التمرين : 20 نقطة

I. جدول التغيّرات المقابل هو للدالّة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (x+a)e^{-x} + b$ .
حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيّان . باستعمال جدول التغيّرات :

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $2+e^{-2}$ | ↘ | $2$ |

1. استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ثمّ بيّن أنّ : $a=-1$ و $b=2$
2. بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا $\alpha$ في المجال $]-\infty;2]$ ثمّ تحقق أنّ : $-0,38 < \alpha < -0,37$ .
3. حدّد حسب قيم $x$ إشارة $g(x)$ .

II. نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x+1-xe^{-x}$ ، $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ .
2. أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f'(x) = g(x)$ .
   ب) أدرس اتجاه تغيّر الدالّة $f$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .
3. بيّن أنّ : $f(\alpha) = 2\alpha + 3 + \dfrac{2}{\alpha-1}$ ، ثمّ أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$ .
4. أ) بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=2x+1$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ عند $+\infty$ .
   ب) أدرس الوضع النسبي بين $(C_f)$ و المستقيم $(\Delta)$ .
5. بيّن أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ موازيا للمستقيم $(\Delta)$ ، ثمّ أكتب معادلة لـ $(T)$ .
6. أرسم بدقّة $(\Delta)$ ، $(T)$ و $(C_f)$ .
7. ناقش بيانيّا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة : $x = (1-m)e^x$ .

III. $h$ الدالّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = 2x - (x-1)e^{-x+1}$ ، $(C_h)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق .

1. جد العدد الحقيقي $\beta$ حتى يكون من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ : $h(x) = f(x-1) + \beta$ .
2. إشرح كيفيّة إنشاء $(C_h)$ إنطلاقا $(C_f)$ ثمّ أنشئه في المعلم السابق .

إرادة النجاح مهمّة ، لكنّ الأهمّ منها هو التحضير للنّجاح

بالتـــــــــوفيق في شهادة البكالوريا 2024

ency-education.com/exams

**التمرين :** I. $g$ الدالّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=(x+a)e^{-x}+b$ .

حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيّان . باستعمال جدول التغيّرات :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=2$ ، و لدينا أيضا $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=b$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ و منه $b=2$ و من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ : $g'(x)=(-x+1-a)e^{-x}$ و لدينا أيضا $g'(2)=0$ بالتعويض نجد $a=-1$ .

2) لدينا الدالّة $g$ مستمرّة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;2]$ و $0\in\left]-\infty;2+e^{-2}\right]$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا $\alpha$ في المجال $]-\infty;2[$ حيث $g(\alpha)=0$

لدينا $[-0,38;-0,37]\subset\left]-\infty;2+e^{-2}\right]$ أي أنّ الدالّة $g$ مستمرّة و متزايدة تماما على المجال $[-0,38;-0,37]$ و $g(-0,38)<0<g(-0,37)$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا $\alpha$ في المجال $]-0,38;-0,37[$ حيث $g(\alpha)=0$

3) تحديد إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

II. نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ ، $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+1-\frac{x}{e^x}=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ .

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x(2+\frac{1}{x}-e^{-x})=+\infty$ .

2) أ) لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f'(x)=g(x)$ .

ب) لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ و منه الدالّة $f$ متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ و متزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة $f$

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

3) لدينا : $f(\alpha)=2\alpha+1-\alpha e^{-\alpha}$ و نعلم مسبقا أنّ $g(\alpha)=0$ أي $e^{-\alpha}=-\frac{2}{\alpha-1}$ بالتعويض في عبارة $f(\alpha)$ نجد $f(\alpha)=2\alpha+1+\frac{2\alpha}{\alpha-1}$ بالتبسيط نجد $f(\alpha)=2\alpha+3+\frac{2}{\alpha-1}$.

نجد : $0,78<f(\alpha)<0,8$ .

4) أ) لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x+1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{x}{e^x}=0$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ .

ب) لدراسة الوضع النسبي بين $(C_f)$ و المستقيم $(\Delta)$ ندرس إشارة $f(x)-(2x+1)$ ، لدينا من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ : $e^{-x}>0$ و عليه نلخص الوضع النسبي في الجدول الموالي :

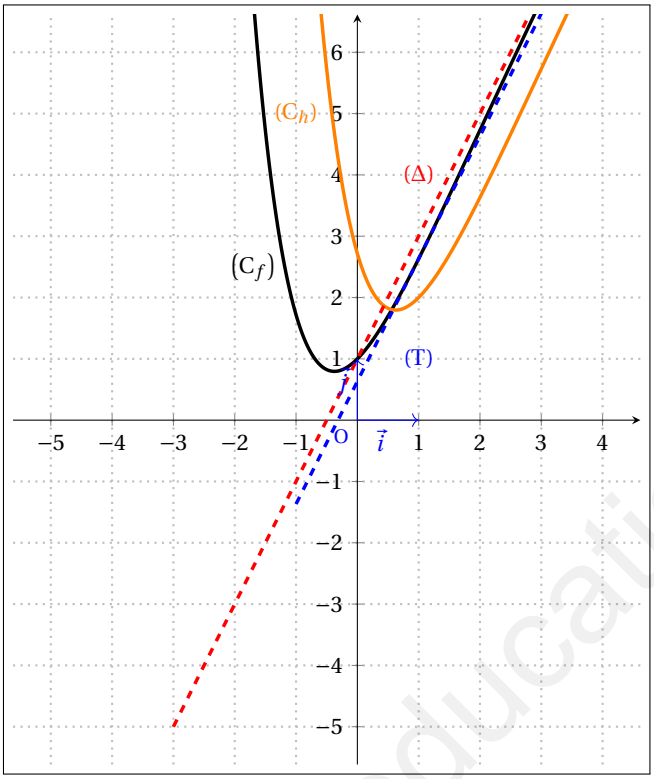
| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)-y$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| الوضعية | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ في النقطة $A(0;1)$ | | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ |

5) إثبات أن $(C_f)$ يقبل مماس (T) يوازي $(\Delta)$ لدينا: الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة $f'$ حيث $f'(x)=g(x)$

إذن $f'(x)=2$ تكافئ $(x-1)e^{-x}+2=2$ ومنه $x=1$ . أي يوجد مماس موازٍ لـ $(\Delta)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

كتابة معادلة للمماس (T) : $(T): y=2x+1-e^{-1}$ .

6) الرسم :




7) مناقشة حلول المعادلة $x=(1-m)e^x$ :

بالتبسيط و الحساب نجد $f(x)=2x+m$ ، حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع المستقيم $(\Delta_m)$ ذو المعادلة $y=2x+m$

- لمّا $m<1-e^{-1}$ لا توجد حلول .
- لمّا $m=1-e^{-1}$ حل موجب تماما .
- لمّا $1-e^{-1}<m<1$ حلّان موجبان تماما .
- لمّا $m=1$ حل معدوم .
- لمّا $m>1$ حل سالب تماما .

III. $h$ الدالّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=2x-(x-1)e^{-x+1}$ ، $(C_h)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق .

1) من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ : $h(x)=f(x-1)+\beta$ معناه : $\beta=1$

2) $(C_h)$ هو صورة $(C_f)$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}$

الرسم: أنظر الشكل في المعلم السابق .

encyclopedia-education.com/exams