in (\Delta)$ و $F \in (T)$.

$$\begin{cases} t = -4 \\ t = -4 \\ t = -4 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} 3 = 11 + 2t \\ 0 = 4 + t \\ -4 = t \end{cases} \text{ معناه } E \in (\Delta) \text{ بما أن } t \text{ وحيدة فإن } E \in (\Delta).$$

$$F \in (T) \text{ معناه } \begin{cases} k = -1 \\ k = -1 \\ k = -1 \end{cases} \text{ وبما أن } k \text{ وحيدة فإن } F \in (T).$$

5. لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء حيث: $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{FE} = \alpha$ مع α عدد حقيقي.

أ - إيجاد بدلالة α معادلة ديكارتية لـ (Γ) .

$$\overrightarrow{FE}(6; -3; -9) \text{ و } \overrightarrow{ME}(3-x; -y; -4-z)$$

$$\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{FE} = \alpha \text{ معناه } 6(3-x) + 3y - 9(-4-z) = \alpha \text{ ومنه } -6x + 3y + 9z + 54 - \alpha = 0$$

هي معادلة ديكارتية لـ (Γ) وهي معادلة مستو شعاعه الناظمي $\overrightarrow{EF}$.

ب - تعيين قيمة α حتى يكون (Γ) المستوي المحوري للقطعة $[EF]$.

$$\text{لتكن } I \text{ منتصف } [EF] \text{ ومنه } I\left(0; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

المستوي المحوري للقطعة $[EF]$ شعاعه الناظمي $\overrightarrow{EF}$ ويشمل النقطة I .

$$\text{ومنه } -6\left(\frac{3}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right) + 54 - \alpha = 0 \text{ أي } \alpha = 63$$

طريقة أخرى:

المستوي المحوري للقطعة $[EF]$ هو مجموعة النقط $M(x; y; z)$ التي تحقق $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{FE} = 0$.

$$\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{FE} = 0 \text{ معناه } (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EI}) \cdot \overrightarrow{FE} = 0 \text{ ومعناه } \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{FE} = 0$$

$$\text{أي } \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{FE} = -\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{FE} \text{ ومنه } \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{FE}$$

$$\overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{FE} = 3(6) - \frac{3}{2}(-3) - \frac{9}{2}(-9) = 18 + 45 = 63 \text{ ومنه } \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{FE} = 63$$

$$\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{FE} = 0 \text{ تعني } \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{FE} = 63$$

إذن المستوي المحوري للقطعة $[EF]$ هو مجموعة النقط $M(x; y; z)$ التي تحقق $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{FE} = 63$ وعليه $\alpha = 63$

التمرين الثاني:

$$1. \text{ حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة } z^3 + z^2 + 3z - 5 = 0 \dots\dots\dots (1)$$

نلاحظ أن مجموع المعاملات يساوي 0 ومنه العدد 1 هو حل ظاهري للمعادلة (1).

$$\text{ومنه } z^3 + z^2 + 3z - 5 = (z-1)(z^2 + az + b) \text{ حيث } a \text{ و } b \text{ عدنان حقيقيان}$$

$$z^3 + z^2 + 3z - 5 = z^3 + (a-1)z^2 + (b-a)z - b \text{ بالمطابقة نجد } a=2 \text{ و } b=5$$

$$\text{ومنه } z^3 + z^2 + 3z - 5 = (z-1)(z^2 + 2z + 5)$$

$$(1) \text{ تكافئ } z=1 \text{ أو } z^2 + 2z + 5 = 0$$

$$\Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2 \text{ للمعادلة حلان هما } z = -1 + 2i \text{ أو } z = -1 - 2i$$

مجموعة حلول المعادلة (1) هي $\{1; -1-2i; -1+2i\}$.

2. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط A ، B و C لواحها على الترتيب

$$z_A = 1, z_B = -1 + 2i, z_C = -1 - 2i$$

كتابة العدد $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي واستنتاج طبيعة المثلث ABC .

$$\text{لدينا } z_B - z_A = -1 + 2i - 1 = -2 + 2i \text{ و } z_C - z_A = -1 - 2i - 1 = -2 - 2i$$

ومنه $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-2-2i}{-2+2i} = \frac{1+i}{1-i} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1$ و $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أن

$AC = AB$ و $\arg(\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{2}$ بالتالي المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في A .

3. لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث: $z = -1 + 2e^{i\theta}$ مع $\theta \in]-\pi; \pi[$

ولتكن (F) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث: $z = -1 - 2i + \lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$ مع $\lambda \in \mathbb{R}$.

أ - التحقق أن النقطة A تنتمي إلى كل من (E) و (F) .

A تنتمي إلى (E) إذا وجد عدد حقيقي θ بحيث $z_A = -1 + 2e^{i\theta}$

لدينا $z_A = -1 + 2 = -1 + 2e^{i0}$ إذن من أجل $\theta = 0$ نجد النقطة A من (E) .

A تنتمي إلى (F) إذا وجد عدد حقيقي λ بحيث $z_A = -1 - 2i + \lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$

لدينا $z_A = -1 - 2i + 2 + 2i = -1 + 2i + 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ إذن من أجل $\lambda = 2\sqrt{2}$ نجد النقطة A من (F) .

ب - كتابة معادلة ديكارتية لـ (E)

$z = -1 + 2e^{i\theta}$ معناه $z + 1 = 2e^{i\theta}$ بوضع $z_I = -1$ ومنه $z - z_I = 2e^{i\theta}$ وتكافئ $|z - z_I| = 2$ أي $IM = 2$

إذن (E) هي الدائرة التي مركزها $I(-1; 0)$ ونصف قطرها 2 والمعادلة الديكارتية لـ (E) هي $(x+1)^2 + y^2 = 4$

كتابة معادلة ديكارتية لـ (F)

$z = -1 - 2i + \lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$ معناه $z - z_C = \lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$ إذن (F) هي المستقيم الذي يشمل C وميله $\arg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

إذن معادلة (F) من الشكل $y = x + b$ وبما أن $C \in (F)$ فإن $-2 = -1 + b$ ومنه $b = -1$

وعليه معادلة (F) هي $y = x - 1$.

تعيين نقطتي تقاطعهما.

$$\text{نحل الجملة} \quad \begin{cases} y = x - 1 \\ (x+1)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} y = x - 1 \\ (x+1)^2 + (x-1)^2 = 4 \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 = 1 \end{cases}$$

إذن $(x; y) \in \{(1; 0); (-1; -2)\}$ ومنه (E) و (F) يتقاطعان في النقطتين A و C .

4. ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ويحول A إلى B

أ - كتابة العبارة المركبة للتشابه S وتعيين نسبته وزاويته.

الكتابة المركبة للتشابه S من الشكل $z' - z_C = a(z - z_C)$ وبما أن $S(A) = B$ فإن $z_B - z_C = a(z_A - z_C)$

ومنه $a = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{4i}{2 + 2i} = 1 + i$ وعليه الكتابة المركبة للتشابه S هي $z' - z_C = (1 + i)(z - z_C)$

أي $z' = (1 + i)z - 2 + i$

$|a| = |1 + i| = \sqrt{2}$ ومنه نسبة التشابه S هي $\sqrt{2}$

$\arg(a) = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$ ومنه زاوية التشابه S هي $\frac{\pi}{4}$

ب - تعيين (E') و (F') صورتا (E) و (F) بالتشابه S .

نضع $I' = S(I)$ ومنه $z_{I'} = -3$ وبما أن نسبة التشابه S هي $\sqrt{2}$ فإن (E') هي الدائرة التي مركزها I' ونصف قطرها $2\sqrt{2}$

بما أن $S(A) = B$ و $S(C) = C$ فإن (F') هي المستقيم (BC) لأن (F) هي المستقيم (AC) .

ج - استنتاج تقاطع (E') و (F')

بما أن (E) و (F) يتقاطعان في النقطتين A و C فإن (E') و (F') يتقاطعان في النقطتين $S(A)$ و $S(C)$ أي في النقطتين B و C .

التمرين الثالث:

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$

1. دراسة تغيرات الدالة g .

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1) = -\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{-x} + 2 = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^{-x} + 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} - e^{-x} + 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $g'(x) = e^{-x} - e^{-x}(x-1) = e^{-x}(2-x)$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^{-x} > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ مثل إشارة $(2-x)$ وعليه $g'(2) = 0$

من أجل كل $x \in]-\infty; 2]$ فإن $2-x \geq 0$ أي $g'(x) \geq 0$ إذن الدالة g متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; 2]$.

ومن أجل كل $x \in]2; +\infty[$ فإن $2-x < 0$ أي $g'(x) < 0$ إذن الدالة g متناقصة تماماً على المجال $[2; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	α	2	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$	$-\infty$		$2+e^{-2}$	2

2. تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-0,38 < \alpha < -0,37$.

لدينا الدالة g مستمرة على المجال $]-\infty; 2]$ وبالتالي على المجال $[-0,38; -0,37]$ و $g(-0,38) \approx -0,01$ و $g(-0,37) \approx 0,01$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $[-0,38; -0,37]$ بحيث $g(\alpha) = 0$ وبما أن الدالة g متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; 2]$ فإن α وحيد.

3. إشارة $g(x)$ ؛ حسب قيم x .

من أجل كل $x \in]-\infty; \alpha[$ ، $g(x) < 0$

و من أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$ ، $g(x) > 0$ كما أن $g(\alpha) = 0$

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$.

ليكن x عددا حقيقيا؛

$$f'(x) = 2 - [e^{-x} - xe^x] = 2 + e^{-x}(x - 1) = g(x)$$

2. دراسة تغيرات الدالة f .

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ وعليه $f'(\alpha) = g(\alpha) = 0$

من أجل $x \in]-\infty; \alpha[$ فإن $f'(x) < 0$ وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; \alpha]$.

و من أجل $x \in]\alpha; +\infty[$ فإن $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

3. تبين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = 2x + 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{e^x} = 0$$

إذن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = 2x + 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

4. دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (d) .

لدينا $f(x) - (2x + 1) = -xe^{-x}$ ومنه إشارة $f(x) - (2x + 1)$ هي نفس إشارة $-x$.

في المجال $]-\infty; 0[$ ، $-x > 0$ أي $f(x) - (2x + 1) > 0$ ومنه (C_f) يقع فوق (d) .

و في المجال $]0; +\infty[$ ، $-x < 0$ أي $f(x) - (2x + 1) < 0$ ومنه (C_f) يقع تحت (d) .

و (C_f) يقطع (d) في النقطة $A(0; 1)$.

5. تبين أن المنحنى يقبل نقطة إنعطاف.

لدينا $f''(x) = g'(x)$ ومنه إشارة $f''(x)$ هي نفس إشارة $g'(x)$.

$f''(x)$ تنعدم من أجل 2 وتغير من إشارتها بجوار 2 وهذا يعني أن النقطة $B(2; f(2))$ هي نقطة إنعطاف

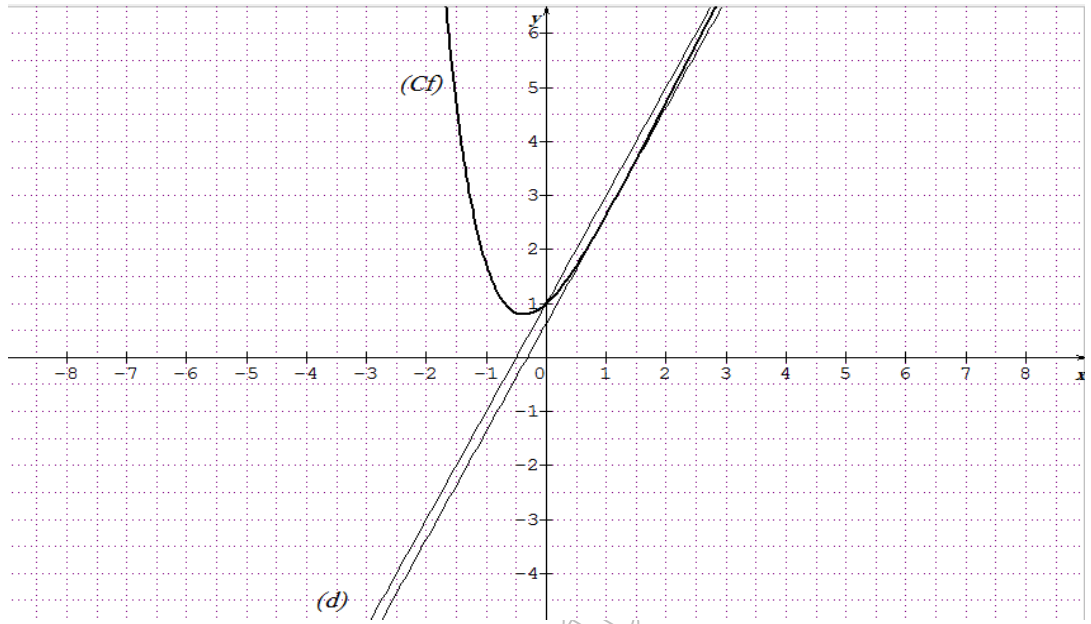
للمنحنى (C_f) .

$$6. \text{ تبين أن } f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$$

لدينا $f(\alpha) = 2\alpha + 1 - \alpha e^{-\alpha}$ ولدينا $g(\alpha) = 0$ معناه $(\alpha - 1)e^{-\alpha} + 2 = 0$ أي $e^{-\alpha} = -\frac{2}{\alpha - 1}$

$$\text{إذن } f(\alpha) = 2\alpha + 1 + \frac{2\alpha}{\alpha - 1} = \frac{(2\alpha + 1)(\alpha - 1) + 2\alpha}{\alpha - 1} = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$$

7. رسم (d) و (C_f) ؛ نأخذ $\alpha \approx -0,375$.



III- (Δ_β) مستقيم معادلته $y = 2x + \beta$ حيث β عدد حقيقي.

1. تعيين β حتى يكون (Δ_β) مماساً للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

$$f'(x) = 2 \text{ معناه } (x-1)e^{-x} + 2 = 2 \text{ يكافئ } (x-1)e^{-x} = 0 \text{ أي } x = 1$$

$$\text{لدينا } f(1) = 3 - e^{-1} ;$$

(Δ_β) مماس للمنحنى (C_f) إذا كان يشمل النقطة $A(1; 3 - e^{-1})$ ومنه $3 - e^{-1} = 2(1) + \beta$ أي $\beta = 1 - e^{-1}$
 إذن من أجل $\beta = 1 - e^{-1}$ يكون (Δ_β) مماساً للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1; 3 - e^{-1})$.

2. المناقشة بيانياً، حسب قيم العدد الحقيقي β ، عدد حلول المعادلة : $-\frac{x}{e^x} + 1 - \beta = 0$

$$-\frac{x}{e^x} + 1 - \beta = 0 \text{ تكافئ } \beta = -\frac{x}{e^x} + 1 \text{ تكافئ } 2x + \beta = -\frac{x}{e^x} + 1 + 2x \text{ ومنه } 2x + \beta = -xe^{-x} + 1 + 2x$$

$$\text{أي } f(x) = 2x + \beta.$$

إذا كان $\beta \in]-\infty; 1 - e^{-1}[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول.

إذا كان $\beta = 1 - e^{-1}$ فإن المعادلة تقبل حلاً واحداً مضاعفاً وهو 1.

إذا كان $\beta \in]1 - e^{-1}; 1[$ فإن المعادلة تقبل حلين.

إذا كان $\beta \in [1; +\infty[$ فإن المعادلة تقبل حلاً واحداً.

التمرين الرابع:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{1}{2}x + \ln(1+e^{-x})$.
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. تبين أنه يمكن كتابة $f(x)$ ، على الشكل: $f(x) = -\frac{1}{2}x + \ln(1+e^x)$.

$$\begin{aligned} \text{لدينا } f(x) &= \frac{1}{2}x + \ln(1+e^{-x}) = f(-x) = \frac{1}{2}(-x) + \ln(e^x + 1) \\ &= -\frac{1}{2}x + \ln e^x + \ln(e^x + 1) \\ &= -\frac{1}{2}x - x + \ln(e^x + 1) \\ &= -\frac{1}{2}x + \ln(e^x + 1) \end{aligned}$$

2. إثبات أن الدالة f زوجية.

من أجل $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$ لأن لكل عدد حقيقي معاكس ولدينا $f(-x) = -\frac{1}{2}x + \ln(1+e^x) = f(x)$ ومنه الدالة f زوجية.

3. حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}x + \ln(1+e^x) \right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}x + \ln(1+e^{-x}) \right) = -\infty \end{aligned}$$

4. دراسة اتجاه تغير الدالة f .

$$f'(x) = \frac{-1}{2} + \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{-1-e^x+2e^x}{2(e^x+1)} = \frac{e^x-1}{2(e^x+1)}$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $2(e^x+1) > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $e^x - 1$.

$f'(x) = 0$ تعني $e^x - 1 = 0$ ويكافئ $e^x = 1$ أي $x = 0$

$f'(x) > 0$ تعني $e^x - 1 > 0$ ويكافئ $e^x > 1$ أي $x > 0$

$f'(x) < 0$ تعني $e^x - 1 < 0$ ويكافئ $e^x < 1$ أي $x < 0$

إذن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\ln 2$	$+\infty$

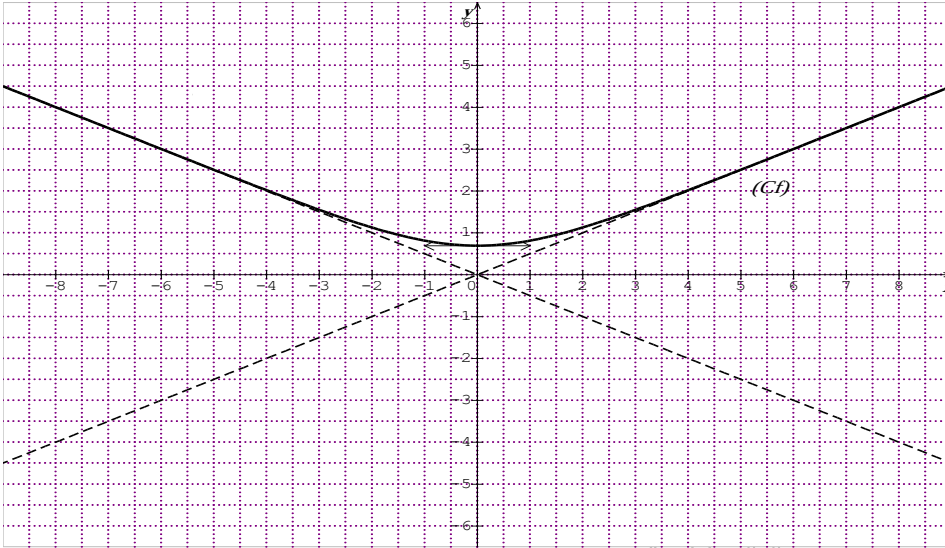
5. إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') يطلب تعيين معادلتيهما.

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$ إذن للمنحنى (C_f) مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y = \frac{1}{2}x$ بجوار $+\infty$.

ولدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \left(-\frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+e^x) = 0$ إذن للمنحنى (C_f) مستقيم مقارب مائل (Δ') معادلته

$y = -\frac{1}{2}x$ بجوار $-\infty$.

6. رسم (Δ) ، (Δ') و (C_f) .



7. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بـ: $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)$.

أ - التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1; +\infty[$ ، $g(x) = f(\ln x)$.

لدينا $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right) = \ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln x = -\frac{1}{2}\ln x + \ln(e^{\ln x} + 1) = f(\ln x)$

ب - استنتاج اتجاه تغير الدالة g .

نلاحظ أن الدالة g هي مركب الدالة $\ln$ متبوعة بالدالة f ($g = f \circ \ln$)

لدينا الدالة اللوغارتمية النيبيرية $\ln$ متزايدة تماماً على المجال $[1; +\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $[0; +\infty[$ والدالة f

متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$ إذن للدالتين نفس الإتجاه وبالتالي تركيبهما يكون دالة متزايدة تماماً على المجال

$[1; +\infty[$ أي الدالة g متزايدة تماماً على المجال $[1; +\infty[$.

ب - جدول تغيرات الدالة g .

x	1	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$\ln 2$	$\nearrow +\infty$

الموضوع السادس

التمرين الأول:

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ النقط: $A(2; 1; -1)$ ، $B(1; -1; 3)$ ،

$C\left(-\frac{3}{2}; -2; 1\right)$ و $D\left(\frac{7}{2}; -3; 0\right)$ ولتكن I منتصف القطعة $[AB]$.

(1) أ) أحسب إحداثيات النقطة I .

ب) ليكن المستوي (P) ذو المعادلة: $2x + 4y - 8z + 5 = 0$ بين أن (P) هو المستوي المحوري لـ $[AB]$.

(2) أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة C و $\vec{u}(1; 2; -4)$ شعاع توجيه له.

(3) أ) جد إحداثيات نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ) .

ب) بين أن (Δ) و (AB) من نفس المستوي، ثم استنتج أن المثلث IEC قائم.

(4) أ) بين أن المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) والمستقيم (IE) .

ب) احسب حجم رباعي الوجوه $DIEC$.

التمرين الثاني:

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\square$ المعادلة: $z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$.

(2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، لتكن النقط A, B, C و D التي

لاحقاتها على الترتيب: $z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B = \bar{z}_A$ ، $z_C = 6\sqrt{2}$ و $z_D = \frac{z_C}{2}$.

أ) اكتب z_A ، z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسّي.

ب) احسب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$.

ج) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقياً سالباً.

د) بين أن النقط O, A, B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D ، يطلب تعيين نصف قطرها.

هـ) احسب $\frac{z_A}{z_B}$ ، ثم جد قياساً للزاوية $(\overline{OB}; \overline{OA})$. ماهي طبيعة الرباعي $OACB$ ؟

(3) ليكن R الدوران الذي مركزه O ويحول B إلى A .

أ) اكتب العبارة المركبة للدوران R محدداً زاويته.

ب) عيّن لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R ثم تحقق أن النقط A, C' و C على استقامة.

ج) عيّن لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R ثم حدّد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R .

التمرين الثالث:

I) الدالة المعرفة على $\square$ كما يلي: $g(x) = 1 + (x-1)e^x$.

1. احسب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

2. ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3. استنتج إشارة $g(x)$ على $\square$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 2]$ كما يلي: $f(x) = x + (x-2)e^x$.

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 2]$ فإن: $f'(x) = g(x)$.
ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.
2. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) . ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .
3. أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثياتها.
4. اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.
6. بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $1,6 < \alpha < 1,7$.
7. احسب $f(0)$ ، $f(1)$ ثم ارسم (Δ) ، (T) والمنحنى (C_f) .
8. ناقش بياناً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$.

التمرين الرابع:

- I - لتكن الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = 2x - 1 - \ln x$.
1. ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
2. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.
3. تحقق أن $g(1) = 1$ وبين أن المعادلة $g(x) = 1$ تقبل حلاً آخر α حيث $0,1 < \alpha < 0,3$.
- II - لتكن الدالة f المعرفة على كما يلي: $f(x) = x^2 - x \ln x$ و $f(0) = 0$.
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
1. أ - احسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ وفسر النتيجة هندسياً.
ب - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. أ - بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = g(x)$.
ب - استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.
ج - بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها.
د - عيّن دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ وفسر النتيجة بياناً.
3. أ - أثبت أن $f(x) = x[g(x) - x + 1]$ ، ثم احسب $f(\alpha)$.
ب - أعط حصر لـ $f(\alpha)$.
4. أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') ميلهما يساوي 1، يطلب كتابة معادلة كل منهما.
5. ارسم (T) ، (T') والمنحنى (C_f) .

حل الموضوع السادس

التمرين الأول:

(1) أ) إحداثيات النقطة I.

$$I\left(\frac{3}{2}; 0; 1\right) \text{ إذن } z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = 1, y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 0, x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3}{2}$$

(ب) تبين أن (P) هو المستوي المحوري لـ [AB].

لدينا $\vec{n}(2; 4; -8)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P) ولدينا $\vec{AB}(-1; -2; 4)$ ومنه $\vec{n} = -2\vec{AB}$ بالتالي الشعاعان $\vec{n}$ و $\vec{AB}$ مرتبطان خطيا وعليه $\vec{AB}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P).

$$\text{ولدينا } 2x_I + 4y_I - 8z_I + 5 = 2\left(\frac{3}{2}\right) + 4(0) - 8(1) + 5 = 0 \text{ إذن } I \text{ تنتمي للمستوي (P).}$$

ومنه (P) هو المستوي المحوري للقطعة [AB].

(2) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة C و $\vec{u}(1; 2; -4)$ شعاع توجيه له. لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء.

$$M \in (\Delta) \text{ معناه يوجد عدد حقيقي } t \text{ بحيث } \vec{CM} = t\vec{u} \text{ مع } \vec{CM}\left(x + \frac{3}{2}; y + 2; z - 1\right)$$

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2} + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 - 4t \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x + \frac{3}{2} = t \\ y + 2 = 2t \\ z - 1 = -4t \end{cases} \text{ معناه } \vec{CM} = t\vec{u} \text{ (} t \in \mathbb{R} \text{)}$$

(3) أ) إيجاد إحداثيات E نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ).

$$\text{نحل الجملة } \begin{cases} x = -\frac{3}{2} + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 - 4t \\ 2x + 4y - 8z + 5 = 0 \end{cases} \text{ وعليه } 2\left(-\frac{3}{2} + t\right) + 4(-2 + 2t) - 8(1 - 4t) + 5 = 0$$

$$\text{أي } -3 + 2t - 8 + 8t - 8 + 32t + 5 = 0 \text{ ومنه } -14 + 42t = 0 \text{ وعليه } t = \frac{1}{3}$$

$$\text{إذن } x = -\frac{3}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{7}{6}, y = -2 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}, z = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} \text{ أي } E\left(-\frac{7}{6}; -\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

(ب) تبين أن (Δ) و (AB) من نفس المستوي.

لدينا $\vec{u}(1; 2; -4)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) و $\vec{AB}(-1; -2; 4)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (AB). و $\vec{AB} = -\vec{u}$ ومنه الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{AB}$ مرتبطان خطيا إذن المستقيمان (Δ) و (AB) متوازيان وبالتالي فهما من نفس المستوي.

استنتاج أن المثلث IEC قائم.

(AB) و (Δ) متوازيان ومنه (Δ) عمودي على (P) في E وبما أن $C \in (\Delta)$

فإن (CE) عمودي على (P) في E وبما أن I تنتمي للمستوي (P) فهذا يعني أن المثلث IEC قائم في

(أ) تبين أن المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) والمستقيم (IE).

لدينا $\overrightarrow{ID} (2; -3; -1)$ و $\overrightarrow{IE} \left(-\frac{8}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{4}{3} \right)$ و $\overrightarrow{AB} (-1; -2; 4)$.

ومنه $\overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{IE} = 2 \left(-\frac{8}{3} \right) - 3 \left(-\frac{4}{3} \right) - 1 \left(-\frac{4}{3} \right) = -\frac{16}{3} + \frac{12}{3} + \frac{4}{3} = 0$ و $\overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{AB} = 2(-1) - 3(-2) - 1(4) = 0$

اذن المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) والمستقيم (IE).

(ب) حساب حجم رباعي الوجوه DIEC.

لدينا (ID) عمودي على (AB) إذن فهو عمودي على (CE) لأن (CE) هو المستقيم (Δ) و (Δ) يوازي (AB)

ومنه (ID) عمودي على كل من (CE) و (IE) وبالتالي (ID) يعامد المستوي (ICE)

فتكون النقطة I هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ICE).

وعليه حجم رباعي الوجوه DIEC يعطى كما يلي $V = \frac{1}{3} S_{ICE} \times ID$ حيث S_{ICE} هي مساحة المثلث ICE.

$$ID = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14} \text{ و } S_{ICE} = \frac{IE \cdot CE}{2} = \frac{\frac{4\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{21}}{3}}{2} = \frac{2\sqrt{14}}{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{2\sqrt{14}}{3} \times \sqrt{14} = \frac{28}{9} uv$$

التمرين الثاني:

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة □ المعادلة: $z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$.

$$\Delta = (6\sqrt{2})^2 - 144 = -72 = (6i\sqrt{2})^2$$

$$z_1 = \frac{6\sqrt{2} + 6i\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$$

$$z_2 = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$$

(2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، لتكن النقط A، B، C و D التي

$$z_D = \frac{z_C}{2} \text{ و } z_C = 6\sqrt{2} \text{ ، } z_B = \overline{z_A} \text{ ، } z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$$

(أ) كتابة z_A ، z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسّي.

$$(1+i)z_A = 6\sqrt{2}i = 6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ ، } z_B = \overline{z_A} = 6e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ ، } z_A = 3\sqrt{2}(1+i) = 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 6e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{(ب) حساب } \left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}} \right)^{2014}$$

$$\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}} \right)^{2014} = \left(\frac{6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}}{6\sqrt{2}} \right)^{2014} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^{2014} = e^{i1007\pi} = e^{i\pi} = -1$$

(ج) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}} \right)^n$ حقيقياً سالباً.

$$\text{لدينا } \left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}} \right)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^n = e^{i\frac{n\pi}{2}}$$

$$\frac{n\pi}{2} = (1+2k)\pi \text{ ومنه } \arg\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^n = (1+2k)\pi \text{ حقيقي سالب معناه } \left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^n$$

بالتالي $n = 2 + 4k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

(د) تبين أن النقط O, A, B, C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D ، يطلب تعيين نصف قطرها.

$$DO = |z_O - z_D| = |-3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2}$$

$$DA = |z_A - z_D| = |3i\sqrt{2}| = 3\sqrt{2}$$

$$DB = |z_B - z_D| = |-3i\sqrt{2}| = 3\sqrt{2}$$

$$DC = |z_C - z_D| = |3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2}$$

ومنه $DO = DA = DB = DC = 3\sqrt{2}$ بالتالي النقط O, A, B, C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها $3\sqrt{2}$.

(هـ) حساب $\frac{z_A}{z_B}$ ، ثم إيجاد قياسا للزاوية $(\overline{OB}; \overline{OA})$.

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{3\sqrt{2}(1+i)}{3\sqrt{2}(1-i)} = \frac{(1+i)}{(1-i)} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$$

$$(\overline{OB}; \overline{OA}) = \frac{\pi}{2} \text{ ومنه } \arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$$

تعيين طبيعة الرباعي $OACB$.

$$\overline{BC} = \overline{OA} \text{ وهذا يعني أن } z_C - z_B = z_A \text{ ومنه } \frac{z_C - z_B}{z_A} = \frac{6\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}}{3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}}{3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}} = 1$$

زيادة على ذلك لدينا $\frac{z_A}{z_B} = i$ وهذا يعني أن $OA = OB$ و $(\overline{OB}; \overline{OA}) = \frac{\pi}{2}$ إذن $OACB$ مربع.

(3) ليكن R الدوران الذي مركزه O ويحول B إلى A .

(أ) كتابة العبارة المركبة للدوران R وتحديد زاويته.

العبارة المركبة للدوران R من الشكل $z' - z_O = \alpha(z - z_O)$ أي $z' = \alpha z$.

$$\alpha = \frac{z_A}{z_B} = i \text{ ومنه } z_A = \alpha z_B \text{ فإن } R(B) = A$$

إذن العبارة المركبة للدوران R هي $z' = iz$.

زاوية الدوران R هي $\arg(\alpha) = \frac{\pi}{2}$.

(ب) تعيين لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R .

$$R(C) = C' \text{ معناه } z_{C'} = iz_C \text{ ومنه } z_{C'} = 6i\sqrt{2}$$

التحقق أن النقط C, A, C' على استقامية.

تكون النقط C, A, C' على استقامية إذا كان $\frac{z_C - z_C}{z_A - z_C}$ عدد حقيقي.

لدينا $\square \in 2 = \frac{6\sqrt{2}(-1+i)}{3\sqrt{2}(-1+i)} = \frac{6i\sqrt{2}-6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}-6\sqrt{2}} = \frac{z_C - z_C}{z_A - z_C}$ ومنه النقط C ، A و C' على استقامية.

(ج) تعيين لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R .

$R(A) = A'$ معناه $z_{A'} = iz_A$ ومنه $z_{A'} = i(3\sqrt{2}(1+i))$ أي $z_{A'} = -3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}$.

تحديد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R .

بما أن $R(O) = O$ و $R(A) = A'$ و $R(C) = C'$ و $R(B) = A$ فإن صورة الرباعي $OACB$ هو الرباعي $OA'C'A$.

التمرين الثالث:

(I) الدالة المعرفة على $\square$ كما يلي: $g(x) = 1 + (x-1)e^x$.

1. حساب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + (x-1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + xe^x - e^x = 1$.

ولدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + (x-1)e^x = +\infty$.

2. دراسة اتجاه تغير الدالة g .

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\square$ ولدينا: $g'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة x وعليه $g'(0) = 0$.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 0[$ فإن $g'(x) < 0$.

ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ فإن $g'(x) > 0$.

إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0[$ و متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	1	0	$+\infty$

3. استنتاج إشارة $g(x)$ على $\square$.

من جدول تغيرات الدالة g نلاحظ أن $g(x) \geq 0$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 2[$ كما يلي: $f(x) = x + (x-2)e^x$.

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. (أ) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 2[$ فإن: $f'(x) = g(x)$.

$$f'(x) = 1 + e^x + (x-2)e^x = 1 + (x-1)e^x = g(x)$$

(ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f .

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ ومنه أجل كل $x \in]-\infty; 2[$ ، $f'(x) \geq 0$.

وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty; 2[$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	0	2
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	2

2. تبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x - 2)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - e^x = 0$$

إذن للمنحنى (C_f) مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y = x$.

3. إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثياتها.

طريقة 1: لدينا $f''(x) = g'(x)$ ومنه $f''(x) = 0$ تنعدم عند 2 وتغير من إشارتها ما يعني أن النقطة $\omega(0; -2)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) .

طريقة 2: لدينا الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; 2]$ و $f'(0) = 0$ إذن المنحنى (C_f) يقبل مماساً أفقياً عند النقطة $\omega(0; -2)$ معادلته $y = -2$.

نلخص إشارة $f(x) + 2$ من خلال جدول تغيرات الدالة f .

من أجل $x \in]-\infty; 0[$ أي $f(x) + 2 < 0$ ومن أجل $x \in]0; 2[$ أي $f(x) + 2 > 0$

في المجال $]-\infty; 0[$ المنحنى (C_f) يقع تحت مماسه ؛ وفي المجال $]0; 2[$ المنحنى (C_f) يقع فوق مماسه.

المماس يخترق المنحنى في نقطة التماس $\omega(0; -2)$ وهذا يعني أن النقطة $\omega(0; -2)$ نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) .

ملاحظة: يمكن إثبات ذلك مباشرة بما أن $f'(x)$ تنعدم عند 0 ولا تغير من إشارتها بجوار العدد 0 فإن النقطة

$\omega(0; -2)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) .

4. كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) \text{ ومنه } y = (x - 1) + 1 - e \text{ أي } y = x - e \text{ (T)}$$

6. تبين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $1,6 < \alpha < 1,7$.

لدينا الدالة f مستمرة على $\square$ وخاصة على المجال $[1,6; 1,7]$ و $f(1,6) \approx -0,38$ ، $f(1,7) \approx 0,05$ أي

$$g(1,6) \times g(1,7) < 0 \text{ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي } \alpha \text{ من المجال }]1,6; 1,7[\text{ بحيث}$$

$f(\alpha) = 0$ وبما أن الدالة f متزايدة تماماً على $\square$ فإن α وحيد ومنه (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $1,6 < \alpha < 1,7$.

7. حساب $f(0)$ ، $f(1)$ ورسم (Δ) ، (T) والمنحني (C_f) .

$$f(0) = 0 + (0-2)e^0 = -2$$

$$f(2) = 2 + (2-2)e^2 = 2$$

8. المناقشة بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد

$$f(x) = x + m$$

إذا كان $m < -e$ أو $m > 0$ فإن المعادلة لا تقبل أي حل

إذا كان $m = -e$ فإن المعادلة تقبل حلاً واحداً مضاعفاً

إذا كان $m = 0$ فإن المعادلة تقبل حلاً واحداً وحيداً

إذا كان $-e < m < 0$ فإن المعادلة تقبل حليين.

التمرين الرابع:

I - لتكن الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = 2x - 1 - \ln x$

1. دراسة تغيرات الدالة g

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x - 1 - \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

الدالة g تقبل الاشتقاق على $]0; +\infty[$ ولدينا: $g'(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$

إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $2x-1$ لأن $x > 0$.

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+

الدالة g متناقصة تماماً على المجال $]0; \frac{1}{2}]$ و متزايدة تماماً على المجال $[\frac{1}{2}; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g .

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\ln 2$	$+\infty$

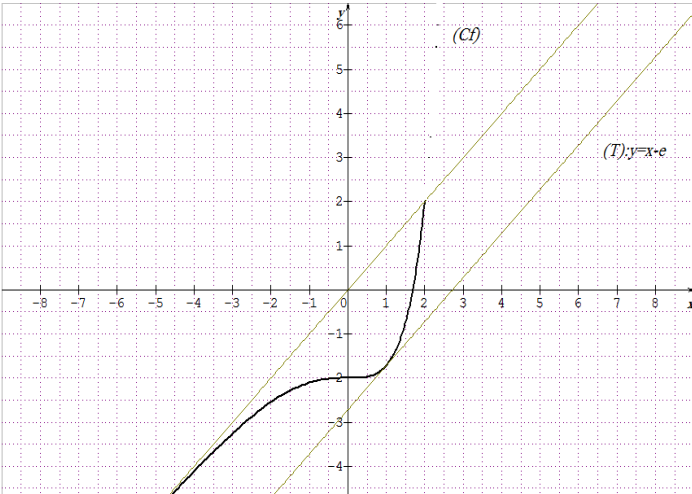
2. استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

لدينا الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى وهي $\ln 2$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ $g(x) \geq \ln 2$

وبالتالي $g(x) > 0$.

3. التحقق أن $g(1) = 1$

$$g(1) = 2(1) - 1 - \ln 1 = 1$$



تبين أن المعادلة $g(x) = 1$ تقبل حلاً آخر α حيث $0,1 < \alpha < 0,3$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماماً على المجال $\left]0; \frac{1}{2}\right]$ وبالأخص على المجال $[0,1; 0,3]$ ولدينا $g(0,1) \approx 1,5$ ، $g(0,3) \approx 0,8$ أي $g(0,3) < 1 < g(0,1)$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0,1; 0,3]$ بحيث $g(\alpha) = 1$.

II - لتكن الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x^2 - x \ln x$ و $f(0) = 0$.
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ - حساب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x - \ln x = +\infty$$

التفسير: الدالة f لا تقبل الاشتقاق على يمين 0 ومنحنائها البياني (C_f) له نصف مماس مواز لمحور الترتيب

ب - حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

2. أ - تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = g(x)$.

$$f'(x) = 2x - \left[\ln x + \frac{1}{x} \cdot x\right] = 2x - 1 - \ln x = g(x)$$

ب - استنتاج اتجاه تغير الدالة f .

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $g(x) > 0$ ومنه $f'(x) > 0$. إذن الدالة f متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

ج - بين أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها.

لدينا $f''(x) = g'(x)$ ومنه إشارة $f''(x)$ هي من نفس إشارة $g'(x)$.

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

$f''(x)$ تنعدم من أجل $\frac{1}{2}$ وتغير من إشارتها ومنه النقطة $\omega\left(\frac{1}{2}; f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

د - تعيين دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ وفسر النتيجة بيانيا.

الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ وبالأخص عند α ولدينا:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) = g(\alpha) = 1$$

ميله يساوي 1.

3. أ - إثبات أن $f(x) = x[g(x) - x + 1]$ ،

$$f(x) = x^2 - x \ln x = x(x - \ln x) = x(2x - 1 - \ln x - x + 1) = x[g(x) - x + 1]$$

حساب $f(\alpha)$.

$$f(\alpha) = \alpha[g(\alpha) - \alpha + 1] = \alpha(1 - \alpha + 1) = \alpha(2 - \alpha)$$

ب - تعيين حصرا لـ $f(\alpha)$.

$$0,1 < \alpha < 0,3 \text{ معناه } -0,3 < -\alpha < -0,1 \text{ يكافئ } 1,7 < 2 - \alpha < 1,9$$

$$\text{ومنه } 1,7 \times 0,1 < \alpha(2 - \alpha) < 1,9 \times 0,3 \text{ أي } 0,17 < f(\alpha) < 0,57$$

4. إثبات أن المنحني (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') ميلاهما يساوي 1.

$$f'(x_0) = 1 \text{ يكافئ } g(x_0) = 1 \text{ ومنه } x_0 = 1 \text{ أو } x_0 = \alpha$$

إذن (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') ميلاهما يساوي 1 عند النقطتين اللتين فاصلتيهما 1 و α .

كتابة معادلة كل منهما.

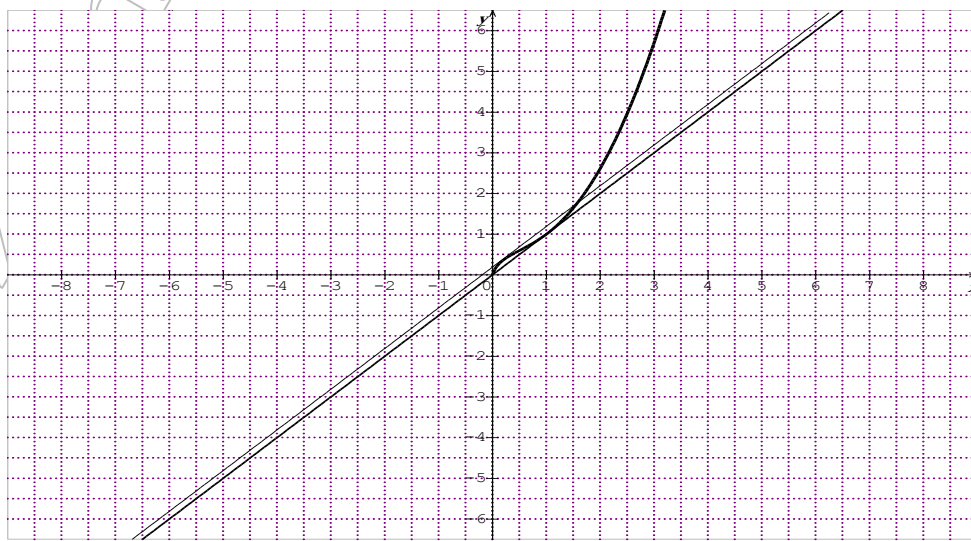
معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) \text{ ومنه } y = (x - 1) + 1 \text{ أي } y = x \text{ : } (T)$$

معادلة المماس (T') عند النقطة ذات الفاصلة α .

$$y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha) \text{ ومنه } y = (x - \alpha) + \alpha(2 - \alpha) \text{ أي } y = x - \alpha^2 + \alpha \text{ : } (T')$$

5. رسم (T) ، (T') والمنحني (C_f) .



الموضوع السابع:**التمرين الأول:**

1- نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقط:

$$C(-1; 0; -6), B(-1; 0; -2), A(1; 1; 2)$$

- بيّن أنّ مجموعة النقط $M(x; y; z)$ التي تحقق: $MA^2 - MB^2 = 1$ هي مستو عمودي على

المستقيم (AB) نرمز له بالرمز (P) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له.

2- لتكن S مجموعة النقط $M(x; y; z)$ التي تُحقق: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$

- بيّن أنّ S هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها ω ونصف قطرها R .

3- G نقطة من الفضاء معرفة بالعلاقة $\vec{GA} - \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

أ - عيّن إحداثيات النقطة G ثم تأكد أنّها تنتمي إلى S .

ب - أكتب معادلة المستوي (Q) الذي يمسّ سطح الكرة S في النقطة G .

التمرين الثاني:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z ، التالية: $z^2 + z + 1 = 0$

2. نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A, B, M ذات اللاحقات:

$$z_A = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, z_B = \overline{z_A}, \text{ على الترتيب (يرمز } \overline{z_A} \text{ إلى مرافق } z_A \text{).}$$

أ - أكتب z_A على الشكل الأسّي.

ب - عيّن مجموعة النقط M من المستوي، حيث: $\arg[(z - z_A)^2] = \arg(z_A) - \arg(z_B)$

3. أ - التحويل النقطي r ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ ، حيث: $z' = z_A z + z_B \sqrt{3}$

- ما طبيعة التحويل r ؟ عيّن عناصره المميزة.

ب - التحاكي h ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ ، حيث: $z' = -2z + 3i$

- عيّن نسبة ومركز التحاكي h .

ج - نضع: $S = h \circ r$ (يرمز $\circ$ إلى تركيب التحويلين h و r).

- عيّن طبيعة التحويل S ، مبرزاً عناصره المميزة، ثمّ تحقّق أنّ عبارته المركّبة هي: $z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i) + i$

4. نعتبر النقطة Ω ذات اللاحقة i والنقط C, D, E ؛ حيث: $S(O) = C, S(C) = D, S(D) = E$

- بيّن أنّ النقط O, Ω, E في استقامة.

5. أ - عيّن (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي، حيث: $z = 2e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$

ب - عيّن (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S .

التمرين الثالث:

x	$f(x)$
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	-0,005
0,23	-0,026
0,24	-0,048
0,25	-0,070

I - الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ: $f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$ ،

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، ثم استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C).

(2) احسب $f'(x)$. بين أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$ ،

ثم شكّل جدول تغيّراتها .

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في $]-\infty; 1[$ حلا وحيدا α . باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصرًا للعدد α .

(4) ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C) ، ثم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

(5) عيّن بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة.

II - الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ: $g(x) = f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة).

(1) ادرس تغيّرات الدالة g على $]-\infty; 1[$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

(2) أ) تحقّق من أن: $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$ ، ثم بين أن: $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$.

ب) استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

ج) تحقّق من أن: $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T) .

التمرين الرابع:

I - نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $g(x) = \ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{1+e^x}$.

1- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

2- ادرس اتجاه تغيّر الدالة g وشكّل جدول تغيّراتها.

3- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II - لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل: $f(x) = e^x \ln(1+e^{-x})$.

1- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (يمكن وضع $t = \frac{1}{e^x}$) .

2- بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -xe^x + e^x \ln(1+e^x)$.

- استنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

3- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f وشكّل جدول تغيّراتها.

- استنتج مجموعة صور $\mathbb{R}$ بواسطة الدالة f .

4- بين أن المعادلة: $f(x) = \frac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا α .

5- ارسم (C_f) منحنى الدالة f في مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

6- ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $e^x \ln(1+e^{-x}) - m = 0$.

حل الموضوع السابع

التمرين الأول:

تبين أن مجموعة النقط $M(x; y; z)$ التي تحقق: $MA^2 - MB^2 = 1$ هي مستو عمودي على المستقيم (AB) نرسم له بالرمز (P) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له.

$$AM^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 \text{ ومنه } AM = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2}$$

$$BM^2 = (x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2 \text{ ومنه } BM = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2}$$

$$MA^2 - MB^2 = 1 \text{ تكافئ } [(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2] - [(x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2] = 1$$

وتكافئ $-4x - 2y - 8z = 0$ أي $-2x - y - 4z = 0$ وهي معادلة مستو ناظمه الشعاع $\overrightarrow{AB}(-2; -1; -4)$ ومنه المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) .

-2 لتكن S مجموعة النقط $M(x; y; z)$ التي تحقق: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$

- إثبات أن S هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها ω ونصف قطرها R .

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0 \text{ معناه } (x-1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 + (z-1)^2 - 1 - 6 = 0$$

$$\text{ومنه } (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9 \text{ إذن } S \text{ هي سطح كره مركزها } \omega(1; 1; 1)$$

وطول نصف قطرها $R = 3$.

-3 نقطة G من الفضاء معرفة بالعلاقة $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

أ - تعيين إحداثيات النقطة G ثم التأكد أنها تنتمي إلى S .

$$G \text{ هي مرجح الجملة } \{(A; 1), (B; -1), (C; 1)\} \text{ وعليه } x_G = \frac{x_A - x_B + x_C}{1 - 1 + 1} = 1$$

$$y_G = \frac{y_A - y_B + y_C}{1 - 1 + 1} = 1, \quad z_G = \frac{z_A - z_B + z_C}{1 - 1 + 1} = -2 \text{ إذن } G(1; 1; -2)$$

التأكد أن G تنتمي إلى S .

يمكن التأكد بسهولة أن G تنتمي إلى S بتعويض إحداثيات G في معادلة S نجد:

$$(1-1)^2 + (1-1)^2 + (-2-1)^2 = 9$$

ب - كتابة معادلة المستوي (Q) الذي يمس سطح الكرة S في النقطة G .

المستوي (Q) ناظمه الشعاع $\overrightarrow{\omega G}$ ويشمل النقطة G . ولدينا $\overrightarrow{\omega G}(0.0; -3)$.

ومن معادلة (Q) من الشكل $-3z + d = 0$ وبما أن G يشمل (Q) فإن $-3(-2) + d = 0$ ومنه $d = -6$

وعليه $-3z - 6 = 0$ ومنه $z + 2 = 0$ هي معادلة للمستوي (Q) .

التمرين الثاني:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z ، التالية: $z^2 + z + 1 = 0$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2 = (\sqrt{3}i)^2 \text{ للمعادلة حلان هما } z_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ و } z_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

2. نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A, B و M ذات اللاحقات:

$$z_A = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z \text{ على الترتيب (يرمز } \overline{z_A} \text{ إلى مرافق } z_A \text{).}$$

أ - كتابة z_A على الشكل الأسّي .

$$z_A = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

ب - تعيين مجموعة النقط M من المستوي، حيث: $\arg[(z - z_A)^2] = \arg(z_A) - \arg(z_B)$

$$\arg[(z - z_A)^2] = \arg(z_A) - \arg(z_B) \text{ معناه } 2\arg(z - z_A) = \arg(z_A) + \arg(z_A) \text{ ومعناه } 2\arg(z - z_A) = 2\arg(z_A)$$

ومنه $\arg(z - z_A) = \arg(z_A) + k\pi$ إذن مجموعة النقط M هي المستقيم (OA) باستثناء النقطة A .

3. أ - التحويل النقطي r ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ ، حيث: $z' = z_A \cdot z + z_B \sqrt{3}$

- تعيين طبيعة التحويل r وعناصره المميزة.

العبارة المركبة للتحويل r من الشكل $z' = az + b$ حيث $a = z_A$ و $b = \sqrt{3}z_B$

و $|a| = |z_A| = 1$ و $\arg(a) = \arg(z_A) = \frac{3\pi}{4}$ ومنه r دوران زاويته $\frac{3\pi}{4}$ ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة

$$z_{\Omega} = \frac{\sqrt{3}z_B}{1 - z_A} = \frac{-\sqrt{3} + 3i}{2} = \frac{-\sqrt{3} + 3i}{3 + i\sqrt{3}} = \frac{i(3 + i\sqrt{3})}{3 + i\sqrt{3}} = i$$

ب - التحاكي h ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ ، حيث: $z' = -2z + 3i$

- تعيين نسبة ومركز التحاكي h .

نسبة التحاكي هي -2 ومركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة Ω أي مركز التحاكي h هو Ω . $\frac{3i}{1 - (-2)} = \frac{3i}{3i} = i = z_{\Omega}$

ج - نضع: $S = h \circ r$ (يرمز $\circ$ إلى تركيب التحويلين r و h).

- تعيين طبيعة التحويل S ، وعناصره المميزة.

يمكن اعتبار h تشابه مباشر نسبته 2 وزاويته π ومركزه Ω

و r تشابه مباشر نسبته 1 وزاويته $\frac{3\pi}{4}$ ومركزه Ω إذن S هو تشابه مباشر نسبته جداء النسبتين أي نسبته 2

وزاويته $\pi + \frac{3\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$ أي زاويته $\frac{\pi}{4}$ ومركزه Ω .

التحقق أن عبارته المركبة هي: $z' = 2e^{i\frac{\pi}{4}}(z - i) + i$

العبارة المركبة للتشابه S هي: $z' - z_{\Omega} = 2e^{i\frac{\pi}{4}}(z - z_{\Omega})$ أي $z' - i = 2e^{i\frac{\pi}{4}}(z - i)$ ومنه $z' = 2e^{i\frac{\pi}{4}}(z - i) + i$

4. نعتبر النقطة Ω ذات اللاحقة i والنقط C ، D و E ؛ حيث: $S(O) = C$ ، $S(C) = D$ و $S(D) = E$.

- إثبات أن النقط O ، Ω و E في استقامة.

لدينا $S(D) = E$ ومنه $S[S(C)] = E$ أي $S \circ S(C) = E$ يكافئ $S \circ S[S(O)] = E$ يكافئ $S \circ S \circ S(O) = E$

نستنتج أن E هي صورة O بالتحويل $S \circ S \circ S$ ولدينا $S \circ S \circ S$ تشابه مباشر زاويته $3 \times \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ أي زاويته π

ومركزه Ω ومنه $(\overline{\Omega O}, \overline{\Omega E}) = \pi$ وهذا يعني أن النقط O ، Ω و E في استقامة.

طريقة 2:

$$(\overline{\Omega O}; \overline{\Omega C}) = \frac{\pi}{3} \text{ معناه } S(O) = C$$

$$(\overline{\Omega C}; \overline{\Omega D}) = \frac{\pi}{3} \text{ معناه } S(C) = D$$

$$(\overline{\Omega D}; \overline{\Omega E}) = \frac{\pi}{3} \text{ معناه } S(D) = E$$

$$(\overline{\Omega O}; \overline{\Omega C}) + (\overline{\Omega C}; \overline{\Omega D}) + (\overline{\Omega D}; \overline{\Omega E}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

ولدينا حسب علاقة شال $(\overline{\Omega O}; \overline{\Omega E}) = (\overline{\Omega O}; \overline{\Omega C}) + (\overline{\Omega C}; \overline{\Omega D}) + (\overline{\Omega D}; \overline{\Omega E})$ ومنه $(\overline{\Omega O}; \overline{\Omega E}) = \pi$ وهذا يعني أن النقط O ، Ω و E في استقامة.

5. أ - تعيين (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي، حيث: $z = 2e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$.

$z = 2e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}}$ معناه $z - i = 2e^{i\theta}$ وتكافئ $|z - z_\Omega| = 2$ أي $\Omega M = 2$ بالتالي (Γ) هي الدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها 2.

ب - تعيين (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S .

لتكن $M(z)$ نقطة من المستوي، $M'(z')$ صورتها بالتشابه S إذن $\Omega M' = 2\Omega M$

إذا كانت M نقطة من (Γ) فإن $\Omega M = 2$ ولدينا $\Omega M' = 2 \times 2 = 4$ أي $\Omega M' = 4$

إذن M' تنتمي للدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها 4 وعليه صورة الدائرة (Γ) بالتشابه S هي دائرة (Γ') مركزها Ω ونصف قطرها 4.

طريقة 2:

$$z = 2e^{i\theta} + i \text{ معناه } z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}((2e^{i\theta} + i) - i) + i \text{ ومنه } z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(2e^{i\theta}) + i \text{ أي } z' - i = 4e^{i(\frac{\pi}{3} + \theta)}$$

إذن M' تنتمي للدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها 4 وعليه صورة الدائرة (Γ) بالتشابه S هي دائرة (Γ') مركزها Ω ونصف قطرها 4.

التمرين الثالث:

$$\text{I- } f \text{ الدالة المعرفة على }]-\infty; 1[\text{ بـ: } f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}},$$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = 1 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}} = 2$$

$$\text{ولدينا } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x-1} = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} e^{\frac{1}{x-1}} = 0 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}} = -\infty$$

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ إذن المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 2$ بجوار $-\infty$.

ولدينا $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ إذن المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب موازي لمحور الترتيب معادلته $x = -1$.

(2) حساب $f'(x)$. وتبين أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$.

الدالة f عبارة عن عمليات على دوال قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty; 1[$ فهي تقبل الإشتقاق على هذا المجال ولدينا:

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}} = \frac{-1}{(x-1)^2} \left(1 + e^{\frac{1}{x-1}} \right)$$

من أجل كل $x \in]-\infty; 1[$ ، $f'(x) < 0$ وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	1
$f'(x)$		—
$f(x)$	2	$-\infty$

(3) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في $]-\infty; 1[$ حلا وحيدا α .

لدينا الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty; 2[$ و $]-\infty; 2[$ و $0 \in]-\infty; 2[$ إذن

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty; 1[$.

إيجاد حصرا للعدد α باستعمال جدول القيم أعلاه.

نلاحظ أن $f(0,21) \approx 0,016$ و $f(0,22) \approx -0,005$ إذن $f(0,21) \times f(0,22) < 0$ ومنه $0,21 < \alpha < 0,22$

(4) رسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C) ، ثم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

$$\begin{cases} |f(x)| = f(x); x \in]-\infty; \alpha] \\ |f(x)| = -f(x); x \in [\alpha; 1[\end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} |f(x)| = f(x); f(x) \geq 0 \\ |f(x)| = -f(x); f(x) \leq 0 \end{cases}$$

إذن (C') ينطبق على (C) في المجال $]-\infty; \alpha]$ و (C') يناظر (C) بالنسبة لمحور الفواصل في المجال $[\alpha; 1[$.



(5) تعيين بيانياً مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة.

يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة من أجل قيم m من المجال $\left[\frac{1}{e}; 2\right]$ (لاحظ أن $f(0) = \frac{1}{e}$)

II- الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ: $g(x) = f(2x-1)$ (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة).
(1) دراسة تغيرات الدالة g على $]-\infty; 1[$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(2x-1)$ ؛ نضع $t = 2x-1$ لما x يتحول إلى $-\infty$ فإن t يتحول إلى $-\infty$

ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(2x-1) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 2$

$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{t \rightarrow 1} f(t) = -\infty$

الدالة g تقبل الاشتقاق على المجال $]-\infty; 1[$ ولدينا: $g'(x) = 2f'(2x-1)$

إذا كان $x < 1$ فإن $2x-1 < 1$ ومنه $f'(2x-1) < 0$ إذن الدالة g متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 1[$

يمكن إتباع طريقة إتجاه تغير مركب الدالتين.

نعتبر الدالة $u: x \mapsto 2x-1$ المعرفة على المجال $]-\infty; 1[$ إذن $g(x) = f(u(x)) = (f \circ u)(x)$

الدالة u متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; 1[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty; 1[$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x); \lim_{x \rightarrow 1} u(x) =]-\infty; 1[$ والدالة f

متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 1[$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 1[$.

جدول تغيرات الدالة g .

x	$-\infty$	1
$g'(x)$	—	
$g(x)$	2	$-\infty$

(2) أ) التحقق من أن: $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$ ، ثم تبين أن: $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$.

$$g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = f\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right) = f(\alpha+1-1) = f(\alpha) = 0$$

$$g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right) = 2f'(\alpha+1-1) = 2f'(\alpha)$$

ب) استنتاج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

$$y = g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right) + g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \text{ ومنه } y = 2f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right)$$

(ج) التحقق من أن: $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T).

لدينا $f(\alpha) = 0$ بكافئ $\frac{\alpha}{\alpha-1} + e^{\frac{1}{\alpha-1}} = 0$ أي $e^{\frac{1}{\alpha-1}} = -\frac{\alpha}{\alpha-1}$

ومنه $2f'(\alpha) = \frac{-2}{(\alpha-1)^2} \left(1 + e^{\frac{1}{\alpha-1}}\right) = \frac{-2}{(\alpha-1)^2} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha-1}\right) = \frac{-2}{(\alpha-1)^2} \left(\frac{-1}{\alpha-1}\right) = \frac{2}{(\alpha-1)^3}$

إذن معادلة المستقيم (T) هي: $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3} \left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right) = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x + \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$

التمرين الرابع:

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $g(x) = \ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{1+e^x}$

1- حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{1+e^x} = +\infty$ ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^x} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+e^{-x}) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{1+e^x} = 0$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$

2- دراسة اتجاه تغير الدالة g

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$$g'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} + \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-1}{1+e^x} + \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-1-e^x+e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-1}{(1+e^x)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) < 0$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماماً على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		
$g(x)$	$+\infty$	0

3- استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

نلاحظ من جدول تغيرات الدالة g أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) > 0$.

II- لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل: $f(x) = e^x \ln(1+e^{-x})$.

1- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

نضع $t = \frac{1}{e^x}$ عندئذ $e^x = \frac{1}{t}$ إذا كان x يتوّل إلى $+\infty$ فإن t يتوّل إلى 0 .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln(1+t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

2- تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -xe^x + e^x \ln(1+e^x)$.

$$f(x) = e^x \ln(1+e^{-x}) = e^x \ln(e^{-x}(e^x + 1)) = e^x [-x + \ln(e^x + 1)] = -xe^x + e^x \ln(e^x + 1)$$

- استنتاج $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -xe^x + e^x \ln(e^x + 1) = 0 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln(e^x + 1) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} -xe^x = 0$$

3- دراسة اتجاه تغير الدالة f .

$$f'(x) = e^x \ln(1+e^{-x}) - \left(\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \right) e^x = e^x \ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{1+e^{-x}} = g(x)$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) > 0$ ومنه $f'(x) > 0$ إذن الدالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		
$f(x)$	0	1

- استنتاج مجموعة صور $\square$ بواسطة الدالة f .

الدالة f مستمرة ورتيبة تماماً على $\square$ ولدينا $f([-\infty; +\infty[) =]1; 2[$

4- تبين أن المعادلة: $f(x) = \frac{1}{2}$ تقبل حلاً وحيداً α .

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماماً على $\square$ وتأخذ قيمها في المجال $]1; 2[$ و $\frac{1}{2} \in]1; 2[$ إذن المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}$ تقبل

حلاً وحيداً α .

5- رسم (C_f)

6- المناقشة بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد

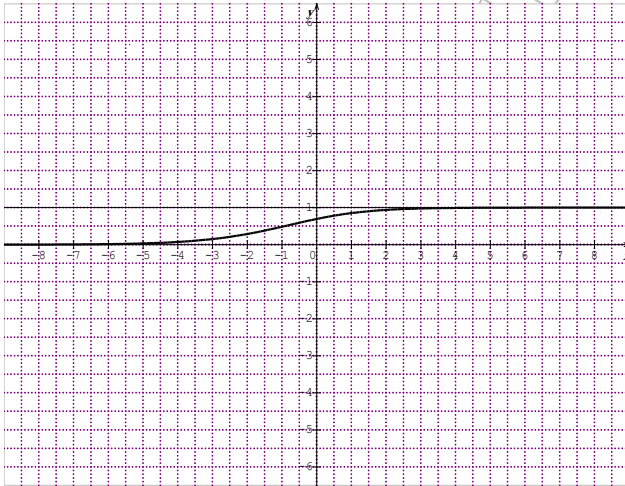
$$\text{حلول المعادلة: } e^x \ln(1+e^{-x}) - m = 0$$

$$e^x \ln(1+e^{-x}) = m \text{ تكافئ } e^x \ln(1+e^{-x}) - m = 0 \text{ أي}$$

$$f(x) = m$$

إذا كان $m \leq 0$ أو $m \geq 1$ فإن المعادلة لا تقبل أي حل.

إذا كان $0 < m < 1$ فإن المعادلة تقبل حلاً واحداً.



الموضوع الثامن**التمرين الأول:**

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقط :

$$A(1;1;1), B(1;-1;0), C(2;0;1).$$

1- بين أن النقط A, B و C تعين مستويا (P_1) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

2- (P_2) المستوي الذي $x - 2y - 2z + 6 = 0$ معادلة ديكارتية له.

- بين أن (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

3- بين أن النقطة O هي مرجح الجملة: $\{(A;1), (B;1), (C;-1)\}$.

4- أ) عيّن (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $\|\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}\| = 2\sqrt{3}$.

ب) احسب إحداثيات D و E نقطتي تقاطع (S) و (Δ) .

ج) ماهي طبيعة المثلث ODE ؟ ثم استنتج المسافة بين O و (Δ) .

التمرين الثاني:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\square$ المعادلة: $z^2 - 2z + 10 = 0$.

2. نعتبر في المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A, B, C و D لواحقها على الترتيب:

$$z_A = 2 + i, z_B = 1 + 3i, z_C = -3 + i, z_D = 1 - 3i$$

أ - أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ على الشكل الأسّي؛ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب - اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه B ويجول A إلى C ثم حدّد نسبته وزاويته.

ج - عيّن z_E لاحقة النقطة E ؛ علما أن D هي صورة E بالتشابه S .

3. لتكن F صورة B بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته $-\frac{1}{2}$.

أ - بين أن F هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بـ 3 و 1 على الترتيب.

ب - عيّن z_F لاحقة النقطة F .

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\square$ كما يلي: $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$ ، (C) تمثيلها البياني في معلم ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

I-1. نعتبر الدالة h المعرفة على كما يلي: $h(x) = xe^x + 1$.

أ) ادرس تغيّرات الدالة h .

ب) بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي $x: h(x) > 0$.

2. نعتبر الدالة g المعرفة على $\square$ كما يلي: $g(x) = x + 2 - e^x$.

أ) احسب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

ج- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين α و β مع $\alpha > \beta$ ثم تحقق أن $1,14 < \alpha < 1,15$.

د) استنتج إشارة $g(x)$ على $\square$.

II-1. احسب نهايتي f عند $-\infty$ و $+\infty$ ثم فسّر النتائج هندسيا.

2. أ) بيّن أنه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

3. أ) تحقق أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$.

ب) عيّن حصراً للعدد $f(\alpha)$ سعته 10^{-2} .

4. عيّن معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

5. أ) تحقق أن $f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1}$ حيث $u(x) = e^x - xe^x - 1$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة u ثم استنتج إشارة $u(x)$.

ج) استنتج الوضعية النسبية للمنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (T) .

6. أرسم (T) و (C) . (نقبل أن $-1,84 < \beta < -1,85$ و $-1,18 < f(\beta) < -1,19$)

التمرين الرابع:

I- الدالة g معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $g(x) = (x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)$.

1- ادرس اتجاه تغيّر الدالة g على المجال $]-1; +\infty[$.

2- بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $0,31 < \alpha < 0,32$ وأن: $\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$.

3- استنتج، حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II- الدالة f معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $f(x) = (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2$.

(C_f) منحنى f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

2- أثبت أنه، من أجل كل x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2g(x)}{x+1}$.

3- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

4- بيّن أن: $f(\alpha) = (\alpha+1)^2 (1 + (\alpha+1)^2)$ ، ثم استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$.

5- مثل المنحنى (C_f) على المجال $]-1; 2]$.

III- المنحنى الممثل للدالة h المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $h(x) = \ln(x+1)$.

A النقطة ذات الإحداثيتين $(-1; 2)$ و M نقطة من (Γ) فاصلتها x .

1- أثبت أن المسافة AM تعطى بالعلاقة $AM = \sqrt{f(x)}$.

2- الدالة k معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $k(x) = \sqrt{f(x)}$.

أ- بيّن أن للدالتين k و f نفس اتجاه التغيّر على المجال $]-1; +\infty[$.

ب- عيّن إحداثيتي النقطة B من (Γ) ، بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

ج- بيّن أن: $AB = (\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2 + 1}$.

حل الموضوع الثامن

التمرين الأول:

1- إثبات أن النقط A ، B و C تعين مستويا (P_1) .لدينا $\overrightarrow{AB}(0;-2;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(1;-1;0)$ و $\frac{0}{1} \neq \frac{-1}{-2}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطينخطيا ومنه فإن النقط A ، B و C ليست في استقامة فهي تعين مستويا (P_1) .تعيين تمثيلا وسيطيا للمستوي (P_1) .الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليس لهما نفس الحامل وعليه $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ يشكل معلما للمستوي (P_1) .لتكن نقطة من الفضاء $M(x; y; z)$.إذا كانت M تنتمي من (P_1) فإنها تحقق: $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$.حيث α و β عدنان حقيقيان و $\overrightarrow{AM} = (x-1; y-1; z-1)$

$$\text{ومنه } \begin{cases} x-1 = \beta \\ y-1 = -2\alpha - \beta \\ z-1 = -\alpha \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = 1 - 2\alpha - \beta \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \text{ و } \alpha \text{ و } \beta \text{ عدنان حقيقيان.}$$

وهو تمثيل وسيطي للمستوي (P_1) .2- (P_2) المستوي الذي $x-2y-2z+6=0$ معادلة ديكارتية له.- إثبات أن (P_1) و (P_2) متقاطعان.لدينا $\vec{n}(1;-2;-2)$ شعاعا ناظميا للمستوي (P_2) .

$$\text{نفرض أن } \vec{n} \text{ ناظمي للمستوي } (P_1) \text{ إذن } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \text{ ولدينا } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1(0) - 2(-2) - 2(-1) = 6 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1(1) - 2(-1) - 2(0) = 3 \end{cases} \text{ تناقض.}$$

إذن الشعاع $\vec{n}$ ليس ناظميا للمستوي (P_1) وبالتالي المستويان (P_1) و (P_2) غير متوازيين فهما متقاطعان.كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) .لتكن نقطة من الفضاء $M(x; y; z)$.

$$(1) \begin{cases} x = 1 + \beta \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y = 1 - 2\alpha - \beta \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} z = 1 - \alpha \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x - 2y - 2z + 6 = 0 \end{cases}$$

إذا كانت $M \in (\Delta)$ فإن إحداثياتها تحقق الجملة:نعوض كل من x و y و z من (1) و (2) و (3) بقيمهما في (4) نجد:

$$1 + \beta - 2(1 - 2\alpha - \beta) - 2(1 - \alpha) + 6 = 0 \text{ ومنه } 3\beta + 6\alpha + 3 = 0 \text{ وعليه } \beta = -2\alpha - 1.$$

$$\text{إذن } \begin{cases} x = 1 + (-2\alpha - 1) \\ y = 1 - 2\alpha - (-2\alpha - 1) \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x = -2\alpha \\ y = 2 \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \text{ وهو تمثيل وسيطي للمستقيم } (\Delta).$$

3- إثبات أن النقطة O هي مرجح الجملة: $\{(A;1), (B;1), (C;-1)\}$.نسمي G هي مرجح الجملة $\{(A;1), (B;1), (C;-1)\}$ وعليه

ومنه النقطة G منطقة على O . $z_G = \frac{1+0-1}{1+1-1} = 0$ ، $y_G = \frac{1-1-0}{1+1-1} = 0$ ، $x_G = \frac{1+1-2}{1+1-1} = 0$
 إذن النقطة O هي مرجح الجملة: $\{(A;1), (B;1), (C;-1)\}$.

4- أ) تعيين (S) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق: $\|\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}\| = 2\sqrt{3}$
 من أجل كل نقطة M من الفضاء يكون لدينا $\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} = (1+1-1)\vec{MO}$ أي $\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} = \vec{MO}$
 ومنه $\|\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}\| = 2\sqrt{3}$ تعني $\|\vec{MO}\| = 2\sqrt{3}$ أي $MO = 2\sqrt{3}$.
 إذن المجموعة (S) هي سطح كرة مركزه O ونصف قطره $2\sqrt{3}$.
ب) حساب إحداثيات D و E نقطتي تقاطع (S) و (Δ) .
 $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ هي معادلة ديكارتية لـ (S).

$$\text{نحل الجملة} \begin{cases} x = -2\alpha \\ y = 2 \\ z = 1 - \alpha \\ x^2 + y^2 + z^2 = 12 \end{cases} \text{ وعليه } (-2\alpha)^2 + 2^2 + (1-\alpha)^2 = 12 \text{ أي } 5\alpha^2 - 2\alpha - 7 = 0$$

بعد حل المعادلة نجد: $\alpha = \frac{7}{5}$ أو $\alpha = -1$.

$$\text{ومنه} \begin{cases} x = -2\left(\frac{7}{5}\right) \\ y = 2 \\ z = 1 - \frac{7}{5} \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = -2(-1) \\ y = 2 \\ z = 1 + 1 \end{cases}$$

إذن يتقاطع (S) و (Δ) في النقطتين $D\left(-\frac{14}{5}; 2; -\frac{2}{5}\right)$ و $E(2; 2; 2)$.

ج) طبيعة المثلث ODE.

بما أن النقطتين D و E تنتميان لسطح الكرة (S) التي مركزها O فإن $OE = OD$ ومنه
 فإن المثلث ODE متساوي الساقين.

استنتاج المسافة بين O و (Δ) .

بما أن النقطتين D و E تنتميان للمستقيم (Δ) فإن (Δ) هو المستقيم (DE) .
 المثلث ODE متساوي الساقين بالتالي المسقط العمودي للنقطة O على (DE) هي النقطة H
 منتصف القطعة $[DE]$ ومنه $d(O; (DE)) = OH$.

$$\text{ولدينا } H\left(-\frac{2}{5}; 2; \frac{4}{5}\right) \text{ وعليه } OH = \sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + 2^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{5}}$$

$$\text{إذن } d(O; (\Delta)) = \sqrt{\frac{24}{5}}$$

التمرين الثاني:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة □ المعادلة: $z^2 - 2z + 10 = 0$.

$$\Delta = 4 - 40 = -36 = (6i)^2 \text{ للمعادلة حلان هما } z_1 = \frac{2+6i}{2} = 1+3i \text{ ، } z_2 = \frac{2-6i}{2} = 1-3i$$

2. نعتبر في المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A, B, C و D لواحقتها على الترتيب:

$$z_D = 1 - 3i \text{ و } z_C = -3 + i, z_B = 1 + 3i, z_A = 2 + i$$

أ - كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ على الشكل الأسّي.

$$\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{-3 + i - 1 - 3i}{2 + i - 1 - 3i} = \frac{-4 - 2i}{1 - 2i} = \frac{(-4 - 2i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{-10i}{5} = -2i = 2e^{i(-\frac{\pi}{2})}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC .

$$\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = -\frac{\pi}{2} \text{ وهذا يعني أن } (\overline{BA}; \overline{BC}) = -\frac{\pi}{2} \text{ بالتالي المثلث } ABC \text{ قائم في } B.$$

ب - كتابة العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه B ويحول A إلى C وتحديد نسبته وزاويته.

العبارة المركبة للتشابه S من الشكل $z' - z_B = a(z - z_B)$ وبما أن $S(A) = C$ فإن $z_C - z_B = a(z_A - z_B)$

$$\text{ومنه } \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = -2i \text{ وعليه العبارة المركبة للتشابه } S \text{ هي } z' - z_B = -2i(z - z_B) \text{ أي } z' = -2iz - 5 + 5i$$

ج - تعيين z_E لاحقة النقطة E ؛ علماً أن D هي صورة E بالتشابه S .

$$S(E) = D \text{ معناه } z_D = -2iz_E - 5 + 5i \text{ تكافئ } 1 - 3i = -2iz_E - 5 + 5i \text{ ومنه } z_E = \frac{6 - 8i}{-2i} = \frac{3 - 4i}{-i} \text{ أي } z_E = -4 + 3i$$

3. لتكن F صورة B بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته $-\frac{1}{2}$.

أ - تبين أن F هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين ب: 3- و 1- على الترتيب.

$$\text{لدينا } \overline{AF} = -\frac{1}{2}\overline{AB} \text{ معناه } \overline{AF} + \frac{1}{2}\overline{AB} = 0 \text{ تكافئ } \overline{AF} + \frac{1}{2}(\overline{AF} + \overline{FB}) = 0 \text{ تكافئ } \frac{3}{2}\overline{AF} + \frac{1}{2}\overline{FB} = 0$$

$$\text{تكافئ } -\frac{3}{2}\overline{FA} + \frac{1}{2}\overline{FB} = 0 \text{ تكافئ } -3\overline{FA} + \overline{FB} = 0 \text{ نستنتج أن } F \text{ هي مرجح النقطتين } A \text{ و } B \text{ المرفقتين ب: 3- و 1- على الترتيب.}$$

ب - تعيين z_F لاحقة النقطة F .

$$z_F = \frac{-3z_A + z_B}{-2} = \frac{-6 - 3i + 1 + 3i}{-2} = -\frac{5}{2}$$

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$ ، (C) تمثيلها البياني في معلم

ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. وحدة الرسم $2cm$.

I- 1. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = xe^x + 1$.

أ (دراسة اتجاه تغير الدالة h).

الدالة h تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $h'(x) = e^x + xe^x = e^x(x + 1)$

لدينا $e^x > 0$ ومنه إشارة $h'(x)$ كإشارة $(1 + x)$; $h'(-1) = 0$

من أجل $x \in]-1; -\infty[$ ، $h'(x) < 0$ وعليه الدالة h متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; -1]$.

من أجل $x \in]-1; +\infty[$ ، $h'(x) > 0$ و عليه الدالة h متزايدة تماماً على المجال $]-1; +\infty[$.

(ب) تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x : $h(x) > 0$.

لدينا الدالة h تقبل قيمة حدية صغرى تبلغها عند $x = -1$ و عليه من أجل كل عدد حقيقي x : $h(x) \geq h(-1)$ أي

$$h(x) \geq 1 - e^{-1} \text{ وبالتالي } h(x) > 0.$$

2. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x + 2 - e^x$.

(أ) حساب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 - e^x = -\infty$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 - e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x} \right) = -\infty$$

(ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g .

$$g'(x) = 1 - e^x$$

$$g'(x) = 0 \text{ معناه } 1 - e^x = 0 \text{ و يكافئ } e^x = 1 \text{ أي } x = 0$$

$$g'(x) > 0 \text{ معناه } 1 - e^x > 0 \text{ و يكافئ } e^x < 1 \text{ أي } x < 0$$

$$g'(x) < 0 \text{ معناه } 1 - e^x < 0 \text{ و يكافئ } e^x > 1 \text{ أي } x > 0$$

إذن الدالة g متزايدة تماماً على $]-\infty; 0]$ و متناقصة تماماً على $[0; +\infty[$.

جدول التغيرات.

x	$-\infty$	β	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	-
$g(x)$			1		

(ج) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين α و β مع $\alpha > \beta$

الدالة g مستمرة و متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; 0]$ و تأخذ قيمها في المجال $]-\infty; 1]$ و $0 \in]-\infty; 1]$ إذن المعادلة

$$g(x) = 0 \text{ تقبل حلاً وحيداً } \beta \text{ في المجال }]-\infty; 0].$$

ولدينا الدالة g مستمرة و متناقصة تماماً على المجال $[0; +\infty[$ و تأخذ قيمها في المجال $]-\infty; 1]$ و $0 \in]-\infty; 1]$ إذن

$$\text{المعادلة } g(x) = 0 \text{ تقبل حلاً وحيداً } \alpha \text{ في المجال } [0; +\infty[.$$

التحقق أن $1,14 < \alpha < 1,15$.

لدينا $g(1,14) \approx 0,013$ و $g(1,15) \approx -0,008$ أي $g(1,14) \times g(1,15) < 0$ و منه $1,14 < \alpha < 1,15$.

(د) استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	β	α	$+\infty$
$g(x)$	—	0	+	—

II- 1. حساب نهايتي f عند $-\infty$ و $+\infty$ ثم فسّر النتائج هندسيا.

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 = -1$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x + 1 = 1$ إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} = -1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x (1 - e^{-x})}{e^x (x + e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}} = 0$$

2. أ) تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$.

ليكن x عددا حقيقيا:

$$f'(x) = \frac{e^x (xe^x + 1) - (e^x + xe^x)(e^x - 1)}{(xe^x + 1)^2} = \frac{xe^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x - xe^{2x} + xe^x}{(xe^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x - e^{2x} + xe^x}{(xe^x + 1)^2} = \frac{e^x (x + 2 - e^x)}{(xe^x + 1)^2} = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f .

لدينا $e^x > 0$ و $(xe^x + 1)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$.
في المجموعة $]-\infty; \beta[\cup]\alpha; +\infty[$ ، $g(x) < 0$ أي $f'(x) < 0$ وعليه الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty; \beta[$ و $]\alpha; +\infty[$

وفي المجال $]\beta; \alpha[$ ، $g(x) > 0$ أي $f'(x) > 0$ وعليه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]\beta; \alpha[$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	β	α	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+	—
$f(x)$	-1	$f(\beta)$	$f(\alpha)$	0

3. أ) التحقق أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$.

لدينا $g(\alpha) = 0$ معناه $\alpha + 2 - e^\alpha = 0$ أي $e^\alpha = \alpha + 2$

$$f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1} = \frac{\alpha + 2 - 1}{\alpha(\alpha + 2) + 1} = \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2} = \frac{1}{\alpha + 1}$$

ب) تعيين حصر العدد $f(\alpha)$ سعته 10^{-2} .

لدينا $1,14 < \alpha < 1,15$ معناه $2,14 < \alpha + 1 < 2,15$ يكافئ $\frac{1}{2,15} < \frac{1}{\alpha + 1} < \frac{1}{2,14}$ أي $0,46 < f(\alpha) < 0,47$.

4. تعيين معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

معادلة (T) هي: $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ أي $y = x$.

5. أ) التحقق أن $f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1}$ حيث $u(x) = e^x - xe^x - 1$.

ليكن x عددا حقيقيا:

$$f(x) - x = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} - x = \frac{e^x - 1 - x^2 e^x - x}{xe^x + 1} = \frac{-1 - x + e^x(1 - x^2)}{xe^x + 1} = \frac{-(x+1) + e^x(1+x)(1-x)}{xe^x + 1}$$

$$f(x) - x = \frac{(1+x)(e^x(1-x) - 1)}{xe^x + 1} = \frac{(1+x)u(x)}{xe^x + 1}$$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة u ثم استنتاج إشارة $u(x)$.

الدالة u تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x : $u'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$

إشارة $u'(x)$ هي نفس إشارة $-x$

من أجل $x > 0$ فإن $u'(x) < 0$ ؛ ومن أجل $x < 0$ فإن $u'(x) > 0$ و $u'(0) = 0$.

وعليه الدالة u متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 0]$ ومتناقصة تماما على المجال $[0; +\infty[$ ولها قيمة حدية عظمى هي

$$u(0) = 0 \text{ إذن من أجل كل عدد حقيقي } x: u(x) \leq 0$$

ج) استنتاج الوضعية النسبية للمنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (T).

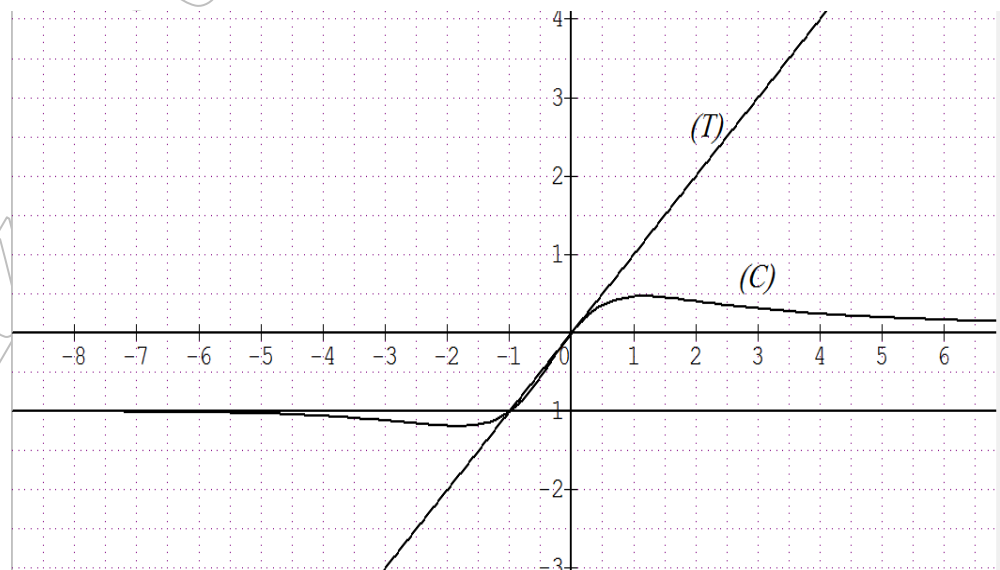
$$f(x) - x = \frac{(1+x)u(x)}{xe^x + 1} = \frac{(1+x)u(x)}{xe^x + 1}$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x+1$	-	0	+	+
$u(x)$	-	0	-	-
$f(x) - x$	+	0	-	-

في المجال $]-\infty; -1[$ ، (C) يقع فوق (T) وفي المجال $]-1; +\infty[$ ، (C) يقع تحت (T) ويشتركان في النقطتين

O و A(-1; -1)

6. رسم (T) و (C).



التمرين الرابع:

I- الدالة g معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $g(x) = (x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)$.

1- دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-1; +\infty[$.

الدالة g تقبل على الاشتقاق على $]-1; +\infty[$ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$:

$$2(x+1) + \frac{1}{x+1}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $x+1 > 0$ و $\frac{1}{x+1} > 0$ ومنه $g'(x) > 0$ إذن الدالة g متزايدة تماماً على $]-1; +\infty[$.

2- تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $0,31 < \alpha < 0,32$ وأن: $\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$.

الدالة g مستمرة على $]-1; +\infty[$ لأنها تقبل الاشتقاق على $]-1; +\infty[$ وهي متزايدة تماماً على هذا المجال و خاصة

على المجال $[0,31; 0,32]$ ولدينا $g(0,31) \approx -0,01$ ، $g(0,32) \approx 0,02$ أي $g(0,32) > 0$ و $g(0,31) < 0$ ومنه

حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0,31; 0,32[$ بحيث $g(\alpha) = 0$

$$g(\alpha) = 0 \text{ معناه } (\alpha+1)^2 - 2 + \ln(\alpha+1) = 0 \text{ أي } \ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$$

3- استنتاج، حسب قيم x إشارة $g(x)$.

من أجل $x \in]-1; \alpha[$ لدينا $g(x) < g(\alpha)$ أي $g(x) < 0$

ومن أجل $x \in]\alpha; +\infty[$ لدينا $g(x) > g(\alpha)$ أي $g(x) > 0$ كما أن $g(\alpha) = 0$.

II- الدالة f معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $f(x) = (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2$.

(C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^2 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - \ln(x+1))^2 = +\infty$$

$$\text{إذن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2 = +\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -1} (2 - \ln(x+1))^2 = +\infty$$

2- إثبات أنه، من أجل كل x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2g(x)}{x+1}$.

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]-1; +\infty[$ ولدينا:

$$f'(x) = 2(x+1) + 2\left(\frac{-1}{x+1}\right)(2 - \ln(x+1)) = 2(x+1) - \frac{2(2 - \ln(x+1))}{x+1} = \frac{2(x+1)^2 - 2(2 - \ln(x+1))}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{2[(x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)]}{x+1} = \frac{2g(x)}{x+1}$$

3- دراسة اتجاه تغير الدالة f .

من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $\frac{2}{x+1} > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ كإشارة $g(x)$.

أي f' سالبة على $]-1; \alpha[$ وموجبة على $]\alpha; +\infty[$

نستنتج هكذا أن الدالة f متناقصة تماما على $]-1; \alpha[$ و متزايدة تماما على $]\alpha; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

4- تبين أن: $f(\alpha) = (\alpha+1)^2 (1 + (\alpha+1)^2)$

لدينا $\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$ إذن $f(\alpha) = (\alpha+1)^2 + (2 - \ln(\alpha+1))^2 = (\alpha+1)^2 + (2 - (2 - (\alpha+1)^2))^2$

$$f(\alpha) = (\alpha+1)^2 + (\alpha+1)^4 = (\alpha+1)^2 (1 + (\alpha+1)^2)$$

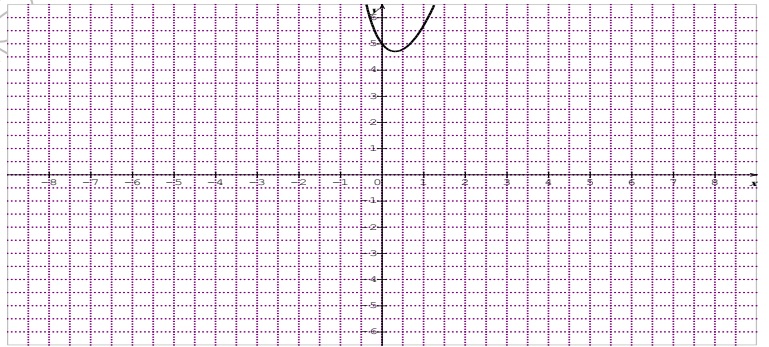
استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

$0,31 < \alpha < 0,32$ معناه $1,31 < \alpha+1 < 1,32$ يكافئ $1,7424 < (\alpha+1)^2 < 1,7161$ ويكافئ

$2,7161 < 1 + (\alpha+1)^2 < 2,7424$ ومنه $1,7424 \times 2,7424 < (\alpha+1)^2 (1 + (\alpha+1)^2) < 1,7161 \times 2,7161$ أي

$$4,6611 < f(\alpha) < 4,7783$$

5- تمثيل المنحنى (C_f) على المجال $]-1; 2]$.



III- المنحنى الممثل للدالة h المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $h(x) = \ln(x+1)$.

A النقطة ذات الإحداثيتين $(-1; 2)$ و M نقطة من (Γ) فاصلتها x .

1- إثبات أن المسافة AM تعطى بالعلاقة $AM = \sqrt{f(x)}$.

لدينا $M(x; \ln(x+1))$ ومنه

$$AM = \sqrt{(x+1)^2 + (\ln(x+1) - 2)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2} = \sqrt{f(x)}$$

2- الدالة k معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $k(x) = \sqrt{f(x)}$.

أ - تبين أن للدالتين k و f نفس اتجاه التغير على المجال $]-1; +\infty[$.

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]-1; +\infty[$ وهي موجبة على هذا المجال إذن الدالة k تقبل الاشتقاق على $]-1; +\infty[$

$$\text{ولدينا } k'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $2\sqrt{f(x)} > 0$ ومنه إشارة $k'(x)$ هي نفس إشارة $f'(x)$ وبالتالي للدالتين k و f نفس اتجاه التغير على المجال $]-1; +\infty[$.

ملاحظة: يمكن إتباع طريقة اتجاه تغير مركب دالتين.

ب - تعيين إحداثيتي النقطة B من (Γ) ، بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

لدينا الدالة k متناقصة تماماً على $]-1; \alpha[$ و متزايدة تماماً على $[\alpha; +\infty[$ فهي تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $]-1; +\infty[$ تبلغها من أجل $x = \alpha$ ومنه AM تكون أصغر ما يمكن من أجل $x = \alpha$ أي عند النقطة $B(\alpha; \ln(\alpha+1))$

ج - تبين أن: $AB = (\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2 + 1}$.

$$AB = k(\alpha) = \sqrt{f(\alpha)} = \sqrt{(\alpha+1)^2 (1 + (\alpha+1)^2)} = (\alpha+1)\sqrt{1 + (\alpha+1)^2}$$

الموضوع التاسع:**التمرين الأول:**

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط:

$$A(2; -1; 1), B(-1; 2; 1), C(1; -1; 2) \text{ و } D(1; 1; 1).$$

(1) أ) تحقق أن النقط A, B, C تعين مستويا.

ب) بين أن الشعاع $\vec{n}(1; 1; 1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

ج) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

(2) لتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 1), (B; 2), (C; -1)\}$.

أ) احسب إحداثيات النقطة G .

ب) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}\| = 2\|\vec{MD}\|$.

بين أن (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$.

ج) اكتب معادلة ديكارتية لـ (Γ) .

(3) بين أن (ABC) و (Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

التمرين الثاني:

1. $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث:

أ - تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

ب - جد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z - 6)(z^2 + \alpha z + \beta)$.

ج - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z) = 0$.

2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

A, B, C نقط من المستوي لواحقتها على الترتيب: $z_A = 6, z_B = 3 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 3 - i\sqrt{3}$.

أ - اكتب كلا من z_A, z_B و z_C على الشكل الأسّي.

ب - اكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسّي.

ج - استنتج طبيعة المثلث ABC .

3. ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ - جد الكتابة المركبة للتشابه S .

ب - عيّن $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S .

ج - بين أن النقط A, B و A' في استقامية

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ - أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب - احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا.

2. ادرس اتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أ - بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب:

$$y = x + 1 \text{ و } y = x$$

ب - ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') .

4. أثبت أن $\omega\left(0, \frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر بالنسبة للمنحنى (C_f) .

5. أ - بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $\ln 2 < \alpha < 1$ و $-1,3 < \beta < -1,4$.

ب - هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟

ج - ارسم (Δ) ، (Δ') ثم المنحنى (C_f) .

د - ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m-1)e^{-x} = m$

التمرين الرابع:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = 1 + \frac{2 \ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ؛ فسر النتائج هندسيا.

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2 (أ) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = 1$.

(ب) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

(ج) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0; 1[$ حلا وحيدا α ، حيث $e^{-0,4} < \alpha < e^{-0,3}$.

3 (3) أنشئ (T) و (C_f) .

4 (4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ كما يلي: $h(x) = 1 + \frac{2 \ln |x|}{|x|}$.

وليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

(أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x) - h(-x) = 0$. ماذا تستنتج؟

(ب) أنشئ المنحنى (C_h) اعتمادا على المنحنى (C_f) .

(ج) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2 = (m-1)|x|$.

حل الموضوع التاسع:**التمرين الأول:****(1) أ) التحقق أن النقط A, B, C تعين مستويا.**

لدينا $\overrightarrow{AB}(-3;3;0)$ ، $\overrightarrow{AC}(-1;0;1)$ و $\frac{-1}{-3} \neq \frac{0}{3}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه النقط A, B, C تعين مستويا.

(ب) تبين أن الشعاع $\vec{n}(1;1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

لدينا $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1(-3) + 1(3) + 1(0) = -3 + 3 = 0$ و $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1(-1) + 1(0) + 1(1) = -1 + 1 = 0$ ومنه $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وبالتالي $\vec{n}$ ناظم للمستوي (ABC) .

(ج) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

معادلة المستوي (ABC) من الشكل $x + y + z + d = 0$ وبما أن A تنتمي للمستوي (ABC) فإن $2 - 1 + 1 + d = 0$ ومنه $d = -2$ وعليه معادلة المستوي (ABC) هي $x + y + z - 2 = 0$.
(2) لتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1), (B;2), (C;-1)\}$.

(أ) حساب إحداثيات النقطة G .

$$y_G = \frac{y_A + 2y_B - y_C}{2} = \frac{-1 + 4 - 1}{2} = 2, \quad x_G = \frac{x_A + 2x_B - x_C}{2} = \frac{2 - 2 - 1}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$z_G = \frac{z_A + 2z_B - z_C}{2} = \frac{1 + 2 - 2}{2} = \frac{1}{2}$$

وعليه $G\left(-\frac{1}{2}; 2; \frac{1}{2}\right)$.

(ب) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{MD}\|$.**تبين أن (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$.**

لدينا G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1), (B;2), (C;-1)\}$ ومنه $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = (1+2-1)\overrightarrow{MG}$ أي $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$
معناه $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{MG}\|$ و $2MG = 2MD$ أي $MG = MD$ إذن (Γ) هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$.

(ج) كتابة معادلة ديكارتية لـ (Γ) .

لتكن I منتصف القطعة $[GD]$ إذن $I\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right)$

المستوي (Γ) شعاعه الناظمي هو $\overrightarrow{GD}\left(\frac{3}{2}; -1; \frac{1}{2}\right)$ ويشمل النقطة I .

معادلة المستوي (Γ) من الشكل $\frac{3}{2}x - y + \frac{1}{2}z + d = 0$ وبما أن I تنتمي للمستوي (Γ) فإن $\frac{3}{8} - \frac{3}{2} + \frac{3}{8} + d = 0$

ومنه $d = \frac{3}{4}$ وعليه معادلة (Γ) هي $\frac{3}{2}x - y + \frac{1}{2}z + \frac{3}{4} = 0$ أي $6x - 4y + 2z + 3 = 0$

(3) تبين أن (ABC) و (Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

لدينا $\vec{n}'(6; -4; 2)$ شعاع ناظمي لـ (Γ) و $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي لـ (ABC)

واضح أن $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ غير مرتبطين خطيا إذن (ABC) و (Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ)

تعيين تمثيل وسيطي لـ (Δ) .

نحل الجملة
$$\begin{cases} x+y+z-2=0 \dots\dots\dots (1) \\ 6x-4y+2z+3=0 \dots\dots (2) \end{cases}$$
 بضرب المعادلة (1) بالعدد 4 وجمع المعادلتين نجد

$$10x+6z-5=0 \text{ ومنه } x=\frac{1}{2}-\frac{3}{5}z \text{ وبتعويض } x \text{ في (1) نجد } \frac{1}{2}-\frac{3}{5}z+y+z-2=0 \text{ ومنه } y+\frac{2}{5}z-\frac{3}{2}=0$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}-3t \\ y=\frac{3}{2}-2t; (t \in \mathbb{R}) \\ z=5t \end{cases} \text{ أي } y=\frac{3}{2}-\frac{2}{5}z \text{ وبوضع } z=5t \text{ نجد } \begin{cases} x=\frac{1}{2}-3t \\ y=\frac{3}{2}-2t \\ z=5t \end{cases}$$

التمرين الثاني:

1. $P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث: $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$

أ - التحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

$$P(6) = 6^3 - 12 \times 6^2 + 24 \times 6 - 72 = 216 - 432 + 144 - 72 = 0 \text{ ومنه 6 جذر لكثير الحدود } P(z).$$

ب - ايجاد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z-6)(z^2 + \alpha z + \beta)$.

$$(z-6)(z^2 + \alpha z + \beta) = z^3 + (\alpha-6)z^2 + (\beta-6\alpha)z - 6\beta$$

وبالمطابقة مع $z^3 - 12z^2 + 24z - 72$ نجد $\alpha-6 = -12$ و $\beta-6\alpha = -72$ ومنه $\alpha = -6$ و $\beta = 12$

$$\text{إذن } P(z) = (z-6)(z^2 - 6z + 12)$$

ج - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z) = 0$.

$$P(z) = 0 \text{ يكافئ } z = 6 \text{ أو } z^2 - 6z + 12 = 0 \dots\dots (1)$$

نحل المعادلة (1).

$$\Delta = 36 - 48 = -12 = (2\sqrt{3}i)^2 \text{ للمعادلة حلان هما } z_1 = \frac{6+2i\sqrt{3}}{2} = 3+i\sqrt{3}$$

$$\text{و } z_1 = \frac{6-2i\sqrt{3}}{2} = 3-i\sqrt{3} \text{ بالتالي حلول المعادلة } P(z) = 0 \text{ هي } \{6; 3+i\sqrt{3}; 3-i\sqrt{3}\}.$$

2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

A, B و C نقط من المستوي لواحقتها على الترتيب: $z_A = 6$ ، $z_B = 3+i\sqrt{3}$ و $z_C = 3-i\sqrt{3}$.

أ - كتابة كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي.

$$z_A = 6e^{i0}$$

$$z_B = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \text{ ومنه } |z_B| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{بالتالي } z_B = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad z_C = \overline{z_B} = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

ب - كتابة العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري.

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{6 - 3 - i\sqrt{3}}{6 - 3 + i\sqrt{3}} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}} = \frac{(3 - i\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3})}{(3 + i\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3})} = \frac{6 - 6i\sqrt{3}}{12}$$

$$= \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

كتابة العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الأسّي

$$\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right) = \arg\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}, \quad \left|\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right| = \left|\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$$

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ بالتالي}$$

ج - استنتاج طبيعة المثلث ABC .

لدينا $\left|\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right| = 1$ و $\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right) = -\frac{\pi}{3}$ وهذا يعني أن $BA = CA$ و $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{3}$ إذن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3. ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ - ايجاد الكتابة المركبة للتشابه S .

الكتابة المركبة للتشابه S هي $z' - z_C = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_C)$ أي $z' = i\sqrt{3}(z - z_C) + z_C$ ومنه $z' = i\sqrt{3}z - 4i\sqrt{3}$.

ب - تعيين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S .

$$z_{A'} = 6i\sqrt{3} - 4i\sqrt{3} = 2i\sqrt{3} \text{ ومنه } z_{A'} = i\sqrt{3}z_A - 4i\sqrt{3} \text{ و } S(A) = A'$$

ج - تبين أن النقط A, B, A' في استقامة.

$$\frac{z_{A'} - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2i\sqrt{3} - 6}{3 + i\sqrt{3} - 6} = \frac{2(-3 + i\sqrt{3})}{-3 + i\sqrt{3}} = 2 \text{ بما أن } \frac{z_{A'} - z_A}{z_B - z_A} \text{ هو عدد حقيقي فإن } A, B, A' \text{ في استقامة.}$$

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ - حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x - 1} = -1 \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - \frac{1}{e^x - 1} = -\infty$$

$$\text{ولدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0 \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$$

ب - حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^x - 1} = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x - 1 = 0^-$ ومنه $\lim_{x \rightarrow 0^-} x - \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$

ولدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x - 1 = 0^+$ ومنه $\lim_{x \rightarrow 0^+} x - \frac{1}{e^x - 1} = -\infty$

التفسير: (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = 0$.

2. دراسة اتجاه تغير الدالة f جدول تغيراتها.

من أجل $x \neq 0$ لدينا: $f'(x) = 1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$

من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم لدينا $e^x > 0$ و $(e^x - 1)^2 > 0$ ومنه $f'(x) > 0$ وعليه الدالة f متزايدة تماماً على مجالي تعريفها.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

3. أ - تبين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتهما على الترتيب:

$$y = x \text{ و } y = x + 1$$

إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{e^x - 1} = 0$ يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً معادلته $y = x$ بجوار $+\infty$.

إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{e^x - 1} - 1 = -1 - 1 = -2$ يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً معادلته $y = x + 1$ بجوار $-\infty$.

ب - دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

$$f(x) - x = \frac{-1}{e^x - 1} \text{ ؛ إشارة } f(x) - x \text{ هي عكس إشارة } e^x - 1$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	—		+
$f(x) - x$	+		—
الوضعية النسبية	(C_f) يقع فوق (Δ)		(C_f) يقع تحت (Δ)

ب - دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ') .

$$f(x) - (x + 1) = -\frac{1}{e^x - 1} - 1 = \frac{-e^x}{e^x - 1}$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $-e^x < 0$ ومنه إشارة $f(x) - (x + 1)$ هي عكس إشارة $e^x - 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	—		+
$f(x) - (x+1)$	+		—
الوضعية النسبية	(C_f) يقع فوق (Δ')		(C_f) يقع تحت (Δ')

4. إثبات أن $\omega\left(0, \frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر بالنسبة للمنحنى (C_f) .

$\omega\left(0, \frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر إذا تحقق مايلي: من أجل $x \in \mathbb{R}^*$ فإن $-x \in \mathbb{R}^*$

ومن أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f(-x) + f(x) = 1$

لدينا $x \in \mathbb{R}^*$ معناه $x \neq 0$ ومنه $-x \neq 0$ أي $-x \in \mathbb{R}^*$.

$$f(-x) + f(x) = -x - \frac{1}{e^{-x} - 1} + x - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{-e^x}{1 - e^x} - \frac{1}{e^x - 1} = 1$$

إذن $\omega\left(0, \frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر بالنسبة للمنحنى (C_f) .

5. أ - تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $\ln 2 < \alpha < 1$ و $-1,4 < \beta < -1,3$.

الدالة f مستمرة ومنتزادة تماما على المجال $]-\infty; 0[$ وبالخصوص على المجال $[-1,4; -1,3]$ ولدينا

$f(-1,4) \approx -0,07$ و $f(-1,3) \approx 0,07$ أي $f(-1,4) \times f(-1,3) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد

عدد حقيقي وحيد β من المجال $[-1,4; -1,3]$ يحقق $f(\beta) = 0$.

ولدينا الدالة f مستمرة ومنتزادة تماما على المجال $]0; +\infty[$ وبالخصوص على المجال $[\ln 2; 1]$ ولدينا

$f(\ln 2) \approx -0,3$ و $f(1) \approx 0,4$ أي $f(\ln 2) \times f(1) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي

وحيد α من المجال $[\ln 2; 1]$ بحيث $f(\alpha) = 0$.

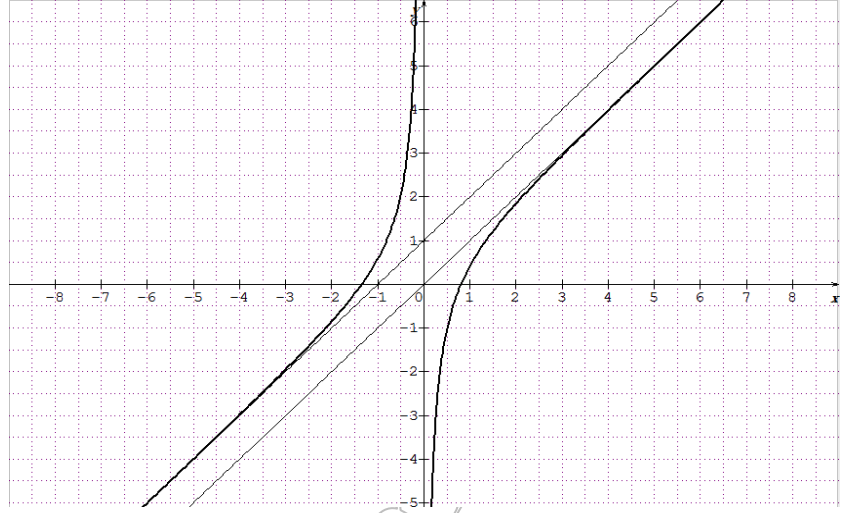
ب - هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟

المماس يوازي (Δ) معناه $f'(x_0) = 1$.

$$f'(x_0) = 1 \text{ يكافئ } 1 + \frac{e^{x_0}}{(e^{x_0} - 1)^2} = 1 \text{ وكافئ } \frac{e^{x_0}}{(e^{x_0} - 1)^2} = 0 \text{ أي } e^{x_0} = 0 \text{ وهذا مستحيل.}$$

ومنه لا يوجد مماس لـ (C_f) يوازي المستقيم (Δ) .

ج - رسم (Δ) ، (Δ') والمنحنى (C_f) .



د - المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(m-1)e^{-x} = m$

$$(m-1)e^{-x} = m \text{ تكافئ } m-1 = me^x \text{ وتكافئ } -1 = m(e^x - 1) \text{ تكافئ } m = \frac{-1}{e^x - 1} \text{ تكافئ } x + m = x - \frac{1}{e^x - 1}$$

أي $f(x) = x + m$ ومنه حلول المعادلة هي فواصل النقط المشتركة بين (C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y = x + m$ إذا كان $x < 0$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا

إذا كان $0 \leq m \leq 1$ فإن المعادلة ليس لها حلول.

إذا كان $m > 1$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا.

التمرين الرابع:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = 1 + \frac{2 \ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \frac{2 \ln x}{x} = -\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2 \ln x}{x} = 1 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

تفسير النتائج هندسيا.

لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = 0$ (محور الترتيب).

ولدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 1$ بجوار $+\infty$.

(ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{2}{x}\right)x - 2 \ln x}{x^2} = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $1 - \ln x$.

$$f'(x) = 0 \text{ يعني } 1 - \ln x = 0 \text{ يكافئ } \ln x = 1 \text{ أي } x = e.$$

$$f'(x) > 0 \text{ يعني } 1 - \ln x > 0 \text{ يكافئ } \ln x < 1 \text{ أي } 0 < x < e$$

$$f'(x) < 0 \text{ يعني } 1 - \ln x < 0 \text{ يكافئ } \ln x > 1 \text{ أي } x > e.$$

إذن الدالة f متزايدة تماماً على $[0; e]$ ومنتقصة تماماً على $[e; +\infty[$.

وجداول تغيّرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$		$1 + \frac{2}{e}$	1

(2) أ) دراسة وضعيّة المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = 1$.

$$\text{لدينا } f(x) - 1 = \frac{2 \ln x}{x}$$

$$f(x) - 1 = 0 \text{ معناه } \frac{2 \ln x}{x} = 0 \text{ تكافئ } \ln x = 0 \text{ أي } x = 1.$$

$$f(x) - 1 > 0 \text{ معناه } \frac{2 \ln x}{x} > 0 \text{ تكافئ } \ln x > 0 \text{ أي } x > 1$$

$$f(x) - 1 < 0 \text{ معناه } \frac{2 \ln x}{x} < 0 \text{ تكافئ } \ln x < 0 \text{ أي } 0 < x < 1.$$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - 1$		- 0 +	
الوضعية النسبية		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)
		(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;1)$	

ب) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) \text{ ومنه } y = 2(x - 1) + 1 \text{ أي } y = 2x - 1 \text{ } (T)$$

ج) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0; 1[$ حلاً وحيداً α ، حيث $e^{-0.4} < \alpha < e^{-0.3}$.

الدالة f مستمرة على المجال $]0; 1[$ فهي مستمرة على المجال $[e^{-0.4}; e^{-0.3}]$ ولدينا $f(e^{-0.4}) \approx -0.19$ ،

$f(e^{-0.3}) \approx 0.19$ أي $f(e^{-0.3}) \times f(e^{-0.4}) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من المجال

$[e^{-0.4}; e^{-0.3}]$ بحيث $f(\alpha) = 0$ وبما أن الدالة f متزايدة تماماً على $]0; 1[$ فإن α وحيد.

$$(4) \text{ لتكن الدالة } h \text{ المعرفة على } \mathbb{R} - \{0\} \text{ كما يلي: } h(x) = 1 + \frac{2 \ln |x|}{|x|}.$$

ولیکن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

(أ) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x) - h(-x) = 0$. ماذا تستنتج ؟

ليكن x عددا حقيقيا غير معدوم:

$$h(x) - h(-x) = 1 + \frac{2\ln|x|}{|x|} - 1 - \frac{2\ln|-x|}{|-x|} = \frac{2\ln|x|}{|x|} - \frac{2\ln|x|}{|x|} = 0$$

من أجل $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا $-x \in \mathbb{R}^*$

ولدينا $h(x) - h(-x) = 0$ ومنه $h(x) = h(-x)$ إذن الدالة h زوجية.

(ب) الرسم

(ج) المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي

m ، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2 = (m-1)|x|$.

$$\ln x^2 = (m-1)|x| \text{ تكافئ } m = \frac{\ln x^2}{|x|} + 1$$

$$h(x) = m \text{ أي } m = \frac{2\ln|x|}{|x|} + 1$$

حلول المعادلة إن وجدت هي فواصل النقاط المشتركة

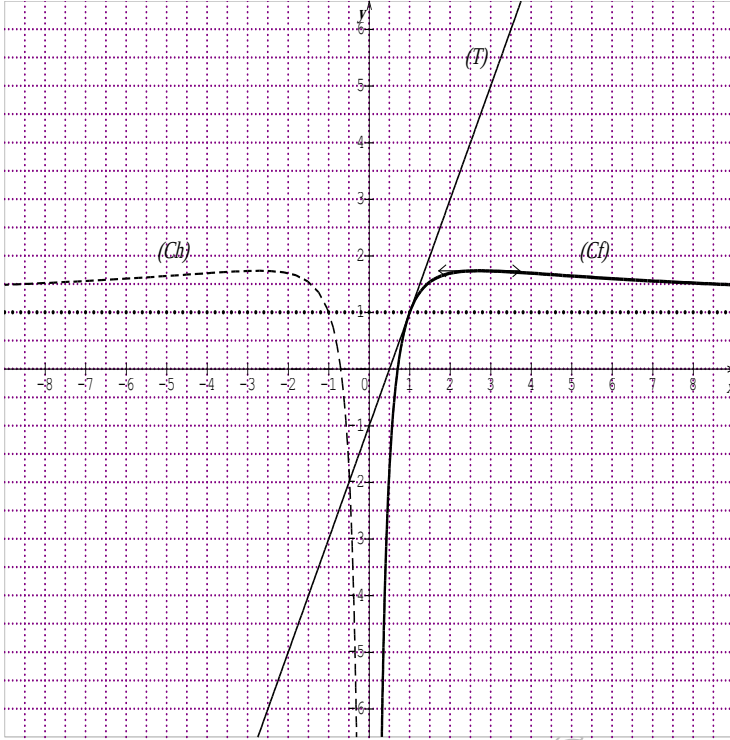
بين (C_h) والمستقيم الأفقي ذي المعادلة $y = m$.

إذا كان $m \leq 1$ فإن المعادلة تقبل حلين.

إذا كان $1 < m < 1 + \frac{2}{e}$ فإن المعادلة تقبل أربعة حلول.

إذا كان $m = 1 + \frac{2}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلين مضاعفين.

إذا كان $m > 1 + \frac{2}{e}$ فإن المعادلة ليس لها حلول.



الموضوع العاشر

التمرين الأول:

- الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقطة:
- $A(3; -1; 2)$ ، $B(1; 1; -2)$ و $G(4; -2; 4)$ والمستوي (P) الذي معادلته $x - 2y + 3z + 8 = 0$.
- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) ؛ ثم عيّن إحداثيات L نقطة تقاطع المستقيم (AB) والمستوي (P) .
 - أ - بين أن G تنتمي للمستقيم (AB) وأنها مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.
ب - عيّن طبيعة وعناصر (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\| -3\vec{MA} + \vec{MB} \| = \| \vec{MA} - \vec{MB} \|$.
 - أ - اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة G ويعامد المستوي (P) ، ثم عيّن إحداثيات H نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ) .
ب - استنتج المسافة بين النقطة L والمستقيم (Δ) .
 - أ - اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (AGH) ، ثم استنتج معادلة ديكرتية له.
ب - بين أن المستويين (AGH) و (P) يتقاطعان وفق مستقيم (d) يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

التمرين الثاني:

- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة: $(z^2 + 4)(z^2 - 6z + 10) = 0$
- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لتكن النقط: A, B, C, D و E التي لواحقتها على الترتيب: $z_A = 2i$ ، $z_B = -2i$ ، $z_C = 3 - i$ ، $z_D = 3 + i$ و $z_E = 2 - 2i$.
نضع $L = \frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$
أ - احسب طولية العدد المركب L وعمدة له، ثم فسر النتائج هندسيا.
ب - استنتج أنه يوجد دوران وحيد r يحول B إلى A ويحول D إلى C يطلب إيجاد زاويته.
- نسمة (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق: $\arg(iz + 1 - 3i) = -\frac{\pi}{4}$.
أ - بين أن B تنتمي إلى (Γ_1) ، ثم عيّن المجموعة (Γ_1) .
ب - نسمة (Γ_2) صورة المجموعة (Γ_1) بالدوران r . عيّن المجموعة (Γ_2) .
- بكل نقطة M من المستوي المركب ذات اللاحقة z نرفق بالدوران r النقطة M' ذات اللاحقة z' .
أ - اكتب العبارة المركبة للدوران r . ثم عيّن سابقة النقطة O بالدوران r .
ب - عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث: $|-iz + 2 + 2i| = |z_A|$.
- أعط تفسيراً هندسياً لعمدة العدد $\frac{z - z_B}{z - z_D}$ ، ثم استنتج مجموعة النقط M بحيث يكون العدد $\frac{z - z_B}{z - z_D}$ حقيقياً سالبا.

التمرين الثالث:

I- g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $g(x) = e^x + x + 1$

- ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.
- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-1,3 < \alpha < -1,2$.
- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. بين أن $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$ ، ثم استنتج تغيرات f على $\mathbb{R}$.

2. بين أن $f(\alpha) = \alpha + 1$ ، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

3. عين معادلة المماس (d) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة صفر، ثم ادرس الوضع النسبي لـ (d) و (C_f) .

4. بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.

5. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) ، ثم ارسم (d) و (Δ) و (C_f) .

التمرين الرابع:

I- الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$

(1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) استنتج أنه، من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

II- f الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول 2cm)

(1 أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$. فسّر النتيجة بيانيا.

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2 أ) بين أنه، من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، حيث f' هي مشتقة الدالة f .

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(ج) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم تحقق أن $0 < \alpha < 0,5$.

(3 أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

(ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(4) نقبل أن المستقيم (T) ذا المعادلة: $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

(أ) احسب x_0 .

(ب) أرسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثم المنحنى (C_f) .

(ج) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m ، بحيث تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين متمايزين.

حل الموضوع العاشر:**التمرين الأول:****1. كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)**المستقيم (AB) شعاع توجيهه $\overrightarrow{AB}(-2; 2; -4)$ $M(x; y; z) \in (AB)$ معناه $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ حيث t عدد حقيقي

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 2t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 - 4t \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x - 3 = -2t \\ y + 1 = 2t; (t \in \mathbb{R}) \\ z - 2 = -4t \end{cases} \text{ ومنه } (t \in \mathbb{R})$$

تعيين إحداثيات L نقطة تقاطع المستقيم (AB) والمستوي (P).

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - 4t \end{cases} \text{ نحل الجملة } \begin{cases} x - 2y + 3z + 8 = 0 \\ x - 2y + 3z + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ومنه } 3 - 2t + 2 - 4t + 6 - 12t + 8 = 0 \text{ ومنه } t = \frac{19}{18}$$

$$\text{وعليه } L\left(\frac{8}{9}; \frac{10}{9}; -\frac{20}{9}\right) \text{ إذن } \begin{cases} x = 3 - 2\left(\frac{19}{18}\right) \\ y = -1 + 2\left(\frac{19}{18}\right) \\ z = 2 - 4\left(\frac{19}{18}\right) \end{cases}$$

2. أ - تبين أن G تنتمي للمستقيم (AB).

$$\begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} 4 = 3 - 2t \\ -2 = -1 + 2t \\ 4 = 2 - 4t \end{cases} \text{ معناه } G \in (AB) \text{ إذن من أجل } t = -\frac{1}{2} \text{ نجد النقطة G من المستقيم (AB).}$$

تبين أن G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.لدينا G تنتمي للمستقيم (AB) من أجل $t = -\frac{1}{2}$ ومنه $\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ومنه $2\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB}$ تكافئ $2\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ وتكافئ $2\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ ومنه $-3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ إذن G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بـ 3 و 1 على الترتيب.**ب - تعيين طبيعة وعناصر (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|$.**G مرجح الجملة $\{(A; -3), (B; 1)\}$ إذن من أجل كل نقطة M من الفضاء لدينا $-3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MG}$ ولدينا $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$

$$\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| \text{ معناه } \|-2\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{BA}\| \text{ أي } MG = \frac{\|\overrightarrow{BA}\|}{2}$$

ولدينا $\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{4 + 4 + 16} = 2\sqrt{6}$ ومنه $MG = \sqrt{6}$ وبالتالي (E) هي سطح الكرة التي مركزها G ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

3 أ - كتابة تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة G ويعامد المستوي (P) .

بما أن (Δ) يعامد (P) فإن $\vec{n}(1; -2; 3)$ يكون شعاع توجيه للمستقيم (Δ) .

$M(x; y; z) \in (\Delta)$ معناه $\vec{GM} = t\vec{n}$ حيث t عدد حقيقي.

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2 - 2t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 4 + 3t \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x - 4 = t \\ y + 2 = -2t; (t \in \mathbb{R}) \\ z - 4 = 3t \end{cases} \text{ ومنه}$$

تعيين إحداثيات H نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ) .

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 4 + 3t \end{cases} \text{ نحل الجملة} \quad \begin{cases} x - 2y + 3z + 8 = 0 \end{cases}$$

وعليه $H(2; 2; -2)$

ب - استنتاج المسافة بين النقطة L والمستقيم (Δ) .

بما أن (Δ) يعامد (P) فإن المسقط العمودي لكل نقطة من المستوي (P) على المستقيم (Δ) هي نقطة تقاطعهما وبما $L \in (P)$ فإن المسافة بين النقطة L والمستقيم (Δ) هي LH .

$$LH = \sqrt{\frac{100}{81} + \frac{64}{81} + \frac{4}{81}} = \frac{\sqrt{168}}{9} \text{ ومنه } \overline{LH} \left(\frac{10}{9}; \frac{8}{9}; \frac{2}{9} \right)$$

4. أ - كتابة تمثيلاً وسيطياً للمستوي (AGH)

لدينا $\vec{AG}(1; -1; 2)$ ، $\vec{AH}(-1; 3; -4)$ و $\frac{-1}{1} \neq \frac{3}{-1}$ ومنه النقط A ، G و H تعين مستويًا.

$M(x; y; z) \in (AGH)$ معناه $\vec{AM} = \alpha \vec{AG} + \beta \vec{AH}$ حيث α و β عدنان حقيقيان.

$$\begin{cases} x = 3 + \alpha - \beta \\ y = -1 - \alpha + 3\beta; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \\ z = 2 + 2\alpha - 4\beta \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x - 3 = \alpha - \beta \\ y + 1 = -\alpha + 3\beta; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \\ z - 2 = 2\alpha - 4\beta \end{cases} \text{ ومنه}$$

استنتاج معادلة ديكارتية له.

$$\begin{cases} x = 3 + \alpha - \beta \dots\dots\dots(1) \\ y = -1 - \alpha + 3\beta \dots\dots\dots(2) \\ z = 2 + 2\alpha - 4\beta \dots\dots\dots(3) \end{cases} \text{ بضرب المعادلة (1) بـ } -1 \text{ وجمع (1) و (2) و (3) نجد } -x + y + z + 2 = 0$$

وهي معادلة المستوي (AGH) .

ب - تبين أن المستويين (AGH) و (P) يتقاطعان وفق مستقيم (d) يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

لدينا $\vec{n}(1; -2; 3)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) و $\vec{n}'(-1; 1; 1)$ شعاع ناظمي للمستوي (AGH)

و $\frac{-1}{1} \neq \frac{1}{-2}$ إذن الشعاعان $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ غير مرتبطين خطياً ومنه المستويان (AGH) و (P) متقاطعان وفق مستقيم (d) .

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + 8 = 0 \dots\dots\dots(1) \\ -x + y + z + 2 = 0 \dots\dots\dots(2) \end{cases} \text{ بجمع المعادلتين (1) و (2) نجد } -y + 4z + 10 = 0$$

ومنه $y = 4z + 10$ بالتعويض في (1) نجد $x - 2(4z + 10) + 3z + 8 = 0$ ومنه $x = 5z + 12$

$$(d): \begin{cases} x = 5t + 12 \\ y = 4t + 10 \\ z = t \end{cases} \text{ وبوضع } z = t \text{ نجد}$$

التمرين الثاني:

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة: $(z^2 + 4)(z^2 - 6z + 10) = 0$

$$(z^2 + 4)(z^2 - 6z + 10) = 0 \text{ يكافئ } z^2 = -4 \text{ أو } z^2 - 6z + 10 = 0$$

حل المعادلة $z^2 = -4$.

$$z^2 = -4 \text{ تكافئ } z^2 = (2i)^2 \text{ ومنه } z = 2i \text{ أو } z = -2i.$$

$$\text{حل المعادلة } z^2 - 6z + 10 = 0.$$

$$\Delta' = 9 - 10 = -1 = i^2 \text{ للمعادلة حلان هما } z = 3 + i \text{ أو } z = 3 - i.$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $(z^2 + 4)(z^2 - 6z + 10) = 0$ هي: $\{2i; -2i; 3 + i; 3 - i\}$.

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لتكن النقط: A, B, C, D و E

التي لواحقتها على الترتيب: $z_A = 2i, z_B = -2i, z_C = 3 - i, z_D = 3 + i$ و $z_E = 2 - 2i$.

$$\text{نضع } L = \frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$$

أ - حساب طوليلة العدد المركب L وعمدة له.

$$L = \frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} = \frac{3 - i - 2i}{3 + i + 2i} = \frac{3 - 3i}{3 + 3i} = \frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$\text{ومنه } |L| = |-i| = 1 \text{ و } \arg(L) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$$

تفسير النتائج هندسياً.

$$|L| = 1 \text{ معناه } \frac{AC}{BD} = 1 \text{ ومعناه } AC = BD$$

$$\arg(L) = -\frac{\pi}{2} \text{ معناه } (\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$$

ب - استنتاج أنه يوجد دوران وحيد r يحول B إلى A ويحول D إلى C يطلب إيجاد زاويته.

$$\begin{cases} z_A = az_B + b \dots (1) \\ z_C = az_D + b \dots (2) \end{cases}$$

$$\text{ب طرح (1) من (2) نجد } z_C - z_A = a(z_D - z_B) \text{ ومنه } a = \frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = -i$$

بما أنه يوجد عدد مركب وحيد a غير معدوم و $|a| = |-i| = 1$ فإنه يوجد دوران وحيد r يحول B إلى A

$$\text{ويحول } D \text{ إلى } C \text{ زاويته } \arg(a) = -\frac{\pi}{2}.$$

(3) نسمي (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق: $\arg(iz + 1 - 3i) = -\frac{\pi}{4}$.

أ - إثبات أن B تنتمي إلى (Γ_1) .

B تنتمي إلى (Γ_1) إذا كان $\arg(iz_B + 1 - 3i) = -\frac{\pi}{4}$.

لدينا $iz_B + 1 - 3i = i(-2i) + 1 - 3i = 3 - 3i = 3(1 - i)$ ومنه $\arg(iz_B + 1 - 3i) = \arg(3(1 - i)) = -\frac{\pi}{4}$

وهذا يعني أن B تنتمي إلى (Γ_1) .

تعيين المجموعة (Γ_1) .

$\arg(iz + 1 - 3i) = -\frac{\pi}{4}$ معناه $\arg(i(z - i - 3)) = -\frac{\pi}{4}$ ومعناه $\arg(i) + \arg(z - i - 3) = -\frac{\pi}{4}$

وتكافئ $\arg(z - (i + 3)) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}$ أي $\arg(z - z_D) = -\frac{3\pi}{4}$

بالتالي (Γ_1) هي نصف مستقيم مبدؤه D وبما أن B تنتمي لـ (Γ_1) فإن (Γ_1) هي نصف المستقيم $[DB]$ باستثناء النقطة D .

ب - نسمي (Γ_2) صورة المجموعة (Γ_1) بالدوران r .

تعيين المجموعة (Γ_2) .

بما أن $\begin{cases} r(B) = A \\ r(D) = C \end{cases}$ فإن (Γ_2) صورة (Γ_1) هو نصف المستقيم $[CA]$ باستثناء النقطة C .

أ - كتابة العبارة المركبة للدوران r .

العبارة المركبة للدوران r من الشكل $z' = -iz + b$ وبما أن $r(B) = A$ فإن $z_A = -iz_B + b$

ومنه $b = z_A + iz_B$ أي $b = 2 + 2i$ وعليه العبارة المركبة للدوران r هي $z' = -iz + 2 + 2i$

تعيين سابقة O بالدوران r .

$z_O = -iz + 2 + 2i$ تكافئ $-iz + 2 + 2i = 0$ ومنه $z = \frac{2 + 2i}{i} = 2 - 2i = z_E$

إذن سابقة O بالدوران r هي E أي $r(E) = O$.

ب - تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث: $|-iz + 2 + 2i| = |z_A|$.

$|-iz + 2 + 2i| = |z_A|$ تكافئ $|z| = 2$ تكافئ $OM' = 2$ ، حيث z' لاحقة النقطة M' صورة النقطة M بالدوران r

ولدينا $r(E) = O$ إذن $OM' = EM$ ومنه $EM = 2$ بالتالي مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $|-iz + 2 + 2i| = |z_A|$

هي الدائرة ذات المركز E ونصف القطر 2.

(5) التفسير الهندسي لعمدة العدد $\frac{z - z_B}{z - z_D}$.

$$\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_D}\right) = (\overrightarrow{DM}; \overrightarrow{BM})$$

استنتاج مجموعة النقط M بحيث يكون العدد $\frac{z - z_B}{z - z_D}$ حقيقيا سالبا.

يكون العدد $\frac{z - z_B}{z - z_D}$ حقيقيا سالبا إذا كان $\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_D}\right) = \pi$

$\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_D}\right) = \pi$ تكافئ $(\overline{DM}; \overline{BM}) = \pi$ ومنه مجموعة النقط M المطلوبة هي القطعة المستقيمة $[DB]$

باستثناء النقطتين D و B .

التمرين الثالث:

I- دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $g(x) = e^x + x + 1$

1. دراسة تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + x + 1 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + x + 1 = +\infty$$

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي: $g'(x) = e^x + 1$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) > 0$ وعليه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

2. تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,3 < \alpha < -1,2$.

الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ وبالتالي على المجال $[-1,3; -1,2]$ ولدينا $g(-1,3) \approx -0,02$ ، $g(-1,2) \approx 0,10$ أي

$$g(-1,3) \times g(-1,2) < 0 \text{ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي } \alpha \text{ من المجال } [-1,3; -1,2]$$

بحيث $g(\alpha) = 0$ وبما أن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن α وحيد.

3. استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

من أجل $x \in]-\infty; \alpha[$ ، $g(x) < 0$

من أجل $x \in]\alpha; +\infty[$ ، $g(x) > 0$ و $g(\alpha) = 0$.

II- دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$

1. تبين أن $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$

$$f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(e^x + 1) - e^x(xe^x)}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + e^x + xe^{2x} + xe^x - xe^{2x}}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^x(e^x + x + 1)}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

استنتاج تغيرات f على $\mathbb{R}$.

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$.

في المجال $]-\infty; \alpha[$ ، $g(x) < 0$ أي $f'(x) < 0$ إذن الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; \alpha[$.
وفي المجال $]\alpha; +\infty[$ ، $g(x) > 0$ أي $f'(x) > 0$ إذن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]\alpha; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^x}{e^x + 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x}{e^x (1 + e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 + e^{-x}} = +\infty$$

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	$+\infty$

2. **تبين أن $f(\alpha) = \alpha + 1$.**

لدينا $g(\alpha) = 0$ يكافئ $e^\alpha + \alpha + 1 = 0$ أي $e^\alpha = -(\alpha + 1)$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha + 1} = \frac{-\alpha(\alpha + 1)}{-(\alpha + 1) + 1} = \frac{-\alpha(\alpha + 1)}{-(\alpha + 1) + 1} = \frac{-\alpha(\alpha + 1)}{-\alpha} = \alpha + 1$$

طريقة ثانية:

$$f(\alpha) - (\alpha + 1) = \frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha + 1} - (\alpha + 1) = \frac{\alpha e^\alpha - \alpha e^\alpha - e^\alpha - \alpha - 1}{e^\alpha + 1} = \frac{-(e^\alpha + \alpha + 1)}{e^\alpha + 1} = \frac{-g(\alpha)}{e^\alpha + 1}$$

لكن $g(\alpha) = 0$ ومنه $f(\alpha) - (\alpha + 1) = 0$ أي $f(\alpha) = \alpha + 1$

استنتاج حصراً لـ $f(\alpha)$.

$$-1,3 < \alpha < -0,2 \text{ معناه } -0,3 < \alpha + 1 < -0,2 \text{ أي } -0,3 < f(\alpha) < -0,2.$$

3. **تعيين معادلة المماس (d) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة صفر.**

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \text{ ولدينا } f'(0) = \frac{1}{2} \text{ و } f(0) = 0 \text{ ومنه } (d): y = \frac{1}{2}x$$

دراسة الوضع النسبي لـ (d) و (C_f)

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{x e^x}{e^x + 1} - \frac{x}{2} = \frac{2x e^x - x e^x - x}{2(e^x + 1)} = \frac{x e^x - x}{2(e^x + 1)} = \frac{x(e^x - 1)}{2(e^x + 1)}$$

لدينا $2(e^x + 1) > 0$ ومنه إشارة $f(x) - \frac{1}{2}x$ هي نفس إشارة $x(e^x - 1)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$e^x - 1$	-	0	+
$f(x) - \frac{1}{2}x$	+		+
الوضعية	(C _f) فوق (d)		(C _f) فوق (d)

4. تبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$

$$f(x) - x = \frac{xe^x}{e^x + 1} - x = \frac{xe^x - xe^x - x}{e^x + 1} = \frac{-x}{e^x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x \left(\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\left(\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x} \right)} = 0$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.

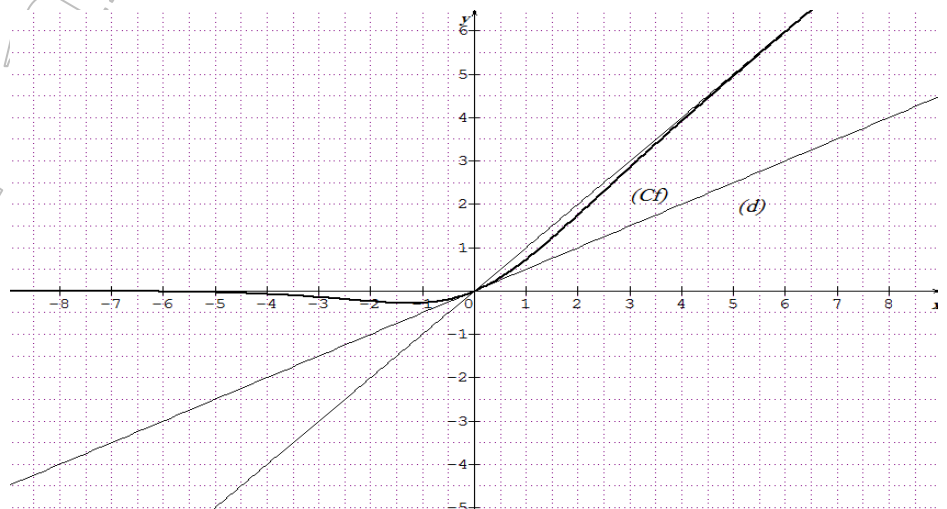
5. دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

إشارة $f(x) - x$ هي نفس إشارة $-x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - x$	+	0	-
الوضعية	(C _f) فوق (Δ)		(C _f) تحت (Δ)

(C_f) و (Δ) يتقاطعان في O .

رسم (d) و (Δ) و (C_f) .



التمرين الرابع:

I- الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$

(1) دراسة تغيرات الدالة g .

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} 2\ln(x+1) = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 + 2x + 4 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 \left(\frac{x^2 + 2x + 4}{x+1} - 2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = +\infty$$

$$g'(x) = 2x + 2 - \frac{2}{x+1} = \frac{2x^2 + 4x}{x+1} = \frac{2x(x+2)}{x+1} \text{ ولدينا: }]-1; +\infty[$$

من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$ ، $x+1 > 0$ و $x+2 > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة x .

إذن الدالة g متناقصة تماماً على المجال $]-1; 0]$ و متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g .

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	4	$+\infty$

(2) استنتاج أنه، من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

نلاحظ من جدول التغيرات أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $g(x) \geq 4$ ، وبالتالي $g(x) > 0$.

II- الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$

(1 أ) حساب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1} = -\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1} = +\infty$$

تفسير النتيجة بيانياً.

لدينا $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = -1$.

(ب) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(x+1)}{x+1} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = x - \frac{1}{x+1} + \frac{2\ln(x+1)}{x+1} = +\infty$$

(2 أ) تبين أنه، من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، حيث f' هي مشتقة الدالة f .

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 1 - \frac{\frac{-2}{x+1}(x+1) - 1 + 2\ln(x+1)}{(x+1)^2} \\
 &= 1 - \frac{-3 + 2\ln(x+1)}{(x+1)^2} \\
 &= \frac{x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^2} \\
 &= \frac{g(x)}{(x+1)^2}
 \end{aligned}$$

(ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$.

لدينا من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $g(x) > 0$ و $(x+1)^2 > 0$ إذن $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماماً على $]-1; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(ج) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم التحقق أن $0 < \alpha < 0,5$.

الدالة f مستمرة و متزايدة تماماً على المجال $]-1; +\infty[$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ إذن من أجل كل عدد حقيقي k المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $]-1; +\infty[$ وبالأخص المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]-1; +\infty[$ وبما أن $f(0) \times f(0,5) < 0$ فإن $0 < \alpha < 0,5$.

(3 أ) تبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x+1} + 2\frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$ ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

(ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

$$f(x) - x = -\frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1} = \frac{2\ln(x+1) - 1}{x+1}$$

$$f(x) - x = 0 \text{ معناه } 2\ln(x+1) - 1 = 0 \text{ وتكافئ } \ln(x+1) = \frac{1}{2} \text{ أي } x = \sqrt{e} - 1$$

$$f(x) - x > 0 \text{ معناه } 2\ln(x+1) - 1 > 0 \text{ وتكافئ } \ln(x+1) > \frac{1}{2} \text{ أي } x > \sqrt{e} - 1$$

x	-1	$\sqrt{e}-1$	$+\infty$
$f(x)-x$	-	0	+
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)

و (C_f) يقطع (Δ) في النقطة التي إحداثياتها $(\sqrt{e}-1; \sqrt{e}-1)$.

(4) نقبل أن المستقيم (T) ذا المعادلة: $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

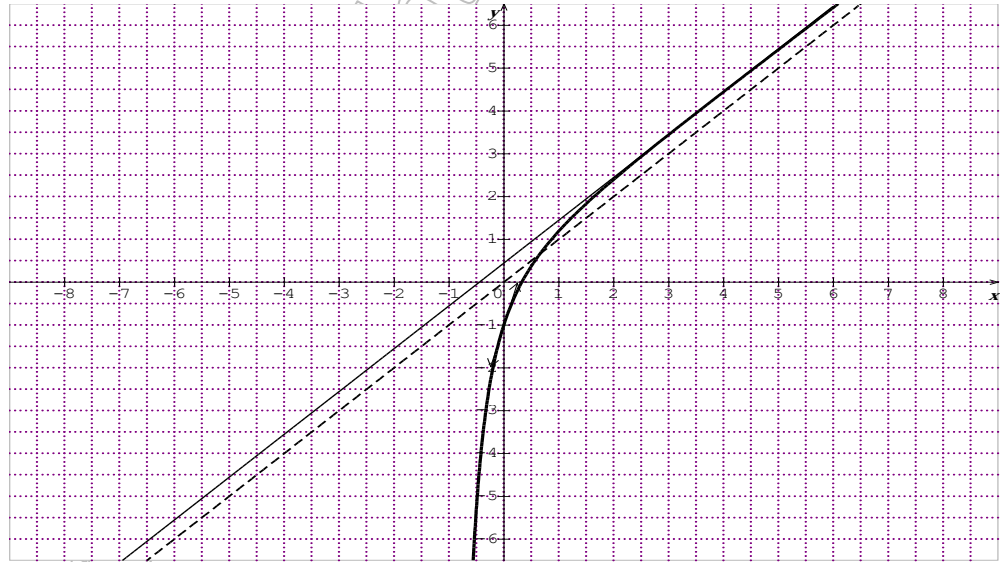
أ) حساب x_0 .

المستقيم (T) ميله يساوي 1 ومنه $f'(x_0) = 1$.

$f'(x_0) = 1$ معناه $\frac{g(x_0)}{(x_0+1)^2} = 1$ تكافئ $x_0^2 + 2x_0 + 4 - 2\ln(x_0+1) = x_0^2 + 2x_0 + 1$ وتكافئ

$$\ln(x_0+1) = \frac{3}{2} \text{ أي } x_0 = e^{\frac{3}{2}} - 1$$

ب) رسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثم المنحنى (C_f) .



ج) تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m ، بحيث تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين متمايزين.

المعادلة $f(x) = x + m$ تقبل حلين متمايزين من أجل قيم m من المجال $\left]0; \frac{2}{\sqrt{e^3}}\right[$.

الموضوع الحادي عشر

التمرين الأول:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نعتبر النقط $A(1;1;0)$ ، $B(-1;0;2)$ ، $C(-1;0;1)$

$$\text{والمستوي } (P) \text{ الذي تمثيل وسيطي له } \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda + \mu - 2 \\ z = 3\lambda + \mu + 3 \end{cases} \text{ حيث } \lambda \text{ و } \mu \text{ عدنان حقيقيان.}$$

1. تحقق أن النقط A ، B و C ليست في استقامية، ثم بين أن $x - 2y + 1 = 0$ هي معادلة للمستوي (ABC) .

2. أ - اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) .

ب - تحقق أن C نقطة من (P) .

3. أ - تحقق أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان، ثم عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطعهما.

ب - احسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) .

4. لتكن G مرجح الجملة: $\{(A;3), (B;\alpha), (C;\alpha^2)\}$ حيث $\alpha \in \mathbb{C}$.

أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي α فإن G موجودة.

ب - عيّن قيمة α حتى تنتمي G إلى المستقيم (Δ) .

التمرين الثاني:

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة: $z^2 + z + 1 = 0$.

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ لتكن النقط: A ، B ، C ، D و F

$$\text{التي لواحقتها على الترتيب: } z_A = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_B = \overline{z_A}, z_C = -2, z_D = -2 + 2\sqrt{3}i, \text{ و } z_F = \overline{z_D}.$$

أ - اكتب z_A و z_B على الشكل الأسّي، ثم علم النقط A ، B ، C ، D و F .

ب - ما طبيعة المثلث ABC .

(3) ليكن الدوران R الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z' + 2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z + 2)$.

أ - عيّن مركز وزاوية الدوران R .

ب - لتكن النقطة E صورة النقطة D بالدوران R . بين أن لاحقة النقطة E هي $z_E = 1 + \sqrt{3}i$.

ج - اكتب العدد $\frac{z_F - z_E}{z_D - z_E}$ على الشكل الجبري، ثم استنتج أن المستقيمين (ED) و (EF) متعامدان.

(4) لكل عدد مركب يختلف z عن z_E ، نرفق العدد المركب z' حيث: $z' = \frac{z - z_C}{z - z_E}$.

- لتكن (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' عددا تخيليا صرفا. عيّن المجموعة (Γ_1) .

(5) لتكن G مرجح الجملة $\{(A;|z_A|), (B;|z_B|), (C;|z_C|)\}$.

أ - عيّن z_G لاحقة النقطة G .

ب - (Γ_2) هي مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC}\| = \|\overline{MA} + \overline{MB} - 2\overline{MC}\|$.

- تحقق أن C تنتمي إلى (Γ_2) ، ثم عيّن طبيعة (Γ_2) .

التمرين الثالث:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{1 - \ln x}; x \in]0; e[\cup]e; +\infty[\\ f(0) = -1 \end{cases}$$

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

نسوي $(\mathcal{C}_f)$ المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$ (يمكن وضع $t = \ln x$) ثم أدرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليمين .

ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

(2) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

(3) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \in]0; e[\cup]e; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

(4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1.

(5) بين أنه من أجل $x \in]0; e[\cup]e; +\infty[$ ، $f''(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2(1 - \ln x)^3}$ ، ثم استنتج أن المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة

انعطاف يطلب تعيينها .

(6) أحسب $f(4)$ أرسم (T) و $(\mathcal{C}_f)$.

(7) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]-e; e[$ بـ : $g(x) = f(|x|)$.

أ) بين أن الدالة g زوجية .

ب) اشرح كيفية الحصول على $(\mathcal{C}_g)$ انطلاقا من $(\mathcal{C}_f)$ ثم أرسم $(\mathcal{C}_g)$.

التمرين الرابع:

f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ، نسوي (C) المنحني الممثل للدالة f في المستوي

المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. وحدة الطول $2cm$

1. أ - احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و فسر النتيجةين بيانيا .

ب - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

ج - ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

2. أ - بين أن المنحني (C) يقبل نقطة انعطاف E يطلب تعيين إحداثياتها .

ب - اكتب معادلة المماس (D) للمنحني (C) الذي يشمل المبدأ O .

3. أرسم (Δ) ، (D) و (C) .

4. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m ، عدد حلول المعادلة $m^x = x$.

حل الموضوع الحادي عشر

التمرين الأول:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نعتبر النقط $A(1;1;0)$ ، $B(-1;0;2)$ ، $C(-1;0;1)$

والمستوي (P) الذي تمثيل وسيطي له $\begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda + \mu - 2 \\ z = 3\lambda + \mu + 3 \end{cases}$ حيث λ و μ عدنان حقيقيان.

1. التحقق أن النقط A ، B و C ليست في استقامية،

$\overline{AB}(-2;-1;1)$ ، $\overline{AB}$ من الواضح أن الشعاعين $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه النقط A ، B و C ليست في استقامية.

تبيين أن $x - 2y + 1 = 0$ هي معادلة للمستوي (ABC) .

لدينا $x_A - 2y_A + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$ ، $x_B - 2y_B + 1 = -1 - 0 + 1 = 0$ ، $x_C - 2y_C + 1 = -1 - 0 + 1 = 0$ ومنه إحداثيات النقط A ، B و C تحقق المعادلة $x - 2y + 1 = 0$ وبالتالي $x - 2y + 1 = 0$ معادلة للمستوي (ABC) .

2. أ - كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P) .

$$\begin{cases} x = \lambda + 1 \dots\dots\dots(1) \\ y = \lambda + \mu - 2 \dots\dots\dots(2) \\ z = 3\lambda + \mu + 3 \dots\dots\dots(3) \end{cases} \text{ من (1) نجد } \lambda = x - 1 \text{ بالتعويض في (2) و (3) نجد } \begin{cases} y = x + \mu - 3 \dots\dots\dots(4) \\ z = 3x + \mu \dots\dots\dots(5) \end{cases}$$

بضرب (5) بالعدد -1 وجمع المعادلتين نجد $y - z = -2x - 3$ ومنه $2x + y - z + 3 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (P) .

ب - التحقق أن C نقطة من (P) .

لدينا $2x_C + y_C - z_C + 3 = 2(-1) + 0 - 1 + 3 = 0$ ومنه $C \in (P)$.

3. أ - التحقق أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان.

لدينا $\vec{n}(1;-2;0)$ شعاعا ناظما للمستوي (ABC) و $\vec{n}'(2;1;-1)$ شعاعا ناظما للمستوي (P) .

و $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 1(2) - 2(1) + 0(-1) = 0$ ومنه $\vec{n} \perp \vec{n}'$ أي المستويان (P) و (ABC) متعامدان.

تعيين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطعهما.

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \dots\dots\dots(1) \\ 2x + y - z + 3 = 0 \dots\dots\dots(2) \end{cases} \text{ إذا كانت } M \in (\Delta) \text{ فإن إحداثياتها تحقق الجملة}$$

من (1) نجد $x = 2y - 1$ بالتعويض في (2) نجد $2(2y - 1) + y - z + 3 = 0$ ومنه $5y + 1 - z = 0$ أي

$$(\Delta): \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = 5t + 1 \end{cases} \text{ وبوضع } y = t \text{ نجد حيث } t \text{ عدد حقيقي.}$$

ب - احسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) .

بما أن (P) و (ABC) متعامدان و $A \in (ABC)$ فإن $d(A;(\Delta)) = d(A;(P))$

$$\text{لدينا } d(A;(P)) = \frac{|2(1) + 1 - 1 + 3|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{6}} \text{ ومنه } d(A;(\Delta)) = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

4. لتكن G مرجح الجملة: $\{(A;3), (B;\alpha), (C;\alpha^2)\}$ حيث $\alpha \in \mathbb{C}$.

أ - تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي α فإن G موجودة.

G موجودة معناه $3 + \alpha + \alpha^2 \neq 0$

$\Delta = 1 - 12 = -11$ ومنه المعادلة $3 + \alpha + \alpha^2 = 0$ لا تقبل حولا أي من أجل كل عدد حقيقي α ، $3 + \alpha + \alpha^2 \neq 0$ وعليه أجل كل عدد حقيقي α فإن G موجودة.

ب - تعيين قيمة α حتى تنتمي G إلى المستقيم (Δ) .

لدينا $G \left(\frac{3 - \alpha - \alpha^2}{3 + \alpha + \alpha^2}; \frac{3}{3 + \alpha + \alpha^2}; \frac{2\alpha + \alpha^2}{3 + \alpha + \alpha^2} \right)$ حتى تنتمي G إلى المستقيم (Δ) يكفي أن تنتمي إلى (P)

لأن G هي مرجح النقط A ، B و C فهي حتما تنتمي للمستوي (ABC) .

$G \in (P)$ معناه $\frac{9 - 4\alpha - 3\alpha^2}{3 + \alpha + \alpha^2} + 3 = 0$ وتكافئ $2 \left(\frac{3 - \alpha - \alpha^2}{3 + \alpha + \alpha^2} \right) + \frac{3}{3 + \alpha + \alpha^2} - \frac{2\alpha + \alpha^2}{3 + \alpha + \alpha^2} + 3 = 0$

وتكافئ $\frac{9 - 4\alpha - 3\alpha^2 + 9 + 3\alpha + 3\alpha^2}{3 + \alpha + \alpha^2} = 0$ وتكافئ $\frac{18 - \alpha}{3 + \alpha + \alpha^2} = 0$ أي $\alpha = 18$.

طريقة ثانية:

لدينا $C \in (\Delta)$ لأنها تنتمي لـ (P) و تنتمي لـ (ABC) و $\vec{u}(2;1;5)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) .

ولدينا G مرجح الجملة: $\{(A;3), (B;\alpha), (C;\alpha^2)\}$ إذن من أجل كل نقطة M من المستوي لدينا :

$$(3 + \alpha + \alpha^2) \overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{MA} + \alpha \overrightarrow{MB} + \alpha^2 \overrightarrow{MC}$$

$$(3 + \alpha + \alpha^2) \overrightarrow{CG} = 3\overrightarrow{CA} + \alpha \overrightarrow{CB}$$

$G \in (\Delta)$ معناه الشعاعان $\overrightarrow{CG}$ و $\overrightarrow{u}$ مرتبطان خطيا أي الشعاعان $3\overrightarrow{CA} + \alpha \overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{u}$ مرتبطان خطيا.

لدينا $3\overrightarrow{CA} + \alpha \overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 + \alpha \end{pmatrix}$ ومنه $\frac{6}{2} = \frac{3}{1} = \frac{-3 + \alpha}{5}$ ومنه $-3 + \alpha = 15$ أي $\alpha = 18$.

التمرين الثاني:

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة: $z^2 + z + 1 = 0$.

$\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2 = (\sqrt{3}i)^2$ للمعادلة حلان هما $z_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ و $z_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$.

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لتكن النقط: A ، B ، C ، D و F

التي لواحقتها على الترتيب: $z_A = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -2$ ، $z_D = -2 + 2\sqrt{3}i$ و $z_F = \overline{z_D}$.

أ - كتابة z_A و z_B على الشكل الأسّي، و علم النقط A ، B ، C ، D و F .

$$\arg(z_A) = \frac{2\pi}{3} \text{ ومنه } \begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ بحيث } \arg(z_A) = \theta , |z_A| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

وعليه $z_B = \overline{z_A} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ ، $z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

ب - طبيعة المثلث ABC .

$$AB = |z_B - z_A| = \left| -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = |-\sqrt{3}i| = \sqrt{3}$$

$$AC = |z_C - z_A| = \left| -2 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \left| \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \sqrt{3}$$

$$BC = |z_C - z_B| = \left| -2 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \left| \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \sqrt{3}$$

ومنه $AB = AC = BC$ بالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع.(3) ليكن الدوران R الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z' + 2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z + 2)$.أ - تعيين مركز وزاوية الدوران R .العبارة المركبة للدوران الذي مركزه M_0 ذات اللاحقة z_0 وزاويته θ هي $z' - z_0 = e^{i\theta}(z - z_0)$ لدينا $z' + 2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z + 2)$ تكافئ $z' - z_C = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - z_C)$ ومنه مركز الدوران R هو النقطة C وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.ب - لتكن النقطة E صورة النقطة D بالدوران R .إثبات أن لاحقة النقطة E هي $z_E = 1 + \sqrt{3}i$.

$$z_E = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (2\sqrt{3}i) - 2 \text{ وتكافئ } z_E = e^{-i\frac{\pi}{3}}(2\sqrt{3}i) - 2 \text{ معناه } z_E + 2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_D + 2)$$

$$\text{وعليه } z_E = 1 + \sqrt{3}i$$

ج - كتابة العدد $\frac{z_F - z_E}{z_D - z_E}$ على الشكل الجبري.

$$\frac{z_F - z_E}{z_D - z_E} = \frac{-2 - 2\sqrt{3}i - 1 - \sqrt{3}i}{-2 + 2\sqrt{3}i - 1 - \sqrt{3}i} = \frac{-3 - 3\sqrt{3}i}{-3 + \sqrt{3}i} = \sqrt{3}i$$

استنتاج أن المستقيمين (ED) و (EF) متعامدان.

$$\overline{ED} \perp \overline{EF} \text{ أي } (\overline{ED}; \overline{EF}) = \frac{\pi}{2} \text{ وهذا يعني أن } \arg\left(\frac{z_F - z_E}{z_D - z_E}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ ومنه } \frac{z_F - z_E}{z_D - z_E} = \sqrt{3}i$$

ومنه المستقيمان (ED) و (EF) متعامدان.(4) لكل عدد مركب يختلف z عن z_E ، نرفق العدد المركب z' حيث: $z' = \frac{z - z_C}{z - z_E}$.- لتكن (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' عددا تخيليا صرفا.تعيين المجموعة (Γ_1) .

$$M \text{ تنتمي لـ } (\Gamma_1) \text{ معناه } z' = 0 \text{ أي } z = z_C \text{ أو } \arg(z') = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ و } z \neq z_E$$

$$\text{ولدينا } \arg(z') = \arg\left(\frac{z - z_C}{z - z_E}\right) = (\overline{ME}; \overline{MC})$$

وعليه M تنتمي لـ (Γ_1) معناه $M = C$ أو $(\overline{ME}; \overline{MC}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ و $M \neq E$.

بالتالي (Γ_1) هي الدائرة التي قطرها $[EC]$ باستثناء النقطة E .

(5) لتكن G مرجح الجملة $\{(A; |z_A|), (B; |z_B|), (C; |z_C|)\}$.

أ- تعيين z_G لاحقة النقطة G .

لدينا $|z_A| = 1$ ، $|z_B| = 1$ ، $|z_C| = 2$ ومنه G مرجح الجملة $\{(A; 1), (B; 1), (C; 2)\}$

$$z_G = \frac{z_A + z_B + 2z_C}{3} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - 4}{3} = \frac{-5}{3}$$

ب - (Γ_2) هي مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC}\| = \|\overline{MA} + \overline{MB} - 2\overline{MC}\|$.

- التحقق أن C تنتمي إلى (Γ_2) .

$\|\overline{CA} + \overline{CB} + 2\overline{CC}\| = \|\overline{CA} + \overline{CB} - 2\overline{CC}\|$ ومنه $\|\overline{CA} + \overline{CB}\| = \|\overline{CA} + \overline{CB}\|$ (محققة) ومنه C تنتمي إلى (Γ_2) .

تعيين طبيعة (Γ_2) .

من أجل كل نقطة M من المستوي لدينا $\overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC} = 4\overline{MG}$

و $\overline{MA} + \overline{MB} - 2\overline{MC} = \overline{MC} + \overline{CA} + \overline{MC} + \overline{CB} - 2\overline{MC} = \overline{CA} + \overline{CB}$

$$\|\overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC}\| = \|\overline{MA} + \overline{MB} - 2\overline{MC}\| \text{ تعني } \|4\overline{MG}\| = \|\overline{CA} + \overline{CB}\| \text{ أي } MG = \frac{\|\overline{CA} + \overline{CB}\|}{4}$$

ولدينا $MG = \frac{3}{4}$ ومنه $\|\overline{CA} + \overline{CB}\| = |z_A - z_C + z_B - z_C| = |3| = 3$

بالتالي (Γ_2) هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها $\frac{3}{4}$.

التمرين الثالث:

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x) = \frac{\ln x}{1 - \ln x}$; $x \in]0; e[\cup]e; +\infty[$
 $f(0) = -1$

نسمي $(\mathcal{C}_f)$ المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) تبين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$ ثم أدرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليمين.

نضع $t = \ln x$ إذا كان $x \xrightarrow{x>0} 0$ فإن $t \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1 - \ln x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t}{1 - t} = -1$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = -1$ فإن الدالة f مستمرة على يمين 0.

(ب) حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\ln x}{1 - \ln x} + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - x \ln x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - x \ln x) = 0^+$$

التفسير: الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند 0 ومنحناها البياني يقبل حامل محور الترتيب مماسا له عند النقطة التي إحداثياتها $(0; -1)$

(2) تبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ وتفسير النتيجة هندسيا .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{1 - \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{t}{1 - t} = -1$$

التفسير: $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = -1$ بجوار $+\infty$.

(3) أ) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \in]0; e[\cup]e; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1 - \ln x) + \frac{1}{x} \ln x}{(1 - \ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x}(1 - \ln x + \ln x)}{(1 - \ln x)^2} = \frac{1}{x(1 - \ln x)^2}$$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f

من أجل كل $x \in]0; e[\cup]e; +\infty[$ يكون $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $]0; e[$ و $]e; +\infty[$
جدول تغيرات الدالة f .

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	-1		-1

(4) كتابة معادلة المماس (T) للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1.

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) \text{ ومنه } y = 1(x - 1) + f(1) \text{ أي } y = x - 1$$

(5) تبين أنه من أجل $x \in]0; e[\cup]e; +\infty[$ ، $f''(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2(1 - \ln x)^3}$ ثم استنتج أن المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة

انعطاف يطلب تعيينها .

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2} \quad \text{تذكير:}$$

من أجل $x \in]0; e[\cup]e; +\infty[$ لدينا:

$$f''(x) = \frac{-\left[(1 - \ln x)^2 + 2x \left(-\frac{1}{x}\right)(1 - \ln x)\right]}{x^2(1 - \ln x)^4} = \frac{-\left[(1 - \ln x)^2 - 2(1 - \ln x)\right]}{x^2(1 - \ln x)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-(1 - \ln x)(1 - \ln x - 2)}{x^2(1 - \ln x)^4} = \frac{1 + \ln x}{x^2(1 - \ln x)^3}$$

إشارة $f''(x)$ هي نفس إشارة $1 + \ln x$ لأن $x^2(1 - \ln x)^3 > 0$ من أجل كل $x \in]0; e[\cup]e; +\infty[$

$$f''(x) = 0 \text{ تعني } 1 + \ln x = 0 \text{ وتكافئ } \ln x = -1 \text{ أي } x = \frac{1}{e}$$

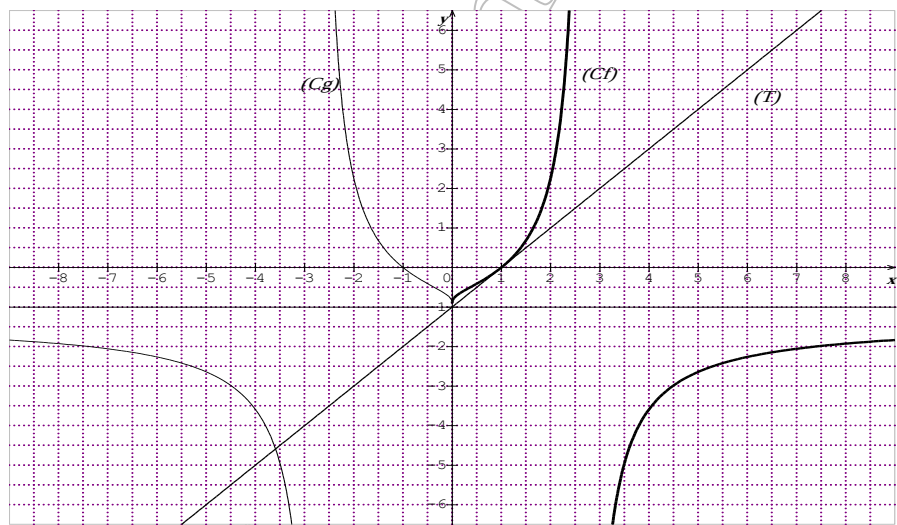
$$f''(x) > 0 \text{ تعني } 1 + \ln x > 0 \text{ وتكافئ } \ln x > -1 \text{ أي } x > \frac{1}{e}$$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

$f''(x)$ تنعدم عند العدد $\frac{1}{e}$ وتغير من إشارتها و منه النقطة ذات الإحداثيتين $\left(\frac{1}{e}; -\frac{1}{2}\right)$ هي نقطة إنعطاف

للمنحنى (C_f) .

6 حساب $f(4)$ ثم ارسم (T) و (C_f) .



7 نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]-e; e[$ بـ : $g(x) = f(|x|)$.

أ) تبين أن الدالة g زوجية.

لدينا D_g متناظر بالنسبة لـ 0

$$g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$$

ت) شرح كيفية الحصول على (C_g) انطلاقاً من (C_f) ثم ارسم (C_g) .

$$\begin{cases} g(x) = f(x); x \in [0; e[\cup]e; +\infty[\\ g(x) = f(-x); x \in]-\infty; -e[\cup]-e; 0[\end{cases}$$

لما $x \in [0; e[\cup]e; +\infty[$ يكون (C_g) منطبق على (C_f) وبما أن الدالة g زوجية فإن (C_g) يكون

متناظر بالنسبة لمحور الترتيب

التمرين الرابع:

f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ، نسمي (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي

المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. وحدة الطول 2cm

1. أ - حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+ \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

تفسير النتيجةين بيانياً.

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ فإن (C) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 0$ (محور الفواصل)

و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ ومنه (C) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = 0$ (محور الترتيب)

ب - تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

ج - دراسة اتجاه تغير الدالة f

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $1 - \ln x$.

$f'(x) = 0$ معناه $1 - \ln x = 0$ ويكافئ $\ln x = 1$ أي $x = e$.

$f'(x) > 0$ معناه $1 - \ln x > 0$ ويكافئ $\ln x < 1$ أي $0 < x < e$

$f'(x) < 0$ معناه $1 - \ln x < 0$ ويكافئ $\ln x > 1$ أي $x > e$.

إن الدالة f متزايدة تماماً على $[0; e]$ ومتناقصة تماماً على $[e; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$		$\frac{1}{e}$	0

2. أ - تبين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف E يطلب تعيين إحداثياتها.

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-x - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-1 - 2 + 2 \ln x}{x^3} = \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $x^3 > 0$ ، ومنه إشارة $f''(x)$ هي نفس إشارة $-3 + 2 \ln x$.

$f''(x) = 0$ معناه $-3 + 2 \ln x = 0$ وتكافئ $\ln x = \frac{3}{2}$ أي $x = \sqrt{e^3}$

$f''(x) > 0$ معناه $-3 + 2 \ln x > 0$ و تكافئ $\ln x > \frac{3}{2}$ أي $x > \sqrt{e^3}$

x	0	$\sqrt{e^3}$	$+\infty$
$f''(x)$		- 0 +	

$f''(x)$ تنعدم عند العدد $\sqrt{e^3}$ وتغير من إشارتها بجوار $\sqrt{e^3}$ ومنه النقطة $E(\sqrt{e^3}; f(\sqrt{e^3}))$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C).

جـ - كتابة معادلة المماس (D) للمنحنى (C) الذي يشمل المبدأ O.

معادلة المماس من الشكل $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$$O \in (D) \text{ معناه } 0 = f'(x_0)(0 - x_0) + f(x_0) \text{ وتكافئ } -x_0 \left(\frac{1 - \ln x_0}{x_0^2} \right) + \frac{\ln x_0}{x_0} = 0$$

$$\text{وتكافئ } \frac{-1 + 2 \ln x_0}{x_0} = 0 \text{ أي } \ln x_0 = \frac{1}{2} \text{ أي } x_0 = \sqrt{e}$$

$$\text{إذن معادلة المماس هي } y = f'(\sqrt{e})x \text{ أي } y = \frac{1}{2e}x$$

3. رسم (D) و (C).

4. المناقشة بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب

تماماً m ، عدد حلول المعادلة $m^x = x$.

$$m^x = x \text{ تكافئ } \ln m^x = \ln x \text{ وتكافئ } x \ln m = \ln x$$

$$\text{وتكافئ } \ln m = \frac{\ln x}{x} \text{ أي } f(x) = \ln m$$

إذا كان $0 < m \leq 1$ فإن $\ln m \leq 0$ وبالتالي المعادلة تقبل حلاً وحيداً.

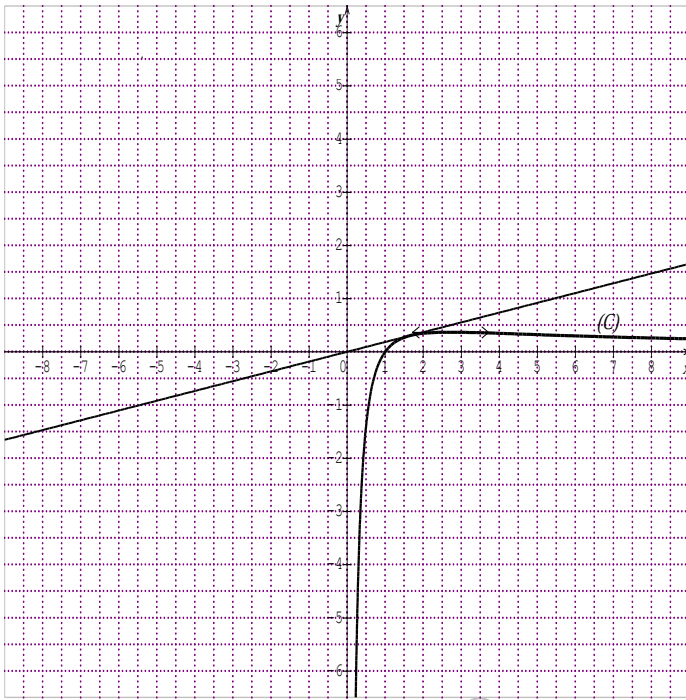
إذا كان $1 < m < e^{\frac{1}{e}}$ فإن $0 < \ln m < \frac{1}{e}$ وبالتالي

المعادلة تقبل حلين متميزين

إذا كان $m = e^{\frac{1}{e}}$ فإن $\ln m = \frac{1}{e}$ وبالتالي المعادلة تقبل

حلاً مضاعفاً.

إذا كان $m > e^{\frac{1}{e}}$ فإن $\ln m > \frac{1}{e}$ وبالتالي المعادلة ليس لها حلول.



الموضوع الأولالتمرين الأول:

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

نعتبر النقطتين $A(3; -2; 2)$ و $B(0; 4; -1)$.

1. أكتب معادلة للمستوي (P_1) الذي يشمل A و $\vec{u}(1; 0; -1)$ شعاع ناظمي له.

2. (P_2) المستوي الذي يحوي المستقيم (AB) ويعامد المستوي (P_1) .

أ - بين أن $\vec{v}(1; 1; 1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P_2) .

ب - أكتب معادلة للمستوي (P_2) .

3. نعتبر النقطتين C و D حيث: $C(6; 1; 5)$ و D معرفة بـ: $\vec{CD}(0; -3; -6)$.

أ - بين أن المثلث ACD قائم في A وحسب مساحته.

ب - بين أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي (ACD) .

ج - أحسب حجم رباعي الوجوه $ACDB$.

التمرين الثاني:

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقطة A ذات اللاحقة $z_0 = 1 + i$

(1) أ) عيّن ثم أنشئ (γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $z = z_0 + 2e^{i\theta}$ و θ يسمح $\mathbb{R}$.

ب) عيّن ثم أنشئ (γ') مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $z = z_0 + ke^{i(\frac{3\pi}{4})}$ و k يسمح $\mathbb{R}^+$

ج) عيّن إحداثيات نقطة تقاطع (γ) و (γ') .

(2) نسمي B النقطة التي لاحقتها z_1 حيث $z_1 = z_0 + 2e^{i(\frac{3\pi}{4})}$

أ) عيّن الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1 - z_0}{z_0}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث OAB .

ب) عيّن z_2 لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

ج) عيّن العددين α و β بحيث تكون النقطة O مرجحا للجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta)\}$ و $\alpha + \beta = \sqrt{2}$

د) عيّن ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $(\overline{MA} - \overline{MC}) \cdot ((1 + \sqrt{2})\overline{MA} - \overline{MC}) = 0$

التمرين الثالث:

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (2-x)e^x - 2$

- 1/ ادرس تغيّرات الدالة g .
- 2/ بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث $1.59 < \alpha < 1.60$
- 3/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1/ بيّن أنّ الدالة f مستمرة عند القيمة $x_0 = 0$.
- 2/ ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0 = 0$ ثم فسر النتيجة.
- 3/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

4/ أ - بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $f'(x) = \frac{xg(x)}{(e^x - 1)^2}$

ب - استنتج اتجاه تغيّر الدالة f وشكل جدول تغيّراتها.

أ - بيّن أنّ $f(\alpha) = \alpha(2-\alpha)$ ، ثم استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$.

ب - ليكن (Γ) المنحنى الممثل للدالة K المعرفة على المجال $]-\infty; 0]$ بـ: $K(x) = -x^2$

- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - K(x)]$ ماذا تستنتج؟

- ادرس الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة لـ (Γ) على المجال $]-\infty; 0]$.

ج - ارسم (Γ) و (C_f) .

6/ ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة التالية: $x^2 - me^x + m = 0$

التمرين الرابع:

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 5$ و $3u_{n+1} = u_n + 4$.

1) احسب u_1 و u_2

2) برهن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq 2$.

3) بيّن أنّ (u_n) متناقصة، ثم استنتج أنّ (u_n) متقاربة. احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 2$.

- بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية، ثم اكتب v_n بدلالة n .

5) ليكن: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

- عين بدلالة n ، عبارتي S_n و T_n ، ثم احسب نهايتهما.

الموضوع الثانيالتمرين الأول:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

نعتبر النقط $A(1;0;0)$ ، $B(0;2;0)$ ، $C(0;0;3)$ و $G\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1\right)$ ، (D) المستقيم الذي يشمل النقطة A

وشعاع توجيهه $\vec{u}\left(-1; 1; \frac{3}{2}\right)$ و (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة C وشعاع توجيهه $\vec{v}\left(\frac{1}{2}; 1; -3\right)$

1. أكتب تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين (D) و (Δ) ثم ادرس الوضع النسبي لهما.

2. بين أن : $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للنقطة G ؟

3. عيّن شعاعا ناظميا $\vec{n}$ للمستوي (ABC) ؛ ثم أكتب معادلة له.

4. أحسب المسافة بين النقطة O والمستوي (ABC) .

5. H المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (D) .

أ - جد احداثيات النقطة H .

ب - استنتج المسافة بين النقطة B والمستقيم (D) .

التمرين الثاني:

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. الوحدة $2cm$

نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين: $z_A = i$ و $z_B = 2$ على الترتيب

1. أ - عين لاحقة النقطة B_1 صورة النقطة B بالتحاكي h الذي مركزه A ونسبته $\sqrt{2}$

ب - عين لاحقة النقطة B' صورة النقطة B_1 بالدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

2. نعتبر التحويل النقطي f الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث:

$$z' = (1+i)z + 1$$

أ - عيّن طبيعة التحويل f وعناصره المميزة؛ ثم استنتج أن B' هي صورة B بالتحويل f .

ب - بين أنه من أجل كل عدد مركب z يختلف عن i لدينا: $\frac{z' - z}{z_A - z} = -i$

ج - استنتج طبيعة المثلث AMM' .

3. أ - حدد الطبيعة والعناصر المميزة لـ (E) مجموعة النقط (z) من المستوي بحيث: $|z - 2| = \sqrt{2}$

ب - بين أن $z' - 3 - 2i = (1+i)(z - 2)$ ، ثم استنتج أنه إذا كانت $M \in (E)$ فإن M' تنتمي لدائرة

(C) يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

التمرين الثالث:

$$1. \text{ نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة على } [0; +\infty[\text{ بالشكل: } \begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
بين أن f مستمرة عند 0.

$$2. \text{ لتكن الدالة } g \text{ المعرفة على } [0; +\infty[\text{ بالشكل: } g(x) = \ln(x+1) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$$

أ - ادرس اتجاه تغير الدالة g .

ب - احسب $g(0)$ ثم استنتج أنه على المجال $[0; +\infty[$: $\ln(x+1) \leq \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$.

ج - بطريقة مماثلة، بين أنه على المجال $[0; +\infty[$: $\ln(x+1) \geq \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$.

د - استنتج، من الأسئلة السابقة أن: $-\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(x+1) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$. وأن f قابلة للاشتقاق عند 0.

$$3. \text{ لتكن الدالة } h \text{ المعرفة على } [0; +\infty[\text{ بـ: } h(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$$

أ - ادرس اتجاه تغير الدالة h ، ثم عيّن إشارة $h(x)$ حسب قيم x .

ب - بين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$.

ج - أعط جدول تغيرات f موضحة نهاية f عند $+\infty$.

د - أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

4. ارسم (T) و (C_f) .

التمرين الرابع:

$$f \text{ هي الدالة المعرفة على المجال } [1; +\infty[\text{ بـ: } f(x) = x - \ln(x-1)$$

(1) حدّد حسب قيم x ، إشارة $f(x) - x$ ، إشارة

(2) أ - عيّن اتجاه تغير الدالة f .

ب - بين أنه إذا كان $x \in [2; e+1]$ فإن $f(x) \in [2; e+1]$

(II) (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = e+1$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n - 1)$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n \in [2; e+1]$.

(2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) برّر تقارب المتتالية (u_n) ، ثم احسب نهايتها.

الموضوع الأول:التمرين الأول:

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

نعتبر النقطتين $A(3; -2; 2)$ و $B(0; 4; -1)$.

1. كتابة معادلة للمستوي (P_1) الذي يشمل A و $\vec{u}(1; 0; -1)$ شعاع ناظمي له.

المستوي (P_1) له معادلة من الشكل $x - z + d = 0$ ولدينا $A \in (P_1)$ تعني $3 - 2 + d = 0$ أي $d = -1$ وعليه

$x - z - 1 = 0$ هي معادلة ديكرتية للمستوي (P_1) .

2. (P_2) المستوي الذي يحوي المستقيم (AB) ويعامد المستوي (P_1) .

أ - تبين أن $\vec{v}(1; 1; 1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P_2) .

لدينا $\vec{AB}(-3; 6; -3)$ و $\vec{u}$ شعاعي توجيه للمستوي (P_2) وهما غير مرتبطين خطيا لأنّ يحوي المستقيم (AB)

ويعامد المستوي (P_1) ولدينا $\vec{v} \cdot \vec{u} = 1 \times 1 + 1 \times 0 + 1 \times (-1) = 0$ و $\vec{v} \cdot \vec{AB} = 1(-3) + 1 \times 6 + 1(-3) = 0$

ومنه $\vec{v} \perp \vec{u}$ و $\vec{v} \perp \vec{AB}$ أي شعاع ناظمي للمستوي (P_2) .

ب - كتابة معادلة للمستوي (P_2) .

المستوي (P_2) له معادلة من الشكل $x + y + z + d = 0$ ولدينا $B \in (P_2)$ تعني $0 + 4 - 1 + d = 0$ أي

$d = -3$ وبالتالي $x + y + z - 3 = 0$ هي معادلة ديكرتية للمستوي (P_2) .

3. نعتبر النقطتين C و D حيث: $C(6; 1; 5)$ و D معرفة بـ: $\vec{CD}(0; -3; -6)$.

أ - تبين أن المثلث ACD قائم في A

لدينا $\vec{AD} = \vec{AC} + \vec{CD}$ ولدينا $\vec{AC}(3; 3; 3)$ ومنه $\vec{AD}(3; 0; -3)$

إذن $\vec{AC} \cdot \vec{AD} = 3 \times 3 + 3 \times 0 + 3 \times (-3) = 0$ وهذا يعني أن $\vec{AC} \perp \vec{AD}$ وبالتالي المثلث ACD قائم في A .

طريقة 2:

لدينا $\vec{AD} = \vec{AC} + \vec{CD}$ معناه $\vec{AD} \cdot \vec{AC} = \vec{AC}^2 + \vec{CD} \cdot \vec{AC}$

لكن $\vec{AC}^2 = 9 + 9 + 9 = 27$ و $\vec{CD} \cdot \vec{AC} = 0 \times 3 - 3 \times 3 - 6 \times 3 = -27$

ومنه $\vec{AD} \cdot \vec{AC} = 27 - 27 = 0$ وهذا يعني أن $\vec{AC} \perp \vec{AD}$ وبالتالي المثلث ACD قائم في A .

حساب مساحته.

$$S(ACD) = \frac{AC \times AD}{2} = \frac{3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{6}}{2} ua$$

ب - تبين أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي (ACD) .

لدينا $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -3 \times 3 + 6 \times 3 - 3 \times 3 = 0$ و $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = -3 \times 3 + 6 \times 0 - 3 \times (-3) = 0$ وهذا يعني $\vec{AB} \perp \vec{AC}$

و $\vec{AB} \perp \vec{AD}$ ومنه $\vec{AB}$ شعاع ناظمي للمستوي (ACD) وبالتالي المستقيم (AB) يعامد المستوي (ACD)

ج - حساب حجم رباعي الوجوه $ACDB$.

بما أن (AB) يعامد المستوي (ACD) فإن A هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (ACD)

$$V(ABCD) = \frac{1}{3} S(ACD) \times AB = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{6}}{2} \times 3\sqrt{6} = 27uv$$

التمرين الثاني:

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقطة A ذات اللاحقة $z_0 = 1+i$

(1) أ) تعيين (γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $z = z_0 + 2e^{i\theta}$ و θ يسمح $\mathbb{R}$.

$$z = z_0 + 2e^{i\theta} \text{ تكافئ } z - z_0 = 2e^{i\theta} \text{ ومنه } |z - z_0| = 2 \text{ أي } AM = 2$$

إذن (γ) هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها 2.

(ب) تعيين (γ') مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $z = z_0 + ke^{i(\frac{3\pi}{4})}$ و k يسمح $\mathbb{R}^+$

$$z = z_0 + ke^{i(\frac{3\pi}{4})} \text{ معناه } z - z_0 = ke^{i(\frac{3\pi}{4})} \text{ إذن } (\gamma') \text{ هي نصف مستقيم مبدؤه } A \text{ وميله } \arg\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$$

باستثناء النقطة A .

(ج) تعيين إحداثيات نقطة تقاطع (γ) و (γ') .

لتكن $M(z)$ نقطة من المستوي.

$$M \in (\gamma) \cap (\gamma') \text{ معناه } \begin{cases} z = z_0 + ke^{i(\frac{3\pi}{4})} \\ z = z_0 + 2e^{i\theta} \end{cases} \text{ تكافئ } z_0 + ke^{i(\frac{3\pi}{4})} = z_0 + 2e^{i\theta} \text{ يكافئ } ke^{i(\frac{3\pi}{4})} = 2e^{i\theta}$$

$$\text{ويكافئ } \begin{cases} k = 2 \\ \theta = \frac{3\pi}{4} \end{cases} \text{ إذن } z = z_0 + 2e^{i(\frac{3\pi}{4})} \text{ أي } M(1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$$

(2) نسمي B النقطة التي لاحتقتها z_1 حيث $z_1 = z_0 + 2e^{i(\frac{3\pi}{4})}$

أ) تعيين الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1 - z_0}{z_0}$.

$$\frac{z_1 - z_0}{z_0} = \frac{\left(z_0 + 2e^{i(\frac{3\pi}{4})}\right) - z_0}{z_0} = \frac{2e^{i(\frac{3\pi}{4})}}{\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{2})} = i\sqrt{2}$$

استنتاج طبيعة المثلث OAB .

$$\frac{z_1 - z_0}{z_0} = i\sqrt{2} \text{ معناه } \frac{z_1 - z_0}{-z_0} = -i\sqrt{2} \text{ وهذا يعني أن } (\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{2} \text{ ومنه المثلث } OAB \text{ قائم في } A$$

(ب) تعيين z_2 لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

$$\text{لدينا } z_2 - z_0 = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_1 - z_0) \text{ معناه } z_2 = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_1 - z_0) + z_0 \text{ يكافئ } z_2 = e^{-i\frac{\pi}{2}}\left(2e^{i(\frac{3\pi}{4})}\right) + z_0$$

$$\text{ويكافئ } z_2 = 1 + \sqrt{2} + i(1 + \sqrt{2}) \text{ أي } z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} + 1 + i$$

(ج) تعيين العددين α و β بحيث تكون النقطة O مرجحا للجملة $\{(A; \alpha), (C; \beta)\}$ و $\alpha + \beta = \sqrt{2}$

$$\text{لدينا } \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OC} = \vec{0} \text{ معناه } \alpha z_0 + \beta z_2 = 0 \text{ وتكافئ } \alpha(1+i) + \beta(1 + \sqrt{2} + i(1 + \sqrt{2})) = 0$$

تكافئ $\alpha + \beta + \sqrt{2}\beta + i(\alpha + \beta + \sqrt{2}\beta) = 0$ إذن $\alpha + \beta + \sqrt{2}\beta = 0$ ولدينا $\alpha + \beta = \sqrt{2}$

نحصل على الجملة $\begin{cases} \alpha + \beta + \sqrt{2}\beta = 0 \\ \alpha + \beta = \sqrt{2} \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} \sqrt{2} + \sqrt{2}\beta = 0 \\ \alpha + \beta = \sqrt{2} \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha + \beta = \sqrt{2} \end{cases}$ ومنه

$$(\alpha; \beta) = (1 + \sqrt{2}; -1) \text{ وعليه } \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = \sqrt{2} + 1 \end{cases}$$

(د) تعيين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $((1 + \sqrt{2})\overline{MA} - \overline{MC}) \cdot (\overline{MA} - \overline{MC}) = 0$

لدينا O مرجح الجملة $\{(A; (1 + \sqrt{2})), (C; -1)\}$ إذن من أجل كل نقطة M من المستوي لدينا:

$$\sqrt{2}\overline{MO} = (1 + \sqrt{2})\overline{MA} - \overline{MC} \text{ أي } (1 + \sqrt{2} - 1)\overline{MO} = (1 + \sqrt{2})\overline{MA} - \overline{MC}$$

$$\overline{MA} - \overline{MC} = \overline{MA} + \overline{CM} = \overline{CA} \text{ ولدينا}$$

$$((1 + \sqrt{2})\overline{MA} - \overline{MC}) \cdot (\overline{MA} - \overline{MC}) = 0 \text{ تعني } (\sqrt{2}\overline{MO}) \cdot \overline{CA} = 0 \text{ أي } \overline{MO} \cdot \overline{CA} = 0$$

وبالتالي (E) هي المستقيم المار من O ويكون $\overline{CA}$ شعاع ناظمي له.

التمرين الثالث:

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (2 - x)e^x - 2$

1/ دراسة تغيرات الدالة g.

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x)e^x - 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x - xe^x - 2 = -2$

ولدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x)e^x - 2 = -\infty$

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x) = -e^x + (2 - x)e^x = e^x(1 - x)$

من أجل كل عدد حقيقي $e^x > 0$ ، ومنه إشارة $g'(x)$ مثل إشارة $(1 - x)$.

وبالتالي الدالة g متزايدة تماماً على $]-\infty; 1]$ ومتناقصة تماماً على $[1; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g.

x	$-\infty$	0	1	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	-2	0	$e - 2$	0	$-\infty$

2/ تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث $1.59 < \alpha < 1.60$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماماً على المجال $]-\infty; 1]$ ولدينا $g(]-\infty; 1]) =]-2; e - 2]$ و $0 \in]-2; e - 2]$

إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً β في المجال $]-\infty; 1]$.

ولدينا كذلك الدالة g مستمرة ومتناقصة تماماً على المجال $[1; +\infty[$ ولدينا $g([1; +\infty[) =]-\infty; e - 2]$

و $0 \in]-\infty; e - 2]$ إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[1; +\infty[$.

وبما أن $g(0) = (2 - 0)e^0 - 2 = 0$ فإن β معدوم و $g(1.59) \approx 0.01$ ، $g(1.60) \approx -0.01$ أي

$$g(1.59) \times g(1.60) < 0 \text{ فإن } 1.59 < \alpha < 1.60.$$

3/ استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$	$-$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ تبين أن الدالة f مستمرة عند القيمة $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{e^x - 1}{x}} = 0 = f(0)$$

إذن الدالة f مستمرة عند القيمة $x_0 = 0$.

2/ دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0 = 0$ ثم فسر النتيجة.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{e^x - 1} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} = 1$$

إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ ومنحناها البياني (C_f) يقبل مماسا عند النقطة $O(0;0)$ معامل توجيهه يساوي 1.

3/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} = -\infty \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right)} = 0$$

4/ أ - تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $f'(x) = \frac{xg(x)}{(e^x - 1)^2}$

ليكن x عددا حقيقيا غير معدوم:

$$f'(x) = \frac{2x(e^x - 1) - x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{x(2e^x - 2 - xe^x)}{(e^x - 1)^2} = \frac{x((2-x)e^x - 2)}{(e^x - 1)^2} = \frac{xg(x)}{(e^x - 1)^2}$$

ب - استنتاج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$
$g(x)$	$-$	0	$+$	$-$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$

إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty; \alpha]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

5/ أ - تبين أن $f(\alpha) = \alpha(2-\alpha)$ لدينا $g(\alpha)$ معناه $(2-\alpha)e^\alpha - 2 = 0$ تكافئ $e^\alpha = \frac{2}{2-\alpha}$ وتكافئ $e^\alpha - 1 = \frac{\alpha}{2-\alpha}$

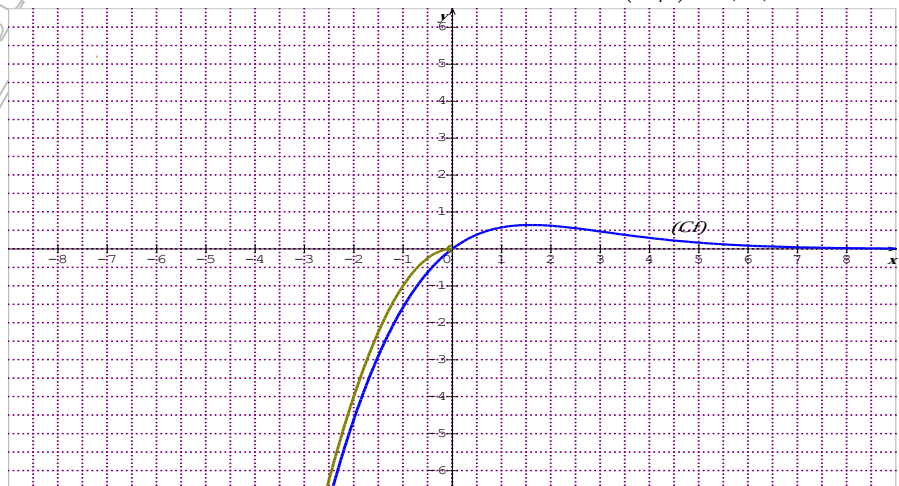
$$f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{e^\alpha - 1} = \frac{\alpha^2}{\frac{\alpha}{2-\alpha}} = \alpha(2-\alpha)$$

استنتاج حصراً للعدد $f(\alpha)$.لدينا $1.59 < \alpha < 1.60$ معناه $0.40 < 2-\alpha < 0.41$ إذن $1.59 \times 0.40 < \alpha(2-\alpha) < 0.60 \times 0.41$ أي $0.63 < f(\alpha) < 0.66$ ب - ليكن (Γ) المنحنى الممثل للدالة K المعرفة على المجال $]-\infty; 0]$ بـ: $K(x) = -x^2$ - حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - K(x)]$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - K(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} + x^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 e^x}{e^x - 1} = 0$$

نستنتج أن المنحنى (Γ) منحنى مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$.- دراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة لـ (Γ) على المجال $]-\infty; 0]$.

$$f(x) - K(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - 1}$$

إشارة $f(x) - K(x)$ هي نفس إشارة $e^x - 1$ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 0]$: $e^x - 1 \leq 0$ ومنه المنحنى (C_f) يقع أسفل (Γ) .ج - رسم (Γ) و (C_f) .

6/ المناقشة بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة التالية: $x^2 - me^x + m = 0$

$$x^2 - me^x + m = 0 \text{ تكافئ } x^2 - m(e^x - 1) = 0 \text{ تكافئ } m = \frac{x^2}{e^x - 1} \text{ أي } f(x) = m$$

إذا كان $m \leq 0$ فإن المعادلة تقبل حلاً واحداً سالباً.

إذا كان $0 < m < \alpha(2 - \alpha)$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبيين.

إذا كان $m = \alpha(2 - \alpha)$ فإن المعادلة تقبل حلاً مضاعفاً.

إذا كان $m > \alpha(2 - \alpha)$ فإن المعادلة لا تقبل أي حل.

التمرين الرابع:

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 5$ و $3u_{n+1} = u_n + 4$.

(1) حساب u_1 و u_2

لدينا $3u_1 = u_0 + 4$ معناه $3u_1 = 9$ أي $u_1 = 3$

$3u_2 = u_1 + 4$ معناه $3u_2 = 7$ أي $u_2 = \frac{7}{3}$.

(2) برهان أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq 2$.

لدينا $u_0 = 5$ ومنه $u_0 \geq 2$ إذن مرحلة الإبتداء صحيحة

نفرض أن $u_n \geq 2$ ونبرهن أن $u_{n+1} \geq 2$

لدينا $u_n \geq 2$ معناه $u_n + 4 \geq 6$ ومنه $3u_{n+1} \geq 6$ أي $u_{n+1} \geq 2$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq 2$ وهذا حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع.

(3) تبين أن (u_n) متناقصة.

ليكن n عدداً طبيعياً:

$$3(u_{n+1} - u_n) = 2(2 - u_n) \text{ ومنه } 3u_{n+1} - 3u_n = u_n + 4 - 3u_n = 2(2 - u_n)$$

ولدينا $u_n \geq 2$ معناه $2 - u_n \leq 0$ ومنه $3(u_{n+1} - u_n) \leq 0$ أي $u_{n+1} - u_n \leq 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

استنتاج أن (u_n) متقاربة.

بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو عدد حقيقي l حيث $l \geq 2$

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

لدينا (u_n) متقاربة إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$

ولدينا $3u_{n+1} = u_n + 4$ بالمرور إلى النهاية نجد $3l = l + 4$ أي $l = 2$ إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 2$.

- تبين أن (v_n) متتالية هندسية،

لدينا $3v_{n+1} = 3u_{n+1} - 6$ معناه $3v_{n+1} = u_n - 2$ تكافئ $3v_{n+1} = v_n$ أي $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 2 = 3$

كتابة v_n بدلالة n .

$$v_n = v_0 q^n = 3 \left(\frac{1}{3} \right)^n = \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$$

(5) ليكن: $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

- تعيين بدلالة n ، عبارتي S_n و T_n ، ثم احسب نهايتهما.

$$S_n = v_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \right) = 3 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} \right) = \frac{9}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right)$$

$$T_n = (v_0 + 2) + (v_1 + 2) + \dots + (v_n + 2) = S_n + 2(n+1)$$

$$S_n = \frac{9}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right) + 2(n+1) \text{ أي}$$

الموضوع الثاني:

التمرين الأول:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

نعتبر النقط $A(1;0;0)$ ، $B(0;2;0)$ ، $C(0;0;3)$ و $G\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1\right)$ ، المستقيم الذي يشمل

النقطة A وشعاع توجيهه $\vec{u}\left(-1; 1; \frac{3}{2}\right)$ و (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة C وشعاع توجيهه $\vec{v}\left(\frac{1}{2}; 1; -3\right)$

1. كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D)

لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء

$M \in (D)$ إذا وفقط إذا وُجد عدد حقيقي t بحيث $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

$$(D): \begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = \frac{3}{2}t \end{cases} \text{ أي } (t \in \mathbb{R})$$

كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ)

$M \in (\Delta)$ معناه يوجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{CM} = k\vec{v}$

$$(\Delta): \begin{cases} x = \frac{1}{2}k \\ y = k \\ z = 3-3k \end{cases} \text{ أي } (k \in \mathbb{R})$$

دراسة الوضع النسبي للمستقيمين (D) و (Δ) .

لدينا الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا لأن $\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1}$ ومنه المستقيمان (D) و (Δ) غير متوازيين.

ندرس تقاطعهما.

$$\begin{cases} 1-t = \frac{1}{2}k \dots\dots\dots(1) \\ t = k \dots\dots\dots(2) \\ \frac{3}{2}t = 3-3k \dots\dots(3) \end{cases}$$

ندرس إمكانية وجود ثنائية t و k من الأعداد الحقيقية تحقق الجملة

$$\begin{cases} 1-t = \frac{1}{2}k \\ t = \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2}t = 1 \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد $k = \frac{2}{3}$ ومنه $1 = \frac{3}{2}k$ بالتعويض في جميع المعادلات نجد

$$\begin{cases} 1-t = \frac{1}{2}k \\ t = \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2}t = 1 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \frac{2}{3} \\ t = \frac{2}{3} \\ t = \frac{2}{3} \end{array} \right. \text{ أي إذن المستقيمان } (D) \text{ و } (\Delta) \text{ متقاطعان حيث } (D) \cap (\Delta) \left\{ G \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1 \right) \right\}$$

2. تبين أن : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للنقطة G ؟

$$\overrightarrow{GC} \left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; 2 \right) \text{ و } \overrightarrow{GB} \left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; -1 \right) , \overrightarrow{GA} \left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -1 \right)$$

$$\text{ومن إحداثيات الشعاع } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} \text{ هي } \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}; -\frac{2}{3} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3}; -1 - 1 + 2 \right) \text{ أي } (0; 0; 0)$$

مايعني أن $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ وبما أن النقط A, B و C ليست في إستقامة فإن G هي مركز ثقل المثلث ABC .

3. تعيين شعاعا ناظميا $\vec{n}$ للمستوي (ABC) ؛

$$\begin{cases} a = 2b \\ c = \frac{2}{3}b \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} a = 2b \\ -a + 3c = 0 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} -a + 2b = 0 \\ -a + 3c = 0 \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$$

$$\text{نأخذ مثلا } b = 3 \text{ نجد } \vec{n}(6; 3; 2)$$

كتابة معادلة (ABC) .

لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء

$$M \in (ABC) \text{ معناه } \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \text{ حيث } \overrightarrow{AM}(x-1; y; z)$$

$$\text{ومن } 6(x-1) + 3y + 2z = 0 \text{ أي } 6x + 3y + 2z - 6 = 0 \text{ وهي معادلة للمستوي } (ABC).$$

4. حساب المسافة بين النقطة O والمستوي (ABC) .

$$d(O; (ABC)) = \frac{|6 \times 0 + 3 \times 0 + 2 \times 0 - 6|}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = \frac{6}{7}$$

5. المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (D) .

أ - إيجاد إحداثيات النقطة H .



لدينا $H \in (D)$ معناه $\overline{BH} \left(1-t; t-2; \frac{3}{2}t\right)$ و $H \left(1-t; t; \frac{3}{2}t\right)$

ولدينا $\vec{u} \cdot \overline{BH} = 0$ معناه $-1(1-t) + (t-2) + \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}t = 0$ تكافئ $2t + \frac{9}{4}t - 3 = 0$ وتكافئ

$$8t + 9t - 12 = 0 \text{ أي } t = \frac{12}{17} \text{ ومنه } H \left(1 - \frac{12}{17}; \frac{12}{17}; \frac{3}{2} \left(\frac{12}{17}\right)\right) \text{ أي } H \left(\frac{5}{17}; \frac{12}{17}; \frac{18}{17}\right).$$

ب - استنتاج المسافة بين النقطة B والمستقيم (D) .

$$BH = \frac{1}{17} \sqrt{25 + 484 + 324} = \frac{7\sqrt{17}}{17} \text{ ومنه } \overline{BH} \left(\frac{5}{17}; \frac{-22}{17}; \frac{18}{17}\right) \text{ لدينا}$$

$$d(B; (D)) = BH = \frac{7\sqrt{17}}{17} \text{ وبالتالي}$$

التمرين الثاني:

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. الوحدة $2cm$

نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين: $z_A = i$ و $z_B = 2$ على الترتيب

1. أ - تعيين لاحقة النقطة B_1 صورة النقطة B بالتحاك h الذي مركزه A ونسبته $\sqrt{2}$

$$h(B) = B_1 \text{ معناه } z_{B_1} - z_A = \sqrt{2}(z_B - z_A) \text{ وتكافئ } z_{B_1} = \sqrt{2}(z_B - z_A) + z_A \text{ وتكافئ}$$

$$z_{B_1} = 2\sqrt{2} + i(1 - \sqrt{2}) \text{ أي } z_{B_1} = \sqrt{2}(2 - i) + i$$

ب - تعيين لاحقة النقطة B' صورة النقطة B_1 بالدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

$$r(B_1) = B' \text{ معناه } z_{B'} - z_A = e^{i\frac{\pi}{4}}(z_{B_1} - z_A) \text{ تكافئ } z_{B'} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}(2 - i) + i) + i$$

$$\text{وتكافئ } z_{B'} = 3 + 2i \text{ أي } z_{B'} = 2 - i + i(2 - i) + i$$

2. نعتبر التحويل النقطي f الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث:

$$z' = (1 + i)z + 1$$

أ - تعيين طبيعة التحويل f وعناصره المميزة؛ ثم استنتاج أن B' هي صورة B بالتحويل f .

الكتابة المركبة للتحويل f من الشكل $z' = az + b$ حيث $a = 1 + i$ و $b = 1$

$$\text{لدينا } |a| = \sqrt{2} \text{ و } \arg(a) = \frac{\pi}{4}$$

إن f تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$ زاويته $\frac{\pi}{4}$ ومركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{-i} = i$ أي مركزه A .

لدينا $r(B_1) = B'$ معناه $r(h(B)) = B'$ وتكافئ $r \circ h(B) = B'$ إذن B' هي صورة B بالتحويل $r \circ h$

ولدينا $f = r \circ h$ أي B' هي صورة B بالتحويل f .

$$\text{ب - يبين أنه من أجل كل عدد مركب } z \text{ يختلف عن } i \text{ لدينا: } \frac{z' - z}{z_A - z} = -i$$

$$\frac{z' - z}{z_A - z} = -i \text{ ومنه } z' - z = (1 + i)z + 1 - z = iz + 1 = -i(-z + i) = -i(z_A - z)$$

ج - استنتاج طبيعة المثلث AMM' .

$$\text{لدينا } \frac{z' - z}{z_A - z} = -i \text{ إذن } \left| \frac{z' - z}{z_A - z} \right| = 1 \text{ و } \arg\left(\frac{z' - z}{z_A - z}\right) = -\frac{\pi}{2} \text{ وهذا يعني أن } MM' = MA$$

وبالتالي المثلث 'AMM قائم في M ومتساوي الساقين. $(\overline{MA}; \overline{MM'}) = -\frac{\pi}{2}$

3. أ - تحديد الطبيعة والعناصر المميزة لـ (E) مجموعة النقط (z) من المستوى بحيث: $|z - 2| = \sqrt{2}$
معناه $|z - z_B| = \sqrt{2}$ تكافئ $BM = \sqrt{2}$ إذن (E) هي الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها $\sqrt{2}$.

ب - تبين أن $z' - 3 - 2i = (1+i)(z - 2)$ ، واستنتاج أنه إذا كانت $M \in (E)$ فإن M' تنتمي لدائرة (C) يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

$$z' - 3 - 2i = (1+i)z + 1 - 3 - 2i = (1+i)z - 2 - 2i = (1+i)(z - 2)$$

$$|z' - (3 + 2i)| = |1+i||z - 2| \text{ تعني } |z' - 3 - 2i| = |(1+i)(z - 2)|$$

وتكافئ $B'M' = \sqrt{2}BM$ ولدينا $M \in (E)$ معناه $BM = \sqrt{2}$ ومنه $B'M' = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ إذن M' تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها B' ونصف قطرها 2.

التمرين الثالث:

$$1. \text{ نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة على } [0; +\infty[\text{ بالشكل: } \begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس (O; i, j).

تبين أن f مستمرة عند 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 = f(0)$$

إذن الدالة f مستمرة عند 0.

$$2. \text{ لتكن الدالة } g \text{ المعرفة على } [0; +\infty[\text{ بالشكل: } g(x) = \ln(x+1) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$$

أ - دراسة اتجاه تغير الدالة g.

الدالة g تقبل الاشتقاق على $[0; +\infty[$ ولدينا

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - (1 - x + x^2) = \frac{1 - (x+1)(1 - x + x^2)}{x+1} = \frac{-x^3}{x+1}$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$: $x+1 > 0$ و $-x^3 < 0$ ومنه $g'(x) < 0$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماماً على $[0; +\infty[$.

ب - حساب g(0).

$$g(0) = \ln(0+1) - \left(0 - \frac{0}{2} + \frac{0}{3}\right) = 0$$

$$\text{استنتاج أنه على المجال } [0; +\infty[: \ln(x+1) \leq \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$$

الدالة g متناقصة تماماً على المجال $[0; +\infty[$ ولدينا $g(0) = 0$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال

$$[0; +\infty[: g(x) \leq 0 \text{ ومنه } \ln(x+1) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) \leq 0 \text{ أي } \ln(x+1) \leq \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$$

ج - بطريقة مماثلة، تبين أنه على المجال $[0; +\infty[$: $\ln(x+1) \geq \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$.

نعتبر الدالة u المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $u(x) = \ln(x+1) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$

الدالة u تقبل الاشتقاق على $[0; +\infty[$ ولدينا $u'(x) = \frac{1}{x+1} - (1-x) = \frac{1-(x+1)(1-x)}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$: $u'(x) > 0$ وبالتالي الدالة u متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$

ولدينا $u(0) = 0$ إذن من أجل كل $x \in [0; +\infty[$: $u(x) \geq 0$ ومنه $\ln(x+1) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \geq 0$

$$\text{أي } \ln(x+1) \geq \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$$

د - استنتاج، من الأسئلة السابقة أن: $-\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(x+1)-x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$

لدينا مما سبق $-\frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) - x \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ ومنه $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

$$\text{ويكافئ } -\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(x+1)-x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$$

استنتاج أن f قابلة للاشتقاق عند 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(x+1)}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - x}{x^2}$$

$$\text{ولدينا } -\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(x+1) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - x}{x^2} = -\frac{1}{2} \quad \text{بما أن } \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0.

3. لتكن الدالة h المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $h(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$

أ - دراسة اتجاه تغير الدالة h ، و تعيين إشارة $h(x)$ حسب قيم x .

$$\text{الدالة } h \text{ تقبل الاشتقاق على } [0; +\infty[\text{ ولدينا: } h'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x}{(x+1)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ لدينا $h'(x) < 0$ وبالتالي الدالة h متناقصة تماماً على $[0; +\infty[$

وبما أن $h(0) = 0$ فإنه لكل $x \in [0; +\infty[$: $h(x) \leq 0$

ب - تبين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$

ليكن $x \in [0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x+1}\right)x - \ln(x+1)}{x^2} = \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$$

من أجل كل $x \in]0; +\infty[$: $h(x) < 0$ و $x^2 > 0$ ومنه $f'(x) < 0$ وبالتالي الدالة f متناقصة تماماً على $[0; +\infty[$.

جـ - جدول تغيرات f مع توضيح نهاية f عند $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x}$$

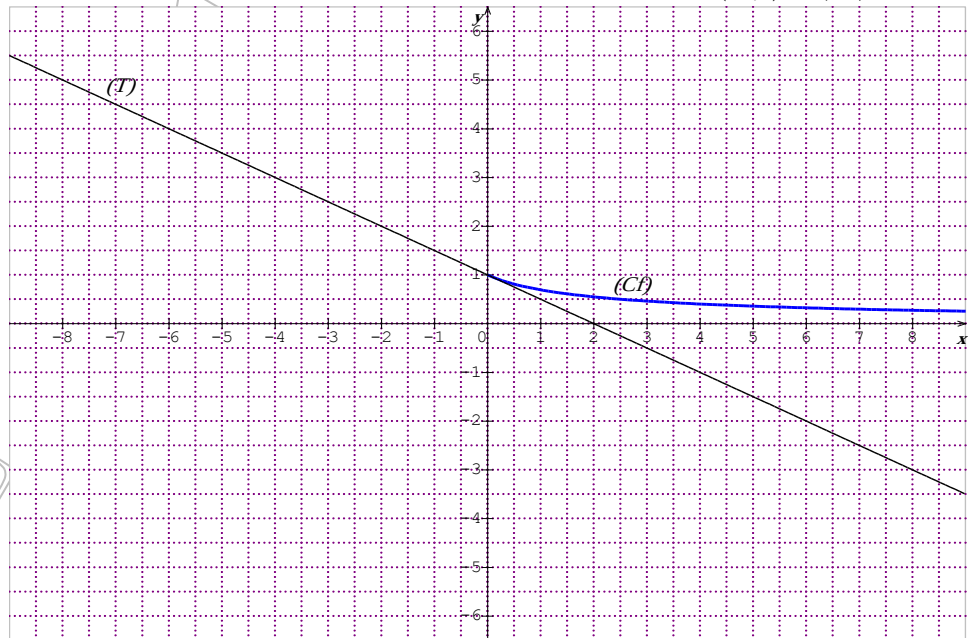
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	1	0

د - كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \text{ ومنه } y = -\frac{1}{2}x + 1 \text{ وهي معادلة للمماس } (T).$$

4. رسم (T) و (C_f) .



التمرين الرابع:

$f(I)$ هي الدالة المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - \ln(x-1)$

(1) تحديد حسب قيم x ، إشارة $f(x) - x$

$$f(x) - x = -\ln(x-1)$$

$f(x) - x = 0$ تعني $-\ln(x-1) = 0$ وتكافئ $\ln(x-1) = 0$ أي $x = 2$

$f(x) - x > 0$ تعني $-\ln(x-1) > 0$ وتكافئ $\ln(x-1) < 0$ وتكافئ $0 < x-1 < 1$ أي $1 < x < 2$

$f(x) - x < 0$ تعني $-\ln(x-1) < 0$ وتكافئ $\ln(x-1) > 0$ وتكافئ $x-1 > 1$ أي $x > 2$

(2) أ- تعيين اتجاه تغير الدالة f .

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]1; +\infty[$ كونها مجموع دالتين تقبلان الاشتقاق على هذا المجال ولدينا:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$ لدينا $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماماً على $]1; +\infty[$.

ب- تبين أنه إذا كان $x \in [2; e+1]$ فإن $f(x) \in [2; e+1]$

لدينا f متزايدة تماماً على $]1; +\infty[$.

إذا كان $2 \leq x \leq e+1$ فإن $f(2) \leq f(x) \leq f(e+1)$ ومنه $2 \leq f(x) \leq e+1$ أي $2 \leq f(x) \leq e+1$

إذن من أجل $x \in [2; e+1]$ فإن $f(x) \in [2; e+1]$

(II) (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = e+1$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n - 1)$

(1) برهان بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n \in [2; e+1]$.

لدينا $u_0 = e+1$ ومنه $u_0 \in [2; e+1]$ أي مرحلة الأبتداء صحيحة.

ليكن k عدداً طبيعياً.

نفترض أنّ $u_k \in [2; e+1]$ ولنبرهن أن $u_{k+1} \in [2; e+1]$

لدينا $u_k \in [2; e+1]$ وحسب نتيجة السؤال (2) ب. فإن $f(u_k) \in [2; e+1]$ أي $u_{k+1} \in [2; e+1]$

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \in [2; e+1]$

(2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

لدينا من أجل كل $x \in [2; +\infty[$: $f(x) - x \leq 0$

ولدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \in [2; e+1]$ ومنه $f(u_n) - u_n \leq 0$ أي $u_{n+1} - u_n \leq 0$ وعليه المتتالية

(u_n) متناقصة.

(3) تبرير تقارب المتتالية (u_n) .

بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 2 فهي متقاربة.

حساب نهايتها.

بما أن (u_n) متقاربة فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ حيث $l \in \mathbb{R}$ ولدينا $u_{n+1} = f(u_n)$ وبما أن الدالة f مستمرة على

$]1; +\infty[$ فإن $l = f(l)$ ومنه $l = 2$ وعليه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

الموضوع الأولالتمرين الأول:

- 1- حل في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x', y') : $9x' - 14y' = 13$ علما أن $(3, 1)$ حلا لها
- 2- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x, y) : $45x - 28y = 130$
- . بين أنه إذا كان (x, y) حلا لهذه المعادلة فإن x مضاعف للعدد 2 و y مضاعف للعدد 5، ثم حل هذه المعادلة.

- 3- N عدد طبيعي يكتب $2\alpha\alpha3$ في نظام تعداد أساسه 9 و $5\beta\beta6$ في نظام تعداد أساسه 7.
- . عيّن α و β ، ثم اكتب N في النظام العشري .

التمرين الثاني:

- في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط:
- $A(0; 0; 2)$ ، $B(0; 4; 0)$ ، $C(2; 0; 0)$ ، $D(-2; 5; 6)$ و $H(-4; 4; 4)$.
1. أ - بين أن النقط A ، B و C تعيّن مستوي.
- ب - اكتب معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) .
2. بين أن النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .
3. بين أن النقطة H هي مرجح للجملة المثقلة $\{(A; -2), (B; -1), (C; 2)\}$.
4. لتكن (E) مجموعة النقط M من الفضاء حيث: $(-2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}) \cdot \vec{CH} = -48$
- أ - بين أن النقطة M تنتمي إلى (E) إذا وفقط إذا كان $(2) \dots \dots \dots MH \cdot CH = 48$.
- ب - تحقق من أن النقطة A تنتمي إلى (E) .
- ج - بين أن العلاقة (2) تكافئ $\vec{AM} \cdot \vec{CH} = 0$
- د - استنتج طبيعة المجموعة (E) .

التمرين الثالث:

1. $P(z) = z^3 - 4z^2 + 8z - 8$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث:
- أ - تحقق أن 2 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.
- ب - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.
2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$
- نعتبر النقط A ، B و C ذات اللاحقات: $z_A = 2$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ على الترتيب.
- أ - اكتب كلا من z_B ، z_C و $\frac{z_B}{z_C}$ على الشكل الأسّي.
- ب - عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي بحيث يكون $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n$ حقيقيا.
- ج - بين أنه، من أجل كل عدد طبيعي فردي n : $z_B^{3n} + z_C^{3n} + 2^{3n+1} = 0$.

د - أنشئ النقط A, B و C ثم عيّن طبيعة الرباعي $OBAC$.

3. نرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = \frac{z_A \bar{z} - z_C}{z - z_C}$

أ - لتكن (E) مجموعة M النقط ذات اللاحقة z بحيث $(\bar{z} - z_C)(z - z_B)$ ؛ عيّن ثم أنشئ المجموعة (E) .

ب - تحقق أن $z' = z_A + \frac{z_C}{z - z_C}$.

ج - بيّن أنه عندما تمسح النقطة M المجموعة (E) فإن النقطة M' تمسح دائرة (C) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

التمرين الرابع:

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 - 1 - 2\ln(x)$

1. ادرس تغيرات الدالة g .

2. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x + \frac{1 - (\ln x)^2}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسياً.

2. برهن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (يمكن وضع $t = \sqrt{x}$)، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3. أ - بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x) + (\ln x)^2}{x^2}$ ،

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

4. أ - بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب - ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

5. أ - بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α ؛ حيث $0.3 < \alpha < 0.4$.

ب - أرسم (Δ) و (C_f) .

6. نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $]-\infty; 0[$ بـ: $h(x) = f(-x)$ ، (C_h) تمثيلها البياني.

• اشرح كيفية رسم المنحنى (C_h) انطلاقاً من المنحنى (C_f) ثم ارسمه.

الموضوع الثاني:التمرين الأول:

- 1- ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على 7 .
- 2- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد: $3 \times 100^{3n+2} + 8 \times 102^{3n} - 104$ مضاعفا للعدد 7 .
- 3- أ - هل العدد 101 أولي؟ برّر، عين $PGCD(505, 303)$.
ب - نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: (1) $505x - 303y = 1111$
حل المعادلة (1) علما أن الحل الخاص (x_0, y_0) يحقق: $x_0 + 3y_0 = -5$.
ج - نفرض أن x و y موجبان.
- 4- ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x; y)$ هو حل للمعادلة (1) .
- ماهي القيم الممكنة للعدد d ؟
- أوجد الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (1) بحيث يكون $d = 11$

التمرين الثاني:

- في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط:
- $A(2; 1; 2)$ ، $B(0; 2; -1)$ ، $H(1; 1; 0)$ والمستقيم (Δ) معرّف بتمثيله الوسيط
- $$\begin{cases} x = -2 + 6t \\ y = 1 - 2t \\ z = 4t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$
1. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) .
 2. بين أن (AB) و (Δ) لا ينتميان إلى نفس المستوي.
 3. (P) هو المستوي الذي يشمل (AB) ويوازي (Δ) .
أ - تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1; 5; 1)$ ناظمي للمستوي (P) .
ب - اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) .
ج - احسب المسافة بين (P) و (Δ) .
 4. عيّن إحداثيات النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ ، ثم جد معادلة ديكارتية للمستوي (Q) ؛ المحوري للقطعة $[AB]$.
 5. لتكن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $MA^2 - MB^2 = 2$.
- تحقق أن النقطة H تنتمي إلى (Γ) ثم استنتج طبيعة المجموعة (Γ) .

التمرين الثالث:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

نعتبر النقط A, B, C التي لواحقها $z_A = i, z_B = \sqrt{2}, z_C = \sqrt{2} + i$ على الترتيب. ونسمي I, J, K منتصفات القطع $[OB], [AC], [CB]$ و S التشابه المباشر الذي يحول A إلى I ويحول B إلى O .

1- عيّن العبارة المركبة للتشابه S ، ثم عيّن مركزه ω .

2- عيّن صورة المستطيل $AOBC$ بالتشابه S .

3- نعتبر التحويل $S^2 = S \circ S$.

أ - عيّن صورة النقط A, B, O بالتحويل S^2 .

ب - برهن أنّ S^2 تحاك يطلب تعيين عناصره.

ج - استنتج أنّ المستقيمات $(OC), (BJ), (AK)$ متقاطعة.

التمرين الرابع:

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \frac{2x}{x+1} - \ln(x+1)$

1. ادرس تغيّرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

2. بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $3.9 < \alpha < 4$.

3. عيّن، حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(II) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^{-x} \ln(e^{2x} + 1)$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. علما أن $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$ عين نهاية الدالة f عند $-\infty$.

2. بين أن: $f(x) = \frac{2x}{e^x} + \frac{\ln(e^{-2x} + 1)}{e^x}$ ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3. أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) = e^{-x} g(e^{2x})$.

ب - عين إشارة $f'(x)$.

ج - استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

4. بين أن $f\left(\frac{\ln \alpha}{2}\right) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}$. أنشئ (C_f) . يعطى $\frac{\ln \alpha}{2} \approx 0,6$ و $f\left(\frac{\ln \alpha}{2}\right) \approx 0,8$.

حل الموضوع الأولالتمرين الأول:

1- حل في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x', y') : $9x' - 14y' = 13$ علما أن $(3, 1)$ حلا لها

$$\left\{ \begin{array}{l} 9x' - 14y' = 13 \\ 9(x' - 3) - 14(y' - 1) = 0 \end{array} \right. \text{ لدينا}$$

$9(x' - 3) = 14(y' - 1)$ لدينا 14 يقسم $9(x' - 3)$ و 14 و 9 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص

14 يقسم $x' - 3 = 14k$ أي $x' = 14k + 3$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ بالتعويض في

$9(x' - 3) = 14(y' - 1)$ نجد $9 \times 14k = 14(y' - 1)$ ومنه $y' - 1 = 9k$ أي $y' = 9k + 1$ مع $k \in \mathbb{Z}$

2- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x, y) : $45x - 28y = 130$

تبيين أنه إذا كان (x, y) حلا لهذه المعادلة فإن x مضاعف للعدد 2 و y مضاعف للعدد 5.

$45x - 28y = 130$ تكافئ $45x = 28y + 130$ أي $45x = 2(y + 65)$ ومنه 2 يقسم $45x$ والعدان

2 و 45 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص 2 يقسم x أي x مضاعف للعدد 2.

وكذلك لدينا $28y = 45x - 130$ أي $28y = 5(x - 26)$ ومنه 5 يقسم $28y$ والعدان 5 و 28 لأوليان

فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص 5 يقسم y أي y مضاعف للعدد 5.

حل المعادلة:

x مضاعف للعدد 2 معناه $x = 2x'$ حيث $x' \in \mathbb{Z}$ و y مضاعف للعدد 5 معناه $y = 5y'$ حيث $y' \in \mathbb{Z}$

إذن $45x - 28y = 130$ تكافئ $45 \times 2x' - 28 \times 5y' = 130$ وتكافئ $10(9x' - 14y') = 130$ أي

$9x' - 14y' = 13$ وحسب ما سبق $x' = 14k + 3$ و $y' = 9k + 1$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

وعليه $x = 2(14k + 3)$ و $y = 5(9k + 1)$ أي $x = 28k + 6$ و $y = 45k + 5$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

3- N عدد طبيعي يكتب $2\alpha\alpha3$ في نظام تعداد أساسه 9 و $5\beta\beta6$ في نظام تعداد أساسه 7.

تعيين α و β ، ثم اكتب N في النظام العشري.

لدينا $N = 3 \times 9^0 + \alpha \times 9^1 + \alpha \times 9^2 + 2 \times 9^3$ ومنه $N = 3 + 9\alpha + 81\alpha + 1458$ أي

$N = 90\alpha + 1461$ حيث $0 \leq \alpha \leq 8$ ومن جهة أخرى $N = 6 \times 7^0 + \beta \times 7^1 + \beta \times 7^2 + 5 \times 7^3$

أي $N = 56\beta + 1721$ حيث $0 \leq \beta \leq 6$ وعليه $90\alpha + 1461 = 56\beta + 1721$ ومنه

$90\alpha - 56\beta = 260$ أي $45\alpha - 28\beta = 130$ وحسب ماسبق $\alpha = 28k + 6$ و $\beta = 45k + 5$ مع

$k \in \mathbb{N}$ ولدينا $0 \leq \alpha \leq 8$ و $0 \leq \beta \leq 6$ معناه $28k + 6 \leq 8$ و $45k + 5 \leq 6$ أي $k \leq \frac{1}{14}$ و $k \leq \frac{1}{45}$

وعليه $k = 0$ وبالتالي $\alpha = 6$ و $\beta = 5$

إذن $N = 90 \times 6 + 1461 = 2001$.

التمرين الثاني:

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط:

$A(0; 0; 2)$ ، $B(0; 4; 0)$ ، $C(2; 0; 0)$ ، $D(-2; 5; 6)$ و $H(-4; 4; 4)$.

1. أ - تبيين أن النقط A ، B و C تعين مستويا.

لدينا $\overrightarrow{AB}(0; 4; -2)$ و $\overrightarrow{AC}(2; 0; -2)$ من الواضح أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

ومنه النقط A ، B و C تعين مستويا.

ب - كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

ليكن $\vec{n}(a;b;c)$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) عندئذ $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$ و $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$ ومنه $4b - 2c = 0$

و $2a - 2c = 0$ أي $c = 2b$ و $c = a$ وبأخذ $c = 2$ نجد $a = 2$ و $b = 1$ إذن $\vec{n}(2;1;2)$

المستوي (ABC) له معادلة من الشكل $2x + y + 2z + d = 0$ ولدينا $A \in (ABC)$ يعني $4 + d = 0$

أي $d = -4$ وعليه $2x + y + 2z - 4 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2. تبين أن النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .

لدينا $H \in (ABC)$ ومنه $2x_H + y_H + 2z_H - 4 = -8 + 4 + 4 - 4 = 0$

ولدينا $\vec{DH}(-2;-1;-2)$ ومنه $\vec{DH} = -\vec{n}$ أي الشعاعان $\vec{DH}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطيا وبالتالي فإن النقطة

H هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .

3. تبين أن النقطة H هي مرجح للجملة المثقلة $\{(A;-2), (B;-1), (C;2)\}$.

لدينا $\vec{HA}(4;-4;-2)$ ، $\vec{HB}(4;0;-4)$ و $\vec{HC}(6;-4;-4)$

أي $-2\vec{HA}(-8;8;4)$ ، $-\vec{HB}(-4;0;4)$ و $2\vec{HC}(12;-8;-8)$ إذن إحداثيات الشعاع

$-2\vec{HA} - \vec{HB} + 2\vec{HC}$ هي $(-8-4+12; 8+0-8; 4+4-8)$ أي $(0;0;0)$ وهذا يعني أن

$-2\vec{HA} - \vec{HB} + 2\vec{HC} = \vec{0}$ ومنه H هي مرجح للجملة المثقلة $\{(A;-2), (B;-1), (C;2)\}$.

4. لتكن (E) مجموعة النقط M من الفضاء حيث: $(-2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}) \cdot \vec{CH} = -48$

أ - تبين أن النقطة M تنتمي إلى (E) إذا وفقط إذا كان $(2) \dots \dots \dots \vec{MH} \cdot \vec{CH} = 48$.

لدينا H هي مرجح للجملة المثقلة $\{(A;-2), (B;-1), (C;2)\}$ إذن من أجل نقطة M من الفضاء:

$-2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} = -\vec{MH}$ أي $-2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} = (-2-1+2)\vec{MH}$

M تنتمي إلى (E) معناه $(-2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}) \cdot \vec{CH} = -48$ وتكافئ $-\vec{MH} \cdot \vec{CH} = -48$ أي

$\vec{MH} \cdot \vec{CH} = 48$.

ب - التحقق من أن النقطة A تنتمي إلى (E) .

لدينا $\vec{AH}(-4;4;2)$ و $\vec{CH}(-6;4;4)$ إذن $\vec{AH} \cdot \vec{CH} = -4 \times -6 + 4 \times 4 + 2 \times 4 = 48$ ومنه

$A \in (E)$

ج - تبين أن العلاقة (2) تكافئ $\vec{AM} \cdot \vec{CH} = 0$

$\vec{MH} \cdot \vec{CH} = 48$ معناه $(\vec{MA} + \vec{AH}) \cdot \vec{CH} = 48$ وتكافئ $\vec{MA} \cdot \vec{CH} + \vec{AH} \cdot \vec{CH} = 48$ وتكافئ

$\vec{MA} \cdot \vec{CH} + 48 = 48$ أي $\vec{MA} \cdot \vec{CH} = 0$

إذن (E) هي المستوي الذي يشمل A ويكون $\vec{CH}$ شعاعا ناظميا له.

التمرين الثالث:

1. $P(z) = z^3 - 4z^2 + 8z - 8$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث:

أ - التحقق أن 2 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

$$P(2) = 2^3 - 4(2)^2 + 8(2) - 8 = 0$$

ب - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقط A, B و C ذات الإحداثيات: $z_A = 2$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 1 - i\sqrt{3}$ على الترتيب.

أ - كتابة كلا من z_B , z_C و $\frac{z_B}{z_C}$ على الشكل الأسّي.

$$z_B = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_C = \overline{z_B} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{z_B}{z_C} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

ب - تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n$ حقيقياً.

$$\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^n = e^{i\frac{2n\pi}{3}}$$

$$\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n \text{ حقيقي معناه } \arg\left(\frac{z_B}{z_C}\right) = k\pi \text{ ومنه } \frac{2n\pi}{3} = k\pi \text{ أي } 2n = 3k$$

لدينا 3 يقسم $2n$ والعددان 2 و 3 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص 3 يقسم n ومنه $n = 3\alpha$ حيث $\alpha \in \mathbb{N}$

ج - تبين أنه، من أجل كل عدد طبيعي فردي n : $z_B^{3n} + z_C^{3n} + 2^{3n+1} = 0$.

$$z_B^{3n} + z_C^{3n} + 2^{3n+1} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{3n} + \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{3n} + 2^{3n+1} = 2^{3n}e^{in\pi} + 2^{3n}e^{-in\pi} + 2^{3n+1}$$

$$e^{in\pi} = e^{-in\pi} = -1 \text{ فإن } n \text{ عدد فردي}$$

$$\text{ومنه } z_B^{3n} + z_C^{3n} + 2^{3n+1} = -2^{3n} - 2^{3n} + 2^{3n+1} = -2(2)^{3n} + 2^{3n+1} = -2^{3n+1} + 2^{3n+1} = 0$$

د - أنشئ النقط A, B و C

تعيين طبيعة الرباعي OBAC.

لدينا $z_A - z_C = 2 - 1 + i\sqrt{3} = 1 + i\sqrt{3}$ ومنه $z_A - z_C = z_B$ وهذا يعني أن $\overline{CA} = \overline{OB}$ ولدينا $\frac{z_B}{z_C} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ معناه $\left| \frac{z_B}{z_C} \right| = 1$ أي $OB = OC$ إذن OBAC معين.3. نرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = \frac{z_A \bar{z} - z_C}{z - z_C}$ أ - لتكن (E) مجموعة M النقط ذات اللاحقة z بحيث $(z - z_B)(\bar{z} - z_C) = 1$ ؛

تعيين وإنشاء المجموعة (E).

$$(z - z_B)(\bar{z} - z_C) = 1 \text{ معناه } (z - z_B)(\bar{z} - z_B) = 1 \text{ وتكافئ } (z - z_B)(\overline{z - z_B}) = 1$$

$$\alpha \bar{\alpha} = |\alpha|^2 \quad \text{تذكير:}$$

ومنه $|z - z_B|^2 = 1$ وعليه $|z - z_B| = 1$ أي $BM = 1$ إذن (E) هي الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها 1.ب - التحقق أن $z' = z_A + \frac{z_C}{z - z_C}$

$$z' - z_A = \frac{z_A \bar{z} - z_C}{z - z_C} - z_A = \frac{z_A \bar{z} - z_C - z_A \bar{z} + z_A z_C}{z - z_C} = \frac{-z_C + 2z_C}{z - z_C}$$

$$z' - z_A = \frac{z_C}{z - z_C}$$

$$z' = z_A + \frac{z_C}{z - z_C} \text{ ومنه}$$

ج - تبين أنه عندما تمسح النقطة M المجموعة (E) فإن النقطة M' تمسح دائرة (C) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

$$|z' - z_A| = \left| \frac{z_C}{z - z_B} \right| \text{ ومنه } z' - z_A = \frac{z_C}{z - z_B} \text{ معناه } z' = z_A + \frac{z_C}{z - z_C}$$

$$|z - z_B| = |z - z_B| = BM \quad \text{توضيح:} \quad AM' = \frac{2}{BM} \text{ أي } |z' - z_A| = \frac{|z_C|}{|z - z_B|}$$

إذا كانت M تمسح المجموعة (E) فإن $BM = 1$ ومنه $AM' = \frac{2}{1} = 2$ وعليه فإن M' تمسح الدائرة (C) التي مركزها A ونصف قطرها 2.

التمرين الرابع:

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 - 1 - 2\ln(x)$

1. دراسة تغيرات الدالة g .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 1 - 2\ln(x) = +\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(x - \frac{1}{x} - 2 \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

الدالة g تقبل الإستقاق على $]0; +\infty[$ ولدينا

$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x}$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $\frac{2(x+1)}{x} > 0$ ، ومنه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة

$(x-1)$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على $]0; 1[$ و متزايدة تماما على $[1; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g .

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	0
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$
		0	$+\infty$

2. استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

للدالة g قيمة حدية صغرى على المجال $]0; +\infty[$ وهي $g(1) = 0$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $g(x) \geq 0$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x + \frac{1 - (\ln x)^2}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \frac{1 - (\ln x)^2}{x} = -\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - (\ln x)^2 = -\infty$$

$$2. \text{ تبين أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$$

نضع $t = \sqrt{x}$ ومنه $x = t^2$ إذا كان x يتوّل $+\infty$ إلى فإن t يتوّل إلى $+\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\ln t^2)^2}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(2 \ln t)^2}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 4 \left(\frac{\ln t}{t} \right)^2 = 0$$

حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1 - (\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{x} - \frac{(\ln x)^2}{x} = +\infty$$

3. أ - تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x) + (\ln x)^2}{x^2}$ ،

ليكن $x \in]0; +\infty[$

$$f'(x) = 1 + \frac{\left(-2\frac{1}{x}\ln x\right)x - (1 - (\ln x)^2)}{x^2} = 1 + \frac{-2\ln x - 1 + (\ln x)^2}{x^2} = \frac{x^2 - 2\ln x - 1 + (\ln x)^2}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{g(x) + (\ln x)^2}{x^2} \text{ ومنه الدالة } f \text{ متزايدة تماما على }]0; +\infty[.$$

ب - جدول تغيرات الدالة f .

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$	$-\infty$	2	$+\infty$

4. أ - تبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - (\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$$

إذن المستقيم (Δ) مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب - دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

ليكن x عددا حقيقيا موجبا تماما

$$f(x) - x = \frac{1 - (\ln x)^2}{x} = \frac{(1 - \ln x)(1 + \ln x)}{x}$$

إشارة $f(x) - x$ هي من إشارة $(1 - \ln x)(1 + \ln x)$.

x	0	e	e^{-1}	$+\infty$
$1 - \ln x$	+	0	-	-
$1 + \ln x$	-	-	0	+
$f(x) - x$	-	0	+	-
الوضعية				
	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

(Δ) و (C_f) يتقاطعان في النقطتين $A(e;e)$ و $B(e^{-1};e^{-1})$.

5. أ - تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.3 < \alpha < 0.4$.

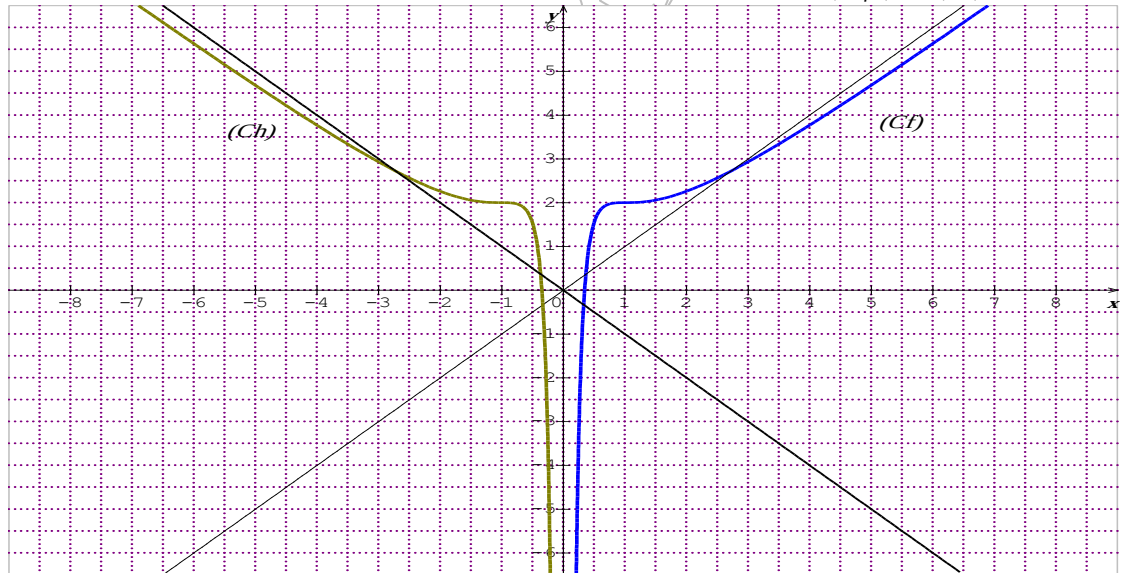
الدالة f مستمرة ومنتزعة تماما على المجال $]0; +\infty[$ وبالخصوص على المجال $[0.3; 0.4]$ ولدينا $f(0.3) \approx 0.3$ و $f(0.4) \approx 0.4$ أي $f(0.3) \times f(0.4) < 0$ إذن حسب مبرهنة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.3 < \alpha < 0.4$.

6. نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $]-\infty; 0[$ بـ: $h(x) = f(-x)$ ، (C_h) تمثيلها البياني.

• شرح كيفية رسم المنحنى (C_h) انطلاقا من المنحنى (C_f) .

لدينا (C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب.

ب - الرسم (Δ) و (C_f) .



الموضوع الثاني:

التمرين الأول:

1- دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على 7.

$$2^0 \equiv 1[7], 2^1 \equiv 2[7], 2^2 \equiv 4[7], 2^3 \equiv 1[7]$$

وعليه $2^{3k} \equiv 1[7], 2^{3k+1} \equiv 2[7], 2^{3k+2} \equiv 4[7]$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
باقي قسمة 2^n على 7	1	2	4

2- تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد: $3 \times 100^{3n+2} + 8 \times 102^{3n} - 104$ مضاعفا للعدد 7.

لدينا $100 \equiv 2[7]$ ومنه $100^{3n+2} \equiv 2^{3n+2}[7]$ ولدينا $2^{3n+2} \equiv 4[7]$ إذن $100^{3n+2} \equiv 4[7]$ وعليه

$$3 \times 100^{3n+2} \equiv 12[7] \text{ أي } (1) \dots\dots\dots 3 \times 100^{3n+2} \equiv 5[7]$$

ولدينا $102 \equiv 4[7]$ معناه $102 \equiv 2^2[7]$ ومنه $102^{3n} \equiv 2^{6n}[7]$ ولدينا $2^{6n} \equiv 1[7]$ إذن

$$8 \times 102^{3n} \equiv 1[7] \dots\dots\dots (2) \text{ وعليه } 8 \equiv 1[7] \text{ و } 102^{3n} \equiv 1[7]$$

$$3 \times 100^{3n+2} + 8 \times 102^{3n} - 104 \equiv 5 + 1 - 6[7] \text{ إذن } 104 \equiv 6[7] \dots\dots\dots (3) \text{ ولدينا}$$

$$\text{أي } 3 \times 100^{3n+2} + 8 \times 102^{3n} - 104 \equiv 0[7] \text{ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ العدد}$$

$$3 \times 100^{3n+2} + 8 \times 102^{3n} - 104 \text{ مضاعف للعدد } 7.$$

$$-3 \text{ أ. هل العدد } 101 \text{ أولي؟ برّر،}$$

لدينا $\sqrt{101} \approx 10.04$ والعدد 101 لا يقبل القسمة على 2 ولا على 3 ولا على 5 ولا على 7 إذن العدد 101 أولي
تعيين $PGCD(505, 303)$.

$$505 = 303 + 202$$

$$303 = 202 + 101$$

$$202 = 2 \times 101 + 0$$

$$\text{ومنه } PGCD(505; 303) = 101$$

$$\text{ب - نعتبر في } \mathbb{Z}^2 \text{ المعادلة : (1) } 505x - 303y = 1111 \dots\dots\dots$$

$$\text{حل المعادلة (1) علما أن الحل الخاص } (x_0, y_0) \text{ يحقق : } x_0 + 3y_0 = -5.$$

$$\text{لدينا (1) تكافئ } 5x - 3y = 11 \text{ ومنه } \begin{cases} 5x_0 - 3y_0 = 11 \dots\dots\dots (1) \\ x_0 + 3y_0 = -5 \dots\dots\dots (2) \end{cases} \text{ وبجمع المعادلتين نجد } 6x_0 = 6$$

$$\text{أي } x_0 = 1 \text{ وبالتعويض في (2) نجد } 3y_0 = -6 \text{ أي } y_0 = -2 \text{ وعليه } (x_0, y_0) = (1, -2) \text{ حل المعادلة}$$

$$\begin{cases} 5x - 3y = 11 \\ 5(1) - 3(-2) = 11 \end{cases} \text{ ومنه } 5(x-1) - 3(y+2) = 0 \text{ أي } 5(x-1) = 3(y+2)$$

لدينا 3 يقسم $5(x-1)$ والعددان 3 و 5 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص 3 يقسم $x-1$ ومنه

$$x-1 = 3k \text{ أي } x = 3k + 1 \text{ حيث } k \in \mathbb{Z} \text{ وبالتعويض في } 5(x-1) = 3(y+2) \text{ نجد}$$

$$5 \times 3k = 3(y+2) \text{ ومنه } 5 \times 3k = 3(y+2) \text{ أي } y+2 = 5k \text{ حيث } y = 5k - 2 \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}.$$

ج - نفرض أن x و y موجبان.

$$-4 \text{ ليكن } d \text{ القاسم المشترك الأكبر للعددين } x \text{ و } y \text{ حيث } (x; y) \text{ هو حل للمعادلة (1).}$$

- تعيين القيم الممكنة للعدد d .

$$\text{لدينا } d \text{ يقسم } x \text{ و } d \text{ يقسم } y \text{ إذن } d \text{ يقسم } 5x - 3y \text{ أي } d \text{ يقسم } 11 \text{ وعليه قيم } d \text{ الممكنة } 1 \text{ و } 11.$$

$$\text{- إيجاد الثنائيات } (x; y) \text{ حلول المعادلة (1) بحيث يكون } d = 11$$

$$\text{نضع } x' = 11x \text{ و } y' = 11y \text{ و } x' \text{ و } y' \text{ أوليان فيما بينهما}$$

$$\text{نحصل على } 5 \times 11x' - 3 \times 11y' = 11 \text{ ومنه } 5x' - 3y' = 1 \text{ نلاحظ أن } (2, 3) \text{ حل خاص للمعادلة}$$

$$\text{ومنه } \begin{cases} 5x' - 3y' = 1 \\ 5(2) - 3(3) = 1 \end{cases} \text{ بالطرح نجد } 5(x'-2) - 3(y'-3) = 0 \text{ أي } 5(x'-2) = 3(y'-3)$$

$$\text{لدينا 3 يقسم } 5(x'-2) \text{ والعددان 3 و 5 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص 3 يقسم } (x'-2)$$

$$\text{ومنه } x'-2 = 3\alpha \text{ أي } x' = 3\alpha + 2 \text{ حيث } \alpha \in \mathbb{N} \text{ وبالتعويض في } 5(x'-2) = 3(y'-3) \text{ نجد}$$

$5 \times 3\alpha = 3(y' - 3)$ ومنه $y' - 3 = 5\alpha$ أي $y' = 5\alpha + 3$ حيث $\alpha \in \mathbb{N}$ وبما أن $5x' - 3y' = 1$ فإنه حسب مبرهنة بيزو x' و y' أوليان فيما بينهما.
وبالتالي $x = 11(3\alpha + 2)$ أي $x = 33\alpha + 22$ و $y = 11(5\alpha + 3)$ أي $y = 55\alpha + 33$ حيث $\alpha \in \mathbb{N}$
طريقة ثانية:

$$d = 11 \text{ معناه } \begin{cases} 11|x \\ 11|y \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} 11|3k+1 \\ 11|5k-2 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} 11|6k+2 \\ 11|5k-2 \end{cases} \text{ وعليه } 11|k+4 \text{ ومنه } k+4=11\alpha$$

$$\text{أي } k = 11\alpha - 4 \text{ وبالتالي } x = 3(11\alpha - 4) + 1 \text{ أي } x = 33\alpha - 11 \text{ و } y = 5(11\alpha - 4) - 2 \text{ أي } y = 55\alpha - 22$$

ومنه مجموعة الحلول هي $\{33\alpha - 11; 55\alpha - 22\}$ حيث $\alpha \in \mathbb{N}^*$

التمرين الثاني:

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط:
 $A(2;1;2)$ ، $B(0;2;-1)$ ، $H(1;1;0)$ والمستقيم (Δ) معرف بتمثيله الوسيطي

$$\begin{cases} x = -2 + 6t \\ y = 1 - 2t \\ z = 4t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

1. كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (AB) .

لدينا $\overrightarrow{AB}(-2;1;-3)$ شعاع توجيه للمستقيم (AB) .

من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من (AB) لدينا $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} / \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = 2 - 2\alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 2 - 3\alpha \end{cases} \text{ ومنه } (\alpha \in \mathbb{R})$$

2. تبين أن (AB) و (Δ) لا ينتميان إلى نفس المستوي.

لدينا $\overrightarrow{AB}(-2;1;-3)$ شعاع توجيه لـ (AB) و $\vec{u}(6;-2;4)$ شعاع توجيه لـ (Δ) .

و $\frac{-2}{6} \neq \frac{1}{-2}$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}$ غير مرتبطين خطيا بالتالي المستقيمان (AB) و (Δ) غير متوازيين

$$2 - 2\alpha = -2 + 6t \dots\dots\dots(1)$$

$$1 + \alpha = 1 - 2t \dots\dots\dots(2)$$

$$2 - 3\alpha = 4t \dots\dots\dots(3)$$

بضرب المعادلة (2) في العدد 2 وجمع المعادلتين (1) و (2) نجد $4 = 2t$ ومنه $t = 2$

$$\text{بالتعويض في جميع المعادلات نجد} \begin{cases} \alpha = -4 \\ \alpha = -4 \\ \alpha = -2 \end{cases} \begin{cases} 2 - 2\alpha = 10 \\ 1 + \alpha = -3 \\ 2 - 3\alpha = 8 \end{cases} \text{تناقض}$$

ومنه (AB) و (Δ) غير متقاطعين فهما ليسا من نفس المستوي.

3. (P) هو المستوي الذي يشمل (AB) ويوازي (Δ) .

أ - تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1;5;1)$ ناظمي للمستوي (P) .

بما أن المستوي (P) يشمل (AB) ويوازي (Δ) فإن $\vec{AB}$ و $\vec{u}$ شعاعي توجيه للمستوي وهما غير (P)

مرتبطين خطيا ولدينا $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 1 \times -2 + 5 \times 1 + 1 \times -3 = 0$ و $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 1 \times 6 + 5 \times -2 + 1 \times 4 = 0$

ومنه $\vec{n} \perp \vec{AB}$ و $\vec{n} \perp \vec{u}$ وبالتالي الشعاع $\vec{n}$ ناظمي للمستوي (P) .

ب - كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P) .

المستوي (P) له معادلة من الشكل $x + 5y + z + d = 0$ ولدينا $A \in (P)$ يعني $2 + 5 + 2 + d = 0$

أي $d = -9$ وعليه $x + 5y + z - 9 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P) .

ج - حساب المسافة بين (P) و (Δ) .

لتكن $M(-2 + 6t; 1 - 2t; 4t)$ إذن (Δ)

$$d(M; (P)) = \frac{|-2 + 6t + 5(1 - 2t) + 4t|}{\sqrt{1^2 + 5^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{10} \text{ وعليه}$$

4. تعيين إحداثيات النقطة I منتصف القطعة $[AB]$.

$$I\left(1; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \text{ وعليه } z_I = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}, y_I = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}, x_I = \frac{0+2}{2} = 1$$

إيجاد معادلة ديكارتية للمستوي (Q) ؛ المحوري للقطعة $[AB]$.

المستوي (Q) ناظمه الشعاع $\vec{AB}$ ويشمل النقطة I .

للمستوي (Q) معادلة من الشكل $-2x + y - 3z + d = 0$ ولدينا $I \in (Q)$ تعني $-2 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + d = 0$

أي $d = 2$ وعليه $-2x + y - 3z + 2 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (Q) .

5. لتكن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $MA^2 - MB^2 = 2$.

- التحقق أن النقطة H تنتمي إلى (Γ)

$$\text{لدينا } HA^2 = (2-1)^2 + (1-1)^2 + (2-0)^2 = 5 \text{ و } HB^2 = (0-1)^2 + (2-1)^2 + (-1-0)^2 = 3$$

ومنه $HA^2 - HB^2 = 2$ إذن النقطة H تنتمي إلى (Γ)

استنتاج طبيعة المجموعة (Γ) .

$$MA^2 - MB^2 = 2 \text{ تعني } (\vec{MA} - \vec{MB})(\vec{MA} + \vec{MB}) = 2 \text{ وتكافئ } \vec{BA}(2\vec{MI}) = 2 \text{ أي}$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{HI} = 1 \text{ وتكافئ } \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HI}) = 1 \text{ وتكافئ } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI} = 1$$

لدينا $H \in (\Gamma)$ ومنه $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{HI} \neq 1$ وعليه $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MH} + 1 = 1$ أي $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MH} = 0$ وبالتالي (Γ) هي المستوي الذي يشمل H و $\overrightarrow{BA}$ شعاع ناظمي .

التمرين الثالث:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

نعتبر النقط A, B, C التي لواقعها $z_A = i, z_B = \sqrt{2}, z_C = \sqrt{2} + i$ على الترتيب. ونسمي I, J, K منتصفات القطع $[OB], [AC], [CB]$ و S التشابه المباشر الذي يحول A إلى I ويحول B إلى O

1- تعيين العبارة المركبة للتشابه S ، ثم عيّن مركزه ω .

$$z_K = \frac{z_C + z_B}{2} = \sqrt{2} + \frac{1}{2}i \text{ و } z_J = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i, z_I = \frac{z_B}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

العبارة المركبة للتشابه S من الشكل $z' = az + b$ ولدينا $S(A) = I$ و $S(O) = B$ يكافئ

$$\begin{cases} z_I = az_A + b \dots\dots\dots (1) \\ z_B = az_O + b \dots\dots\dots (2) \end{cases} \text{ من (2) نجد } b = z_B = \sqrt{2} \text{ بالتعويض في (1) نجد}$$

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}iz + \sqrt{2} \text{ هي وبالتالي العبارة المركبة للتشابه } S \text{ هي } a = \frac{z_I - b}{z_A} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_\Omega = \frac{\sqrt{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}i} = \frac{3}{2}i \text{ مركز التشابه هو النقطة الصامدة } \Omega \text{ ذات اللاحقة } \frac{3}{2}i$$

2- تعيين صورة المستطيل $AOBC$ بالتشابه S .

لدينا $S(O) = B$ و $S(A) = I$

تعيين صورتين النقطتين B و C بالتشابه S .

$$S(B) = C \text{ وعليه } z' = \frac{\sqrt{2}}{2}iz_B + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}i\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{2} + i = z_C$$

$$S(C) = J \text{ وعليه } z' = \frac{\sqrt{2}}{2}iz_C + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}i(\sqrt{2} + i) + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i = z_J$$

وبالتالي صورة المستطيل $AOBC$ هو المستطيل $IBCJ$.

3- نعتبر التحويل $S^2 = S \circ S$.

أ- تعيين صورة النقط A, B, O بالتحويل S^2 .

$$S^2(O) = C \text{ ومنه } S^2(O) = S \circ S(O) = S(S(O)) = S(B) = C$$

$$S^2(B) = J \text{ ومنه } S^2(B) = S \circ S(B) = S(S(B)) = S(C) = J$$

$$S^2(O) = S \circ S(A) = S(S(A)) = S(I)$$

تعيين صورة I بالتشابه S .

$$S(I) = K \text{ عليه } z' = \frac{\sqrt{2}}{2} iz_I + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} i \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \sqrt{2} = \sqrt{2} + \frac{1}{2}i = z_K$$

$$S^2(A) = K \text{ إذن}$$

ب - برهن أن S^2 تحاك يطلب تعيين عناصره.

$$S^2 \text{ هو تشابه مباشر نسبته } \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \text{ أي نسبته } \frac{1}{2} \text{ زاويته } 2 \times \frac{\pi}{2} \text{ أي زاويته } \pi \text{ ومركزه } \Omega.$$

$$\text{إذن } S^2 \text{ تحاك نسبته } -\frac{1}{2} \text{ ومركزه } \Omega.$$

ج - استنتج أن المستقيمات (OC) ، (BJ) ، (AK) متقاطعة.

لدينا $S^2(O) = C$ ومنه النقط O ، C و Ω على استقامة واحدة أي Ω تنتمي للمستقيم (OC) .
و $S^2(B) = J$ ومنه النقط B ، J و Ω على استقامة واحدة أي Ω تنتمي للمستقيم (BJ) .
و $S^2(A) = K$ ومنه النقط A ، K و Ω على استقامة واحدة أي Ω تنتمي للمستقيم (AK) .
إذن المستقيمات (OC) ، (BJ) ، (AK) متقاطعة في النقطة Ω .

التمرين الرابع:

$$(I) \text{ نعتبر الدالة } g \text{ المعرفة على المجال }]0; +\infty[\text{ بـ: } g(x) = \frac{2x}{x+1} - \ln(x+1)$$

1. دراسة تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

الدالة g تقبل الإشتقاق على $]0; +\infty[$ ولدينا:

$$g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{2 - (x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1-x}{(x+1)^2}$$

إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $1-x$.

وبالتالي الدالة g متزايدة تماماً على $]0; 1]$ ومتناقصة تماماً على $[1; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x+1} - \ln(x+1) = -\infty$$

جدول تغيرات الدالة g .

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	$1 - \ln 2$	$-\infty$

2. تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[1; +\infty[$.
 الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[1; +\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty; 1 - \ln 2]$ و $]-\infty; 1 - \ln 2]$ إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1; +\infty[$.
 التحقق أن $3.9 < \alpha < 4$.
 لدينا $g(3.9) \approx 0.002$ و $g(4) \approx -0.009$ أي $g(3.9) \times g(4) < 0$ ومنه $3.9 < \alpha < 4$.
 3. تعيين، حسب قيم x إشارة $g(x)$.

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		+	-

(II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^{-x} \ln(e^{2x} + 1)$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. تعيين نهاية الدالة f عند $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(e^{2x} + 1)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(e^{2x} + 1)}{e^{2x}} \times e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(e^{2x} + 1)}{e^{2x}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t + 1)}{t} = 1 \text{ لأن}$$

2. تبين أن: $f(x) = \frac{2x}{e^x} + \frac{\ln(e^{-2x} + 1)}{e^x}$ ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$f(x) = \frac{\ln(e^{2x} + 1)}{e^x} = \frac{\ln e^{2x} (1 + e^{-2x})}{e^x} = \frac{\ln e^{2x} + \ln(1 + e^{-2x})}{e^x}$$

$$f(x) = \frac{2x + \ln(1 + e^{-2x})}{e^x} = \frac{2x}{e^x} + \frac{\ln(e^{-2x} + 1)}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{-2x} + 1)}{e^x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} + \frac{\ln(e^{-2x} + 1)}{e^x} = 0$$

3. أ - تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) = e^{-x} g(e^{2x})$.

ليكن x عددا حقيقيا:

$$f'(x) = -e^{-x} \ln(e^{2x} + 1) + \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1} e^{-x} = e^{-x} \left(\frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1} - \ln(e^{2x} + 1) \right) = e^{-x} g(e^{2x})$$

ب - تعيين إشارة $f'(x)$.

إشارة $f'(x)$ مثل إشارة $g(e^{2x})$.

$$f'(x) = 0 \text{ تعني } g(e^{2x}) = 0 \text{ تكافئ } e^{2x} = \alpha \text{ وتكافئ } 2x = \ln \alpha \text{ أي } x = \frac{\ln \alpha}{2}$$

$f'(x) > 0$ تعني $g(e^{2x}) < 0$ تكافئ $e^{2x} < \alpha$ وتكافئ $2x < \ln \alpha$ أي $x < \frac{\ln \alpha}{2}$

$f'(x) < 0$ تعني $g(e^{2x}) > 0$ تكافئ $e^{2x} > \alpha$ وتكافئ $2x > \ln \alpha$ أي $x > \frac{\ln \alpha}{2}$

وبالتالي الدالة f متزايدة تماماً على $]-\infty; \frac{\ln \alpha}{2}]$ ومتناقصة تماماً على $[\frac{\ln \alpha}{2}; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	$\frac{\ln \alpha}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$f\left(\frac{\ln \alpha}{2}\right)$	0

4. تبين أن $f\left(\frac{\ln \alpha}{2}\right) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}$. أنشئ (C_f) . يعطى $\frac{\ln \alpha}{2} \approx 0,6$ و $f\left(\frac{\ln \alpha}{2}\right) \approx 0,8$

$$\frac{2\alpha}{\alpha+1} - \ln(\alpha+1) \text{ معناه } g(\alpha) = 0 \text{ ولدينا } f\left(\frac{\ln \alpha}{2}\right) = \frac{\ln\left(1+e^{\frac{2\ln \alpha}{2}}\right)}{e^{\frac{\ln \alpha}{2}}} = \frac{\ln(1+\alpha)}{e^{\ln \sqrt{\alpha}}} = \frac{\ln(1+\alpha)}{\sqrt{\alpha}}$$

$$\text{أي } \ln(\alpha+1) = \frac{2\alpha}{\alpha+1} \text{ وعليه } f\left(\frac{\ln \alpha}{2}\right) = \frac{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha}(\alpha+1)} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}$$



التمرين الأول:

- I / 1. ادرس، حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10.
 2. استنتج باقي قسمة العدد 3^{2015} على 10.
 3. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $7^{4n+1} + 2011^n + 2009^{2n} + 1$ مضاعف للعدد 10.
 4. جد مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث: $13^{4n+1} + 3n \equiv 0 [10]$.
 II / 1. حل المعادلة التفاضلية التالية: $y' = (\ln 3)y$
 2. نسمي f الحل الخاص لهذه المعادلة والذي يحقق $f(0) = 1$ ؛ بين أن $f(x) = 3^x$.
 3. ادرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
 4. ماهو رقم أحاد العدد $f(1432) + f(2011)$
 5. نعتبر المجموع S_n ؛ حيث $S_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n)$
 - احسب S_n ، ثم جد مجموعة الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها $2S_n$ يقبل القسمة على 10.

التمرين الثاني:

- في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقطتين:
 $A(12; 7; -13)$ و $B(3; 1; 2)$ والمستويان (P_1) و (P_2) اللذين معادلتيهما على الترتيب:
 $(P_1): 3x + 2y - 5z - 1 = 0$ و $(P_2): x + y - 2z = 0$
 1. بين أن المستويين (P_1) و (P_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.
 2. أثبت أن النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P_1) .
 3. ليكن (Q) المستوي المعين بالنقطة $C(6; 5; -6)$ والشعاعين $\vec{u}(2; 2; 2)$ و $\vec{v}(-2; 3; 0)$.
 أ - اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستوي (Q) .
 ب - بين أن المستويين (P_1) و (Q) متوازيان.
 ج - تحقق أن $3x + 2y - 5z - 58 = 0$ معادلة ديكرتية للمستوي (Q) .
 د - تحقق أن النقطة I منتصف $[AB]$ تنتمي إلى (Q) واستنتج أن (Q) هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.
 4. لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء والتي تحقق: $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.
 أ - بين أن (S) هي سطح كرة يطلب تعيين عناصرها المميزة.
 ب - استنتج أن المستوي (Q) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

التمرين الثالث:

- نعتبر المثلث القائم والمتساوي الساقين ABC حيث $(\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{2}$.
 لتكن D نظيرة A بالنسبة إلى C ، و S التشابه المباشر الذي يحول D إلى C و C إلى B .
 1. عيّن نسبة وزاوية التشابه المباشر S .
 2. نسمي Ω مركز التشابه المباشر S .
 أ - باستعمال العلاقة $\overline{DC} = \overline{\Omega C} - \overline{\Omega D}$ ، بين أن: $DC^2 = \Omega D^2$.
 ب - استنتج طبيعة المثلث ΩDC .
 3. نضع $T = S \circ S$.
 أ - ما طبيعة التحويل T ؟ عيّن عناصره المميزة.

ب - عيّن صورة النقطة D بالتحويل T .
4. بيّن أن الرباعي $AD\Omega B$ مستطيل.

التمرين الرابع:

I - الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (x-1)e^x$.

1- ادرس تغيّرات الدالة g .

2- بيّن أنه، من أجل كل عدد حقيقي x : $1 + (x-1)e^x \geq 0$.

II - الدالة f معرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي:
$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^x - 1}{x}; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1- أ - بيّن أن f مستمرة على $[0; +\infty[$.

ب - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2- أ - تحقق أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1 + (x-1)e^x}{x^2}$.

ب - استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

III - n عدد طبيعي حيث $n \geq 1$ ؛ f_n الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x$.

و (C_n) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f_n على $]0; +\infty[$.

2- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$.

3- ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) .

4- بيّن أن جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثياتها.

5- أ - بيّن أنه، يوجد عدد حقيقي وحيد α_1 من $]0,3; 0,4[$ بحيث $f_1(\alpha_1) = 0$.

ب - بيّن أنه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ فإن: $f_n(\alpha_1) < 0$ ، ثم برهن أنه يوجد عدد حقيقي

وحيد α_n من $]\alpha_1; 1[$ بحيث $f_n(\alpha_n) = 0$.

6- أ - بالاعتماد على الجزء II - ؛ بيّن أنه، من أجل كل x من $]0; 1[$: $\frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$.

ب - استنتج أنه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$: $\ln(\alpha_n) \geq \frac{1-e}{n}$ ، ثم $\alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$.

ج - جد نهاية المتتالية (α_n) .

التمرين الأول:

I / 1. دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10.

لدينا $3^0 \equiv 1[10]$ ، $3^1 \equiv 3[10]$ ، $3^2 \equiv 9[10]$ أي $3^2 \equiv -1[10]$ ومنه $3^4 \equiv 1[10]$

وعليه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا $3^{4k} \equiv 1[10]$ ، $3^{4k+1} \equiv 3[10]$ ، $3^{4k+2} \equiv 9[10]$ ، $3^{4k+3} \equiv 7[10]$.

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
باقي قسمة 3^n على 10.	1	3	9	7

2. استنتاج باقي قسمة العدد 3^{2015} على 10.

لدينا $2015 = 4 \times 503 + 3$ إذن $3^{2015} \equiv 7[10]$

3. تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $7^{4n+1} + 2011^n + 2009^{2n} + 1$ مضاعف للعدد 10.

لدينا $7 \equiv -3[10]$ ومنه $7^{4n+1} \equiv (-3)^{4n+1}[10]$ أي $7^{4n+1} \equiv -3^{4n+1}[10]$ وعليه $7^{4n+1} \equiv -3[10]$

ولدينا $2011 \equiv 1[10]$ ومنه $2011^n \equiv 1^n[10]$ أي $2011^n \equiv 1[10]$

ولدينا $2009 \equiv -1[10]$ ومنه $2009^{2n} \equiv (-1)^{2n}[10]$ أي $2009^{2n} \equiv 1[10]$

إذن $7^{4n+1} + 2011^n + 2009^{2n} + 1 \equiv -3 + 1 + 1 + 1[10] \equiv 0[10]$ أي $7^{4n+1} + 2011^n + 2009^{2n} + 1 \equiv 0[10]$

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n العدد $7^{4n+1} + 2011^n + 2009^{2n} + 1$ مضاعف للعدد 10.

4. إيجاد مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث: $13^{4n+1} + 3n \equiv 0[10]$.

$13^{4n+1} + 3n \equiv 0[10]$ معناه $3^{4n+1} + 3n \equiv 0[10]$ ومنه $3 + 3n \equiv 0[10]$ أي $3(1+n) \equiv 0[10]$

لدينا العددان 3 و 10 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص $1+n \equiv 0[10]$ يكافئ $n \equiv -1[10]$

أي $n \equiv 9[10]$ وعليه $n \equiv 10k + 9$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

II / 1. حل المعادلة التفاضلية التالية: (1) $y' = (\ln 3)y$

المعادلة (1) من الشكل $y' = ay$ حلولها هي دوال من الشكل $x \mapsto ce^{ax}$

ومنه $y = ce^{x \ln 3}$ أي $y = c \times 3^x$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

2. نسمي f الحل الخاص لهذه المعادلة والذي يحقق $f(0) = 1$ ؛

تبين أن $f(x) = 3^x$.

مع $f(0) = 1$ $f(x) = c \times 3^x$

$f(0) = 1$ معناه $c \times 3^0 = 1$ ومنه $c = 1$ وعليه $f(x) = 3^x$.

3. دراسة تغيرات الدالة f .

لدينا $f(x) = 3^x = e^{x \ln 3}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln 3} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln 3} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$$

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x) = (\ln 3)e^{x \ln 3}$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

4. رقم آحاد العدد $f(1432) + f(2011)$

$$f(1432) + f(2011) = 3^{1432} + 3^{2011}$$

لدينا $1432 = 3 \times 358$ إذن $3^{1432} \equiv 1[10]$ و $2011 = 3 \times 502 + 3$ إذن $3^{2011} \equiv 7[10]$ وعليه $f(1432) + f(2011) \equiv 8[10]$ أي $3^{1432} + 3^{2011} \equiv 1 + 7[10]$ وبالتالي رقم آحاد العدد $f(1432) + f(2011)$ هو 8. رقم آحاد عدد طبيعي هو باقي قسمته على 10.5. نعتبر المجموع S_n ؛ حيث $S_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n)$ - حساب S_n .

$$S_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n) = 3^0 + 3^1 + \dots + 3^n$$

 S_n هو مجموع $(n+1)$ حدا من متتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول 1.

$$S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

إيجاد مجموعة الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها $2S_n$ يقبل القسمة على 10.

$$2S_n \equiv 0[10] \text{ تعني } 3^{n+1} - 1 \equiv 0[10] \text{ وتكافئ } 3^{n+1} \equiv 1[10] \text{ ومنه } n+1 = 4k \text{ أي } n = 4k - 1$$

حيث $k \in \mathbb{N}^*$.التمرين الثاني:في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقطتين: $A(12; 7; -13)$ و $B(3; 1; 2)$ والمستويان (P_1) و (P_2) اللذين معادلتيهما على الترتيب:

$$(P_1): 3x + 2y - 5z - 1 = 0 \text{ و } (P_2): x + y - 2z = 0$$

1. تبين أن المستويين (P_1) و (P_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.لدينا $\vec{n}(3; 2; -5)$ شعاعا ناظما للمستوي (P_1) و $\vec{n}'(1; 1; -2)$ شعاعا ناظما للمستوي (P_2) و $\frac{3}{1} \neq \frac{2}{1}$ إذن الشعاعان $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ غير مرتبطين خطيا ومنه (P_1) و (P_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) .تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) .لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء.

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z - 1 = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \text{ إذا كانت } M \in (\Delta) \text{ فإن إحداثياتها تحقق الجملة}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5t - 1 = 0 \\ -2x - 2y + 4t = 0 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} 3x + 2y - 5t - 1 = 0 \\ x + y - 2t = 0 \end{cases} \text{ وبوضع } z = t \text{ نحصل على}$$

وبجمع المعادلتين نجد $x - t - 1 = 0$ ومنه $x = t + 1$ وبالتعويض نجد $3(t + 1) + 2y - 5t - 1 = 0$ ومنه

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t - 1; (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases} \text{ هو تمثيل وسيطي للمستقيم } (\Delta).$$

2. إثبات أن النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P_1) .

$$\text{لدينا } B \in (P_1) \text{ ومنه } x_B + y_B - 2z_B = 3 + 1 - 2 \times 2 + 0$$

ولدينا $\overrightarrow{AB} = (-9; -6; 15)$ ومنه $\overrightarrow{AB} = -3\vec{n}$ أي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطياً.

إذن B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P_1) .

3. ليكن (Q) المستوي المعين بالنقطة $C(6; 5; -6)$ والشعاعين $\vec{u}(2; 2; 2)$ و $\vec{v}(-2; 3; 0)$.

أ - كتابة تمثيلاً وسيطياً للمستوي (Q) .

لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء.

$$M \in (Q) \text{ إذا وفقط إذا وجد عدنان حقيقيان } \alpha \text{ و } \beta \text{ بحيث } \overrightarrow{CM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

$$\begin{cases} x = 2\alpha - 2\beta + 6 \\ y = 2\alpha + 3\beta + 5 \\ z = 2\alpha - 6 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x - 6 = 2\alpha - 2\beta \\ y - 5 = 2\alpha + 3\beta \\ z + 6 = 2\alpha \end{cases} \text{ ومنه } \alpha \text{ و } \beta \text{ وسيطان حقيقيان.}$$

ب - تبين أن المستويين (P_1) و (Q) متوازيان.

$$(P_1) \text{ و } (Q) \text{ متوازيان معناه } \vec{n} \text{ هو شعاع ناظمي لـ } (Q) \text{ أي } \vec{n} \perp \vec{u} \text{ و } \vec{n} \perp \vec{v}$$

لدينا $\vec{n} \cdot \vec{u} = 3 \times 2 + 2 \times 2 - 5 \times 2 = 0$ و $\vec{n} \cdot \vec{v} = 3 \times (-2) + 2 \times 3 - 5 \times 0 = 0$ وهذا يعني $\vec{n} \perp \vec{u}$ و $\vec{n} \perp \vec{v}$ ومنه المستويان (P_1) و (Q) متوازيان.

ج - التحقق أن $3x + 2y - 5z - 58 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (Q) .

بما أن $3(2\alpha - 2\beta + 6) + 2(2\alpha + 3\beta + 5) - 5(2\alpha - 6) - 58 = 0$ فإن $3x + 2y - 5z - 58 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (Q) .

د - التحقق أن النقطة I منتصف $[AB]$ تنتمي إلى (Q) .

$$\text{لدينا } I\left(\frac{15}{2}; 4; -\frac{11}{2}\right) \text{ و } 3x_I + 2y_I - 5z_I - 58 = \frac{45}{2} + 8 - \frac{55}{2} - 58 = 0 \text{ ومنه } I \in (Q).$$

استنتاج أن (Q) هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

لدينا $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطياً و $\vec{n}$ شعاع ناظمي لـ (Q) إذن $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي لـ (Q) و بما أن $I \in (Q)$ فإن (Q) هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

4. لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء والتي تحقق: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

أ - تبين أن (S) هي سطح كرة يطلب تعيين عناصرها المميزة.

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \text{ تعني } (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 0 \text{ وتكافئ } (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = 0$$

وتكافئ $MI^2 - IA^2 = 0$ أي $MI = IA$ إذن (S) هي سطح الكرة التي مركزها I ونصف قطرها

$$IA = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{81+36+225}}{2} = \frac{\sqrt{342}}{2} = \frac{3\sqrt{38}}{2}$$

ب - استنتاج أن المستوي (Q) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

$d(I; (Q)) = 0$ لأن $I \in (Q)$ ومنه (Q) يقطع (S) وفق دائرة كبيرة في الكرة (S) أي دائرة مركزها I

$$\text{ونصف قطرها } r = \frac{3\sqrt{38}}{2}$$

التمرين الثالث:

نعتبر المثلث القائم والمتساوي الساقين ABC حيث $(\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{2}$.

لتكن D نظيرة A بالنسبة إلى C، و S التشابه المباشر الذي يحول D إلى C و C إلى B

1. تعيين نسبة وزاوية التشابه المباشر S.

لدينا $S(D) = C$ و $S(C) = B$

إذن نسبة التشابه هي $k = \frac{BC}{CD}$ وزاويته هي $\theta = (\overline{CD}; \overline{BC})$

لدينا حسب نظرية فيثاغورس $BC^2 = AB^2 + AC^2$ لكن $AB = AC = CD$

إذن $BC^2 = CD^2 + CD^2 = 2CD^2$ ومنه $\frac{BC^2}{CD^2} = 2$ أي $\frac{BC}{CD} = \sqrt{2}$

وعليه نسبة التشابه S هي $k = \sqrt{2}$ ولدينا $(\overline{CD}; \overline{BC}) = (\overline{CA}; \overline{CB}) = \frac{\pi}{4}$ وعليه

زاوية التشابه المباشر S هي $\frac{\pi}{4}$.

2. نسمي Ω مركز التشابه المباشر S.

أ - باستعمال العلاقة $\overline{DC} = \overline{\Omega C} - \overline{\Omega D}$ ، تبين أن: $DC^2 = \Omega D^2$.

$$\overline{DC}^2 = (\overline{\Omega C} - \overline{\Omega D})^2 = \Omega C^2 + \Omega D^2 - 2\overline{\Omega C} \cdot \overline{\Omega D} = \Omega C^2 + \Omega D^2 - 2(\Omega C \times \Omega D \cdot \cos(\overline{\Omega D}; \overline{\Omega C}))$$

لدينا $S(D) = C$ معناه $\Omega C = \sqrt{2}\Omega D$ و $(\overline{\Omega D}; \overline{\Omega C}) = \frac{\pi}{4}$

$$DC^2 = 2\Omega D^2 + \Omega D^2 - 2\left(\sqrt{2}\Omega D \times \Omega D \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\Omega D^2 - 2\Omega D^2 = \Omega D^2$$

ب - استنتاج طبيعة المثلث ΩDC .

لدينا $DC^2 = \Omega D^2$ معناه $DC = \Omega D$ ومنه المثلث ΩDC متساوي الساقين رأسه الأساسي D.

زيادة على هذا لدينا $(\overline{\Omega D}; \overline{\Omega C}) = \frac{\pi}{4}$ إذن $(\overline{C\Omega}; \overline{CD}) = \frac{\pi}{4}$ وعليه $(\overline{DC}; \overline{D\Omega}) = \frac{\pi}{2}$

أي المثلث ΩDC قائم في D ومتساوي الساقين.

3. نضع $T = S \circ S$.

أ - طبيعة التحويل T و تعيين عناصره المميزة.

التحويل T هو تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}^2$ أي نسبته 2 وزاويته $2 \times \frac{\pi}{4}$ أي زاويته $\frac{\pi}{2}$ ومركزه Ω .

ب - تعيين صورة النقطة D بالتحويل T .

لدينا $S(C) = B$ و $S(D) = C$ ومنه $S(S(D)) = B$ أي $S(S(D)) = B$ إذن $T(D) = B$

4. تبين أن الرباعي $AD\Omega B$ مستطيل.

$$\text{لدينا } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} ; (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{D\Omega}) = \frac{\pi}{2} ; (\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{D\Omega}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ولدينا } T(D) = B \text{ معناه } (\overrightarrow{\Omega D}; \overrightarrow{\Omega B}) = \frac{\pi}{2}$$

بما أن الرباعي $AD\Omega B$ فيه ثلاث زوايا قائمة فهو مستطيل.

التمرين الرابع:

I- الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (x-1)e^x$.

1- دراسة تغيرات الدالة g .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x-1 = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^x = +\infty$$

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$$g'(x) = e^x + e^x(x-1) = xe^x$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة x على $\mathbb{R}$.

$$\text{من أجل } x \in]-\infty; 0[, g'(x) < 0$$

$$\text{من أجل } x \in]0; +\infty[, g'(x) > 0 \text{ و } g'(0) = 0$$

إذن الدالة g متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 0]$ و متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	0	-1	$+\infty$

2- تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x : $1 + (x-1)e^x \geq 0$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) \geq -1$ معناه $(x-1)e^x \geq -1$ أي $(x-1)e^x + 1 \geq 0$

$$\text{II- الدالة } f \text{ معرفة على } [0; +\infty[\text{ كما يلي: } \begin{cases} f(x) = \frac{e^x - 1}{x}; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1- أ - تبين أن f مستمرة على $[0; +\infty[$.

لدينا الدالة $e^x - 1 \mapsto x$ مستمرة على المجال $[0; +\infty[$ والدالة $x \mapsto x$ مستمرة على المجال $[0; +\infty[$

وهي لا تنعدم على هذا المجال إذن حاصل قسمتهما يكون دالة مستمرة على المجال $[0; +\infty[$ أي الدالة f

مستمرة على المجال $[0; +\infty[$.

ولدينا $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 = f(0)$ ومنه الدالة f مستمرة على يمين 0. وبالتالي الدالة f مستمرة على $[0; +\infty[$.

ب - حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} = +\infty$$

2- أ - التحقق أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1 + (x-1)e^x}{x^2}$.

ليكن $x \in]0; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2}$$

ب - استنتاج اتجاه تغير الدالة f .

لدينا من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $(x-1)e^x + 1 > 0$ و $x^2 > 0$ إذن من أجل كل $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	1	$+\infty$

III - n عدد طبيعي حيث $n \geq 1$ ؛ f_n الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$: $f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x$.

و (C_n) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- دراسة اتجاه تغير الدالة f_n على $]0; +\infty[$.

الدالة f_n هي مجموع دالتين متزايدتين تماماً على المجال $]0; +\infty[$ (الدالة f والدالة $x \mapsto n \ln x$) إذن الدالة f_n متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$.

2- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} n \ln x = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} n \ln x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x = +\infty$$

3- دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) .

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + (n+1) \ln x - \left[\frac{e^x - 1}{x} + n \ln x \right] = n \ln x + \ln x - \ln x = \ln x$$

$$x = 1 \text{ أي } \ln x = 0 \text{ تعني } f_{n+1}(x) - f_n(x) = 0$$

$$x > 1 \text{ أي } \ln x > 0 \text{ تعني } f_{n+1}(x) - f_n(x) > 0$$

$$0 < x < 1 \text{ أي } \ln x < 0 \text{ تعني } f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$$

x	0	1	$+\infty$
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$		0	+
الوضعية النسبية	(C_n) تحت (C_{n+1})		(C_n) فوق (C_{n+1})

(C_n) و (C_{n+1}) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(1; e-1)$.

4- تبين أن جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثياتها.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $f_n(1) = e-1$ وعليه $B(1; e-1)$.

5- أ - تبين أنه، يوجد عدد حقيقي وحيد α_1 من $]0, 3; 0, 4[$ بحيث $f_1(\alpha_1) = 0$.

الدالة f_1 مستمرة ومتزايدة تماماً على $]0; +\infty[$ وبالأخص على المجال $]0, 3; 0, 4[$ و $f_1(0.3) \approx -0.03$ و $f_1(0.4) \approx 0.31$ ، أي $f_1(0.3) \times f_1(0.4) < 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α_1 من المجال $]0, 3; 0, 4[$ بحيث $f_1(\alpha_1) = 0$.

ب - تبين أنه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ فإن: $f_n(\alpha_1) < 0$.

$$f_n(\alpha_1) - f_1(\alpha_1) = \frac{e^{\alpha_1} - 1}{\alpha_1} + n \ln \alpha_1 - \left[\frac{e^{\alpha_1} - 1}{\alpha_1} + \ln \alpha_1 \right] = n \ln \alpha_1 - \ln \alpha_1 = (n-1) \ln \alpha_1$$

$$f_n(\alpha_1) = (n-1) \ln \alpha_1 \text{ ومنه } f_1(\alpha_1) = 0$$

لدينا من أجل كل $n > 1$ ، $n-1 > 0$ وبما أن $0 < \alpha_1 < 1$ فإن $\ln \alpha_1 < 0$ إذن $(n-1) \ln \alpha_1 < 0$ أي $f_n(\alpha_1) < 0$ (يمكن استعمال عدة طرق).

تبين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من $]\alpha_1; 1[$ بحيث $f_n(\alpha_n) = 0$.

الدالة f_n مستمرة ومتزايدة تماماً على $]0; +\infty[$ وبالأخص على $]\alpha_1; 1[$ و $f_n(1) = e-1$ ولدينا $f_n(\alpha_1) < 0$ إذن $f_n(1) \times f_n(\alpha_1) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من $]\alpha_1; 1[$ بحيث $f_n(\alpha_n) = 0$.

6- أ - تبين أنه، من أجل كل x من $]0; 1[$: $\frac{e^x - 1}{x} \leq e-1$.

لدينا الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]0; 1[$ إذن من أجل كل $x \in]0; 1[$ لدينا $f(x) \leq f(1)$

$$\text{ومنه } f(x) \leq e-1 \text{ أي } \frac{e^x - 1}{x} \leq e-1$$

ب - استنتاج أنه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$: $\ln(\alpha_n) \geq \frac{1-e}{n}$ ، ثم $\alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$.

$$\text{لدينا } \alpha_n \in]0; 1[\text{ ومنه } \frac{e^{\alpha_n} - 1}{\alpha_n} \leq e-1$$

$$\frac{e^{\alpha_1} - 1}{\alpha_1} = -n \ln \alpha_1 \text{ ومنه } \frac{e^{\alpha_1} - 1}{\alpha_1} + n \ln \alpha_1 = 0 \text{ معناه } f_n(\alpha_n) = 0 \text{ لدينا}$$

$$\text{إذن } -n \ln \alpha_1 \leq e - 1 \text{ وتكافئ } \ln \alpha_1 \geq \frac{1-e}{n} \text{ وبالتالي } \alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}.$$

جـ - إيجاد نهاية المتتالية (α_n) .

$$\text{لدينا } e^{\frac{1-e}{n}} \leq \alpha_n \leq 1 \text{ لدينا } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1-e}{n}} = 1 \text{ إذن حسب النهايات بالمقارنة نستنتج } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1.$$

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول:

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقطتين:

$$A(2; -5; 4) \text{ و } B(3; -4; 6)$$

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 4+t \end{cases}$$

والمستقيم (Δ) المعروف بالتمثيل الوسيطى التالي:

- 1- أ) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) المار من النقطتين A و B .
ب) ادرس الوضع النسبي للمستقيمين (Δ) و (D) .
2- (P) المستوي الذي يشمل (D) ويوازي (Δ) .
- برهن أن $\vec{n}(3; 1; -2)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) ؛ ثم عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (P) .
3- M نقطة كيفية من (Δ) و N نقطة كيفية من (D) .
أ) عيّن إحداثيات النقطتين M و N بحيث يكون المستقيم (MN) عموديا على كل من (Δ) و (D) .
ب) أحسب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ) والمستوي (P) .

التمرين الثانى:

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B و C ذات
اللاحقات: $z_A = -i$ ، $z_B = i$ و $z_C = -4i$ على الترتيب.

1. نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z ، $(z \neq -i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z' = \frac{iz - 4}{z + i}$

- أ - عيّن (E) مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون z' تخيليا صرفا.
- ب - عيّن (E') مجموعة النقط M بحيث يكون z' حقيقيا.

2. أ - بين أنه، إذا كان $M \neq A$ فإن $OM' = \frac{CM}{AM}$.

ب - استنتج أنه إذا كانت M' تنتمي إلى الدائرة المثلثية فإن M تنتمي إلى مستقيم (Δ) يُطلب تعيينه.

3. أ - بين أنه من أجل كل عدد مركب z يختلف عن $-i$ ؛ $(z' - i)(z + i) = -3$ واستنتج أن $BM' \cdot AM = 3$

- ب - بين أنه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها A ونصف قطرها 3 فإن M' تنتمي إلى دائرة (C') يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

التمرين الثالث:

1. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = \frac{3}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1}$$

أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 2$.

ب - بين أن المتتالية (u_n) متزايدة، ثم استنتج أنها متقاربة.

2. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \ln(u_n - 1)$

أ - بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب - اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

ج - نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = (u_n - 1) \times (u_n - 1) \times \dots \times (u_n - 1)$

اكتب P_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

التمرين الرابع:

I - الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (1 + ax^2)e^{bx}$ ؛ (C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (T) مماس (C_g) في النقطة ذات

الفصلة 0.

1. بقراءة بيانية عيّن $g(-1)$ ، $g(0)$ و $g'(0)$.

2. اكتب معادلة للمماس (T) .

3. باستعمال المعطيات السابقة بين أن:

$$g(x) = (1 - x^2)e^{-x}$$

II - الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x) = (1 + x)^2 e^{-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في

معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

2. أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أ - عيّن دون حساب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$ وفسّر النتيجة هندسياً.

ب - اكتب معادلة (Δ) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفصلة 0.

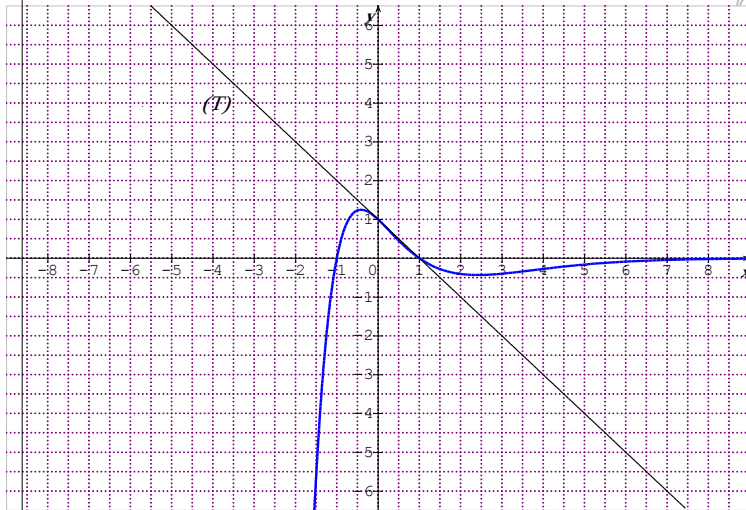
ج - ارسم (Δ) و (C_f) .

4. عين بياناً، قيم الوسيط الحقيقي m ، حتى تقبل المعادلة $f(x) = mx + 1$ حلاً وحيداً.

III - الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = f(x^2)$

أ - باستعمال مشتقة مركب دالتين، عيّن اتجاه تغير الدالة h .

ب - شكل جدول تغيرات الدالة h .



الموضوع الثاني:التمرين الأول:

- في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط: $A(0;0;2)$ ، $B(0;0;-4)$ ، $C(\sqrt{5};0;1)$ ، $D(\sqrt{5};0;-3)$ و $E(0;0;-1)$ ؛ وليكن (S) سطح الكرة الذي مركزه E ونصف قطره 3.
- (1) أ - بين أن النقط A, B و C تعين مستويا.
ب - هل النقط A, B, C و D تنتمي إلى نفس المستوي؟ برّر.
ج - اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
 - (2) أ - اكتب المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S) ، ثم تحقق أن النقط A, B, C و D تنتمي إلى (S) .
ب - عين نقط تقاطع (S) مع محاور الإحداثيات.
 - (3) ادرس حسب قيم العدد الحقيقي λ الوضع النسبي للسطح (S) والمستوي (P_λ) ذو المعادلة $z = \lambda$.
 - (4) عين مركز ونصف قطر الدائرة مقطع سطح الكرة (S) بالمستوي (P_{-2}) .

التمرين الثاني:

- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 14$ و من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 5u_n - 6$.
- 1- احسب u_1, u_2, u_3, u_4 .
ماذا تخمن بالنسبة إلى الرقمين الأخيرين للعدد u_n ؟
 - 2- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+2} \equiv u_n [4]$ ، واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي k : $u_{2k} \equiv 2 [4]$ و $u_{2k+1} \equiv 0 [4]$.
 - 3- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2u_n = 5^{n+2} + 3$ ، واستنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $2u_n \equiv 28 [100]$
 - 4- عين رقمي الآحاد والعشرات للعدد u_n وذلك حسب قيم n .
 - 5- برهن أن $PGCD(u_n, u_{n+1})$ ثابت ثم عين قيمته.

التمرين الثالث:

- في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ وحدة الرسم $2cm$ نعتبر النقطتين A و B صورتين العدديين 1 و $3+2i$ على الترتيب ونسمي f التحويل النقطي التي يحول النقطة M تختلف عن A ولاحتقتها z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = \frac{z-1+2i}{z-1}$
- (1) احسب لاحقتي النقطتين O', B' صورتين النقطتين O, B على الترتيب بالتحويل f ، ثم أنشئ A, O', B' و B .
 - (2) أ) من أجل كل عدد مركب $z \neq 1$ ؛ احسب الجداء $(z'-1)(z-1)$.
ب) بين أنه مهما تكن النقطة M تختلف عن A فإن: $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ و $AM \cdot AM' = 2$
 - (3) بين أنه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها A وتشمل O فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (C') يُطلب إيجاد مركزها ونصف قطرها.

4 أ - احسب قياسا للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overline{AB})$.

ب - ليكن (d) نصف المستقيم المفتوح الذي حدّه النقطة A و يشمل B ، بين أنه إذا كانت النقطة M التي تختلف عن A تنتمي إلى (d) فإن M' تنتمي إلى نصف مستقيم يطلب تحديده.

ج - نسمي E النقطة التي تنتمي إلى $(d) \cap (C)$ ، ما هو موضع النقطة E' صورة النقطة E بالتحويل f

التمرين الرابع:

I- g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2 - xe^x$

1. ادرس تغيّرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

2. بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ ، ثم تحقّق أن: $0.8 < \alpha < 0.9$.

3. عيّن، حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{2x+2}{e^x+2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. بيّن أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

2. أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب) بيّن أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y = x + 1$ ، مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) .

3. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') ، حيث (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

4. أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغيّر الدالة f .

ب) بيّن أن: $f(\alpha) = \alpha$ ، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

5. ارسم (Δ) ، (Δ') و (C_f) .

6. ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $f(x) = f(m)$.

III- (U_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $U_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq U_n < \alpha$.

(2) باستعمال (Δ) و (C_f) مثل على محور الفواصل الحدود: U_0 ، U_1 و U_2 ، ثم خمن اتجاه تغيّر (U_n)

(3) برهن أن المتتالية (U_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها.

حل الموضوع الأول:

التمرين الأول:

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقطتين:

$$A(2; -5; 4) \text{ و } B(3; -4; 6)$$

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 4+t \end{cases}$$

والمستقيم (Δ) المعروف بالتمثيل الوسيط التالي:

1- أ) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (D) المار من النقطتين A و B .

لدينا $\overrightarrow{AB}(1; 1; 2)$ شعاع توجيه للمستقيم (D) .

$M(x; y; z) \in (D)$ معناه $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ حيث λ عدد حقيقي.

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -5 + \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}$$

ومنه

ب) دراسة الوضع النسبي للمستقيمين (Δ) و (D) .

لدينا $\overrightarrow{AB}(1; 1; 2)$ شعاع توجيه للمستقيم (D) و $\vec{u}(1; -1; 1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) .

و $\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}$ غير مرتبطين خطياً ومنه المستقيمان (Δ) و (D) غير متوازيين.

ندرس تقاطع (Δ) و (D) .

$$\begin{cases} 1+t = 2+\lambda \dots\dots\dots(1) \\ 2-t = -5+\lambda \dots\dots\dots(2) \\ 4+t = 4+2\lambda \dots\dots\dots(3) \end{cases}$$

ندرس وجود ثنائية t و λ من الأعداد الحقيقية تحقق الجملة

$$\begin{cases} 1+t = 5 \\ 2-t = -2 \\ 4+t = 10 \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد $3 = -3 + 2\lambda$ ومنه $\lambda = 3$ وبالتعويض في جميع المعادلات نجد

$$\begin{cases} t = 4 \\ t = 4 \\ t = 6 \end{cases}$$

ومنه وهذا مستحيل إذن (Δ) و (D) غير متقاطعين وبالتالي فهما ليسا من نفس المستوي

2- (P) المستوي الذي يشمل (D) ويوازي (Δ) .

- تبين أن $\vec{n}(3; 1; -2)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) ؛

لدينا $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}$ شعاعي توجيه للمستوي (P) وهما وغير مرتبطين خطياً.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \times 1 + 1 \times 1 - 2 \times 2 = 0 \text{ و } \vec{n} \cdot \vec{u} = 3 \times 1 + 1 \times (-1) - 2 \times 1 = 0$$

ومنه الشعاع $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}$ أي الشعاع $\vec{n}$ ناظمي للمستوي (P) .

تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (P).

المستوي (P) له معادلة من الشكل $3x + y - 2z + d = 0$ ولدنا $A \in (P)$ تعني $6 - 5 - 8 + d = 0$ أي $d = 7$ وعليه $3x + y - 2z + 7 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (P).

3- M نقطة كيفية من (Δ) و N نقطة كيفية من (D).

أ) تعيين إحداثيات النقطتين M و N بحيث يكون المستقيم (MN) عموديا على كل من (Δ) و (D).

لدنا $M(1+t; 2-t; 4+t)$ و $N(2+\lambda; -5+\lambda; 4+2\lambda)$ ومنه $\overrightarrow{MN}(1+\lambda-t; -7+\lambda+t; 2\lambda-t)$ (MN) عمودي على (Δ) يكافئ $\overrightarrow{MN} \cdot \vec{u} = 0$ ويكافئ $1(1+\lambda-t) - 1(-7+\lambda+t) + 1(2\lambda-t) = 0$ أي $2\lambda - 3t + 8 = 0$.(MN) عمودي على (D) يكافئ $\overrightarrow{MN} \cdot \vec{AB} = 0$ ويكافئ $1(1+\lambda-t) + 1(-7+\lambda+t) + 2(2\lambda-t) = 0$ ومنه $6\lambda - 2t - 6 = 0$ أي $3\lambda - t - 3 = 0$.إذن نحصل على الجملة
$$\begin{cases} 2\lambda - 3t + 8 = 0 \\ 3\lambda - t - 3 = 0 \end{cases}$$
 تكافئ
$$\begin{cases} 2\lambda - 3t + 8 = 0 \\ -9\lambda + 3t + 9 = 0 \end{cases}$$
 بجمع المعادلتين نجد $-7\lambda + 17 = 0$ أي $\lambda = \frac{17}{7}$ وبالتعويض نجد $\frac{51}{7} - t - 3 = 0$ أي $t = \frac{30}{7}$ وعليه $M\left(1+\frac{30}{7}; 2-\frac{30}{7}; 4+\frac{30}{7}\right)$ أي $M\left(\frac{37}{7}; \frac{-16}{7}; \frac{58}{7}\right)$ و $N\left(2+\frac{17}{7}; -5+\frac{17}{7}; 4+2\left(\frac{17}{7}\right)\right)$ أي $N\left(\frac{31}{7}; \frac{-18}{7}; \frac{62}{7}\right)$.

ب) حساب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ) والمستوي (P).

$$d(M; (P)) = \frac{|3(1+t) + (2-t) - 2(4+t) + 7|}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{4}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{7}$$

التمرين الثاني:في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A، B و C ذاتاللاحقات: $z_A = -i$ ، $z_B = i$ و $z_C = -4i$ على الترتيب.1. نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقها z ، ($z \neq -i$) النقطة M' لاحقها z' حيث: $z' = \frac{iz - 4}{z + i}$ أ - تعيين (E) مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون z' تخيليا صرفا.لدنا $z' = \frac{iz - 4}{z + i} = \frac{i(z + 4i)}{z + i} = \frac{i(z - z_C)}{z - z_A}$ ومنه

$$\arg(z') = \arg i + \arg\left(\frac{z - z_C}{z - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{CM})$$

 z' تخيليا صرفا معناه $z' = 0$ أي $z = z_C$ أو $\arg(z') = \frac{\pi}{2} + k\pi$ و $z \neq -i$ $M \in (E)$ معناه $M = C$ أو $\frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{CM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ و $M \neq A$.

أي $M = C$ أو $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{CM}) = k\pi$ و $M \neq A$.

بالتالي النقط A, C و M في استقامة إذن (E) هي المستقيم (AC) باستثناء النقطة A .

ب - تعيين (E') مجموعة النقط M بحيث يكون z' حقيقيا.

z' حقيقيا معناه $z' = 0$ أي $z = z_C$ أو $\arg(z') = k\pi$ و $z \neq -i$

$M \in (E')$ معناه $M = C$ أو $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{CM}) = k\pi + \frac{\pi}{2}$ و $M \neq A$.

أي $M = C$ أو $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{CM}) = -\frac{\pi}{2} + k\pi$ و $M \neq A$.

إذن (E') هي الدائرة التي قطرها $[AC]$ باستثناء النقطة A .

2. أ - تبين أنه، إذا كان $M \neq A$ فإن $OM' = \frac{CM}{AM}$.

$$OM' = \frac{CM}{AM} \text{ أي } |z'| = \frac{|i||z - z_C|}{|z - z_A|} \text{ ويكافئ } |z'| = \frac{|i(z - z_C)|}{|z - z_A|} \text{ معناه } z' = \frac{i(z - z_C)}{z - z_A}$$

ب - استنتاج أنه إذا كانت M' تنتمي إلى الدائرة المثلثية فإن M تنتمي إلى مستقيم (Δ) يُطلب تعيينه.

M' تنتمي إلى الدائرة المثلثية معناه $OM' = 1$ ومنه $1 = \frac{CM}{AM}$ أي $AM = CM$ وبالتالي M تنتمي إلى

المستقيم (Δ) محور القطعة $[AC]$.

3. أ - بين أنه من أجل كل عدد مركب z ، $(z' - i)(z + i) = -3$ ؛ $(z \neq -i)$

$$\text{لدينا } (z' - i)(z + i) = -3 \text{ ومنه } z' - i = \frac{iz - 4}{z + i} - i = \frac{iz - 4 - iz + 1}{z + i} = \frac{-3}{z + i}$$

استنتاج أن $BM' \cdot AM = 3$

لدينا $(z' - i)(z + i) = -3$ معناه $|(z' - i)(z + i)| = 3$ ويكافئ $|z' - i| \times |z + i| = 3$ أي

$$BM' \cdot AM = 3$$

ب - تبين أنه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها A ونصف قطرها 3 فإن M' تنتمي إلى

دائرة (C') يـطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

$M \in (C)$ معناه $AM = 3$ ومنه $BM' \times 3 = 3$ أي $BM' = 1$ وبالتالي M' تنتمي إلى الدائرة (C')

التي مركزها B وطول نصف قطرها 1.

التمرين الثالث:

1. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = \frac{3}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1}$$

أ - برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 2$.

لدينا $1 < u_0 < 2$ إذن خاصية الإبتداء صحيحة.

ليكن n عددا طبيعيا.

نفرض أن $1 < u_n < 2$ ومنه $0 < u_n - 1 < 1$ ومعناه $0 < \sqrt{u_n - 1} < 1$ (لأن الدالة الجذر متزايدة تماما)

ويكافئ $1 < u_{n+1} < 2$ أي $0 + 1 < 1 + \sqrt{u_n - 1} < 1 + 1$
 إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل $n \in \mathbb{N} : 1 < u_n < 2$.

ب - تبين أن المتتالية (u_n) متزايدة .

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \sqrt{u_n - 1} - u_n = \sqrt{u_n - 1} - (u_n - 1)$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{[\sqrt{u_n - 1} - (u_n - 1)][\sqrt{u_n - 1} + (u_n - 1)]}{\sqrt{u_n - 1} + (u_n - 1)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - 1 - (u_n - 1)^2}{\sqrt{u_n - 1} + (u_n - 1)} = \frac{(u_n - 1)(1 - (u_n - 1))}{\sqrt{u_n - 1} + (u_n - 1)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(-u_n + 2)}{\sqrt{u_n - 1} + (u_n - 1)}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 < u_n < 2$

ومنه $u_n - 1 > 0$ و $\sqrt{u_n - 1} > 0$ أي $\sqrt{u_n - 1} + u_n - 1 > 0$

ولدينا $u_n < 2$ معناه $-u_n > -2$ أي $-u_n + 2 > 0$ إذن $(u_n - 1)(-u_n + 2) > 0$

وعليه $\frac{(u_n - 1)(-u_n + 2)}{\sqrt{u_n - 1} + (u_n - 1)} > 0$ أي $u_{n+1} - u_n > 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماماً.

استنتاج أنها متقاربة.

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 4 فهي متقاربة.

تنبيه: المتتالية (u_n) ليست بالضرورة متقاربة نحو العدد 4 لأن هذه المبرهنة لا تسمح لنا بمعرفة نهاية المتتالية

2. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \ln(u_n - 1)$

أ - تبين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln(1 + \sqrt{u_n - 1} - 1) = \ln(\sqrt{u_n - 1}) = \ln(u_n - 1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln(u_n - 1) = \frac{1}{2} v_n$$

$$v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln\left(\frac{3}{2} - 1\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{وحدها الأول } \frac{1}{2} \quad \text{متتالية هندسية أساسها } \frac{1}{2}$$

ب - كتابة كلا من v_n و u_n بدلالة n ،

$$v_n = -\ln 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

كتابة u_n بدلالة n .

لدينا $v_n = \ln(u_n - 1)$ معناه $u_n - 1 = e^{v_n}$ أي $u_n = e^{v_n} + 1$

$$u_n = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n \ln \frac{1}{2}} + 1 = e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n} + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} + 1$$

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}\right)^t = 1 \text{ ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ لدينا}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} + 1 = 2 \text{ عليه}$$

ج - نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = (u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1)$ - كتابة P_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

$$\text{لدينا } u_n - 1 = e^{v_n}$$

$$P_n = (u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1) = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \dots \times e^{v_n} = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_n}$$

بما أن (v_n) متتالية هندسية فإن:

$$\begin{aligned} v_0 + v_1 + \dots + v_n &= v_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = (-\ln 2) \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{-\frac{1}{2}} \right) = 2 \ln 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) \\ &= (\ln 4) \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) \end{aligned}$$

$$\text{إذن } P_n = e^{(\ln 4) \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0 \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{(\ln 4) \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right)} = e^{\ln 4} = 4$$

التمرين الرابع:I- g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (1 + ax^2)e^{bx}$ ؛ (C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (T) مماس (C_g) في النقطة ذات الفاصلة 0.1. تعيين $g(-1)$ ، $g(0)$ و $g'(0)$.

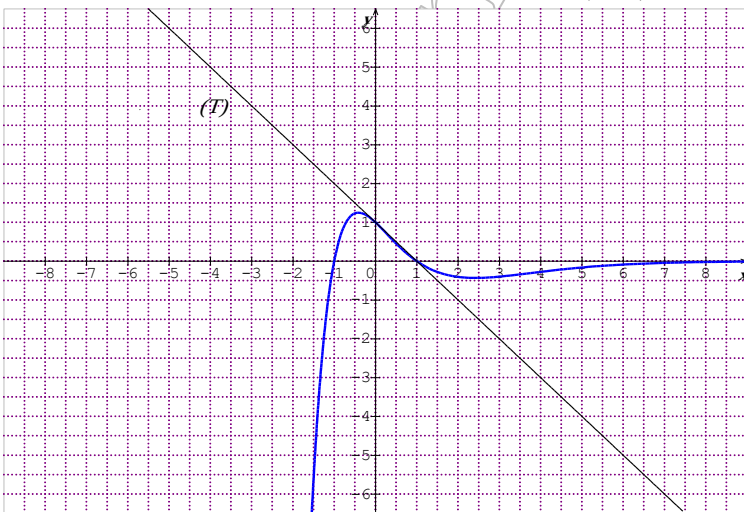
$$g(0) = 1, g(-1) = 0$$

 $g'(0)$ هو معامل توجيه المماس (T) .

$$g'(0) = \frac{1-0}{0-1} = -1$$

2. كتابة معادلة للمماس (T) .

$$\text{ومنه } y = g'(0)(x - 0) + g(0)$$



$$y = -x + 1 \text{ أي } y = -1(x - 0) + 1$$

3. باستعمال المعطيات السابقة تبين أن:

$$g(x) = (1 - x^2)e^{-x}$$

لدينا $g(-1) = 0$ معناه $e^{-b}(1+a) = 0$ ويكافئ $1+a = 0$ أي $a = -1$

$$\text{ومنه } g(x) = (1 - x^2)e^{bx}$$

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $g'(x) = -2xe^{bx} + be^{bx}(1 - x^2) = e^{bx}(-bx^2 - 2x + b)$

$$g'(0) = -1 \text{ معناه } e^{b \times 0}(-b \times 0 - 2 \times 0 + b) = -1 \text{ أي } b = -1$$

$$\text{وعليه } g(x) = (1 - x^2)e^{-x}$$

II- الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = (1 + x)^2 e^{-x} \text{ و } (C_f) \text{ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس } (O; \vec{i}, \vec{j})$$

1. حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + x)^2 e^{-x} = +\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + x)^2 = +\infty$$

تبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x + 1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{e^x} + 2\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} \right) = 0$$

2. أ - تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$

$$f'(x) = 2(x+1)e^{-x} - e^{-x}(x+1)^2 = e^{-x}(x+1)(2-x-1) = e^{-x}(x+1)(1-x)$$

$$f'(x) = e^{-x}(1-x^2) = g(x)$$

ب - استنتاج اتجاه تغير الدالة f ،

إشارة $g(x)$ من البيان كالتالي:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

وبالتالي الدالة f متناقصة تماماً على كل من المجالين $]-\infty; -1]$ و $[1; +\infty[$ و متزايدة تماماً على المجال $[-1; 1]$

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		$\frac{4}{e}$		0	0

3. أ - تعيين دون حساب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$ وفسر النتيجة هندسيا.

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ وبالإخص عند 0 ولدينا:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = g'(0) = 1$$

عند النقطة $A(0;1)$ معامل توجيهه يساوي 1.

ب - كتابة معادلة (Δ) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$y = 1(x - 0) + 1 \text{ أي } y = x + 1$$

ج - رسم (Δ) و (C_f) .

4. تعيين بيانيا، قيم الوسيط الحقيقي m ، حتى

تقبل المعادلة $f(x) = mx + 1$ حلا وحيدا.

إذا كان $m > 1$ المعادلة تقبل حلا واحدا معدوما

III - الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب:

$$h(x) = f(x^2)$$

أ - باستعمال مشتقة مركب دالتين، عيّن اتجاه تغير

الدالة h .

الدالة h تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$h'(x) = 2xf'(x^2) = 2x(1 - x^4)e^{-x^2} = 2x(1 - x^2)(1 + x^2)e^{-x^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $2(1 + x^2)e^{-x^2} > 0$ ومنه إشارة $h'(x)$ هي نفس إشارة $x(1 - x^2)$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	-	-	0	+	+
$1 - x^2$	-	0	+	+	-
$h'(x)$	+	0	-	+	-

الدالة h متزايدة تماما على كل من $[-\infty; -1]$ و $[0; 1]$ ومتناقصة تماما على كل من $[-1; 0]$ و $[1; +\infty[$.

ب - جدول تغيرات الدالة h .

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$h'(x)$		0	0	0	
$h(x)$		$\frac{4}{e}$		$\frac{4}{e}$	
	0	↗ ↘	↗ ↘	↗ ↘	0

الموضوع الثاني:التمرين الأول:

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط: $A(0;0;2)$ ، $B(0;0;-4)$ ، $C(\sqrt{5};0;1)$ ، $D(\sqrt{5};0;-3)$ و $E(0;0;-1)$ ؛ وليكن (S) سطح الكرة الذي مركزه E ونصف قطره 3.

(1) أ - تبين أن النقط A ، B و C تعين مستويا.

$\overrightarrow{AB}(0;0;-6)$ ، $\overrightarrow{AC}(\sqrt{5};0;-1)$ لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا أي النقط A ، B و C تعين مستويا.

ب - هل النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس المستوي؟ برّر.

النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس المستوي معناه يوجد عدنان حقيقيان α و β بحيث

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

إحداثيات الشعاع $\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ هي $(\sqrt{5}\beta; 0; -6\alpha - \beta)$ و $\overrightarrow{AD}(\sqrt{5}; 0; -5)$

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{2}{3}, 1\right) \text{ وعليه } \begin{cases} \beta = 1 \\ 0 = 0 \\ \alpha = \frac{2}{3} \end{cases} \begin{cases} \sqrt{5} = \sqrt{5}\beta \\ 0 = 0 \\ -5 = -6\alpha - \beta \end{cases} \text{ لدينا إذن يكفي}$$

وبالتالي النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس المستوي.

ملاحظة: يمكن ملاحظة أن النقط A ، B ، C و D لها نفس الترتيبية فهي تنتمي إلى نفس المستوي.

ج - كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

لدينا النقط A ، B ، C لها نفس الترتيبية 0 إذن فهي تنتمي للمستوي الذي معادلته $y = 0$ أي $y = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

(2) أ - كتابة المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S) ، ثم تحقق أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى (S) .
لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء.

$$M \in (S) \text{ معناه } EM = 3 \text{ وكافئ } \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z+1)^2} = 3 \text{ أي } x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$$

وعليه $x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 8 = 0$ هي المعادلة الديكارتية لـ (S) .

ب - تعيين نقط تقاطع (S) مع محاور الإحداثيات.

مع محور الفواصل.

لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء.

$$M \in (Ox) \text{ معناه } M(x; 0; 0)$$

$$M \in (S) \cap (Ox) \text{ يعني } x^2 - 8 = 0 \text{ أي } x = \sqrt{8} \text{ أو } x = -\sqrt{8}$$

$$\text{وعليه } (S) \cap (Ox) = \{I(\sqrt{8}; 0; 0), I'(-\sqrt{8}; 0; 0)\}$$

مع محور الترتيب.

$$M \in (Oy) \text{ معناه } M(0; y; 0)$$

$$M \in (S) \cap (Oy) \text{ يعني } y^2 - 8 = 0 \text{ أي } y = \sqrt{8} \text{ أو } y = -\sqrt{8}$$

$$(S) \cap (Oy) = \{H(0; \sqrt{8}; 0), H'(0; -\sqrt{8}; 0)\} \text{ وعليه}$$

مع محور الرواقم.

$$M \in (Oz) \text{ معناه } M(0; 0; z)$$

$$M \in (S) \cap (Oz) \text{ يعني } z^2 + 2z - 8 = 0 \text{ ويكافئ } (z+1)^2 = 9 \text{ ومنه } z+1=3 \text{ أو } z+1=-3$$

$$\text{أي } z=2 \text{ أو } z=-4$$

$$\text{وعليه } (S) \cap (Oz) = \{F(0; 0; 2), F'(0; 0; -4)\}$$

(3) دراسة حسب قيم العدد الحقيقي λ الوضع النسبي للسطح (S) والمستوي (P_λ) ذو المعادلة $z = \lambda$.

$$\text{لدينا } d(E; (P_\lambda)) = \frac{|-1-\lambda|}{1} = |1+\lambda|$$

$$\text{إذا كان } |1+\lambda| = 3 \text{ أي } 1+\lambda = 3 \text{ أو } 1+\lambda = -3 \text{ أي } \lambda = 2 \text{ أو } \lambda = -4$$

فإن (P_λ) يمس سطح الكرة (S) .

$$\text{إذا كان } |1+\lambda| > 3 \text{ أي } 1+\lambda > 3 \text{ أو } 1+\lambda < -3 \text{ أي } \lambda > 2 \text{ أو } \lambda < -4$$

$$\text{فإن } (P_\lambda) \cap (S) = \emptyset$$

$$\text{إذا كان } |1+\lambda| < 3 \text{ أي } -3 < 1+\lambda < 3 \text{ أي } -4 < \lambda < 2$$

فإن (P_λ) يقطع (S) في دائرة مركزها $E'(0; 0; \lambda)$ المسقط العمودي للنقطة E على المستوي (P_λ) .

$$\text{ونصف قطرها } r \text{ حيث } r = \sqrt{3^2 - |1+\lambda|^2} = \sqrt{9 - (\lambda^2 + 2\lambda + 1)} = \sqrt{-\lambda^2 - 2\lambda + 8}$$

(4) تعيين مركز ونصف قطر الدائرة مقطع سطح الكرة (S) بالمستوي (P_{-2}) .

$$\text{حسب ما سبق إحداثيات مركز الدائرة هي } (0; 0; -2) \text{ ونصف قطرها } r = \sqrt{-(-2)^2 - 2(-2) + 8} = \sqrt{8}$$

التمرين الثاني:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 14$ و $u_{n+1} = 5u_n - 6 : n \in \mathbb{N}$

$$\text{حساب } u_4, u_3, u_2, u_1$$

$$u_1 = 5u_0 - 6 = 64$$

$$u_2 = 5u_1 - 6 = 314$$

$$u_3 = 5u_2 - 6 = 1564$$

$$u_4 = 5u_3 - 6 = 7814$$

تخمين الرقمين الأخيرين للعدد u_n ؟

يمكن وضع التخمين التالي: إذا كان n زوجيا فإن آخر رقمين للعدد u_n هما 4 و 6 وإذا كان فرديا 1 و 4.

$$2- \text{برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+2} \equiv u_n [4]$$

$$\text{لدينا } u_{n+2} = 25u_n - 36 \text{ أي } u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5(5u_n - 6) - 6$$

$$u_{n+2} - u_n = 24u_n - 36 = 4(6u_n - 9) \text{ وعليه } u_{n+2} - u_n \equiv 0 [4] \text{ أي } u_{n+2} \equiv u_n [4]$$

$$\text{استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي } k : u_{2k} \equiv 2 [4]$$

$$\text{لدينا } u_0 = 14 [4] \text{ أي } u_0 \equiv 2 [4] \text{ ومنه الخاصية صحيحة من أجل } n = 0$$

$$\text{نفرض أن } u_{2k} \equiv 2 [4] \text{ ونبرهن أن } u_{2(k+1)} \equiv 2 [4] \text{ أي نبرهن } u_{2k+2} \equiv 2 [4]$$

لدينا حسب السؤال السابق $u_{n+2} \equiv u_n [4]$ ومنه $u_{2k+2} \equiv u_{2k} [4]$ ولدينا حسب الفرضية $u_{2k} \equiv 2 [4]$ إذن $u_{2k+2} \equiv 2 [4]$ وعليه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي k ، $u_{2k} \equiv 2 [4]$ استنتج أن: $u_{2k+1} \equiv 0 [4]$.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $u_{2k+1} = 5u_{2k} - 6$ ومنه $u_{2k+1} \equiv 5 \times 2 - 6 [4]$ أي $u_{2k+1} \equiv 0 [4]$.
3- برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

لدينا $2u_0 = 28$ و $5^{0+2} + 3 = 28$ ومنه $2u_0 = 5^{0+2} + 3$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $2u_n = 5^{n+2} + 3$ ونبرهن أن $2u_{n+1} = 5^{n+3} + 3$

لدينا $2u_n = 5^{n+2} + 3$ معناه $10u_n = 5(5^{n+2} + 3) - 12$ يكافئ $10u_n - 12 = 5(5^{n+2} + 3) - 12$ وبكافئ

$$2u_{n+1} = 5^{n+3} + 3 \text{ أي } 2(5u_n - 6) = 5^{n+3} + 3$$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

واستنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $2u_n \equiv 28 [100]$

لدينا $2u_0 = 28$ ومنه $2u_0 \equiv 28 [100]$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $2u_n \equiv 28 [100]$ ونبرهن أن $2u_{n+1} \equiv 28 [100]$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 5u_n - 6$ معناه $2u_{n+1} = 5 \times 2u_n - 12$

إذن $2u_{n+1} \equiv 5 \times 28 - 12 [100]$ أي $2u_{n+1} \equiv 128 [100]$ وعليه $2u_{n+1} \equiv 28 [100]$.

4- تعيين رقمي الآحاد والعشرات للعدد u_n وذلك حسب قيم n .

لنعين باقي قسمة العدد u_n على 100.

لدينا $2u_n \equiv 28 [100]$ ومنه $u_n \equiv 14 [50]$ أي $u_n \equiv 50k + 14$

من أجل $k = 2p$ يكون $u_n \equiv 100p + 14$ فيكون $u_n \equiv 2 [4]$ أي n زوجي (حسب ما سبق)

وبالتالي إذا كان n زوجيا فإن رقم آحاد u_n هو 4 ورقم عشراته هو 1.

من أجل $k = 2p + 1$ يكون $u_n \equiv 100p + 64$ فيكون $u_n \equiv 0 [4]$ أي n فردي

إذن إذا كان n فرديا فإن رقم آحاد u_n هو 4 ورقم عشراته هو 6.

5- برهان أن $PGCD(u_n, u_{n+1})$ ثابت ثم عين قيمته.

نسمي d القاسم المشترك الأكبر للعددين u_n و u_{n+1} .

لدينا d يقسم u_n و d يقسم u_{n+1} ومنه d يقسم $u_{n+1} - 5u_n$ أي d يقسم 6.

إذن القيم الممكنة للعدد d هي $\{1; 2; 3; 6\}$ ؛ بما أن رقم آحاد u_n زوجي فإن القيم الممكنة هي $\{2; 6\}$

ولدينا $2u_n = 5^{n+2} + 3$ معناه $2u_n \equiv 5^{n+2} + 3 [3]$ ومعناه $2u_n \equiv (-1)^{n+2} [3]$ وعليه $-u_n \equiv (-1)^n [3]$

إذن $u_n \equiv (-1)^{n+1} [3]$ أي $u_n \equiv 1 [3]$ أو $u_n \equiv -1 [3]$ ومنه u_n لا يقبل القسمة على 3 فهو لا يقبل

القسمة على 6 وبالتالي $PGCD(u_n, u_{n+1}) = 2$.

التمرين الثالث:

(1) حساب لاحقتي النقطتين O', B' صورتى النقطتين O, B على الترتيب بالتحويل f ،

$$z_{B'} = \frac{z_B - 1 + 2i}{z_B - 1} = \frac{2 + 4i}{2 + 2i} = \frac{(1 + 2i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i, \quad z_{O'} = \frac{z_O - 1 + 2i}{z_O - 1} = 1 - 2i$$

(2) أ) حساب الجداء $(z' - 1)(z - 1)$.

$$z' - 1 = \frac{z - 1 + 2i}{z - 1} - 1 = \frac{z - 1 + 2i - z + 1}{z - 1}$$

$$z' - 1 = \frac{2i}{z - 1} \text{ ومنه } (z' - 1)(z - 1) = 2i$$

(ب) تبين أنه مهما تكن النقطة M تختلف عن A فإن: $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ و

$$AM \cdot AM' = 2$$

$$\arg(z' - 1) + \arg(z - 1) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ معناه } \arg[(z' - 1)(z - 1)] = \arg(2i)$$

$$(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ يكافئ}$$

$$\text{لدينا } |z' - 1| \times |z - 1| = 2 \text{ معناه } |(z' - 1)(z - 1)| = |2i|$$

(3) تبين أنه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها A وتشمل O فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (C') يُطلب إيجاد مركزها ونصف قطرها.

$$M \in (C) \text{ معناه } AM = AO = 1 \text{ ولدينا من أجل كل نقطة } M \text{ تختلف عن } A \text{ } AM \cdot AM' = 2$$

ومنه $AM' = 2$ إذن M' تنتمي إلى الدائرة (C') التي مركزها A ونصف قطرها 2.

(4) أ - حساب قياسا للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overrightarrow{AB})$.

$$(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) = \arg(2 + 2i) = \arg(2(1 + i)) = \frac{\pi}{4}$$

ب - ليكن (d) نصف المستقيم المفتوح الذي حدّه النقطة A ويشمل B ،

بين أنه إذا كانت النقطة M التي تختلف عن A تنتمي إلى (d) فإن M' تنتمي إلى نصف مستقيم يطلّب تحديده.

$$(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ، } A \text{ تختلف عن } M \text{ ، لدينا من أجل كل نقطة } M$$

$$\text{ولدينا } M \in (d) \text{ معناه } (\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{4} \text{ ومنه } (\vec{u}; \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\text{أي } (\vec{u}; \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ، إذن } M' \text{ تنتمي إلى } (d)$$

ج - نسمي E النقطة التي تنتمي إلى $(d) \cap (C)$ ، تعيين موضع النقطة E' صورة النقطة E بالتحويل

$$E \in (C) \cap (d) \text{ معناه } E' \in (C') \cap (d)$$

التمرين الرابع:

I - g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2 - xe^x$

1. دراسة تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

$$\text{الدالة } g \text{ تقبل الاشتقاق على } \mathbb{R} \text{ ولدينا } g'(x) = -[e^x + xe^x] = e^x(-1 - x)$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $(-1 - x)$.

من أجل $x < -1$ يكون $g'(x) > 0$ إذن الدالة g متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; -1]$.

ومن أجل $x > -1$ يكون $g'(x) < 0$ إذن الدالة g متناقصة تماماً على المجال $[-1; +\infty[$.

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - xe^x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - xe^x = -\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = 0$$

جدول تغيرات الدالة g .

x	$-\infty$	-1	α	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	
$g(x)$	2	$2+e^{-1}$	0	$-\infty$

2. تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$.الدالة g مستمرة ومنتزعة تماما على المجال $]-\infty; -1]$ وتأخذ قيمها في المجال $]2; 2+e^{-1}]$ و 0 لا ينتميإلى المجال $]2; 2+e^{-1}]$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; -1]$ فإن $g(x) \neq 0$.ولدينا الدالة g مستمرة ومنتزعة تماما على المجال $[-1; +\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty; 2+e^{-1}]$ و 0 ينتمي إلى المجال $]-\infty; 2+e^{-1}]$ إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[-1; +\infty[$.التحقق أن: $0.8 < \alpha < 0.9$.لدينا $g(0.8) \approx 0.22$ ، $g(0.9) \approx -0.21$ إذن $g(0.8) \times g(0.9) < 0$ ومنه $0.8 < \alpha < 0.9$.3. تعيين، حسب قيم x إشارة $g(x)$.من أجل $x \in]-\infty; \alpha[$ ، $g(x) > 0$ ومن أجل $x \in]\alpha; +\infty[$ ، $g(x) < 0$ كما أن $g(\alpha) = 0$.-II f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{2x+2}{e^x+2}$ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.1. تبين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+2}{e^x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 + \frac{2}{x} \right)}{x \left(\frac{e^x}{x} + \frac{2}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x} + \frac{2}{x}} = 0$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

تفسير النتيجة هندسيا.

 (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 1$ بجوار $+\infty$.2. أ) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 2 = 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 2 = -\infty$$

ب) تبين أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y = x + 1$ ، مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+2}{e^x+2} - (x+1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+2 - xe^x - e^x - 2x - 2}{e^x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x e^x - e^x}{e^x + 2} = 0$$

3. دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ') .

$$f(x) - (x+1) = \frac{-x e^x - e^x}{e^x + 2} = \frac{e^x(-x-1)}{e^x + 2}, \text{ لدينا من أجل كل عدد حقيقي } x,$$

ومنه إشارة $f(x) - (x+1)$ مثل إشارة $(-x-1)$ على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - (x+1)$	+	0	-
الوضعية النسبية	(C_f) فوق (Δ') (C_f) تحت (Δ') (C_f) و (Δ') يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(-1; 0)$.		

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ') .

$$f(x) - x = \frac{2x+2}{e^x+2} - x = \frac{2x+2-xe^x-2x}{e^x+2} = \frac{2-xe^x}{e^x+2} = \frac{g(x)}{e^x+2}$$

إشارة $f(x) - x$ مثل إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x) - x$	+	0	-
الوضعية النسبية	(C_f) فوق (Δ) (C_f) تحت (Δ) (C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(\alpha; \alpha)$.		

4. أ) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$.

$$f'(x) = \frac{2(e^x+2) - e^x(2x+2)}{e^x+2} = \frac{2e^x+4-2xe^x-2e^x}{e^x+2}$$

$$f'(x) = \frac{4-2xe^x}{e^x+2} = \frac{2(2-xe^x)}{e^x+2} = \frac{2g(x)}{e^x+2}$$

اتجاه تغير الدالة f .

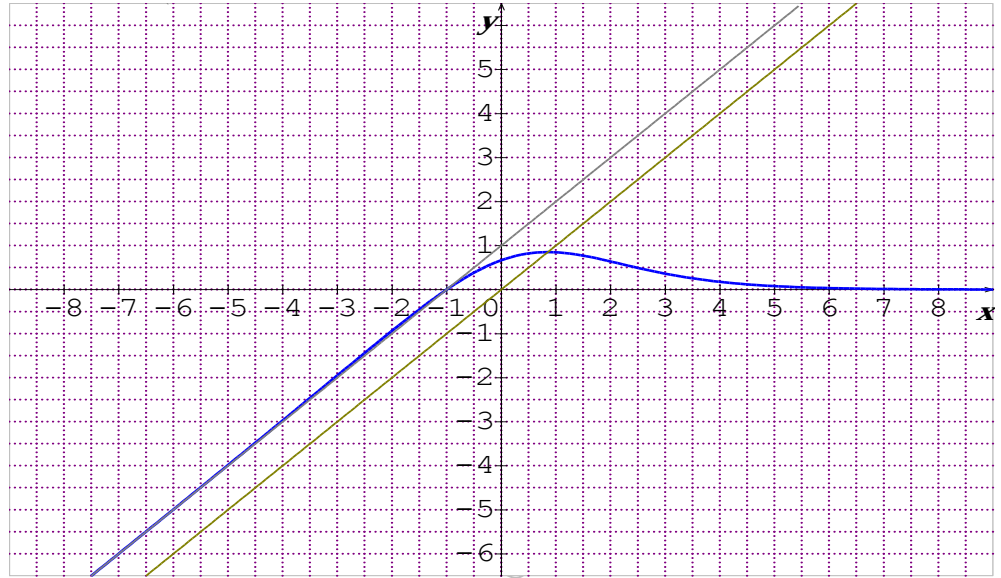
إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ ومنه:

من أجل $x \in]-\infty; \alpha[$ يكون $f'(x) > 0$ إذن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; \alpha[$.

من أجل $x \in]\alpha; +\infty[$ يكون $f'(x) < 0$ إذن الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]\alpha; +\infty[$.

ب) تبين أن: $f(\alpha) = \alpha$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

$$f(\alpha) = \alpha \text{ أي } f(\alpha) - \alpha = \frac{g(\alpha)}{e^\alpha+2} = 0 \text{ ومنه } f(x) - x = \frac{g(x)}{e^x+2}, \text{ لدينا من أجل كل عدد حقيقي } x,$$

5. رسم (Δ) ، (Δ') و (C_f) .6. المناقشة بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $f(x) = f(m)$.إذا كان $m \leq -1$ فإن $f(m) \leq 0$ ومنه المعادلة تقبل حلاً وحيداً.إذا كان $m \in]-1; \alpha[\cup]\alpha; +\infty[$ فإن $f(m) \in]0; \alpha[$ ومنه المعادلة تقبل حلين.إذا كان $m = \alpha$ فإن $f(m) = 0$ ومنه المعادلة تقبل حلاً مضاعفاً.III- (U_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $U_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$ (1) برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq U_n < \alpha$.لدينا $0 \leq U_0 < \alpha$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.نفرض أن $0 \leq U_n < \alpha$ ونبرهن صحة $0 \leq U_{n+1} < \alpha$ لدينا $0 \leq U_n < \alpha$ وبما أن الدالة f متزايدة تماماً على $[0; \alpha]$ فإن $f(0) \leq f(U_n) < f(\alpha)$ لدينا $f(0) = \frac{2}{3}$ و $f(\alpha) = \alpha$ ومنه $\frac{2}{3} \leq f(U_n) < \alpha$ أي $0 \leq U_{n+1} < \alpha$ وعليه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq U_n < \alpha$.(2) تخمين اتجاه تغير (U_n)

من الرسم يبدو أن المتتالية متزايدة.

(3) برهان أن المتتالية (U_n) متقاربة،لدينا $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n$ ولدينا حسب ما سبق من أجل كل $x \in]-\infty; \alpha]$ ، $f(x) - x \geq 0$ وبما أن $0 \leq U_n < \alpha$ فإن $f(U_n) - U_n \geq 0$ أي $U_{n+1} - U_n \geq 0$ ومنه المتتالية متزايدة (U_n) وبما أنهامحدودة من الأعلى بالعدد α فهي متقاربة نحو عدد حقيقي l حيث $l \leq \alpha$.

حساب نهايتها.

لدينا المتتالية متقاربة ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ بما أن $U_{n+1} = f(U_n)$ والدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ فإن $l = f(l)$ ومنه $l = \alpha$ إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$.

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول:

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقط $A(1;0;-2)$ ، $B(3;1;0)$ و $C(1;0;1)$

1. اكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) التي مركزها A وتشمل B .

2. لتكن (Δ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء بحيث:

$$\begin{cases} x + 2z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

بيّن أنّ (Δ) مستقيم شعاع توجيهه $\vec{u}(-2;-1;1)$ ويشمل النقطة B .

3. اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A ويعامد (Δ) .

4. أ - عيّن إحداثيات نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ) .

ب - احسب بُعد النقطة A عن المستقيم (Δ) ، ثم استنتج أنّ (Δ) يقطع سطح الكرة (S) في نقطتين يطلب تعيينهما.

5. t عدد حقيقي و G مرجح الجملة $\{(B; e^t), (C; 1)\}$.

أ - بيّن أنّ $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{1+e^t} \overrightarrow{BC}$.

ب - شكل جدول تغيّرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(t) = \frac{1}{1+e^t}$.

ج - استنتج مجموعة النقط G عندما يتغير t في $\mathbb{R}$.

التمرين الثاني:

(I) ليكن $P(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث: $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$.

(1) بيّن أنّه، من أجل كل عدد مركب z ، $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$.

(2) تحقق أنّ $1+i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$ ، ثم استنتج جذرا آخر له.

(3) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

(II) نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B و C التي لاحتقاتها

$z_A = -1$ ، $z_B = 1+i$ و $z_C = \overline{z_B}$ على الترتيب.

(1) التحويل النقطي S يرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطة $M'(z')$ حيث: $z' = (1+i)z + i$.

أ - ما طبيعة التحويل S ؟ عيّن عناصره المميزة.

ب - لتكن M نقطة تختلف عن A ، ما طبيعة المثلث AMM' .

(2) n عدد طبيعي و M_n نقطة من المستوي تختلف عن A ، لاحتقتها العدد المركب z_n .

نضع $M_0 = O$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $M_{n+1} = S(M_n)$.

أ - أثبت أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $z_n = (1+i)^n - 1$.

ب - عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون النقط O ، A و M_n في استقامة.

التمرين الثالث:

- I- g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (x-1)e^x - 1$**
- أدرس تغيرات الدالة g .
 - أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.2 < \alpha < 1.3$.
 - استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .
- II- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{2x}{e^x + 1}$**
- و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- أ- احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
 - ب - بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{-2g(x)}{(e^x + 1)^2}$ ، ثم استنتج تغيرات الدالة f .
 - ج - بين أن: $f(\alpha) = 2(\alpha - 1)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.
 - أ - بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x$ ، مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.
 - ب - ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .
 - أ - بين أن: $f(-\alpha) = -2$.
 - ب - بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$ موازيا للمستقيم (Δ) .
 - ج - اكتب معادلة (T) .
 - أ - أنشئ (Δ) ، (T) و (C_f) .
 - ناقش بياننا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $2x \left(\frac{1}{e^x + 1} - 1 \right) = m$.

التمرين الرابع:

- (d) مستقيم مزود بمعلم $(O; \vec{i})$ ، A_0 ، B_0 نقطتان فاصلتهما على الترتيب 4 و 3.
- من أجل كل عدد طبيعي n ، نسمي A_{n+1} مرجح الجملة $\{(A_n; 1), (B_n; 4)\}$ و B_{n+1} مرجح الجملة $\{(A_n; 3), (B_n; 2)\}$
- 1/ علم النقط A_0 ، B_0 ، A_1 و B_1 .
 - 2/ النقطتان A_n و B_n فاصلتهما على الترتيب a_n و b_n حيث $a_0 = -4$ و $b_0 = 3$.

- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $a_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n + 4b_n)$ و $b_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n)$.
 - 3/ أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3a_n + 4b_n = 0$.
 - ب - بين أن (a_n) و (b_n) متتاليتان هندسيتان يطلب تعيين أساس كل منهما.
 - 4/ أ - عبّر عن a_n و b_n بدلالة n .
 - ب - عيّن نهايتي (a_n) و (b_n) . فسّر النتائج هندسيا.

الموضوع الثاني:

التمرين الأول:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1;1;3)$ و $\vec{u}(1;2;-2)$

شعاع توجيه له. (Δ') المستقيم المعرف بجملته المعادلتين:

$$\begin{cases} x+z=0 \\ y=3 \end{cases}$$

1. جد تمثيلاً وسيطياً لكل من المستقيمين (Δ) و (Δ') .
2. بين أن (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوى.
3. (P) المستوي الذي يشمل (Δ') و يوازي (Δ) . بين أن معادلة المستوي هي: $2x + y + 2z - 3 = 0$
4. $M(1+t; 1+2t; 3-2t)$ نقطة كيفية من المستقيم (Δ) ، حيث $t \in \mathbb{R}$. احسب d المسافة بين M والمستوي (P)
5. أ- عيّن إحداثيات النقطة A' المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) ، ثم عيّن تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ'') الذي يشمل A' و يوازي (Δ) .
- ب- بين أن (Δ') و (Δ'') يتقاطعان في النقطة $B(1;3;-1)$.
6. f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(t) = BM^2$
- أ- بين أن: $f(t) = 9t^2 - 24t + 20$
- ب- بين أن f تقبل قيمة حدية صغرى $f(t_0)$ يُطلب تعيين t_0 و $f(t_0)$.
- ج- تحقق أن $d = \sqrt{f(t_0)}$

التمرين الثاني:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$
2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، A ، B و C نقط من المستوي

لاحقاتها على الترتيب: $z_A = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = z_A + z_B$

- أ- اكتب على الشكل الأساسي الأعداد المركبة: z_A ، z_B و $\frac{z_A}{z_B}$.
- ب- عين لاحقة كل من A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C على الترتيب بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

- ج- بين أن الرباعي $OA'C'B'$ مربع.
3. نسمي (Δ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $|z - z_A| = |z - z_B|$.
- أ- بين أن (Δ) هو محور الفواصل.

- ب- بين أن حلي المعادلة: $\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right)^2 = i$ عدنان حقيقيان. (لا يطلب حساب الحلين).

التمرين الثالث:

(I) لتكن g الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \ln x - \frac{2}{x} + 1$.
1. ادرس تغيرات الدالة g .

2. أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,4 < \alpha < 1,5$.
ب) استنتج إشارة $g(x)$ ثم إشارة $g(x+1)$.

(II) الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = (x-1)\ln(x+1) + 1$.
(C_f) المنحنى الممثل لها في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

2. بين أنه من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ فإن: $f'(x) = g(x+1)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .
3. شكل جدول تغيرات الدالة f .

4. بين أن: $f(\alpha-1) = 5 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$ و استنتج حصرا للعدد $f(\alpha-1)$.

(III) ليكن x_0 عددا حقيقيا من المجال $]-1; +\infty[$ و (T_{x_0}) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 .

نعرف الدالة h على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $h(x) = f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)]$.

1. بين أن $h'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ ثم أعط إشارة $h'(x)$ اعتمادا على رتبة الدالة f' .

2. استنتج تغيرات الدالة h ، ثم استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و (T_{x_0}).

3. أعط معادلة لـ (T_0) ثم أنشئه.

4. بأخذ $\alpha \approx 1,45$ و $f(\alpha-1) \approx 0,8$ أنشئ (C_f) على المجال $]-1; 3[$.

التمرين الرابع:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; 2]$ بـ: $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.

(1) أ - ادرس اتجاه تغير الدالة f .

ب - بين أنه إذا كان $x \in [1; 2]$ فإن $f(x) \in [1; 2]$.

(2) (u_n) و (v_n) متتايلتان معرفتان بـ: $u_0 = 1$ و $v_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = f(u_n)$ و $v_{n+1} = f(v_n)$.

أ - ارسم المنحنى (C) الممثل للدالة f والمستقيم ذي المعادلة $y = x$.

ب - أعط تخمينا حول اتجاه تغير و تقارب كل من المتتايلتين (u_n) و (v_n) .

(3) برهن بالتراجع عن الخواص التالية:

من أجل كل عدد طبيعي n : " $1 \leq u_n \leq 2$ " ؛ " $1 \leq v_n \leq 2$ " ؛ " $u_n \leq u_{n+1}$ " و " $v_n \geq v_{n+1}$ ".

(4) أ - أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)}$ ؛

ب - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n - u_n \geq 0$ و $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$.

(5) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

(6) استنتج أن للمتتايلتين (u_n) و (v_n) نفس النهاية l .

(7) عيّن القيمة المضبوطة للعدد l .

حل الموضوع الأول:

التمرين الأول:

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقط $A(1;0;-2)$ ، $B(3;1;0)$ و $C(1;0;1)$

1. كتابة معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) التي مركزها A وتشمل B .

لدينا نصف قطر سطح الكرة (S) هو $AB = \sqrt{4+1+4} = 3$.

$$M(x; y; z) \in (S) \text{ معناه } (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9 \text{ أي } x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 5 = 0$$

$$2. \text{ لتكن } (\Delta) \text{ مجموعة النقط } M(x; y; z) \text{ من الفضاء بحيث: } \begin{cases} x + 2z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

تبين أن (Δ) مستقيم شعاع توجيهه $\vec{u}(-2; -1; 1)$ ويشمل النقطة B .

$$\text{حيث } t \text{ عدد حقيقي. } \begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = -t + 1 \\ z = t \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} x = -2z + 3 \\ y = -z + 1 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} x + 2z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

وهذه الأخيرة تمثيل وسيطي لمستقيم (Δ) شعاعه التوجيهي $\vec{u}(-2; -1; 1)$ ويشمل النقطة B .

3. كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A ويعامد (Δ) .

بما أن (P) يعامد (Δ) فإن $\vec{u}(-2; -1; 1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) .

لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء.

$$M \in (P) \text{ معناه } \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 \text{ حيث } \overrightarrow{AM}(x-1; y; z+2)$$

$$\text{ومنه } -2(x-1) - y + 1(z+2) = 0 \text{ أي } -2x - y + z + 4 = 0 \text{ هي معادلة ديكارتية للمستوي } (P).$$

4. أ - تعيين إحداثيات نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ) .

لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء.

$$M \in (\Delta) \text{ معناه } M(-2t+3; -t+1; t) \text{ حيث } t \in \mathbb{R}$$

$$M \in (\Delta) \cap (P) \text{ معناه } -2(-2t+3) - (-t+1) + t + 4 = 0 \text{ ويكافئ } 6t - 3 = 0 \text{ أي } t = \frac{1}{2}$$

$$\text{وعليه } M\left(2; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \text{ أي } M\left(-2\left(\frac{1}{2}\right) + 3; \frac{-1}{2} + 1; \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{إذن } (\Delta) \cap (P) = \{E\} \text{ حيث } E\left(2; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

ب - حساب بُعد النقطة A عن المستقيم (Δ) .

بما أن (Δ) يعامد (P) فإن المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ) هي E وعليه $d(A; (\Delta)) = AE$.

$$\text{لدينا } AE = \sqrt{(2-1)^2 + \left(\frac{1}{2}-0\right)^2 + \left(\frac{1}{2}+2\right)^2} = \sqrt{\frac{30}{4}} = \frac{\sqrt{30}}{2} \text{ إذن } d(A; (\Delta)) = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

استنتاج أن (Δ) يقطع سطح الكرة (S) في نقطتين يطلب تعيينهما.

بما أن $d(A; (\Delta)) < AB$ هو نصف قطر الكرة (S) فإن (Δ) يقطع سطح الكرة (S) في نقطتين.

لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء.

$$M \in (\Delta) \text{ معناه } M(-2t+3; -t+1; t) \text{ حيث } t \in \mathbb{R}$$

$t = 1$ أو $t = 0$ أي $6t^2 - 6t = 0$ تكافئ $(-2t + 3 - 1)^2 + (-t + 1)^2 + (t + 2)^2 = 9$ معناه $M \in (\Delta) \cap (S)$ وعليه $(\Delta) \cap (S) = \{A; C\}$.

5. t عدد حقيقي و G مرجح الجملة $\{(B; e^t), (C; 1)\}$.

أ - تبين أن $\vec{BG} = \frac{1}{1+e^t} \vec{BC}$.

لدينا $e^t \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ معناه $e^t \vec{GB} + \vec{GB} + \vec{BC} = \vec{0}$ ونكافئ $(e^t + 1) \vec{GB} = -\vec{BC}$ أي $\vec{BG} = \frac{1}{1+e^t} \vec{BC}$.

ب - تشكيل جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(t) = \frac{1}{1+e^t}$.

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'(t) = \frac{-e^t}{(1+e^t)^2}$.

من أجل كل عدد حقيقي t لدينا $f'(t) < 0$ وبالتالي الدالة f متناقصة تماماً على $\mathbb{R}$.

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^t} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^t} = 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(t)$	-	
$f(t)$		

نلاحظ من جدول تغيرات الدالة f : من أجل كل عدد حقيقي t ، $f(t) \in]0; 1[$.

ج - استنتاج مجموعة النقط G عندما يتغير t في $\mathbb{R}$.

لدينا $\vec{BG} = f(t) \vec{BC}$ مع $f(t) \in]0; 1[$ إذن مجموعة النقط G عندما يتغير t في $\mathbb{R}$ هي القطعة $[BC]$ باستثناء النقطتين B و C .

التمرين الثاني:

(I) ليكن $P(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث: $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$.

(1) تبين أنه، من أجل كل عدد مركب z ، $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$.

ليكن z عددا مركبا

$$\overline{P(z)} = \overline{z^3 + z^2 - 4z + 6} = \overline{z^3} + \overline{z^2} - \overline{4z} + \overline{6} = \bar{z}^3 + \bar{z}^2 - 4\bar{z} + 6 = P(\bar{z})$$

(2) التحقق أن $1+i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$.

$$P(1+i) = (1+i)^3 + (1+i)^2 - 4(1+i) + 6 = (1+i)[(1+i)^2 + 1+i - 4] + 6$$

$$P(1+i) = (1+i)(2i + 1+i - 4) + 6 = -6 + 6 = 0$$

استنتاج جذر آخر له.

لدينا $\overline{P(1+i)} = P(\overline{1+i})$ معناه $\bar{0} = P(1-i)$ أي $P(1-i) = 0$ إذن $1-i$ أيضا جذر لـ $P(z)$.

(3) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

ليكن z_0 جذرا لكثير الحدود $P(z)$ ؛ لدينا إذن $P(z) = (z - (1+i))(z - (1-i))(z - z_0)$ أي

$$P(z) = (z^2 - 2z + 2)(z - z_0) = z^3 + z^2(-z_0 - 2) + z(2 + 2z_0) - 2z_0$$

بالمطابقة نجد $z_0 = -3$.

يمكن استعمال طريقة أخرى مباشرة: لدينا $(1+i)(1-i)z_0 = 6$ ومنه $-2z_0 = 6$ أي $z_0 = -3$.

إذن $P(z) = 0$ معناه $z \in \{1+i; 1-i; -3\}$

(II) نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A, B و C التي لاحقاتها

$$z_A = -1, z_B = 1+i \text{ و } z_C = \overline{z_B} \text{ على الترتيب.}$$

(1) التحويل النقطي S يرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطي $M'(z')$ حيث: $z' = (1+i)z + i$.

أ - تعيين طبيعة التحويل S وعناصره المميزة.

الكتابة المركبة للتحويل S من الشكل $z' = az + b$ حيث $a = 1+i$ و $b = i$.

لدينا $a = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ومنه S تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$ زاويته $\frac{\pi}{4}$ ومركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة

$$\frac{b}{1-a} = \frac{i}{-i} = -1 = z_A \text{ أي مركز التشابه المباشر } S \text{ هو } A.$$

ب - تعيين طبيعة المثلث AMM' .

لدينا $S(M) = M'$ معناه $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{4}$ و $AM' = \sqrt{2}AM$.

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AM} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM'}) = -AM^2 + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM'} \\ = -AM^2 + AM \cdot AM' \cos(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'})$$

$$= -AM^2 + AM \times \sqrt{2}AM \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= -AM^2 + AM^2$$

أي $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MM'} = 0$ ومنه المثلث AMM' قائم في M .

لدينا $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{4}$ و $(\overrightarrow{MM'}; \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2}$ إذن $(\overrightarrow{M'A}; \overrightarrow{M'M}) = \frac{\pi}{4}$.

وبالتالي المثلث AMM' قائم في M ومتساوي الساقين.

(2) عدد طبيعي n و M_n نقطة من المستوي تختلف عن A ، لاحقتها العدد المركب z_n .

نضع $M_0 = O$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $M_{n+1} = S(M_n)$.

أ - إثبات أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $z_n = (1+i)^n - 1$.

نستعمل البرهان بالتراجع.

$$z_0 = (1+i)^0 - 1 = 0$$

نفرض أن $z_n = (1+i)^n - 1$ ونبرهن أن $z_{n+1} = (1+i)^{n+1} - 1$

لدينا $M_{n+1} = S(M_n)$ معناه $z_{n+1} = (1+i)z_n + i$ ومنه

$$z_{n+1} = (1+i)((1+i)^n - 1) + i = (1+i)^{n+1} - 1 - i + i = (1+i)^{n+1} - 1$$

وعليه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $z_n = (1+i)^n - 1$.

ب - تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون النقط O, A و M_n في استقامية.

النقط O, A و M_n في استقامية معناه $(\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AM_n}) = k\pi$ أي $\arg\left(\frac{z_n - z_A}{-z_A}\right) = k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{ومنّه } \arg(z_n - z_A) - \arg(-z_A) = k\pi$$

لدينا $\arg(-z_A) = 0$ و $\arg(z_n - z_A) = \frac{n\pi}{4}$ أي $z_n - z_A = (1+i)^n - 1 + 1 = (1+i)^n = \left(\sqrt{2}^n e^{i\frac{n\pi}{4}}\right)$

معناه $\arg(z_n - z_A) - \arg(-z_A) = k\pi$ أي $n = 4k$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

التمرين الثالث:

I- هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (x-1)e^x - 1$

1. دراسة تغيرات الدالة g .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - e^x - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^x - 1 = +\infty$$

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x) = e^x + e^x(x-1) = xe^x$

إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة x لأن $e^x > 0$ من أجل كل عدد حقيقي x .

وبالتالي الدالة g متناقصة تماماً على $]-\infty; 0]$ و متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$+$
$g(x)$	-1	-2	$+\infty$

2. إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $1.2 < \alpha < 1.3$.

لدينا الدالة g مستمرة و متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 0]$ وتأخذ قيمها في المجال $[-2; -1]$ و 0 لا ينتمي إلى المجال

$[-2; -1]$ إذن من أجل كل $x \in]-\infty; 0]$ فإن $g(x) \neq 0$.

ولدينا الدالة g مستمرة و متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $[-2; +\infty[$ و 0 ينتمي إلى المجال

$[-2; +\infty[$ إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[0; +\infty[$ وبما أن $g(1.2) \approx -0.36$ و $g(1.3) \approx 0.10$

أي $0 < g(1.2) \times g(1.3) < 0$ فإن $1.2 < \alpha < 1.3$.

3. استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; \alpha[$ ، $g(x) < 0$ ،

ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]\alpha; +\infty[$ ، $g(x) > 0$ ، كما أن $g(\alpha) = 0$.

II- هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{2x}{e^x + 1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ. حساب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{e^x + 1} = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\left(\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}} = 0$$

ب - تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{-2g(x)}{(e^x + 1)^2}$.

$$f'(x) = \frac{2(e^x + 1) - 2xe^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x + 2 - 2xe^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{-2(-e^x - 1 + xe^x)}{(e^x + 1)^2} = \frac{-2g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

استنتاج تغيرات الدالة f .

إشارة $f'(x)$ هي عكس نفس إشارة $g(x)$ وعليه:

من أجل $x \in]-\infty; \alpha[$ يكون $g(x) < 0$ ومنه $f'(x) > 0$ إذن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; \alpha[$.

من أجل $x \in]\alpha; +\infty[$ يكون $g(x) > 0$ ومنه $f'(x) < 0$ إذن الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]\alpha; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	α	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$				

ج - تبين أن: $f(\alpha) = 2(\alpha - 1)$.

لدينا $g(\alpha) = 0$ يكافئ $(\alpha - 1)e^\alpha - 1 = 0$ أي $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\frac{1}{\alpha - 1} + 1} = \frac{2\alpha}{\frac{\alpha}{\alpha - 1}} = \frac{2\alpha(\alpha - 1)}{\alpha} = 2(\alpha - 1)$$

استنتاج حصراً للعدد $f(\alpha)$.

لدينا $1.2 < \alpha < 1.3$ يكافئ $0.2 < \alpha - 1 < 0.3$ إذن $1.2 \times 0.2 < \alpha(\alpha - 1) < 1.3 \times 0.3$ أي $0.24 < f(\alpha) < 0.39$

2. أ - تبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x$ ، مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{e^x + 1} - 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 2xe^x - 2x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2xe^x}{e^x + 1} = 0$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب - دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f(x) - 2x = \frac{-2xe^x}{e^x + 1}$

إشارة $f(x) - 2x$ هي نفس إشارة $-2x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - 2x$	+	0	-
الوضعية			

3. أ - تبين أن: $f(-\alpha) = -2$.

$$f(-\alpha) = \frac{2\alpha}{e^{-\alpha} + 1} = \frac{-2\alpha}{\alpha - 1 + 1} = -2 \text{ إذن } e^{-\alpha} = \alpha - 1 \text{ معناه } e^{\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1} \text{ لدينا}$$

ب - تبين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$ موازيا للمستقيم (Δ) .

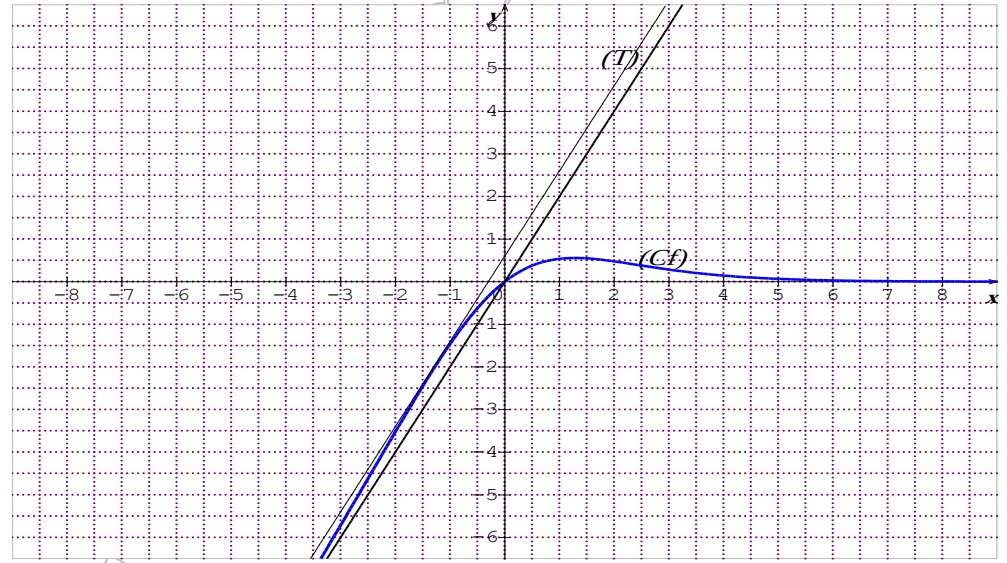
$$f'(-\alpha) = \frac{-2g(-\alpha)}{(e^{-\alpha} + 1)^2} = \frac{-2((- \alpha - 1)e^{-\alpha} - 1)}{(e^{-\alpha} + 1)^2} = \frac{-2((- \alpha - 1)(\alpha - 1) - 1)}{(\alpha - 1 + 1)^2} = \frac{-2(-\alpha^2)}{\alpha^2} = 2 \text{ لدينا}$$

إذن معامل توجيه المماس للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$ يساوي 2 أي المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$ موازيا للمستقيم (Δ) .

ج - كتابة معادلة (T) .

$$(T): y = 2x + 2\alpha - 2 \text{ أي } y = 2(x + \alpha) - 2 \text{ ومنه } y = f'(-\alpha)(x + \alpha) + f(-\alpha)$$

4. إنشاء (Δ) ، (T) و (C_f) .



5. المناقشة بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $2x \left(\frac{1}{e^x + 1} - 1 \right) = m$.

$$2x \left(\frac{1}{e^x + 1} - 1 \right) = m \text{ تكافئ } \frac{2x}{e^x + 1} - 2x = m \text{ وتكافئ } \frac{2x}{e^x + 1} = 2x + m \text{ أي } f(x) = 2x + m$$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = 2x + m$.

إذا كان $m < 0$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا موجبا.

إذا كان $m = 0$ فإن المعادلة تقبل حلا معدوما.

إذا كان $0 < m < 2\alpha - 2$ فإن المعادلة تقبل حلين سالبين.

إذا كان $m = 2\alpha - 2$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا وهو $-\alpha$.

إذا كان $m > 2\alpha - 2$ فإن المعادلة لا تقبل أي حل.

التمرين الرابع:

(d) مستقيم مزود بمعلم $(O; \vec{i})$ ، A_0 ، B_0 نقطتان فاصلتهما على الترتيب 4- و 3.

من أجل كل عدد طبيعي n ، نسمي A_{n+1} مرجح الجملة $\{(A_n; 1), (B_n; 4)\}$

و B_{n+1} مرجح الجملة $\{(A_n; 3), (B_n; 2)\}$

1/ تعليم النقط A_1 ، B_1 ، A_0 ، B_0 .

$$b_1 = \frac{3a_0 + 2b_0}{5} = \frac{-12 + 6}{5} = \frac{-6}{5}, \quad a_1 = \frac{a_0 + 4b_0}{5} = \frac{-4 + 12}{5} = \frac{8}{5}$$

2/ النقطتان A_n و B_n فاصلتهما على الترتيب a_n و b_n حيث $a_0 = -4$ و $b_0 = 3$.

- تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $a_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n + 4b_n)$ و $b_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n)$.

لدينا A_{n+1} مرجح الجملة $\{(A_n; 1), (B_n; 4)\}$ ومنه $a_{n+1} = \frac{a_n + 4b_n}{4+1} = \frac{1}{5}(a_n + 4b_n)$

و B_{n+1} مرجح الجملة $\{(A_n; 3), (B_n; 2)\}$ ومنه $b_{n+1} = \frac{3a_n + 2b_n}{2+3} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n)$

3/ أ - برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3a_n + 4b_n = 0$.

لدينا $3a_0 + 4b_0 = 3 \times -4 + 4 \times 3 = 0$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $3a_n + 4b_n = 0$ من أجل عدد طبيعي n و نبرهن أن $3a_{n+1} + 4b_{n+1} = 0$

لدينا $3a_{n+1} + 4b_{n+1} = \frac{3}{5}(a_n + 4b_n) + \frac{4}{5}(3a_n + 2b_n)$

$$3a_{n+1} + 4b_{n+1} = \frac{3a_n + 12b_n + 12a_n + 8b_n}{5}$$

$$3a_{n+1} + 4b_{n+1} = \frac{15a_n + 20b_n}{5}$$

أ - $3a_{n+1} + 4b_{n+1} = 3a_n + 4b_n = 0$ أي $3a_{n+1} + 4b_{n+1} = 0$

وعليه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3a_n + 4b_n = 0$.

ب - تبين أن (a_n) و (b_n) متتاليتان هندسيتان يطلب تعيين أساس كل منهما.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $3a_n + 4b_n = 0$ معناه $4b_n = -3a_n$ ومنه $a_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n - 3a_n)$ أي $a_{n+1} = -\frac{2}{5}a_n$

إذن (a_n) متتالية هندسية أساسها $-\frac{2}{5}$.

ولدينا $3a_n = -4b_n$ ومنه $b_{n+1} = \frac{1}{5}(-4b_n + 2b_n)$ أي $b_{n+1} = -\frac{2}{5}b_n$ إذن (b_n) متتالية هندسية أساسها $-\frac{2}{5}$.

4/ أ - التعبير عن a_n و b_n بدلالة n .

$$b_n = b_0 \left(\frac{-2}{5} \right)^n = 3 \left(\frac{-2}{5} \right)^n , a_n = a_0 \left(\frac{-2}{5} \right)^n = -4 \left(\frac{-2}{5} \right)^n$$

ب - تعيين نهايتي (a_n) و (b_n) . فسر النتائج هندسياً.

لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{5} \right)^n = 0$

الموضوع الثاني:

التمرين الأول:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1; 1; 3)$ و $\vec{u}(1; 2; -2)$

شعاع توجيه له. (Δ') المستقيم المعرّف بجملة المعادلتين:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

1. كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) .

لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء.

$M \in (\Delta)$ إذا وفقط إذا وُجد عدد حقيقي t بحيث $\vec{AM} = t\vec{u}$

$$(\Delta): \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = 3-2t \end{cases} \quad \text{ومنه } (t \in \mathbb{R})$$

1. كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ') .

$$\text{حيث } t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = -t' \\ y = 3 \\ z = t' \end{cases} \quad \text{أي } \begin{cases} x = -z \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{تكافئ } \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

2. تبين أن (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي.

لدينا $\vec{u}(1;2;-2)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) و $\vec{u}'(-1;0;1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ') .
ومنه المستقيمان (Δ) و (Δ') غير متوازيين لأن $\vec{u}$ و $\vec{u}'$ غير مرتبطين خطياً.

$$\begin{cases} -t' = 1+t \dots\dots\dots (1) \\ 3 = 1+2t \dots\dots\dots (2) \\ t' = 3-2t \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

$$\text{من (2) نجد } t = 1 \text{ بالتعويض في جميع المعادلات نجد } \begin{cases} -t' = 2 \\ 3 = 3 \\ t' = 1 \end{cases} \text{ تناقض إذن } (\Delta) \text{ و } (\Delta') \text{ غير متقاطعان}$$

فهما ليسا من نفس المستوي.

3. (P) المستوي الذي يشمل (Δ') و يوازي (Δ) .

تبين أن معادلة المستوي (P) هي: $2x + y + 2z - 3 = 0$

$$\text{نضع } \vec{n}(2;1;2) \text{ لدينا } \vec{n} \cdot \vec{u} = 2 \times 1 + 1 \times 2 - 2 \times 2 = 0 \text{ و } \vec{n} \cdot \vec{u}' = 2 \times (-1) + 1 \times 0 + 2 \times 1 = 0$$

ومنه $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (P) .

ولدينا $E(0;3;0)$ نقطة من (Δ') تحقق المعادلة $2x + y + 2z - 3 = 0$ وبالتالي معادلة ديكارتية للمستوي (P) .

طريقة ثانية:

المستوي (P) معيّن بالشعاعين $\vec{u}(1;2;-2)$ و $\vec{u}'(-1;0;1)$ والنقطة $E(0;3;0)$.

$$\text{لدينا إذن } \begin{cases} x = \alpha - \beta \\ y = 3 + 2\alpha \\ z = -2\alpha + \beta \end{cases} \quad (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ تمثيل وسيطي للمستوي } (P).$$

وبما أن $2(\alpha - \beta) + 3 + 2\alpha + 2(-2\alpha + \beta) - 3 = 0$ فإن $2x + y + 2z - 3 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P) .

4. نقطة $M(1+t;1+2t;3-2t)$ كيفية من المستقيم (Δ) ، حيث $t \in \mathbb{R}$.

حساب d المسافة بين M والمستوي (P)

$$d(M; (P)) = \frac{|2(1+t) + 1 + 2t + 2(3-2t) - 3|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{6}{3} = 2$$

5. أ - تعيين إحداثيات النقطة A' المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) ،

ليكن (d) المستقيم الذي يشمل A ويعامد المستوي (P) ومنه $\vec{n}$ شعاع توجيه للمستقيم (d) .

$$M(x; y; z) \in (d) \text{ معناه يوجد عدد حقيقي } \lambda \text{ بحيث } \vec{AM} = \lambda \vec{n}$$

$$\begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = \lambda + 1 ; (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = 2\lambda + 3 \end{cases} \text{ ومنه}$$

لدينا $A' \in (d)$ معناه $A'(2\lambda+1; \lambda+1; 2\lambda+3)$ ولدينا $A' \in (P)$ معناه $2x_{A'} + y_{A'} + 2z_{A'} - 3 = 0$

وعليه $2(2\lambda+1) + \lambda+1 + 2(2\lambda+3) - 3 = 0$ ومنه $9\lambda+6=0$ أي $\lambda = -\frac{2}{3}$ إذن $A'(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3})$

تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ'') الذي يشمل A' و يوازي (Δ) .

$$\overrightarrow{A'M} = \alpha \vec{u} / \alpha \in \mathbb{R} \text{ معناه } M(x; y; z) \in (\Delta'')$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} + \alpha \\ y = \frac{1}{3} + 2\alpha ; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \frac{5}{3} - 2\alpha \end{cases} \text{ ومنه تمثيل وسيطي للمستقيم } (\Delta'').$$

ب - تبين أن (Δ') و (Δ'') يتقاطعان في النقطة $B(1; 3; -1)$.

$$\text{لدينا } B \in (\Delta') \text{ ومنه } \begin{cases} x_B + z_B = 0 \\ y_B = 3 \end{cases}$$

$$B \in (\Delta'') \text{ معناه } \begin{cases} 1 = -\frac{1}{3} + \alpha \\ 3 = \frac{1}{3} + 2\alpha \\ -1 = \frac{5}{3} - 2\alpha \end{cases} \text{ أي } \alpha = \frac{4}{3} \text{ وحيد ومنه } B \in (\Delta'').$$

$$\text{إذن } (\Delta') \cap (\Delta'') = \{B\}$$

6. الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(t) = BM^2$

أ - تبين أن: $f(t) = 9t^2 - 24t + 20$.

$$f(t) = BM^2 = (1+t-1)^2 + (1+2t-3)^2 + (3-2t+1)^2$$

$$f(t) = t^2 + 4t^2 - 8t + 4 + 4t^2 - 16t + 16$$

$$f(t) = 9t^2 - 24t + 20$$

ب - تبين أن f تقبل قيمة حدية صغرى $f(t_0)$ يُطلب تعيين t_0 و $f(t_0)$.

الدالة f تقبل الإستقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي t : $f'(t) = 18t - 24$

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$f'(t)$		0	
$f(t)$		4	

الدالة تقبل قيمة حدية صغرى تبلغها عند $t = \frac{4}{3}$ وهي $f\left(\frac{4}{3}\right) = 4$ وعليه $t_0 = \frac{4}{3}$ و $f(t_0) = 4$.

جـ - التحقق أن $d = \sqrt{f(t_0)}$.

$$d = 2 = f(t_0)$$

التمرين الثاني:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$.
 $\Delta = 2 - 4 = -2 = (i\sqrt{2})^2$ للمعادلة حلان هما $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، A ، B و C نقط من المستوي

لاحقاتها على الترتيب: $z_A = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = z_A + z_B$.

أ - كتابة على الشكل الأسّي الأعداد المركبة: z_A ، z_B و $\frac{z_A}{z_B}$.

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad z_B = \overline{z_A} = e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad z_A = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

ب - تعيين لاحقة كل من A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C على الترتيب بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned} z_{A'} &= e^{i\frac{\pi}{4}} z_A \quad \text{ومنه } z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{وعليه } z_{A'} = i \\ z_{B'} &= e^{i\frac{\pi}{4}} z_B \quad \text{ومنه } z_{B'} = e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i(0)} = 1 \quad \text{وعليه } z_{B'} = 1 \\ z_{C'} &= e^{i\frac{\pi}{4}} z_C \quad \text{ومنه } z_{C'} = e^{i\frac{\pi}{4}} (z_A + z_B) = e^{i\frac{\pi}{4}} z_A + e^{i\frac{\pi}{4}} z_B = z_{A'} + z_{B'} = 1 + i \end{aligned}$$

جـ - تبين أن الرباعي $OA'C'B'$ مربع.

لدينا $z_{A'} = i$ و $z_{C'} - z_{B'} = 1 + i - 1 = i$ ومنه $z_{C'} - z_{B'} = z_{A'}$ وهذا يعني أن $\overline{B'C'} = \overline{OA'}$

زيادة على هذا لدينا $\frac{z_{A'}}{z_{B'}} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ وهذا يعني أن $OA' = OB'$ و $(\overline{OB'}; \overline{OA'}) = \frac{\pi}{2}$

إذن $OA'C'B'$ مربع.

طريقة ثانية:

لدينا $z_C = z_A + z_B$ معناه $z_C - z_B = z_A$ أي $\overline{BC} = \overline{OA}$

ولدينا $\frac{z_A}{z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ معناه $OA = OB$ و $(\overline{OB}; \overline{OA}) = \frac{\pi}{2}$ إذن $OACB$ مربع وبالتالي صورته بالدوران السابق

$OA'C'B'$ مربع.

3. نسمي (Δ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $|z - z_A| = |z - z_B|$.

أ - تبين أن (Δ) هو محور الفواصل.

$|z - z_A| = |z - z_B|$ تعني $AM = BM$ بالتالي (Δ) هو محور القطعة $[AB]$ وبما أن $z_B = \overline{z_A}$ فإن

محور القطعة $[AB]$ هو محور الفواصل أي (Δ) هو محور الفواصل.

ب - تبين أن حلي المعادلة: $\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right)^2 = i$ عدنان حقيقيان.

يتساوى عدنان مركبان إذا تساوى طويلاتهما وعمدتهما بترديد 2π

$|z - z_A| = |z - z_B|$ أي $\frac{|z - z_A|}{|z - z_B|} = 1$ وتكافئ $\left(\frac{|z - z_A|}{|z - z_B|}\right)^2 = 1$ ومنه $\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right)^2 = i$ ومنه صورة العدد المركب z تنتمي (Δ) (محور الفواصل) وهذا يعني أن الحلين حقيقيين.

التمرين الثالث:

(I) لنكن g الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \ln x - \frac{2}{x} + 1$

1. دراسة تغيرات الدالة g .

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$

من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]0; +\infty[$ لدينا $g'(x) > 0$ وبالتالي الدالة متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln x - \frac{2}{x} + 1 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - \frac{2}{x} + 1 = +\infty$$

جدول تغيرات الدالة g .

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	+
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

2. (أ) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $1.4 < \alpha < 1.5$.

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$ وبالأخص على المجال $[1.4; 1.5]$ ولدينا $g(1.4) \approx -0.09$ و $g(1.5) \approx 0.07$ أي $g(1.4) \times g(1.5) < 0$ ومنه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $1.4 < \alpha < 1.5$ وهذا حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

(ب) استنتاج إشارة $g(x)$ ثم إشارة $g(x+1)$.

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

تعيين إشارة $g(x+1)$.

إذا كان $x > \alpha - 1$ فإن $x + 1 > \alpha$ ومنه $g(x+1) > 0$

إذا كان $-1 < x < \alpha - 1$ فإن $0 < x + 1 < \alpha$ ومنه $g(x+1) < 0$

ومن أجل $x = \alpha - 1$ يكون $x + 1 = \alpha$ ومنه $g(x+1) = 0$.

(II) الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = (x-1)\ln(x+1) + 1$

(C_f) المنحنى الممثل لها في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -1} x - 1 = -2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = \lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x-1)\ln(x+1) + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)\ln(x+1) + 1 = +\infty \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty$$

2. تبين أنه من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ فإن: $f'(x) = g(x+1)$

$$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x-1}{x+1} = \ln(x+1) + \frac{x+1-2}{x+1} = \ln(x+1) - \frac{2}{x+1} + 1 = g(x+1)$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f .

إذا كان $-1 < x < \alpha - 1$ فإن $g(x+1) < 0$ أي $f'(x) < 0$ إذن الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]-1; \alpha - 1[$.
إذا كان $x > \alpha - 1$ فإن $g(x+1) > 0$ أي $f'(x) > 0$ إذن الدالة f متناقصة تماماً على المجال $[\alpha - 1; +\infty[$.

3. جدول تغيرات الدالة f .

x	-1	$\alpha - 1$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha - 1)$	$+\infty$

4. تبين أن: $f(\alpha - 1) = 5 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$

لدينا $g(\alpha) = 0$ معناه $\ln \alpha - \frac{2}{\alpha} + 1 = 0$ أي $\ln \alpha = \frac{2}{\alpha} - 1$

ومنه $f(\alpha - 1) = (\alpha - 2)\ln(\alpha) + 1 = (\alpha - 2)\left(\frac{2}{\alpha} - 1\right) + 1$

$$f(\alpha - 1) = 2 - \alpha - \frac{4}{\alpha} + 2 + 1 = 5 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$$

استنتاج حصراً للعدد $f(\alpha - 1)$.

لدينا $1.4 < \alpha < 1.5$ تعني $-1.4 < -\alpha < -1.5$ أي $3.5 < 5 - \alpha < 3.6$

ولدينا $\frac{1}{1.4} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{1.5}$ معناه $\frac{4}{1.5} < \frac{4}{\alpha} < \frac{4}{1.4}$ يكافئ $2.66 < \frac{4}{\alpha} < 2.85$ أي $-2.85 < -\frac{4}{\alpha} < -2.66$

إذن $3.5 - 2.85 < 5 - \alpha - \frac{4}{\alpha} < 3.6 - 2.66$ أي $0.65 < f(\alpha) < 0.94$

(III) ليكن x_0 عدداً حقيقياً من المجال $]-1; +\infty[$ و (T_{x_0}) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 .

نعرف الدالة h على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $h(x) = f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)]$

1. تبين أن $h'(x) = f'(x) - f'(x_0)$

$$h'(x) = f'(x) - f'(x_0)$$

إشارة $h'(x)$ اعتماداً على رتبة الدالة f' .

لدينا $f'(x) = g(x+1)$ أي $f'(x) = g \circ u(x)$ حيث $u: x \mapsto x+1$

بما أن الدالة u متزايدة تماماً على المجال $]-1; +\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]0; +\infty[$ والدالة g متزايدة تماماً على المجال الموجب فإن الدالة f' متزايدة تماماً على $]-1; +\infty[$.

طريقة ثانية:

$$f''(x) = g'(x+1)$$

إذا كان $x \in]-1; +\infty[$ فإن $(x+1) \in]0; +\infty[$ ومنه $g'(x+1) > 0$ أي $f''(x) > 0$ ومنه الدالة f' متزايدة تماماً على المجال $]-1; +\infty[$.

اعتماداً على تزايد الدالة f' .

إذا كان $x > x_0$ فإن $f'(x) > f'(x_0)$ ومنه $f'(x) - f'(x_0) > 0$ أي $h'(x) > 0$.

إذا كان $-1 < x < x_0$ فإن $f'(x) < f'(x_0)$ ومنه $f'(x) - f'(x_0) < 0$ أي $h'(x) < 0$.

$$h'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

2. استنتاج تغيرات الدالة h ،

الدالة h متزايدة تماماً على المجال $[x_0; +\infty[$ ومتناقصة تماماً على المجال $] -1; x_0]$ فهي تقبل قيمة حدية صغرى على

المجال $] -1; +\infty[$ تبلغها عند $x = x_0$ وعليه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $] -1; +\infty[$ ، $h(x) > h(x_0)$

أي $h(x) > 0$. لأن $h(x) = f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)] = 0$

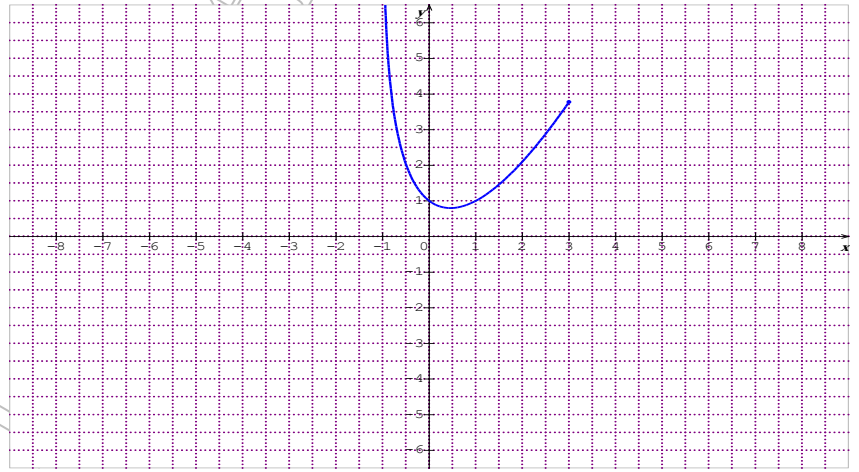
استنتاج الوضع النسبي لـ (C_f) و (T_{x_0}) .

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $] -1; +\infty[$ لدينا $h(x) > 0$ أي $f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)] > 0$

ومنه المنحنى (C_f) يوجد فوق مماسه (T_{x_0}) .

3. معادلة لـ (T_0) ثم أنشئنه.

4. إنشاء (C_f) على المجال $] -1; 3]$.



التمرين الرابع:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; 2]$ بـ: $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

1 أ - دراسة اتجاه تغير الدالة f

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $[0; 2]$:

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - (2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; 2]$ لدينا $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماماً على $[0; 2]$.

ب - تبين أنه إذا كان $x \in [1; 2]$ فإن $f(x) \in [1; 2]$

لدينا الدالة f متزايدة تماماً على $[0; 2]$.

إذا كان $1 \leq x \leq 2$ فإن $f(1) \leq f(x) \leq f(2)$ ومنه $\frac{3}{2} \leq f(x) \leq \frac{5}{2}$ وبما أن $\left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right] \subset [1; 2]$ فإن

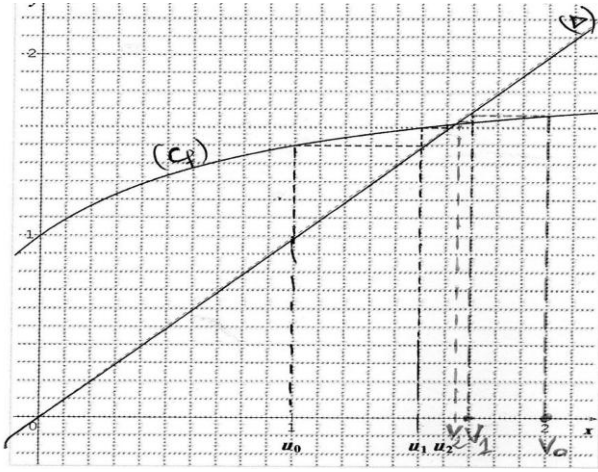
$f(x) \in [1; 2]$ إذن من أجل $x \in [1; 2]$ فإن $f(x) \in [1; 2]$

2 (u_n) و (v_n) متاليتان معرفتان بـ: $u_0 = 1$ و $v_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = f(u_n)$ و

$$v_{n+1} = f(v_n)$$

أ - رسم المنحنى (C) الممثل للدالة f والمستقيم ذي المعادلة

$$y = x.$$



ب - إعطاء تخميناً حول اتجاه تغير و تقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

من الشكل يبدو أن المتتالية (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة ويتقاربان نحو نفس العدد وهو فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C)

و المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$.

(3) برهن بالتراجع عن الخواص التالية:

من أجل كل عدد طبيعي n : " $1 \leq u_n \leq 2$ " ؛ " $1 \leq v_n \leq 2$ " ؛

" $u_n \leq u_{n+1}$ " و " $v_n \geq v_{n+1}$ ".

* لدينا $u_0 = 1$ ومنه $1 \leq u_0 \leq 2$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $1 \leq u_n \leq 2$ ونبرهن صحة الخاصية $1 \leq u_{n+1} \leq 2$

لدينا $1 \leq u_n \leq 2$ وحسب نتيجة السؤال (1) ب فإن $1 \leq f(u_n) \leq 2$ أي $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 2$.

* لدينا $v_0 = 2$ ومنه $1 \leq v_0 \leq 2$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $1 \leq v_n \leq 2$ ونبرهن صحة الخاصية $1 \leq v_{n+1} \leq 2$

لدينا $1 \leq v_n \leq 2$ وحسب نتيجة السؤال (1) ب فإن $1 \leq f(v_n) \leq 2$ أي $1 \leq v_{n+1} \leq 2$.

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq v_n \leq 2$.

* لدينا $u_0 = 1$ و $u_1 = f(u_0) = \frac{3}{2}$ ومنه $u_0 \leq u_1$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $u_n \leq u_{n+1}$ ونبرهن أن $u_{n+1} \leq u_{n+2}$

لدينا $u_n \leq u_{n+1}$ ولدينا الدالة f متزايدة تماماً على $[0; 2]$ ومنه $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ أي $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

وعليه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq u_{n+1}$.

* $v_0 = 2$ و $v_1 = f(v_0) = \frac{5}{3}$ ومنه $v_0 \geq v_1$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $v_n \geq v_{n+1}$ ونبرهن أن $v_{n+1} \geq v_{n+2}$

لدينا $v_n \geq v_{n+1}$ ولدينا الدالة f متزايدة تماماً على $[0; 2]$ ومنه $f(v_n) \geq f(v_{n+1})$ أي $v_{n+1} \geq v_{n+2}$.

وعليه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n \geq v_{n+1}$.

(4) أ - إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{2v_n + 1}{v_n + 1} - \frac{2u_n + 1}{u_n + 1} = \frac{(2v_n + 1)(u_n + 1) - (2u_n + 1)(v_n + 1)}{(v_n + 1)(u_n + 1)} \\ &= \frac{2v_n u_n + 2v_n + u_n + 1 - 2u_n v_n - 2u_n - v_n - 1}{(v_n + 1)(u_n + 1)} \\ &= \frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)} \end{aligned}$$

ب - استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n - u_n \geq 0$ و $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$

نستعمل البرهان بالتراجع.

لدينا $u_0 = 1$ و $v_0 = 2$ ومنه $v_0 - u_0 \geq 0$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $v_n - u_n \geq 0$ ونبرهن أن $v_{n+1} - u_{n+1} \geq 0$

$$.v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)}, n \text{ طبيعي}$$

ولدينا $(v_n + 1)(u_n + 1) > 0$ وحسب الفرضية $v_n - u_n \geq 0$ إذن $\frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)} \geq 0$ أي $v_{n+1} - u_{n+1} \geq 0$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n - u_n \geq 0$ وهذا حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع.

لدينا $u_n \geq 1$ و $v_n \geq 1$ ومنه $u_n + 1 \geq 2$ و $v_n + 1 \geq 2$ إذن $(u_n + 1)(v_n + 1) \geq 4$ يكافئ $\frac{1}{(u_n + 1)(v_n + 1)} \leq \frac{1}{4}$

$$.v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n) \text{ أي } \frac{v_n - u_n}{(u_n + 1)(v_n + 1)} \leq \frac{1}{4}v_n - u_n \text{ فإن } v_n - u_n \geq 0$$

$$(5) \text{ إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

نستدل على هذه الخاصية بالتراجع.

لدينا $\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$ و $v_0 - u_0 = 1$ ومنه $v_0 - u_0 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^0$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفترض أن $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ ونبرهن صحة الخاصية $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

لدينا $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ معناه $\frac{1}{4}(v_n - u_n) \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ أي $\frac{1}{4}(v_n - u_n) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

لكن مما سبق لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$

ومنه $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ أي $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

وعليه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

(6) استنتاج أن للمتتاليتين (u_n) و (v_n) نفس النهاية l .

لدينا $0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ وبما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ فحسب النهايات بالمقارنة $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$

ولدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq u_{n+1}$ و $v_n \geq v_{n+1}$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة والمتتالية (v_n) متناقصة

إذن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان فهما متقاربتان ولهما نفس النهاية l .

(7) تعيين القيمة المضبوطة للعدد l .

المتتالية (u_n) متقاربة إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ ولدينا $u_{n+1} = f(u_n)$ والدالة f مستمرة على $[0; 2]$

إذن بإخذ نهاية طرفي العلاقة نجد $l = f(l)$ ومنه $l = \frac{2l+1}{l+1}$ وتكافئ $l^2 - l - 1 = 0$ أي $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ أو $l = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

وبما أن $1 \leq u_n \leq 2$ فإن $1 \leq l \leq 2$ أي $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

دورة تدريبية

دورة أبريل 2015

امتحان البكالوريا التجريبية

الشعبة: جميع الشعب.

إعداد: مصطفى عبد العزيز

اختبار رقم 17 في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول: (خاص بالتقني والرياضي).

A_0 و B_0 نقطتان من المستوي بحيث $A_0B_0 = 8$ ؛ وليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A_0 نسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$

نعرّف متتالية النقط (B_n) بـ: $B_{n+1} = S(B_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n .

1. أنشئ النقط B_1, B_2 و B_3 .

2. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، المثلثان $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان.

3. نعرّف متتالية (u_n) بـ: $u_n = B_nB_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

أ - أثبت أن (u_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها q .

ب - اكتب u_n بدلالة n .

ج - نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ؛ احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

4. أ - حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة: $3x - 4y = 2$.

ب - ليكن (Δ) المستقيم العمودي على المستقيم (A_0B_0) في النقطة A_0 .

- أوجد قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون النقطة B_n تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

التمرين الثاني:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $A(-2; 0; 1)$ ، $B(1; 2; -1)$ و $C(-2; 2; 2)$.

(1) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ، ثم استنتج القيمة المدورة إلى الوحدة، بالدرجات للزاوية $\widehat{BAC}$

(2) استنتج أن النقط A, B و C ليست في استقامة وأن $2x - y + 2z + 2 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

(3) أ - اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) ؛ المحوري للقطعة $[AB]$.

ب - بيّن أن مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق $AM = CM$ هي مستو (P') معادلته

$$4y + 2z - 7 = 0.$$

ج - بيّن أن (P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

(4) أ - بيّن أن المستقيم (Δ) يقطع المستوي (ABC) في نقطة ω يطلب تعيين إحداثياتها.

ب - استنتج أن ω هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

(5) نعتبر النقطة G_α مرجح الجملة المتقلة $\{(A; \alpha^2 - 1), (B; \alpha^2 + 2), (C; -2\alpha^2)\}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$.

- عيّن مجموعة النقط G_α عندما تتغير α في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

التمرين الثالث:

في الشكل المقابل، (C) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة

$$\text{على المجال }]0; 4] \text{ بالعلاقة } f(x) = \frac{3x-1}{2x}, \text{ و } (d)$$

المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

1. أ - أثبت أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; 4]$.

ب - حدّد الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (d)

3. نعرّف المتتالية (u_n) كما يلي: $u_0 = 2$ ومن أجل كل

$$\text{عدد طبيعي } n: u_{n+1} = f(u_n).$$

أ - مثّل على محور الفواصل وبدون حساب الحدود:

$$u_0, u_1, u_2$$

ب - ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

4. أ - برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي $n: 1 < u_{n+1} < u_n \leq 2$.

ب - استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة واحسب نهايتها.

5. أ - بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_{n+1} - 1 < \frac{1}{2}(u_n - 1)$.

ب - استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

ج - استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ مرّة أخرى.

التمرين الرابع:

في الشكل المقابل (C) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة والقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

المنحنى (C) يمر من النقطة $A(3;1)$

ويقبل عند النقطة $B(2; e+1)$ مماسا موازيا لمحور

الفواصل؛ ومماسا (T) يخترق (C) عند

النقطة $C(1;3)$.

بقراءة بيانية:

1. عيّن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $f'(1)$, $f''(1)$.

2. اكتب معادلة للمماس (T).

3. بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

على المجال $]3; +\infty]$ ، ثم استنتج إشارة $f(x)$.

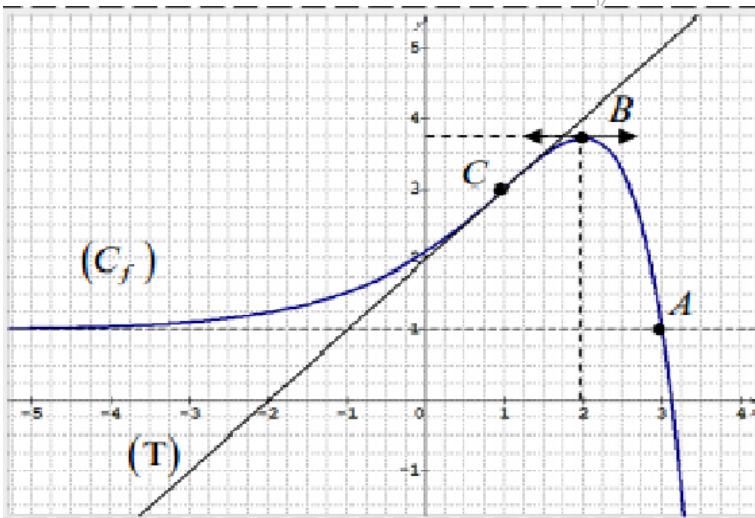
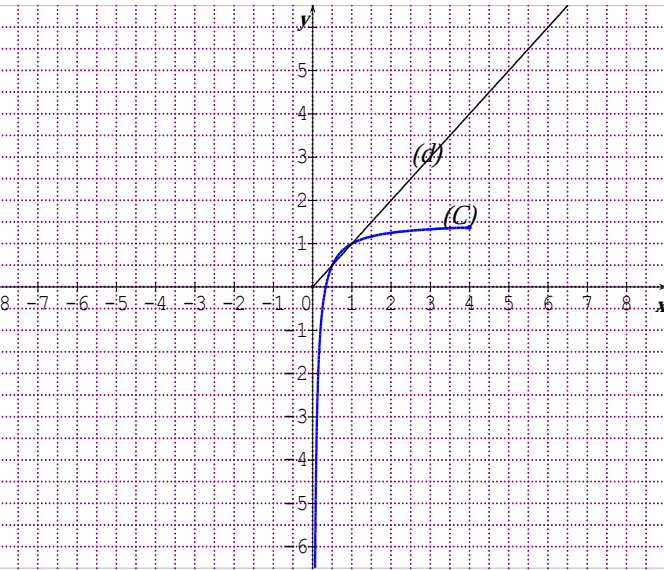
4. شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

5. ناقش، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = f(m)$.

6. لتكن h الدالة المعرفة على المجال $]-\infty; \alpha[$ بـ: $h(x) = f(x) - \ln[f(x)]$.

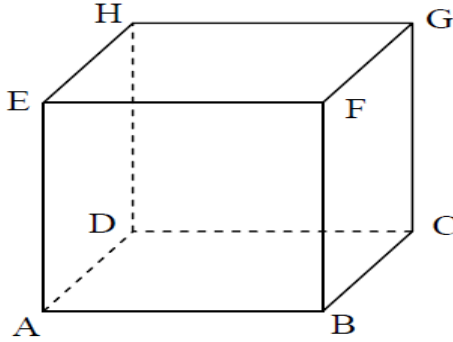
- أعط عبارة $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$.

- استنتج اتجاه تغيّر الدالة h ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.



الموضوع الثاني:التمرين الأول:

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 1؛ الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$ والنقطة K هي مرجح الجملة المتقلة $\{(F; 2), (D; 1)\}$.

الجزء الأول:

1. أثبت أن إحداثيات النقطة K هي $(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$.

2. أثبت أن المستقيمين (EK) و (DF) متعامدان.

3. احسب الطول EK .

الجزء الثاني:

لتكن M نقطة من القطعة $[HG]$ حيث $HM = m$ مع $m \in [0; 1]$

1. أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي m من المجال $[0; 1]$ فإن حجم رباعي الوجوه $EMFD$ يساوي $\frac{1}{6}$.

2. أثبت أن معادلة ديكرتية للمستوي (MFD) هي: $(m-1)x + y - mz = 0$.

3. نسمي d_m المسافة بين النقطة E والمستوي (MFD) .

(أ) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي m من المجال $[0; 1]$ ، $d_m = \frac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}$.

(ب) عيّن وضعية النقطة M على القطعة $[HG]$ بحيث تكون من أجلها المسافة d_m أكبر ما يمكن.

(ج) استنتج أنه إذا كانت المسافة d_m أكبر ما يمكن فإن النقطة K هي المسقط العمودي للنقطة E على المستوي (MFD) .

التمرين الثاني: (خاص بالتقني والرياضي)

1. من أجل كل عدد حقيقي t أنشر العبارة $(t-6)(t^2+1)$.

2. a, b, c أعداد طبيعية تكتب في نظام التعداد ذي الأساس p كما يلي: $a = 102$ ، $b = 125$ و $c = 13154$.

أ - علما أن $ab = c$ جد قيمة العدد الحقيقي p .

ب - اكتب كلا من الأعداد a, b, c في النظام العشري.

3. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $38x - 53y = 15$(1)

أ - بين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن $x \equiv 52[53]$

ب - استنتج حلول المعادلة (1).

4. نعتبر الآن x و y عدداً طبيعيين ونسمي d قاسمهما المشترك الأكبر.

أ - عيّن القيم الممكنة للعدد d .

ب - جد كل الثنائيات $(x; y)$ بحيث يكون $d = 15$.

5. أ - ادرس، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7.

ب - من أجل كل $(x; y)$ من $\mathbb{N}^2$ حلول المعادلة (1)؛ عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد $2013^x \times 1432^{2y}$ على 7.

التمرين الثالث:

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C, D ذات اللاحقات:

$$z_D = -i \text{ و } z_C = 1+2i \text{ و } z_B = 4+i \text{ و } z_A = 4-i$$

(1) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A ويحول B إلى D .

أ - اكتب العبارة المركبة للتشابه S محددا نسبته وزاويته.

ب - عيّن z_E لاحقة النقطة E ؛ علما أنّ O هي صورة E بالتشابه S .

$$(2) \text{ أ - اكتب العدد المركب } \frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} \text{ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي.}$$

ب - ما طبيعة المثلث BCD .

ج - بيّن أنّ النقط A, B, D و C تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

$$(3) (\Gamma) \text{ مجموعة النقط } M \text{ من المستوي ذات اللاحقة } z \text{ بحيث: } |2iz + 2 - 9i| = 1.$$

أ - تحقق أنّ النقطة B تنتمي إلى (Γ) .

ب - عيّن طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة.

التمرين الرابع:

I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 1 - xe^x$.

1. ادرس تغيّرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

2. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0; +\infty[$ ، ثم تحقق أنّ $0.5 < \alpha < 1$.

3. عيّن إشارة $g(x)$ على المجال $[0; +\infty[$.

II - f الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x+1}{e^x + 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى

المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. بيّن أنّ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

$$2. \text{ أ - بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من المجال } [0; +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{(e+1)^2}$$

ب - بيّن أنّ $f(\alpha) = \alpha$ ، ثم شكل جدول تغيّرات الدالة f .

$$3. \text{ أ - بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من المجال } [0; +\infty[: f(x) - x = \frac{g(x)}{e^x + 1}$$

ب - استنتج وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$.

4. ارسم (Δ) و (C_f) .

III - 1. بيّن أنه إذا كان $x \in [0; \alpha]$ فإنّ $f(x) \in [0; \alpha]$.

2. (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 0$ ومن أجل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

ب - باستعمال (Δ) و (C_f) مثل على محور الفواصل الحدود: u_0, u_1, u_2 ثم خمن اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

ج - برهن أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم جد نهايتها.

حل الموضوع الأول:**التمرين الأول:** (خاص بالتقني والرياضي).

A_0 و B_0 نقطتان من المستوي بحيث $A_0B_0 = 8$ ؛ وليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A_0 ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$

نعرّف متتالية النقط (B_n) بـ: $B_{n+1} = S(B_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n .

1. أنشئ النقط B_1 ، B_2 و B_3 .

2. إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، المثلثان $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $A_0 = S(A_0)$ و $B_{n+1} = S(B_n)$ و $B_{n+2} = S(B_{n+1})$

ومنه المثلث $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ هو صورة المثلث $A_0B_nB_{n+1}$ بالتشابه S وبالتالي المثلثان $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان.

3. نعرّف متتالية (u_n) بـ: $u_n = B_nB_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

أ - إثبات أن (u_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها q .

لدينا $B_{n+1} = S(B_n)$ و $B_{n+2} = S(B_{n+1})$ إذن $B_{n+1}B_{n+2} = \frac{1}{2}B_nB_{n+1}$ أي $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$ وبالتالي (u_n) متتالية

هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$.

ب - كتابة u_n بدلالة n .

$$u_n = u_0 q^n = u_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ج - نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ؛ حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

$$S_n = u_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2u_0 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right)$$

لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2u_0$.

4. أ - حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة: $3x - 4y = 2$.

لاحظ أن الثنائية $(2;1)$ حلا للمعادلة لدينا إذن $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 3 \times 2 - 4 \times 1 = 2 \end{cases}$ بالطرح نجد $3(x-2) - 4(y-1) = 0$

ومنه $3(x-2) = 4(y-1)$ لدينا 4 يقسم $3(x-2)$ والعددان 4 و 3 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص

4 يقسم $(x-2)$ ومنه $x-2 = 4k$ أي $x = 4k + 2$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ وبالتعويض في $3(x-2) = 4(y-1)$ نجد

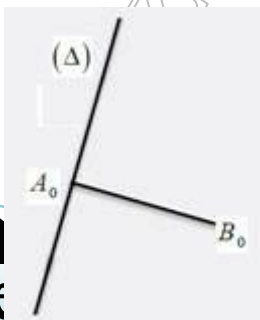
$3 \times 4k = 4(y-1)$ أي $y = 3k + 1$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

وبالتالي حلول المعادلة هي الثنائيات من الشكل $(4k+2; 3k+1)$ حيث k عدد صحيح.

ب - ليكن (Δ) المستقيم العمودي على المستقيم (A_0B_0) في النقطة A_0 .

- إيجاد قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون النقطة B_n تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

لدينا $B_{n+1} = S(B_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n .



$$B_1 = S(B_0)$$

$$B_2 = S(S(B_0)) = S \circ S(B_0) \text{ ومنه } B_2 = S(B_1)$$

$$B_3 = S(S \circ S(B_0)) = S \circ S \circ S(B_0) \text{ ومنه } B_3 = S(B_2)$$

$$B_n = \underbrace{S \circ S \circ \dots \circ S}_{n \text{ مر}}(B_0)$$

نعلم أن تركيب التشابهات ذات المركز A_0 والنسبة $\frac{1}{2}$ والزاوية $\frac{3\pi}{4}$ هو تشابه مباشر مركزه A_0 نسبته $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\text{وزاويته } \frac{3n\pi}{4} \text{ لدينا } B_n \text{ صورة } B_0 \text{ بالتشابه } \underbrace{S \circ S \circ \dots \circ S}_{n \text{ مر}} \text{ إذن } (\overrightarrow{A_0 B_0}; \overrightarrow{A_0 B_n}) = \frac{3n\pi}{4}$$

$$B_n \in (\Delta) \text{ معناه } (\overrightarrow{A_0 B_0}; \overrightarrow{A_0 B_n}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ويكافئ } \frac{3n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ومنه } \frac{3n}{4} = \frac{1}{2} + k \text{ وعليه } 3n - 4k = 2 \text{ وحسب ما سبق } n = 4\alpha + 2 \text{ حيث } \alpha \in \mathbb{N}$$

التمرين الثاني:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $A(-2; 0; 1)$ ، $B(1; 2; -1)$ و $C(-2; 2; 2)$.

(1) حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 0 + 2 \times 2 - 2 \times 1 = 2 \text{ ومنه } \overrightarrow{AC}(0; 2; 1), \overrightarrow{AB}(3; 2; -2)$$

استنتاج القيمة المدورة إلى الوحدة، بالدرجات للزاوية $\widehat{BAC}$

$$\text{لدينا } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \text{ ومن جهة أخرى } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \text{ إذن } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 = AB \times AC \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$$

$$\text{ومنه } \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{2}{AB \times AC} \text{ لكن } AB = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17} \text{ و } AC = \sqrt{0+4+1} = \sqrt{5}$$

$$\text{إذن } \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{2}{\sqrt{17} \times \sqrt{5}} \approx 0.22 \text{ وعليه } \widehat{BAC} \approx 77^\circ$$

(2) استنتج أن النقط A ، B و C ليست في استقامية وأن $2x - y + 2z + 2 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

بما أن $\widehat{BAC} \neq 0$ و $\widehat{BAC} \neq \pi$ فإن النقط A ، B و C تعين مستويا.

$$\text{ولدينا } 2x_A - y_A + 2z_A + 2 = 2(-2) - 0 + 2(1) + 2 = 0, 2x_B - y_B + 2z_B + 2 = 2(1) - 2 + 2(-1) + 2 = 0, 2x_C - y_C + 2z_C + 2 = 2(-2) - 2 + 2(2) + 2 = 0$$

و $2x - y + 2z + 2 = 0$ وعليه $2x_C - y_C + 2z_C + 2 = 0$ ومنه إحداثيات النقط A ، B و C تحقق المعادلة

$$2x - y + 2z + 2 = 0 \text{ وعليه } 2x - y + 2z + 2 = 0 \text{ معادلة ديكارتية للمستوي } (ABC).$$

(3) أ - كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P) ؛ المحوري للقطعة $[AB]$.

$$\text{لتكن } I \text{ منتصف القطعة } [AB] \text{ إذن } I\left(\frac{-1}{2}; 1; 0\right)$$

المستوي (P) شعاعه الناظمي $\overrightarrow{AB}(3; 2; -2)$ إذن له معادلة من الشكل $3x + 2y - 2z + d = 0$ ولدينا $I \in (P)$

$$\text{يعني } -\frac{3}{2} + 2 + d = 0 \text{ أي } d = \frac{-1}{2} \text{ ومنه } 3x + 2y - 2z - \frac{1}{2} = 0 \text{ وتكافئ } 6x + 4y - 4z - 1 = 0 \text{ وهي معادلة ديكارتية للمستوي } (P).$$

ب - تبين أن مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق $AM = CM$ هي مستو (P') معادلته

$$4y + 2z - 7 = 0 \text{ الديكارتية}$$

(P') هو المستوي المحوري للقطعة [AC] أي هو المستوي الذي يشمل $H\left(-2;1;\frac{3}{2}\right)$ منتصف [AC] وشعاعه الناظمي $\overrightarrow{AC}(0;2;1)$.

إذن المستوي (P') له معادلة من الشكل $2y + z + d = 0$ ولدينا $H \in (P')$ تعني $2 + \frac{3}{2} + d = 0$ أي $d = -\frac{7}{2}$ ومنه $2y + z - \frac{7}{2} = 0$ وتكافئ $4y + 2z - 7 = 0$ وهي معادلة ديكراتية للمستوي (P').

جـ - تبين أن (P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

لدينا الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه المستويان (P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم (Δ). كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).
لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

$$\begin{cases} 6x + 4t - 4z - 1 = 0 \dots (1) \\ 4t + 2z - 7 = 0 \dots (2) \end{cases} \text{ وبوضع } y = t \text{ تصبح الجملة} \begin{cases} 6x + 4y - 4z - 1 = 0 \\ 4y + 2z - 7 = 0 \end{cases} \text{ معناه } M \in (\Delta)$$

من (2) نجد $z = -2t + \frac{7}{2}$ وبالتعويض في (1) نجد $6x + 4t - 4\left(-2t + \frac{7}{2}\right) - 1 = 0$ ومنه $6x + 12t - 15 = 0$

$$\text{أي } \begin{cases} x = -2t + \frac{5}{2} \\ y = t \\ z = -2t + \frac{7}{2} \end{cases} \text{ وعليه } (\Delta):$$

4 أ - تبين أن المستقيم (Δ) يقطع المستوي (ABC) في نقطة ω يطلب تعيين إحداثياتها.

لدينا $\vec{u}(-2;1;-2)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) و $\vec{n}(2;1;2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) وهما مرتبطين خطيا إذن (Δ) يعامد المستوي (ABC) فهما يتقاطعان في نقطة ω.

لدينا $\omega \in (\Delta)$ ومنه إحداثيات ω من الشكل $\omega\left(-2t + \frac{5}{2}; t; -2t + \frac{7}{2}\right)$

ولدينا $\omega \in (ABC)$ معناه $2x_\omega - y_\omega + 2z_\omega + 2 = 0$ وعليه $2\left(-2t + \frac{5}{2}\right) - t + 2\left(-2t + \frac{7}{2}\right) + 2 = 0$

ويكافئ $-4t + 5 - t - 4t + 7 + 2 = 0$ أي $t = \frac{14}{9}$ وعليه $\omega\left(-2\left(\frac{14}{9}\right) + \frac{5}{2}; \frac{14}{9}; -2\left(\frac{14}{9}\right) + \frac{7}{2}\right)$

أي $\omega\left(-\frac{11}{18}; \frac{14}{9}; \frac{7}{18}\right)$.

ب - استنتاج أن ω هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

لدينا $\omega \in (\Delta)$ معناه $\omega \in (P)$ و $\omega \in (P')$ ومنه $\omega A = \omega B = \omega C$ وبما أن $\omega \in (ABC)$ فإن ω هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

5) نعتبر النقطة G_α مرجح الجملة المثقلة $\{(A; \alpha^2 - 1), (B; \alpha^2 + 2), (C; -2\alpha^2)\}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$.

- تعيين مجموعة النقط G_α عندما تتغير α في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

بما أن $(\alpha^2 - 1) + (\alpha^2 + 2) - 2\alpha^2 = 1$ فإن G_α موجودة من أجل كل عدد حقيقي α.

$$\begin{cases} x_{G_\alpha} = 3\alpha^2 + 4 \\ y_{G_\alpha} = -2\alpha^2 + 4 (\alpha \in \mathbb{R}) \text{ معناه} \\ z_{G_\alpha} = -4\alpha^2 - 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{G_\alpha} = \frac{(\alpha^2 - 1) \times -2 + (\alpha^2 + 2) \times 1 - 2\alpha^2 \times -2}{1} \\ y_{G_\alpha} = \frac{(\alpha^2 - 1) \times 0 + (\alpha^2 + 2) \times 2 - 2\alpha^2 \times 2}{1} \\ z_{G_\alpha} = \frac{(\alpha^2 - 1) \times 1 + (\alpha^2 + 2) \times -1 - 2\alpha^2 \times 2}{1} \end{cases} \quad \text{لدينا}$$

وبوضع $\alpha^2 = \beta$ نجد $\alpha^2 = \beta$ $\beta \in \mathbb{R}^+$ إذن مجموعة النقط G_α هي نصف مستقيم مبدؤه $J(4; 4; -3)$

$$\begin{cases} x_{G_\alpha} = 3\beta + 4 \\ y_{G_\alpha} = -2\beta + 4 (\beta \in \mathbb{R}^+) \\ z_{G_\alpha} = -4\beta - 3 \end{cases}$$

وشعاع توجيهه $\vec{v}(3; -2; -4)$.

التمرين الثالث:

في الشكل المقابل، (C) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على

المجال $]0; 4]$ بالعلاقة $f(x) = \frac{3x-1}{2x}$ ، و (d) المستقيم ذو

المعادلة $y = x$.

1. أ - إثبات أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]0; 4]$.

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]0; 4]$ ولدينا

$$f'(x) = \frac{3(2x) - 2(3x-1)}{4x^2} = \frac{1}{2x^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; 4]$ ، $f'(x) > 0$ ، وبالتالي الدالة f متزايدة تماماً على $]0; 4]$.

ب - تحديد الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (d)

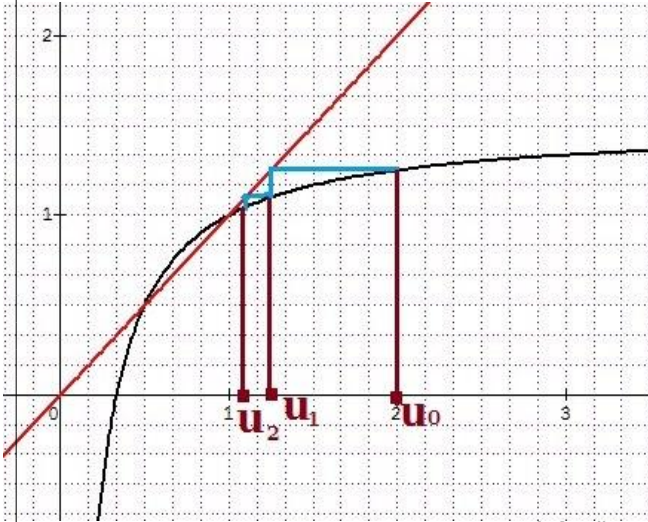
$$f(x) - x = \frac{3x-1}{2x} - x = \frac{3x-1-2x^2}{2x}$$

x	0	$\frac{1}{2}$	1	4
$-2x^2 + 3x - 1$	-	0	+	-
$2x$	+	+	+	+
$f(x) - x$	-	0	+	-

من أجل $x \in]0; \frac{1}{2}[\cup]1; 4]$ ، $f(x) - x < 0$ ومنه المنحنى (C) يقع تحت (d) .

وفي المجال $]\frac{1}{2}; 1[$ ، $f(x) - x > 0$ ، ومنه المنحنى (C) يقع تحت (d) .

يتقاطعان في نقطتين إحداثيتهما $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ و $(1; 1)$.



3. نعرّف المتتالية (u_n) كما يلي: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ - تمثيل على محور الفواصل الحدود: u_0, u_1, u_2

ب - يبدو أن المتتالية (u_n) متناقصة ومتقاربة نحو العدد 1.

4. أ - برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_{n+1} < u_n \leq 2$.

لدينا $u_1 = f(u_0) = \frac{5}{4}$ ومنه $1 < u_1 < u_0 \leq 2$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $1 < u_{n+1} < u_n \leq 2$ ونبرهن أن $1 < u_{n+2} < u_{n+1} \leq 2$.

$1 < u_{n+1} < u_n \leq 2$ معناه $f(1) < f(u_{n+1}) < f(u_n) \leq f(2)$ لأن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]0; 4]$.

ويكافئ $1 < u_{n+2} < u_{n+1} \leq \frac{5}{4}$ أي $1 < u_{n+2} < u_{n+1} \leq 2$ إذن من أجل كل عدد طبيعي n , $1 < u_{n+1} < u_n \leq 2$.

ب - استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} < u_n$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة وبما أنها محدودة من الأسفل بالعدد 1

فهي متقاربة نحو عدد حقيقي l .

حساب نهايتها.

لدينا المتتالية (u_n) متقاربة إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

$u_{n+1} = f(u_n)$ تعني $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)$ وبما أن الدالة f مستمرة عند العدد l فإن $l = f(l)$

ومنه $l = \frac{3l-1}{2l}$ يكافئ $2l^2 - 3l + 1 = 0$ أي $l = 1$ أو $l = \frac{1}{2}$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $1 < u_n \leq 2$

فإن $l = 1$ إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

5. أ - تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 < \frac{1}{2}(u_n - 1)$.

ليكن n عدداً طبيعياً؛

$$u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1 = \frac{3u_n - 1 - 2u_n}{2u_n} = \frac{u_n - 1}{2u_n}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n > 1$ معناه $2u_n > 2$ يكافئ $\frac{1}{2u_n} < \frac{1}{2}$ وبما أن $u_n - 1 > 0$ ، فإن

$$u_{n+1} - 1 < \frac{1}{2}(u_n - 1) \text{ أي } \frac{u_n - 1}{2u_n} < \frac{1}{2}(u_n - 1)$$

ب - استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

نستعمل البرهان بالتراجع.

لدينا $u_0 - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^0$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $u_n - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ومنه $\frac{1}{2}(u_n - 1) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ أي $\frac{1}{2}(u_n - 1) < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ وحسب السؤال السابق لدينا

من أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} - 1 < \frac{1}{2}(u_n - 1)$ ومنه $u_{n+1} - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ أي $u_{n+1} - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

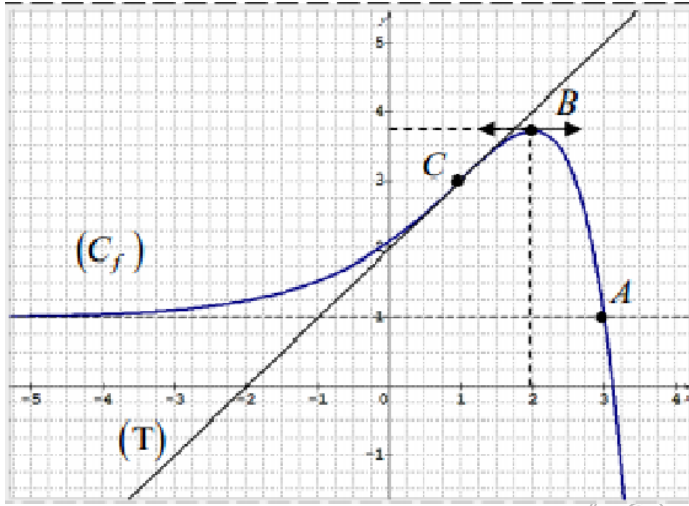
ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

جـ - استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ مرة أخرى.

لدينا $0 < u_n - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n$ وبما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ حسب النهايات بالمقارنة $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - 1 = 0$ أي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

التمرين الرابع:

في الشكل المقابل (C) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة والقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$



المنحني (C) يمر من النقطة $A(3;1)$

ويقبل عند النقطة $B(2;e+1)$ مماساً موازياً لمحور

الفواصل؛ ومماساً (T) يخترق (C) عند

النقطة $C(1;3)$.

بقراءة بيانية:

1. تعيين $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ، $f''(1)$ ، $f'(1)$ ، $f'(2)$

$f'(2) = 0$ لأن المماس عند النقطة B ذات الفاصلة 2

ميله معدوم

$f'(1)$ هو معامل توجيه المماس عند النقطة ذات الفاصلة

1 أي هو معامل توجيه المماس (T).

$$f'(1) = \frac{2-0}{0-(-2)} = 1$$

لدينا المماس (T) يخترق المنحني (C) عند نقطة التماس $C(1;3)$ وهذا يعني أن النقطة $C(1;3)$ هي نقطة

إنعطاف للمنحني (C) وبما أن الدالة تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن $f''(1) = 0$.

2. كتابة معادلة للمماس (T).

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$ ومنه $y = 1(x-1) + 3$ أي $y = x + 2$ (T).

3. تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α على المجال $]3; +\infty[$.

لدينا الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]3; +\infty[$ فهي مستمرة على هذا المجال وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty; 1]$

و $0 \in]-\infty; 1]$ إذن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α على المجال $]3; +\infty[$.

استنتاج إشارة $f(x)$.

من البيان نستخلص إشارة $f(x)$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

4. تشكيل جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	2	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	1	$e+1$	0	$-\infty$

5. المناقشة، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = f(m)$.

إذا كان $m \in [3; +\infty[$ فإن $f(m) \in]-\infty; 1]$ ومنه المعادلة تقبل حلاً واحداً.

إذا كان $m \in]-\infty; 2[\cup]2; 3[$ فإن $f(m) \in]1; e+1[$ ومنه المعادلة تقبل حلين.

إذا كان $m = 2$ فإن $f(m) = e+1$ ومنه المعادلة تقبل حلاً مضاعفاً.

6. لتكن h الدالة المعرفة على المجال $]-\infty; \alpha[$ بـ: $h(x) = f(x) - \ln[f(x)]$.

- عبارة $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$.

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(x)(f(x) - 1)}{f(x)}$$

- استنتاج اتجاه تغير الدالة h .

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; \alpha[$ ، $f(x) > 0$ ومنه إشارة $h'(x)$ هي من نفس إشارة $f'(x)(f(x) - 1)$.

من أجل $x \in]-\infty; 3[$ ، $f(x) > 1$ أي $f(x) - 1 > 0$

من أجل $x \in]3; +\infty[$ ، $f(x) < 1$ أي $f(x) - 1 < 0$

توضيح: في المجال $]-\infty; 3[$ ، (C) يكون فوق المستقيم ذي المعادلة $y = 1$ أي $f(x) > 1$

x	$-\infty$	2	3	α
$f'(x)$	+	0	-	-
$f(x) - 1$	+	+	0	-
$h'(x)$	+	0	-	+

الدالة h متزايدة على كل من $]-\infty; 2[$ و $]3; \alpha[$ ومتناقصة تماماً على $[2; 3]$.

جدول تغيرات الدالة h .

x	$-\infty$	2	3	α
$h'(x)$	+	0	-	+
$h(x)$	1	$h(2)$	1	$+\infty$

حل الموضوع الثاني:

التمرين الأول:

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 1؛ الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$

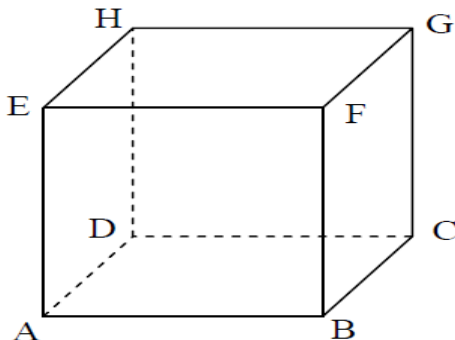
والنقطة K هي مرجح الجملة المثقلة $\{(F; 2), (D; 1)\}$.

الجزء الأول:

1. إثبات أن إحداثيات النقطة K هي $(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$.

لدينا $D(0; 0; 0)$ ، $F(1; 1; 1)$

$$2\overrightarrow{KD} + 2\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{KD} = \vec{0} \text{ معناه } 2\overrightarrow{KF} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$$



$$\text{يكافئ } 3\overrightarrow{KD} = -2\overrightarrow{DF} \text{ أي } \overrightarrow{DK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DF} \text{ ومنه}$$

$$. \left(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH} \right) \text{ في المعلم } \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right) \text{ هي وبالتالي إحداثيات } K \text{ هي } z_K = \frac{2}{3}z_F \text{ و } y_K = \frac{2}{3}y_F, x_K = \frac{2}{3}x_F$$

2. إثبات أن المستقيمين (EK) و (DF) متعامدان.

$$\text{لدينا } E(1;0;1) \text{ ومنه } \overrightarrow{EK} \left(\frac{2}{3} - 1; \frac{2}{3}; \frac{2}{3} - 1 \right) \text{ أي } \overrightarrow{EK} \left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3} \right) \text{ ولدينا } \overrightarrow{DF}(1;1;1).$$

$$\text{إذن } \overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{DF} = -\frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 1 - \frac{1}{3} \times 1 = \frac{-2}{3} + \frac{2}{3} = 0 \text{ وهذا يعني أن } \overrightarrow{EK} \perp \overrightarrow{DF} \text{ وبالتالي المستقيمان } (EK) \text{ و } (DF) \text{ متعامدان.}$$

3. حساب الطول EK .

$$EK = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

الجزء الثاني:

لتكن M نقطة من القطعة $[HG]$ حيث $HM = m$ مع $m \in [0;1]$

1. إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي m من المجال $[0;1]$ فإن حجم رباعي الوجوه $EMFD$ يساوي $\frac{1}{6}$.

$$V(EMFD) = \frac{1}{3}S(EMF) \times DH \text{ ؛ لتكن } I \text{ المسقط العمودي للنقطة } M \text{ على المستقيم } (EF) \text{ إذن}$$

$$S(EMF) = \frac{EF \times MI}{2} = \frac{1}{2}ua \text{ وعليه } MI = HE = 1$$

$$\text{وبالتالي } V(EMFD) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}uv$$

2. إثبات أن معادلة ديكارتية للمستوي (MFD) هي: $(m-1)x + y - mz = 0$.

$$\text{لدينا } D(0;0;0), F(1;1;1) \text{ و } M(0;m;1)$$

$$(m-1)x_D + y_D - mz_D = (m-1) \times 0 + 0 - m \times 0 = 0$$

$$(m-1)x_F + y_F - mz_F = (m-1) \times 1 + 1 - m \times 1 = 0$$

$$(m-1)x_M + y_M - mz_M = (m-1) \times 0 + m - m \times 1 = 0$$

ومنه إحداثيات النقط D, F, M تحقق المعادلة $(m-1)x + y - mz = 0$ وعليه $(m-1)x + y - mz = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (MFD) .

3. نسمي d_m المسافة بين النقطة E والمستوي (MFD) .

$$\text{أ) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي } m \text{ من المجال } [0;1], d_m = \frac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}$$

$$\text{لدينا } E(1;0;1) \text{ إذن } d_m = \frac{|(m-1) \times 1 + 0 - m|}{\sqrt{(m-1)^2 + 1 + m^2}} = \frac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}$$

ب) تعيين وضعية النقطة M على القطعة $[HG]$ بحيث تكون من أجلها المسافة d_m أكبر ما يمكن.

تكون المسافة d_m أكبر ما يمكن عندما يكون $\sqrt{2m^2 - 2m + 2}$ أصغر ما يمكن.

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ بـ: $f(m) = \sqrt{2m^2 - 2m + 2}$.

الدالة f تقبل الاشتقاق على $[0;1]$ ولدينا $f'(m) = \frac{4m-2}{2\sqrt{2m^2-2m+2}} = \frac{2m-1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$

إشارة $f'(m)$ هي نفس إشارة $2m-1$.

$f'(m) = 0$ تعني $2m-1=0$ أي $m = \frac{1}{2}$.

$f'(m) > 0$ تعني $2m-1 > 0$ أي $\frac{1}{2} < m < 1$.

$f'(m) < 0$ تعني $2m-1 < 0$ أي $0 < m < \frac{1}{2}$.

وبالتالي الدالة f متناقصة تماماً على $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ ومنتزعة تماماً على $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(m)$	-	0	+
$f(m)$			

تكون $f(m)$ أصغر ما يمكن من أجل $m = \frac{1}{2}$ وبالتالي تكون المسافة d_m أكبر ما يمكن عندما يكون $m = \frac{1}{2}$ وبالتالي M تكون منتصف القطعة $[HG]$.

(ج) استنتاج أنه إذا كانت المسافة d_m أكبر ما يمكن فإن النقطة K هي المسقط العمودي للنقطة E على المستوي (MFD)

من أجل $m = \frac{1}{2}$ تكون $-\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}z = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (MFD) شعاعه الناظمي $\vec{n}\left(\frac{-1}{2}; 1; \frac{-1}{2}\right)$.

لدينا $-\frac{1}{2}x_K + y_K - \frac{1}{2}z_K = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 0$ ومنه $K \in (MFD)$.

ولدينا $\vec{EK}\left(\frac{-1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{-1}{3}\right)$ ومنه $\vec{EK} = \frac{2}{3}\vec{n}$ أي $\vec{EK}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطياً وبالتالي النقطة K هي المسقط العمودي للنقطة E على المستوي (MFD) .

يمكن إثبات أن $K \in (MFD)$ و $d_{\frac{1}{2}} = EK$.

التمرين الثاني: (خاص بالتقني والرياضي)

1. نشر العبارة $(t-6)(t^2+1)$ من أجل كل عدد حقيقي t

$$(t-6)(t^2+1) = t^3 + t - 6t^2 - 6$$

2. a, b و c أعداد طبيعية تكتب في نظام التعداد ذي الأساس p كما يلي: $a = 102$, $b = 125$ و $c = 13154$.

أ - علماً أن $ab = c$ إيجاد قيمة العدد الحقيقي p .

لدينا $a = 2 \times p^0 + 0 \times p^1 + p^2 = 2 + p^2$, $b = 5 \times p^0 + 2 \times p^1 + p^2 = 5 + 2p + p^2$

$$b = 4 \times p^0 + 5 \times p^1 + p^2 + 3p^3 + p^4 = 4 + 5p + p^2 + 3p^3 + p^4$$

$$(2 + p^2)(5 + 2p + p^2) = 4 + 5p + p^2 + 3p^3 + p^4 \text{ معناه } ab = c$$

$$p^3 - 6p^2 + p - 6 = 0 \text{ ويكافئ } 10 + 4p + 2p^2 + 5p^2 + 2p^3 + p^4 = 4 + 5p + p^2 + 3p^3 + p^4$$

$$\text{أي } (t^2 + 1)(t - 6) = 0 \text{ ومنه } t = 6.$$

ب - كتابة كلا من الأعداد a ، b و c في النظام العشري.

$$c = 4 + 5 \times 6 + 6^2 + 3 \times 6^3 + 6^4 = 2014 \text{ و } b = 5 + 2 \times 6 + 6^2 = 53, a = 2 + 6^2 = 38$$

$$3. \text{ نعتبر في } \mathbb{Z}^2 \text{ المعادلة: } (1) \dots\dots\dots 38x - 53y = 15$$

أ - بين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (1) فإن $x \equiv 52[53]$

$$38x - 53y = 15 \text{ يكافئ } 38x = 15 + 53y \text{ وهذا يعني أن } 38x \equiv 15[53] \text{ ولدينا } 38 \equiv -15[53]$$

$$\text{ومنهم } -15x \equiv 15[53] \text{ أي } x \equiv -1[53] \text{ وعليه } x \equiv 52[53].$$

ب - استنتاج حلول المعادلة (1).

$$\text{لدينا } x = 53k + 52 \text{ حيث } k \in \mathbb{Z} \text{ وبالتعويض في (1) نجد } 38(53k + 52) - 53y = 15 \text{ ومنه } y = 38k + 37 \text{ حيث}$$

$$k \in \mathbb{Z} \text{ وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (1) هي الثنائيات } (x; y) \text{ من الشكل } (53k + 52; 38k + 37) \text{ و } k \in \mathbb{Z}$$

4. نعتبر الآن x و y عدداً طبيعيين ونسمي d قاسمهما المشترك الأكبر.

أ - تعيين القيم الممكنة للعدد d .

$$\text{لدينا } d \text{ يقسم } x \text{ و } d \text{ يقسم } y \text{ إذن } d \text{ يقسم } 38x - 53y \text{ أي } d \text{ يقسم } 15 \text{ وبالتالي } d \in \{1; 3; 5; 15\}.$$

ب - إيجاد كل الثنائيات $(x; y)$ بحيث يكون $d = 15$.

$$\text{نضع } x = 15x' \text{ و } y = 15y' \text{ حيث } x' \text{ و } y' \text{ أوليان فيما بينهما.}$$

$$\text{نحصل على } 38 \times 15x' - 53 \times 15y' = 15 \text{ ومنه } 38x' - 53y' = 1 \text{ لدينا الثنائية } (7; 5) \text{ حلاً خاصاً للمعادلة}$$

$$\text{ومنهم } \begin{cases} 38x' - 53y' = 1 \\ 38 \times 7 - 53 \times 5 = 1 \end{cases} \text{ بالطرح نجد } 38(x' - 7) - 53(y' - 5) = 0 \text{ أي } 38(x' - 7) = 53(y' - 5)$$

$$\text{لدينا } 53 \text{ يقسم } 38(x' - 7) \text{ والعددان } 38 \text{ و } 53 \text{ أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص } 53 \text{ يقسم } x' - 7 \text{ ومنهم}$$

$$x' - 7 = 53\alpha \text{ أي } x' = 53\alpha + 7 \text{ حيث } \alpha \in \mathbb{N} \text{ وبالتعويض في } 38(x' - 7) = 53(y' - 5) \text{ نجد}$$

$$38 \times 53\alpha = 53(y' - 5) \text{ ومنهم } 38\alpha = y' - 5 \text{ أي } y' = 38\alpha + 5 \text{ حيث } \alpha \in \mathbb{N} \text{ وبما أن } 38x' - 53y' = 1 \text{ فإنه}$$

$$\text{حسب مبرهنة بيزو يكون العدداً } x' \text{ و } y' \text{ أوليان فيما بينهما وبالتالي } x = 15(53\alpha + 7) \text{ أي } x = 795\alpha + 105$$

$$\text{و } y = 15(38\alpha + 5) \text{ أي } y = 570\alpha + 75 \text{ حيث } \alpha \in \mathbb{N}$$

5. أ - دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7.

$$\text{لدينا } 4^0 \equiv 1[7], 4^1 \equiv 4[7], 4^2 \equiv 2[7], 4^3 \equiv 1[7]$$

$$\text{وعليه من أجل كل عدد طبيعي } p, 4^{3p} \equiv 1[7], 4^{3p+1} \equiv 4[7], 4^{3p+2} \equiv 2[7].$$

ب - من أجل كل $(x; y)$ من $\mathbb{N}^2$ حلول المعادلة (1) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد $2013^x \times 1432^{2y}$ على 7.

$$2013^x \times 1432^{2y} = 2013^{53k+52} \times 1432^{2(38k+37)}$$

$$\text{لدينا } 2013 \equiv 4[7] \text{ و } 1432 \equiv 4[7] \text{ معناه } [7] 4^{53k+52} \times 4^{2(38k+37)}$$

$$\text{ويكافئ } [7] 4^{129k+126} \text{ ويكافئ } [7] 4^{3(43k+42)} \text{ أي } 2013^x \times 1432^{2y} \equiv 1[7] \text{ أي } 2013^x \times 1432^{2y} \equiv 1[7]$$

$$\text{إذن باقي القسمة الإقليدية للعدد } 2013^x \times 1432^{2y} \text{ على 7 هو 1.}$$

التمرين الثالث:

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C, D ذات اللاحقات:

$$z_D = -i \text{ و } z_C = 1+2i \text{ و } z_B = 4+i \text{ و } z_A = 4-i$$

(1) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A ويحول B إلى D .

أ - كتابة العبارة المركبة للتشابه S محددًا نسبته وزاويته.

الكتابة المركبة للتشابه S من الشكل $z' - z_A = \alpha(z - z_A)$ وبما أن $S(B) = D$ فإن $z_D - z_A = \alpha(z_B - z_A)$

$$\text{أي } \alpha = \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = 2i \text{ إذن الكتابة المركبة للتشابه } S \text{ هي } z' - z_A = 2i(z - z_A) \text{ وبعد التبسيط نجد}$$

$$z' = 2iz + 2 - 9i$$

نسبة التشابه S هي 2 وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

ب - تعيين z_E لاحقة النقطة E ؛ علما أن O هي صورة E بالتشابه S .

$$S(E) = O \text{ معناه } 0 = 2iz_E + 2 - 9i \text{ ومنه } z_E = \frac{-2+9i}{2i} \text{ أي } z_E = \frac{9}{2} + i$$

(2) أ - كتابة العدد المركب $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي.

$$\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-i - 4 - i}{1 + 2i - 4 - i} = \frac{-4 - 2i}{-3 + i} = \frac{(-4 - 2i)(-3 - i)}{10} = \frac{12 + 4i + 6i - 2}{10}$$

$$\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

ب - تعيين طبيعة المثلث BCD .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{BC}{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ (\overline{BC}; \overline{BD}) = \frac{\pi}{4} \end{array} \right. \text{ معناه } \left\{ \begin{array}{l} \frac{BD}{BC} = \sqrt{2} \\ (\overline{BC}; \overline{BD}) = \frac{\pi}{4} \end{array} \right. \text{ لدينا } \frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ معناه}$$

إذن $\cos(\overline{BC}; \overline{BD}) = \frac{BC}{BD}$ ومنه المثلث BCD قائم في C لأن النسب المثلثية محققة.

وبما أن $(\overline{BC}; \overline{BD}) = \frac{\pi}{4}$ و $(\overline{CD}; \overline{CB}) = \frac{\pi}{2}$ فإن $(\overline{DB}; \overline{DC}) = \frac{\pi}{4}$ أي المثلث BCD متساوي الساقين.

وبالتالي المثلث BCD قائم في C ومتساوي الساقين.

طريقة ثانية:

$$\text{لدينا } \overline{CD} = \overline{CB} + \overline{BD} = \overline{BD} - \overline{BC} \text{ ومنه } \overline{CD}^2 = (\overline{BD} - \overline{BC})^2 = BD^2 + BC^2 - 2\overline{BD} \times \overline{BC}$$

$$CD^2 = BD^2 + BC^2 - 2(BD \times BC \cos(\overline{BC}; \overline{BD})) \text{ لكن } BD = \sqrt{2}BC \text{ و } (\overline{BC}; \overline{BD}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{إذن } CD^2 = (\sqrt{2}BC)^2 + BC^2 - 2\left(\sqrt{2}BC \times BC \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3BC^2 - 2BC^2 = BC^2$$

ومنه $CD^2 = BC^2$ أي $CD = BC$ ومنه المثلث BCD متساوي الساقين رأسه C .

$$\text{وبما أن } (\overline{BC}; \overline{BD}) = \frac{\pi}{4} \text{ فإن } (\overline{DB}; \overline{DC}) = \frac{\pi}{4} \text{ وبالتالي } (\overline{CD}; \overline{CB}) = \frac{\pi}{2}.$$

وبالتالي المثلث BCD قائم في C ومتساوي الساقين.
طريقة ثالثة:

$$\frac{-z_B + z_C}{z_C - z_B} + \frac{z_D - z_C}{z_C - z_B} = 1+i \text{ وتكافئ } \frac{z_D - z_B + z_C - z_C}{z_C - z_B} = 1+i \text{ معناه } \frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = 1+i$$

$$\text{وتكافئ } 1 - \frac{z_C - z_D}{z_C - z_B} = 1+i \text{ أي } \frac{z_C - z_D}{z_C - z_B} = -i \text{ وبالتالي المثلث } BCD \text{ قائم في } C \text{ ومتساوي الساقين.}$$

ج - تبين أن النقط A, B, D و C تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

لدينا المثلث BCD قائم في C وهذا يعني أن النقط B, D و C تنتمي لنفس الدائرة التي قطرها $[BD]$

ولدينا $S(B) = D$ معناه $(\overline{AB}; \overline{AD}) = \frac{\pi}{2}$ أي المثلث ABD قائم في A ومنه النقطة A أيضا تنتمي للدائرة التي

قطرها $[BD]$ وبالتالي النقط A, B, D و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي قطرها $[BD]$ وهذه الدائرة مركزها ω ذات اللاحقة 2 منتصف القطعة $[BD]$ ونصف قطرها $\omega D = \sqrt{5}$.

(3) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث: $|2iz + 2 - 9i| = 1$.
أ - التحقق أن النقطة B تنتمي إلى (Γ) .

لدينا $|2iz_B + 2 - 9i| = |z_D| = 1$ ومنه النقطة B تنتمي إلى (Γ) .

ب - تعيين طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة.

$|2iz + 2 - 9i| = 1$ معناه $|z| = 1$ وتكافئ $OM' = 1$ حيث z' لاحقة النقطة M' صورة النقطة M بالنشابه S .

S تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$ و $S(E) = O$ إذن $OM' = 2EM$ ومنه $2EM = 1$ أي $EM = \frac{1}{2}$

وبالتالي (Γ) هي الدائرة التي مركزها E ونصف قطرها $\frac{1}{2}$.

التمرين الرابع:

I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 1 - xe^x$.

1. دراسة تغيرات الدالة g .

الدالة g تقبل الاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$ ولدينا: $g'(x) = -e^x - xe^x = e^x(-1-x)$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ ، $e^x > 0$ و $-1-x < 0$ إذن $g'(x) < 0$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $[0; +\infty[$.

$$g(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - xe^x = -\infty$$

جدول تغيرات الدالة g .

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	
$f(x)$	1	0	$-\infty$

2. تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0; +\infty[$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[0; +\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty; 1]$ إذن من أجل كل عدد حقيقي k من المجال $]-\infty; 1]$ المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[0; +\infty[$ وبالأخص المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0; +\infty[$.

التحقق أن $0.5 < \alpha < 1$.

لدينا $g(0.5) \approx 0.18$ و $g(1) \approx -1.71$ إذن $g(0.5) \times g(1) < 0$ ومنه $0.5 < \alpha < 1$.

3. تعيين إشارة $g(x)$ على المجال $[0; +\infty[$.

من أجل $x \in [0; \alpha[$ ، $g(x) > 0$ ومن أجل $x \in]\alpha; +\infty[$ كما أن $g(\alpha) = 0$.

II - الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x+1}{e^x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى

المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. تبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{e^x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}} = 0$$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

تفسير النتيجة هندسيا.

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 0$ (محور الفواصل) بجوار $+\infty$.

2. أ - تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$.

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $[0; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{e^x+1-e^x(x+1)}{(e^x+1)^2} = \frac{1-xe^x}{(e^x+1)^2} = \frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$$

ب - تبين أن $f(\alpha) = \alpha$.

$$f(\alpha) - \alpha = \frac{\alpha+1}{e^\alpha+1} - \alpha = \frac{\alpha+1-\alpha e^\alpha-\alpha}{e^\alpha+1} = \frac{1-\alpha e^\alpha}{e^\alpha+1} = \frac{g(\alpha)}{e^\alpha+1}$$

لكن $g(\alpha) = 0$ إذن $f(\alpha) - \alpha = 0$ أي $f(\alpha) = \alpha$.

تشكيل جدول تغيرات الدالة f .

لدينا إشارة $f'(x)$ مثل إشارة $g(x)$ على $[0; +\infty[$ ، وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $[0; \alpha]$ ومتناقصة تماما على $[\alpha; +\infty[$.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	α	0

3. أ - تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$: $f(x) - x = \frac{g(x)}{e^x + 1}$.

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $[0; +\infty[$.

$$f(x) - x = \frac{x+1}{e^x + 1} - x = \frac{x+1 - xe^x - x}{e^x + 1} = \frac{1 - xe^x}{e^x + 1} = \frac{g(x)}{e^x + 1}$$

ب - استنتاج وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$.
إشارة $f(x) - x$ هي نفس إشارة $g(x)$.

x	0	α	$+\infty$
$f(x) - x$		+	0 -
الوضعية النسبية		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)
		(C_f) و (Δ) متقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(\alpha; \alpha)$	

4. رسم (Δ) و (C_f) .

III - 1. تبين أنه إذا كان $x \in [0; \alpha]$ فإن $f(x) \in [0; \alpha]$.

لدينا الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; \alpha]$.

إذا كان $0 \leq x \leq \alpha$ فإن $0 \leq f(x) \leq f(\alpha)$ ومنه

$$0 \leq f(x) \leq \alpha \text{ أي } \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \alpha$$

إذن من أجل كل $x \in [0; \alpha]$ فإن $f(x) \in [0; \alpha]$.

2. (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 0$

ومن أجل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ - برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

$$u_1 = f(u_0) = \frac{1}{2} \text{ ومنه } 0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha \text{ إذن الخاصية صحيحة من أجل } n = 0.$$

نفرض أن $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ ونبرهن صحة الخاصية $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$.

لدينا $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; \alpha]$ وحسب نتيجة السؤال السابق فإن

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha \text{ أي } 0 \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq \alpha$$

وعليه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.



ب - تخمين إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

من الرسم يبدو أن المتتالية (u_n) متزايدة.

ج - برهان أن المتتالية (u_n) متقاربة.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq u_{n+1}$ ومنه المتتالية (u_n)

متزايدة وبما أنها محدودة من الأعلى بالعدد α فهي متقاربة.

إيجاد نهايتها.

لدينا المتتالية (u_n) متقاربة إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$ ولدينا

$u_{n+1} = f(u_n)$ والدالة f مستمرة على $[0; +\infty[$

إذن l يحقق $l = f(l)$ وبما أن $f(\alpha) = \alpha$ فإن $l = \alpha$

وبالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول:

- في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقطة $A(-2; 8; 4)$ والشعاع $\vec{u}(1; 5; -1)$.
- عَيِّن تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (d) الذي يشمل A وشعاع توجيهه $\vec{u}$.
 - نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرفين بمعادلتيهما على الترتيب: $(P): x - y - z = 7$ و $(Q): x - 2z = 11$.
أ - بَيِّن أنَّ المستويين (P) و (Q) يتقاطعان في مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.
ب - بَيِّن أنَّ المستقيمين (d) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.
3. H' و H نقطتان من الفضاء حيث: $H(-3; 3; 5)$ و $H'(3; 0; -4)$.
أ - تحقق أن H تنتمي إلى (d) و H' تنتمي إلى (Δ) .
ب - برهن أنَّ المستقيم (HH') عمودي على كل من المستقيمين (d) و (Δ) .
ج - احسب المسافة بين المستقيمين (d) و (Δ) .
4. عَيِّن مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $\vec{MH} \cdot \vec{MH'} = 126$.

التمرين الثاني:

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ تعطى النقط A ، B و C التي لواحقتها على الترتيب: $z_A = -1 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ ، $z_C = 2$.

- احسب طويلة $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ والعمدة له، ثم فسّر هندسيا النتائج المحصل عليها.
- استنتج نوع المثلث ABC .
- عَيِّن مركز ونصف قطر الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC .
- (E) مجموعة النقط M التي لاحتقتها z والتي تحقق: $2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$.
أ - بَيِّن أنَّ (E) دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.
ب - بَيِّن أنَّ A ، B تنتمي إلى (E) .
- R هو الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.
أ - جد لاحقتي صورتين النقطتين B و C بالدوران R .
ب - عَيِّن صورة الدائرة (E) بالدوران R .
- أ - عَيِّن لاحقة النقطة I مرجح الجملة: $\{(C; -1), (B; 1), (A; 1)\}$ ، ثم عَيِّن نوع الرباعي $ACBI$.
ب - عَيِّن مجموعة النقط M والتي تحقق: $2\|\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB}\|$.

التمرين الثالث:

(I) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$.

f دالة معرفة على $]-\infty; 2[$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{1}{2-x}$.

- أ - ادرس تغيرات الدالة f .
- ب - مثل في معلم متعامد ومتجانس المنحنى (C_f) الممثل للدالة f والمستقيم ذي المعادلة $y = x$.
- (2) أ - مثل u_1, u_2, u_3 ثم ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.
- ب - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن: $u_n < 1$.
- ج - ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) وبيّن أنها متقاربة، ثم استنتج نهايتها.

(II) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{1}{1-u_n}$.

- (1) أ - احسب الحدود v_0, v_1, v_2 .
- ب - برهن أن (v_n) متتالية حسابية، يطلب تعيين أساسها.
- ج - اكتب عبارة v_n و u_n بدلالة n ، ثم احسب نهاية u_n .
- (2) أ - احسب المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.
- ب - احسب المجموع $P_n = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \dots + v_n \times u_n$.

التمرين الرابع:

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = e^{-x} + x - 1$.

- 1- احسب $g'(x)$ ، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g .
- 2- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ ، ثم علل أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^{-x} + x \geq 1$.

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x}{x + e^{-x}}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ ، ثم أعط التفسير الهندسي للنتيجتين. (نقبل أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$).

2- بيّن أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{(1+x)e^{-x}}{(x + e^{-x})^2}$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3- اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

4- تحقّق أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $x - f(x) = \frac{xg(x)}{g(x) + 1}$ ، ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) .

5- استنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

6- أنشئ (T) و (C_f) .

(III) نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بـ: $U_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1} = f(U_n)$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq U_n \leq 1$.

2. بيّن أن المتتالية (U_n) متناقصة.

3. استنتج أن (U_n) متقاربة ثم حدّد نهايتها.

الموضوع الثاني:

التمرين الأول:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $A(1;0;2)$ ، $B(1;1;4)$ و $C(-1;1;1)$

(1) أ) بيّن أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا (ABC) .

ب) عيّن العددين الحقيقيين a و b حتى يكون الشعاع $\vec{n}(a;b;-2)$ ناظميا للمستوي (ABC) .

ج) استنتج معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) .

(2) ليكن المستويان (P) و (Q) المعرفين بمعادلتيهما

$$(P): 2x + y + 2z + 1 = 0 \text{ و } (Q): x - 2y + 6z = 0 \text{ على الترتيب.}$$

أ) بيّن أنّ المستويين (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

ب) ادرس تقاطع المستويات الثلاثة (P) ، (Q) و (ABC) .

(3) نعتبر النقطة G_α مرجح للجملة المثقلة $\{(A;2), (B;-\alpha), (C;\alpha)\}$.

أ - عبّر عن الشعاع $\overrightarrow{AG_\alpha}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{BC}$.

ب - استنتج مجموعة النقط G_α لما يتغيّر α في $\mathbb{R}$.

ج - من أجل أي قيمة للعدد α يكون $ABCG_\alpha$ متوازي أضلاع.

التمرين الثاني:

1. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D ذات اللاحقات:

$$z_A = 3 - i, z_B = 2 - 2i, z_C = -2i \text{ و } z_D = \overline{z_C} \text{ على الترتيب.}$$

أ - علم النقط A ، B ، C و D .

ب - نضع $z = \frac{z_D - z_C}{z_B - z_C}$ ؛ اكتب z على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي، واستنتج طبيعة المثلث BCD .

ج - عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد z^n حقيقيا سالبا تماما.

2. ليكن S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة (z) النقطة $M'(z')$ حيث: $z' = (1 - i)z + 2i$.

أ - بيّن أنّ التحويل S هو تشابه مباشر يُطلب تعيين نسبته k ، زاويته θ ومركزه Ω .

ب - تحقق أنّ $S(A) = B$ و $S(B) = C$ ؛ ماهو التحويل الذي يحول A إلى C ومركزه Ω .

ج - لتكن ω لاحقة النقطة Ω ؛ تحقق أنّ $z' - z = i(\omega - z)$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث AMM' .

3. نضع $A_0 = A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $A_{n+1} = S(A_n)$ ونرمز بـ z_n إلى لاحقة النقطة A_n .

ونعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_n = \Omega A_n$.

أ - بيّن أنّ (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.

ب - أحسب بدلالة n المجموع L_n ؛ حيث $L_n = |z_0 - \omega| + |z_1 - \omega| + \dots + |z_n - \omega|$.

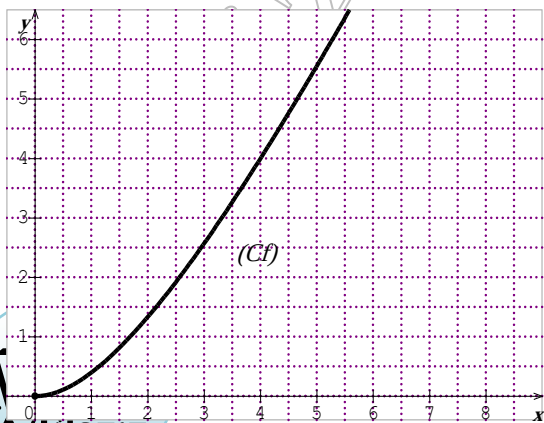
التمرين الثالث:

الدالة العددية f معرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{2x^2}{x+4}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد

والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. كما هو مبين في الشكل

(1) بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما.



(2) (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $U_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1} = f(U_n)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

أ - باستعمال المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) مثل، على حامل محور الفواصل، الحدود: U_0, U_1, U_2, U_3 و U_4 دون حسابها.

ب - ضع تخميناً حول اتجاه تغيّر المتتالية (U_n) وتقاربها.

(3) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq U_n \leq 3$.

ب) بيّن أنّ المتتالية (U_n) متناقصة.

ج) استنتج أن (U_n) متقاربة.

(4) أ) ادرس إشارة العدد $7U_{n+1} - 6U_n$ واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{6}{7}U_n$.

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq U_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$.

ج) احسب نهاية المتتالية (U_n) عندما يتؤول n إلى $+\infty$.

التمرين الرابع:

(I) لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(e^x + 1)$.

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ وفسّر النتيجة هندسياً.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

(2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) = \frac{-2e^{2x}}{(e^x + 1)^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة g ، وشكل جدول تغيّراتها.

(3) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} - \ln(1+e^{-x}) - x$.

ب) بيّن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) + x] = 1$ ، ثم استنتج أن (C_g) يقبل مستقيماً مقارباً (Δ) يطلب تعيين معادله له.

(4) ارسم (Δ) و (C_g) .

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^{-x} \ln(e^x + 1)$.

(1) برهن أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = e^{-x} \times g(x)$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f وشكل جدول تغيّراتها.

(3) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $\frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ ، ثم احسب $\int_{-\ln 3}^0 \frac{1}{e^x + 1} dx$.

(4) احسب $\int_{-\ln 3}^0 f(x) dx$.

حل الموضوع الأول:

التمرين الأول:

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقطة $A(-2; 8; 4)$ والشعاع $\vec{u}(1; 5; -1)$

1. تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (d) الذي يشمل A وشعاع توجيهه $\vec{u}$.

$M(x; y; z) \in (d)$ معناه $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ حيث t عدد حقيقي.

$$(d): \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 8 + 5t \\ z = 4 - t \end{cases} \text{ ومنه } t \in \mathbb{R}$$

2. نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرفين بمعادلتيهما على الترتيب: $(P): x - y - z = 7$ و $(Q): x - 2z = 11$.

أ - تبين أن المستويين (P) و (Q) يتقاطعان في مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

لدينا $\vec{n}(1; -1; -1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) و $\vec{n}'(1; -2; 0)$ شعاع ناظمي للمستوي (Q) .

الشعاعان $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ غير مرتبطين خطياً لأنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\vec{n} = k\vec{n}'$ ومنه المستويان (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) .

تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) .

لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء.

$$M \in (\Delta) \text{ معناه } \begin{cases} x - 2z = 11 \\ x - y - z = 7 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x = 11 + 2z \\ x - y - z = 7 \end{cases} \text{ ويكافئ } \begin{cases} x = 11 + 2z \\ 11 + 2z - y - z = 7 \end{cases}$$

$$\text{ويكافئ } \begin{cases} x = 11 + 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x = 11 + 2z \\ y = 4 + z \end{cases} \text{ حيث } \lambda \text{ وسيط حقيقي.}$$

ب - تبين أن المستقيمين (d) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.

الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً لأن $\frac{1}{2} \neq \frac{5}{1}$ ومنه المستقيمان (d) و (Δ) غير متوازيين

لدينا $\vec{u}(1; 5; -1)$ شعاع توجيه للمستقيم (d) و $\vec{v}(2; 1; 1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) .

ندرس تقاطع المستقيمين (d) و (Δ) .

$$\begin{cases} 11 + 2\lambda = -2 + t \dots (1) \\ 4 + \lambda = 8 + 5t \dots (2) \\ \lambda = 4 - t \dots (3) \end{cases} \text{ وبجمع (1) و (3) نجد } 11 + 3\lambda = 2 \text{ أي } \lambda = -3 \text{ وبالتعويض في (3) نجد } t = 7$$

بتعويض قيمتي t و λ في (2) نجد $4 - 3 = 8 + 35$ أي $1 = 43$ تناقض إذن (d) و (Δ) غير متقاطعين.

نتيجة: المستقيمان (d) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.

3. H و H' نقطتان من الفضاء حيث: $H(-3; 3; 5)$ و $H'(3; 0; -4)$.

أ - التحقق أن H تنتمي إلى (d) .

$\overrightarrow{AH}(-1; -5; 1)$ ، $\vec{u}(1; 5; -1)$ ومنه $\overrightarrow{AH} = -\vec{u}$ أي الشعاعان $\overrightarrow{AH}$ و $\vec{u}$ مرتبطين خطياً وهذا يعني أن $H \in (d)$.

التحقق أن $H' \in (\Delta)$ تنتمي إلى (Δ) .

$$\begin{cases} \lambda = -4 \\ \lambda = -4 \\ \lambda = -4 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} 3 = 11 + 2\lambda \\ 0 = 4 + \lambda \\ -4 = \lambda \end{cases} \text{ معناه } H' \in (\Delta) \text{ يوجد قيمة وحيدة للعدد } \lambda \text{ ومنه } H' \in (\Delta).$$

ب - برهان أن المستقيم (HH') عمودي على كل من المستقيمين (d) و (Δ) .

لدينا $\overrightarrow{HH'}(6; -3; -9)$ ومنه $\overrightarrow{HH'} \cdot \vec{u} = 6 \times 1 - 3 \times 5 - 9 \times -1 = 0$ ومنه $\overrightarrow{HH'} \perp \vec{u}$ أي (HH') عمودي على (d) .

ولدينا $\overrightarrow{HH'} \cdot \vec{v} = 6 \times 2 - 3 \times 1 - 9 \times 1 = 0$ ومنه $\overrightarrow{HH'} \perp \vec{v}$ أي (HH') عمودي على (Δ) .

ج - حساب المسافة بين المستقيمين (d) و (Δ) .

$$d((d); (\Delta)) = HH' = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + (-9)^2} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$$

4. تعيين مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $\overrightarrow{MH'} \cdot \overrightarrow{MH} = 126$.

نضع $M(x; y; z)$ ومنه $\overrightarrow{MH'}(3-x; -y; -4-z)$ ، $\overrightarrow{MH}(-3-x; 3-y; 5-z)$ ،

$$\overrightarrow{MH'} \cdot \overrightarrow{MH} = (3-x)(-3-x) - y(3-y) + (-4-z)(5-z)$$

$$\overrightarrow{MH'} \cdot \overrightarrow{MH} = x^2 - 9 - 3y + y^2 - 20 + 4z - 5z + z^2$$

$$\overrightarrow{MH'} \cdot \overrightarrow{MH} = x^2 + y^2 + z^2 - 3y - z - 29$$

$$\overrightarrow{MH'} \cdot \overrightarrow{MH} = 126 \text{ معناه } x^2 + y^2 + z^2 - 3y - z - 29 = 126 \text{ يكافئ}$$

$$x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = 155 + \frac{5}{2} \text{ ومنه } x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 155$$

أي $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{315}{2}$ إذن مجموعة النقط M المطلوبة هي سطح الكرة الذي مركزه

$$E\left(0; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \text{ ونصف قطره } \sqrt{\frac{315}{2}}.$$

التمرين الثاني:

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ تعطى النقط A ، B و C التي

$$\text{لواحقها على الترتيب: } z_A = -1 + i\sqrt{3}, z_B = -1 - i\sqrt{3}, z_C = 2.$$

1. حساب طولية $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ والعمدة له.

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}} = \frac{(-3 - i\sqrt{3})(-3 - i\sqrt{3})}{(-3 + i\sqrt{3})(-3 - i\sqrt{3})} = \frac{6 - 6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{أي } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

تفسير هندسيا النتائج المحصل عليها.

$$\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ معناه } \left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = 1 \text{ و } \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = -\frac{\pi}{3} \text{ أي } CB = CA \text{ و } (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = -\frac{\pi}{3}$$

- استنتاج نوع المثلث ABC .

المثلث ABC متقايس الأضلاع.

2. تعيين مركز ونصف قطر الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC.

بما أن المثلث ABC متقايس الأضلاع فإن مركز الدائرة (C) هو مركز ثقل المثلث ABC ذات اللاحقة

$$\frac{z_A + z_B + z_C}{3} = 0 \text{ أي مركز الدائرة (C) هو } O \text{ ونصف قطرها } OC = 2.$$

3. (E) مجموعة النقط M التي لاحتقتها z والتي تحقق: $2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$

أ - تبين أن (E) دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

$$2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0 \text{ معناه } 2z + 2\bar{z} + z\bar{z} + 4 = 4 \text{ تكافئ } 2z + 2\bar{z} + z\bar{z} + 4 = 4 \text{ وتكافئ } z(2 + \bar{z}) + 2(\bar{z} + 2) = 4$$

التي مركزها Ω ذات اللاحقة -2 ونصف قطرها 2. ومعناه $|z + 2|^2 = 4$ أي $|z + 2| = 2$ وبالتالي (E) هي الدائرة

ب - تبين أن A، B تنتميان إلى (E).

$$A \in (E) \text{ ومنه } \Omega A = |z_A - z_\Omega| = |1 + i\sqrt{3}| = 2$$

$$B \in (E) \text{ ومنه } \Omega B = |z_B - z_\Omega| = |1 - i\sqrt{3}| = 2$$

4. R هو الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$

أ - ايجاد لاحتتي صورتين النقطتين B و C بالدوران R.

$$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z + 1 - i\sqrt{3}) - 1 + i\sqrt{3} \text{ تكافئ } z' - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_A)$$

$$\text{وتكافئ } z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 1 + i\sqrt{3} \text{ أي } z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 2 - 1 + i\sqrt{3}$$

$$\text{إذا كان } z = z_B \text{ فإن } z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_B + 1 + i\sqrt{3} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1 - i\sqrt{3}) + 1 + i\sqrt{3}$$

$$\text{ومنه } z' = 1 - i\sqrt{3} + 1 + i\sqrt{3} = 2 \text{ إذن صورة النقطة B بالدوران R هي C.}$$

$$\text{إذا كان } z = z_C \text{ فإن } z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_C + 1 + i\sqrt{3} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2) + 1 + i\sqrt{3} \text{ أي } z' = 2 + 2i\sqrt{3}$$

ب - تعيين صورة الدائرة (E) بالدوران R.

صورة الدائرة (E) بالدوران R هي دائرة مركزها $R(\Omega)$ ونصف قطرها 2.

تعيين $R(\Omega)$.

$$\text{إذا كان } z = -2 \text{ فإن } z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-2) + 1 + i\sqrt{3} = -1 - i\sqrt{3} + 1 + i\sqrt{3} = 0 \text{ وعليه } R(\Omega) = O$$

صورة الدائرة (E) بالدوران R هي دائرة مركزها O ونصف قطرها 2 وهذه الدائرة هي (C).

5. أ - تعيين لاحقة النقطة I مرجح الجملة: $\{(C; -1), (B; 1), (A; 1)\}$.

$$z_I = -4 \text{ أي } z_I = \frac{-z_C + z_B + z_A}{-1 + 1 + 1} = \frac{-2 - 1 - i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3}}{1}$$

تعيين نوع الرباعي ACBI.

$$z_C - z_A = z_B - z_I \text{ ومنه } z_B - z_I = -1 - i\sqrt{3} + 4 = 3 - i\sqrt{3} \text{ و } z_C - z_A = 2 + 1 - i\sqrt{3} = 3 - i\sqrt{3}$$

وهذا يعني أن $\overline{AC} = \overline{IB}$ أي ACBI متوازي أضلاع.

وحسب ما سبق لدينا $CA = CB$ إذن هذا المتوازي الأضلاع فيه ضلعان متجاوران ومتقايسان وبالتالي $ACBI$ معين.

ب - تعيين مجموعة النقط M والتي تحقق: $2\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$

لتكن H منتصف القطعة إذن $H(-1;0)$.

لدينا I مرجح الجملة: $\{(C;-1), (B;1), (A;1)\}$ إذن من أجل كل نقطة M من المستوي لدينا:

$$\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \text{ أي } (-1+1+1)\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$$

$$\text{ولدينا } 2\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$$

$$2\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| \text{ تعني } 2\|\overrightarrow{MI}\| = \|\overrightarrow{MH}\| \text{ أي } MI = MH \text{ إذن مجموعة النقط } M$$

المطلوبة هي محور القطعة $[IH]$.

التمرين الثالث:

(I) (u_n) متتالية عددية معرفّة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$

f دالة معرفّة على $]-\infty; 2[$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{1}{2-x}$

(1) أ - دراسة تغيّرات الدالة f .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2-x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{2-x} = +\infty$$

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]-\infty; 2[$ ولدينا $f'(x) = \frac{1}{(2-x)^2}$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 2[$ ، $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; 2[$.

ب - مثل في معلم متعامد ومتجانس المنحنى (C_f) الممثل للدالة f

والمستقيم ذي المعادلة $y = x$.

(2) أ - تمثيل u_1, u_2, u_3

حسب الشكل يبدو أن المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة.

ب - برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإنّ: $u_n < 1$.

لدينا $u_0 = \frac{1}{2}$ ومنه $u_0 < 1$ إذن الخاصية محققة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $u_n < 1$ ونبرهن أنّ $u_{n+1} < 1$.

لدينا $u_n < 1$ وبما أن الدالة f متزايدة تماماً على $]-\infty; 2[$ فإن

$$u_{n+1} = f(u_n) < f(1) = 1$$

ومنّه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 1$.

ج - دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

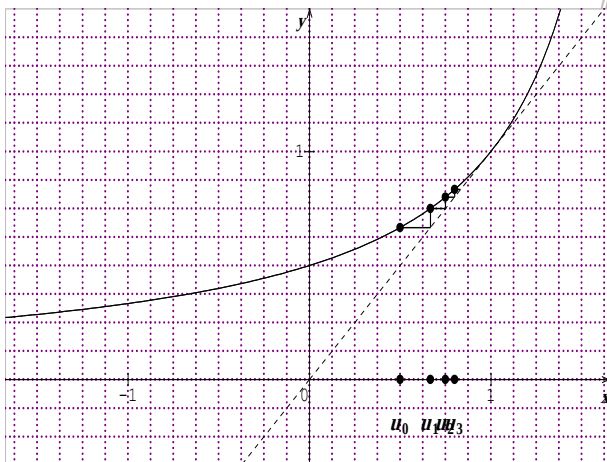
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2-u_n} - u_n = \frac{1-2u_n+u_n^2}{2-u_n} = \frac{(u_n-1)^2}{2-u_n}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 1$ ومنّه $2-u_n > 0$ و $(u_n-1)^2 > 0$ إذن $u_{n+1} - u_n > 0$

وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

تبيين أنّها متقاربة.

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة.



استنتاج نهايتها.

(u_n) متقاربة إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ ولدينا $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$ وعليه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2-u_n}$ ومنه $l = \frac{1}{2-l}$ تكافئ $l(2-l)=1$ وتكافئ $l^2-2l+1=0$ ومنه $(l-1)^2=0$ أي $l=1$ إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

(II) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{1}{1-u_n}$.

(1) أ. حساب الحدود v_0, v_1 و v_2 .

لدينا $u_2 = \frac{1}{2-u_1} = \frac{1}{2-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$ و $u_1 = \frac{1}{2-u_0} = \frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

$v_2 = \frac{1}{1-u_2} = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$ ، $v_1 = \frac{1}{1-u_1} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$ ، $v_0 = \frac{1}{1-u_0} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

ب. برهان أن (v_n) متتالية حسابية، يطلب تعيين أساسها.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{1-u_{n+1}} - \frac{1}{1-u_n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2-u_n}} - \frac{1}{1-u_n} = \frac{1}{\frac{2-u_n-1}{2-u_n}} - \frac{1}{1-u_n} = \frac{2-u_n}{1-u_n} - \frac{1}{1-u_n} = \frac{1-u_n}{1-u_n} = 1$$

إذن (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=1$.

ج. كتابة عبارة v_n و u_n بدلالة n ، ثم احسب نهاية u_n .

$$v_n = v_0 + nr = 2 + n$$

أي $u_n v_n = v_n - 1$ يكافئ $v_n(1-u_n) = 1$ معناه $v_n = \frac{1}{1-u_n}$ أي $u_n = \frac{v_n-1}{v_n} = \frac{2+n-1}{2+n} = \frac{n+1}{n+2}$

(2) أ. حساب المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n) = \frac{n+1}{2}(4+n)$$

ب. حساب المجموع $P_n = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \dots + v_n \times u_n$.

لدينا $u_n v_n = v_n - 1$ ومنه $P_n = (v_0 - 1) + (v_1 - 1) + \dots + (v_n - 1)$ يكافئ $P_n = -(n+1) + v_0 + v_1 + \dots + v_n$

أي $P_n = -(n+1) + \frac{n+1}{2}(n+4)$

التمرين الرابع:

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = e^{-x} + x - 1$.

1- احسب $g'(x)$ ، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g .

الدالة تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x) = -e^{-x} + 1$

$g'(x) = 0$ تعني $-e^{-x} + 1 = 0$ يكافئ $e^{-x} = 1$ أي $x = 0$.

$g'(x) > 0$ تعني $-e^{-x} + 1 > 0$ يكافئ $e^{-x} < 1$ ويكافئ $-x < 0$ أي $x > 0$.

$g'(x) < 0$ تعني $-e^{-x} + 1 < 0$ يكافئ $e^{-x} > 1$ ويكافئ $-x > 0$ أي $x < 0$.

إذن الدالة g متناقصة تماماً على $]-\infty; 0]$ و متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$.

2- استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

لدينا الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى تبلغها من أجل $x = 0$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) \geq g(0)$

$$g(x) \geq 0$$

تعليل أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^{-x} + x \geq 1$.
لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) \geq 0$ معناه $e^{-x} + x - 1 \geq 0$ أي $e^{-x} + x \geq 1$.

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x}{x + e^{-x}}$.
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- أ) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$.

$$f(x) = \frac{x}{x + e^{-x}} = \frac{1}{\frac{x + e^{-x}}{x}} = \frac{1}{1 + \frac{e^{-x}}{x}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$$

ب) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{xe^x} = -\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0^- \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^x} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}} = 1$$

التفسير الهندسي للنتيجتين.

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 0$ بجوار $-\infty$.

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 1$ بجوار $+\infty$.

2- تبين أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{(1+x)e^{-x}}{(x + e^{-x})^2}$.

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x) = \frac{x + e^{-x} - x(1 - e^{-x})}{(x + e^{-x})^2} = \frac{e^{-x} + xe^{-x}}{(x + e^{-x})^2} = \frac{(1+x)e^{-x}}{(x + e^{-x})^2}$$

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	-1	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-1}{-1+e}$	$\nearrow$	1

3- كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \text{ ومنه } y = 1(x - 0) + 0 \text{ أي } y = x$$

4- التحقق أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $x - f(x) = \frac{xg(x)}{g(x) + 1}$.

ليكن $x \in \mathbb{R}$.

$$x - f(x) = x - \frac{x}{x + e^{-x}} = \frac{x^2 + xe^{-x} - x}{x + e^{-x}} = \frac{x(x + e^{-x} - 1)}{x + e^{-x}} = \frac{xg(x)}{x + e^{-x}}$$

استنتاج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T)

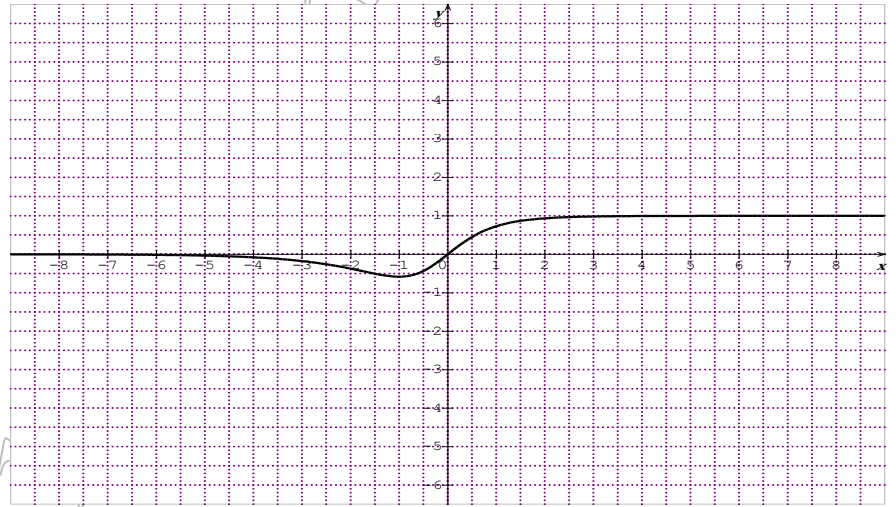
من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $e^{-x} + x \geq 1$ معناه $e^{-x} + x > 0$ ومنه إشارة $x - f(x)$ من نفس إشارة $xg(x)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$g(x)$	+	0	+
$x - f(x)$	-	0	+
الوضعية	(d) تحت (C_f)		
	(T) و (C_f)		
	يتقاطعان في النقطة O.		
	(d) فوق (C_f)		

5- استنتاج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

نلاحظ أن المماس (T) يخترق المنحنى (C_f) في نقطة التماس O وهذا يعني أن O هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) .

6- إنشاء (T) و (C_f) .



III) نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بـ: $U_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1} = f(U_n)$.

1. برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq U_n \leq 1$.

لدينا $U_0 = 1$ ومنه $0 \leq U_0 \leq 1$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $0 \leq U_n \leq 1$ ونبرهن أن $0 \leq U_{n+1} \leq 1$.

لدينا $0 \leq U_n \leq 1$ وبما أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0;1]$ فإن $f(0) \leq f(U_n) \leq f(1)$ أي

$$0 \leq U_{n+1} \leq \frac{1}{1+e^{-1}} \text{ ومنه } 0 \leq U_{n+1} \leq 1.$$

إذن حسب مبدأ بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq U_n \leq 1$.

2. تبين أن المتتالية (U_n) متناقصة.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ ، $x - f(x) \geq 0$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq U_n \leq 1$

فإن $U_n - f(U_n) \geq 0$ ومنه $U_n - U_{n+1} \geq 0$ أي $U_n \geq U_{n+1}$ وبالتالي المتتالية (U_n) متناقصة.

3. استنتاج أن (U_n) متقاربة وتحديد نهايتها.

بما أن (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي متقاربة ولتكن نهايتها l .

لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ وبما أن $U_{n+1} = f(U_n)$ والدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ فإن $l = f(l)$ ومنه

$$l - f(l) = 0 \text{ وحسب ماسبق } l = 0 \text{ إذن } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0.$$

حل الموضوع الثاني:

التمرين الأول:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $A(1;0;2)$ ، $B(1;1;4)$ و $C(-1;1;1)$ (1) أ) تبين أن النقط A ، B و C تعين مستويا (ABC) .

لدينا $\overrightarrow{AB}(0;1;2)$ ، $\overrightarrow{AC}(-2;1;-1)$ و $\frac{0}{-2} \neq \frac{1}{1}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه النقط A ، B و C تعين مستويا (ABC) .

ب) تعيين العددين الحقيقيين a و b حتى يكون الشعاع $\vec{n}(a;b;-2)$ ناظما للمستوي (ABC) .
 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ و $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ ومنه $b - 4 = 0$ و $-2a + b + 2 = 0$ أي $b = 4$ و $-2a + 6 = 0$ و عليه $(a;b) = (3;4)$.

ج) استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
 معادلة للمستوي (ABC) من الشكل $3x + 4y - 2z + d = 0$ وبما أن A مثلا تنتمي للمستوي (ABC) فإن $3 - 4 + d = 0$ أي $d = 1$ و عليه المعادلة $3x + 4y - 2z + 1 = 0$ للمستوي (ABC) .

2) ليكن المستويان (P) و (Q) المعرفين بمعادلتها
 $(P): 2x + y + 2z + 1 = 0$ و $(Q): x - 2y + 6z = 0$ على الترتيب.

أ) تبين أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) .
 لدينا $\vec{u}(2;1;2)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) و $\vec{u}'(1;-2;6)$ شعاع ناظمي للمستوي (Q) .

و $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-2}$ إذن الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{u}'$ غير مرتبطين خطيا ومنه المستويان (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) .
 تعيين تمثيل وسيطي لـ (Δ) .

نحل الجملة
$$\begin{cases} 2x + y + 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{cases}$$
 بضربي طرفي المعادلة الأولى بالعدد 2 وبجمع المعادلتين نجد $5x + 10z + 2 = 0$ ومنه $x = -2z - \frac{2}{5}$ بالتعويض في المعادلة الأولى نجد $2\left(-2z - \frac{2}{5}\right) + y + 2z + 1 = 0$

ومنه $-4z - \frac{4}{5} + y + 2z + 1 = 0$ أي $y = 2z - \frac{1}{5}$ وبوضع $z = t$ نجد $(\Delta): \begin{cases} x = -2t - \frac{2}{5} \\ y = 2t - \frac{1}{5} \\ z = t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$

ب) دراسة تقاطع المستويات الثلاثة (P) ، (Q) و (ABC) .
 لدينا $(P) \cap (Q) = (\Delta)$ ومنه $(ABC) \cap (P) \cap (Q) = (ABC) \cap (\Delta)$ ندرس تقاطع (ABC) و (Δ) .

$$\text{نحل الجملة} \begin{cases} x = -2t - \frac{2}{5} \\ y = 2t - \frac{1}{5} \\ z = t \\ 3x + 4y - 2z + 1 = 0 \end{cases} \text{ وعليه } 3\left(-2t - \frac{2}{5}\right) + 4\left(2t - \frac{1}{5}\right) - 2t + 1 = 0 \text{ ومنه } -6t + 8t - 2t - 1 = 0$$

أي $-1 = 0$ وهذا مستحيل إذن $(ABC) \cap (P) \cap (Q) = \emptyset$.

(3) نعتبر النقطة G_α مرجح للجملة المثقلة $\{(A; 2), (B; -\alpha), (C; \alpha)\}$.

أ - التعبير عن الشعاع $\overrightarrow{AG_\alpha}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{BC}$.

لدينا $2\overrightarrow{G_\alpha A} - \alpha\overrightarrow{G_\alpha B} + \alpha\overrightarrow{G_\alpha C} = \vec{0}$ معناه $2\overrightarrow{G_\alpha A} + \alpha(-\overrightarrow{G_\alpha B} + \overrightarrow{G_\alpha C}) = \vec{0}$ ويكافئ

$$2\overrightarrow{G_\alpha A} + \alpha(\overrightarrow{BG_\alpha} + \overrightarrow{G_\alpha C}) = \vec{0} \text{ ويكافئ } 2\overrightarrow{G_\alpha A} + \alpha\overrightarrow{BC} = \vec{0} \text{ ومنه } 2\overrightarrow{G_\alpha A} = -\alpha\overrightarrow{BC} \text{ أي } \overrightarrow{AG_\alpha} = \frac{1}{2}\alpha\overrightarrow{BC}$$

ب - استنتاج مجموعة النقط G_α لما يتغير α في $\mathbb{R}$.

لدينا $\overrightarrow{AG_\alpha} = \frac{1}{2}\alpha\overrightarrow{BC}$ ومنه مجموعة النقط G_α هي المستقيم الذي يشمل A ويوازي (BC) .

ج - من أجل أي قيمة للعدد α يكون $ABCG_\alpha$ متوازي أضلاع.

$$ABCG_\alpha \text{ متوازي أضلاع معناه } \overrightarrow{AG_\alpha} = \overrightarrow{BC} \text{ ومنه } \frac{1}{2}\alpha\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \text{ وعليه } \frac{1}{2}\alpha = 1 \text{ أي } \alpha = 2.$$

التمرين الثاني:

1. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C و D ذات اللاحقات:

$$z_A = 3 - i, z_B = 2 - 2i, z_C = -2i \text{ و } z_D = \overline{z_C} \text{ على الترتيب.}$$

أ - علم النقط A, B, C و D .

ب - كتابة z على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي،

$$z = \frac{z_D - z_C}{z_B - z_C} = \frac{2i + 2i}{2 - 2i + 2i} = \frac{4i}{2} = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

استنتاج طبيعة المثلث BCD .

لدينا $|z| = 2$ و $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$ معناه $CD = 2CB$ و $(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2}$ ومنه المثلث BCD قائم في C .

ج - تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد z^n حقيقياً سالباً تماماً.

$$\text{لدينا } z^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{2}}$$

z^n حقيقي سالب معناه $\arg(z^n) = \pi + 2k\pi$ يكافئ $\frac{n\pi}{4} = \pi + 2k\pi$ أي $n = 4 + 8k$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

2. ليكن S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث: $z' = (1-i)z + 2i$.

أ - تبين أن التحويل S هو تشابه مباشر يُطلب تعيين نسبته k ، زاويته θ ومركزه Ω .

الكتابة المركبة للتشابه S من الشكل $z' = az + b$ حيث $a = 1 - i$ و $b = 2i$.

لدينا $a = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ إذن S تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$ زاويته $-\frac{\pi}{4}$ ومركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة $\frac{b}{1-a} = \frac{2i}{i} = 2$.

ب - التحقق أن $S(A) = B$ و $S(B) = C$.

إذا كان $z = z_A$ فإن $z = z_B$ فإن $z' = (1-i)z_A + 2i = (1-i)(3-i) + 2i = 2 - 4i + 2i = 2 - 2i = z_B$ وعليه $S(A) = B$.

إذا كان $z = z_B$ فإن $z' = (1-i)z_B + 2i = (1-i)(2-2i) + 2i = -2i = z_C$ وعليه $S(B) = C$.
 تعيين التحويل الذي يحول A إلى C ومركزه Ω .

لدينا $S(B) = C$ معناه $S(S(A)) = C$ أي $S \circ S(A) = C$ إذن التحويل الذي يحول A إلى C ومركزه Ω هو التحويل $S \circ S$ أي هو التشابه المباشر الذي نسبته $2^2 = 4$ وزاويته $2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$ وهذا التشابه هو تحاك نسبته -4 .

جـ- لتكن ω لاحقة النقطة Ω ؛ التحقق أن $z' - z = i(\omega - z)$

$$z' - z = (1-i)z + 2i - z = z - iz + 2i - z = -iz + 2i = i(-z + 2) = i(\omega - z)$$

استنتاج طبيعة المثلث AMM' .

لدينا $z' - z = i(\omega - z)$ تعني $|z' - z| = |i| \times |\omega - z|$ تكافئ $|z' - z| = |\omega - z|$ أي $MM' = M\omega$.

و $\arg(z' - z) = \arg(i(\omega - z))$ يعني $\arg(z' - z) = \arg(i) + \arg(\omega - z)$ ويكافئ

$$\arg(z' - z) - \arg(\omega - z) = \arg(i) \text{ ويكافئ } \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$(\vec{u}; \overrightarrow{MM'}) - (\vec{u}; \overrightarrow{M\Omega}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ أي } (\vec{u}; \overrightarrow{MM'}) + (\overrightarrow{M\Omega}; \vec{u}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

إذن المثلث AMM' قائم في M ومتساوي الساقين.

3. نضع $A_0 = A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $A_{n+1} = S(A_n)$ ونرمز بـ z_n إلى لاحقة النقطة A_n .

ونعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_n = \Omega A_n$.

أ- تبين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

لدينا $A_{n+1} = S(A_n)$ و S تشابه مباشر مركزه Ω ونسبته 2 إذن $\frac{\Omega A_{n+1}}{\Omega A_n} = 2$ أي $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$ وبالتالي (u_n) متتالية

هندسية أساسها 2 وحدها الأول $u_0 = \Omega A_0 = |z_A - \omega| = |3-i-2| = \sqrt{2}$

ب- حساب بدلالة n المجموع L_n ؛ حيث $L_n = |z_0 - \omega| + |z_1 - \omega| + \dots + |z_n - \omega|$

$$L_n = |z_0 - \omega| + |z_1 - \omega| + \dots + |z_n - \omega| = \Omega M_0 + \Omega M_1 + \dots + \Omega M_n$$

$$L_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sqrt{2} \left(\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \right) = \sqrt{2} (2^{n+1} - 1)$$

التمرين الثالث:

الدالة العددية f معرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{2x^2}{x+4}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد

والمجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. كما هو مبين في الشكل

(1) تبين أن الدالة f متزايدة تماماً.

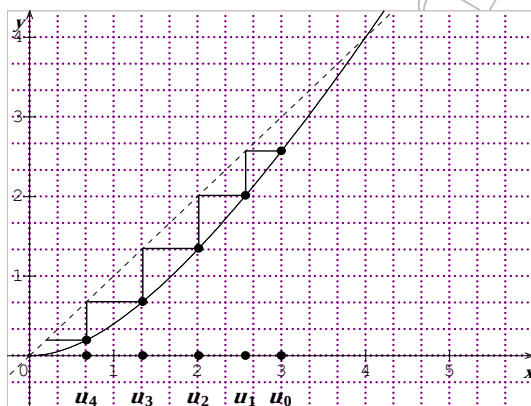
الدالة f تقبل الاشتقاق على $[0; +\infty[$ ولدينا

$$f'(x) = \frac{2x(x+4) - 2x^2}{(x+4)^2} = \frac{8x}{(x+4)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي من المجال $[0; +\infty[$ ، $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$.

(2) (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $U_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1} = f(U_n)$ و (Δ) المستقيم ذو

المعادلة $y = x$.



أ - تمثيل على حامل محور الفواصل، الحدود: U_0, U_1, U_2, U_3 و U_4 .

ب - وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها.

حسب الشكل يبدو أن المتتالية (U_n) متناقصة ومتقاربة نحو العدد 0.

(3) أ) برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n, 0 \leq U_n \leq 3$.

لدينا $0 \leq U_0 \leq 3$ أي الخاصية محققة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $0 \leq U_n \leq 3$ من أجل عدد طبيعي n ولنبرهن صحة الخاصية $0 \leq U_{n+1} \leq 3$.

$0 \leq U_n \leq 3$ معناه $f(3) \leq f(U_n) \leq f(0)$ لأن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$.

ومنه $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{18}{7}$ أي $0 \leq U_{n+1} \leq 3$ وعليه من أجل كل عدد طبيعي $n, 0 \leq U_n \leq 3$.

ب) تبين أن المتتالية (U_n) متناقصة.

ليكن n عدداً طبيعياً.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n^2}{U_n + 4} - U_n = \frac{2U_n^2 - U_n^2 - 4U_n}{U_n + 4} = \frac{U_n^2 - 4U_n}{U_n + 4} = \frac{U_n(U_n - 4)}{U_n + 4}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n, U_n \geq 0$ و $U_n + 4 > 0$ ومن جهة أخرى $U_n \leq 3$ معناه $U_n - 4 \leq -1$

أي $U_n - 4 < 0$ إذن $U_{n+1} - U_n < 0$ وبالتالي المتتالية (U_n) متناقصة.

ج) استنتاج أن (U_n) متقاربة.

بما أن (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي متقاربة.

(4) أ) دراسة إشارة العدد $7U_{n+1} - 6U_n$

$$7U_{n+1} - 6U_n = \frac{14U_n^2}{U_n + 4} - 6U_n = \frac{14U_n^2 - 6U_n^2 - 24U_n}{U_n + 4} = \frac{8U_n^2 - 24U_n}{U_n + 4} = \frac{8U_n(U_n - 3)}{U_n + 4}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n, 8U_n \geq 0$ و $U_n + 4 > 0$ ومن جهة أخرى $U_n \leq 3$ معناه $U_n - 3 \leq 0$

إذن $7U_{n+1} - 6U_n \leq 0$.

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n, 0 \leq U_{n+1} \leq \frac{6}{7}U_n$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n, 7U_{n+1} - 6U_n \leq 0$ معناه $7U_{n+1} \leq 6U_n$ أي $U_{n+1} \leq \frac{6}{7}U_n$ هذا من جهة

ومن جهة أخرى لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n, U_{n+1} \geq 0$ وعليه من أجل كل عدد طبيعي $n, 0 \leq U_{n+1} \leq \frac{6}{7}U_n$.

ب) برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n, 0 \leq U_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$.

لدينا $3\left(\frac{6}{7}\right)^0 = 3$ و $U_0 = 3$ ومنه $0 \leq U_0 \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^0$ أي الخاصية محققة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $0 \leq U_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$ ونبرهن أن $0 \leq U_{n+1} \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$.

لدينا $0 \leq U_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$ معناه $0 \leq \frac{6}{7}U_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$ أي $0 \leq \frac{6}{7}U_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$ لكن لدينا من أجل كل عدد طبيعي n

$0 \leq U_{n+1} \leq \frac{6}{7}U_n$ إذن $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{6}{7}U_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$ أي $0 \leq U_{n+1} \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$.

و عليه فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq U_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$.

(ج) حساب نهاية المتتالية (U_n) عندما ينول n إلى $+\infty$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq U_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$ وبما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3\left(\frac{6}{7}\right)^n = 0$ إذن حسب النهايات بالمقارنة فإن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

التمرين الرابع:

(I) لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(e^x + 1)$.

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ وفسر النتيجة هندسياً .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 1) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(e^x + 1) = 0$$

(ب) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 1) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x(1 + e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 1$$

$$\text{إذن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(e^x + 1) = -\infty$$

(2) أ) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) = \frac{-2e^{2x}}{(e^x + 1)^2}$.

$$g'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^{2x}}{(e^x + 1)^2} - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} - \frac{e^x(e^x + 1)}{(e^x + 1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{e^x - e^{2x} - e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{-e^{2x}}{(e^x + 1)^2}$$

(ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة g .

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $g'(x) < 0$ إذن الدالة g متناقصة تماماً على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة g .

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		—
$g(x)$	0	$-\infty$

نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) < 0$.

(3) أ) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} - \ln(1 + e^{-x}) - x$.

$$g(x) = \frac{e^x}{e^x(1 + e^{-x})} - \ln(e^x(1 + e^{-x})) = \frac{1}{(1 + e^{-x})} - [\ln e^x + \ln(1 + e^{-x})]$$

$$g(x) = \frac{1}{(1+e^{-x})} - \ln(1+e^{-x}) - x$$

(ب) تبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) + x] = 1$

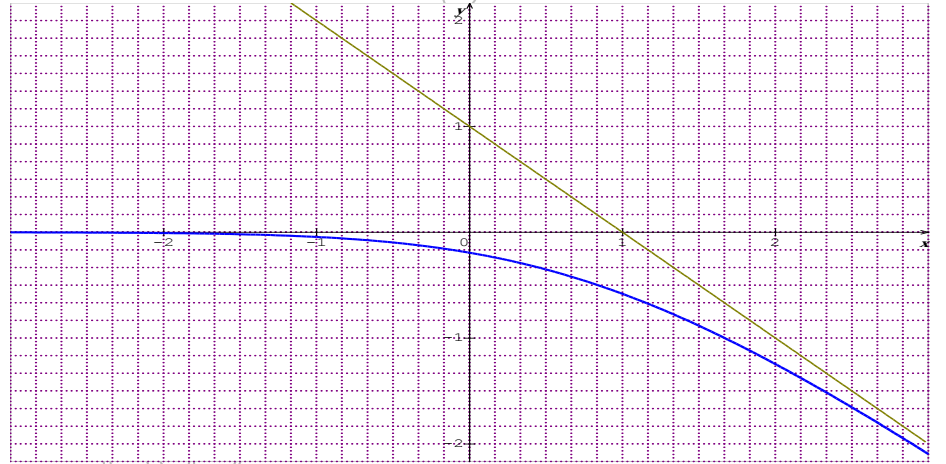
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1+e^{-x})} = 1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{(1+e^{-x})} - \ln(1+e^{-x}) \right) = 1$$

استنتاج أن (C_g) يقبل مستقيماً مقارباً (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (-x + 1)] = 0 \text{ أي } \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) + x - 1] = 0 \text{ معناه } \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) + x] = 1$$

ومنه (C_g) يقبل مستقيماً مقارباً (Δ) معادلته $y = -x + 1$ بجوار $+\infty$.

(4) رسم (Δ) و (C_g) .



(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^{-x} \ln(e^x + 1)$

(1) برهان أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{e^x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t + 1)}{t} = 1$$

حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{e^x} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\ln(z + 1)}{z} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\ln(z + 1)}{z + 1} \times \frac{z + 1}{z} = 0$$

$$\text{لأن } \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z + 1}{z} = 1 \text{ و } \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\ln(z + 1)}{z + 1} = 0$$

(2) (أ) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = e^{-x} \times g(x)$

$$f'(x) = -e^{-x} \ln(e^x + 1) + \frac{e^x}{e^x + 1} e^{-x} = e^{-x} \left(\ln(e^x + 1) + \frac{e^x}{e^x + 1} \right) = e^{-x} \times g(x)$$

(ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^{-x} > 0$ و $g(x) < 0$ ومنه $f'(x) < 0$ وبالتالي الدالة f متناقصة تماماً على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	1	0

(3) التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $\frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ ،

$$\frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^x \times e^{-x}}{e^x (1 + e^{-x})} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

حساب $\int_{-\ln 3}^0 \frac{1}{e^x + 1} dx$

$$\begin{aligned} \int_{-\ln 3}^0 \frac{1}{e^x + 1} dx &= \int_{-\ln 3}^0 \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = - \int_{-\ln 3}^0 \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = - \left[\ln(1 + e^{-x}) \right]_{-\ln 3}^0 \\ &= -(\ln 2 - \ln(1 + 3)) = \ln 4 - \ln 2 = 2 \ln 2 - \ln 2 = \ln 2 \end{aligned}$$

(4) حساب $\int_{-\ln 3}^0 f(x) dx$

$$\text{نضع } \begin{cases} u(x) = \ln(e^x + 1) \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} u'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\int_{-\ln 3}^0 f(x) dx = \int_{-\ln 3}^0 v'(x) u(x) dx = \left[v(x) u(x) \right]_{-\ln 3}^0 - \int_{-\ln 3}^0 v(x) u'(x) dx$$

$$\begin{aligned} &= \left[-e^{-x} \ln(e^x + 1) \right]_{-\ln 3}^0 - \int_{-\ln 3}^0 -e^{-x} \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \left[-e^{-x} \ln(e^x + 1) \right]_{-\ln 3}^0 + \int_{-\ln 3}^0 \frac{1}{e^x + 1} dx \\ &= \left[-\ln 2 - \left(-3 \ln \frac{4}{3} \right) \right] + \ln 2 = 3 \ln \frac{4}{3} \end{aligned}$$

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول:

(1) $P(z) = z^3 - 5z^2 + 8z - 6$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث:

(أ) تحقق أن 3 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

(ب) جد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z - 3)(z^2 + \alpha z + \beta)$.

(ج) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z) = 0$.

(2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C, D لواحقها على الترتيب:

$$z_D = \operatorname{Re}(z_C + z_A) \text{ و } z_C = 2z_B, \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

(أ) عيّن مركز الدوران R الذي زاويته $\frac{\pi}{2}$ و يحول A إلى C .

(ب) بين أن النقط A, B, C تنتمي إلى دائرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

(ج) عيّن z_D لاحقة النقطة D' حتى يكون الرباعي $ADBD'$ معيناً.

(3) نعتبر التحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطة $M'(z')$ حيث:

$$z' - 1 + i = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 1 + i)$$

(أ) عيّن طبيعة التحويل T وعناصره المميزة.

(ب) جد لاحقة النقطة E صورة النقطة O بالتحويل T ، ثم بين أن المستقيمين (AB) و (CE) متعامدان.

(4) (أ) عيّن مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي، حيث: $z - z_C = z_A \overline{z_A} e^{i\theta}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$.

(ب) عيّن مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي، حيث: $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

التمرين الثاني:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نعتبر النقط A, B, C, D حيث:

$$\overline{AD}(1; 5; 2), \quad \overline{BD}(0; 7; 3), \quad \overline{CD}(1; -3; 7) \text{ و } \overline{CD}(2; 8; -4)$$

1. بين أن النقط A, B, D تعين مستويا.

2. بين أن المستقيم (CD) يعامد المستوي (ABD) .

3. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) .

4. المسقط العمودي للنقطة D على المستقيم (AB) .

أ - احسب إحداثيات النقطة H .

ب - استنتج المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB) .

ج - احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

5. لتكن (γ) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $MB^2 - MA^2 = 28$.

أ - تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (γ) .

ب - عيّن طبيعة المجموعة (γ) .

التمرين الثالث:

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة كما يلي: $u_0 = e$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$.

2. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج تقاربها.

3. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: $v_n = \ln(u_n)$.

أ - بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب - اكتب v_n و u_n بدلالة n ثم احسب نهاية المتتالية (u_n) .

4. نضع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$.

أ - احسب S_n ثم P_n بدلالة n .

ب - عين العدد الطبيعي n حتى يكون $P_n = e^{\frac{7}{4}}$.

التمرين الرابع:

I - 1. الدالة u معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $u(x) = e^x - 3x + 4 - e$.

أ - ادرس اتجاه تغير الدالة u .

ب - بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $e^x - e > 3x - 4$.

2. الدالة v معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $v(x) = -3x^3 + 4x^2 - 1 + \ln x$.

أ - بين أن: $v'(1) = 0$. (يرمز v' إلى الدالة المشتقة للدالة v).

ب - أثبت أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $v(x) \leq 0$.

ج - استنتج، أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $\frac{-1 + \ln x}{x^2} \leq 3x - 4$.

3. أثبت أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $e^x - e + \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0$.

II - الدالة f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = e^x - ex + \frac{\ln x}{x}$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

2. بين أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

3. احسب $f(1)$ ، ثم مثل المنحنى (C_f) على المجال $]0; \frac{5}{2}]$.

(نأخذ: $f(2) \approx 2,3$ ، $f(1,64) \approx 1$ و $f(\frac{5}{2}) \approx 5,75$).

4. احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتيهما

$$x = 2 \text{ و } x = \frac{1}{2}.$$

الموضوع الثاني:

التمرين الأول:

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $C(0;0;-1)$ ، $B(0;0;1)$ ، $A(0;2;-1)$ و $H(0;0;h)$ حيث h عدد حقيقي ينتمي إلى $\mathbb{R} - \{-1;1\}$.

1/ حدّد معادلة ديكرتية للمستوي (P_h) المار من النقطة H والمتعامد مع المستقيم (BC) .

2/ أ/ اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) .

ب/ حدد المستقيم (AB) بمعادلتين ديكرتيتين.

ج/ تحقق أن المستقيم (AB) يقطع المستوي (P_h) في النقطة $N(0;1-h;h)$.

3/ (Δ) و (Δ') مستقيمان من الفضاء معرّفان كما يلي :

$$(\Delta): \begin{cases} x - z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad (\Delta'): \begin{cases} x = -2t + 2 \\ y = 2t \\ z = -2t + 1 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

- عيّن بدلالة h إحداثيات P و Q نقطتي تقاطع (P_h) مع كل من (Δ) و (Δ') على الترتيب.

4/ أ/ بين أن الرباعي $HPQN$ مستطيل .

ب/ نفرض أن h ينتمي إلى المجال $]-1;1[$ بيّن أن محيط المستطيل $HPQN$ عدد ثابت يطلب تحديده.

التمرين الثاني:

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) العدديتين حيث: $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $v_n = \frac{n\pi}{3}$ ونسمي M_n النقطة التي لاحقتها z_n

حيث: $z_n = u_n e^{iv_n}$

(1) أ) بين أن المتتالية (u_n) هندسية و (v_n) حسابية يطلب تعيين أساس وحساب الحد الأول لكل منهما.
ب) عيّن مجموعة قيم الأعداد الطبيعية n التي تكون من أجلها النقطة M_n تنتمي إلى محور الفواصل.

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ وحدة الطول $4cm$.

أ) عين لواحق النقط M_0 ، M_1 ، M_2 و M_3 .

ب) احسب أطوال المثلث $OM_n M_{n+1}$ بدلالة u_n .

ج) ما طبيعة المثلث $OM_n M_{n+1}$.

(3) نعتبر المتتالية (a_n) المعرفة بـ: $a_n = |z_{n+1} - z_n|$.

أ) بيّن أن (a_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

التمرين الثالث:

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدّها الأول u_1 وأساسها q حيث:

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

1. أ - احسب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول u_1 .

ب - أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

ج - احسب S_n بدلالة n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ؛ ثم عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 728$.

2. (v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي: $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$.

أ - احسب v_2 و v_3 .

ب - نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$.

- بيّن أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ج - اكتب w_n بدلالة n ، ثم استنتج v_n بدلالة n .

التمرين الرابع:

I - نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (1-2x)e^{2x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. وحدة الرسم $2cm$.

1. احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

2. احسب عبارة $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

3. شكل جدول تغيّرات الدالة f .

4. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$ ثم استنتج نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.

5. احسب $f(1)$ ثم ارسم (C_f) .

6. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = f(m)$.

7. أ - عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون الدالة F المعرفة بـ: $F(x) = (ax+b)e^{2x}$ دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

ب - احسب بـ cm^2 وبدلالة المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها:

$$x = \lambda \text{ و } x = \frac{1}{2}, y = 0 \text{ حيث } \lambda < \frac{1}{2}, \text{ ثم احسب } \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} S(\lambda).$$

II - نسمي f^n المشتقة من الرتبة n حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، $f^n(x) = 2^n(1-n-2x)e^{2x}$.

2. نرمز بـ (C_n) للمنحنى الممثل للدالة f^n في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

ولتكن النقطة $M_n(x_n; y_n)$ من (C_n) والتي يقبل عندها (C_n) مماسا يوازي حامل محور الفواصل.

أ - احسب x_n و y_n بدلالة n ، ثم تحقّق أنّ M_n نقطة من المنحنى (C) الذي معادلته $y = \frac{e^{2x}}{4^x}$.

ب - أثبت أنّ (x_n) متتالية حسابية، احسب نهايتها.

ج - أثبت أنّ (y_n) متتالية هندسية، احسب نهايتها.

حل الموضوع الأول:

التمرين الأول:

(1) $P(z) = z^3 - 5z^2 + 8z - 6$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث: $P(z) = z^3 - 5z^2 + 8z - 6$
 أ) التحقق أن 3 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

$$P(3) = 3^3 - 5 \times 3^2 + 8 \times 3 - 6 = 27 - 45 + 24 - 6 = 0$$

(ب) إيجاد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z-3)(z^2 + \alpha z + \beta)$

$$(z-3)(z^2 + \alpha z + \beta) = z^3 + (\alpha-3)z^2 + (\beta-3\alpha)z - 3\beta$$

$$\alpha - 3 = -5 \text{ و } -3\beta = -6 \text{ أي } \alpha = -2 \text{ و } \beta = 2$$

$$P(z) = (z-3)(z^2 - 2z + 2)$$

(ج) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z) = 0$.

$$P(z) = 0 \text{ معناه } z = 3 \text{ أو } z^2 - 2z + 2 = 0 \dots (1)$$

نحل المعادلة (1).

$$\Delta' = 1 - 2 = -1 = i^2 \text{ للمعادلة حلان هما } z_1 = 1+i \text{ و } z_2 = 1-i$$

$$P(z) = 0 \text{ يكافئ } z \in \{3; 1+i; 1-i\}$$

(2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C و D لواحقتها على الترتيب:

$$z_D = \operatorname{Re}(z_C + z_A) \text{ و } z_C = 2z_B, z_B = \overline{z_A}, z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

أ) تعيين مركز الدوران R الذي زاويته $\frac{\pi}{2}$ و يحول A إلى C .

العبارة المركبة للدوران R من الشكل $z' = az + b$ حيث $a = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ ومنه $z' = iz + b$ وبما أن $R(A) = C$

$$\text{فإن } z_C = iz_A + b \text{ ومنه } b = z_C - iz_A \text{ أي } b = 3 - 3i$$

$$\text{وعليه العبارة المركبة للدوران } R \text{ هي } z' = iz + 3 - 3i$$

$$\text{ومنه مركز الدوران } R \text{ هو النقطة الصامدة ذات اللاحقة } \frac{b}{1-a} = \frac{3-3i}{1-i} = 3 = z_D \text{ أي مركزه النقطة } D$$

(ب) تبين أن النقط A, B, C تنتمي إلى دائرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

لدينا $R(A) = C$ معناه النقطة D تنتمي إلى محور القطعة $[AC]$ لأن مركز الدوران R هي D .

ولدينا $z_B = \overline{z_A}$ معناه محور القطعة $[AB]$ هو محور الفواصل وبما z_D هو عدد حقيقي فإن النقطة D تنتمي إلى

إلى محور الفواصل أي تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ وهذا يعني أن D تنتمي إلى تقاطع محاور المثلث ABC

وبالتالي النقط A, B, C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها $DA = \sqrt{5}$.

(ج) تعيين $z_{D'}$ لاحقة النقطة D' حتى يكون الرباعي $ADBD'$ معيناً.

$$ADBD' \text{ معين معناه } ADBD' \text{ متوازي أضلاع لأن } DA = DB$$

$$ADBD' \text{ متوازي أضلاع معناه } \overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{DA} \text{ ويكافئ } z_{D'} - z_B = z_A - z_D \text{ ويكافئ } z_{D'} = z_A - z_D + z_B$$

$$\text{أي } z_{D'} = -1$$

(3) نعتبر التحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطة $M'(z')$ حيث:

$$z' - 1 + i = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 1 + i)$$

أ) تعيين طبيعة التحويل T وعناصره المميزة.

$$\frac{\pi}{2}. z' - z_B = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_B) \text{ معناه } z' - 1 + i = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 1 + i)$$

(ب) إيجاد لاحقة النقطة E صورة النقطة O بالتحويل T .

$$T(O) = E \text{ معناه } z_E - z_B = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_O - z_B) \text{ وتكافئ } z_E - z_B = i(-z_B) + z_B \text{ أي } z_E = z_B(1 - i) = -2i.$$

تبيين أن المستقيمين (AB) و (CE) متعامدان.

$$\text{لدينا } z_A - z_B = 2i \text{ و } z_C - z_E = 2 \text{ إذن } \frac{z_A - z_B}{z_C - z_E} = i \text{ وهذا يعني أن } (\overrightarrow{EC}; \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2} \text{ ومنه المستقيمان } (AB) \text{ و } (CE) \text{ متعامدان.}$$

(4) أ) تعيين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي، حيث: $z - z_C = z_A \cdot \overline{z_A} e^{i\theta}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z - z_C = z_A \cdot \overline{z_A} e^{i\theta} \text{ معناه } z - z_C = |z_A|^2 e^{i\theta} \text{ و } \theta \in \mathbb{R} \text{ ويكافئ } z - z_C = 2e^{i\theta} \text{ أي } |z - z_C| = 2$$

وبالتالي مجموعة النقط M ذات اللاحقة z هي الدائرة التي مركزها C ونصف قطرها 2.

(ب) تعيين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي، حيث: $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

$$\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ معناه } (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ وبالتالي مجموعة النقط } M \text{ ذات اللاحقة } z \text{ هي الدائرة التي قطرها } [AB] \text{ باستثناء النقطتين } A \text{ و } B.$$

التمرين الثاني:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نعتبر النقط A, B, C, D حيث:

$$A(1; 5; 2), B(0; 7; 3), C(2; 8; -4), D(1; -3; 7).$$

1. تبين أن النقط A, B, D تعين مستويا.

الشعاعان $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BD}$ غير مرتبطين خطيا لأن $x_{\overrightarrow{BD}} = 0$ و $x_{\overrightarrow{AD}} \neq 0$ ومنه النقط A, B, D تعين مستويا.

2. تبين أن المستقيم (CD) يعامد المستوي (ABD) .

$$\text{لدينا } \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AD} = 1 \times 1 - 3 \times 5 + 7 \times 2 = 0 \text{ و } \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BD} = 1 \times 0 - 3 \times 7 + 7 \times 3 = 0 \text{ ومنه } \overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AD} \text{ و } \overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{BD}.$$

ومنه $\overrightarrow{CD}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABD) وبالتالي المستقيم (CD) يعامد المستوي (ABD) .

3. كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) .

$$\text{لدينا } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} \text{ إحداثيات الشعاع } \overrightarrow{AB} \text{ هي } (1; -2; -1) \text{ وعليه } \overrightarrow{AB}(1; -2; -1).$$

$$\text{ولدينا } \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} \text{ إحداثيات الشعاع } \overrightarrow{OA} \text{ هي } (2; 0; 1) \text{ إذن } \overrightarrow{OA}(2; 0; 1) \text{ أي } A(2; 0; 1).$$

من أجل كل نقطة $M(x; y; z)$ من المستقيم (AB) لدينا $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ مع $t \in \mathbb{R}$.

$$\text{ومنه } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2t \\ z = 1 - t \end{cases} \text{ تمثيل وسيطي للمستقيم } (AB).$$

4. المسقط العمودي للنقطة D على المستقيم (AB) .

أ - حساب إحداثيات النقطة H .

$$\text{لدينا } \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} \text{ معناه } \overrightarrow{OD}(3; 5; 3) \text{ وعليه } D(3; 5; 3).$$

$H \in (AB)$ معناه إحداثيات النقطة H من الشكل $H(2+t; -2t; 1-t)$ ومنه $\overrightarrow{DH}(-1+t; -2t-5; -2-t)$

ولدينا $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ معناه $1(-1+t) - 2(-2t-5) - (-2-t) = 0$ ويكافئ $11+6t=0$ أي $t = -\frac{11}{6}$

وعليه $H\left(\frac{1}{6}; \frac{11}{3}; \frac{17}{6}\right)$ أي $H\left(2-\frac{11}{6}; -2\left(-\frac{11}{6}\right); 1+\frac{11}{6}\right)$

ب - استنتاج المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB) .

لدينا $d(D; (AB)) = DH = \frac{\sqrt{354}}{6}$ وعليه $DH = \sqrt{\left(\frac{1}{6}-3\right)^2 + \left(\frac{11}{3}-5\right)^2 + \left(\frac{17}{6}-3\right)^2} = \frac{\sqrt{354}}{6}$

ج - احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

حجم رباعي الوجوه يعطى $\frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$.

فإن $V(ABCD) = \frac{1}{3} S(ABD) \times d$ ، حيث d هو بُعد النقطة C عن المستوي (ABD)

بما أن المستقيم (CD) يعامد المستوي (ABD) فإن النقطة D هي المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (ABD) أي $d = CD$

ولدينا $CD = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 7^2} = \sqrt{59}$ ، $AB = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

وعليه $V(ABCD) = \frac{1}{3} \times \frac{AB \cdot DH}{2} \times CD = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{59}}{2} \times \sqrt{59} = \frac{59}{6}$

5. لتكن (γ) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $MB^2 - MA^2 = 28$.
أ - التحقق أن النقطة C تنتمي إلى (γ) .

لدينا $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD}$ وإحداثيات الشعاع $\overrightarrow{CB}$ هي $(1; -10; 4)$ وعليه $\overrightarrow{CB}(1; -10; 4)$

إن $CB^2 = 1^2 + (-10)^2 + 4^2 = 117$

ولدينا $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}$ وإحداثيات الشعاع $\overrightarrow{CA}$ هي $(0; -8; 5)$ وعليه $\overrightarrow{CA}(0; -8; 5)$

إن $CA^2 = 0 + 64 + 25 = 89$ وعليه $CB^2 - CA^2 = 117 - 89 = 28$ وبالتالي $C \in (\gamma)$

ب - تعيين طبيعة المجموعة (γ) .

$MB^2 - MA^2 = 28$ معناه $(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB})^2 - (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA})^2 = 28$ وبكافئ

$2\overrightarrow{MC}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) + CB^2 - CA^2 = 28$ ويكافئ $MC^2 + CB^2 + 2\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{CB} - MC^2 - CA^2 - 2\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{CA} = 28$

ومعناه $2\overrightarrow{MC}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}) + 28 = 28$ أي $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ وبالتالي (γ) هي المستوي الذي يشمل C ويكون $\overrightarrow{AB}$

شعاع ناظمي له وهذا المستوي هو (CDH) .

التمرين الثالث:

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة كما يلي: $u_0 = e$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

1. برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$

لدينا $u_0 > 1$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

نفرض أن $u_n > 1$ ومنه $\sqrt{u_n} > 1$ أي $u_{n+1} > 1$ وعليه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$u_n > 1$

2. دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

بما أن $u_n > 1$ فإن $u_n^2 > u_n$ ومنه $u_n > \sqrt{u_n}$ أي $u_n > u_{n+1}$ إذا المتتالية (u_n) متناقصة. استنتج تقاربها.

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي متقاربة.

3. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: $v_n = \ln(u_n)$.

أ - تبيان أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ليكن n عددا طبيعيا

$$v_{n+1} = \ln u_{n+1} = \ln \sqrt{u_n} = \ln u_n^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln u_n = \frac{1}{2} v_n$$

$$v_0 = \ln u_0 = \ln e = 1$$

ب - كتابة u_n و v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad ; \quad u_n = e^{v_n} = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

حساب نهاية المتتالية (u_n) .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 1 \quad \text{ومنه} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

4. نضع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$.

أ - حساب S_n ثم P_n بدلالة n .

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right)$$

$$P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \dots \times e^{v_n} = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_n} = e^{S_n} = e^{2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right)}$$

ب - تعيين العدد الطبيعي n حتى يكون $P_n = e^{\frac{7}{4}}$.

$$P_n = e^{\frac{7}{4}} \quad \text{معناه} \quad e^{2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right)} = e^{\frac{7}{4}} \quad \text{يكافئ} \quad 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) = \frac{7}{4} \quad \text{يكافئ} \quad 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{7}{8} \quad \text{ويكافئ} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{8}$$

$$\text{أي} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \text{وعليه} \quad n = 3.$$

التمرين الرابع:

I - 1. الدالة u معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $u(x) = e^x - 3x + 4 - e$.

أ - دراسة اتجاه تغير الدالة u .

الدالة u تقبل الاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ولدينا $u'(x) = e^x - 3$.

$$u'(x) = 0 \quad \text{تعني} \quad e^x - 3 = 0 \quad \text{وتكافئ} \quad e^x = 3 \quad \text{أي} \quad x = \ln 3.$$

$$u'(x) > 0 \quad \text{تعني} \quad e^x - 3 > 0 \quad \text{وتكافئ} \quad e^x > 3 \quad \text{أي} \quad x > \ln 3.$$

$u'(x) < 0$ تعني $e^x - 3 < 0$ و $x > 0$ وتكافئ $e^x < 3$ أي $0 < x < \ln 3$.
وبالتالي الدالة u متناقصة تماماً على المجال $]0; \ln 3]$ ومتزايدة تماماً على المجال $[\ln 3; +\infty[$.

ب - تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $e^x - e > 3x - 4$.

لدينا الدالة u تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $]0; +\infty[$ تأخذها عند $x = \ln 3$ وعليه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $u(x) \geq u(\ln 3)$ ولدينا $u(\ln 3) \approx 0.99$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $u(x) > 0$ أي $e^x - 3x + 4 - e > 0$ وبالتالي $e^x - e > 3x - 4$.

2. الدالة v معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $v(x) = -3x^3 + 4x^2 - 1 + \ln x$.

أ - تبين أن: $v'(1) = 0$. (يرمز v' إلى الدالة المشتقة للدالة v).

الدالة v تقبل الاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ولدينا: $v'(x) = -9x^2 + 8x + \frac{1}{x} = \frac{-9x^3 + 8x^2 + 1}{x}$

$$v'(1) = \frac{-9(1)^3 + 8(1)^2 + 1}{1} = 0$$

ب - إثبات أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $v(x) \leq 0$.

$$\text{لدينا } v'(x) = \frac{-9x^3 + 8x^2 + 1}{x} = \frac{(x-1)(-9x^2 - x - 1)}{x}$$

المعادلة $-9x^2 - x - 1 = 0$ لا تقبل حلولاً إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $-9x^2 - x - 1 < 0$.

x	0	1	$+\infty$
x		+	+
$-9x^2 - x - 1$		-	-
$x - 1$		0	+
$v'(x)$		0	-

الدالة v متزايدة تماماً على $]0; 1]$ ومتناقصة تماماً على $[1; +\infty[$ فهي تقبل قيمة حدية عظمى على المجال $]0; +\infty[$

تبلغها من أجل $x = 1$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $v(x) \leq v(1)$ أي $v(x) \leq 0$.

ج - استنتاج، أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $\frac{-1 + \ln x}{x^2} \leq 3x - 4$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $v(x) \leq 0$ معناه $-3x^3 + 4x^2 - 1 + \ln x \leq 0$ معناه

$$\frac{-1 + \ln x}{x^2} \leq 3x - 4 \text{ أي } \frac{-1 + \ln x}{x^2} \leq \frac{3x^3 - 4x^2}{x^2} \text{ يكافئ } -1 + \ln x \leq 3x^3 - 4x^2$$

3. إثبات أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $e^x - e + \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $\frac{-1 + \ln x}{x^2} \leq 3x - 4$ يكافئ (1) $\frac{-1 + \ln x}{x^2} \geq -3x + 4$

ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، (2) $e^x - e > 3x - 4$ وبجمع (1) و (2) طرفاً إلى طرف

$$\text{نجد } e^x - e + \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0$$

II - الدالة f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = e^x - ex + \frac{\ln x}{x}$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$).

1. حساب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x - ex + \frac{\ln x}{x} = -\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - ex = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - e \right) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

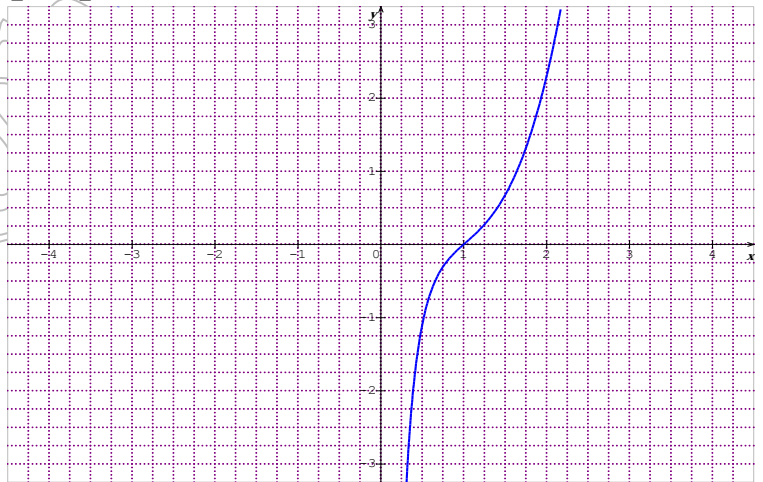
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - ex + \frac{\ln x}{x} = +\infty \text{ ومنه}$$

2. تبين أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

$$f'(x) = e^x - e + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = e^x - e + \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ولدينا: $f'(x) > 0$ أي $e^x - e + \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$.

3. حساب $f(1)$ ، و تمثيل المنحنى (C_f) على المجال $]0; \frac{5}{2}]$.



4. حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين الذين معادليهما

$$x = \frac{1}{2} \text{ و } x = 2.$$

$$A = -\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = -\left[e^x - \frac{e}{2}x^2 + \frac{1}{2}(\ln x)^2 \right]_{\frac{1}{2}}^1 + \left[e^x - \frac{e}{2}x^2 + \frac{1}{2}(\ln x)^2 \right]_1^2$$

$$A = -\left[\left(e - \frac{e}{2} \right) - \left(\sqrt{e} - \frac{e}{8} + \frac{(\ln 2)^2}{2} \right) \right] + \left[e^2 - 2e + \frac{(\ln 2)^2}{2} - \left(e - \frac{e}{2} \right) \right]$$

$$A = \left[e^2 + \sqrt{e} - \frac{25}{8}e + (\ln 2)^2 \right] ua$$

حل الموضوع الثاني:

التمرين الأول:

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $C(0;0;-1)$ ، $B(0;0;1)$ ، $A(0;2;-1)$ و $H(0;0;h)$ حيث h عدد حقيقي ينتمي إلى $\mathbb{R} - \{-1;1\}$.

1/ تحديد معادلة ديكارتية للمستوي (P_h) المار من النقطة H والمتعامد مع المستقيم (BC) .

لدينا $\overrightarrow{BC}(0;0;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (P_h) ومنه المستوي (P_h) له معادلة من الشكل $-2z + d = 0$ ولدينا $H \in (P_h)$ معناه $-2h + d = 0$ أي $d = 2h$ ومنه $-2z + 2h = 0$ وتكافئ $z - h = 0$ وهي معادلة ديكارتية للمستوي (P_h) .

2/ كتابة تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) .

لدينا $\overrightarrow{AB}(0;-2;2)$ شعاع توجيه للمستقيم (AB) .

$M(x;y;z) \in (AB)$ معناه $\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2\lambda \\ z = 2\lambda + 1 \end{cases} \quad \text{ومنه } (\lambda \in \mathbb{R})$$

ب/ تحديد المستقيم (AB) بمعادلتين ديكارتيتين.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2\lambda \\ z = 2\lambda + 1 \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 1 \end{cases} \quad \text{وهو تمثيل ديكارتي للمستقيم } (AB).$$

ج/ التحقق أن المستقيم (AB) يقطع المستوي (P_h) في النقطة $N(0;1-h;h)$.

لدينا $z_N - h = h - h = 0$ ومنه $N \in (P_h)$.

ولدينا $\overrightarrow{BN}(0;1-h;h-1)$ ومنه $\overrightarrow{BN} = \frac{h-1}{2} \overrightarrow{AB}$ ومنه $N \in (AB)$.

إذن $(P_h) \cap (AB) = \{N\}$.

3/ (Δ) و (Δ') مستقيمان من الفضاء معرفان كما يلي :

$$(\Delta): \begin{cases} x - z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad (\Delta'): \begin{cases} x = -2t + 2 \\ y = 2t \\ z = -2t + 1 \end{cases} \quad ; (t \in \mathbb{R})$$

- تعيين بدلالة h إحداثيات P و Q نقطتي تقاطع (P_h) مع كل من (Δ) و (Δ') على الترتيب.

تعيين بدلالة h إحداثيات P

$$\begin{cases} x_P - z_P = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{معناه} \quad P \in (\Delta)$$

$$P \in (P_h) \quad \text{معناه} \quad z_P - h = 0 \quad \text{أي} \quad z_P = h \quad \text{وعليه} \quad \begin{cases} x_P - h = 1 \\ y_P = 0 \\ z_P = h \end{cases} \quad \text{أي} \quad P(1+h;0;h).$$

تعيين بدلالة h إحداثيات Q

$$Q \in (\Delta') \text{ معناه } Q(-2t+2; 2t; -2t+1)$$

$$Q \in (P_h) \text{ معناه } z_Q - h = 0 \text{ وعليه } -2t+1-h=0 \text{ أي } t = \frac{1-h}{2}$$

$$\text{إذن } Q\left(-2\left(\frac{1-h}{2}\right)+2; 2\left(\frac{1-h}{2}\right); -2\left(\frac{1-h}{2}\right)+1\right) \text{ أي } Q(h+1; 1-h; h)$$

4/ تبين أن الرباعي $HPQN$ مستطيل.

$$\text{لدينا } \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{HP} \text{ ومنه } \overrightarrow{NQ}(1+h; 0; 0) \text{ و } \overrightarrow{HP}(1+h; 0; 0)$$

$$\text{زيادة على هذا لدينا } \overrightarrow{HN}(0; 1-h; 0) \text{ إذن } \overrightarrow{HN} \cdot \overrightarrow{HP} = 0 \text{ ومنه الرباعي } HPQN \text{ مستطيل.}$$

ب/ نفرض أن h ينتمي إلى المجال $]-1; 1[$

تبيان أن محيط المستطيل $HPQN$ عدد ثابت يطلب تحديده.

$$\text{لدينا } HN = \sqrt{0+(1-h)^2+0} = \sqrt{(1-h)^2} = 1-h \text{ لأن } 1-h > 0$$

$$\text{و } HP = \sqrt{(1+h)^2+0+0} = \sqrt{(1+h)^2} = 1+h \text{ لأن } 1+h > 0$$

$$\text{ومنه محيط المستطيل } HPQN \text{ هو } p = 2(HP + HN) = 2(1+h+1-h) = 4$$

التمرين الثاني:

$$\text{نعتبر المتتاليتين } (u_n) \text{ و } (v_n) \text{ العدديتين حيث: } u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ و } v_n = \frac{n\pi}{3} \text{ ونسمي } M_n \text{ النقطة التي لاحققتها } z_n$$

$$\text{حيث: } z_n = u_n e^{iv_n}$$

(1) تبين أن المتتالية (u_n) هندسية و (v_n) حسابية يطلب تعيين أساس وحساب الحد الأول لكل منهما.

$$\text{لدينا } u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} u_n \text{ إذن } (u_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } \frac{1}{2} \text{ وحدها الأول } u_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

$$\text{إذن } v_{n+1} = \frac{(n+1)\pi}{3} = \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = v_n + \frac{\pi}{3} \text{ متتالية حسابية أساسها } \frac{\pi}{3}$$

(ب) تعيين مجموعة قيم الأعداد الطبيعية n التي تكون من أجلها النقطة M_n تنتمي إلى محور الفواصل.

$$M_n \text{ تنتمي إلى محور الفواصل معناه } z_n \text{ حقيقي معناه } \arg(z_n) = k\pi \text{ يكافئ } \frac{n\pi}{3} = k\pi \text{ أي } n = 3k \text{ مع } k \in \mathbb{N}$$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ وحدة الطول $4cm$.

أ) عين لواحق النقط M_0, M_1, M_2, M_3 .

$$z_0 = u_0 e^{iv_0} = 1e^{i0} = 1, z_1 = u_1 e^{iv_1} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}, z_2 = u_2 e^{iv_2} = \frac{1}{4} e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{8} + i\frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$z_3 = u_3 e^{iv_3} = \frac{1}{8} e^{i\pi} = -\frac{1}{8}$$

(ب) حساب أطوال المثلث $OM_n M_{n+1}$ بدلالة u_n .

$$OM_n = |z_n| = u_n, OM_{n+1} = |z_{n+1}| = u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n$$

$$M_n M_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = |u_{n+1} e^{iv_{n+1}} - u_n e^{iv_n}| = \left| \frac{1}{2} u_n e^{i(v_n + \frac{\pi}{3})} - u_n e^{iv_n} \right| = \left| u_n e^{iv_n} \left(\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 \right) \right|$$

$$M_n M_{n+1} = \left| u_n e^{iv_n} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - 1 \right) \right| = \left| u_n e^{iv_n} \left(\frac{-3}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \right| = |u_n e^{iv_n}| \times \left| \frac{-3}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} u_n$$

(ج) طبيعة المثلث $OM_n M_{n+1}$.

$$M_n M_{n+1}^2 + OM_{n+1}^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} u_n \right)^2 + \left(\frac{1}{2} u_n \right)^2 = \frac{3}{4} u_n^2 + \frac{1}{4} u_n^2 = u_n^2 = OM_n^2$$

لدينا $OM_n^2 = OM_{n+1}^2$

حسب النظرية العكسية لفيثاغورس فإن المثلث $OM_n M_{n+1}$ قائم في M_{n+1} .
يمكن اتباع طريقة أخرى لتعيين طبيعة المثلث $OM_n M_{n+1}$.

$$لدينا \frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ومنه } z_{n+1} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} z_n \text{ أي } z_{n+1} = u_{n+1} e^{iv_{n+1}} = \frac{1}{2} u_n e^{i(v_n + \frac{\pi}{3})} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} u_n e^{iv_n}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{OM_{n+1}}{OM_n} = \frac{1}{2} \\ \arg\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ أي } \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

وهذا يعني أن $\left(\overrightarrow{OM_n}; \overrightarrow{OM_{n+1}} \right) = \frac{\pi}{3}$

$$لدينا إذن $\cos(\overrightarrow{OM_n}; \overrightarrow{OM_{n+1}}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ لكن $\frac{OM_{n+1}}{OM_n} = \frac{1}{2}$ إذن $\cos(\overrightarrow{OM_n}; \overrightarrow{OM_{n+1}}) = \frac{OM_{n+1}}{OM_n}$ وبالتالي$$

المثلث $OM_n M_{n+1}$ قائم الزاوية في M_{n+1} لأن النسب المثلثية محققة في هذا المثلث.

(3) نعتبر المتتالية (a_n) المعرفة بـ: $a_n = |z_{n+1} - z_n|$.

أ- تبين أن (a_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

$$لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $z_{n+1} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} z_n$ فيكون $\left\{ \begin{array}{l} z_{n+1} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} z_n \\ z_{n+2} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} z_{n+1} \end{array} \right.$ وبالطرح نجد$$

$$|z_{n+2} - z_{n+1}| = \left| \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} (z_{n+1} - z_n) \right| \text{ وهذا يعني أن } z_{n+2} - z_{n+1} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} z_{n+1} - \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} z_n = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} (z_{n+1} - z_n)$$

$$\text{ومنه } |z_{n+2} - z_{n+1}| = \frac{1}{2} |z_{n+1} - z_n| \text{ أي } a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n \text{ إذن } (a_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } \frac{1}{2} \text{ وحدها الأول}$$

$$a_0 = |z_1 - z_0| = M_1 M_0 \text{ لدينا } OM_0 = 1 \text{ لكن } \frac{OM_1}{OM_0} = \frac{1}{2} \text{ أي } OM_1 = \frac{1}{2} OM_0 = \frac{1}{2} \text{ وبما أن المثلث } OM_0 M_1$$

$$\text{قائم في } M_1 \text{ فإن } M_1 M_0 = \sqrt{OM_0^2 - OM_1^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ملاحظة هامة: يمكن حساب الحد الأول a_0 مباشرة ولكن تعمدت حسابها بطريقة أخرى حتى يستفيد الطالب من حساباته السابقة وكيفية توظيفها.

$$\text{الطريقة المباشرة: } a_0 = |z_1 - z_0| = \left| \frac{1}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4} - 1 \right| = \left| \frac{-3}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ب - حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

لدينا $a_n = a_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ وبما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

التمرين الثالث:

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماماً حدّها الأول u_1 وأساسها q حيث:

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

1. أ - حساب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول u_1 .

لدينا $u_1 \times u_3 = u_2^2$ ومنه $u_1 \times u_2 \times u_3 = 216$ تعني $u_2^3 = 216$ أي $u_2 = 6$.

لدينا $u_1 = \frac{u_2}{q} = \frac{6}{q}$ و $u_3 = qu_2 = 6q$

$$u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \text{ معناه } \frac{6}{q} + 12 + 6q = 32 \text{ بضرب طرفي المعادلة بالعدد } q \text{ نجد } 6 + 12q + 6q^2 = 32q$$

$$\text{أي } 6q^2 - 20q + 6 = 0 \text{ بعد حساب المميز نجد } q = 3 \text{ أو } q = \frac{1}{3}.$$

من أجل $q = \frac{1}{3}$ نجد $u_3 = \frac{1}{3} \times 6 = 2$ مرفوض لأن المتتالية (u_n) متزايدة وعليه $q = 3$.

ب - كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

$$u_n = u_1 q^{n-1} = 2(3)^{n-1}$$

ج - حساب S_n بدلالة n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ؛

$$S_n = u_1 \left(\frac{3^n - 1}{3 - 1} \right) = 2 \left(\frac{3^n - 1}{2} \right) = 3^n - 1$$

تعيين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 728$.

$$S_n = 728 \text{ معناه } 3^n - 1 = 728 \text{ معناه } 3^n = 729 \text{ يكافئ } \ln 3^n = \ln 729 \text{ ويكافئ } n \ln 3 = \ln 729$$

$$n = \frac{\ln 729}{\ln 3} = 6$$

2. (v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي: $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$.

أ - حساب v_2 و v_3 .

$$v_2 = \frac{3}{2}v_1 + u_1 = 3 + 2 = 5 ; v_3 = \frac{3}{2}v_2 + u_2 = \frac{3}{2} \times 5 + 6 = \frac{27}{2}$$

ب - نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$.

- تبين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{u_{n+1}} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{3u_n} - \frac{2}{3} = \frac{v_n}{2u_n} - \frac{2}{3} = \frac{w_n + \frac{2}{3}}{2} - \frac{2}{3} = \frac{w_n}{2}$$

$$u_{n+1} = 3u_n$$

$$\text{إذن } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها } q = 3$$

$$\text{ولدينا } (u_n)$$

$$\text{متتالية هندسية أساسها$$

$$w_{n+1} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{3u_n} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}v_n}{3u_n} + \frac{u_n}{3u_n} - \frac{2}{3} = \frac{1v_n}{2u_n} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1v_n}{2u_n} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \left(\frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{2} w_n$$

ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

جـ - كتابة w_n بدلالة n ،

$$w_n = w_0 \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

استنتاج v_n بدلالة n .

$$v_n = (3)^{n-1} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + 4 \right) \text{ أي } v_n = 2(3)^n \left(\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{2}{3} \right) \text{ يكافئ } v_n = u_n \left(w_n + \frac{2}{3} \right)$$

التمرين الرابع:

I - نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (1-2x)e^{2x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. وحدة الرسم $2cm$.

1. حساب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^{2x} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-2x)e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^{2x} - 2xe^{2x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-2x) = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-2x)e^{2x} = -\infty$$

2. حساب عبارة $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ، واستنتاج اتجاه تغير الدالة f .

$$\text{الدالة } f \text{ تقبل الاشتقاق على ولدينا: } f'(x) = -2e^{2x} + 2e^{2x}(1-2x) = -4xe^{2x}$$

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $-4x$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماماً على $]-\infty; 0]$ ومتناقصة تماماً على $[0; +\infty[$.

3. جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	1	$-\infty$

4. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$ واستنتاج نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.

$$f(x) = 0 \text{ معناه } (1-2x)e^{2x} = 0 \text{ يكافئ } 1-2x = 0$$

$$\text{أي } x = \frac{1}{2} \text{ وعليه } (C_f) \cap (Ox) = \left\{ A \left(\frac{1}{2}; 0 \right) \right\}$$

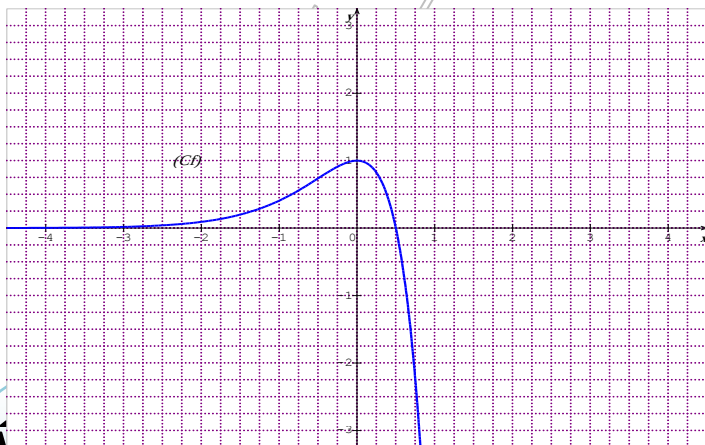
5. حساب $f(1)$ ثم ارسم (C_f) .

$$f(1) = (1-2)e^2 = -e^2$$

6. المناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول

$$\text{المعادلة } f(x) = f(m)$$

إذا كان $m \in \left[\frac{1}{2}; +\infty \right]$ فإن $f(m) \in]-\infty; 0]$ ومنه



المعادلة تقبل حلا واحدا موجبا.

إذا كان $0: \frac{1}{2} \left[\cup]-\infty; 0[\right]$ فإن $m \in]-\infty; 0[$ فإن $f(m) \in]0; 1[$ ومنه المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

إذا كان $m = 0$ فإن $f(m) = 1$ ومنه المعادلة تقبل حلا مضاعفا معدوما.

7. أ - تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون الدالة F المعرفة بـ: $F(x) = (ax + b)e^{2x}$ دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

$$F'(x) = ae^{2x} + 2e^{2x}(ax + b) = e^{2x}(a + 2ax + 2b)$$

بالمطابقة نجد $2a = -2$ و $a + 2b = 1$ أي $a = -1$ و $b = 1$ وعليه $F(x) = (-x + 1)e^{2x}$.

ب - حساب بـ cm^2 وبدلالة المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها:

$$y = 0, \quad x = \frac{1}{2} \text{ و } x = \lambda \text{ حيث } \lambda < \frac{1}{2}$$

$$S(\lambda) = \int_{\lambda}^{\frac{1}{2}} f(x) dx = [F(x)]_{\lambda}^{\frac{1}{2}} = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(\lambda)$$

$$S(\lambda) = \left(-\frac{1}{2} + 1\right)e - (-\lambda + 1)e^{2\lambda} = \left[\frac{1}{2}e - (-\lambda + 1)e^{2\lambda}\right] ua$$

$$\text{ومنه } S(\lambda) = 4 \left[\frac{1}{2}e - (-\lambda + 1)e^{2\lambda}\right] cm^2 \text{ لأن } ua = 2 \times 2 cm^2$$

حساب $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} S(\lambda)$.

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} S(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} 4 \left[\frac{1}{2}e - (-\lambda + 1)e^{2\lambda}\right] = 2e \text{ ومنه } \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} (-\lambda + 1)e^{2\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} -\lambda e^{2\lambda} + e^{2\lambda} = 0$$

II - نسمي f^n المشتقة من الرتبة n حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

1. برهان بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، $f^n(x) = 2^n(1 - n - 2x)e^{2x}$.

لدينا $f^1(x) = 2^1(1 - 1 - 2x)e^{2x} = -4xe^{2x}$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$.

نفرض أن $f^n(x) = 2^n(1 - n - 2x)e^{2x}$ من أجل عدد غير معدوم n ونبرهن أن

$$f^{n+1}(x) = 2^{n+1}(-n - 2x)e^{2x} \text{ أي نبرهن } f^{n+1}(x) = 2^{n+1}(1 - (n + 1) - 2x)e^{2x}$$

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = 2^n \left[(-2e^{2x}) + 2e^{2x}(1 - n - 2x) \right]$$

$$f^{(n+1)}(x) = 2^n \left[2e^{2x}(-1 + 1 - n - 2x) \right]$$

$$f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1}[-n - 2x]e^{2x}$$

وعليه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x) = 2^n(1 - n - 2x)e^{2x}$.

2. نرسم بـ (C_n) للمنحنى الممثل للدالة f^n في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

ولتكن النقطة $M_n(x_n; y_n)$ من (C_n) والتي يقبل عندها (C_n) مماسا يوازي حامل محور الفواصل.

أ - حساب x_n و y_n بدلالة n .

(C_n) يقبل مماسا عند النقطة $M_n(x_n; y_n)$ يوازي حامل محور الفواصل معناه $f^{(n+1)}(x_n) = 0$ وكافئ

$$2^{n+1}[-n - 2x_n]e^{2x_n} = 0 \text{ وعليه } -n - 2x_n = 0 \text{ أي } x_n = -\frac{n}{2} \text{ و}$$

$$y_n = \left(\frac{2}{e}\right)^n \text{ أي } y_n = f^{(n)}\left(-\frac{n}{2}\right) = 2^n \left(1 - n - 2\left(-\frac{n}{2}\right)\right)e^{-n}$$

التحقق أن M_n نقطة من المنحنى (C) الذي معادلته $y = \frac{e^{2x}}{4^x}$.

$$\text{لدينا } \begin{cases} x_n = -\frac{n}{2} \\ y_n = \left(\frac{2}{e}\right)^n \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} n = -2x_n \\ y_n = \left(\frac{2}{e}\right)^n \end{cases} \text{ و منه } y_n = \left(\frac{2}{e}\right)^{-2x_n} \text{ إذن } y_n = \frac{2^{-2x_n}}{e^{-2x_n}} = \frac{e^{2x_n}}{2^{2x_n}} = \frac{e^{2x_n}}{4^{x_n}}$$

وبالتالي M_n نقطة من المنحنى (C) الذي معادلته $y = \frac{e^{2x}}{4^x}$.

ب - إثبات أن (x_n) متتالية حسابية،

$$x_{n+1} - x_n = \frac{-n-1}{2} + \frac{n}{2} = -\frac{1}{2} \text{ إذن } (x_n) \text{ متتالية حسابية أساسها } -\frac{1}{2} \text{ حساب نهايتها.}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n}{2} = -\infty$$

ج - إثبات أن (y_n) متتالية هندسية،

$$y_{n+1} = \left(\frac{2}{e}\right)^{n+1} = \left(\frac{2}{e}\right)^n \frac{2}{e} = \frac{2}{e} y_n \text{ إذن } (y_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } \frac{2}{e} \text{ حساب نهايتها.}$$

$$\text{لدينا } \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n = 0 \text{ لأن } -1 < \frac{2}{e} < 1$$

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول:

I- نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $(E) z^3 + 3\sqrt{3}z^2 + 9z - 21\sqrt{3} = 0$

1- تحقق أن $\sqrt{3}$ حل للمعادلة (E) .

2- أ - بَيِّنْ أَنَّهُ يمكن كتابة (E) على الشكل $(z - \sqrt{3})(z^2 + az + b) = 0$ حيث a و b عددين حقيقيين يُطلب تعيينهما
ب - استنتج حلول المعادلة (E) .

II- في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لتكن النقط A, B و C لواحقتها على

$z_A = \sqrt{3}$ ، $z_B = -2\sqrt{3} - 3i$ و $z_C = -2\sqrt{3} + 3i$ على الترتيب.

1- نسمي D صورة النقطة C بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{BA}$.

- بَيِّنْ أن لاحقة النقطة D هي $z_D = \sqrt{3} + 6i$.

2- أ - بَيِّنْ أن $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC والرباعي $ABCD$.

ب - عَيِّنْ مركز ونصف قطر الدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC .

3- أ - عَيِّنْ العددين الحقيقيين α و β حتى تكون D مرجحا للجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; 1)\}$.

ب - عَيِّنْ مجموعة M النقط من المستوي، بحيث $(\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}) \cdot (\vec{MC} - \vec{MA}) = 0$.

4- G_m مرجح للجملة $\{(A; -1), (B; m), (C; 1)\}$. عَيِّنْ مجموعة النقط G_m لما يتغير m في $\mathbb{R}^*$.

التمرين الثاني:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط:

$A(1; 4; -5)$ ، $B(3; 2; -4)$ ، $C(5; 4; -3)$ و $D(-2; 8; 4)$ والشعاع $\vec{u}(1; 5; -1)$.

1. بَيِّنْ أن $x - 2z - 11 = 0$ هي معادلة ديكراتية للمستوي (ABC) .

2. حَدد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (T) الذي يشمل النقطة D ويوازي $\vec{u}$.

3. ليكن (P) المستوي ذو المعادلة: $x - y - z - 7 = 0$.

أ - بَيِّنْ أن المستويين (ABC) و (P) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) تمثيله الوسيط $(t \in \mathbb{R})$ $\begin{cases} x = 11 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases}$

ب - بَيِّنْ أن المستقيمين (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.

4. تعطى النقطتان $E(3; 0; -4)$ و $F(-3; 3; 5)$ ، تحقق أن: $E \in (\Delta)$ و $F \in (T)$.

5. لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء حيث: $\vec{ME} \cdot \vec{FE} = \alpha$ مع α عدد حقيقي.

أ - جد بدلالة α معادلة ديكراتية لـ (Γ) واستنتج أن (Γ) مستو، $\vec{EF}$ شعاع ناظمي له.

ب - عَيِّنْ قيمة α حتى يكون (Γ) المستوي المحوري للقطعة $[EF]$.

التمرين الثالث:

$$(u_n) \text{ متتالية معرفة بحدّها الأوّل } u_0 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{2u_n}$$

(1) عين قيم u_0 التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

(2) نفرض في كل ما يأتي أن: $u_0 = 2$

أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n, u_n > 1$.

ب - ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

ج - هل المتتالية متقاربة؟ برّر إجابتك

$$(3) \text{ لتكن } (v_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ: } v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$$

أ - بين ان متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.

ب - احسب، بدلالة n كلا من S_n و π_n ؛ حيث:

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n \quad \text{و} \quad \pi_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$$

التمرين الرابع:

I - لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = ax + b - \frac{4e^x}{e^x + 2}$ حيث a و b عدنان حقيقيان.

نرمز بـ (C_g) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- عين a و b بحيث (C_g) يشمل النقطة $A(\ln 2; \ln 2)$ ويقبل عند النقطة A مماساً موازياً لمحور الفواصل.

$$\text{II - نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة على } \mathbb{R} \text{ كما يلي: } f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$$1. \text{ أ - بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي } x: f(x) = x - 2 + \frac{8}{e^x + 2}$$

ب - احسب نهايتي الدالة عند $-\infty$ و $+\infty$.

ج - ادرس اتجاه تغيّر الدالة f وشكل جدول تغيّراتها.

2. بيّن أن المستقيمين (Δ) و (Δ') اللذين معادلتيهما على الترتيب $y = x + 2$ و $y = x - 2$ مقاربان للمنحنى (C_f)

3. أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثيها.

4. بيّن أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-1.7 < \alpha < -1.6$.

5. ارسم (Δ) ، (Δ') و (C_f) .

6. احسب، بدلالة α مساحة حيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما

$$x = \alpha \text{ و } x = 0$$

$$\text{III - نعتبر الدالة } h \text{ المعرفة على } \mathbb{R} \text{ كما يلي: } h(x) = [f(x)]^2$$

- عين اتجاه تغيّر الدالة h ثم شكل جدول تغيّراتها.

الموضوع الثاني

التمرين الأول:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $A(-2;0;1)$ ، $B(1;2;-1)$ و $C(-2;2;2)$.

(1) أ) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ ، ثم الطولين AB و AC .

ب) عيّن قياساً للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ بالدرجة مقربة إلى الوحدة، ثم استنتج أن النقط A, B و C ليست في استقامية.

(2) تحقق أن المعادلة $2x - y + 2z + 2 = 0$ للمستوي (ABC) .

(3) نعتبر المستويين (P) و (P') المعرفين بمعادلتيهما على الترتيب: $x + y - 3z + 3 = 0$ و $x - 2y + 6z = 0$.

أ) بين أن المستقيم (Δ) والمعرف بتمثيله الوسيطى التالي $(t \in \mathbb{R})$ هو تقاطع المستويين

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases}$$

(P) و (P') .

ب) استنتج أن المستويات (P) ، (P') و (ABC) تتقاطع في نقطة واحدة يطلب تعيين إحداثياتها.

(4) ليكن (S) سطح الكرة ذي المركز $\omega(1;-3;1)$ ونصف القطر 3.

أ) اكتب المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S) .

ب) ادرس تقاطع سطح الكرة (S) والمستقيم (Δ) .

ج) بين أن المستوي (ABC) يمس سطح الكرة (S) .

التمرين الثاني:

(1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $(z + \sqrt{3} - 1)(z^2 - 2z + 4) = 0$

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B و C لواحقها على الترتيب:

$$z_A = 1 - \sqrt{3}, z_B = 1 + i\sqrt{3}, z_C = 1 - i\sqrt{3}$$

أ) اكتب كلا من z_A, z_B و z_C على شكل أسّي؛ ثم بين أن $z_B^{2016} + z_C^{2016} = 2^{2017}$.

ب) بين أن $z_B^n + z_C^n = 2^n$ حقيقي من أجل كل عدد طبيعي n ، ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $z_B^n + z_C^n = 2^n$.

(3) اكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_A - z_B}$ على شكل أسّي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(4) عيّن اللاحقة z_G للنقطة G منتصف القطعة $[BC]$ ، ثم احسب الطولين BC و GA .

(5) نسمي (S) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق (1) $BM^2 + CM^2 = 12$

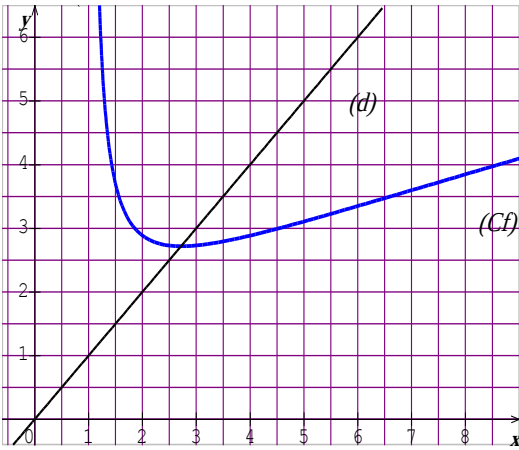
أ) تحقق أنه من أجل كل نقطة M من المستوي، المساواة (1) تكافئ (2) $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$

ب) تحقق أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (S) ؛ ثم حدّد المجموعة (S) مع إعطاء عناصرها المميزة.

ج) علم بدقة النقط A, B, C و G ثم أنشئ (S) .

التمرين الثالث:

في الشكل المرفق (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.



والمستقيم (d) ذو المعادلة $y = x$.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 5$ و $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. أ - ادرس اتجاه تغير الدالة f .

ب - باستعمال (C_f) و (d) مثل على محور الفواصل الحدود

u_0, u_1, u_2 و u_3 .

2. أعط تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

3. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n \geq e$.

4. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) , ثم استنتج أنها متقاربة ولتكن نهايتها l

5. بين أن $l = f(l)$, ثم احسب نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الرابع:

I- لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (x-1)e^x + 1$

1. ادرس تغيرات الدالة g .

2. استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$, وعلل أنه من أجل كل عدد حقيقي x , $xe^x + 1 > 0$.

3. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x , $g(x) - g'(x) = 1 - e^x$, ثم استنتج $\int_0^1 g(x) dx$ وفسره هندسياً.

II- الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{xe^x}{xe^x + 1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وفسر النتيجة بيانياً.

2. أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x , $f'(x) = \frac{(x+1)e^x}{(xe^x + 1)^2}$

ب استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3. بين $y = x$ معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في المبدأ.

4. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x , $f(x) - x = \frac{-xg(x)}{xe^x + 1}$, واستنتج وضعية (C_f) بالنسبة لـ (T) .

5. ارسم (C_f) والمنحنى (T) .

III- المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n > 0$.

2. بين أن المتتالية (u_n) متناقصة واستنتج أنها متقاربة.

3. احسب نهاية المتتالية (u_n) .

حل الموضوع الأول

التمرين الأول:

I- نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) $z^3 + 3\sqrt{3}z^2 + 9z - 21\sqrt{3} = 0$

1- التحقق أن $\sqrt{3}$ حل للمعادلة (E).

$$\sqrt{3}^3 + 3\sqrt{3}(\sqrt{3})^2 + 9\sqrt{3} - 21\sqrt{3} = 3\sqrt{3} + 9\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - 21\sqrt{3} = 0$$

2- أ- بَيِّنْ أَنَّهُ يمكن كتابة (E) على الشكل $(z - \sqrt{3})(z^2 + az + b) = 0$ حيث a و b عددين حقيقيين يُطلب تعيينهما

$$(z - \sqrt{3})(z^2 + az + b) = z^3 + (a - \sqrt{3})z^2 + (b - \sqrt{3}a)z - \sqrt{3}b$$

وبالمطابقة مع $z^3 + 3\sqrt{3}z^2 + 9z - 21\sqrt{3}$ نجد $a - \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ و $-b\sqrt{3} = -21\sqrt{3}$ أي $a = 4\sqrt{3}$ و $b = 21$.

$$\text{إذن } z^3 + 3\sqrt{3}z^2 + 9z - 21\sqrt{3} = (z - \sqrt{3})(z^2 + 4\sqrt{3}z + 21)$$

ب- استنتاج حلول المعادلة (E).

$$(E) \text{ تكافئ } z = \sqrt{3} \text{ أو } z^2 + 4\sqrt{3}z + 21 = 0 \text{ (1).}$$

نحل المعادلة (1).

$$\Delta' = 12 - 21 = -9 = (3i)^2 \text{ للمعادلة حلان هما } z_1 = -2\sqrt{3} - 3i \text{ و } z_2 = -2\sqrt{3} + 3i$$

$$\text{إذن (E) تكافئ } z \in \{\sqrt{3}; -2\sqrt{3} - 3i; -2\sqrt{3} + 3i\}$$

II- في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لتكن النقط A, B و C لواحقتها على

$$z_A = \sqrt{3}, z_B = -2\sqrt{3} - 3i \text{ و } z_C = -2\sqrt{3} + 3i \text{ على الترتيب.}$$

1- نسمي D صورة النقطة C بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{BA}$.

- تبيان أن لائحة النقطة D هي $z_D = \sqrt{3} + 6i$.

$$\text{لدينا } \vec{CD} = \vec{BA} \text{ معناه } z_D - z_C = z_A - z_B \text{ ويكافئ } z_D = z_A - z_B + z_C \text{ ويكافئ}$$

$$z_D = \sqrt{3} + 6i \text{ أي } z_D = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3i - 2\sqrt{3} + 3i$$

$$2- \text{ أ- تبيان أن } \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{لدينا } z_A - z_B = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3i = 3\sqrt{3} + 3i \text{ و } z_C - z_B = -2\sqrt{3} + 3i + 2\sqrt{3} + 3i = 6i$$

$$\text{إذن } \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{6i}{3\sqrt{3} + 3i} = \frac{6i}{3\sqrt{3} + 3i} = \frac{6i(3\sqrt{3} - 3i)}{(3\sqrt{3} + 3i)(3\sqrt{3} - 3i)} = \frac{6i(3\sqrt{3} - 3i)}{36} = \frac{3 + 3i\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{أي } \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC

$$\text{لدينا } \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ معناه } \left| \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} \right| = 1 \text{ و } \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ وهذا يعني أن } BC = BA$$

$$\text{وبالتالي المثلث } ABC \text{ متقايس الأضلاع. } (\vec{BA}; \vec{BC}) = \frac{\pi}{3}$$

تعيين طبيعة الرباعي $ABCD$.

$$\text{لدينا } \vec{CD} = \vec{BA} \text{ ومنه } ABCD \text{ متوازي أضلاع ولدينا } BC = BA \text{ إذن } ABCD \text{ معين.}$$

ب - تعيين مركز ونصف قطر الدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC .

المثلث ABC متقايس الأضلاع .

إذن مركز الدائرة (γ) هي النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

$$z_G = -\sqrt{3} \text{ أي } z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 3i - 2\sqrt{3} + 3i}{3} = \frac{-3\sqrt{3}}{3}$$

تعيين نصف قطر الدائرة (γ) .

نصف قطر الدائرة (γ) هو $GA = |z_A - z_G| = |2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$ حيث

3- أ - تعيين العددين الحقيقيين α و β حتى تكون D مرجحا للجملة $\{(A;\alpha), (B;\beta), (C;1)\}$.

لدينا $\vec{0} = \alpha\vec{DA} + \beta\vec{DB} + \vec{DC}$ معناه $\alpha(z_A - z_D) + \beta(z_B - z_D) + z_C - z_D = 0$ ويكافئ

$$-3\sqrt{3} - 3\sqrt{3}\beta + i(-6\alpha - 9\beta - 3) = 0 \text{ ويكافئ } -6\alpha + \beta(-3\sqrt{3} - 9i) - 3\sqrt{3} - 3i = 0$$

$$\text{ويكافئ } -3\sqrt{3} - 3\sqrt{3}\beta = 0 \text{ و } -6\alpha - 9\beta - 3 = 0 \text{ أي } \beta = -1 \text{ و } \alpha = 1.$$

طريقة أخرى:

لدينا $\vec{BA} = \vec{CD}$ معناه $\vec{BD} + \vec{DA} = \vec{CD}$ يكافئ $\vec{DA} - \vec{DB} + \vec{DC} = \vec{0}$ و عليه $(\alpha; \beta) = (1; -1)$.

ب - تعيين مجموعة M النقط من المستوي، بحيث $(\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC})(\vec{MC} - \vec{MA}) = 0$.

لدينا D مرجح للجملة $\{(A;1), (B;-1), (C;1)\}$ إذن من أجل كل نقطة M من المستوي يكون:

$$\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{MD} \text{ أي } \vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = (1-1+1)\vec{MD}$$

$$\text{و } \vec{MC} - \vec{MA} = \vec{MC} + \vec{AM} = \vec{AM} + \vec{MC} = \vec{AC}$$

$$(\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC})(\vec{MC} - \vec{MA}) = 0 \text{ تعني } \vec{MD} \cdot \vec{AC} = 0 \text{ وبالتالي مجموعة النقط } M \text{ المطلوبة هي المستقيم}$$

الذي يشمل D و $\vec{AC}$ ناظمي له وهذا المستقيم هو (BD) لأن $ABCD$ معين (قطراه $[AC]$ و $[BD]$ متعامدان).

4- G_m مرجح للجملة $\{(A;-1), (B;m), (C;1)\}$.

تعيين مجموعة النقط G_m لما يتغير m في $\mathbb{R}^*$.

$$\text{لدينا } \vec{0} = -\vec{G_m A} + m\vec{G_m B} + \vec{G_m C} \text{ معناه } \vec{AG_m} + m\vec{G_m B} + \vec{G_m C} = \vec{0} \text{ ويكافئ } m\vec{G_m B} + \vec{AC} = \vec{0}$$

$$\text{ويكافئ } m\vec{G_m B} = -\vec{AC} \text{ أي } \vec{BG_m} = \frac{1}{m}\vec{AC} \text{ أي المستقيمان } (BG_m) \text{ و } (AC) \text{ متوازيان}$$

وبالتالي مجموعة النقط G_m هي المستقيم الذي يشمل B ويوازي المستقيم (AC) باستثناء النقطة B .

التمرين الثاني:

1. إثبات أن $x - 2z - 11 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

$$\text{لدينا } x_A - 2z_A - 11 = 1 - 2(-5) - 11 = 0 \text{ و } x_B - 2z_B - 11 = 3 - 2(-4) - 11 = 0$$

$$\text{و } x_C - 2z_C - 11 = 5 - 2(-3) - 11 = 0 \text{ ومنه إحداثيات النقط } A, B, C \text{ تحقق المعادلة } x - 2z - 11 = 0$$

وبالتالي للمستوي (ABC) المعادلة $x - 2z - 11 = 0$.

2. تحديد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (T) الذي يشمل النقطة D ويوازي $\vec{u}$.

لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء.

M تنتمي لـ (T) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي k بحيث $\vec{DM} = k\vec{u}$.

$$\begin{cases} x = -2 + k \\ y = 8 + 5k \\ z = 4 - k \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x + 2 = k \\ y - 8 = 5k \\ z - 4 = -k \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} x + 2 = k \\ y - 8 = 5k \\ z - 4 = -k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$$

3. ليكن (P) المستوي ذو المعادلة: $x - y - z - 7 = 0$.

$$\begin{cases} x = 11 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ الذي تمثيل وسيطي له } \Delta$$

بالتعويض في معادلة كل من (P) و (ABC) نجد:

$$(11 + 2t) - (4 + t) - t - 7 = 11 - 11 + 2t - 2t = 0 \text{ و } (11 + 2t) - 2(t) - 11 = 0$$

ومنه (Δ) محتوي في (ABC) ومحتوي في (P) وعليه (ABC) و (P) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ).

ب - إثبات أن المستقيمين (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.

لدينا $\vec{u}(1;5;-1)$ هو شعاع توجيه لـ (T) و $\vec{v}(2;1;1)$ هو شعاع توجيه لـ (Δ).

و $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{5}$ إذن (T) و (Δ) غير متوازيين.

ندرس تقاطع (T) و (Δ).

$$\begin{cases} 11 + 2t = -2 + k \dots (1) \\ 4 + t = 8 + 5k \dots (2) \\ t = 4 - k \dots (3) \end{cases}$$

بتعويض t بقيمتها من (3) في (2) نجد $4 + (4 - k) = 8 + 5k$ ومنه $k = 0$ وبالتعويض في (3) نجد $t = 4$ وبتعويض t و k بقيمهما في (1) نجد $19 = -2$ وهذا مستحيل.

إذن (T) و (Δ) غير متقاطعين وبما أنهما غير متوازيين فإنهما ليسا من نفس المستوي.

4. تعطى النقطتان $E(3;0;-4)$ و $F(-3;3;5)$ ، التحقق أن: $E \in (\Delta)$ و $F \in (T)$.

$$E \in (\Delta) \text{ معناه } \begin{cases} t = -4 \\ 0 = 4 + t \\ -4 = t \end{cases} \text{ أي } t = -4 \text{ وحيد فإن } E \in (\Delta).$$

$$F \in (T) \text{ معناه } \begin{cases} k = -1 \\ 3 = 8 + 5k \\ 5 = 4 - k \end{cases} \text{ ومنه } k = -1 \text{ وحيد فإن } F \in (T).$$

5. لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث: $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{FE} = \alpha$ مع α عدد حقيقي.

أ - إيجاد بدلالة α معادلة ديكارتية لـ (Γ).

لدينا $\overrightarrow{ME}(3-x;-y;-4-z)$ و $\overrightarrow{FE}(6;-3;-9)$.

$$\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{FE} = \alpha \text{ معناه } 6(3-x) + 3y - 9(-4-z) = \alpha \text{ ومنه } -6x + 3y + 9z + 54 - \alpha = 0$$

هي معادلة ديكارتية لـ (Γ) وهي معادلة مستوي شعاعه الناظمي $\overrightarrow{EF}$.

ب - تعيين قيمة α حتى يكون (Γ) المستوي المحوري للقطعة [EF].

لتكن I منتصف [EF] ومنه $I(0;\frac{3}{2};\frac{1}{2})$.

المستوي المحوري للقطعة [EF] شعاعه الناظمي $\overrightarrow{EI}$ ويشمل النقطة I.

$$\text{ومنه } -6(0) + 3\left(\frac{3}{2}\right) + 9\left(\frac{1}{2}\right) + 54 - \alpha = 0 \text{ أي } \alpha = 63.$$

طريقة ثانية:

المستوي المحوري للقطعة $[EF]$ هو مجموعة النقط $M(x; y; z)$ التي تحقق $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{FE} = 0$.
 $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{FE} = 0$ معناه $(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EI}) \cdot \overrightarrow{FE} = 0$ ومعناه $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{FE} = 0$ أي $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{FE} = -\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{FE}$ ومنه
 ومنه $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{FE}$.

$$\overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{FE} = 3 \times 6 - \frac{3}{2} \times -3 - \frac{9}{2} \times -9 = 18 + 45 = 63 \quad \text{إذن} \quad \overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{FE} = 63$$

ومنه $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{FE} = 63$ يعني $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{FE} = 63$ التي تحقق $M(x; y; z)$ هو مجموعة النقط $M(x; y; z)$ التي تحقق $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{FE} = 63$ وعليه $\alpha = 63$
التمرين الثالث:

$$(u_n) \text{ متتالية معرفة بدّها الأول } u_0 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{2u_n}$$

(1) تعيين قيم u_0 التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

$$(u_n) \text{ ثابتة معناه } u_0 = u_n = u_{n+1} \text{ ومعناه } u_0 = \frac{3u_0 - 1}{2u_0} \text{ ويكافئ } 2u_0^2 - 3u_0 + 1 = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

$$u_0 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \text{ أو } u_0 = \frac{3+1}{4} = 1$$

(2) نفرض في كل ما يأتي أن: $u_0 = 2$

أ - برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n, u_n > 1$.

لدينا $u_0 > 1$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $u_n > 1$ ونبرهن أن $u_{n+1} > 1$

$$\text{لدينا } u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1 = \frac{u_n - 1}{2u_n} \quad \text{وحسب الفرضية } u_n > 1 \text{ إذن } u_n - 1 > 0 \text{ و } 2u_n > 0 \text{ ومنه } u_{n+1} - 1 > 0$$

أي $u_{n+1} > 1$ ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي $n, u_n > 1$.

ب - دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ليكن n عددا طبيعيا:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n - 1}{2u_n} - u_n = \frac{-2u_n^2 + 3u_n - 1}{2u_n}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	0	1	$+\infty$		
$-2x^2 + 3x - 1$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	
$2x$	$-$		$-$	0	$+$	$+$	
$\frac{-2x^2 + 3x - 1}{2x}$	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$

نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 1$ ، فإن $\frac{-2x^2 + 3x - 1}{2x} < 0$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي $n, u_n > 1$

فإن $\frac{-2u_n^2 + 3u_n - 1}{2u_n} < 0$ أي $u_{n+1} - u_n < 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

جـ - هل المتتالية متقاربة ؟ برّر إجابتك

المتتالية (u_n) متقاربة لأنها متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1.

(3) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$

أ - تبين أن متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{2u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{3u_n - 1}{2} - 1}{2\left(\frac{3u_n - 1}{2}\right) - 1} = \frac{\frac{u_n - 1}{2}}{\frac{3u_n - 1}{2} - 1} = \frac{u_n - 1}{3u_n - 1} \times \frac{u_n}{2u_n - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_n - 1}{2u_n - 1} \right) = \frac{1}{2} v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدّها الأول $v_0 = \frac{u_0 - 1}{2u_0 - 1} = \frac{1}{3}$.

ب - حساب، بدلالة n كلا من S_n و π_n ؛ حيث:

$$\pi_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n \quad \text{و} \quad S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$S_n = v_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} \right) = \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right)$$

$$v_n = v_0 \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^n \quad \text{لدينا}$$

$$\pi_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^0 \times \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^1 \times \dots \times \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^n = \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \left(\frac{1}{2} \right)^{0+1+\dots+n} = \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

التمرين الرابع:

I - لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = ax + b - \frac{4e^x}{e^x + 2}$ حيث a و b عدنان حقيقيان.

نرمز بـ (C_g) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- تعيين a و b بحيث (C_g) يشمل النقطة $A(\ln 2; \ln 2)$ ويقبل عند النقطة مماسا موازيا لمحور الفواصل

$$(C_g) \text{ يشمل النقطة } A(\ln 2; \ln 2) \text{ معناه } g(\ln 2) = \ln 2 \text{ يكافئ } (\ln 2)a + b - \frac{4e^{\ln 2}}{e^{\ln 2} + 2} = \ln 2 \text{ ويكافئ}$$

$$(\ln 2)a + b - 2 = \ln 2 \text{ أي } (\ln 2)a + b = 2 + \ln 2 \dots (1)$$

$$\text{الدالة } g \text{ تقبل الإشتقاق على } \mathbb{R} \text{ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي } x, g'(x) = a - \frac{8e^x}{(e^x + 2)^2}$$

$$(C_g) \text{ يقبل عند النقطة } A \text{ مماسا موازيا لمحور الفواصل معناه } g'(\ln 2) = 0 \text{ ويكافئ } a - 1 = 0 \text{ أي } a = 1$$

بالتعويض عن قيمة a في المعادلة (1) نجد $(\ln 2) \times 1 + b = 2 + \ln 2$ ومنه $b = 2$.

II - نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ - تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = x - 2 + \frac{8}{e^x + 2}$.

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2} = x - 2 + 4 - \frac{4e^x}{e^x + 2} = x - 2 + \frac{4e^x + 8 - 4e^x}{e^x + 2} = x - 2 + \frac{8}{e^x + 2}$$

ب. حساب نهايتي الدالة عند $-\infty$ و $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^x}{e^x + 2} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{e^x + 2} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 + \frac{8}{e^x + 2} = +\infty$$

ج. دراسة اتجاه تغير الدالة f

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x) = 1 - \frac{8e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{e^{2x} + 4e^x + 4 - 8e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{e^{2x} - 4e^x + 4}{(e^x + 2)^2} = \frac{(e^x - 2)^2}{(e^x + 2)^2}$$

إذن الدالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	$+\infty$	$\ln 2$	$-\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\ln 2$	$-\infty$

4. إثبات أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + 2 = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{e^x + 2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 2 = 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} 4e^x = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{4e^x}{e^x + 2} = 0$$

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 2) = 0$ ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ') معادلته $y = x - 2$ بجوار $+\infty$.

و لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2) = 0$ ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y = x + 2$ بجوار $-\infty$.

5. تبين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثيها.

بما أن $f'(x)$ تنعدم عند العدد $\ln 2$ ولا تغير من إشارتها فإن النقطة $A(\ln 2; \ln 2)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) .

6. تبين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-1,7 < \alpha < -1,6$.

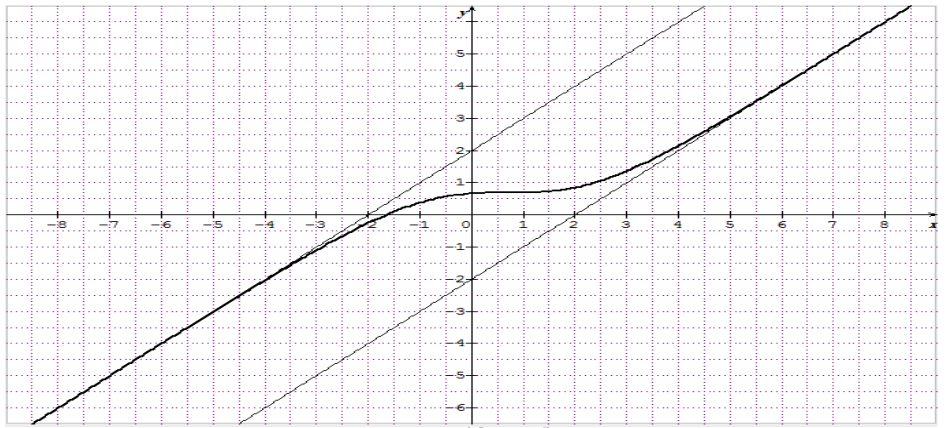
الدالة f مستمرة ومتزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ وبالأخص على المجال $[-1,7; -1,6]$ ولدينا $f(-1,6) = 0,03$.

$f(-1,7) = -0,03$ أي $f(-1,7) \times f(-1,6) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد α

من المجال $[-1,7; -1,6]$ بحيث $f(\alpha) = 0$ وبالتالي (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث

$$-1,7 < \alpha < -1,6$$

7. رسم (Δ) ، (Δ') و (C_f) .



6. حساب، بدلالة α مساحة حيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = \alpha$ و $x = 0$.

$$A = \int_{\alpha}^0 [x + 2 - f(x)] dx = \int_{\alpha}^0 \frac{4e^x}{e^x + 2} dx = 4 \int_{\alpha}^0 \frac{e^x}{e^x + 2} dx = 4 [\ln(e^x + 2)]_{\alpha}^0$$

$$A = 4 [\ln 3 - \ln(e^{\alpha} + 2)] u_a$$

III - نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = [f(x)]^2$.
- تعيين اتجاه تغير الدالة h .

نضع $u(x) = x^2$ عندئذ $h(x) = [f(x)]^2 = u[f(x)] = (u \circ f)(x)$
لدينا $u'(x) = 2x$ ومنه $h'(x) = f'(x) \times u'(f(x)) = f'(x) \times 2f(x) = 2f'(x) \times f(x)$
من أجل كل عدد حقيقي x ، $2f'(x) \geq 0$ ومنه إشارة $h'(x)$ هي نفس إشارة $f(x)$.

x	$-\infty$	α	$\ln 2$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	+
$h'(x)$	-	0	+	+

الدالة h متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; \alpha]$ ومتزايدة تماماً على المجال $[\alpha; +\infty[$.

يمكن اتباع طريقة اتجاه تغير مركب دالتين:

لدينا الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; \alpha]$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty; 0]$ والدالة u متناقصة تماماً على

المجال $]-\infty; 0]$ وبالتالي الدالة h متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; \alpha]$.

و الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[\alpha; +\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $[0; +\infty[$ والدالة u متزايدة تماماً على المجال

$[0; +\infty[$ وبالتالي الدالة h متزايدة تماماً على المجال $[\alpha; +\infty[$.

بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

جدول تغيرات الدالة h .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	+
$h(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

$$h(\alpha) = [f(\alpha)]^2 = 0$$

الموضوع الثاني:

التمرين الأول:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $A(-2;0;1)$ ، $B(1;2;-1)$ و $C(-2;2;2)$.

(1) أ) حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ، والطولين AB و AC .

لدينا $\overrightarrow{AB} = (3;2;-2)$ و $\overrightarrow{AC} = (0;2;1)$ إذن $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 0 + 2 \times 2 + 1 \times -2 = 2$

$$AC = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ و } AB = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{17}$$

(ب) تعيين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ بالدرجة مقربة إلى الوحدة.

لدينا $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ معناه $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$ ويكافئ

$$\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{2}{\sqrt{17 \times 5}} \approx 0.22 \text{ و عليه } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \approx 77^\circ$$

(2) استنتاج أن النقط A ، B و C ليست في استقامة.

بما أن $\widehat{BAC} \neq 0$ و $\widehat{BAC} \neq \pi$ فإن النقط A ، B و C تعين مستويا.

(2) التحقق أن المعادلة $2x - y + 2z + 2 = 0$ للمستوي (ABC) .

لدينا $2x_A - y_A + 2z_A + 2 = 2(-2) - 0 + 2(1) + 2 = 0$ ، $2x_B - y_B + 2z_B + 2 = 2(1) - 2 + 2(-1) + 2 = 0$ ، $2x_C - y_C + 2z_C + 2 = 2(-2) - 2 + 2(2) + 2 = 0$ و

تحقق المعادلة $2x - y + 2z + 2 = 0$ إذن للمستوي (ABC) المعادلة: $2x - y + 2z + 2 = 0$.

(3) نعتبر المستويين (P) و (P') المعرفين بمعادلتيهما على الترتيب: $x + y - 3z + 3 = 0$ و $x - 2y + 6z = 0$.

(أ) تبين أن المستقيم (Δ) والمعرف بتمثيله الوسيط التالي $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$ هو تقاطع المستويين

(P) و (P') .

لدينا $\vec{n}(1;1;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) و $\vec{n}'(1;-2;6)$ شعاع ناظمي للمستوي (P')

لدينا $x_{\vec{n}} = x_{\vec{n}'}$ بينما $y_{\vec{n}} \neq y_{\vec{n}'}$ إذن الشعاعان $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي المستويان (P) و (P') متقاطعان وتقاطعهما مستقيم.

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

معناه $M \in (P) \cap (P')$ ويكافئ $\begin{cases} x + y - 3z + 3 = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{cases}$ وجمع المعادلتين نجد

$3x + 6 = 0$ أي $x = -2$ وبالتعويض في المعادلة الثانية نجد $-2 - 2y + 6z = 0$ أي $y = -1 + 3z$ وبوضع $z = t$ نجد $x = -2$ و $y = -1 + 3t$ و $z = t$.

إذن $M(-2; -1 + 3t; t)$ و عليه $(P) \cap (P') = (\Delta)$.

(ب) استنتاج أن المستويات (P) ، (P') و (ABC) تتقاطع في نقطة واحدة يطلب تعيين إحداثياتها.

لدينا $(P) \cap (P') = (\Delta)$ و عليه $(P) \cap (P') \cap (ABC) = (\Delta) \cap (ABC)$

$\vec{u}(0;3;1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) و $\vec{u}'(2;-1;2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

وبما أن $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0 \times 2 + 3 \times -1 + 1 \times 2 = 1 \neq 0$ فإن المستوي (ABC) لا يوازي المستقيم (Δ) فهما متقاطعان في نقطة.

$$M \in (\Delta) \text{ معناه } M(-2; -1+3t; t)$$

$$M \in (\Delta) \cap (ABC) \text{ معناه } 2(-2) - (-1+3t) + 2(t) + 2 = 0 \text{ ويكافئ } -1-t = 0 \text{ أي } t = -1.$$

$$\text{وعليه } M(-2; -1+3 \times -1; -1) \text{ أي } M(-2; -4; -1) \text{ حيث } (\Delta) \cap (ABC) = \{E\}.$$

$$(4) \text{ ليكن } (S) \text{ سطح الكرة ذي المركز } \omega(1; -3; 1) \text{ ونصف القطر } 3.$$

$$(أ) \text{ كتابة المعادلة الديكارتية لسطح الكرة } (S).$$

$$(S) \text{ هي مجموعة النقط } M \text{ من الفضاء ذات الإحداثيات } (x; y; z) \text{ والتي تحقق } \omega M = 3.$$

$$M \in (S) \text{ يكافئ } \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2} = 3 \text{ ويكافئ } (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9$$

$$\text{بعد إجراء مختلف الحسابات نجد } x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 2z - 3 = 0 \text{ وهي معادلة لـ } (S).$$

$$(ب) \text{ دراسة تقاطع سطح الكرة } (S) \text{ والمستقيم } (\Delta).$$

$$\text{لتكن } M(x; y; z) \text{ نقطة من الفضاء.}$$

$$M \in (S) \cap (\Delta) \text{ معناه } (-2-1)^2 + ((-1+3t)+3)^2 + (t-1)^2 = 9 \text{ ويكافئ } 4+9t^2+12t+4+t^2-2t+1=9$$

$$\text{وتكافئ } 10t^2+10t=0 \text{ أي } t=0 \text{ أو } t=-1.$$

$$\text{وعليه } H(-2; -1; 0) \text{ حيث } (S) \cap (\Delta) = \{E; H\}.$$

$$(ج) \text{ تبين أن المستوي } (ABC) \text{ يمس سطح الكرة } (S).$$

$$d(\omega; (P)) = \frac{|2 \times 1 + 3 + 2 \times 1 + 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\text{يمس سطح الكرة } (S).$$

التمرين الثاني:

$$(1) \text{ حل في } \mathbb{C} \text{ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة } (z + \sqrt{3} - 1)(z^2 - 2z + 4) = 0$$

$$(E) \text{ تكافئ } z + \sqrt{3} - 1 = 0 \text{ أو } z^2 - 2z + 4 = 0 \text{ أي } z = 1 - \sqrt{3} \text{ أو } z^2 - 2z + 4 = 0 \dots (1)$$

$$\text{نحل المعادلة (1).}$$

$$\Delta' = 1 - 3 = -3 = 3i^2 = (i\sqrt{3})^2 \text{ للمعادلة حلان هما } z_1 = 1 + i\sqrt{3} \text{ و } z_2 = 1 - i\sqrt{3}.$$

$$\text{إذن } (E) \text{ تكافئ } z \in \{1 - \sqrt{3}; 1 + i\sqrt{3}; 1 - i\sqrt{3}\}.$$

$$(2) \text{ في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس } (O; \vec{u}, \vec{v}) \text{ نعتبر النقط } A, B \text{ و } C \text{ لواحقتها على الترتيب:}$$

$$z_A = 1 - \sqrt{3}, z_B = 1 + i\sqrt{3}, z_C = 1 - i\sqrt{3}$$

$$(أ) \text{ كتابة كلا من } z_A, z_B \text{ و } z_C \text{ على شكل أسّي؛}$$

$$z_A = 1 - \sqrt{3}e^{i\pi} \text{ تذكر: كل عدد حقيقي موجب عمدته } 0 \text{ وكل عدد حقيقي سالب عمدته } \pi.$$

$$z_B = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_C = \overline{z_B} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{تبيان أن } z_B^{2016} + z_C^{2016} = 2^{2017}$$

$$\begin{aligned}
z_B^{2016} + z_C^{2016} &= \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2016} + \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{2016} = 2^{2016}e^{i\frac{2016\pi}{3}} + 2^{2016}e^{-i\frac{2016\pi}{3}} \\
&= 2^{2016}\left(\cos\frac{2016\pi}{3} + i\sin\frac{2016\pi}{3}\right) + 2^{2016}\left(\cos-\frac{2016\pi}{3} + i\sin-\frac{2016\pi}{3}\right) \\
&= 2\left(2^{2016}\cos\frac{2016\pi}{3}\right) = 2\left(2^{2016}\cos 672\pi\right) = 2 \times 2^{2016} = 2^{2017}
\end{aligned}$$

(ب) تبين أن $z_B^n + z_C^n$ حقيقي من أجل كل عدد طبيعي n .

تذكير: $\overline{z + z} = 2\operatorname{Re}(z)$

$$z_B^n + z_C^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}} + 2^n e^{-i\frac{n\pi}{3}} = 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}} + 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}} = 2\left(2^n \cos\frac{n\pi}{3}\right) \in \mathbb{R}$$

تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $z_B^n + z_C^n = 2^n$.

$$\cos\frac{n\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} \text{ أي } \cos\frac{n\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{ يكافئ } 2\left(2^n \cos\frac{n\pi}{3}\right) = 2^n \text{ معناه } z_B^n + z_C^n = 2^n$$

ومنه $\frac{n\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $\frac{n\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أي $n = 1 + 6k$ مع $k \in \mathbb{N}$ أو $n = -1 + 6k$ مع $k \in \mathbb{N}^*$

(3) كتابة العدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_A - z_B}$ على شكل أسّي،

$$\frac{z_A - z_C}{z_A - z_B} = \frac{1 - \sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3} + i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} - i\sqrt{3}} = \frac{-1 + i}{-1 - i} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC .

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = -\frac{\pi}{2} \text{ و } \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \text{ وهذا يعني أن } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \text{ معناه } \frac{z_A - z_C}{z_A - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

أي $AC = AB$ و $(\overline{AB}; \overline{AC}) = -\frac{\pi}{2}$ إذا المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

(4) تعيين اللاحقة z_G للنقطة G منتصف القطعة $[BC]$ ، وحساب الطولين BC و GA .

$$z_G = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{1 + i\sqrt{3} + 1 - i\sqrt{3}}{2} = 1$$

$$BC = |z_C - z_B| = |1 - i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$GA = |z_A - z_G| = |1 - \sqrt{3} - 1| = |-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$$

(5) نسمي (S) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق (1) $BM^2 + CM^2 = 12$

(أ) التحقق أنه من أجل كل نقطة M من المستوي، المساواة (1) تكافئ (2) $\overline{BM} \cdot \overline{CM} = 0$

$$BM^2 + CM^2 = 12 \text{ معناه } BM^2 + CM^2 - 2\overline{BM} \cdot \overline{CM} + 2\overline{BM} \cdot \overline{CM} = 12 \text{ وتكافئ}$$

$$(\overline{BM} - \overline{CM})^2 + 2\overline{BM} \cdot \overline{CM} = 12 \text{ وتكافئ}$$

$$(\overline{BC})^2 + 2\overline{BM} \cdot \overline{CM} = 12 \text{ ومعناه } BC^2 + 2\overline{BM} \cdot \overline{CM} = 12 \text{ لكن لدينا } BC = 2\sqrt{3}$$

$$\text{إذن (1) تكافئ } 12 + 2\overline{BM} \cdot \overline{CM} = 12 \text{ وتكافئ } 2\overline{BM} \cdot \overline{CM} = 0 \text{ أي } \overline{BM} \cdot \overline{CM} = 0$$

(ب) التحقق أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (S) .

A تنتمي إلى المجموعة (S) إذا وفقط إذا كان $\overline{BA} \cdot \overline{CA} = 0$.

لدينا $\frac{z_A - z_C}{z_A - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ معناه $\arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_A - z_B}\right) = \frac{-\pi}{2}$ وهذا يعني أن $(\overline{BA}; \overline{CA}) = \frac{-\pi}{2}$ وبكافئ $\overline{BA} \perp \overline{CA}$

أي $\overline{BA} \cdot \overline{CA} = 0$ وبالتالي النقطة A تنتمي إلى المجموعة (S) .

تحديد المجموعة (S) مع إعطاء عناصرها المميزة.

$M \in (S)$ إذا وفقط إذا $\overline{BM} \perp \overline{CM}$ أي $\overline{BM} \cdot \overline{CM} = 0$ وبالتالي (S) هي الدائرة التي قطرها $[BC]$ أي الدائرة

التي مركزها G ونصف قطرها $GA = \sqrt{3}$.

(ج) تعليم بدقة النقط A, B, C و G ثم أنشئ (S) .

معناه $|z_B| = |z_C| = 2$ $OB = OC = 2$ إذن النقطتين B و C تنتميان إلى الدائرة (C) التي مركزها O ونصف

قطرها 2 حيث فاصلتي النقطتين B و C هي 1.

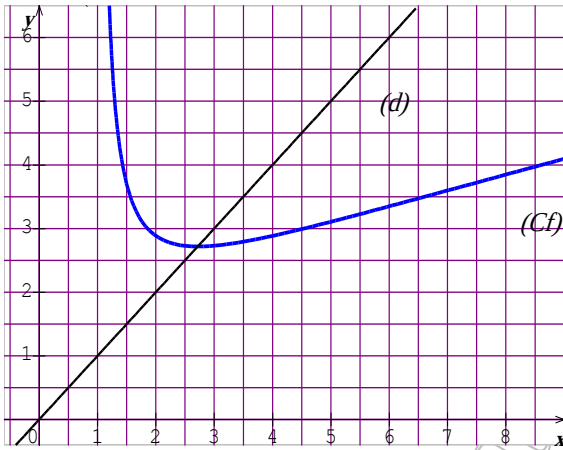
B هي نقطة تقاطع الدائرة (C) مع المستقيم ذي المعادلة $x = 1$ والتي تقع في الربع الأول.

C هي نقطة تقاطع الدائرة (C) مع المستقيم ذي المعادلة $x = 1$ والتي تقع في الربع الرابع.

النقطة A هي نقطة تقاطع (S) مع محور الفواصل حيث فاصلة النقطة A سالبة.

التمرين الثالث:

في الشكل المرفق (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.



والمستقيم (d) ذو المعادلة $y = x$.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 5$ و $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. أ- دراسة اتجاه تغير الدالة f .

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]1; +\infty[$ ولدينا: $f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{x^2}$

إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $\ln(x) - 1$.

$f'(x) = 0$ تعني $\ln(x) - 1 = 0$ وبكافئ $\ln(x) = 1$ أي $x = e$

$f'(x) > 0$ تعني $\ln(x) - 1 > 0$ وبكافئ $\ln(x) > 1$ أي $x > e$

$f'(x) < 0$ تعني $\ln(x) - 1 < 0$ وبكافئ $\ln(x) < 1$ أي $x < e$

و $x > 1$ أي $1 < x < e$.

بالتالي الدالة f متناقصة تماماً على المجال $[1; e]$ ومتزايدة تماماً على المجال $[e; +\infty[$.

ب - تمثيل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 .

2. إعطاء تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

حسب الشكل يبدو أن المتتالية (u_n) متناقصة.

3. برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n \geq e$.

لدينا $u_0 \geq e$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

ليكن n عدداً طبيعياً.

نفرض أن $u_n \geq e$ وبما أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[e; +\infty[$ فإن $f(u_n) \geq f(e)$ أي $u_{n+1} \geq e$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n \geq e$ وهذا حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع.

4. دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{\ln u_n} - u_n = u_n \left(\frac{1}{\ln u_n} - 1 \right)$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq e$ معناه $\ln u_n \geq 1$ يكافئ $\frac{1}{\ln u_n} \leq 1$ ويكافئ $\frac{1}{\ln u_n} - 1 \leq 0$ إذن

$$u_n \left(\frac{1}{\ln u_n} - 1 \right) \leq 0 \text{ أي } u_{n+1} - u_n \leq 0 \text{ وبالتالي المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة.}$$

استنتاج ان (u_n) متقاربة ولتكن نهايتها l

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد e فهي متقاربة نحو عدد حقيقي l .

5. تبين أن $l = f(l)$

لدينا المتتالية (u_n) متقاربة إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ ولدينا $u_{n+1} = f(u_n)$ معناه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)$

والدالة f مستمرة على المجال $]1; +\infty[$ وبالأخص عند l إذن $l = f(l)$.

حساب نهاية المتتالية (u_n) .

$$l = f(l) \text{ معناه } l = \frac{l}{\ln l} \text{ يكافئ } \frac{l}{\ln l} - l = 0 \text{ يكافئ } \frac{l - l \ln l}{\ln l} = 0 \text{ أي } \frac{l(1 - \ln l)}{\ln l} = 0 \text{ ومنه } l = 0 \text{ أو}$$

$$1 - \ln l = 0 \text{ أي } l = e \text{ أو } l = 0 \text{ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, u_n \geq e \text{ فإن } l = e \text{ إذن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e.$$

التمرين الرابع:

I- لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (x-1)e^x + 1$

1. دراسة تغيرات الدالة g .

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي مثل إشارة x .

وبالتالي الدالة g متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 0]$ و متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - e^x + 1 = 1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^x + 1 = +\infty$$

جدول تغيراتها يكون كالآتي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		0	
$g(x)$	1	0	$+\infty$

2. استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

نلاحظ من جدول تغيرات الدالة g أنه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) \geq 0$.

تعليل أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $xe^x + 1 > 0$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) \geq 0$ معناه $(x-1)e^x + 1 \geq 0$ ويكافئ $xe^x - e^x + 1 \geq 0$ أي

$$xe^x + 1 \geq e^x \text{ أي } xe^x + 1 > 0 \text{ من أجل كل عدد حقيقي } x.$$

3. التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) - g'(x) = 1 - e^x$

لدينا $g(x) = xe^x - e^x + 1$ معناه $g(x) = g'(x) - e^x + 1$ أي $g(x) - g'(x) = 1 - e^x$.

استنتاج $\int_0^1 g(x) dx$ وفسره هندسياً.

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 [g'(x) - e^x + 1] dx = [g(x) - e^x + x]_0^1 = [g(1) - e + 1] - [g(0) - 1]$$

$$\int_0^1 g(x) dx = (2-e) + 1 = 3-e$$

بما أن $\int_0^1 g(x) dx > 0$ فإن $\int_0^1 g(x) dx$ هو مساحة الحيز المستوي المحدد بمنحنى الدالة g ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$.

$$\text{II- الدالة العددية المعرفة على } \mathbb{R} \text{ كما يلي: } f(x) = \frac{xe^x}{xe^x + 1}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{xe^x + 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{xe^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{xe^x \left(1 + \frac{1}{xe^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{xe^x}\right)} = 1$$

تفسير النتيجة بيانياً.

(C_f) يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتيهما على الترتيب $y=0$ و $y=1$.

$$2. \text{ أ- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي } x, f'(x) = \frac{(x+1)e^x}{(xe^x + 1)^2}$$

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :

$$f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(xe^x + 1) - (e^x + xe^x)xe^x}{(xe^x + 1)^2} = \frac{(e^x + xe^x)[(xe^x + 1) - xe^x]}{(xe^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x + xe^x}{(xe^x + 1)^2} = \frac{(x+1)e^x}{(xe^x + 1)^2}$$

ب استنتاج اتجاه تغير الدالة f

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $e^x > 0$ و $(xe^x + 1)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ كإشارة $(x+1)$.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; -1[$ ، $f'(x) < 0$.

و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) > 0$.

إذن الدالة f متناقصة تماماً على $]-\infty; -1[$ و متزايدة تماماً على $]-1; +\infty[$.

جدول تغيراتها.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	0	$\frac{-1}{e-1}$	1

3. تبين $y=x$ معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) في المبدأ.

$$(T): y = x \text{ أي } y = 1(x+0) + 0 \text{ ومنه } y = f'(0)(x+0) + f(0)$$

4. تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) - x = \frac{-xg(x)}{xe^x + 1}$

$$f(x) - x = \frac{xe^x}{xe^x + 1} - x = \frac{xe^x - x^2e^x - x}{xe^x + 1} = \frac{-x(-e^x + xe^x + 1)}{xe^x + 1} = \frac{-x(e^x(x-1) + 1)}{xe^x + 1} = \frac{-xg(x)}{xe^x + 1}$$

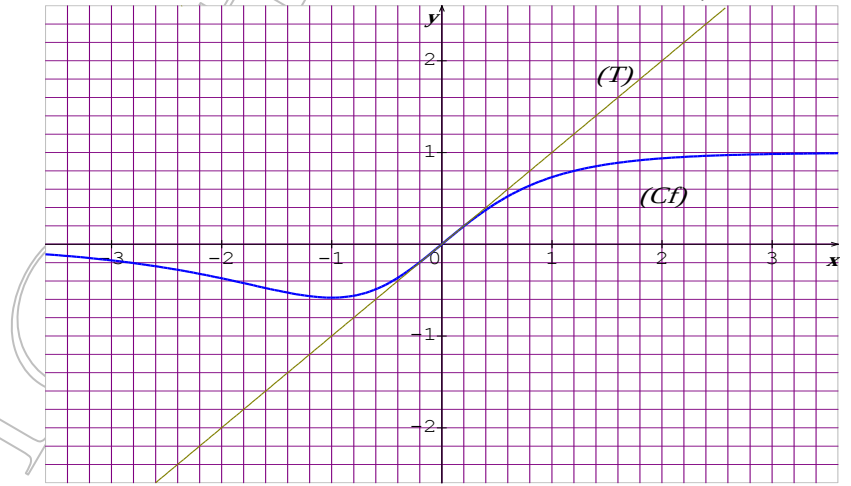
استنتاج وضعية (C_f) بالنسبة لـ (T) .

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $xe^x + 1 > 0$ ومنه إشارة $f(x) - x$ هي من نفس إشارة $-xg(x)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x$	+	0	-
$g(x)$	+	0	+
$f(x) - x$	+	0	-
الوضعية	(C_f) فوق (T)		(C_f) تحت (T)

(C_f) و (T) يتقاطعان في النقطة O .

5. رسم (C_f) والمنحنى (T) .



III- (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. برهان بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$.

لدينا $u_0 > 0$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $u_n > 0$ من أجل عدد طبيعي ونبرهن أن $u_{n+1} > 0$.

لدينا $u_n > 0$ وبما أن الدالة متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$ فإن $f(u_n) > f(0)$ أي $u_{n+1} > 0$.

إذا حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$.

2. تبين أن المتتالية (u_n) متناقصة

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ ، $f(x) - x < 0$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$u_n \in [0; +\infty[$ فإن $f(u_n) - u_n < 0$ أي $u_{n+1} - u_n < 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

استنتاج أنها متقاربة.

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي متقاربة ونهايتها عدد حقيقي l .

3. حساب نهاية المتتالية (u_n) .

لدينا المتتالية (u_n) متقاربة إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ ولدينا $u_{n+1} = f(u_n)$ وبما أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$

فإن $l = f(l)$ ومنه $f(l) - l = 0$ وعليه $\frac{-\lg(l)}{le^l + 1} = 0$ أي $l = 0$ وبالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول: (05.5 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ الوحدة $2cm$.

A النقطة التي لاحققتها $-2i$ ؛ f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z النقطة M'

ذات اللاحقة z' حيث: $z' = -2\bar{z} + 2i$

1. نعتبر النقطة B ذات اللاحقة $3-2i$.

أ - احسب لاحقتي النقطتين A' و B' صورتي A و B على الترتيب بالتحويل f .

ب - أنشئ النقط A, B, A', B' .

2. بين أنه، إذا كانت النقطة M تنتمي إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = -2$ فإن النقطة M' تنتمي أيضا إلى (Δ) .

3. برهن أنه من أجل كل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z فإن: $|z' + 2i| = 2|z + 2i|$.

فسر هندسيا هذه المساواة.

4. من أجل كل نقطة M تختلف عن A ، نسمي θ عمدة للعدد المركب $z + 2i$.

أ - أثبت أن θ هي قيس للزاوية $(\vec{u}; \overrightarrow{AM})$.

ب - برهن أن العدد $(z' + 2i)(z + 2i)$ عدد حقيقي سالب أو معدوم.

ج - استنتج عمدة لـ $z' + 2i$ بدلالة θ .

د - ماذا يمكن أن تستنتج من أجل نصفي المستقيمين (AM) و (AM') .

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $A(-1; 0; 1)$ ، $B(1; 1; 0)$ ، $C(0; -1; -4)$ و

$D(-1; 1; 2)$.

1- أ - بين أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان.

ب - استنتج طبيعة المثلث ABC ، ثم احسب مساحته.

2- أ - عيّن شعاعا $\vec{u}$ حيث: $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ و $\vec{u} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

ب - استنتج معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) .

ج - تحقق أن النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (ABC) واستنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

د - احسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC) .

3- أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

4- أ - تحقق أن $2x - 5y + 2z + 3 = 0$ معادلة للمستوي (BCD) .

ب - أحسب بُعد النقطة A عن المستوي (BCD) .

ج - استنتج مساحة المثلث BCD .

التمرين الثالث: (4 نقاط)

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases} \quad (u_n) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ:}$$

1. أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > 0$.

ب - بين أن (u_n) متناقصة.

ج - استنتج أن (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

2. (w_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $w_n = \ln u_n$.

أ - أثبت، أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n = w_n - w_{n+1}$.

ب - نضع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$. بين أن $S = w_0 - w_{n+1}$ ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S$.

التمرين الرابع: (06 نقاط)

I / الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = (x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)$

1. بين أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$.

2. احسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$.

II / الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) احسب كلا من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وفسر النتيجة الأولى هندسيا

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$ يكون: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

4) استنتج أنه إذا كان $x \in [0; 4]$ فإن $f(x) \in [0; 4]$

5) - بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C_f)

- ادرس وضعية (Δ) بالنسبة إلى (C_f)

6) ارسم كلا من المستقيم (Δ) والمنحني (C_f)

7) الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي: $h(x) = [\ln(x+1)]^2$

أ - احسب $h'(x)$

ب - احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بـ: (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما

$$x = 0 \text{ و } x = 1.$$

III / المتتالية المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) باستعمال المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) مثل على حامل محور الفواصل كلا من u_0, u_1, u_2, u_3

2) باستعمال البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq u_n \leq 4$

3) - بين أن المتتالية (u_n) متناقصة ثم استنتج أنها متقاربة

- احسب عندئذ $\lim u_n$

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 ن)

- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- (1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 + 2z + 4 + 4i = 0$ (1) تحقق أن $-2i$ حلاً للمعادلة (1) ثم استنتج الحل الآخر
- (2) نعتبر النقط A, B, C, D صور الأعداد z_A, z_B, z_C, z_D على الترتيب حيث :
- $$z_D = 4, \quad z_C = 2 + 4i, \quad z_B = -2 + 2i, \quad z_A = -2i$$
- أ - احسب z_I لاحقة النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$
- ب بين أن : $\frac{z_C - z_I}{z_D - z_I} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ثم استنتج نوع المثلث ICD
- ج- عين مع التبرير نوع الرباعي $ABCD$
- (3) - بين أن العدد $(z_I)^{2016}$ هو عددا حقيقيا
- عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $(z_I)^n$ عددا تخيليا صرفا

التمرين الثاني : (05 نقاط)

- الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط :
- $$A(1; 2; 3), \quad B(0; 1; 4), \quad C(-1; -3; 2), \quad D(4; -2; 5)$$
1. بين النقط A, B و C تعين مستويا.
2. بين أن الشعاع $\vec{n}(2; -1; 1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم اكتب معادلة لهذا المستوي
3. نعتبر المستقيم (Δ) ذو التمثيل الوسيط $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 4 - t \end{cases}$
4. تحقق أن النقطة D تنتمي إلى المستقيم (Δ) وأن (Δ) عمودي على المستوي (ABC) .
5. نسمي H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) ؛ تحقق أن H هي مركز ثقل المثلث ABC .
6. لتكن $M(x; y; z)$ نقطة كيفية من المستقيم (Δ) .
- أ - بين أن : $BM = \sqrt{6t^2 - 12t + 8}$
- ب - f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \sqrt{6x^2 - 12x + 8}$
- ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها، ثم بين أن الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى يطلب إيجادها.
- ج - استنتج المسافة بين النقطة B والمستقيم (Δ) .

التمرين الثالث : (5 نقاط)

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n + 21} \end{cases} \text{ كما يلي : } (u_n) \text{ المتتالية المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية } \mathbb{N}$$

(1) باستعمال البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > 0$

(2) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة

(3) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} \leq \frac{1}{7}u_n$

ب- باستعمال البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$

ج - احسب نهاية المتتالية (u_n)

(4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n = \frac{u_n}{u_n + 18}$

أ - بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$

ب - اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أن : $u_n = \frac{18\left(\frac{1}{7}\right)^n}{19 - \left(\frac{1}{7}\right)^n}$ احسب مرة ثانية نهاية المتتالية (u_n)

التمرين الرابع : (06 نقاط)

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = -x - 1 + \frac{2e^x}{e^x + 1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x : f(-x) + f(x) = 0$ ، ثم استنتج أن الدالة f فردية

(2) احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ ثم استنتج نهايتها عند $+\infty$

(3) بين أنه من أجل $x \in \mathbb{R} : f'(x) = -\frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

(4) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x - 1)]$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يطلب إيجاد معادلة لكل منهما

(5) أنشئ المنحني (C_f)

(6) λ عدد حقيقي سالب تماما، نسمي $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمتين التي

معادلاتها $x = \lambda$ ، $x = 0$ ، $y = -x - 1$

أ - عبر بدلالة λ عن المساحة $S(\lambda)$

ب - احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} S(\lambda)$

حل الموضوع الأول:

التمرين الأول : (05.5 نقاط)

1. نعتبر النقطة B ذات اللاحقة $3-2i$.

أ - حساب لاحقتي النقطتين A' و B' صورتين A و B على الترتيب بالتحويل f .

$$z_{A'} = -2\overline{z_A} + 2i = -2(2i) + 2i = -2i = z_A$$

$$z_{B'} = -2\overline{z_B} + 2i = -2(3+2i) + 2i = -6-2i$$

ب - إنشاء النقط A, B, A', B' .

2. تبين أنه، إذا كانت النقطة M تنتمي إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = -2$ فإن النقطة M' تنتمي أيضا إلى (Δ) .

$M \in (\Delta)$ معناه $z = x - 2i$ حيث x عدد حقيقي إذن $z' = -2(\overline{x-2i}) - 2i = -2(x-2i) + 2i = -2x - 2i$ أي $M' \in (\Delta)$.

3. برهان أنه من أجل كل نقطة M من المستوى ذات اللاحقة z فإن: $|z' + 2i| = 2|z + 2i|$.

لدينا $\begin{cases} z' = -2\overline{z} + 2i \\ z_A = -2\overline{z_A} + 2i \end{cases}$ وبطرح المساويتين طرفا إلى طرف نجد $z' - z_A = -2(\overline{z} - \overline{z_A})$ وهذا يعني أن

$$z' - z_A = -2(\overline{z} - \overline{z_A}) \text{ ومعناه } |z' - z_A| = 2|\overline{z} - \overline{z_A}| \text{ ويكافئ } |z' - z_A| = 2|z - z_A| \text{ أي } |z' + 2i| = 2|z + 2i|$$

تفسير هندسيا هذه المساواة.

$$|z' + 2i| = 2|z + 2i| \text{ تعني } AM' = 2AM$$

4. من أجل كل نقطة M تختلف عن A ، نسمي θ عمدة للعدد المركب $z + 2i$.

أ - إثبات أن θ هي قياس للزاوية $(\vec{u}; \overrightarrow{AM})$.

$$\theta = \arg(z + 2i) = \arg(z - z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{AM})$$

ب - برهان أن العدد $(z' + 2i)(z + 2i)$ عدد حقيقي سالب أو معدوم.

$$\text{لدينا } z' - z_A = -2(\overline{z} - \overline{z_A}) \text{ معناه } z' + 2i = -2(\overline{z + 2i}) \text{ يكافئ } (z' + 2i)(z + 2i) = -2(\overline{z + 2i})(z + 2i)$$

ويكافئ $(z' + 2i)(z + 2i) = -2|z + 2i|^2$ وعليه العدد $(z' + 2i)(z + 2i)$ عدد حقيقي سالب أو معدوم.

ج - استنتاج عمدة لـ $z' + 2i$ بدلالة θ .

$$\text{لدينا } \arg[(z' + 2i)(z + 2i)] = \pi + 2k\pi \text{ معناه } \arg(z' + 2i) + \arg(z + 2i) = \pi + 2k\pi \text{ ويكافئ}$$

$$\arg(z' + 2i) = -\arg(z + 2i) + \pi + 2k\pi \text{ أي } \arg(z' + 2i) = -\theta + \pi$$

د - ماذا يمكن أن تستنتج من أجل نصفي المستقيمين (AM) و (AM') .

$$\arg(z' + 2i) = -\theta + \pi \text{ معناه } (\vec{u}; \overrightarrow{AM'}) = -(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) + \pi \text{ نستنتج هكذا أن نصفي المستقيمين } (AM) \text{ و } (AM')$$

متناظران بالنسبة لمحور الترتيب.

التمرين الثاني : (04.5 نقاط)

1- أ - تبين أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان.

لدينا $\overrightarrow{AB}(2;1;-1)$ و $\overrightarrow{BC}(-1;-2;-4)$ إذن $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 \times -1 + 1 \times -2 - 1 \times -4 = 0$ أي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان.

ب - استنتاج طبيعة المثلث ABC ، واحسب مساحته.

$$\text{المثلث } ABC \text{ قائم في } C \text{ ومساحته } S(ABC) = \frac{AB \times BC}{2}$$

$$BC = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{21} , AB = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \text{ حيث}$$

$$S(ABC) = \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{21}}{2} = \frac{\sqrt{126}}{2} = \frac{3\sqrt{14}}{2} ua \text{ إذن}$$

2- أ. تعيين شعاعا $\vec{u}$ حيث: $\vec{u} \cdot \vec{AB} = 0$ و $\vec{u} \cdot \vec{BC} = 0$

نضع $\vec{u}(a;b;c)$ ؛ $\vec{u} \cdot \vec{AB} = 0$ معناه $2a + b - c = 0$ و $\vec{u} \cdot \vec{BC} = 0$ معناه $-a - 2b - 4c = 0$

$$\text{إذن نحصل على الجملة} \begin{cases} 2a + b - c = 0 \dots\dots\dots (1) \\ -a - 2b - 4c = 0 \dots\dots (2) \end{cases} \text{ بضرب المعادلة (1) بالعدد 2 وبجمع المعادلتين نجد}$$

$$3a - 6c = 0 \text{ أي } a = 2c \text{ وبالتعويض عن } a \text{ في (1) نجد } 4c + b - c = 0 \text{ أي } b = -3c \text{ وعليه } \vec{u}(2c; -3c; c)$$

نأخذ مثلاً $c = 1$ نجد $\vec{u}(2; -3; 1)$

ب. استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

المستوي (ABC) له معادلة من الشكل $2x - 3y + z + d = 0$ ولدينا $B \in (ABC)$ يعني $2 \times 1 - 3 \times 1 + d = 0$ أي $d = 1$ إذن للمستوي (ABC) المعادلة $2x - 3y + z + 1 = 0$.

ج. التحقق أن النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (ABC) واستنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$.

بما أن $2x_D - 3y_D + z_D + 1 = -2 - 3 + 2 + 1 = -2 \neq 0$ فإن D لا تنتمي إلى المستوي (ABC) و $ABCD$ هو رباعي وجوه.

د. حساب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC) .

$$d(D; (ABC)) = \frac{|2x_D - 3y_D + z_D + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

3- حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

$$V(ABCD) = \frac{1}{3} S(ABC) \times d(D; ABC) = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{14}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{14}} = 1uv$$

4- أ. التحقق أن $2x - 5y + 2z + 3 = 0$ معادلة للمستوي (BCD) .

لدينا $2x_B - 5y_B + 2z_B + 3 = 2 - 5 + 3 = 0$ ، $2x_C - 5y_C + 2z_C + 3 = 5 - 8 + 3 = 0$ ، $2x_D - 5y_D + 2z_D + 3 = -2 - 5 + 4 + 3 = 0$ ومنه إحداثيات النقط B, C, D تحقق المعادلة $2x - 5y + 2z + 3 = 0$ وعليه المعادلة $2x - 5y + 2z + 3 = 0$ للمستوي (BCD) .

ب. حساب بُعد النقطة A عن المستوي (BCD) .

$$d(A; (BCD)) = \frac{|2 \times -1 - 5 \times 0 + 2 \times 1 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{33}} = \frac{\sqrt{33}}{11}$$

ج. استنتاج مساحة المثلث BCD .

$$S(BCD) = \frac{3V(ABCD)}{d(A; (BCD))} = \frac{3 \times 1}{\frac{\sqrt{33}}{11}} = \frac{33}{\sqrt{33}} = \sqrt{33}ua \text{ ولدينا } V(ABCD) = \frac{1}{3} S(BCD) \times d(A; (BCD))$$

التمرين الثالث: (4 نقاط)

$$(u_n) \text{ متتالية معرفّة على } \mathbb{N} \text{ بـ: } \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$$

1. أ. برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$.

لدينا $u_0 > 1$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $u_n > 0$ من أجل عدد طبيعي n ونبرهن أن $u_{n+1} > 0$.
 لدينا $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ ومنه إشارة u_{n+1} هي من نفس إشارة u_n وبما أن $u_n > 0$ فإن $u_{n+1} > 0$ ومنه نستنتج حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع إنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$.
ب - تبيان أن (u_n) متناقصة.

$$u_{n+1} - u_n = u_n e^{-u_n} - u_n = u_n (e^{-u_n} - 1)$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$ معناه $-u_n < 0$ يكافئ $e^{-u_n} < 1$ ويكافئ $e^{-u_n} - 1 < 0$ وعليه
 $u_{n+1} - u_n < 0$ أي $u_{n+1} < u_n$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

ج - استنتاج أن (u_n) متقاربة وحساب نهايتها.

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي متقاربة وتقبل نهاية l حيث $l \in \mathbb{R}$.
 لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ و $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ إذا $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n e^{-u_n}$ وبما أن الدالة $x \mapsto x e^{-x}$ مستمرة على $\mathbb{R}$ فإن $l = l e^{-l}$ ومنه $l - l e^{-l} = 0$ ويكافئ $l(1 - e^{-l}) = 0$ أي $l = 0$ وبالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2. (w_n) متتالية معرفّة من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = \ln u_n$.

أ - إثبات، أنّه من أجل كل عدد طبيعي : $u_n = w_n - w_{n+1}$.

ومنه $w_{n+1} = \ln u_{n+1} = \ln(u_n e^{-u_n}) = \ln u_n + \ln e^{-u_n} = \ln u_n - u_n = w_n - u_n$

ب - نضع : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$. تبيان أن $S = w_0 - w_{n+1}$ وحساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S$.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = w_0 - w_1 \\ u_1 = w_1 - w_2 \\ u_2 = w_2 - w_3 \\ \vdots \\ u_n = w_n - w_{n+1} \end{array} \right. \quad \text{ولدينا ما يلي}$$

$$S = w_0 - w_{n+1}$$

لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_{n+1} = \lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty$ لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} S = \lim_{n \rightarrow +\infty} [w_0 - w_{n+1}] = +\infty$

التمرين الرابع : (06 نقاط)

1. /I تبيان أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$

الدالة g تقبل الاشتقاق على $]-1; +\infty[$ ولدينا : $g'(x) = 2(x+1) + \frac{1}{x+1}$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$ لدينا $2(x+1) > 0$ و $\frac{1}{x+1} > 0$ ومنه $g'(x) > 0$

وبالتالي الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$.

2. حساب $g(0)$ ، واستنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$.

$$g(0) = (0+1)^2 - 1 + \ln(0+1) = 0$$

الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$.

من أجل $x \in]-1; 0]$ لدينا $g(x) < g(0)$ أي $g(x) < 0$.

من أجل $x \in]0; +\infty[$ لدينا $g(x) > g(0)$ أي $g(x) > 0$ ؛ كما أن $g(0) = 0$.

II / الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x - \frac{\ln(x+1)}{x+1} = -\infty \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{\ln(x+1)}{x+1} = +\infty \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$$

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$ يكون : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

ليكن $x \in]-1; +\infty[$.

$$f'(x) = 1 - \left(\frac{\left(\frac{1}{x+1} \right)(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} \right) = 1 - \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

3. استنتاج اتجاه تغير الدالة f .

لدينا إشارة $f'(x)$ كإشارة $g(x)$.

ومنه الدالة f متناقصة تماماً على $]-1; 0[$ ومتزايدة تماماً على $[0; +\infty[$.
وجداول تغيراتها يكون كالآتي:

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

4. لدينا الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0; 4]$.

إذا كان $0 \leq x \leq 4$ فإن $f(0) \leq f(x) \leq f(4)$ أي $0 \leq f(x) \leq 4 - \frac{\ln 5}{5}$ وبما أن $4 - \frac{\ln 5}{5} < 4$ فإن

$0 \leq f(x) \leq 4$ إذا من أجل $x \in [0; 4]$ فإن $f(x) \in [0; 4]$.

5. - تبيان أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب للمنحنى بجوار $+\infty$.

دراسة وضعية (Δ) بالنسبة إلى (C_f)

$$f(x) - x = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

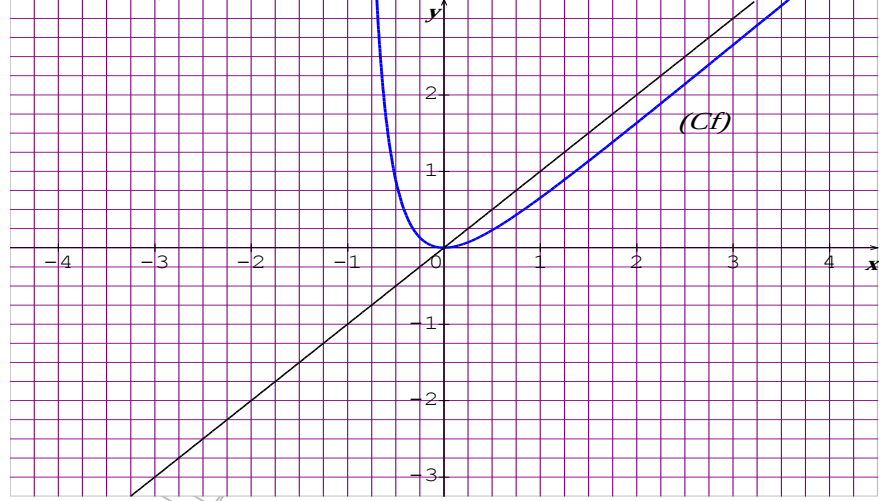
$f(x) - x = 0$ يعني $-\ln(x+1) = 0$ يكافئ $\ln(x+1) = 0$ ويكافئ $x+1=1$ أي $x=0$.

$f(x) - x > 0$ يعني $-\ln(x+1) > 0$ يكافئ $\ln(x+1) < 0$ ويكافئ $0 < x+1 < 1$ أي $-1 < x < 0$.

$f(x) - x < 0$ يعني $-\ln(x+1) < 0$ يكافئ $\ln(x+1) > 0$ ويكافئ $x+1 > 1$ أي $x > 0$.

x	-1	0	$+\infty$
$f(x) - x$		+	0 -
الوضعية النسبية	(Δ) فوق (C_f) (Δ) تحت (C_f) (Δ) و (C_f) يتقاطعان في النقطة O .		

6. رسم كلا من (Δ) و (C_f) .



7. الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي : $h(x) = [\ln(x+1)]^2$ أ - احسب $h'(x)$.

الدالة h تقبل الإشتقاق على $]-1; +\infty[$ ولدينا : $h'(x) = 2\left(\frac{1}{x+1}\right)\ln(x+1) = \frac{2\ln(x+1)}{x+1}$

ب - حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بـ : (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ ، $x=1$

$$A = \int_0^1 x - f(x) dx = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2\ln(x+1)}{x+1} dx = \left[\frac{1}{2} (\ln(x+1))^2 \right]_0^1$$

$$A = \left[\frac{1}{2} (\ln(1+1))^2 \right] - \left[\frac{1}{2} (\ln(0+1))^2 \right] = \frac{1}{2} (\ln 2)^2 \text{ ua}$$

III / (u_n) المتتالية المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. تمثيل على حامل محور الفواصل كلا من u_0, u_1, u_2, u_3

2. برهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$0 \leq u_n \leq 4$$

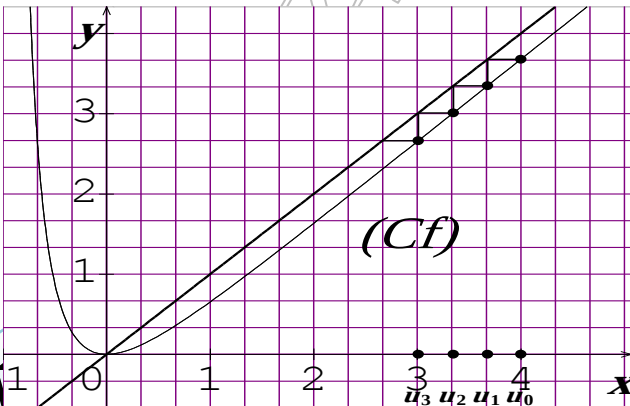
لدينا $0 \leq u_0 \leq 4$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أن $0 \leq u_n \leq 4$ وحسب نتيجة السؤال 4 فإن

$$0 \leq f(u_n) \leq 4$$

أي $0 \leq u_{n+1} \leq 4$ وعليه من أجل كل عدد طبيعي n فإن

$0 \leq u_n \leq 4$ وهذا حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع.



3- تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة

لدينا من أجل كل عدد حقيقي من المجال $[0; +\infty[$ ، $f(x) - x < 0$ ، وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 4$ ، فإن $u_{n+1} - u_n \leq 0$ أي $f(u_n) - u_n \leq 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

استنتاج أنها متقاربة

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي متقاربة.

- حساب $\lim u_n$

لدينا المتتالية (u_n) متقاربة إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ وبما أن $u_{n+1} = f(u_n)$ والدالة مستمرة على $]-1; +\infty[$ فإن $f(l) = l$ ومنه $f(l) - l = 0$ وحسب ما سبق $l = 0$ وبالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

حل الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 ن)

1. التحقق أن $-2i$ حلا للمعادلة (1)

$$(-2i)^2 + 2(-2i) + 4 + 4i = -4 - 4i + 4 + 4i = 0$$

استنتاج الحل الآخر

إذا كان z حلا للمعادلة (1) فإن $z - 2i = \frac{2}{1} = 2$ أي $z = 2 + 2i$.

2. أ - حساب z_I لاحقة النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$

$$z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{-2i + 2 + 4i}{2} = 1 + i$$

ب - تبين أن: $\frac{z_C - z_I}{z_D - z_I} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\frac{z_C - z_I}{z_D - z_I} = \frac{2 + 4i - 1 - i}{4 - 1 - i} = \frac{1 + 3i}{3 - i} = \frac{i(-i + 3)}{3 - i} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

لدينا $IC = ID$ و $(\overrightarrow{ID}; \overrightarrow{IC}) = \frac{\pi}{2}$ ومنه المثلث ICD قائم في I ومتساوي الساقين.

ج - تعيين مع التبرير نوع الرباعي $ABCD$

لدينا $\frac{z_B + z_D}{2} = \frac{-2 + 2i + 4}{2} = 1 + i = z_I$ أي منتصف $[BD]$.

بما أن $(ID) \perp (IC)$ فإن $(BD) \perp (AC)$ ولدينا $IC = IA = ID = IB$ أي $AC = BD$. إذن $[AC]$ و $[BD]$ متناصفتان ومتعامدتان وبالتالي $ABCD$ مربع.

- تبيان أن العدد $(z_I)^{2016}$ هو عددا حقيقيا

$$(z_I)^{2016} = \left(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^{2016} = (\sqrt{2})^{2016} e^{i\frac{2016\pi}{4}} = (\sqrt{2})^{2016} e^{i504\pi} = (\sqrt{2})^{2016} \in \mathbb{R} \text{ إذن } z_I = 1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

- تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $(z_I)^n$ عددا تخيليا صرفا

$$(z_I)^n = (\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$$

$(z_I)^n$ تخيلي صرف معناه $\arg(z_I)^n = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ومنه $\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ أي $n = 2 + 4k$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

التمرين الثاني :

1. إثبات أن النقط A, B و C ليست على استقامة واحدة .

لدينا $\overrightarrow{AB}(-1;-1;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;-5;-1)$ و $\frac{-2}{-1} \neq \frac{-5}{-1}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً ومنه النقط A, B و C ليست على استقامة واحدة .

2. إثبات أن الشعاع $\vec{n}(2;-1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

لدينا $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times -1 - 1 \times -1 + 1 \times 1 = 0$ و $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times -2 - 1 \times -5 + 1 \times -1 = 0$ بما أن $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ و $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$ والشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً فإن $\vec{n}(2;-1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

تعيين معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) .

من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من (ABC) لدينا: $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ و $\overrightarrow{AM}(x-1;y-2;z-3)$ $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ معناه $2(x-1) - 1(y-2) + (z-3) = 0$ أي $2x - y + z - 3 = 0$ معادلة ديكرتية للمستوي (ABC)

3. ليكن المستقيم (Δ) الذي تمثيله الوسيطى: $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 4 - t \end{cases}$

- إثبات أن النقطة D تنتمي للمستقيم (Δ) وأن هذا المستقيم عمودي على المستوي (ABC) .

$D \in (\Delta)$ معناه $\begin{cases} 4 = 2 - 2t \\ -2 = -1 + t \\ 5 = 4 - t \end{cases}$ ومنه $t = -1$ إذن من أجل $t = -1$ نجد النقطة $D(4;-2;5)$ من المستقيم (Δ) .

من التمثيل الوسيطى نجد $\vec{u}(-2;1;-1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) .
و $\vec{n}(2;-1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ومنه $\vec{u} = -\vec{n}$ وعليه الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطياً وبالتالي فإن (Δ) عمودي على المستوي (ABC) .

5 - تبين أن H هي مركز ثقل المثلث ABC .

نجد أولاً إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .

نحل الجملة $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - t \\ 2x - y + z - 3 = 0 \end{cases}$ ومنه $2(2-2t) - (-1+t) + (4-t) - 3 = 0$

ومنه $-6t + 6 = 0$ أي $t = 1$ إذن $H(0;0;3)$.

لدينا $\overrightarrow{HA}(1;2;0)$ ، $\overrightarrow{HB}(0;1;1)$ و $\overrightarrow{HC}(-1;-3;-1)$.

ومنه $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}(1+0-1;2+1-3;0+1-1) = \vec{0}$ أي $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}(0;0;0)$

وهذا يعني أن $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$ وبما أن النقط A, B و C ليست في استقامة فإن H هي مركز ثقل المثلث ABC .

6. أ - تبين أن: $BM = \sqrt{6t^2 - 12t + 8}$

$M \in (\Delta)$ معناه إحداثيات M من الشكل $M(2-2t;-1+t;4-t)$.

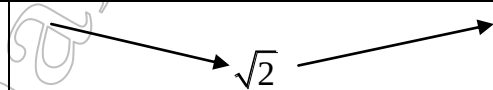
$$BM = \sqrt{(2-2t-0)^2 + (-1+t-1)^2 + (4-t-4)^2} = \sqrt{4-8t+4t^2+4-4t+t^2+t^2}$$

$$BM = \sqrt{6t^2 - 12t + 8} \text{ أي}$$

ب - f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \sqrt{6x^2 - 12x + 8}$
- دراسة اتجاه تغير الدالة f .

$$f'(x) = \frac{12x - 12}{2\sqrt{6x^2 - 12x + 8}} = \frac{6(x-1)}{\sqrt{6x^2 - 12x + 8}} \text{ ولدینا:}$$

إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $(x-1)$ وبالتالي الدالة f متناقصة تماماً على $]-\infty; 1]$ ومتزايدة تماماً على $[1; +\infty[$.
وجداول تغيراتها كالتالي:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) \geq \sqrt{2}$ ومنه الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى وهي $\sqrt{2}$.
وعليه المسافة بين النقطة B والمستقيم (Δ) هي $\sqrt{2}$.

التمرين الثالث : (5 نقاط)

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n + 21} \end{cases} \text{ كما يلي : } (u_n) \text{ المتتالية المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية } \mathbb{N}$$

1. تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > 0$

لدينا $u_0 > 0$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $u_n > 0$ ونبرهن أن $u_{n+1} > 0$.

لدينا $u_n > 0$ معناه $3u_n > 0$ و $u_n + 21 > 0$ أي $u_{n+1} > 0$ ومنه نستنتج حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$.

2. تبين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً ثم استنتج أنها متقاربة

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{u_n + 21} - u_n = \frac{3u_n - u_n^2 - 21u_n}{u_n + 21} = \frac{-u_n(u_n + 18)}{u_n + 21}$$

بما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$ فإن $u_{n+1} - u_n < 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماماً.

3. أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} \leq \frac{1}{7}u_n$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$ معناه $u_n + 21 > 21$ يكافئ $\frac{1}{u_n + 21} < \frac{1}{21}$ ويكافئ $\frac{3u_n}{u_n + 21} < \frac{3u_n}{21}$

$$\text{أي } u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$$

طريقة ثانية:

لندرس إشارة $7u_{n+1} - u_n$

$$7u_{n+1} - u_n = \frac{21u_n}{u_n + 21} - u_n = \frac{21u_n - u_n^2 - 21u_n}{u_n + 21} = \frac{-u_n^2}{u_n + 21}$$

بما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$ فإن $u_n + 21 > 0$ و $-u_n^2 < 0$ أي $7u_{n+1} - u_n < 0$ معناه $7u_{n+1} < u_n$

$$\text{أي } u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$$

ب- تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$

لدينا $\left(\frac{1}{7}\right)^0 = 1$ ومنه $u_0 \leq \left(\frac{1}{7}\right)^0$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$ ونبرهن أن $u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$.

لدينا $u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$ معناه $\frac{1}{7}u_n \leq \frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\right)^n$ يكافئ $\frac{1}{7}u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$ ولدينا حسب السؤال السابق من أجل كل عدد

طبيعي n ، $u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$ إذن $u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$ ومنه نستنتج حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع أنه من أجل كل عدد

طبيعي n ، $u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$.

ج - حساب نهاية المتتالية (u_n)

من أجل كل عدد طبيعي لدينا $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$ وبما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$ فحسب النهايات بالمقارنة فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

4. أ - بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$

$$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} + 18} = \frac{\frac{3u_n}{u_n + 21}}{\frac{3u_n}{u_n + 21} + 18} = \frac{\frac{3u_n}{u_n + 21}}{\frac{3u_n + 18(u_n + 21)}{u_n + 21}} = \frac{3u_n}{21u_n + 378} = \frac{3u_n}{21(u_n + 18)} = \frac{1}{7}v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{u_0}{u_0 + 18} = \frac{1}{19}$.

ب - $v_n = \frac{1}{19}\left(\frac{1}{7}\right)^n$

$$u_n = \frac{18\left(\frac{1}{7}\right)^n}{19 - \left(\frac{1}{7}\right)^n} \quad \text{استنتاج أن:}$$

$$u_n = \frac{18v_n}{1 - v_n} \quad \text{أي } u_n(1 - v_n) = 18v_n \text{ يكافئ } u_n - v_n u_n = 18v_n \text{ يكافئ } v_n u_n + 18v_n = u_n \text{ معناه } v_n = \frac{u_n}{u_n + 18}$$

$$u_n = \frac{18 \times \frac{1}{19}\left(\frac{1}{7}\right)^n}{1 - \frac{1}{19}\left(\frac{1}{7}\right)^n} = \frac{18 \times \frac{1}{19}\left(\frac{1}{7}\right)^n}{\frac{19 - \left(\frac{1}{7}\right)^n}{19}} = \frac{18\left(\frac{1}{7}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^n} \quad \text{وعليه}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0 \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{18\left(\frac{1}{7}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^n} = 0$$

التمرين الرابع : (06 نقاط)

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = -x - 1 + \frac{2e^x}{e^x + 1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(-x) + f(x) = 0$ ، ثم استنتج أن الدالة f فردية
ليكن x عددا حقيقيا:

$$f(-x) + f(x) = -x - 1 + \frac{2e^{-x}}{e^{-x} + 1} - x - 1 + \frac{2e^x}{e^x + 1} = -2 + \frac{2e^{-x}}{e^{-x} + 1} + \frac{2e^x}{e^x + 1} = -2 + \frac{2e^{-x}}{e^{-x}(1 + e^x)} + \frac{2e^x}{e^x + 1}$$

$$f(-x) + f(x) = -2 + \frac{2}{1 + e^x} + \frac{2e^x}{e^x + 1} = -2 + \frac{2 + 2e^x}{e^x + 1} = -2 + 2 = 0$$

ومنه $f(-x) = -f(x)$ ومن أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$ وعليه الدالة f فردية.

2. حساب نهاية الدالة f عند $-\infty$ واستنتاج نهايتها عند $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x}{e^x + 1} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} -x - 1 = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x - 1 + \frac{2e^x}{e^x + 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -f(-x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} -f(t) = -\infty$$

3. تبين أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = -\frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}$

$$f'(x) = -1 + \frac{2e^x(e^x + 1) - 2e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = -1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{-(e^x + 1)^2 + 2e^x}{(e^x + 1)^2} = -\frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) < 0$ وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيراتها

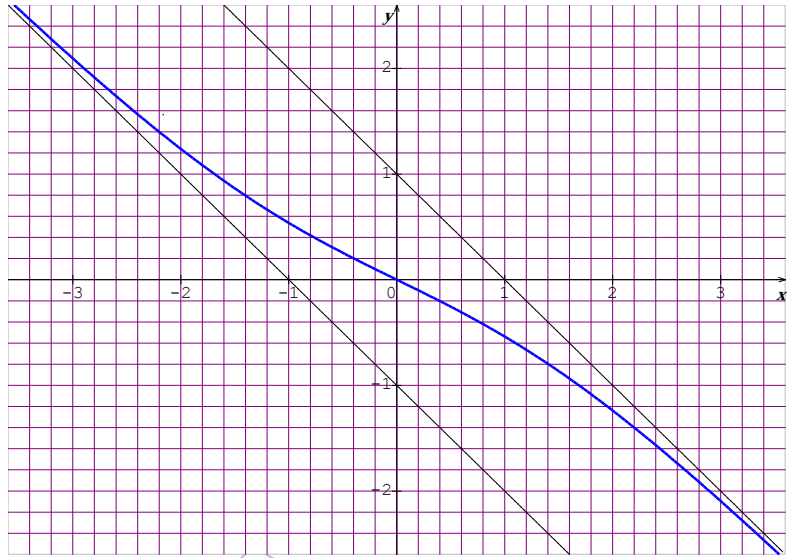
x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

4. حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x - 1)]$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x}{e^x + 1} = 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $y = -x - 1$ و $y = -x + 1$ بجوار $-\infty$ و $+\infty$ على الترتيب.

5. رسم المنحني (C_f)



$$S(\lambda) = \int_{\lambda}^0 f(x) - (-x - 1) dx = \int_{\lambda}^0 \frac{2e^x}{e^x + 1} dx = \left[2 \ln(e^x + 1) \right]_{\lambda}^0 = 2 \ln 2 - 2 \ln(e^{\lambda} + 1) \text{ ua } .6$$

لدينا $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \ln(e^{\lambda} + 1) = 0$ ومنه $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} S(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} 2 \ln 2 - 2 \ln(e^{\lambda} + 1) = 2 \ln 2$

aziz_mus1@hotmail.fr