الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

المفتشية العامة للبيداغوجيا **مقاطعة عين الدفلى وسط**

إختبار البكالوريا التجريبية في مادة الرياضيات

الشعبة: رياضيات **المدة : 4 سا و 30 د**

ملاحظة : اختر موضوعا واحدا فقط من الموضوعين المقترحين

الموضوع الأوّل

التمرين الأول (5.5 نقطة) :

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $(\mathrm{I})\cdots\cdots z^3-4z^2+6z-4=0$ ذات المجهول z .

1. بيّن أنّ المعادلة (I) لا حلا تخيليا صرفا .
2. عين الأعداد الحقيقية α ، β و γ بحيث يكون $z^3-4z^2+6z-4=(z-2)(\alpha z^2+\beta z+\gamma)$
ثمّ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (I).
3. في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $a=2$ ، $b=1-i$ و $c=1+i$.

أ ـ أحسب العدد $\dfrac{c-a}{b-a}$ و استنتج أنّ المثلث ABC قائم و متساوي الساقين (أرسم الشكل).

ب ـ ليكن R الدوران الذي مركزه A و يحوّل B إلى C .
عيّن زاوية R و لاحقة النقطة D صورة النقطة C بـ R.

4. أ ـ لتكن (φ) الدائرة التي قطرها $[BC]$ و (φ') صورتها بالدوران R . أنشىء (φ')

ب ـ لتكن M نقطة من (φ) لاحقتها z تختلف عن C و M' لاحقتها Z' حيث $R(M)=M'$

برهن أنه يوجد عدد حقيقي θ من $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\cup\left]\dfrac{\pi}{2},2\pi\right[$ بحيث $Z=1+e^{i\theta}$

جـ ـ عبر عن Z' بدلالة θ ، أحسب $\dfrac{z'-c}{z-c}$ ثم استنتج أن النقاط M ، C و M' في استقا مية.

التمرين الثاني (5 نقطة) :

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقطتين $A(\frac{2}{3};-3;2)$ و $B(-\frac{4}{3};0;-4)$
و نسمي I منتصف القطعة $[AB]$ و (S)سطح الكرة التي قطرها $[AB]$

1- لتكن E مرجح الجملة المثقلة $\{(A;2),(B;1)\}$

أ- جد إحداثيتي النقطة E.

ب- بين أن مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MO}\right\|$ هي المستوي (P) المحوري للقطعة $[DE]$، ثم جد معادلة ديكارتية له.

2- أ- عين المسافة بين النقطة I و (P) ، ثم استنتج ان (P)يقطع (S) وفق دائرة (C)

ب- بين أن معادلة (C) في المستوي(P)هي: $(x+\frac{1}{3})^2+(z+1)^2=12$ ، ثم استنتج عناصرها المميزة (C)

3- لتكن النقطة $D(-\frac{1}{3};-\frac{1}{2};4\sqrt{3}-1)$

أ- عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (ID).

ب- بين أن المستقيم (ID) يقطع الدائرة (C) في نقطة وحيدة F يطلب تعيين إحداثياتها.

<u>التمرين الثالث (3.5 نقطة) :</u>

يحتوي كيس على أربع كرات لا نفرق بينها عند اللمس، اثنتان منها لونها أحمر R_1 و R_2 و الثالثة أخضر V و الرابعة أبيض B ، و نسحب عشوائيا كرتين على التوالي و بدون إرجاع.

1- مثل هذه الوضعية بشجرة الاحتمالات.

2- نرفق الوضعية السابقة بقاعدة اللعبة: لكل كرة حمراء مسحوبة نربح 100 دج و الخضراء 200 دج اما البيضاء فنخسر 200 دج و ليكن المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة ممكنة الربح (أو الخسارة) المحصل عليها.

- عين مجموعة القيم X ثم اعط قانون احتماله، ثم احسب $E(X)$. ماذا تستنتج بالنسبة للعبة؟

<u>التمرين الرابع (6 نقطة) :</u>

I. f الدالة المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}+1-x$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة 2 Cm)

1- أ- احسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب- احسب $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

2- أ- بين أنه من أجل كل $]0,+\infty[$: $x\in$: $f'(x)=\frac{-\left[2\left(x\sqrt{x}-1\right)+\ln x\right]}{2x\sqrt{x}}$.

ب- احسب $f'(1)$ ثم عين إشارة $(x)'$ على المجالين $]0,1[$ و $]1,+\infty[$

جـ- استنتج اتجاه تغير الدالة fعلى $]0,+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

د- انشئ (C_f)

3- نسمي $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى(C_f) و المستقيمات التي معادلاتها$y=0$ ،$x=1$ و $x=\alpha$ حيث$0<\alpha<1$:

أ- عبر عن $A(\alpha)$ بدلالة α باستعمال التكامل بالتجزئة.

ب- احسب $\lim\limits_{\alpha\to 0} A(\alpha)$ ثم اعط تفسيرا لهذه النتيجة.

II. (U_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_0\in[1,2]$ و $U_{n+1}=\frac{\ln U_n}{\sqrt{U_n}}+1$.

1- أ- بين أنه من أجل $[1;2]$ $x\in$: $0\le\frac{1}{\sqrt{x}}\le 1$

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1<U_n<2$

2- ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) (لاحظ أن : $U_{n+1}=f(U_n)+U_n$)

3- أ- استنتج أن المتتالية (U_n)متقاربة.

ب- احسب $\lim_{n\to+\infty} U_n$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (03,50نقاط)

1. عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 324 و 405 .
2. نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول (x,y) التالية : $(*).....324x-405y=\alpha$ حيث : α

أ- عين شرط على α حتى تقبل المعادلة $(*)$ حلولا في المجموعة z^2

ب- نفرض أن : $\alpha=-81$ ، حل في المجموعة z^2 المعادلة $(*)$ علما أن (x_0,y_0) حلا لها ويحقق : $x_0-y_0=0$

ج- عين كل الثنائيات (x,y) حلول المعادلة $(*)$ بحيث يكون : $\frac{8x+24}{y+1}$ عددا صحيحا .

د- ليكن m عددا طبيعيا يكتب $\overline{\alpha 6}$ في النظام ذو الأساس 9 ويكتب $\overline{\beta 1\beta\alpha}$ في النظام ذو الأساس 2 .

- عين العدد الطبيعي m .

التمرين الثاني: (04نقاط)

A و B نقطتان من المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ لاحقتاهما على الترتيب: $z_A=\sqrt{3}+i$ و $z_B=\sqrt{3}-i$.

1. أكتب العددين z_A و z_B على الشكل الأسي، ثم أنشئ النقطتين A و B .
2. أ/ عين z_C لاحقة النقطة C صورة A بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

ب/ أكتب z_C على الشكل الجبري، ثم أنشئ النقطة C في المعلم السابق.

3. عين z_D لاحقة النقطة D صورة B بالتحاكي الذي مركزه O و نسبته $\frac{-3}{2}$، ثم أنشئ النقطة D في المعلم السابق.
4. لتكن z_Ω لاحقة النقطة Ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث OCD و نصف قطرها R ،

أ / باستعمال الخاصية: $z\bar{z}=|z|^2$ تحقق من صحة العبارات الاتية: $(z_\Omega-2i)(\overline{z_\Omega}+2i)=R^2$

$$\left(z_\Omega+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(\overline{z_\Omega}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)=R^2$$. **و أن:** $z_\Omega\overline{z_\Omega}=R^2$.

ب/ استنتج أن: $z_\Omega-\overline{z_\Omega}=2i$ و $z_\Omega+\overline{z_\Omega}=\frac{-4\sqrt{3}}{3}$.

ج/ استنتج z_Ω و قيمة R .

التمرين الثالث: (03,50نقاط)

ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم . نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f_n(x)=x^3+nx-n$

1. بين أن الدالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

2. بين أن المعا دلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيداً α_n من المجال $]0;1[$، ثم تحقق من أن : $\alpha_n=\frac{n}{n+{\alpha_n}^2}$

3. أ)بين أنّ $f_{n+1}(\alpha_n)=\alpha_n-1$. استنتج إشارة $f_{n+1}(\alpha_n)$

ب)استنتج أن المتتالية (α_n) متزايدة ثم أنها متقاربة

4. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $f_n(\alpha_n)>\frac{n+1}{n}$. استنتج نهاية α_n

التمرين الرابع: (03نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ النقط $A(1,0,1)$، $B(0,0,2)$ ، $C(0,-1,1)$ و المستقيم (D) المار من النقطة C و الشعاع $\vec{u}=-\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+\vec{k}$ شعاع توجيه له

1. بين أن مجموعة النقط M من الفضاء بحيث يكون : $MA=MB=MC$ هي المستقيم (Δ) المار من النقطة $G(0,0,1)$ و الشعاع $\vec{v}=\vec{\imath}-\vec{\jmath}+\vec{k}$ شعاع توجيه له

2. أ)اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) العمودي على المستقيم (D) في النقطة C

ب)حدد تقاطع المستوي (P) و المستقيم (Δ)

ج)استنتج معادلة ديكارتية لسطح الكرة الذي يشمل النقطتين A و B و يمس المستقيم (D) في النقطة C

التمرين الخامس (06نقاط)

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_n(x)=\frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}$

و ليكن (C_n) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

الجزء الأول:

دراسة الدالة f_1 المعرفة على R بـ: $f_1(x)=\frac{4e^x}{e^x+7}$

1- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f_1(x)=\frac{4}{1+7e^{-x}}$

2- عين نهايتي f_1 عند ∞- و عند ∞+.

3- بين أن (C_1) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

4- أدرس اتجاه تغير الدالة f_1 ثم أعط جدول تغيراتها.

5- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $0<f_1(x)<4$.

6- بين أن النقطة $I_1(\ln 7\ ,\ 2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_1).

7- عين معادلة للمماس (T_1) للمنحنى (C_1) عند النقطة $I_1(\ln 7,2)$

8- أرسم (T_1) و (C_1).

9- عين دالة أصلية للدالة f_1 على $\mathbb{R}$.

10- عين القيمة المتوسطة للدالة f_1 على المجال $[0,\ln 7]$

الجزء الثاني:

I. دراسة بعض الخواص للدالة f_n.

1- بين أن جميع المنحنيات (C_n) لها نقطة مشتركة A يطلب تعيين إحداثييها.

2- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم المنحني (C_n) يقطع المستقيم الذي معادلته $y = 2$ في نقطة وحيدة I_n يطلب تعيين إحداثييها.

3- عين معادلة للماس (T_n) للمنحنى (C_n) عند النقطة I_n.

4- اعط جدول تغيرات f_n.

5- أرسم (C_2) و (C_3).

II. نـعتبر من أجل كل عدد طبيعي n غير معـدوم نعتبـر بـ: $I_n = \frac{n}{l} \int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)dx$

بين أن I_n عدد ثابت.

التصحيح النموذجي لموضوع امتحان البكالوريا التجريبي

اختبار مادة: الرياضيات الشعبة :رياضيات المدة: 04ساعات و نصف

عناصر الإجابة	العلامة مجزئة	العلامة المجموع
التمرين الأول:		
نستعمل البرهان بالخلف	**0.5**	**5.5**
$z^3-4z^2+6z-4=(z-2)(z^2-2z+2)$ حلول المعادلة هي : $z=2$ و $z_1=1-i$ و $z_2=1+i$	**0.50** **0.75**	
$\frac{c-a}{b-a}=-i$ - الإنشاء - زاوية الدوران هي $\frac{\pi}{2}$ - $D(3;1)$	**0.5+0.5** **0.25+0.25**	
(c') مركزها $\omega(2;1)$ ونصف قطرها 1 $z=1+e^{i\theta}$ و $z'=-i(e^{i\theta}-1)+2$ حساب $\frac{z'-c}{z-c}=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$ + الإستنتاج	**0.5** **0.25** **0.75+0.5**	
التمرين الثاني:		
1- أ- $E(0;-2;0)$ ب- $\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=3\|\overrightarrow{MO}\|$ و تكافئ $ME=MO$، $(P):y=-1$	**0.5** **0.5** **0.5**	**5**
2- أ- $d(I;(P))=\frac{1}{2}$ وبما أن $r=IA>d(I;(P))$ فإن (P) يقطع (S) من (C) ب- (C)هي مجموعة النقط M من الفضاء التي احداثياتها تحقق الجملة و نحل الجملة نجد معادلة (C)في (P) $\begin{cases}(x+\frac{1}{3})^2+(y+\frac{3}{2})^2+(z+1)^2=\frac{49}{4}\\ y=-1\end{cases}$ $(x+\frac{1}{3})^2+(z+1)^2=12$-تكافئ$\Omega M^2=12$ $\Omega(-\frac{1}{3};0;-1)$ و منه (C) هي دائرة مركزها Ω و نصف قطرها$R=2\sqrt{3}$	**0,5** **0,25+0, 25** **0,25** **0,25+0,25** **0,5**	
3- أ- $(ID):\begin{cases}x=-\frac{1}{3}\\ y=-\frac{3}{2}+t\\ z=-1+4\sqrt{3}t\end{cases}$ ب- $F\in(ID)$ معناه $F(-\frac{1}{3};-\frac{3}{2}+t;-1+4\sqrt{3}t)$ بتعويض احداثيات F في معادلة (C) نجد $t=-\frac{1}{2}$ أو $t=\frac{1}{2}$ من أجل $t=-\frac{1}{2}$ نجد$E_1(-\frac{1}{3};-2;-1+2\sqrt{3})\notin(P)$ من أجل $t=\frac{1}{2}$ نجد$E_2(-\frac{1}{3};-1;-1+2\sqrt{3})\in(P)$ إذن (ID) يقطع (C)في النقطة الوحيدة $F(-\frac{1}{3};-1;-1+2\sqrt{3})$	**0,5** **0,5** **0,25**	

التمرين الثالث:

1- عدد الحالات الممكنة هو $12 +$ الشجرة	**1**	**3.5**
$X \in \{0; -100; 300; 200\}$ -2	**0.5**	

$X = x_i$	0	-100	300	200
$P_i = P(X = x_i)$	$\frac{2}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$

1

ب- $E(X) = 100$ **0.75**

- تستنتج أن اللعبة مربحة لأن $E(X) > 0$ **0.25**

التمرين الرابع:

I		**6**
1- أ- $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$ ، (C_f) يقبل حامل محور التراتيب كمستقيم مقارب	**0.5**	
ب- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$		
2- أ-لنبين أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$، $f'(x) = \frac{-[2(x\sqrt{x}-1)+\ln x]}{2x\sqrt{x}}$	**0,5**	
	0,25	
ب- $f'(1) = 0$	**0,25**	
$f'(x) > 0$ على المجال $]0; 1[$ و $f'(x) < 0$ على المجال $]1; +\infty[$	**0,25**	
جـ- f متزايدة تماما على $]0; 1[$ و متناقصة تماما على $]1; +\infty[$	**0,25**	
جدول التغيرات.	**0,25**	
د- إنشاء (C_f)		
3- أ-	**0,5**	
$A(\alpha) = -\int_{\alpha}^{1} f(x)dx = \left(\alpha - \frac{\alpha^2}{2} - 4\sqrt{\alpha} + 2\sqrt{\alpha}\ln\alpha + \frac{7}{2}\right) \times 4Cm^2$	**0 ,25**	
$= \left(4\alpha - 2\alpha^2 - 16\sqrt{\alpha} + 8\sqrt{\alpha}\ln\alpha + 14\right)Cm^2$		
ب- $\lim_{\alpha \to 0} A(\alpha) = 14$ لأن بوضع $\alpha = \beta^2$ نجد		
$\lim_{\alpha \to 0} \sqrt{\alpha}\ln\alpha = \lim_{\beta \to 0}(2\beta\ln\beta) = 0$	**0,25**	
$14Cm^2$ هي مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين ذي المعادلتين $x = 0$ و $x = 1$		
II	**0,5**	
1-أ- $\sqrt{2} \le \sqrt{x} \le 1$ و منه $1 \le \frac{1}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ ... ... (1)		
كذلك $0 \le \ln x \le \ln 2$ ... ... (2)	**0,5**	
من (1) و (2) نجد $0 \le \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \le \ln 2$ ومنه $0 \le \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \le 1$		
ب- البرهان بالتراجع	**0,5**	
2- المتتالية (U_n) متناقصة.	**0,25**	
3- أ- بما أن (U_n) متناقصة و محدودة من الأسفل بـ 1 فهي متقاربة	**0,25**	
ب- l هي حل للمعادلة $l = f(l) + l$ مع $0 < l < 1$	**0,25**	

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية عين الدفلى **السنة الدراسية 2015 /2016**

ثانوية محمد عبده -مليانة-

الإجابة النموذجية وسلم التنقيط لامتحان البكالوريا البيضاء 2016 **شعبة "رياضيات"**

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
القسمة في Z	1/ $PGCD(405,324)=81$ ..... 2/ أ/ α مضاعف لـ : 81 ..... ب/ $y=4k+1$ ، $x=5k+1$ ، $k\in\square$ ..... ج/ $k\in\{-2,-1,0,1\}$ ..... $(x,y)\in\{(-9,-7),(-4,-3),(1,1),(6,5)\}$ ..... د/ $\beta=1$ ، $\alpha=1$ ، $m=15$	0.5 0.25 0.5 0.25×4 0.25×4 0.75	4ن
الأعداد المركبة	1- $Z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ و $Z_B=\overline{Z_A}=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ الإنشاء + A و B 2- - الإنشاء + $Z_C=2i$ 3- $Z_D=-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$ الإنشاء + $\overrightarrow{ED}$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$ ..... 4- التحقق من صحة العبارات التالية: • $(Z_\Omega-2i)(\overline{Z_\Omega}+2i)=R^2$ ... (1) يعني $\Omega C=R$ محققة. • $\left(Z_\Omega+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(\overline{Z_\Omega}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)=R^2$ ... (2) يعني $\Omega D=R$ محققة. • $Z_\Omega\overline{Z_\Omega}=R^2$ ... (3) يعني $O\Omega=R$ محققة. ب- استنتاج أن: $Z_\Omega-\overline{Z_\Omega}=2i$ نحصل عليها بنشر المعادلة (1)واستعمال المعادلة (3) $Z_\Omega.\overline{Z_\Omega}=R^2$ نحصل عليها بنشر المعادلة (2) و استعمال المعادلة (3) جـ- استنتاج Z_Ω و قيمة R : $Re(Z_\Omega)=\frac{Z_\Omega+\overline{Z_\Omega}}{2}$ و $Im(Z_\Omega)=(\frac{Z_\Omega+\overline{Z_\Omega}}{2})$ $Z_\Omega=-\frac{2\sqrt{3}}{3}+i$ $R=\lvert Z_\Omega\rvert=\sqrt{\frac{7}{3}}$	0,75 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,5 0,5 0,25 0,5 0,25	4ن

التمرين الثالث:

1 - $f_n'(x) = 3x^2 + n > 0$ ومنه الدالة f_n متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2- نستعمل مبرهنة القيم المتوسطة

-التحقق أن $\alpha_n = \frac{n}{n+\alpha_n^2}$ (نستعمل $f_n(\alpha_n) = 0$)

3- أ- لنبين أن: $f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n - 1$ (نستعمل $f_n(\alpha_n) = 0$)

- استنتاج إشارة $f_{n+1}(\alpha_n)$: باستعمال الحصر $0 < \alpha_n < 1$ نجد — 0,5

$f_{n+1}(\alpha_n) < 0$ — 0,5

ب- لدينا $f_n(\alpha_n) < 0$ و $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$

ومنه $f_{n+1}(\alpha_n) < f_{n+1}(\alpha_n)$ وبما أن الدالة f_n متزايدة تماما، فإن : — 0,25

$\alpha_n < \alpha_{n+1}$ و منه المتتالية (α_n) متزايدة. — 0,5

و بما أنها محدودة من الأعلى بـ 1 فهي متقاربة. — 0,25

4- لدينا $0 < \alpha_n < 1$ و بالحصر نجد $\frac{n}{n+1} < \alpha_n < 1$ و بالمرور إلى النهاية و — 0,25

حسب مبرهنة الحصر نجد $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$

3 ن

التمرين الرابع:

1- $\begin{cases} MA = MB \\ MA = MC \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} -x + z - 1 = 0 & (1) \\ x + y = 0 & (2) \end{cases}$ — 0,25

التمثيل الديكارتي للمستقيم (Δ) — 0,5

المعادلتين (1) و (2) لمستويين (P_1) و (P_2)

حيث $\overrightarrow{n_1}(-1;0;1)$ و $\overrightarrow{n_2}(1;1;0)$ — 0,25

و بما أن إحداثيات G تحقق المعادلتين (1) و (2) معا فإن $G \in (\Delta)$

و بما أن: $\overrightarrow{n_1}.\vec{v} = 0$ و $\overrightarrow{n_2}.\vec{v} = 0$ فإن $\vec{v}$ شعاع توجيه لـ (Δ) — 0,25

و منه مجموعة النقط هي (Δ)

2- أ- (P) يشمل C و $\vec{u}(-1;2;1)$ شعاع ناظمي له. — 0,25

$(P): -x + 2y + z + d = 0$ و $C \in (P)$ معناه $d = 1$ و منه

$(P): -x + 2y + z + 1 = 0$. — 0,5

ب- بما أن $\vec{u}.\vec{v} \neq 0$ فإن (Δ) يقطع (P) في نقطة — 0,25

$$(\Delta): \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t + 1 \end{cases}$$

بتعويض كل من x و y و z في معادلة (P) نجد $t = 1$

و بالتعويض نجد $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$

ومنه $(P) \cap (\Delta) = \{E(1;-1;2\}$ — 0,25

جـ- بما أن سطح الكرة يشمل B ، A و C فإن المركز Ω ينتمي إلى (Δ) و بما أن (Δ) — 0,25

مماس لسطح الكرة في C و (P) عمودي على (Δ) في C فإن $\Omega \in (P)$ و منه Ω هي

E و نصف القطر $R = CE$ ، $R = \sqrt{2}$ — 0,25

$(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 2$ — 0,25

التمرين الخامس:

الجزء الأول:

-1 $f_1 = \frac{4}{1+7e^{-x}}$

-2 $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 4$ و $\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = 0$

-3 $y = 0$ ، $y = 4$

-4 $f_1'(x) = \frac{28e^x}{(e^x+7)^2}$ ، $f_1'(x) > 0$ ، f_1 متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f_1'(x)$	$+$
$f_1(x)$	0 ⟶ 4

-5 $0 < f_1(x) < 4$ (من جدول التغيرات)

-6 $f_1(2\ln 7 - x) + f_1(x) = 4$

-7 $(T_1): y = x + 2 - \ln 7$

-8 رسم (T_1) و (C_1)

-9 $C \in \mathbb{R}$ مع $F_1(x) = 4\ln(e^x + 7) + C$

-10 القيمة المتوسطة لـ M_1

$$M = \frac{4\ln 2}{\ln 7}$$

الجزء الثاني:

-1 $(C_n) \cap (C_m) = \left\{A(0;\frac{1}{2})\right\}$

-2 $I_n = (\frac{\ln 7}{n}; 2)$

-3 $(T_n): y = nx + 2 - \ln 7$

-4 جدول تغيرات f_n

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f_n'(x)$	$+$
$f_n(x)$	0 ⟶ 4

-5 رسم (C_2) ، (C_3)

-6 $U_n = \frac{4\ln 2}{7}$ عدد ثابت

7ن

0,25

0,25 × 2

0,25 × 2

0,5

0,5

0,5

0,5

0,25

0,5 + 0,25

0,25

0,25

	0,5 **0,25** **0,25** **0,5** **0 ,25×2** **0,5**		

امتحان تجريبي في الرياضيات شعبة الرياضيات وتقني رياضي الأستاذ ساعد

المدة : 4 ساعات ونصف التاريخ : 6ماي 2016

اختر أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

N عدد طبيعي غير معدوم يكتب $\overline{abcca}^{5}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5 ويكتب $\overline{bbab}^{8}$ في نظام التعداد ذي الأساس 8.

1) بين أن N يحقق : $309a+15c=226b$.

2) بين أن العدد 3 قاسم للعدد b.

3) فيما يلي نفرض أن : $b=3$.

أ) بين أن، $309(a-2)=60-15c$.

ب) استنتج أن العدد 5 قاسم للعدد $(a-2)$ ثم استنتج كلا من a و c .

ج) أكتب العدد N في نظام التعداد ذي الأساس 10.

التمرين الثاني :(04 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط B,A و I التي لواحقها على الترتيب ، $z_A=-2$ ، $z_B=-1+i$ و $z_I=i$.

من أجل كل عدد مركب z حيث $z\neq -2$ نضع : $z'=\dfrac{iz+i+1}{z+2}$

حيث M صورة العدد المركب z و M' صورة العدد z' .

1- أ) تحقق من أن : $z'=\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}$.

ب) بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ فان النقطة M' تنتمي إلى دائرة $(\mathscr{C})$ يطلب تعيين عناصرها .

ج) عين طبيعة (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي بحيث يكون z' تخيلا صرفا.

2- أ) تحقق من أن : $z'-i=\dfrac{1-i}{z+2}$.

ب) استنتج أن : $AM \times IM' = \sqrt{2}$ وان $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{IM'}\right) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

ج) بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1 فان النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها .

3- لتكن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

أ) بين أن النقطة E تنتمي إلى (Γ) ثم بين أن $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AE}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

ب) باستعمال نتائج السؤال 2) أنشئ النقطة E' المرفقة بالنقطة E .

التمرين الثالث (05 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $u_0 = \frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}$$

1- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$.

2- أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < \frac{1}{2}$

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ ثم بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة

ج) هل $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ؟ عين نهايتها .

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$

أ) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q = 6$.

ج) أحسب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أن $u_n = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \ln\left(e^x + 1\right)$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ وفسر النتيجة هندسيا ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x)=\dfrac{-e^{2x}}{(e^x+1)^2}$. ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}-\ln(1+e^{-x})-x$.

4) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

5) أرسم (Δ) و (C_g).

6) استنتج اشارة $g(x)$ عندما يتغير x في المجموعة $\mathbb{R}$.

II. f الدالة العددية المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{-x}\ln(e^x+1)$

1) برهن أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

3) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x $\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{1}{e^x+1}$ ثم أحسب :

$\int_{-\ln 3}^{0}\dfrac{1}{e^x+1}dx$.

4) أحسب $\int_{-\ln 3}^{0} f(x)\,dx$

سلطان
سلطان
سلطان
سلطان
سلطان
سلطان
سلطان

الموضوع الثاني

سلطان

التمرين الأول (04 نقاط)

r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي حيث $\theta \in [0;\pi]$.

نعتبر الأعداد المركبة : $z_0 = r(-\cos\theta + i\sin\theta)$ ، $z_1 = r^2(\sin\theta + i\cos\theta)$ و $z_2 = \sqrt{3}(1+i)$.

1) أكتب كلا من الأعداد z_1, z_0 و z_2 على الشكل المثلثي.

2) أ) عين العددين الحقيقيين r و θ بحيث يكون : $z_1 = \overline{z_0}$.

ب) عيّن عندئذ قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n$ حقيقيا.

3) نفرض $r = 1$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$.

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط B, A و C التي لواحقها : z_1, z_0 و z_2 على الترتيب.

أ) عين z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;2),(B;2),(C,-1)\}$.

ب) عيّن طبيعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث ،

$$\left\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = 3$$

التمرين الثاني :(04 نقاط)

☜ نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E): 5x - 6y = 3$

1. أ) أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3.

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

ج) استنتج حلول الجملة (S) : $\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$

2. a و b عددان طبيعيان حيث :

$a = \overline{1\alpha 0\alpha 00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b = \overline{\alpha\beta 0\alpha}$ في النظام ذو الأساس 5.

- عين α و β حتى تكون الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة (E) .

التمرين الثالث (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط $A(3;-2;2)$, $B(6;1;5)$ و $C(6;-2;-1)$ و المستوي $(P): x+y+z-3=0$

1) برهن أن المثلث ABC قائم .

2) برهن أن المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A .

3) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P') المستوي العمودي على (AC) و المار من النقطة A .

4) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع كلا من المستويين (P) و (P').

5) أ) نعتبر النقطة $D(0;4;-1)$. بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC).

ب) أحسب حجم رباعي الوجوه ABCD .

ج) بين أن قيس الزاوية BDC هو $\frac{\pi}{4}$ rad .

د) أحسب مساحة المثلث BDC ثم استنتج المسافة بين النقطة A و المستوي (BDC)

التمرين الرابع :(08 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=x-(x^2+1)e^{-x+1}$$

نسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وبيّن أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=1+(x-1)^2e^{-x+1}$

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

2- بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

3- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $1.8<\alpha<1.9$.

4- أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

5- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f''(x)=-(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .

6- أحسب $f(0), f(3)$ ثم أرسم (Δ)، (T) و (C_f).

7- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $(E): f(x)=x+m$

II. نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx$.

1- أ) بيّن أن الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x)=-(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x+1}$.

ب) أحسب I_1.

2- أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$ لكل عدد طبيعي غير معدوم n.

ب) أحسب I_2.

3- أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما : $x=0$ و $x=1$.

تمنياتي لكم جميعا بالتوفيق

والنجاح في البكالوريا

تصحيح الإمتحان التجريبي ماي 2016 شعبة : رياضيات
الموضوع الاول

التمرين الاول (04 نقاط)

لدينا : $N=\overline{abcca}^{5}$ و $N=\overline{bbab}^{8}$

1) تبيان أنّ N يحقق : $309a+15c=226b$

- لدينا : $N=a\times5^4+b\times5^3+c\times5^2+c\times5+a\times5^0=625a+125b+25c+5c+a$ أي $N=626a+125b+30c$
- ولدينا : $N=b\times8^3+b\times8^2+a\times8+b\times8^0=512b+64b+8a+b$ أي $N=577b+8a$
- **إذن :** $626a+125b+30c=577b+8a$

اي $618a+30c=452b$ ومنه $309a+15c=226b$ 01

2) تبيان أن العدد 3 قاسم للعدد b :

- لدينا : $3(103a+5c)=226b$

لدينا : $3/226b$ و $3\wedge226=1$ ومنه $3/b$ حسب مبرهنة غوص 0.25

3) نفرض $b=3$.

أ) تبيان أن : $309(a-2)=60-15c$

- لدينا : $3(103a+5c)=226b$ ومنه $309a+15c=678$
- ولدينا : $309a-618=60-15c$

ومنه $309(a-2)=60-15c$ 0.75

ب) استنتاج أن العدد 5 يقسم العدد $a-2$:

- لدينا : $309(a-2)=5(12-3c)$

$5/309(a-2)$ و $5\wedge309=1$ ومنه $5/(a-2)$ حسب مبرهنة غوص .

- **استنتاج قيمة a :**

بما أن $5/(a-2)$ فان : $a-2=5k(k\in\mathbb{N})$

ولدينا : $a<5$ أي أنّ : $a=2$ 0.75

- **استنتاج قيمة العدد c :**

لدينا : $309\times2+15c=678$ ومنه $15c=678-618$ أي $c=4$ 0.75

ج) كتابة العدد N في نظام التعداد 10 :

$N=577(3)+8(2)=1747$ 0.5

التمرين الثاني : (04 نقاط)

- لدينا : $z'=\dfrac{iz+i+1}{z+2}$ من أجل $z\neq-2$

1- أ) التحقق من أنّ : $z'=\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}$

لدينا : $\dfrac{iz+i+1}{z+2}=\dfrac{i\left(z+\frac{i}{i}+\frac{1}{i}\right)}{z+2}=\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}$ أي $z'=\dfrac{iz+i+1}{z+2}$

$z' = \dfrac{i(z+1-i)}{z+2}$ 0.25

ب) تبيان أنه إذا كانت M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ فان M' تنتمي الى دائرة $(\mathcal{C})$:

- لدينا : M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ معناه $AM = BM$
- ولدينا : $|z'| = \left|\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}\right| = \dfrac{|i| \times |z+1-i|}{|z+2|}$ أي $OM' = \dfrac{BM}{AM} = 1$

إذن $OM' = 1$ ومنه M' تنتمي إلى دائرة $(\mathcal{C})$ مركزها $O(0;0)$ ونصف قطرها $R = 1$ 0.5

ج) تعيين طبيعة المجموعة (E) بحيث يكون z' تخيليا صرفا :

- z' تخيلي صرف معناه $Arg(z') = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

- ومنه $Arg\left(\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ أي $Arg(i) + Arg\left(\dfrac{z+1-i}{z+2}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

معناه : $\dfrac{\pi}{2} + Arg\left(\dfrac{z+1-i}{z+2}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ومنه $Arg\left(\dfrac{z+1-i}{z+2}\right) = k\pi$

أي $\left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}\right) = k\pi$

- المجموعة (E) هي المستقيم (AB) ماعدا النقطتين A و B.

$(E) = (AB) - \{A,B\}$ 0.5

2- أ) التحقق من أنَ : $z' - i = \dfrac{1-i}{z+2}$

لدينا : $z' - i = \dfrac{iz+i+1}{z+2} - i = \dfrac{iz+i+1-iz-2i}{z+2} = \dfrac{1-i}{z+2}$ أي $z' - i = \dfrac{1-i}{z+2}$ 0.25

ب) استنتاج أنَ : $IM' \times AM = \sqrt{2}$:

- لدينا : $z' - i = \dfrac{1-i}{z+2}$ ومنه $|z'-i| = \left|\dfrac{1-i}{z+2}\right|$ أي $|z'-i| = \dfrac{|1-i|}{|z+2|}$

وبالتالي : $IM' = \dfrac{\sqrt{2}}{AM}$ ومنه $IM' \times AM = \sqrt{2}$ 0.25

- **استنتاج أنَ : $\left(\vec{u}, \overrightarrow{IM'}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right) = -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$**

لدينا : $z' - i = \dfrac{1-i}{z+2}$ ومنه $Arg(z'-i) = Arg\left(\dfrac{1-i}{z+2}\right)$

أي $Arg(z'-i) = Arg(1-i) - Arg(z+2)$ ومنه $Arg(z'-i) + Arg(z+2) = -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

اي $\left(\vec{u},\overrightarrow{IM'}\right)+\left(\vec{u},\overrightarrow{AM}\right)=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ 0.5

ج) تبيان أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1 فان النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها :

- لدينا : M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1 معناه $AM=1$
- ولدينا : $IM'\times AM=\sqrt{2}$

أي $IM'=\sqrt{2}$ ومنه M' تنتمي إلى دائرة مركزها I ونصف قطرها $R=\sqrt{2}$ 0.5

3- لدينا : $z_E=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

أ) تبيان أن النقطة E تنتمي إلى المجموعة (Γ) :

لدينا : $AE=|z_E-z_A|=\left|-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+2\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$

ومنه $E\in(\Gamma)$ 0.25

- **تبيان أن :** $\left(\vec{u},\overrightarrow{AE}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ **:**

لدينا : $z_{\overrightarrow{AE}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ وبالتالي : $\left(\vec{u},\overrightarrow{AE}\right)=arg\left(z_{\overrightarrow{AE}}\right)=Arg\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

أي $\left(\vec{u},\overrightarrow{AE}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ 0.5

أ) انشاء النقطة E' المرفقة بالنقطة E :

لدينا : $EE'=\sqrt{2}$ ولدينا : $\left(\vec{u},\overrightarrow{IE'}\right)+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ أي $\left(\vec{u},\overrightarrow{IE'}\right)=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

ومنه $\left(\vec{u},\overrightarrow{IE'}\right)=-\frac{7\pi}{12}[2\pi]$

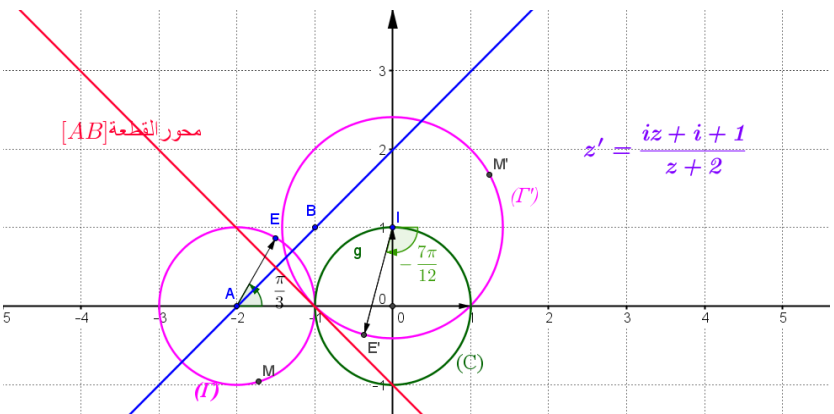
أ) انشاء النقطة E' المرفقة بالنقطة E :

لدينا : $IE'=\sqrt{2}$ ومنه E' تنتمي إلى الدائرة (Γ') ذات المركز $I(i)$ ونصف القطر $\sqrt{2}$

حيث : $\left(\vec{u},\overrightarrow{IE'}\right)+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ أي $\left(\vec{u},\overrightarrow{IE'}\right)=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ ومنه

$\left(\vec{u},\overrightarrow{IE'}\right)=-\frac{7\pi}{12}[2\pi]$

الرسم :



0.5 .....

التمرين الثالث : (05 نقاط)

- لدينا : $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$

1) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$

لدينا : $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}=\frac{2u_n+1-1}{2u_n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$

ومنه : $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$ 0.25

2) أ) البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<\frac{1}{2}$

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية.

1- من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=\frac{1}{5}$ و $0<\frac{1}{5}<\frac{1}{2}$ أي $0<u_0<\frac{1}{2}$

اذن $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$.

2- نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أنَ : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أنَ :

$0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$.

- لدينا : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ومنه $0<2u_n<1$ أي $1<2u_n+1<2$

وبالتالي $\frac{1}{2}<\frac{1}{2u_n+1}<1$ إذن $-1<-\frac{1}{2u_n+1}<-\frac{1}{2}$

وأخيرا : $0<1-\frac{1}{2u_n+1}<\frac{1}{2}$ أي $0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة .

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فان $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n 0.75

ب) التحقق انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$

- لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n}{2u_n+1}-u_n=\frac{2u_n-2u_n^2-u_n}{2u_n+1}=\frac{u_n-2u_n^2}{2u_n+1}=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ 0.25

- **تبيان أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة :**

ندرس اشارة الفرق : $u_{n+1}-u_n$

- لدينا : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$

ولدينا : $0<u_n<\dfrac{1}{2}$ ومنه $-1<-2u_n<0$ أي $0<1-2u_n<1$

وبالتالي : $0<u_n(1-2u_n)<\dfrac{1}{2}$

- ولدينا : $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2u_n+1}<1$ ومنه $0<\dfrac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}<\dfrac{1}{2}$

أي $u_{n+1}-u_n>0$ وبالتالي المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة.....0.5

ج) دراسة تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\dfrac{1}{2}$ فهي متقاربة وتتقارب من العدد $\dfrac{1}{2}$.....0.25

تعيين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\dfrac{1}{2}$.....0.25

3) لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\dfrac{3^n u_n}{2u_n-1}$

أ) اثبات أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية :

- لدينا : $v_{n+1}=\dfrac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}$

أي $v_{n+1}=\dfrac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}=\dfrac{3\times3^n\times\dfrac{2u_n}{2u_n+1}}{2\times\dfrac{2u_n}{2u_n+1}-1}=\dfrac{\dfrac{6\times3^n\times u_n}{2u_n+1}}{\dfrac{4u_n-2u_n-1}{2u_n+1}}$

$v_{n+1}=6\times\dfrac{3^n\times u_n}{2u_n+1}\times\dfrac{2u_n+1}{2u_n-1}=6\times\dfrac{3^n\times u_n}{2u_n-1}=6v_n$.....0.5

ومنه المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية

أساسها $q=6$ وحدها الأول $v_0=\dfrac{3^0\times u_0}{2u_0-1}=\dfrac{1\times\frac{1}{5}}{2\times\frac{1}{5}-1}=\dfrac{\frac{1}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\dfrac{1}{3}$.....0.25

ب) حساب عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

- لدينا : $v_n=v_0\times q^n=-\dfrac{1}{3}\times6^n$.....0.5

- **استنتاج أنّ :** $u_n=\dfrac{2^n}{3+2^{n+1}}$

- لدينا : $v_n=\dfrac{3^n u_n}{2u_n-1}$ ومنه $2u_nv_n-v_n=3^nu_n$ أي $2u_nv_n-3^nu_n=v_n$

- ومنه $\left(2v_n-3^n\right)u_n=v_n$ وبالتالي : $u_n=\dfrac{v_n}{2v_n-3^n}$

إذن : $u_n=\dfrac{-\frac{1}{3}\times 6^n}{2\left(-\frac{1}{3}\times 6^n\right)-3^n}=-\dfrac{6^n}{-2\times 6^n-3\times 3^n}$ ومنه

0.75 ..... $u_n=\dfrac{2^n}{2^{n+1}+3}=\dfrac{2^n}{3+2^{n+1}}$ أي $u_n==-\dfrac{6^n}{-2\times 6^n-3\times 3^n}=\dfrac{2^n\times 3^n}{2\times 3^n\times 2^n+3\times 3^n}$

- **حساب** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

0.5 ..... $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\dfrac{2^n}{2^{n+1}+3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n}{2^n\left(2+\frac{3}{2^n}\right)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\dfrac{1}{2}$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. لدينا : $g(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}-ln\left(e^x+1\right)$

1) حساب النهايات :

- **حساب** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$:

0.25 ..... $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}ln\left(e^x+1\right)=0\end{cases}$ لانَ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}-ln\left(e^x+1\right)\right)=0$

التفسير الهندسي : $y=0$ مستقيم مقارب أفقي للمنحني $\left(C_g\right)$ بجوار $-\infty$ 0.25

- **حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$:

0.25 ..... $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}ln\left(e^x+1\right)=+\infty\end{cases}$ لأنَ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}-ln\left(e^x+1\right)\right)=-\infty$

2) تبيان أنّ $g'(x)=\dfrac{-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}$ **:**

- لدينا : $g'(x)=\dfrac{e^x\left(e^x+1\right)-e^x\times e^x}{\left(e^x+1\right)^2}-\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{e^{2x}+e^x-e^{2x}-e^{2x}-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$

أي $g'(x)=\dfrac{-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}$ 0.5

- **استنتاج اتجاه تغير الدالة** g **:**

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$-e^{2x}$	$-$
$g'(x)$	$-$

إذن الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ 0.25

- **جدول تغيرات الدالة** g **:** 0.5

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	0 ↘ $-\infty$

تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x **:** $g(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}+ln\left(1+e^{-x}\right)-x$

لدينا : $g(x)=\dfrac{e^x}{e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)}-ln\left[e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)\right]$ ومنه : $g(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}-ln\left(e^x\right)-ln\left(1+e^{-x}\right)$

أي $g(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}+ln\left(1+e^{-x}\right)-x$ 0.5

4) أ) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]$ **:**

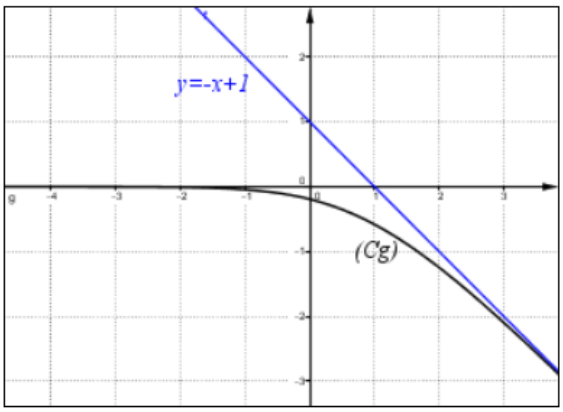
- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{1+e^{-x}}-ln\left(1+e^{-x}\right)-x+x-1\right]$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]=0$ لأنّ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+e^{-x}}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}ln\left(1+e^{-x}\right)=0\end{cases}$ 0.5

تفسير النتيجة بيانيا :

المستقيم ذي المعادلة $y=-x+1$ مقارب مائل للمنحنى $\left(C_g\right)$ عند $-\infty$ 0.25

5) الرسم :



0.75 .....

6) استنتاج اشارة $g(x)$: 0.25 .....

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$

II. لدينا : $f(x)=e^{-x}\ln(1+e^{x})$

1) البرهان أنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

- نضع $e^{x}=t$ وبالتالي عندما $x\to-\infty$ فانّ : $t\to 0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{-x}\ln(1+e^{x})=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(e^{x}+1)}{e^{x}}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{t}=1$$ إذن

أي $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ 0.25

- **حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\ln(1+e^{x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^{x}+1)}{e^{x}}=0$$ 0.25

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$:

- لدينا : $f'(x)=-e^{-x}\times\ln(e^{x}+1)+e^{-x}\times\frac{e^{x}}{e^{x}+1}=e^{-x}\left(\frac{e^{x}}{e^{x}+1}-\ln(e^{x}+1)\right)$

أي $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$ 0.5

- **استنتاج اتجاه تغير الدالة f :**

اشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

.....0.25

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$
$f'(x)$	$-$

- **جدول تغيرات الدالة f :**

0.5 .....

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	1 ↘	0

3) التحقق من أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

- من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{1}{e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)}=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ 0.25

- حساب $\int_{-\ln 3}^{0}\dfrac{1}{e^x+1}dx$:

$$\int_{-\ln 3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx=\int_{-\ln 3}^{0}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=\left[-\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_{-\ln 3}^{0}=-\ln 2+\ln\left(1+e^{\ln 3}\right)$$

$$\int_{-\ln 3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx=-\ln 2+\ln 4=-\ln 2+2\ln 2=\ln 2 \quad \text{أي}$$

$$\int_{-\ln 3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx=\ln 2 \quad \text{إذن} \quad \text{.....} \quad 0.5$$

4) حساب $\int_{-\ln 3}^{0}f(x)dx$ باستعمال المكاملة بالتجزئة :

$$\int_{-\ln 3}^{0}f(x)dx=\int_{-\ln 3}^{0}e^{-x}\ln\left(e^x+1\right)dx$$

نضع : $u'(x)=e^{-x}$ ومنه $u(x)=-e^{-x}$

و $v(x)=\ln\left(e^x+1\right)$ ومنه $v'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$

إذن :

$$\int_{-\ln 3}^{0}f(x)dx=\int_{-\ln 3}^{0}e^{-x}\ln\left(e^x+1\right)dx=\left[-e^{-x}\ln\left(e^x+1\right)\right]_{-\ln 3}^{0}-\int_{-\ln 3}^{0}-e^{-x}\times\frac{e^x}{e^x+1}dx \quad \text{أي}$$

$$\int_{-\ln 3}^{0}f(x)dx=-\ln 2+e^{\ln 3}\ln\left(e^{-\ln 3}+1\right)+\int_{-\ln 3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx$$

$$\int_{-\ln 3}^{0}f(x)dx=-\ln 2+3\ln\left(\frac{1}{3}+1\right)+\ln 2=3\ln\frac{4}{3}$$

$$\int_{-\ln 3}^{0}f(x)dx=3\ln\frac{4}{3} \quad \text{إذن} \quad \text{.....} \quad 0.5$$

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

- لدينا : $z_0 = r\left(-\cos\theta + i\sin\theta\right)$ ، $z_1 = r^2\left(\sin\theta + i\cos\theta\right)$ و $z_2 = \sqrt{3}(1+i)$

حيث $r \in \mathbb{R}^{*+}$ و $\theta \in [0;\pi]$

1) كتابة الأعداد z_1, z_0 و z_2 على الشكل المثلثي :

- لدينا : $z_0 = r\left(\cos(\pi-\theta) + i\sin(\pi-\theta)\right)$

$z_1 = r^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$ ..... 3×0.5

$z_2 = \sqrt{3}\times\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

2) أ) تعيين العددين الحقيقيين r و θ بحيث يكون : $z_1 = \overline{z_0}$

- لدينا : $\overline{z_0} = r\left(\cos(-\pi+\theta) + i\sin(-\pi+\theta)\right)$

- $z_1 = \overline{z_0}$ معناه $r^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right) = r\left(\cos(-\pi+\theta) + i\sin(-\pi+\theta)\right)$

ومنه : $\begin{cases} r^2 = r \\ \frac{\pi}{2} - \theta = -\pi + \theta + 2k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right) \end{cases}$ أي $\begin{cases} r^2 - r = 0 \\ -2\theta = -\frac{\pi}{2} - \pi + 2k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right) \end{cases}$

وبالتالي : $\begin{cases} r = 0 \vee r = 1 \\ -2\theta = -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right) \end{cases}$ إذن $\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{3\pi}{4} - k\pi \left(k \in \{0;1\}\right) \end{cases}$

من أجل $k = 0$ نجد : $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (مقبول لأنّ $\theta \in [0;\pi]$)

من أجل $k = 1$ نجد $\theta = \frac{3\pi}{4} - \pi$ (مرفوض)

$z_1 = \overline{z_0}$ معناه $\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$ 0.75

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n$ حقيقيا :

- لدينا : $\frac{z_0}{z_1}=\frac{1\left(\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}{1^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}$

0.25 ..... $\frac{z_0}{z_1}=\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$

اي $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n=\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}$

- إذن $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n$ حقيقي معناه $\sin\frac{n\pi}{2}=0$ أي $\frac{n\pi}{2}=k\pi$

وبالتالي : $n=2k\left(k\in\mathbb{N}\right)$ 0.25

3) لدينا : $r=1$ و $\theta=\frac{\pi}{3}$

- إذن : $z_0=-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_1=\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

أ) تعيين z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;2),(B;2),(C;-1)\}$

لدينا : $z_G=\frac{2z_A+2z_B-z_C}{2+2-1}=\frac{-1+i\sqrt{3}+\sqrt{3}+i-\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{3}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i$

$z_G=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i$ 0.5

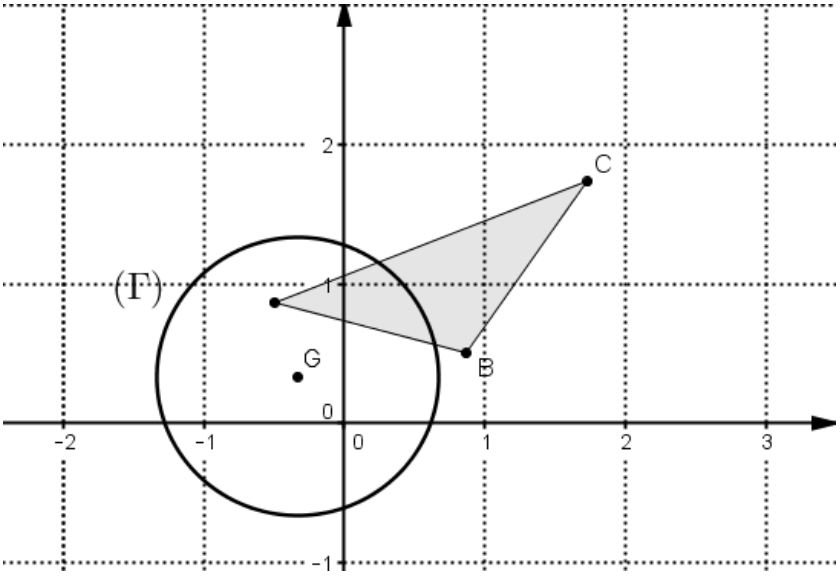
ب) تعيين طبيعة المجموعة (Γ):

- لدينا : $\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=3$ معناه $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=3$

ومنه $3MG=3$ أي $MG=1$

وبالتالي (Γ) هي دائرة مركزها النقطة G ونصف قطرها $R=1$

0.75 .....



التمرين الثاني :(04 نقاط)

لدينا : $(E): 5x-6y=3$

1) أ) اثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3 :

- لدينا : $5x-6y=3$ تكافئ $5x=3+6y$

أي $5x=3(1+2y)$

لدينا : $3/5x$ و $5\wedge 3=1$ فإن $3/x$ حسب مبرهنة غوص

أي أنّ x مضاعف للعدد 3 ..... 0.25

ب) تعيين حل خاص للمعادلة (E) :

نفرض $x=3$ وبالتالي : $y=\dfrac{5\times 3-3}{6}=\dfrac{12}{6}=2$

إذن الثنائية $(3;2)$ حل للمعادلة (E) 0.5

- **حل المعادلة (E) :**

- لدينا : $5x-6y=5\times 3-6\times 2$ يكافئ $5x-5\times 3=6y-6\times 2$

أي $(*): 5(x-3)=6(y-2)$

- لدينا : $6/5(x-3)$ و $5\wedge 6=1$ فإن $6/(x-3)$ حسب مبرهنة غوص .

أي $x-3=6k(k\in\mathbb{Z})$ وبالتالي $x=6k+3(k\in\mathbb{Z})$

- من أجل $x=6k+3$ نعوض في المعادلة $(*)$ نجد : $5(6k+3-3)=6(y-2)$

ومنه $y-2=5k(k\in\mathbb{Z})$ أي $y=5k+2(k\in\mathbb{Z})$

مجموعة حلول المعادلة : $S=\{(6k+3;5k+2),k\in\mathbb{Z}\}$ 0.5

ج) استنتاج حلول الجملة : $(S): \begin{cases} x\equiv -1[6] \\ x\equiv -4[5] \end{cases}$

- $\begin{cases} x\equiv -1[6] \\ x\equiv -4[5] \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x=6m-1 \\ x=5n-4 \end{cases}$

أي $6m-1=5n-4$ ومنه $5n-6m=3$

ومنه : $n=6k+3$ وبالتالي $x=5(6k+3)-4=30k+11(k\in\mathbb{Z})$

$x=30k+11(k\in\mathbb{Z})$ 0.75

2) - لدينا : $a=\overline{1\alpha 0\alpha 00}^{3}$ و $b=\overline{\alpha\beta 0\alpha}^{5}$

- **تعيين $(\alpha;\beta)$ بحيث تكون $(a;b)$ حل للمعادلة (E) :**

- لدينا : $a=1\times 3^5+\alpha\times 3^4+\alpha\times 3^2=243+81\alpha+9\alpha=243+90\alpha$

ولدينا : $b=\alpha\times 5^3+\beta\times 5^2+\alpha\times 5^0=125\alpha+25\beta+\alpha=126\alpha+25\beta$

مع $\alpha \leq 2$ و $\beta \leq 4$ 0.75

- **الثنائية $(a;b)$ حل للمعادلة (E) معناه $5a-6b=3$**

ومنه $5(243+90\alpha)-6(126\alpha+25\beta)=3$

اي $1215+450\alpha-756\alpha-150\beta=3$ ومنه $-306\alpha-150\beta=-1212$

بعد تقسيم الطرفين على العدد -3 نجد :

$102\alpha+50\beta=404$ وبالتالي الثنائية $(\alpha;\beta)=(2;4)$ 0.75

التمرين الثالث : (04 نقاط)

لدينا : $A(3;-2;2)$,$B(6;1;5)$ و $C(6;-2;-1)$ والمستوي $(P): x+y+z-3=0$

1) البرهان على أنَ المثلث ABC قائم :

- لدينا : $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$ ، $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ و $\overrightarrow{BC}(0;-3;-6)$
- ولدينا : $AB=\sqrt{(3)^2+(3)^2+(3)^2}=3\sqrt{3}$ و $AC=\sqrt{(3)^2+(0)^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$

و $BC=\sqrt{(0)^2+(-3)^2+(-6)^2}=3\sqrt{5}$

- إذن لدينا : $BC^2=45$ و $AB^2+AC^2=27+18=45$

ومنه $BC^2=AB^2+AC^2$ أي المثلث ABC قائم في النقطة A 0.5

2) البرهان على أنَ المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A :

- لدينا : $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)
- إذن $\frac{3}{1}=\frac{3}{1}=\frac{3}{1}=3$ ومنه $\overrightarrow{AB}=3\vec{n}$ أي $\overrightarrow{AB}\parallel\vec{n}$ وبالتالي $(AB)\perp(P)$
- نعوض بإحداثيات النقطة A في معادلة (P) نجد : $3-2+2-3=0$ أي $A\in(P)$

وبالتالي : **المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A** 0.5

3) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P') العمودي على المستقيم (AC) والمار من النقطة A :

لدينا : $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي (P') وبالتالي معادلة للمستوي (P') من الشكل :

$3x-3z+d=0$

- تعيين قيمة d نعوض بإحداثيات النقطة A نجد :

$3(3)-3(2)+d=0$ ومنه $d=-3$

وبالتالي معادلة للمستوي (P') : $3x-3z-3=0$ أي $x-z-1=0$ 0.5

4) كتابة تمثيل وسيطي لـ (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (P') :

- لدينا : $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x=z+1 \end{cases}$

وبالتالي $\begin{cases} z+1+y+z-3=0 \\ x=z+1 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} x=z+1 \\ y=-2z+2 \end{cases}$

نضع : $z=t$

وبالتالي تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) : $(\Delta):\begin{cases} x=t+1 \\ y=-2t+2 \\ z=t \end{cases};(t\in\mathbb{R})$ 0.5

5) أ) تبيان أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)

- **لدينا :** $D(0;4;-1)$ **وبالتالي** $\overrightarrow{AD}(-3;6;-3)$ إذن :

- $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=-3(3)+6(3)-3(3)=-18+18=0$ ومنه $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$

- $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=-3(3)+6(0)-3(-3)=-9+9=0$ ومنه $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AC}$

وبالتالي المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC) 0.5

ب) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$:

$$v_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\times AD$$

- لدينا : $S_{ABC}=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{3\sqrt{3}\times 3\sqrt{2}}{2}=\frac{9\sqrt{6}}{2}$

و $AD=\sqrt{(-3)^2+(6)^2+(-3)^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$

أي $v_{ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{6}}{2}\times 3\sqrt{6}=27uv$ ..... 0.5 $v_{ABCD}=27uv$

ج) تبيان أنّ قيس الزاوية BDC هو $\frac{\pi}{4}rad$:

- لدينا : $\overrightarrow{DB}(6;-3;6)$ و $\overrightarrow{DC}(6;-6;0)$

وبالتالي : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=6\times 6-3(-6)+6\times 0=36+18=54$

- ولدينا : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\left\|\overrightarrow{DB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{DC}\right\|\times cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)$

أي $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\sqrt{81}\times\sqrt{72}\times cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)$ $cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)=\frac{54}{9\times 6\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ومنه $BDC=45^\circ$ 0.5

د) حساب مساحة المثلث BDC :

$$S_{BDC}=\frac{1}{2}DB\times DC\times \sin BDC=\frac{1}{2}\times 9\times 6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=27us$$ -

- **استنتاج المسافة بين النقطة** A والمستوي (BDC):

لدينا : $v_{ABDC}=\frac{1}{3}\times S_{BDC}\times d\left(A,(BCD)\right)=\frac{1}{3}\times 27\times d\left(A,(BCD)\right)=27$

ومنه $d\left(A,(BDC)\right)=\frac{27}{\frac{1}{3}\times 27}=3$ ..... $d\left(A,(BDC)\right)=3$ 0.5

التمرين الرابع : (08 نقاط)

I. **لدينا :** $f(x)=x-(x^2+1)e^{-x+1}$

1) أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x-(x^2+1)e^{-x+1}\right]=-\infty$$ لأنّ :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}-(x^2+1)e^{-x+1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ 0.25

- **تبيان أنّ :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$:

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-(x^2+1)e^{-x+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x^2+1}{e\times e^x}\right)$

أي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x^2}{e^x}\times\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\times\frac{1}{e^x}\right)=+\infty$ لأن

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ 0.25

ب) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=1+(x-1)^2e^{-x+1}$:

- لدينا : $f'(x)=1-\left[2xe^{-x+1}+(x^2+1)\left(-e^{-x+1}\right)\right]=1-(2x-x^2-1)e^{-x+1}$

وبالتالي : $f'(x)=1+(x^2-2x+1)e^{-x+1}=1+(x-1)^2e^{-x+1}$

$f'(x)=1+(x-1)^2e^{-x+1}$ 0.5

ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$(x-1)^2e^{-x+1}$	$+$
$f'(x)$	$+$

الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ 0.25

- **جدول تغيرات الدالة f :**

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

..... 0.5

2) تبيان أنَ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$:

- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-(x^2+1)e^{-x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2e^{-x+1}+e^{-x+1}\right)=0$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$ 0.25

- **دراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ):**

لدينا : $f(x)-x=x-(x^2+1)e^{-x+1}-x=-(x^2+1)e^{-x+1}$

إذن $f(x)-x<0$

ومنه (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) من أجل كل عدد حقيقي x 0.5

3) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$:

- لدينا f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[1.8;1.9]$

ولدينا $f(1.8)=1.8-\left((1.8)^2+1\right)e^{-1.8+1}=-0.11$

$f(1.9)=1.9-\left((1.9)^2+1\right)e^{-1.9+1}=0.03$

وبالتالي $f(1.8)\times f(1.9)<0$

حسب مبرهنة ال قيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

حيث $1.8<\alpha<1.9$ 0.5

4) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1:

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$y=1\times(x-1)-1=x-2$ أي $(T):y=x-2$ 0.5

5) تبيان أنَ $f''(x)=-(x-1)(x-3)e^{-x+1}$:

- لدينا : $f''(x)=2(x-1)e^{-x+1}+(x-1)^2\times\left(-e^{-x+1}\right)=(x-1)e^{-x+1}(2-x+1)$

أي $f''(x)=-(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ 0.25

- **استنتاج أنَ (C_f) يقبل نقطتي انعطاف :**

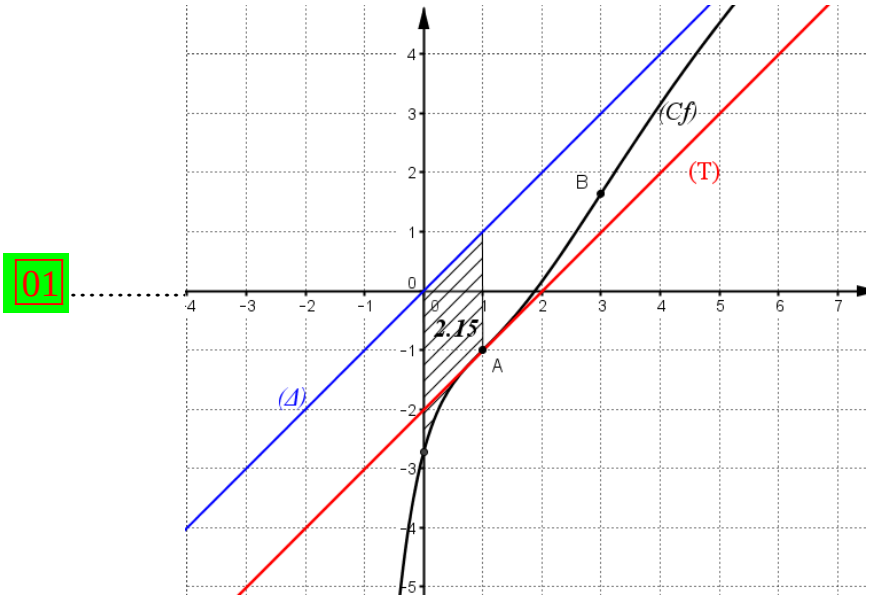
- جدول إشارة $f''(x)$:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- المشتقة الثانية $f''(x)$ تنعدم من أجل القيمتين $x=1$ و $x=3$ مغيرة إشارتها إذن النقطتين $A(1;f(1)), B(3;f(3))$ نقطتي انعطاف للمنحني (C_f) 0.75

6) حساب $f(3), f(0)$: $f(3)=3-9e^{-2}=1.65, f(0)=-e=-2.71$

الرسم :



01 .....

7) المناقشة البيانية لحلول المعادلة : $f(x)=x+m$

- هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x+m$ الموازي لكل من (T) و (Δ) .
- إذا كان $m\in]-\infty;-e[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا .
- إذا كان $m=-e$ المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما .
- إذا كان $m\in]-e;0[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا .
- إذا كان $m\in[0;+\infty[$ المعادلة ليس لها حلا 0.5

II. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx$

1- أ) تبيان أنّ الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x)=-(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة g حيث $g(x)=xe^{-x+1}$ على المجموعة $\mathbb{R}$:

- لدينا : $G'(x)=-\left[e^{-x+1}-(x+1)e^{-x+1}\right]=-\left(e^{-x+1}-xe^{-x+1}-e^{-x+1}\right)=xe^{-x+1}=g(x)$

ومنه G دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$ 0.5

ب) **حساب I_1 :**

لدينا : $I_1=\int_0^1 xe^{-x+1}dx=\left[-(x+1)e^{-x+1}\right]_0^1=-2e^0+e=e-2$ 0.25

2- أ) تبيان أنّ $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$

- لدينا : $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x+1}dx$

نضع : $u(x)=x^{n+1}$ ومنه $u'(x)=(n+1)x^n$

ونضع : $v'(x)=e^{-x+1}$ ومنه $v(x)=-e^{-x+1}$

وبالتالي : $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x+1}dx=\left[-x^{n+1}e^{-x+1}\right]_0^1-\int_0^1(n+1)x^n\left(-e^{-x+1}\right)dx$

ومنه : $I_{n+1}=-1+(n+1)\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx=-1+(n+1)I_n$ 0.5

ب) حساب I_2 :

$I_2=-1+(1+1)I_1=-1+2(e-2)=2e-5$ 0.25

3- حساب المساحة للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) **والمستقيم** (Δ) **والمستقيمين الذين معادلتيهما** $x=0, x=1$ **:**

$S=\int_0^1\left[y-f(x)\right]dx=\int_0^1 x-x+(x^2+1)e^{-x+1}dx=\int_0^1(x^2+1)e^{-x+1}dx$

أي $S=\int_0^1 x^2e^{-x+1}dx+\int_0 e^{-x+1}dx=I_2+\left[-e^{-x+1}\right]_0^1$

$S=(2e-5-1+e)us=(3e-6)cm^2$

$S=2.15cm^2$ 0.5

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية جيجل — ثانوية احمد فرانسيس (س . ع .ع)

امتحان بكالوريا تجريبية للتعليم الثانوي

(دورة ماي 2016)

الشعبة : **رياضيات** — المدة : 4 ساعات و 30 دقيقة

اختبار في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

1) نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة ، المعادلة (E) ذات المجهول $(x\ ;\ y)$ التالية : $414x - 1170y = 72$

أ- عيّن القاسم المشترك الأكبر للأعداد : 1170 ، 414 و 72 .

ب- بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x\ ;\ y)$ من الأعداد الصحيحة ، حلا للمعادلة (E) فإن : $y \equiv 1[23]$.

جـ- استنتج حلول المعادلة (E) .

2) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{\alpha\beta 0\alpha\beta}$ في نظام التعداد الذي أساسه 5 ، ويكتب $\overline{\beta\alpha 200}$ في نظام التعداد الذي أساسه 6 . عيّن α و β ، ثم اكتب λ في النظام العشري .

3) أ- حلل العدد 2016 إلى جداء عوامل أولية واستنتج الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسّم 2016 .

ب- نضع : $m = PPCM\ (a\ ;\ b)$ وَ $d = PGCD(a;b)$.

عيّن الأعداد الطبيعية a و b بحيث : $m^2 - 2d^2 = 2016$.

التمرين الثاني : (05 نقاط)

ينسب المستوي إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B و C لاحقاتها على الترتيب : $z_A = 5 - 4i$ ، $z_B = -1 - 4i$ و $z_C = -4 - i$.

1) ليكن S التشابه المباشر المعرف كما يلي : $S(A) = B$ و $S(B) = C$.

أ- اكتب العبارة المركبة للتشابه S .

ب- عيّن النسبة ، الزاوية والمركز Ω للتشابه S .

2) التشابه المباشر S يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z حيث $z \neq 0$ ، النقطة M' ذات اللاحقة z' .

أ- تحقق أن : $z_\Omega - z' = i\,(z - z')$.

ب- استنتج طبيعة المثلث $\Omega MM'$.

3) نعرف متتالية النقط من المستوي المركب كما يلي : $A_0 = A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $A_{n+1} = S(A_n)$.

نرمز إلى لاحقة A_n بالرمز z_n .

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = A_0A_1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = A_nA_{n+1}$.

أ- بيّن أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

ب- اكتب عبارة u_n بدلالة n .

جـ- احسب ، بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

د- احسب بدلالة n نصف القطر r_n للدائرة المحيطة بالمثلث $\Omega A_n A_{n+1}$.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط : $A(4;2;2)$ ، $B(5;-2;3)$ ، $C(1;1;1)$ والمستقيم (Δ) المعرف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+t \\ z = 1+2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

(P) المستوي الذي يمرّ بالنقطة A وعمودي على المستقيم (Δ) .

1) أ- اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) .

ب- تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المستوي (P) وأن النقطة C لا تنتمي إلى المستوي (P) .

جـ- تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ) وأن النقطة A لا تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

2) أ- عيّن إحداثيات النقطة D المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (P) .

ب- بيّن أن النقط A ، B ، C و D ليست من نفس المستوي .

جـ- عيّن طبيعة المثلث ABD ، ثم احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

3) عيّن مركزي سطحي الكرتين اللذين يمسان المستوي (P) في النقطة D ونصف قطر كل منهما 3 .

4) m عدد حقيقي و (P_m) المستوي المعرف بالمعادلة : $mx - 2(m-1)y - z + m - 1 = 0$.

أثبت أن جميع المستويات (P_m) تشمل مستقيما ثابتا (يطلب تعيين تمثيل وسيطي له) وذلك مهما يكن الوسيط الحقيقي m .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (ax^3 + bx)\, e^{-x^2+1}$

حيث : a و b عددان حقيقيان . (C_g) المنحني الممثل للدالة g في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $1cm$) .

عيّن قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(1\,;\,2)$ تنتمي إلى المنحني (C_g) و (C_g) يقبل في النقطة A مماسا يوازي حامل محور الفواصل .

II) f دالة عددية للمتغيّر الحقيقي x معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (x^3 + x)\, e^{-x^2+1}$.

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في نفس المعلم السابق .

1) احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) أ- بيّن أنه ، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = (-2x^4 + x^2 + 1)\, e^{-x^2+1}$.

ب- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f وشكل جدول تغيّراتها .

3) أ- احسب $f(x)+f(-x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ، ثم فسّر النتيجة بيانيا .

ب- اكتب معادلة (T) مماس المنحني (C_f) عند النقطة O .

4) أ- ارسم (T) و (C_f) .

ب- ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة : $f(x)=mx$.

III) 1) باستعمال المكاملة بالتجزئة ، عيّن دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

2) استنتج ، بالسنتيمتر المربع ، مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) ، محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=-1$ و $x=1$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=3u_n+4n-4$.

1) هل المتتالية (u_n) حسابية ؟ هندسية ؟ (برّر إجابتك) .

2) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_n+\alpha n+\beta$.

أ- عيّن العددين الحقيقيين α و β لكي تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

ب- احسب ، بدلالة n ، المجموع : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

3) أ- ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13 .

ب- استنتج باقي القسمة الاقليدية للعدد S_{2016} على 13 .

جـ- عيّن باقي القسمة الاقليدية للعدد $2014^{1435}+2015^{1436}+2016^{1437}+2017^{1438}$ على 13 .

التمرين الثاني : (05 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z ، التالية : $z^2-2z+4=0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A=2$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_B}$.

ولتكن (Γ) الدائرة التي مركزها النقطة O ونصف قطرها 2 .

أ- اكتب كلا من z_B و z_C على الشكل الأسي .

ب- تحقق أن العدد المركب $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^{2016}$ حقيقي .

جـ- عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n$ عددا حقيقيا سالبا تماما .

3) ليكن θ عددا حقيقيا ينتمي إلى المجال $]-\pi;\pi]$ ، M نقطة من الدائرة (Γ) لاحقتها $2e^{i\theta}$.

نسمي N النقطة من (Γ) حيث : $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

- اكتب z_N لاحقة النقطة N على الشكل الأسي .

4) ليكن r الدوران الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

أ- تحقق أن العبارة المركبة للدوران r هي : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

ب- نعتبر النقطتين F و K حيث : F منتصف القطعة $[BM]$ و K منتصف القطعة $[CN]$.

- بيّن أن : $r(F) = K$

جـ- استنتج طبيعة المثلث AFK .

5) أ- بيّن أن : $AF^2 = 4 - 2\sqrt{3}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$

ب- استنتج z_M لاحقة النقطة M بحيث تكون المسافة AF أكبر ما يمكن .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة ، في كل حالة من الحالات الأربع الآتية ، مع التعليل .

1) (u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_n = \int_n^{n+1} e^{1-x}\,dx$.

المجموع $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ يساوي :

أ) $e - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$ ب) $e - \left(\frac{1}{e}\right)^{n}$ جـ) $(e-1)\left(1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}\right)$

2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $\left|(1+i)\overline{z} - 2\right| = 3\sqrt{2}$ هي :

أ) دائرة مركزها النقطة ذات اللاحقة $1+i$.

ب) دائرة مركزها النقطة ذات اللاحقة $1-i$.

جـ) دائرة مركزها النقطة ذات اللاحقة $-1-i$.

3) يعرّف الجدول المقابل قانون احتمال لمتغيّر عشوائي X لتجربة عشوائية :

x_i	1	2	3	4
p_i	0.2	0.4	0.1	0.3

الانحراف المعياري للمتغيّر العشوائي X يساوي :

أ) 1.25 ب) 2.5 جـ) 1.12

4) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس . مجموعة النقط M من الفضاء ذات الإحداثيات $(x\,;y\,;z)$ حيث

$$\begin{cases} x = -1 - \frac{3}{2}t + t' \\ y = 1 - t + \frac{2}{3}t' \\ z = 2 - 6t + 4t' \end{cases} \quad (t\,;t') \in \mathbb{R}^2$$ هي :

أ) المجموعة $\{A\}$ حيث $A(-1;1;2)$.

ب) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(-1;1;2)$ و $\vec{u}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3};2\right)$ شعاع توجيه له .

جـ) المستوي الذي يشمل النقطة $A(-1;1;2)$ و $\vec{n}(2;3;-1)$ شعاع ناظمي له .

التمرين الرابع : (07 نقطة)

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+2\ln x$.

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا واحدا α حيث : $0.75<\alpha<0.76$.

2) استنتج ، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=1-x+\frac{2}{x}(1+\ln x)$

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- احسب $\lim\limits_{x\to 0\atop x>0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y=-x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ ، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

2) أ - أثبت أنه ، من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{-g(x)}{x^2}$.

ب- استنتج اتجاه تغيّر الدالة f وشكل جدول تغيّراتها .

3) أ- بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) ، يطلب كتابة معادلة له .

ب- ارسم المستقيمين (Δ) ، (T) والمنحنى (C_f) .

4) ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة : $\frac{2}{x}(1+\ln x)=m$.

5) λ عدد حقيقي أكبر تماما من 1 .

أ- احسب ، بوحدة المساحة ، $A(\lambda)$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها :

$x=1$ ، $x=\lambda$ و $y=-x+1$.

ب- عيّن قيمة λ بحيث يكون $A(\lambda)=\ln\lambda$.

III) a عدد حقيقي موجب تماما .

نعتبر الدالة f_a المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f_a(x)=1-x+\frac{a}{x}(1+\ln x)$.

نسمي (C_a) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أثبت أن جميع المنحنيات (C_a) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثييها .

2) نعتبر النقط : $A\left(-2;\frac{4}{a}\right)$ ، $B\left(1;\frac{2\ln a}{a}\right)$ ، $C(-2a;2a-2)$ ولتكن G_a مرجح الجملة المثقلة :

$\{(A;1),(B;2),(C;-1)\}$

أ- عيّن بدلالة a إحداثيي النقطة G_a .

ب- استنتج مجموعة النقط G_a عندما يمسح العدد a المجموعة $\mathbb{R}_+^*$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية **دورة : ماي 2016**
الشعبة:رياضيات+تقني رياضي امتحان بكالوريا التعليم الثانوي(تجريبي)
الثانويات: لقرع محمد الضيف –كركوبية خليفة – مفدي زكريا –لبامة–البياضة الجديدة - سيدي عون

اختبار في مادة : الرياضيات **المدة :4 ساعات ونصف**

على المتر شح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول(04 نقاط)

A_0 و B_0 نقطتان من المستوي بحيث $A_0B_0=8$ (الوحدة هي السنتيمتر)

ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A_0 ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$

نعرف متتالية النقط (B_n) بـ : $B_{n+1}=S(B_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n

1) أنشئ النقط : B_1 , B_2 , B_3 و B_4

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n المثلثان : $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان

3) نعرف متتالية (u_n) بـ : $u_n=B_nB_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n

أ) أثبت أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

ب) أوجد عبارة u_n بدلالة n و u_0

جـ) نضع : $\Sigma_n=u_0+u_1+.....+u_n$, أوجد $\lim\limits_{n\to+\infty}\Sigma_n$

4) أ) حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $3x-4y=2$

ب) ليكن (Δ) المستقيم العمودي على المستقيم (A_0B_0) في النقطة A_0 ، جد قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون النقطة B_n تنتمي إلى المستقيم (Δ)

التمرين الثاني:(4,5نقاط)

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلتين التاليتين :

$z^2-2z+5=0$ ، $z^2-2(1+\sqrt{3})z+5+2\sqrt{3}=0$

2- في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد متجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D صور الأعداد المركبة : $z_A=1+2i$ ، $z_B=1+\sqrt{3}+i$ ، $z_C=1-2i$ ، $z_D=1+\sqrt{3}-i$.

أ) ماهي طبيعة المثلث ABC.

ب) أكتب معادلة الدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC جـ) أثبت أن النقطة D تنتمي للدائرة (γ).

3- نعتبر التحويل النقطي L المعرف بـ : $L(A)=B$ و $L(C)=D$.

- اكتب العبارة المركبة للتحويل L ، ثم حدد طبيعته و عناصره المميزة.

4- R دوران عبارته المركبة : $(z'-(1+2\sqrt{3}))=e^{i\frac{\pi}{4}}(z-(1+2\sqrt{3}))$

- حدد طبيعة التحويل $L\circ R$ ، و عناصره المميزة.

التمرين الثالث:(4نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

لتكن (S)مجموعة النقط $M(x,y,z)$من الفضاء والتي تحقق:

$x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-19=0$

1) تحقق أن (S)سطح كرة , يطلب تحديد مركزها ωونصف قطرها R

2) أ) تحقق أن النقطة $B(1,2,2)$تنتمي إلى (S)

ب) ليكن (P)المستوي المماس لسطح الكرة (S) في النقطة B ,حدد معادلة ديكارتية لـ (P)

3) ليكن (Q)المستوي ذو المعادلة : $2x-2y+z+4=0$, أحسب المسافة بين ω و (Q) ثم أستنتج أن (S) و (Q) يتقاطعان وفق دائرة(C) يطلب تحديد مركزها I ونصف قطرها r

التمرين الرابع: (07,5 نقاط)

I: نعتبر المعادلة التفاضلية: $(E)\ldots\ y'+y=e^{-x}$

1.بين أن الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$بـ $u(x)=xe^{-x}$ حل للمعادلة (E)

2.حل المعادلة التفاضلية $(E_0)\ \ldots\ y'+y=0$

3.بين أن الدالة v المعرفة و القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ تكون حلا للمعادلة(E_0) إذا وفقط إذا كانت $v+u$ حلا للمعادلة (E).

- استنتج جميع حلول المعادلة(E).

4.عين الدالة f_2 حل المعادلة(E) التي تأخذ القيمة 2 من أجل 0.

II: k عدد حقيقي معطى، نرمز بـ f_k للدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f_k(x)=(x+k)e^{-x}$

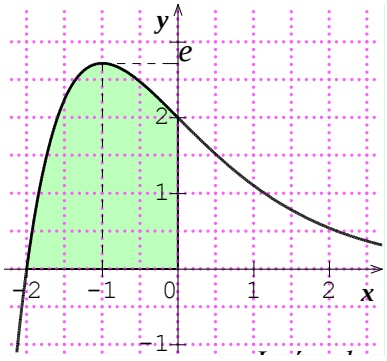
نرمز بـ $\mathcal{C}_k$ إلى تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. عين نهايات f_k عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2.احسب f'_k من أجل كل عدد حقيقي xثم شكل جدول تغيرات الدالة f_k

III:نعتبر متتالية التكاملات (I_n) المعرفة بـ $I_0=\int_{-2}^{0}e^{-x}\,dx$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ ،

$$I_n=\int_{-2}^{0}x^n e^{-x}\,dx$$



1.أ- احسب القيمة المضبوطة لـ I_0.

ب- باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $I_{n+1}=(-2)^{n+1}e^2+(n+1)I_n$

جـ- استنتج القيم المضبوطة لـ I_1 و I_2.

2. التمثيل البياني الموالي $\mathcal{C}_k$ هو لدالة f_k المعرفة في الجزء II.

أ- باستعمال المعلومات المتوفرة في الشكل ،عين قيمة k المرفقة بالمنحني $\mathcal{C}_k$.

ب- لتكن S مساحة الجزء المظلل(مقدرة بوحدة المساحات).

عبر عن S بدلالة I_0 و I_1 ثم استنتج القيمة المضبوطة للمساحة S.

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ ولتكن النقطة $A(-1,2,3)$ والمستقيم (D) الممثل وسيطيا بالجملة: $\begin{cases} x = 9+4t \\ y = 6+t \\ z = 2+2t \end{cases}$,$t \in \mathbb{R}$

1) أ) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) العمودي على المستقيم (D) ويشمل النقطة A

ب) تحقق أن النقطة $B(-3,3,-4)$ تنتمي للمستقيم (D)

ج) أحسب المسافة d_B بين النقطة B والمستوي (P)

د) أحسب المسافة d بين النقطة A و المستقيم (D) وذلك بدلالة d_B والمسافة AB , ثم أستنتج القيمة المضبوطة للمسافة d .

2) لتكن M نقطة كيفية من المستقيم (D) , ولتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(t) = AM^2$

حدد إتجاه تغير الدالة f ثم أستنتج قيمة d .

التمرين الثاني:(05نقاط)

(U_n) متتالية معرفة بـ: $U_0 = 0$ ، $U_1 = 1$ ،و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+2} = 5U_{n+1} - 4U_n$.

1- احسب U_2 و U_3.

2- برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أن :$U_{n+1} = 4U_n + 1$

- تحقق أن : U_n عدد طبيعي ، ثم استنتج أن : U_n و U_{n+1} أوليان فيما بينهما.

3- (V_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = U_n + \frac{1}{3}$.

أ) بين أن المتتالية (V_n) هندسية ، عين أساسها و حدها الأول.

ب) اكتب V_n ثم U_n بدلالة n.

4- أ) احسب $PGCD\left((4^6-1),(4^5-1)\right)$ ،

ب) عين من أجل كل عدد طبيعي n: $PGCD\left((4^{n+1}-1),(4^n-1)\right)$

5- أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 4^n على 7.

ب) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_{3n}$.

جـ) عين قيم العدد الطبيعي n حيث العدد $9S_n + 8n$ يقبل القسمة على 7.

التمرين الثالث:(04,5 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقطتين : A و B حيث :

$z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\sqrt{3}-i$

1- اكتب العددين z_A ، z_B على الشكل الأسي ، ثم أنشئ النقطتين A و B.

2- r دوران مركزه O ، و زاويته $\frac{\pi}{3}$

- عين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران r.
- اكتب $z_{A'}$ على الشكل الجبري ، ثم أنشئ النقطة A'.

3- h تحاك مركزه O ، و نسبته $\frac{-3}{2}$

- اكتب على الشكل المثلثي $z_{B'}$ لاحقة النقطة B' صورة B بالتحاكي h ، ثم أنشئ النقطة B'.

4- ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث $OA'B'$ ، و R نصف قطرها ، و z_ω لاحقة النقطة ω.

أ) باستعمال الخاصة : $z\bar{z}=|z|^2$ تحقق من صحة العبارات التالية : $z_\omega\overline{z_\omega}=R^2$

$\left(z_\omega+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(\overline{z_\omega}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)=R^2$ ، $\left(z_\omega-2i\right)\left(\overline{z_\omega}+2i\right)=R^2$

ب) استنتج أن : $z_\omega-\overline{z_\omega}=2i$ و $z_\omega+\overline{z_\omega}=\frac{-4\sqrt{3}}{3}$ ، ثم استنتج z_ω لاحقة النقطة ω و قيمة R.

التمرين الرابع:(06,5 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{\ln(x+1)+|x|}{x+1}$ وليكن (c_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول 2cm)

1) أحسب: $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجتين بيانيا

2) أ) . أحسب $f'(x)$ من أجل $x\in]-1,0[$ ثم أستنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1,0[$

. أحسب $f'(x)$ من أجل $x\in]0,+\infty[$ ثم أستنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0,+\infty[$

ب) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} \frac{f(x)}{x}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \frac{f(x)}{x}$ ، هل f قابلة للاشتقاق عند 0؟

ـ أكتب معادلتي المماسين لـ (c_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

3) شكل جدول تغيرات f

4) عين معادلة للمستقيم (Δ) مماس (c_f) في النقطة ذات الفاصلة : $x_0=\frac{1}{e}-1$

5) أحسب $f(e-1)$ ثم أنشئ (Δ) و (c_f)

6) أوجد دالة أصلية للدالة f على المجال $]0,+\infty[$ ، ثم أستنتج مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (c_f) ومحور الفواصل والمستقيمين ذا المعادلتين : $x=0$ و $x=e^2-1$

وزارة التربية الوطنية مديرية التربية لولاية الشلف

ثانوية الشهيد محمد سحنون وادي سلي بكالوريا تجريبي دورة ماي 2016 المدة: 4ساعات

الشعبة : رياضيات اختبار في مادة الرياضيات

على المتر شح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول (04 نقاط)

1) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E_1) : $11x+8y=79$.

أ -بيّن أنّه إذا كان $(x;y)$ حلا للمعادلة (E_1) فإنّ : $y\equiv 3[11]$.

ب -حل إذن المعادلة (E_1) .

2) لتكن في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E_2): $3y+11z=372$.

أ -بيّن أنّه إذا كان $(y;z)$ حل للمعادلة (E_2) فإنّ $z\equiv 0[3]$.

ب -حل إذن المعادلة (E_2) .

3) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E_3): $3x-8z=-249$.

4) لدينا 41 قطع غيار موزعة على ثلاثة أجزاء ثمنها الكلي 480 ألف دينار جزائري. ثمن القطعة للجزء الأول هو 48 ألف دينار جزائري وثمن القطعة للجزء الثاني هو 36 ألف دينار جزائري وثمن القطعة للجزء الثالث هو 4 ألاف دينار جزائري. المطلوب : عيّن عدد القطع لكل جزء .

التمرين الثاني (04 نقاط)

n عدد طبيعي غير معدوم و f_n دالة معرفة بـــ: $\begin{cases} f_n(x)=x(\ln x)^n \\ f_n(0)=0 \end{cases}$.

1) أدرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدّالتين f_1 و f_2 على المجال $[0;+\infty[$.

2) أدرس تغيرات كل من الدّالتين f_1 و f_2 وارسم منحناهما البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

3) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ بـــ: $u_n=\int_1^e f_n(x)dx$ (حيث e هو أساس اللوغاريتم النبيري)

أ/ بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : (u_n) متناقصة

ب/ بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n\geq 0$.

mokhtar tahi

ج/ بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} u_n$ واستنتج أنّه مهما يكن $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \leq \frac{e^2}{n+1}$.

د/ عين نهاية المتتالية (u_n) عند ما n يؤول إلى $+\infty$.

التمرين الثالث (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$. نعتبر النقطتان $A(8;0;8)$ و $B(10;3;10)$ وليكن (D) المستقيم الذي يشمل النقطة $C(-5;1;0)$ و $\vec{u}(3;2;-2)$ شعاع توجيه له .

mokhtar tahi

1- بيّن أنّ المستقيمين (AB) و (D) لا ينتميان إلى نفس المستوي .

2- ليكن (P) المستوي الذي يوازي (D) ويشمل المستقيم (AB).

أ- بيّن أنّ $\vec{n}(2;-2;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) ثم أكتب معادلة ديكارتية له .

ب- بيّن أنّ المسافة بين نقطة كيفية من المستقيم (D) والمستوي (P) ثابتة .

ج- أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المحدد بتقاطع (P) و المستوي (Oxy) .

د- تعرف على مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $(2x-2y+z-24)^2 + z^2 = 0$.

3- لتكن (S) سطح كرة التي تمس (P) في النقطة $I(10;1;6)$ حيث مركزها ω يبعد عن المستوي (P) بمسافة $d = 6$ ويقع من جهة النقطة O . شكل معادلة ديكارتية لـ (S).

4. أ- جد تمثيلا وسيطيا للمستوي (OAB) ثم أستنتج معادلة ديكارتية له .

ب- بيّن أنّ المستوي (OAB) وسطح الكرة (S) يتقاطعان وفق دائرة (Γ) يطلب تحديد عناصرها المميزة .

التمرين الرابع (06 نقاط)

I - نعتبر الدّالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = 2x\sqrt{x} - 3\ln x + 6$

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

ب- أدرس اتجاه تغير الدّالة g .

ج- شكل جدول تغيرات الدّالة g ثم أستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II - لتكن الدّالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = 3\frac{\ln x}{\sqrt{x}} + x - 1$ و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

ب- بيّن أنّ f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ وأنّ: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$ ثم أستنتج اتجاه تغير الدّالة f .

2) أ- بيّن أنّ المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) يطلب تعيين معادلة له.

ب- جد معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها 1 ثم حدد وضعية (C) بالنسبة لـ (T).

3) أحسب $f(5)$ و $f(9)$ ثم أرسم (D)، (T) و (C) .

4) بيّن أنّ الدّالة $x \mapsto 2\sqrt{x}(\ln x-2)$ هي دالة أصلية للدّالة $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ على المجال $]0;+\infty[$.

* أحسب المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) وبالمستقيمات: $y=x-1$ ، $x=1$ و $x=\lambda$ حيث $(\ 0<\lambda<1\ )$. ثم أحسب $\lim\limits_{\lambda \xrightarrow{>} 0} A(\lambda)$.

التمرين الخامس(02 ن): من أجل كل مقترح توجد إجابة واحدة صحيحة من بين الإجابات الثلاثة المقترحة حدد ها مع التبرير: 1) نضع : $z_A=3+i\sqrt{3}$ ، $z_B=\overline{z}_A$ و $z_C=-\sqrt{3}+3i$.

لتكن θ حيث: $\theta=arg\left(\dfrac{z_C}{z_A}\right)$ حيث: أ/ $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ ب/ $\theta=\dfrac{7\pi}{6}$ ج/ $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$.

2) نضع: $L=\left(\dfrac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{2016}+\left(\dfrac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^{2016}$ أ/ $L=0$ ب/ $L=2$ ج/ $L=2i$.

3) التشابه S الذي مركزه $E(3-\sqrt{3};0)$ ويحول النقطة A إلى النقطة C، زاويته α ونسبته k

أ/ $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ و $k=\sqrt{3}$ ب/ $\alpha=-\dfrac{\pi}{2}$ و $k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ج/ $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ و $k=3$.

4) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2+\beta z+12=0$ حيث $\beta \in \mathbb{R}$. قيم العدد الحقيقي β حتى تقبل المعادلة حلين مترافقين هي: أ/ $\beta<0$ ب/ $\beta>4\sqrt{3}$ ج/ $-4\sqrt{3}<\beta<4\sqrt{3}$

أستاذ المادة: مختار تاحي

الطموح كنز لا يفنى : لا يسعى للنجاح من لا يملك طموحا ولذلك كان الطموح هو الكنز الذي لايفنى

.....فكن طموحا وانظر إلى المعالي .....

ثانوية الشهيد محمد سحنون وادي سلي بكالوريا تجريبي دورة ماي 2016

الشعبة : رياضيات اختبار في مادة الرياضيات المدة: 4ساعات

على المتر شح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الثاني

mokhtar tahi

التمرين الأول (05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $\left(z^2-2+2i\sqrt{3}\right)\left(z^2-8\sqrt{3}z+64\right)=0$.

2) A و B نقطتان من المستوي حيث: $z_A=4\sqrt{3}-4i$ و $z_B=4\left(\sqrt{3}+i\right)$.

أ- أكتب العدد المركب $\frac{z_B}{z_A}$ على الشكل الأسي ثم أستنتج طبيعة المثلث OAB .

ب- جد z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C ذات اللاحقة $\left(-\sqrt{3}+i\right)$ بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.

3) لتكن G مرجح الجملة المثقلة $\{(O;-1);(B;1);(D;1)\}$. جد لاحقة النقطة G، ثم أنشئ النقط A، B، C، D و G.

* عين (γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MO}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MG}\right\|$.

ب- أحسب العدد المركب $\frac{z_G-z_C}{z_D-z_C}$ ثم استنتج أنّ النقط C، D و G في استقامية. وأنّ النقطة G هي صورة النقطة D

بتحويل بسيط يطلب تعيين عناصره المميزة .

ج- عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون: $\frac{z-z_C}{z-z_G}$ عددا حقيقيا موجبا تماما .

4) عين النقطة F حتى يكون الرباعي $ACGF$ معين ثم أحسب مساحته .

التمرين الثاني (03 نقاط)

اذكر إن كانت الجمل الآتية صحيحة أو خاطئة مع التبرير

1) العدد $\overline{63x4}$ مكتوب في نظام التعداد الذي أساسه 7 يقبل القسمة على 6 إذا كان $x=5$.

2) إذا كانت المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام : $u_n = e^{2n+1}$.فإنّ:

أ- (u_n) متتالية هندسية أساسها e^2 . ب- تكون $u_n > 2016$ إذا كان $n > 4$.

3) حلول المعادلة $x^2 + x - 2 \equiv 1[5]$ في $\mathbb{Z}$ هي الأعداد الصحيحة من الشكل $x = 4k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

4) (w_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـــ: $w_n = 2\times 3^n + 3\times 4^n$ ، المجموع S_n حيث:

$S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots\cdots + w_n$ مضاعف للعدد 5 إذا كان n مضاعف للعدد 4 .

التمرين الثالث (05 نقاط)

يحتوي كيس على قريصتين بيضاوتين مرقمين كما يلي1 و1- وثلاث قريصات سوداء مرقمة كما يلي: 1 ،1 و1- الكرات لا نفرق بينها عند اللمس . نسحب من هذا الكيس عشوائيا كرتين في آن واحد .

1) أحسب احتمالات الحوادث التالية:

A " الحصول على قريصتين من نفس اللون " و B " الحصول على قريصتين من نفس اللون ولهما نفس الرقم "

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الرقمين المسجلين على القريصتين .

ا- حدد مجموعة قيم المتغير العشوائي X ثم احسب قانون احتماله .

ب- أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X وتباينه .

3) والآن لنسحب من الكيس بالتتابع وبدون إعادة قريصتين .وليكن a الرقم المسجل على القريصة المسحوبة الأولى و b الرقم المسجل على القريصة المسحوبة الثانية .

ليكن في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ المستويين (P) و (P')حيث:

$$(P): x + ay + b = 0 \quad \text{و} \quad (P'): x + by - a = 0$$

المطلوب : أحسب احتمال كل من الحوادث التالية: E " $(P)\|(P')$ " و F " $(P)\perp(P')$

التمرين الرابع (07 نقاط) :

k عدد حقيقي موجب تماما . تعبر الدّالة f_k المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ: $f_k(x) = ln\left(e^x + kx\right) - x$ و (C_k) منحناها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد $(o;\vec{i};\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = 10c\vec{m}$ و $\|\vec{j}\| = 5cm$.

mokhtar tahi

I – لتكن الدّالة f_1 المعرفة على $]-\infty;+\infty[$ بـــ: $f_1(x)=ln\left(e^x+x\right)-x$.

1- أحسب $f_1'(x)$ على المجال $]-\infty;+\infty[$ وأستنتج اتجاه تغيرات الدّالة f_1 .

2- بيّن أنّه من أجل كل $x\in]-\infty;+\infty[$ فإنّ: $f_1(x)=ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)$ ثم أستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$.

3- شكل جدول تغيرات الدّالة f_1 .

II – 1. أحسب $f_k'(x)$ على $]-\infty;+\infty[$ وأستنتج اتجاه تغيرات الدّالة f_k .

2. أ- بيّن أنّه من أجل كل $x\in]-\infty;+\infty[$ فإنّ: $f_k(x)=ln\left(1+k\frac{x}{e^x}\right)$ ثم أستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)$.

ب- شكل جدول تغيرات الدّالة f_k .

ج- برهن أنّه من أجل كل $x\in]-\infty;+\infty[$: $ln(1+x)\le x$ ثم أستنتج أنّه من أجل $x\ge 0$ فإنّ: $f_k(x)\le\frac{k}{e}$.

3.أ- جد معادلة المماس (T_k) لمنحنى (C_k) عند النقطة O .

ب- k_1 و k_2 عددان حقيقيان موجبان تماما بحيث $k_1<k_2$ ،أدرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C_{k_1}) و (C_{k_2}).

4- أنشئ (C_1)، (C_2) و المماسين (T_1) و (T_2) .

5- من كل عدد حقيقي موجب تماما λ . نسمي $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_k) ،محور الفواصل وبالمستقيمين اللذين معادلاتيهما : $x=0$ و $x=\lambda$.

دون اللجوء إلى حساب $A(\lambda)$. بين وذلك باستخدام النتيجة السابقة في 2 .ج ثم باستخدام المكاملة بالتجزئة بيّن أنّ: $A(\lambda)\le k\int_0^{\lambda} xe^{-x}dx$ وأنّ : $\lim\limits_{\lambda\to\infty} A(\lambda)\le k$.

أستاذ المادة: مختار تاحي

الطموح كنز لا يفنى : لا يسعى للنجاح من لا يملك طموحا ولذلك كان الطموح هو الكنز الذي لايفنى

.....فكن طموحا وانظر إلى المعالي .....

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مدرية التربية لولاية البيض

ثانوية محمد بلخير الشعبة: **رياضيات**

الامتحان التجريبي لشهادة البكالوريا دورة : ماي 2016

اختبار في مادة : **الرياضيات** المدة: **04 ساعات ونصف**

<u>على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين</u>

<u>الموضوع الأول : (20 نقطة)</u>

<u>التمرين الأول:</u> (4 نقاط)

المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$؛ (الوحدة $2cm$).

نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين 2 و 3 على الترتيب

I. 1.حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $z^2-4z+6=0$

2 . نعتبر النقطتين M_1 و M_2 ذات اللاحقتين $Z_1=2+i\sqrt{2}$ و $Z_2=2-i\sqrt{2}$ على الترتيب

✓ أكتب $\frac{Z_1-3}{Z_1}$ على الشكل الجبري ثم استنتج أن المثلث OBM_1 قائم

3. بين أن النقط M_1 ; B ; O و M_2 تنتمي إلى دائرة (C) يطلب تعين مركزها ونصف قطرها

✓ أرسم الدائرة (C) و عين النقطتين M_1 و M_2 على الرسم

II. نسمي f الى التحويل النقطي الذي يرفق كل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z بالنقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=z^2-4z+6$

1. تحقق أن $z'-2=(Z-2)^2$

2. إذا كانت النقطة M ذات اللاحقة z نقطة من الدائرة (Γ) التي مركزها A ونصف قطرها $\sqrt{2}$ بين أن النقطة M' ذات اللاحقة z' تنتمي إلى دائرة (Γ') يطلب تعين مركزها ونصف قطرها

III. نسمي D النقطة ذات اللاحقة $Z_D=2+\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2}$ ونرمز بـ D' لصورة D بالتحويل f

1. بين أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة (Γ)

2. عين القيس الرئيسي للزاوية $\left(\vec{u},\overrightarrow{AD'}\right)$ ثم عين النقطة D' على الرسم

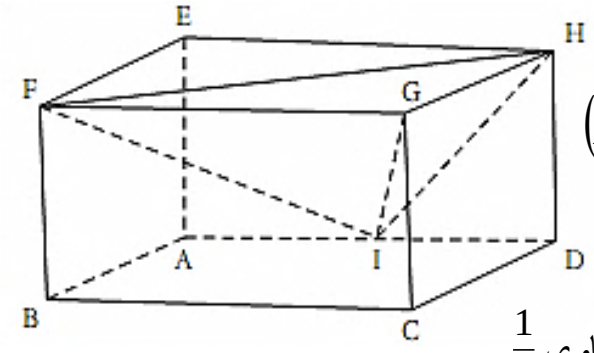
3. بين أن المثلث OAD' متقايس الأضلاع

التمرين الثاني: (4 نقاط)

1. نعتبر المعادلة (E) .... $24n - 13m = 1$ حيث n و m عددان صحيحان
   أ. برر أن المعادلة (E) تقبل على الاقل حلا
   ب. باستعمال خوارزمية اقليدس عين حل خاص المعادلة (E)
   ت. حل المعادلة (E)
2. نفرض أن n و m عددان طبيعيان حيث الثنائية $(n;m)$ حل للمعادلة (E)
   الهدف هو البحث عن $PGCD(8^{24n} - 1\ ,8^{13m} - 1\ )$
   أ. برر أن 7 يقسم كلا من $8^{13m} - 1$ و $8^{24n} - 1$
   ب. *بين ان* $(8^{24n} - 1) - 8(8^{13m} - 1) = 7$
   ت. *بين أن كل قاسم مشترك للعددين* $8^{13m} - 1$ و $8^{24n} - 1$ يقسم 7
   ث. *استنتج* $PGCD(8^{24n} - 1\ ,8^{13m} - 1\ )$
3. باستعمال النتيجة السابقة أحسب العدد d حيث $d = 9 \times PGCD(2^{437} - 32\ ,2^{434} - 32\ )$

التمرين الثالث:(4 نقاط)

نعتبر في الفضاء متوازي المستطيلات $ABCDEFGH$ حيث $AD = 2, \mathrm{AB} = 1$ و $\mathrm{AE} = 1$



نسمي I منتصف القطعة $[\mathrm{AD}]$

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AE}\right)$

1. عين إحداثيات النقط G, F و H
2. نرمز بـ V لحجم رباعي الوجوه $GFIH$
   أ. بين ان الحجم V لرباعي الوجوه $GFIH$ يساوي $\frac{1}{3}$
   ب. بين ان المثلث FIH قائم في I
   ت. بالاستعانة بالحجم V أحسب المسافة d بين النقطة G و المستوي (FIH)
3. بين ان الشعاع $\vec{n}(2; 1; -1)$ شعاع ناظيمي للمستوي (FIH)
4. استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (FIH)
5. أحسب بطريقة أخرى المسافة d بين النقطة G و المستوي (FIH)
6. (Δ) المستقيم يشمل النقطة G وعمودي على المستوي (FIH)
   أ. أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ)
   ب. عين إحداثيات النقطة K نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوي (FIH)
7. عين العددين الحقيقين α وβ حتى تكون النقطة K مرجح للجملة $\{(F.1)،(I.\propto)،(H.\beta)\}$

8. لتكن $(\mathcal{S})$ مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MF}-\overrightarrow{MI}+3\overrightarrow{MH}\right\|=6$

أ. بين أن $(\mathcal{S})$ هي سطح كرة يطلب تعين مركزها ونصف قطرها

ب. بين أن المستوي (FIH) يقطع سطح الكرة $(\mathcal{S})$ وفق الدائرة (C) يطلب تعين مركزها ونصف قطرها

<u>التمرين الرابع</u>: (8 نقاط)

f الدالة المعرفة بـ $f(0)=2$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;1[\cup]1;+\infty[$: $f(x)=\dfrac{-1+2\ln x}{\ln x}$

(C) منحني الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الأطوال $2cm$

1. ادرس استمرارية الدالة f عند $x=0$ على اليمين
2. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند $x=0$ على اليمين ثم فسر هندسيا النتيجة
3. عين نهاية الدالة f عند 1 و عند $+\infty$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C) ؟
4. ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول التغيرات.
5. بين أن النقطة A ذات الفاصلة $x_0=e^{-2}$ هي نقطة انعطاف للمنحني (C) ؟
6. بين أن المنحني (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة يطلب تعين فاصلتها
7. نبحث عن المماسات (T_a) للمنحني (C) التي تشمل المبدأ O.

ليكن a عدد حقيقي من $]0;1[\cup]1;+\infty[$

أ. بين أن المماس (T_a) للمنحني (C) في النقطة ذات الفاصلة a يشمل المبدأ إذا وفقط إذا كان $f(a)-af'(a)=0$

ب. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=f(x)-xf'(x)$

- ✓ بين أنه المعادلتين $g(x)=0$ و $2(\ln x)^2-\ln x-1=0$ متكافئتان على $]0;1[\cup]1;+\infty[$.
- ✓ استنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين يطلب تعينهما

ت. استنتج من الأسئلة السابقة أنه يوجد مماسين (T) و (T') للمنحني (C) يشملان المبدأ O *يطلب كتابة معادلة لكل منهما*

8. ارسم المماسين (T) و (T') ثم المنحني (C).
9. بقراءة بيانية ، عين عدد حلول المعادلة $(mx-2)\ln x+1=0$ حسب قيم العدد الحقيقي المعطى m
10. نعتبر الدالة h المعرفة على $]0;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=\dfrac{f(x)-\frac{1}{e}x}{x}$

أ. بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;1[\cup]1;+\infty[$: $h'(x)=\dfrac{-g(x)}{x^2}$

ب. استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها

ت. استنتج اشارة الدالة h

ث. أحسب D مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C) والمستقيمات التي معادلاتها $y=0$ و $x=e$ و $x=e^2$

الموضوع الثاني : (20 نقطة)

التمرين الأول:(4 نقاط)

المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ ؛ (الوحدة $1cm$).

نعتبر النقط A ، B و C ذات اللواحق $Z_A = 2$ ، $Z_B = 2+3i$ و $z_c = 3i$ على الترتيب

1. لتكن النقطة E نظيرة النقطة C بالنسبة إلى النقطة A بين أن لاحقة E هي $Z_E = 4-3i$
2. عين العددين الحقيقين α و β حتى تكون النقطة F ذات اللاحقة $Z_F = 6-i$ مرجح للجملة $\{(O.\alpha)،(A.\beta)،(B.1)\}$
3. نسمي S التشابه المباشر الذي يحول النقطة O إلى النقطة E ويحول النقطة A إلي النقطة F
   أ. عين الكتابة المركبة للتحويل S
   ب. عين مركز وزاوية ونسبة التشابه المباشر S
   ت. عين لاحقة النقطة G صور ة النقطة F بالتشابه المباشر S
4. عين المجموعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق
$\|6\overrightarrow{MO} - 10\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\| = \frac{3}{2}\|\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MC}\|$

✓ عين صورة المجموعة (Γ) بالتحويل S

التمرين الثاني:(4 نقاط)

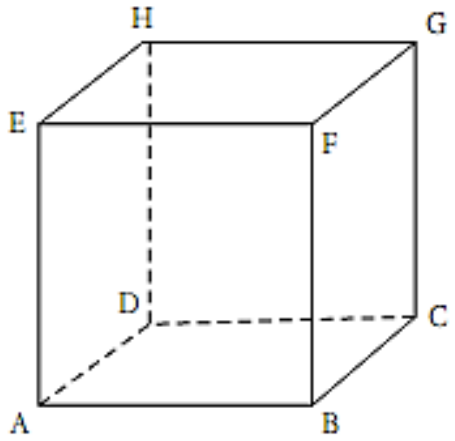
نعتبر المعادلة $(E)\ldots. x^2 - 2y^2 = 1$ حيث x و y عددان طبيعيان غير معدومين

1. في هذا السؤال نفرض ان الثنائية (y_0, x_0) حل للمعادلة (E)
   أ. بين انه يوجد عدد طبيعي k بحيث $x_0 = 2k+1$
   ب. ا ستنتج حل للمعادلة (E) من اجل $1 \le x_0 \le 4$
2. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نرمز بـ a_n و b_n الى الاعداد الطبيعية غير المعدومة التي تحقق $(3+2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$

   أ. أحسب a_1 و b_1
   ب. أكتب كلا من a_{n+1} و b_{n+1} بدلالة a_n و b_n
   ت. يرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n الثنائية (a_n, b_n) حل للمعادلة (E)
   ث. بين أن $\frac{1}{a_n + b_n\sqrt{2}} = a_n - b_n\sqrt{2}$ ثم أستنتج ان $(3-2\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$
   ج. استنتج عبارة a_n و b_n بدلالة n

التمرين الثالث:(4 نقاط)

نعتبر في الفضاء مكعبا $ABCDEFGH$ طول حرفه 1



نرمز بـ K الى مرجح للجملة $\{(D.1)،(F.2)\}$

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(D,\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH}\right)$

الجزء الاول:

1. عين إحداثيات النقطة K
2. بين ان المستقيمين (EK) و (DF) متعامدان
3. أحسب المسافة EK

الجزء الثاني:

لتكن M نقطة من القطعة $[HG]$ المستقيمة نضع $m = HM$ حيث m عدد حقيقي

ينتمي الى المجال $[0;\ 1]$

1. بين انه من اجل كل عدد حقيقي m من $[0;\ 1]$ الحجم V لرباعي الوجوه $EMFD$ يساوي $\frac{1}{6}$
2. بين ان المعادلة $(-1+m)x+y-mz=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (MFD)
3. نرمز بـ d_m للمسافة بين النقطة E و المستوي (MFD)

أ. بين انه من اجل كل عدد حقيقي m من $[0;\ 1]$ $d_m = \dfrac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$

ب. عين وضعية M النقطة على القطعة $[HG]$ حتى تكون المسافة d_m أكبر ما يمكن

ت. أحسب المسافة d_m الموافقة لهذه الوضعية

ث. عندما تكون المسافة d_m أكبر ما يمكن استنتج المسقط العمودي للنقطة E على المستوي (MFD)

التمرين الرابع:(8 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $f(x)=\sqrt{x}e^{-x}$

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1. أدرس قابلة اشتقاق الدالة f عند $x=0$ على اليمين ثم فسر هندسيا النتيجة
2. أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ ثم فسر هندسيا النتيجة .
3. أدرس اتجاه تغير الدالة f على $[0;+\infty[$ ثم *شكل جدول تغيراتها* .

4. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ $g(x) = f'(x) - 1$

أ. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $\left[\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right]$

ب. استنتج أنه يوجد مماس واحد (T) للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة α *معادلة*:

$$y = x + f(\alpha) - \alpha$$

ت. بين ان $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{1-2\alpha}$ ثم استنتج ان $\frac{1}{7} \leq f(\alpha) \leq \frac{1}{\sqrt{2e}}$

5. أرسم المماس (T) ثم المنحني (C).

6. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$.

7. علما انه من اجل كل عدد حقيقي x : $e^x \geq x$

أ. بين انه من اجل كل عدد حقيقي موجب x : $f(x) \leq e^{\frac{-x}{2}}$

8. ليكن λ عدد حقيقي حيث $\lambda \geq 1$ نضع $S(\lambda) = \int_1^{\lambda} f(x)dx$

أ. أعط تفسيرا هندسيا للعدد الحقيقي $S(\lambda)$

ب. بين انه من أجل كل $\lambda \geq 1$: $0 \leq S(\lambda) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$

9. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها العام

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n $u_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$

أ. بين انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n , $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$

ب. أحسب نهاية المتتالية (u_n) ماذا تستنتج .

10. نضع من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n , $I_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$

أ. بين أن $I_n = S(n)$.

ب. ادرس اتجاه تغير المتتالية (I_n)

ت. هل المتتالية (I_n) متقاربة ؟

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية الشلف

إمتحان البكالوريا التجريبي — **ثانوية بلحاج قاسم نورالدين**

الشعبة : رياضيات — **دورة : ماي 2016**

إختبار في مادة : **الرياضيات** — المدة : **04 ساعات ونصف**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : **(05 نقاط)**

1. تحقق أن $5^6 \equiv 1[7]$ و إستنتج أن $5^{2016} \equiv 1[7]$

2. من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n = 1+5+5^2+5^3+.....+5^n$

أ) بين أنه من أجل n من $\mathbb{N}$ فإن $4S_n = 5^{n+1}-1$ و إستنتج أن S_n و 5^n أوليان فيما بينهما ,

ب) ليكن العدد الصحيح a . بين أن $4S_n \equiv a[7]$ إذا و فقط إذا كان $S_n \equiv 2a[7]$.

ت) بين أن $4S_{2015} \equiv 0[7]$ و إستنتج باقي قسمة S_{2015} على 7

ث) عين أصغر عدد طبيعي غير معدوم n بحيث يكون 7 قاسم لـ S_n

3. ليكن n عدد طبيعي غير معدوم . نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $5^n x + S_n y = 1$ .....(E)

تحقق أن (4 - ، 5) حل للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

التمرين الثاني : **(04 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ و α عدد حقيقي من المجال $]0,\pi[$

لتكن (S_α) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ حيث : $OM^2 - 2\cos(\alpha)\left[\overrightarrow{OM}.(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\right]+3-4\sin^2(\alpha)=0$

1. أ) أعط معادلة ديكارتية لـ (S_α)

ب) بين أن (S_α) هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها I_α و نصف قطرها R_α .

ت) إستنتج مجموعة النقط I_α عندما يمسح α المجال $]0,\pi[$.

2. أ) عين سطوح الكرات (S_α) التي تمر بالمبدأ O .

ب) بين أن O منتصف القطعة $\left[I_{\pi-\alpha}I_\alpha\right]$.

ت) إستنتج أن (S_α) و $(S_{\pi-\alpha})$ متناظران بالنسبة إلى O .

3. ليكن المستوي (P) ذو المعادلة : $x+y+z=0$

أ) عين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة I_α على (P) .

ب) أدرس تقاطع (P) و (S_α) .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقطة A ذات اللاحقة 2 و (C) الدائرة ذات المركز O و تشمل A .

1. نضع $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$

أ) بين أن $\alpha^2 - 4\alpha = 2\overline{\alpha} - 8$

ب) بين أن النقطتين B و C لاحقتاهما على الترتيب α و $\overline{\alpha}$ تنتميان إلى الدائرة (C) .

ت) أنشئ (C) و النقط A ، B و C .

2. لتكن D نقطة من الدائرة (C) لاحقتها $2e^{i\theta}$ حيث θ عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]-\pi\ ,\ \pi]$ و E صورة D بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

- برر أن لاحقة النقطة E هي $z_E = \alpha e^{i\theta}$ و علم في نفس الشكل النقطتين D و E .

3. لتكن النقطتان F و G منتصفا القطعتين $[BD]$ و $[CE]$ على الترتيب .

أ) برر أن لاحقة F و G هما $z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$ و $z_G = \frac{\alpha e^{i\theta} + \overline{\alpha}}{2}$ على الترتيب .

ب) بين أن $\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\alpha}{2}$ (يمكن إستعمال السؤال 1) أ)) و إستنتج طبيعة المثلث AFG .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

لنعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\,;\,1\}$ كالتالي : $f(x) = -\frac{1}{2}x + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

و ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. أ) أحسب النهايات عند حدود مجالات التعريف.

ت) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D_f فإن: $f'(x) = \frac{-x^2 + x + 2}{2x(x-1)}$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$.

ث) شكل جدول تغيرات الدالة f .

2. اثبت أن المستقيم (Δ) ذو المعادلته $y = -\frac{1}{2}x$ هو مقارب مائل للمنحني (C_f).

3. أدرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة لـ : (Δ) .

4. أثبت أن النقطة $\omega\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f) .

5. أثبت أن المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث : $\frac{2}{5} < x_0 < \frac{9}{20}$

6. أرسم (C_f).

7. لنعتبر الدالة g المعرفة كما يلي : $g(x) = -\frac{1}{2}|x| + \ln\left|\frac{|x|-1}{|x|}\right|$

أ) عين مجموعة تعريف الدالة g.

ب) ادرس شفعية الدالة g .

ت) بين كيف يمكن رسم المنحني (C_g) للدالة g انطلاقا من (C_f). (رسم (C_g) غير مطلوب) .

8. أ) بإستعمال التكامل بالتجزئة أحسب كلا من $\int_2^3 \ln(x)\,dx$ و $\int_2^3 \ln(x-1)\,dx$.

ت) إستنتج مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمات التي معادلاتها $x = 2$ و $x = 3$

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

نعتبر المعادلة : $21x - 17y = 8$.....$(*)$ حيث x و y عددين طبيعيين .

1. أ- عين الثنائية (x_0, y_0) حل للمعادلة $(*)$.
   ب - حل في $\mathbb{N}^2$ المعادلة $(*)$.
2. أ - ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 9^n على 13 ,
   ب – بين أنه إذا كان (α, β) حل للمعادلة $(*)$ فان : $3^{34\beta+20} - 9^{21\alpha} - 2 \equiv 0[13]$.
3. أ- بين أنه إذا كان (x, y) حلا للمعادلة $(*)$ و x مضاعف لـ 4 فان $y \equiv 0[4]$.
   ب – عين الثنائيات (x, y) حلول المعادلة $(*)$ التي يكون من أجلها : $PGCD(x, y) = 4$.

التمرين الثاني : (05 نقاط)

لكل سؤال من الأسئلة التالية إختر الإقتراح الصحيح مع التعليل

1. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب 1 و i . مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $\frac{z-i}{z-1}$ حقيقي هي : أ . المستقيم (AB) بإستثناء A ، ب . القطعة المستقيمة $[AB]$ بإستثناء A

جـ . الدائرة التي قطرها $[AB]$ بإستثناء A .

2. إذا كانت طويلة عدد مركب z هي 3 فإن مرافق z هو :

أ . $\frac{3}{z}$ ، ب . $\frac{\sqrt{3}}{z}$ ، جـ . $\frac{9}{z}$

3. ليكن z عدد مركب $|z+i|$ هي :

أ . $|z|+1$ ، ب . $\sqrt{z^2+1}$ ، جـ . $|i\,z-1|$

4. ليكن z عدد مركب غير معدوم حيث θ عمدة له .عمدة العدد المركب $\frac{-1+i\sqrt{3}}{\overline{z}}$ هي :

أ . $-\frac{\pi}{3}+\theta$ ، ب . $\frac{2\pi}{3}+\theta$ ، جـ . $\frac{2\pi}{3}-\theta$

5. لتكن النقطة Ω ذات اللاحقة $1-i$.
   مجموعة النقط M ذات اللاحقة $z = x + iy$ و تحقق $|z-1+i| = |3-4i|$ لها معادلة من الشكل :

أ . $y = -x + 1$ ، ب . $(x-1)^2 + y^2 = \sqrt{5}$ ، جـ . $z = 1 - i + 5e^{i\theta}$ حيث θ عدد حقيقي .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

1. نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $U_0 = \frac{3}{2}$ و $U_{n+1} = \frac{4U_n}{U_n+3}$.
   أ- بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فان : $U_n \succ 1$.
   ب- ادرس رتابة المتتالية (U_n) ، ماذا تستنتج ؟

2. لتكن المتتالية $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $V_n = \dfrac{U_n}{U_n - 1}$

أ) بين أن المتتالية (V_n) هندسية ، عين أساسها و حدها الأول .

ب) عبر عن V_n بدلالة n ، ثم استنتج أن : $U_n = \dfrac{3}{3-\left(\frac{3}{4}\right)^n}$ و أحسب نهاية (U_n) .

3. لتكن المتتالية $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ حيث : $W_n = \dfrac{V_n}{n^2}$.

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $W_n = 3e^{n\ln\left(\frac{4}{3}\right)-2\ln(n)}$.

ب) أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I . نعتبر الدالة f_k المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f_k(x) = \dfrac{k}{e^{kx}+1}$. (k عدد حقيقي غير معدوم)

نرمز بـ (C_k) للمنحنى الممثل للدالة f_k في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 4cm$ و $\|\vec{j}\| = 2cm$.

1. احسب نهايات الدالة f_k عند $-\infty$ و عند $+\infty$ حسب قيم k ثم فسر النتيجة هندسيا .

2. ليكن (D_k) المستقيم المقارب للمنحني (C_k) و الذي معادلته $y = k$

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f_k(x) = k - \dfrac{k\,e^{kx}}{e^{kx}+1}$

ب) أدرس حسب قيم k الوضع النسبي للمنحني (C_k) و (D_k)

3. أدرس حسب قيم k تجاه تغير الدالة f_k ثم شكل جدول تغيراتها .

4. أكتب معادلة لمماس (Δ_k) للمنحني (C_k) في النقطة ذات الفاصلة O .

II .

1. أثبت أن : $f_3(x) - f_{-3}(x) = 3$ مستنتجا طبيعة التحويل الذي يحول المنحني (C_3) إلى المنحني (C_{-3})

2. أنشئ (Δ_3) و (C_3) ثم إستنتج إنشاء (Δ_{-3}) و (C_{-3})

3. α عدد حقيقي موجب تماما .

$A(\alpha)$ هي المساحة بالسنتيمتر مربع للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_3) و المستقيمات التي معادلاتها $y = 0$ ، $x = 0$ و $x = \alpha$.

أ) أثبت أن : $A(\alpha) = 3\alpha - \ln(e^{3\alpha}+1) + \ln(2)$

ب) أحسب نهاية $A(\alpha)$ لما α يؤول إلى $+\infty$

امتحان بكالوريا تجريبية للتعليم الثانوي

(دورة مـــاي 2016)

الشعبة : رياضيات — المدة : 4 ساعات و 30 دقيقة

اختبار في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (05 نقاط)

I) ليكن $P(z)$ كثير حدود للمتغيّر المركب z حيث : $P(z)=z^3+z^2-4z+6$.

1) بيّن أنه ، من أجل كل عدد مركب z ، $\overline{P(z)}=P\left(\overline{z}\right)$.

2) تحقق أن $1+i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$ ، ثم استنتج جذرا آخر له .

3) حل ، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z)=0$.

II) نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A ، B و C التي لاحقاتها : $z_A=-1$ ، $z_B=1+i$ و $z_C=\overline{z_B}$ على الترتيب .

1) التحويل النقطي S ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطة $M'(z')$ حيث : $z'=(1+i)z+i$

أ - ما طبيعة التحويل S ؟ عيّن عناصره المميّزة .

ب- لتكن M نقطة تختلف عن A . ما طبيعة المثلث AMM' ؟

2) n عدد طبيعي و M_n نقطة من المستوي تختلف عن A ، لاحقتها العدد المركب z_n .

نضع : $M_0=O$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $M_{n+1}=S(M_n)$.

أ- أثبت أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $z_n=(1+i)^n-1$.

ب- عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون النقط O ، A و M_n في استقامية .

التمرين الثاني : (4 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بحدّها الأول $u_1=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1}=\frac{n+1}{2n}u_n$

1) أ- بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n>0$.

ب- ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

جـ- هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نضع : $v_n=\frac{u_n}{n}$.

أ- بيّن أن (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول v_1 .

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n=\frac{n}{2^n}$.

ب) ادرس الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\ln x - x\ln 2$.
عيّن نهاية الدالة f عند $+\infty$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

1) نعتبر ، في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ ، المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $64x - 48y = 160$.
عيّن حلا خاصا $(x_0 ; y_0)$ للمعادلة (E) ، ثم حل المعادلة (E) .

2) N عدد طبيعي يكتب $\overline{3\alpha 3\beta}$ في نظام التعداد الذي أساسه 8 ، ويكتب $\overline{5\beta 05}$ في نظام التعداد الذي أساسه 7 .
عيّن α و β ، ثم اكتب N في النظام العشري .

3) أ- ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 13 .
ب- عيّن قيَم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $2014^{1436} + 1435^n \equiv 0 \ [13]$

التمرين الرابع : (7 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ ،
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- احسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا .
ب- احسب $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$.
استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكل جدول تغيّراتها .

3) أ- بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلة له : $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.
ب- ادرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

4) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $-3.5<\alpha<-3.4$ و $-1.1<\beta<-1$.

5) أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

6) أ- نعتبر النقطتين $A\left(-1;3+6\ln\frac{3}{4}\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6\ln\frac{3}{4}\right)$.
- بيّن أن : $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .
ب- بيّن أن المستقيم (AB) يمسّ المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثيتيها .

7) لتكن g الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+6\ln(1-x)$.
أ- بيّن أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.
ب- احسب ، بوحدة المساحة ، مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=-3$ و $x=-2$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (4 نقاط)

1) نعتبر ، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، كثير الحدود $P(z)$ حيث :

$$P(z)=z^4-10z^3+38z^2-90z+261$$

أ- عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث ، من أجل كل عدد مركب z ، لدينا :

$$P(z)=\left(z^2+9\right)\left(az^2+bz+c\right)$$

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط :

A ، B ، C و D التي لواحقها : $z_A=3i$ ، $z_B=-3i$ ، $z_C=5-2i$ و $z_D=5+2i$.

أ- عيّن لاحقة النقطة G مركز ثقل الرباعي $ABCD$.

ب- عيّن مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=10$

جـ- عيّن مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2+\overrightarrow{MD}^2=59$.

التمرين الثاني : (05 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر :

- النقطتين $A(-3;0;1)$ و $B(1;-1;0)$
- المستقيم (D) المعرف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases}x=t-3\\y=-t\\z=-t+1\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$
- المستوي (P) المعرف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases}x=2\alpha-3\beta\\y=\alpha\\z=-\alpha+\beta\end{cases}$; $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

1) بيّن أن : $x+y+3z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (P) .

2) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P') الذي يشمل النقطة B وعمودي على المستقيم (D) .

3) بيّن أن تقاطع (P) و (P') هو المستقيم (Δ) ذو التمثيل الوسيطي : $\begin{cases}x=-t'+1\\y=-2t'-1\\z=t'\end{cases}$ $(t'\in\mathbb{R})$

4) ادرس الوضع النسبي للمستقيمين (D) و (Δ) .

5) (S) سطح كرة مركزها النقطة O ونصف قطرها 2 .

بيّن أن المستوي (P) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة ، يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

I) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\dfrac{3^{n+1}}{4^n}$.

1) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول .

2) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

II) المتتالية (u_n) معرفة بـ : $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\sqrt{3u_n+4}$.

1) برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le u_n\le 4$.

2) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

4) أ- برهن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $4-u_{n+1}\le\frac{3}{4}(4-u_n)$.

ب- بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le 4-u_n\le 4\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(x+1)e^{-x}$.

نسمي (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، (وحدة الطول $1\ cm$) .

1) أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f وشكل جدول تغيّراتها .

2) أ- بيّن أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف E يطلب تعيين إحداثييها .

ب- اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة E .

3) أ- ارسم المستقيم (T) والمنحنى (C) .

ب- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الجقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $me^x+x+1=0$.

4) أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة ، عيّن دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

ب- احسب ، بالسنتيمتر المربع ، مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=0$ و $x=1$.

5) نتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=(1-|x|)e^{|x|}$.

أ- بيّن كيفية رسم المنحنى (C') الممثل للدالة g انطلاقا من المنحنى (C) .

ب- ارسم المنحنى (C') في نفس المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

II) نرفق بكل عدد حقيقي غير معدوم α ، الدالة f_α المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_\alpha(x)=(\alpha x+1)e^{-x}$.

نسمي (C_α) المنحنى الممثل للدالة f_α في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب f' و f'' ، ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $f_\alpha^{(n)}(x)=(-1)^n(\alpha x+1-n\alpha)e^{-x}$ حيث : f' ، f'' ، ... ، $f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة f .

2) ادرس ، حسب قيم α ، تغيّرات الدالة f_α .

3) نسمّي (i_α) النقطة التي يكون عندها مماس المنحنى (C_α) يوازي محور الفواصل .

أ- احسب ، بدلالة α ، إحداثيي النقطة (i_α) .

ب- عيّن مجموعة النقط (i_α) عندما يمسح العدد α مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية سطيف — ثانوية عين الطريق سطيف

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي(تجريبي) — دورة: ماي 2016

الشعبة: رياضي

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة:4 ساعات و30 د

على المترشح إختيار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

1) نعتبر كثير الحدود $P(z)$ للمتغير المركب z المعرف كما يلي:

$$P(z)=z^4-2\sqrt{3}z^3+8z^2-8\sqrt{3}z+16$$

أ) بيّن إذا كان العدد المركب α حلا للمعادلة $P(z)=0$ فإن $\overline{\alpha}$ هو ايضا حلا للمعدلة $P(z)=0$.

ب) تحقق أنّ: $P(-2i)=0$ و $P\left(\sqrt{3}+i\right)=0$

ج) استنتج ، في المجموعة $\mathbb{C}$ ، حلول المعادلة : $P(z)=0$.

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط: A ، B ، C ، D

لواحقها على الترتيب: $z_A=\sqrt{3}-i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=2e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$ و $z_D=\overline{z_C}$.

أ) علّم النقط A ، B ، C ، D .

ب) بيّن أنّ النقط A ، B ، C ، D تنتمي الى نفس الدائرة، يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

ج) اثبت أن الرباعي $ABDC$ شبه منحرف متساوي الساقين، احسب مساحته.

د) احسب z_I لاحقة النقطة I منتصف القطعة $[AB]$.

3) أ) عين لاحقة النقطة E صورة I بالتحاكي الذي مركزه O و نسبته 2 .

ب) بيّن أنّ: $\frac{z_C-z_E}{z_D-z_E}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، استنتج أن C هي صورة D بتحويل نقطي يطلب تعيين طبيعته و عناصره المميزة. ما هي طبيعة المثلث CDE .

ج) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\left\|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$

4) نضع: $K=\frac{z_C-z_E}{z_D-z_E}$ ، عيّن قيم العدد الطبيعي n ، حتى يكون العدد $k\times k^2\times k^3\times\cdots\times k^n$ حقيقيا.

التمرين الثاني:(04 نقاط)

α و β عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما.

1) عين α و β علما أنّ: $\alpha(\alpha^2-19)=35\beta$ و $\alpha>\beta$.

2) لتكن المتتالية الهندسية (u_n) التي حدّها الأول u_0 و أساسها q حيث u_0 و q عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما و $u_0<q$.

3as.ency-education.com

أ) اوجد u_0 و q حتى يكون: $35u_0^2+19u_1-u_0q^3=0$

نفرض في ما يلي: $u_0=6$ و $q=7$.

3) أ) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n$.

ب) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 5 .استنتج قيم n حيث: $S_n\equiv 0[30]$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط $A(1;2;3)$ ، $B(0;1;4)$ ، $C(-1;-3;2)$

1) أ) بيّن أن النقط A ، B ، C تعين مستويا.

ب) اثبت أنّ A هي المسقط العمودي للنقطة $D(3;1;4)$ على المستوي (ABC) .اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2) أ) (Δ) المستقيم ذو التمثيل الوسيطي الآتي: $\begin{cases}x=2-2t\\y=-1+t\\z=4-t\end{cases}$ حيث: $t\in\mathbb{R}$. بين أن (Δ) عمودي على (ABC).

ب) تحقق أنّ النقطة $E(4;-2;5)$ تنتمي الى (Δ).

ج) اكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) ذات المركز E و تمس (ABC).

د) بين أن نقطة التماس G هي مركز ثقل المثلث ABC .

3) عين احداثيات نقطتي تقاطع المستقيم (Δ) مع سطح الكرة (S).

التمرين الرابع: (07 نقطة)

الجزء الأول: لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x)=-1+\ln(e^{2x}-e^x+1)$.

نسمي (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدة الطول $2cm$

1) عين اتجاه تغير الدالة g .

2) احسب: $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$. شكل جدول تغيرات الدالة g .

3) أ) برهن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g(x)=2x-1+\ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$.

ب) استنتج أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب كتابة معادلة له.

ج) ادرس وضعية المنحني (C_g) بالنسبة للمستقيم $(\Delta):y=2x-1$

4) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحني (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة معدومة.

5) انشئ المماس (T)،المستقيمين المقاربين و المنحني (C_g).

6) ناقش بيانيا و حسب قيّم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $g(x)=mx-1$

الجزء الثاني: نعتبر f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{|2e^x-1|}{e^x+e^{-x}-1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المعلم السابق.(انشاء المنحنى (C_f)غير مطلوب)

1) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند $-\ln 2$. فسّر النتيجة بيانيا.

2) بيّن أنّ الدالة g هي دالة أصلية للدالة f على مجال يطلب تعيينه.

3) احسب مساحة الحيّز المستوي المحدد بـ (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها: $x=0$ ، $x=-\ln 2$ ، $y=0$

3as.ency-education.com

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z و θ عدد حقيقي كيفي.

$$(E) \ldots\ldots\ldots\ldots z^2 - 2(1+2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta = 0$$

1) أ- حل المعادلة (E) من أجل $\theta = \frac{\pi}{6}$. نشير بـ z_1 و z_2 لحلي المعادلة (E) حيث: $\text{Im}(z_1) > 0$.

ب- اكتب العدد المركب $z_1 - 1$ على الشكل الأسي.

ج- عين الأعداد الطبيعية n حيث يكون العدد $\arg\left[\left(\frac{z_1 - 1}{2}\right)^{n^2+n}\right] = k\pi$ ، حيث: $k \in \mathbb{Z}$

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط: A ، B ، C ، D لواحقها على الترتيب: $z_A = 1 + 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ ، $z_B = 1 + 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$ ، $z_C = \overline{z_B}$ و $z_D = \overline{z_A}$.

أ- اكتب على الشكل الجبري z_A ، z_B ، z_C ثم علّم النقط A ، B ، C ، D.

ب- اثبت أنّ الرباعي $ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين.

3) أ) اكتب العدد المركب $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B}$ على الشكل الأسي، استنتج أن D هي صورة A بتحويل نقطي يطلب تعيين طبيعته و تحديد عناصره المميزة.

ب) ما هي طبيعة المثلث ABD ؟ استنتج ان النقط A ، B ، C ، D تنتمي الى دائرة يطلب تعيين مركزها Ω و نصف قطرها r .

4) (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z ($z \neq 1+2i$) حيث: $\frac{z-1+2i}{z-1-2i}$ حقيقي سالب تماما.

تحقق أنّ Ω تنتمي الى (Γ) ثم عين طبيعة المجموعة (Γ).

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط $A(2;0;1)$ ، $B(3;2;0)$ ، $C(-1;-2;2)$ و المستوي (P) الذي معادلته: $x + 2y - z + 7 = 0$.

1) بيّن أنّ النقط A ، B ، C تعيّن مستويا، ثم بيّن أنّ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي: $y + 2z - 2 = 0$.

2) أ) تحقق أنّ (ABC) و (P) متعامدان، ثم بيّن أنّ مستقيم تقاطعهما (Δ) يشمل النقطة C و $\vec{u}(5;-2;1)$ شعاع توجيه له. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ).

ب) احسب بعد النقطة A عن المستقيم (Δ).

3) لتكن النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;\alpha),(C;\beta)\}$ حيث α و β عددان حقيقيان يحققان: $1+\alpha+\beta \neq 0$.

عيّن α حتى تنتمي النقطة G الى المستقيم (Δ).

4) عيّن مجموعة النقط M من الفضاء حيث: $\sqrt{5}d(M,(ABC)) = \sqrt{6}d(M,(P))$.

3as.ency-education.com

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=\frac{3}{2}$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=1+\sqrt{u_n-1}$:

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1<u_n<2$.

2) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2+3u_n-2}{u_n-1+\sqrt{u_n-1}}$

ب) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) . بين أن المتتالية (u_n) متقاربة و أحسب نهايتها.

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـــ: $v_n=\ln(u_n-1)$.

أ) اثبت أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.أكتب v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n .

ب) أحسب بدلالة n الجداء P_n ، $P_n=(u_0-1)\times(u_1-1)\times\cdots\times(u_n-1)$. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

الجزء الأول: g الدالة المعرفة على المجال $[-1;+\infty[$ بالعبارة : $g(x)=1-xe^{-x}$.

1) احسب نهاية الدالة g عند $+\infty$ و عين اتجاه تغير الدالة g على المجال $[-1;+\infty[$.

2) أ) اثبت من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-1;+\infty[$ ، $g(x)\geq 1-e^{-1}$

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[-1;+\infty[$.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=-\dfrac{4\ln(-x)}{x} & ;x<-1 \\ f(x)=(x+1)(1+e^{-x}) & ;x\geq -1 \end{cases}$$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.الوحدة : 2cm

1) أ) تحقق أن الدالة f مستمرة عند $x_0=-1$.

ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند x_0 .اعط تفسيرا بيانيا لهذه النتيجة.

2) أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.أستنتج أن للمنحني (C_f) مستقيم مقارب يطلب تعيين معادلة له.

3) أ) بين ان المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) في جوار $+\infty$.

ب) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) على المجال $[-1;+\infty[$.

4) أ) تحقق من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;-1[$ ، $f'(x)=\frac{4(\ln(-x)-1)}{x^2}$

ب) عين اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty;-1[$ ثم على المجال $[-1;+\infty[$. قدم جدول تغيرات الدالة f .

ج) بين أن توجد نقطة وحيدة فاصلتها اكبر من -1 يكون عندها المماس (T) للمنحني (C_f) يوازي (Δ).

5) أ) اثبت المنحني (C_f) يقع أعلى محور الفواصل.

ب) أنشئ (Δ) ، (T) و المنحني (C_f).

ج) λ عدد حقيقي أكبر من أو يساوي -1 . $A(\lambda)$ المساحة بـــ : cm^2 للحيّز المستوي الواقع فوق محور الفواصل والمحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $x=-e$ ، $x=\lambda$ ، $y=x+1$.

بين أن : $A(\lambda)=8+4e-4(\lambda+2)e^{-\lambda}cm^2$. أحسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$.

3as.ency-education.com