الدوال العدديـــة

الدرس 01: اشارة عبارة جبرية (أساسيات)

1) إشارة العبارة $ax+b$ مع $a\neq 0$

إشارة العبارة $ax+b$ مدونة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$	عكس إشارة a		0	مثل إشارة a	

تمرين 01

حدد إشارة العبارات التالية:

1) $-x+4$

2) $3x+2$

3) x

4) $-x$

5) $(x-3)(4x-8)$

6) $\frac{2x+1}{x-5}$

7) $\frac{-2}{x+3}$

8) $\frac{1}{x-2}$

9) $f(x)=2+\frac{1}{x+3}$

حل التمرين 01

1) إشارة $-x+4$: لدينا $-x+4=0$ تعني $x=4$ ومنه

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$-x+4$		$+$	0	$-$	

2) إشارة $3x+2$: لدينا $3x+2=0$ تعني $x=-\frac{2}{3}$ ومنه

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$3x+2$		$-$	0	$+$	

3) إشارة x :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	

4) إشارة $-x$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	

5) إشارة $(x-3)(4x-8)$: لدينا $(x-3)(4x-8)=0$ تعني $x-3=0$ أو $4x-8=0$ ومنه $x=3$ أو $x=2$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$4x-8$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-3)(4x-8)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

6) إشارة $\frac{2x+1}{x-5}$: لدينا $\frac{2x+1}{x-5}=0$ تعني $2x+1=0$ و $x-5\neq 0$ ومنه $x=-\frac{1}{2}$ و $x\neq 5$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		5		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2x+1}{x-5}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

7) إشارة $\frac{-2}{x+3}$:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
-2		$-$		$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$	
$\frac{-2}{x+3}$		$+$	‖	$-$	

8) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$: المعادلة $f(x)=0$ لاتقبل حلول في $\mathbb{R}$ و اشارة $f(x)$ هي :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$\dfrac{1}{x-2}$	$-$	‖	$+$

9) $f(x)=2+\dfrac{1}{x+3}$ لدينا $f(x)=0$ تعني $2+\dfrac{1}{x+3}=0$ أي $\dfrac{2x+7}{x+3}=0$ وهذا يكافئ $2x+7=0$ و $x+3\neq 0$ وبالتالي $x=-\dfrac{7}{2}$ و $x\neq -3$ وبالتالي حلول المعادلة $f(x)=0$ في $\mathbb{R}$ هي: $S=\{-\frac{7}{2}\}$ و اشارة $f(x)$ هي

x	$-\infty$	$-\dfrac{7}{2}$	-3	$+\infty$
$2x+7$	$-$	0	$+$	$+$
$x+3$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{2x+7}{x+3}$	$+$	0	$-$ ‖	$+$

الدرس 02: إشارة العبارة ax^2+bx+c مع $a\neq 0$

لدراسة إشارة العبارة ax^2+bx+c أولا نقوم بحل المعادلة $ax^2+bx+c=0...(1)$ بحساب المميز Δ حيث $\Delta=b^2-4ac$ نميز الثلاث حالات التالية:

✓ الحالة01: $\Delta<0$ وبالتالي المعادلة (1) لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$ ومنه

x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+bx+c	مثل إشارة a	

العبارة ax^2+bx+c لاتقبل تحليل

✓ الحالة02: $\Delta=0$ وبالتالي المعادلة (1) تقبل حلا مضاعف هو $x_1=-\dfrac{b}{2a}$ ومنه:

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
ax^2+bx+c	مثل إشارة a	0	مثل إشارة a

تحليل العبارة ax^2+bx+c هو $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$

✓ الحالة03: $\Delta>0$ وبالتالي المعادلة (1) تقبل حلين مختلفين $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$، $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ (نفرض $x_1<x_2$) ومنه

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	مثل إشارة a	0	عكس إشارة a	0 مثل إشارة a

تحليل العبارة ax^2+bx+c هو $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

التمرين 02

حل في D_f (مجموعة تعريف f) المعادلة $f(x)=0$ ثم حدد حسب قيم x إشارة $f(x)$ في الحالات التالية

1) $f(x)=3x^2+7x+8$
2) $f(x)=-3x^2+2x-4$
3) $f(x)=x^2+6x+9$
4) $f(x)=x^2-5x+6$
5) $f(x)=x^4-5x^2+6$
6) $f(x)=x^2-36$
7) $f(x)=2x^2-1$
8) $f(x)=x^2+6$
9) $f(x)=x^2-9x$
10) $f(x)=8x^3-4x^2$
11) $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{(x+1)^2}$
12) $f(x)=\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$
13) $f(x)=-1+\dfrac{1}{(x+2)^2}$
14) $f(x)=\dfrac{-x^3+5x^2-6x}{(x+3)^3}$

حل التمرين 02

حل في D_f (مجموعة تعريف f) المعادلة $f(x)=0$ ثم حدد حسب قيم x إشارة $f(x)$ في الحالات التالية

1) $f(x)=3x^2+7x+8$

لدينا : $f(x)=0$ تعني $3x^2+7x+8=0$ نحسب المميز نجد $\Delta=(7)^2-4(3)(8)=-47<0$ وبالتالي المعادلة $f(x)=0$ لاتقبل حلول في $\mathbb{R}$ و إشارة $f(x)$ موجبة تماما أي:

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$3x^2+7x+8$	$+$

2) $f(x)=-3x^2+2x-4$: لدينا $f(x)=0$ تعني $-3x^2+2x-4=0$ نحسب المميز نجد $\Delta=(2)^2-4(-3)(-4)=-44<0$ وبالتالي المعادلة $f(x)=0$ لاتقبل حلول في $\mathbb{R}$ و إشارة $f(x)$ سالبة تماما أي:

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$-3x^2+2x-4$	$-$

3) $f(x)=x^2+6x+9$: لدينا $f(x)=0$ تعني $x^2+6x+9=0$ نحسب المميز Δ :

$$\Delta=(6)^2-4(1)(9)=0$$

وبالتالي المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل مضاعف هو

$$x=\frac{-6}{2}=-3$$

ومنه إشارة $f(x)$ مدونة في الجدول التالي

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

4) $f(x)=x^2-5x+6$: لدينا $f(x)=0$ تعني $x^2-5x+6=0$ نحسب المميز نجد $\Delta=(-5)^2-4(1)(6)=1>0$ وبالتالي المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلان حقيقيان هما

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5-1}{2}=2$ و $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5+1}{2}=3$ و إشارة: $f(x)$ هي:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	

5) $f(x)=x^4-5x^2+6$: لدينا $f(x)=0$ تعني $x^4-5x^2+6=0...(5)$ المعادلة (5) من الشكل $ax^4+bx^2+c=0$ وبالتالي هي مضاعفة التربيع ولحلها نضع $x^2=y$ وبالتالي المعادلة (5) تصبح $y^2-5y+6=0$ وهي تقبل حلان هما $y=2$ أو $y=3$ ومنه

✓ من أجل $y=2$ تعني: $x^2=2$ وبالتالي $x=-\sqrt{2}$ أو $x=\sqrt{2}$.

✓ من أجل $y=3$ تعني: $x^2=3$ وبالتالي $x=-\sqrt{3}$ أو $x=\sqrt{3}$ وبالتالي حلول المعادلة (5) هي $S=\{-\sqrt{2};\sqrt{2};-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$

ويكون $f(x)=(x^2-2)(x^2-3)$ و إشارة: $f(x)$ هي:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2-2		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
x^2-3		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

6) $f(x)=x^2-36$ لدينا $f(x)=0$ تعني $x^2-36=0$ أي $x^2=36$ وبالتالي $x=6$ أو $x=-6$ ومنه حلول المعادلة $f(x)=0$ في $\mathbb{R}$ هي $S=\{-6;6\}$ و إشارة $f(x)$ هي

x	$-\infty$		-6		6		$+\infty$
x^2-36		$+$	0	$-$	0	$+$	

تذكير $X^2=a$; $a\geq 0$ تعني $X=-\sqrt{a}$ أو $X=\sqrt{a}$

7) $f(x)=2x^2-1$ لدينا $f(x)=0$ تعني $2x^2-1=0$ أي $x^2=\frac{1}{2}$ وبالتالي $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ أو $x=+\frac{1}{\sqrt{2}}$ ومنه حلول المعادلة $f(x)=0$ في $\mathbb{R}$ هي $S=\{-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\}$ و إشارة $f(x)$ هي

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$2x^2-1$	$+$	0	$-$ 0	$+$

8) $f(x)=x^2+6$ المعادلة $f(x)=0$ لاتقبل حلول في $\mathbb{R}$ و اشارة $f(x)$ موجبة تماما أي

x	$-\infty$	$+\infty$
x^2+6	$+$	

9) $f(x)=x^2-9x$: لدينا $f(x)=0$ تعني $x^2-9x=0$ أي $x(x-9)=0$ وبالتالي $x=0$ أو $x=9$ ومنه حلول المعادلة $f(x)=0$ في $\mathbb{R}$ هي $S=\{0;9\}$ و إشارة $f(x)$ هي

x	$-\infty$	0	9	$+\infty$
x^2-9x	$+$	0	$-$ 0	$+$

10) $f(x)=8x^3-4x^2$: لدينا $f(x)=0$ تعني $8x^3-4x^2=0$ أي $x^2(8x-4)=0$ وبالتالي $x^2=0$ أو $8x-4=0$

$x=0$ أو $x=\frac{1}{2}$ ومنه حلول المعادلة $f(x)=0$ في $\mathbb{R}$ هي $S=\{0;\frac{1}{2}\}$ و إشارة $f(x)$ هي

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
x^2	$+$	0 $+$		$+$
$8x-4$		$-$	$-$ 0	$+$
$8x^3-4x^2$	$-$	0 $-$	0	$+$

11) $f(x)=\frac{x^2+4x+4}{(x+1)^2}$: لدينا $f(x)=0$ تعني

$x^2+4x+4=0$ و $(x+1)^2\neq 0$

$\Delta=(4)^2-4(1)(4)=0$ $x\neq -1$

يوجد حل مضاعف هو

$x_0=-\frac{4}{2(1)}=-2$

و إشارة: $f(x)$ هي:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
x^2+4x+4		$+$	0	$+$		$+$	
$(x+1)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$\dfrac{x^2+4x+4}{(x+1)^2}$		$+$	0	$+$	‖	$+$	

12) $f(x)=\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$: لدينا $f(x)=0$ تعني

$x-1=0$ و $(x+1)^2\neq 0$

$x=1$ $\quad x\neq -1$

و إشارة: $f(x)$ هي:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$		$-$	‖	$-$		$+$	

14) $f(x)=-1+\dfrac{1}{(x+2)^2}$: لدينا $f(x)=0$ تعني $-1+\dfrac{1}{(x+2)^2}=0$ أي $\dfrac{-(x+2)^2+1}{(x+2)^2}=0$

$-(x+2)^2+1=0$ و $(x+2)^2\neq 0$

$(x+2)^2=1$ $\quad x\neq -2$

$x+2=-1$ أو $x+2=1$ $\quad x\neq -2$

$x=-3$ أو $x=-1$ $\quad x\neq -2$

و إشارة: $f(x)$ هي:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$-(x+2)^2+1$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$(x+2)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-(x+2)^2+1}{(x+2)^2}$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

15) $f(x)=\dfrac{-x^3+5x^2-6x}{(x+3)^3}$: لدينا $f(x)=0$ تعني

$-x^3+5x^2-6x=0$ و $(x+3)^3\neq 0$

$-x(x^2-5x+6)=0$ $\quad x\neq -3$

$x=3$ أو $x=2$ أو $x=0$ $\quad x\neq -3$

و إشارة: $f(x)$ هي:

x	$-\infty$		-3		0		2		3		$+\infty$
$-x$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$		
x^2-5x+6		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$(x+3)^3$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$\dfrac{-x^3+5x^2-6x}{(x+3)^3}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

16) $f(x)=\dfrac{(x-3)(x^2-3x+2)}{(x+4)^3}$: لدينا $f(x)=0$ تعني

$(x-3)(x^2-3x+2)=0$ و $(x+4)^3\neq 0$

$x-3=0$ أو $x^2-3x+2=0$ $\quad$ $x\neq -4$

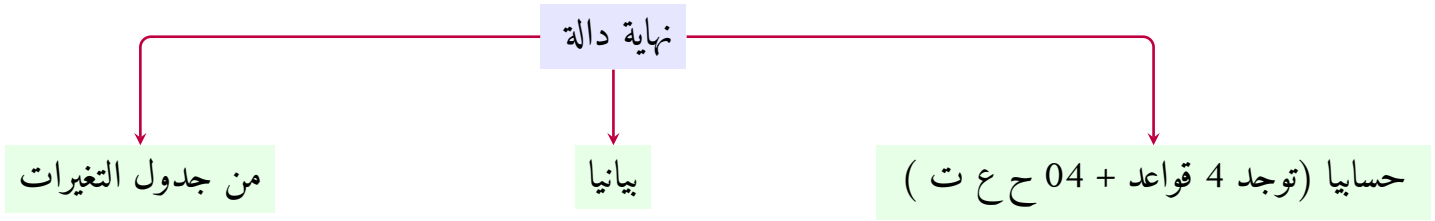
$x=3$ أو $x=1$ أو $x=2$ $\quad$ $x\neq -4$

و إشارة: $f(x)$ هي:

x	$-\infty$		-4		1		2		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$			
x^2-3x+2		$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$		
$(x+4)^3$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$		
$\dfrac{(x-3)(x^2-3x+2)}{(x+4)^3}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

الدرس 03: النهايات حسابيا-الجزء 01

للتواصل معنا:
رقم الهاتف: 0656836024 الفايسبوك: Rachidyahiyahi
فايسبوك المجموعة: مجموعة الأستاذ ياحي رشيد لدروس الدعم والتقوية (رياضيات)
الحل المفصل موجود على قناتنا في اليوتيوب رياضيات التعليم الثانوي-الأستاذ ياحي رشيد



قاعدة 01

نهاية دالة كثير حدود عند $-\infty$ أو $+\infty$هي نهاية الحد الأعلى درجة عند $-\infty$ أو $+\infty$

ملاحظة:

✓ $(+\infty)^n \to +\infty$

✓ $(-\infty)^n \to \begin{cases} -\infty & ; \text{فردي } n \\ +\infty & ; \text{زوجي } n \end{cases}$

تمرين 03 مع الحل

احسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3+\frac{1}{2}x^2+7x = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$. (فقط للشرح $2(+\infty)^3=+\infty$)

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} -5x^3+x^2+5x = \lim\limits_{x\to+\infty} -5x^3 = -\infty$. (فقط للشرح $-5(+\infty)^3=-\infty$)

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2}x^3+3x^2+1 = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2}x^3 = -\infty$. (فقط للشرح $\frac{1}{2}(-\infty)^3=-\infty$)

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^3+3x^2+2x = \lim\limits_{x\to-\infty} -2x^3 = +\infty$. (فقط للشرح $-2(-\infty)^3=+\infty$)

قاعدة 02

f و g دالتان إذا كان $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ حيث l عدد حقيقي و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ أي أن

$$\frac{\text{عدد}}{\pm\infty} \to 0$$

تمرين 04 مع الحل

احسب النهايات التالية

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x+3} = 0$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x^2+3} + 5 = 5$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x+2}} - 4 = -4$.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} + 3x + 1 = +\infty$. (لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x+1 = +\infty$)

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x + 4 + \dfrac{1}{x+1} = -\infty$. (لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+4 = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$)

قاعدة 03

نهاية دالة ناطقة عند $-\infty$ أو $+\infty$ هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة في البسط والمقام عند $-\infty$ أو $+\infty$

تمرين (05) مع الحل

احسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+5x+1}{x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x = +\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{(x+3)^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+5x+1}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2}{x^2} = 3$.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+2x+5}{3x^2+6x+4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{3x^2} = \dfrac{1}{3}$.

قاعدة 04

f و g دالتان إذا كان $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ حيث l عدد حقيقي غير معدوم أو $-\infty$ أو $+\infty$ وكانت $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ فإن $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ أي أن

$$\frac{l \neq 0}{0^{\pm}} \to \pm\infty$$

ملاحظة: الكتابة: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a}$ تعني النهاية عند a بقيم كبرى والكتابة $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a}$ تعني النهاية عند a بقيم صغرى.

تمرين 06 مع الحل

احسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \dfrac{x+4}{3x-6} = +\infty$

لأن:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} x+4 = 6 \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} 3x-6 = 0^+ \end{cases}$$

ندرس إشارة المقام $3x-6$

لدينا $3x-6=0$ تعني $x=2$ ومنه إشارة $3x-6$ مدونة في الجدول التالي:

x	$-\infty$	ك 2 ص	$+\infty$
$3x-6$	$-$	0	$+$

2) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 5} \dfrac{x+3}{-4x+20} = -\infty$

لأن:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 5} x+3 = 8 \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 5} -4x+20 = 0^- \end{cases}$$

ندرس إشارة المقام $-4x+20$

لدينا $-4x+20=0$ تعني $x=5$ ومنه إشارة $-4x+20$ مدونة في الجدول التالي:

x	$-\infty$	ك 5 ص	$+\infty$
$-4x+20$	$+$	0	$-$

3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-3x+1}{|x-2|} = -\infty$

لأن:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2} -3x+1 = -5 \\ \lim\limits_{x \to 2} |x-2| = 0^+ \end{cases}$$

4) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+1}{|x^2-3x+2|} = +\infty$

لأن:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1} x+1 = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1} |x^2-3x+2| = 0^+ \end{cases}$$

5) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{-2x+1}{(x-4)^2} = -\infty$

لأن:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 4} -2x+1 = -7 \\ \lim\limits_{x\to 4} (x-4)^2 = 0^+ \end{cases}$$

6) $\lim\limits_{x\overset{<}{\to} 2} \dfrac{4}{\sqrt{-3x+6}} = +\infty$

لأن: $\lim\limits_{x\overset{<}{\to} 2} \sqrt{-3x+6} = 0^+$

7) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to} 2} \dfrac{4}{\sqrt{x^2-3x+2}} = +\infty$

لأن: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to} 2} \sqrt{x^2-3x+2} = 0^+$

8) $\lim\limits_{x\overset{<}{\to} 5} \dfrac{x+4}{x^2-11x+30} = +\infty$

لأن:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\overset{<}{\to} 5} x+4 = 9 \\ \lim\limits_{x\overset{<}{\to} 5} x^2-11x+30 = 0^+ \end{cases}$$

ندرس إشارة المقام $x^2-11x+30$

نحل المعادلة $x^2-11x+30=0$ لدينا $\Delta=(-11)^2-4(1)(30)=1$ وبالتالي المعادلة تقبل حلان حقيقيان هما $x_1=5$ و $x_2=6$ و اشارة $x^2-11x+30$ مدونة في الجدول التالي:

x	$-\infty$	ك 5 ص	ك 6 ص	$+\infty$
$x^2-11x+30$		$+$ 0	$-$ 0	$+$

9) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to} 4} \dfrac{x+1}{-x^2+7x-12} = -\infty$

لأن:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\overset{>}{\to} 4} x+1 = 5 \\ \lim\limits_{x\overset{>}{\to} 4} -x^2+7x-12 = 0^- \end{cases}$$

ندرس إشارة المقام

$-x^2+7x-12$ نحل المعادلة $-x^2+7x-12=0$ لدينا $\Delta=(7)^2-4(-1)(-12)=1$ وبالتالي المعادلة تقبل حلان حقيقيان هما $x_1=3$ و $x_2=4$ واشارة $-x^2+7x+-12$ مدونة في الجدول التالي:

x	$-\infty$	ك 3 ص		ك 4 ص	$+\infty$
$-x^2+7x+-12$		$-$	0	$+$ 0	$-$

الدرس 04: النهايات حسابيا-الجزء02 (ح ع ت من الشكل $\frac{0}{0}$)

للتواصل معنا:

رقم الهاتف: 0656836024 الفايسبوك: Rachidyahiyahi

فايسبوك المجموعة: مجموعة الأستاذ ياحي رشيد لدروس الدعم والتقوية (رياضيات)

الحل المفصل موجود على قناتنا في اليوتيوب رياضيات التعليم الثانوي-الأستاذ ياحي رشيد

لإزالة ح ع ت من الشكل $\frac{0}{0}$

- الضرب في المرافق (دالة جذرية)
- التحليل ثم الإختزال (دالة ناطقة)
- العدد المشتق

نوضيح

- حالات عدم التعيين المقررة في الثانوي هي هي: $\infty-\infty$ ، ✓ $+\infty$ ، ✓ $0\times\infty$ ، ✓ $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\frac{0}{0}$.
- أي أن $\frac{0}{\infty}\to 0$; $\frac{\infty}{0}\to\pm\infty$ ليست حالات عدم التعيين

تمرين 07

احسب النهايات التالية

1. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}$
2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^2+7x-8}$
3. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-4}}$
4. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}$
5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{x-1}$
6. $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x}$
8. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$
9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{7x}$
10. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$
11. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{2021}-1}{x-1}$
12. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{2022}-1}{x^{1011}-1}$
13. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3-\sqrt{5x+4}}{\sqrt{x+3}-2}$
14. $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{\sqrt{x}}{x}$
15. $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{|2x|}{x}$
16. $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{|3x|}{x}$

الحل

احسب النهايات التالية

1 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$ حع ت من الشكل $\dfrac{0}{0}$,بالتالي

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}}=\lim_{x\to -2}x-2=-4$$

2 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^2+7x-8}$ حع ت من الشكل $\dfrac{0}{0}$,بالتالي نحلل كلا من البسط والمقام بقسمتهما على $x-x_0$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+3x^2-4x-1 & x-1 \\ \hline -2x^3+2x^2 & 2x^2+5x+1 \\ \hline 5x^2-4x & \\ -5x^2+5x & \\ \hline x-1 & \\ -x+1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

ومنه $\boxed{2x^3+3x^2-4x-1=(x-1)(2x^2+5x+1)}$

$$\begin{array}{r|l} x^2+7x-8 & x-1 \\ \hline -x^2+x & x+8 \\ \hline 8x-8 & \\ -8x+8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

ومنه $\boxed{x^2+7x-8=(x-1)(x+8)}$

وبالتالي

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^2+7x-8}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(2x^2+5x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+8)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+5x+1}{x+8}=\frac{8}{9}$$

3 $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-4}}$

حع ت من الشكل $\dfrac{0}{0}$ ومنه

$$\begin{aligned}\lim_{x\overset{<}{\to}-2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-4}} &= \lim_{x\overset{<}{\to}-2}\frac{(x+2)\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}\times\sqrt{x^2-4}}\\ &= \lim_{x\overset{<}{\to}-2}\frac{(x+2)\sqrt{x^2-4}}{x^2-4}\\ &= \lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}\sqrt{x^2-4}}{(x-2)\cancel{(x+2)}}\\ &= \frac{0}{-4}=0\end{aligned}$$

4 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}$ حع ت من الشكل $\dfrac{0}{0}$ ومنه

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x-1}-1} &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}{\sqrt{x-1}^2-(1)^2}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x-1}+1)}{\cancel{(x-2)}}\\ &= 2\end{aligned}$$

5 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{x-1}$ حع ت من الشكل $\dfrac{0}{0}$ ومنه

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1})(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1})}{(x-1)(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1})}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x+2-(2x+1)}{(x-1)(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1})}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(-x+1)}}{-\cancel{(-x+1)}(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1})}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1}{-(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1})}\\ &= -\frac{1}{2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

6 $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ حع ت من الشكل $\dfrac{0}{0}$ ومنه

$$\begin{aligned}\lim_{x\overset{>}{\to}1}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1} &= \lim_{x\overset{>}{\to}1}\frac{\sqrt{x-1}\times\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}(x-1)}\\ &= \lim_{x\overset{>}{\to}1}\frac{\cancel{(x-1)}}{\sqrt{x-1}\cancel{(x-1)}}\\ &= \lim_{x\overset{>}{\to}1}\frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty\end{aligned}$$

لأن: $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-1} = 0^+$

7 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x}$ حع ت من الشكل $\dfrac{0}{0}$ ومنه

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{(x^2-x)(\sqrt{x+1}+1)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(x+1-1)}{x(x-1)(\sqrt{x+1}+1)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{(x)}}{\cancel{(x)}(x-1)(\sqrt{x+1}+1)}\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

8 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ حع ت من الشكل $\dfrac{0}{0}$ ومنه

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} &= \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}^2-(2)^2}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(\sqrt{x+1}+2)}\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

9 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}$

ح ع ت من الشكل $\dfrac{0}{0}$

نستعمل العدد المشتق: بوضع $f(x)=x^4-16$ نجد $f(2)=0$ الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي $f'(x)=4x^3$ أي: $f'(2)=32$ ومنه

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=32$$

10 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2021}-1}{x-1}$ نستعمل العدد المشتق: بوضع $f(x)=x^{2021}-1$ نجد $f(1)=0$ الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي $f'(x)=2021x^{2020}$ أي: $f'(1)=2021$ ومنه

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{2021}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2021$$

11 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2022}-1}{x^{1011}-1}$

ح ع ت من الشكل $\dfrac{0}{0}$

نلاحظ ان $x^{2022}=(x^{1011})^2$ ومنه

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^{2022}-1}{x^{1011}-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x^{1011})^2-1}{x^{1011}-1}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x^{1011}-1)}(x^{1011}+1)}{\cancel{(x^{1011}-1)}}=2\end{aligned}$$

12 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)}{7x}$ نستعمل العدد المشتق: بوضع $f(x)=\sin(5x)$ نجد $f(0)=0$ الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي $f'(x)=5\cos(5x)$ أي: $f'(0)=5\cos(0)=5$

ومنه

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{7x}=\frac{1}{7}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x}=\frac{1}{7}\times\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{7}\times f'(0)=\frac{5}{7}$$

13 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-\sqrt{5x+4}}{\sqrt{x+3}-2}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{3-\sqrt{5x+4}}{\sqrt{x+3}-2} &= \lim_{x\to 1}\frac{(3-\sqrt{5x+4})(3+\sqrt{5x+4})(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(3+\sqrt{5x+4})(\sqrt{x+3}+2)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(9-(5x+4))(\sqrt{x+3}+2)}{(x+3-4)(3+\sqrt{5x+4})}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{-5\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+3}+2)}{\cancel{(x-1)}(3+\sqrt{5x+4})}\\ &= -\frac{20}{6}=-\frac{10}{3}\end{aligned}$$

14 $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \times \sqrt{x}} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

15 $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{|2x|}{x} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{2x}{x} = 2$

16 $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \dfrac{|3x|}{x} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \dfrac{-3x}{x} = -3$

الدرس (05): النهايات حسابيا-الجزء 03 حالة عدم التعيين من الشكل $\infty - \infty +$ و $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

للتواصل معنا:

رقم الهاتف: 0656836024 الفايسبوك: Rachidyahiyahi

فايسبوك المجموعة: مجموعة الأستاذ ياحي رشيد لدروس الدعم والتقوية (رياضيات)

الحل المفصل موجود على قناتنا في اليوتيوب رياضيات التعليم الثانوي-الأستاذ ياحي رشيد

لإزالة ح ع ت من الشكل $\infty - \infty +$ (حالة دالة جدرية)

- التحليل (اخراج العامل المشترك)
- الضرب في المرافق

قاعدة

- $\sqrt{ax+b} = \sqrt{x^2\left(\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2}\right)} = |x|\sqrt{\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2}}$
- $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{x^2\left(a + \dfrac{b}{x}\right)} = |x|\sqrt{a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2}}$

ملاحظة

✓ $\sqrt{x^2} = |x|$

✓ عند حساب النهاية عند $+\infty$ تقوم بتعويض $|x|$ بـ x

✓ عند حساب النهاية عند $-\infty$ تقوم بتعويض $|x|$ بـ $-x$

التمرين 08

احسب النهايات التالية

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3x-2}-x+5$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{-x-1}-x^2+1$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-2x+1}+3x-5$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+x+2}-2x$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+x+2}-2x^2$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{25x^2-3x-2}-\sqrt{9x^2+x+4}$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$

حل التمرين 08 حساب النهايات التالية

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3x-2}-x+5$

ح ع ت من الشكل $\infty-\infty+$ ومنه

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3x-2}-x+5 &= \lim_{x\to+\infty}|x|\sqrt{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}-x+5\\ &= \lim_{x\to+\infty}x\sqrt{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}-x+5\\ &= \lim_{x\to+\infty}x\left[\sqrt{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}-1+\frac{5}{x}\right]=-\infty\end{aligned}$$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{-x-1}-x^2+1$

ح ع ت من الشكل $\infty-\infty+$ ومنه

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-x-1}-x^2+1 &= \lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt{\frac{-1}{x}-\frac{1}{x^2}}-x^2+1\\ &= \lim_{x\to-\infty}-x\sqrt{-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-x^2+1\\ &= \lim_{x\to-\infty}x\left[-\sqrt{-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-x+\frac{1}{x}\right]=-\infty\end{aligned}$$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-2x+1}+3x-5$

ح ع ت من الشكل $\infty-\infty$ ومنه

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-2x+1}+3x-5 &= \lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+3x-5\\ &= \lim_{x\to-\infty}-x\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+3x-5\\ &= \lim_{x\to-\infty}x\left[-\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+3-\frac{5}{x}\right]=-\infty\end{aligned}$$

4) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+x+2}-2x$

ح ع ت من الشكل $\infty-\infty$ ومنه

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+x+2}-2x &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+x+2}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+x+2}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+x+2}+2x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+x+2-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+x+2}+2x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{\sqrt{4x^2+x+2}+2x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+2x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+2\right)}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

5) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+x+2}-2x^2$

ح ع ت من الشكل $\infty-\infty$ ومنه

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+x+2}-2x^2 &= \lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+x+2}-2x^2\\ &= \lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-2x^2\\ &= \lim_{x\to-\infty}-x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-2x^2\\ &= \lim_{x\to-\infty}x\left[-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-2x\right]=-\infty\end{aligned}$$

الدرس 06: نهاية دالة تتضمن قيمة مطلقة

قاعدة

$|x| = \begin{cases} x & , \ x \geq 0 \\ -x & , \ x < 0 \end{cases}$ وبصفة عامة، من أجل كل عبارة جبرية $A(x)$ لدينا: $|A(x)| = \begin{cases} A(x) & , \ A(x) \geq 0 \\ -A(x) & , \ A(x) < 0 \end{cases}$

لدينا

التمرين 09

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$.

① اكتب $|x-2|$ دون رمز القيمة المطلقة. ثم استنتج نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفها.

حل التمرين 09

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$.

① كتابة $|x-2|$ دون رمز القيمة المطلقة.

$|x-2| = \begin{cases} -(x-2) & , \ x-2 \leq 0 \\ x-2 & , \ x-2 \geq 0 \end{cases}$ أي $|x-2| = \begin{cases} -(x-2) & , \ x \in]-\infty;2] \\ x-2 & , \ x \in [2;+\infty[\end{cases}$

وبالتالي

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{(x-2)}{x-2} & , \ x \in]-\infty;2[\\ \dfrac{x-2}{x-2} & , \ x \in]2;+\infty[\end{cases}$$

حساب نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفها.

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-(x-2)}{(x-2)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x}{x} = -1$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x-2)}{(x-2)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x} = 1$

3) $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} \dfrac{-(x-2)}{(x-2)} = -1$

4) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \dfrac{-(x-2)}{(x-2)} = 1$

التمرين 10

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ $f(x) = \dfrac{|x^2 - 3x + 2|}{x-1}$.

① اكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة ثم احسب نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفها.

حل التمرين 10

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ $f(x)=\dfrac{|x^2-3x+2|}{x-1}$.

① كتابة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة اولا ندرس إشارة x^2-3x+2 نحل المعادلة $x^2-3x+2=0$ لدينا $\Delta=(-3)^2-4(1)(2)=1>0$ وبالتالي المعادلة تقبل حلان حقيقيان هما $x_1=1$ و $x_2=2$ واشارة x^2-3x+2 مدونة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

وبالتالي:

$$|x^2-3x+2|=\begin{cases}-(x^2-3x+2) & , \quad x^2-3x+2\le 0\\ x^2-3x+2 & , \quad x^2-3x+2\ge 0\end{cases}$$

أي

$$|x^2-3x+2|=\begin{cases}-(x^2-3x+2) & , \quad x\in[1;2]\\ x^2-3x+2 & , \quad x\in]-\infty;1]\cup[2;+\infty[\end{cases}$$

وبالتالي:

$$f(x)=\frac{|x^2-3x+2|}{x-1}=\begin{cases}\dfrac{-(x^2-3x+2)}{x-1} & , \quad x\in]1;2]\\ \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} & , \quad x\in]-\infty;1[\cup[2;+\infty[\end{cases}$$

حساب نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفها.

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}f(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}}=-1$

4) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\dfrac{-(x^2-3x+2)}{x-1}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\dfrac{-\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}}=1$

الدرس 07: المستقيمات المقاربة (التفسير البياني (الهندسي) للنهايات)

المستقيمات المقاربة-التفسير الهندسي أو البياني للنهايات f دالة و (C_f) تمثيلها البياني. في المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

① المستقيم المقارب الافقي (الموازي لحامل محور الفواصل)

إذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$ فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب افقي (موازي لحامل محور الفواصل) عند $\pm\infty$ معادلته $y=b$

② المستقيم المقارب العمودي (الموازي لحامل محور التراتيب)

إذا كان $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي (موازي لحامل محور التراتيب) معادلته $x=a$

③ المستقيم المقارب المائل

- الحالة 01: تعطى عبارة f ومعادلة المستقيم $(\Delta): y=ax+b$

السؤال هو: بين ان المستقيم $(\Delta): y=ax+b$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $\pm\infty$

جواب: نتحقق أن: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

- الحالة 02: إذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)]=c$ فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل عند $\pm\infty$ معادلته $y=ax+b+c$
- الحالة 03 إذا كان $f(x)=ax+b+h(x)$

السؤال هو: أستنتج ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب كتابة معادلته:

- الجواب نقوم بحساب $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x)$

✓ ادا كانت $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x)=0$ فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل عند $\pm\infty$ معادلته $y=ax+b$

✓ ادا كانت $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x)=c$ فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل عند $\pm\infty$ معادلته $y=ax+b+c$

④ المنحنيان المتقاربان

إذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-h(x)]=0$ فإن (C_f) و (C_h) متقاربان عند $\pm\infty$

التمرين 11

f دالة و (C_f) تمثيلها البياني. في المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، فسر هندسيا النهايات التالية:

1 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=+\infty$ **2** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ **3** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$ **4** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ **5** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-2x=0$ **6** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(2x+1)=3$ **7** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x^2=0$

حل التمرين 11

f دالة و (C_f) تمثيلها البياني. في المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، فسر هندسيا النهايات التالية:

1 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=+\infty$: $x=1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي (موازي لحامل محور التراتيب) لـ (C_f)

2 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$: $x = 0$ معادلة مستقيم مقارب عمودي ل (C_f)

3 $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -2$: $y = -2$ معادلة مستقيم مقارب أفقي (موازي لحامل محور الفواصل)ل (C_f) عند $+\infty$

4 $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$: $y = 0$ معادلة مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) عند $-\infty$

5 $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) - 2x = 0$: $y = 2x$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$

6 $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - (2x+1) = 3$: $y = 2x+4$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

7 $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) - x^2 = 0$: (C_f) ومنحنى الدالة h حيث $h(x) = x^2$ (الدالة مربع) متقاربان عند $-\infty$

التمرين 12

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x) = 2 - \dfrac{3}{\sqrt{x-1}}$

1) أحسب كلا من $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\overset{>}{\to} 1} f(x)$ ثم فسر النتائج هندسيا.

حل التمرين 12

1) حساب النهايات

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} 2 - \dfrac{3}{\sqrt{x-1}} = 2$ ✓

التفسير الهندسي: $y = 2$ معادلة مستقيم مقارب أفقي ل (C_f) بجوار $+\infty$

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x\overset{>}{\to} 1} 2 - \dfrac{3}{\sqrt{x-1}} = -\infty$ ✓ ($\lim\limits_{x\overset{>}{\to} 1} \sqrt{x-1} = 0^+$ لأن)

التفسير الهندسي: $x = 1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي ل (C_f)

التمرين 13

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ: $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{3}{x-1}$.

1) بين ان المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 2x-1$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f عند كل من $+\infty$ و $-\infty$.

2) حدد وضعية (Δ) بالنسبة للمنحنى (C_f)

حل التمرين 13

1) تبيات ان المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 2x-1$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f عند كل من $+\infty$ و $-\infty$.

لدينا ✓ $\lim\limits_{|x|\to +\infty} f(x) - (2x+1) = \lim\limits_{|x|\to +\infty} 2x - 1 + \dfrac{3}{x-1} - (2x+1) = \lim\limits_{|x|\to +\infty} \dfrac{3}{x-1} = 0$

ومنه المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 2x-1$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f عند كل من $+\infty$ و $-\infty$

2) تحديد وضعية (Δ) بالنسبة للمنحنى (C_f)

نقوم بدراسة إشارة الفرق: $f(x)-(2x-1)$

ما أحل كل $x \neq 1$ لدينا $f(x)-(2x-1)=\dfrac{3}{x-1}$ ومنه اشارة الفرق من اشارة المقام وبالتالي وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ) ملخصة في الجدول التالي

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-(2x-1)$	$-$		$+$
الوضعية النسبية	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) فوق (Δ)

الدرس 08: النهايات حسابيا ومن جدول التغيرات

تمرين 14

في كل حالة من الحالات الآتية f دالة عددية قابلة للإشتقاق على كل مجال من مجموعة تعريفها، ومعرفة بجدول تغيراتها.

المطلوب: عين نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها مفسرا النتائج هندسيا إن أمكن:

الحالة ①

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0.5	↘	0	↗	$+\infty$

الحل

① مجموعة تعريف الدالة f هي:

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$$

② تعيين نهايات الدالة بيانيا

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$,
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

الحالة ②

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$+\infty$ ↗ 2		$+\infty$ ↘ 2	

الحل

① مجموعة تعريف الدالة f هي:

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$$

② تعيين نهايات الدالة f

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$,
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$,
- $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = -\infty$,
- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = +\infty$

الحالة ③

x	$-\infty$		0		2		3	$+\infty$
$f(x)$		4 ↘ 1		$+\infty$ ↗ 0		$+\infty$ ↘ -2		

الحل

① مجموعة تعريف الدالة f هي:

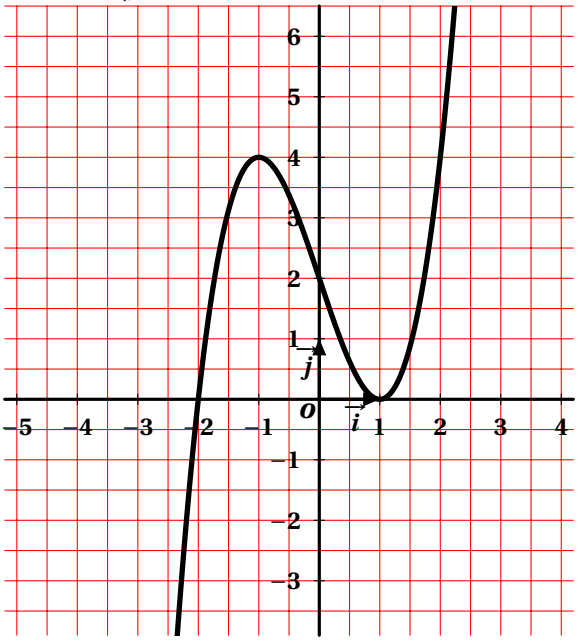
$$D_f = \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$$

② تعيين نهايات الدالة f

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4$,
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$,
- $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = +\infty$,
- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = +\infty$

تمرين 15 مع الحل

الشكل اسفله يمثل (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f



باستعمال منحنى الدالة f

① عين مجموعة تعريف الدالة f .

② عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف

الجواب:

① مجموعة تعريف الدالة f هي:

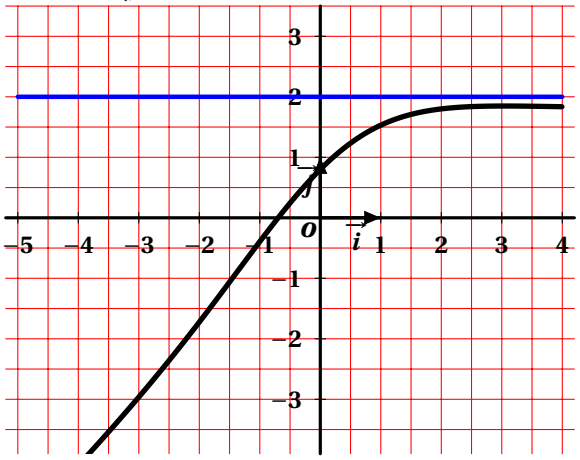
$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$$

② تعيين نهايات الدالة بيانيا

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

تمرين 16 مع الحل

الشكل اسفله يمثل (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f



باستعمال منحنى الدالة f

① عين مجموعة تعريف الدالة f .

② عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف ثم استنتج معادلة المستقيم المقارب الافقي لـ (C_f)

الجواب:

① مجموعة تعريف الدالة f هي:

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$$

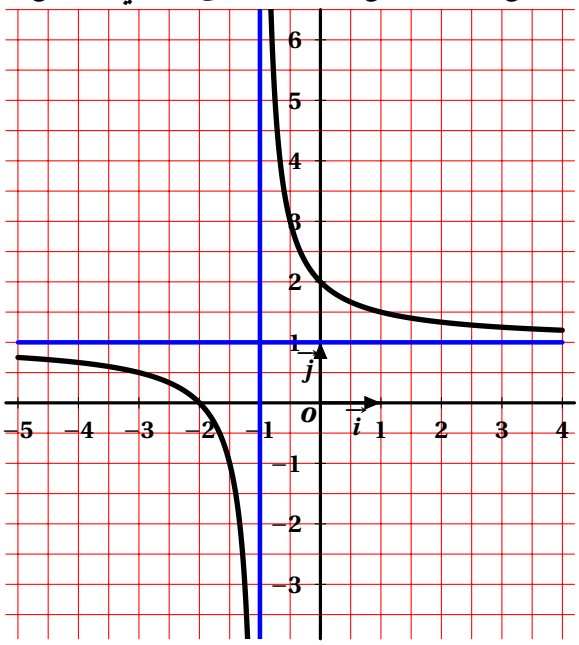
② تعيين نهايات الدالة بيانيا

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

وبالتالي $y = 2$ معادلة مستقيم مقارب افقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$

تمرين 17 مع الحل

الشكل اسفله يمثل (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f



باستعمال منحنى الدالة f

① عين مجموعة تعريف الدالة f .

② عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف مع تفسيرها هندسيا

الجواب:

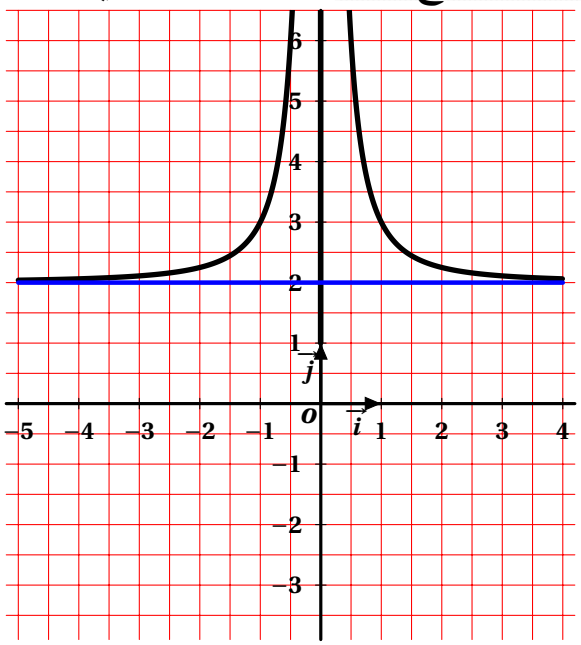
① مجموعة تعريف الدالة f هي:

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$$

② تعيين نهايات الدالة f

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ وبالتالي $y = 1$ معادلة مستقيم مقارب افقي لـ (C_f) بجوار $-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ وبالتالي $y = 1$ معادلة مستقيم مقارب افقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x<-1}} f(x) = -\infty$ وبالتالي $x = -1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) .
- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x>-1}} f(x) = +\infty$ وبالتالي $x = -1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) .

تمرين 18 مع الحل (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f



باستعمال منحنى الدالة f

① عين مجموعة تعريف الدالة f .

② عين نهايات الدالة f واستنتج معالات المستقيمات المقاربة لـ (C_f)

الجواب:

① مجموعة تعريف الدالة f هي:

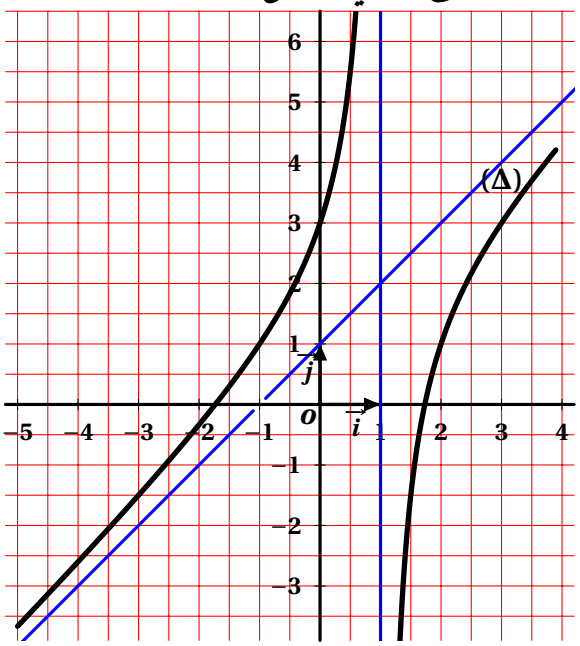
$$D_f = \mathbb{R} - \{0\} =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$$

② تعيين نهايات الدالة f

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ وبالتالي $y = 2$ معادلة مستقيم مقارب افقي لـ (C_f) بجوار $-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ وبالتالي $y = 2$ معادلة مستقيم مقارب افقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$
- $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} f(x) = +\infty$ وبالتالي $x = 0$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) .
- $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x) = +\infty$ وبالتالي $x = 0$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) .

تمرين 19

(C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f



باستعمال منحنى الدالة f

① عين مجموعة تعريف الدالة f .

② عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف مع تفسيرها هندسيا ان امكن

③ مثل جدول تغيرات الدالة f.

الجواب:

① مجموعة تعريف الدالة f هي:

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$$

② تعيين نهايات الدالة f

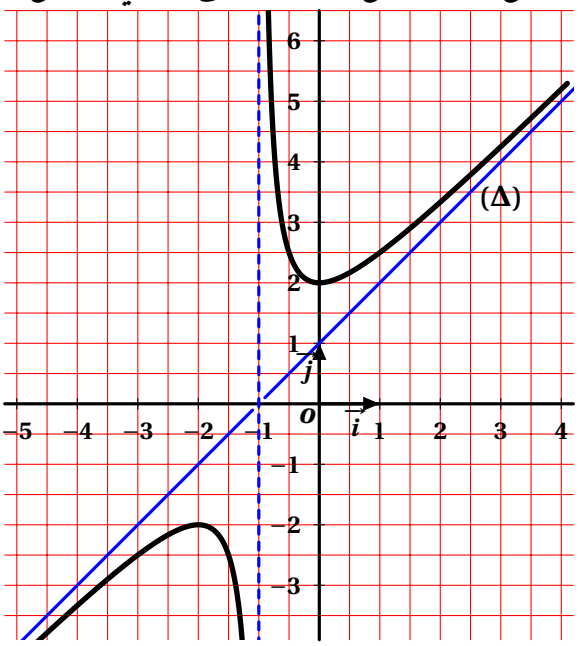
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = +\infty$ وبالتالي $x = 1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) .
- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = -\infty$ وبالتالي $x = 1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) .

③ جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$

تمرين 20 مع الحل

الشكل اسفله يمثل (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f



باستعمال منحنى الدالة f

① عين مجموعة تعريف الدالة f .

② عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف مع تفسيرها هندسيا ان امكن

③ مثل جدول تغيرات الدالة f.

الجواب:

① مجموعة تعريف الدالة f هي:

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$$

② تعيين نهايات الدالة f

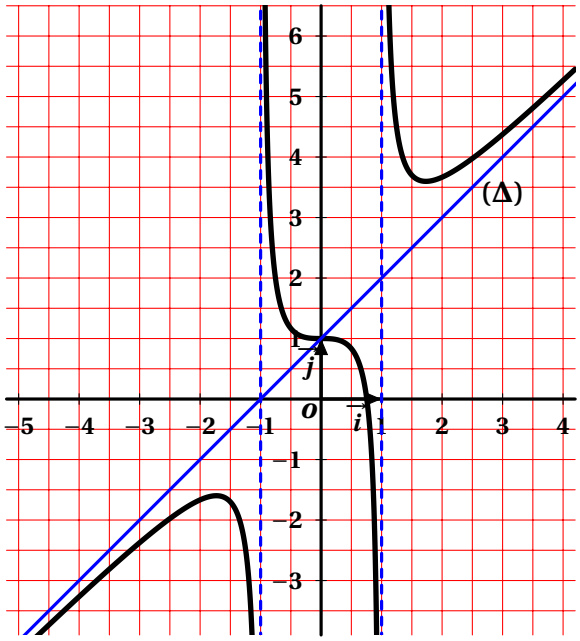
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-1} f(x) = -\infty$ وبالتالي $x = -1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) .
- $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x) = +\infty$ وبالتالي $x = -1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) .

③ جدول تغيرات الدالة

x	$-\infty$		2		-1		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

تمرين 21 مع الحل

الشكل اسفله يمثل (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f.



باستعمال منحنى الدالة f

① عين مجموعة تعريف الدالة f .

② عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف مع تفسيرها هندسيا ان امكن

الجواب:

① مجموعة تعريف الدالة f هي:

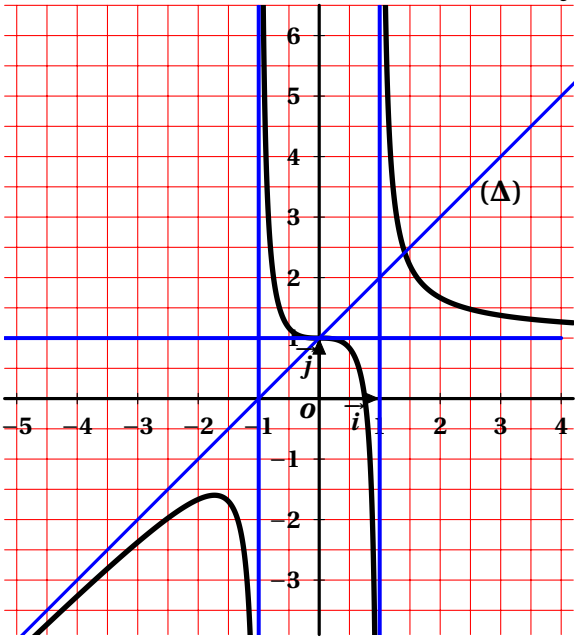
$$D_f = \mathbb{R} - \{-1;1\} =]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$$

② تعيين نهايات الدالة f

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-1} f(x) = -\infty$ وبالتالي $x=-1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) .
- $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} f(x) = +\infty$ وبالتالي $x=-1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) .
- $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} f(x) = -\infty$ وبالتالي $x=1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)
- $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x) = +\infty$ وبالتالي $x=1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)

التمرين 22

الشكل اسفله يمثل (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f.



نفس الاسئلة.

الجواب:

① مجموعة تعريف الدالة f هي:

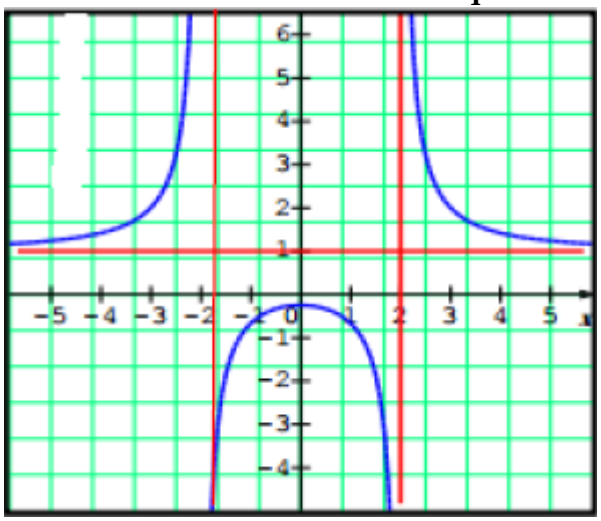
$$D_f = \mathbb{R} - \{-1;1\} =]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$$

② تعيين نهايات الدالة f

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ وبالتالي $y = 1$ معادلة مستقيم مقارب افقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$.
- $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = -\infty$ وبالتالي $x = -1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) .
- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = +\infty$ وبالتالي $x = -1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) .
- $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = -\infty$ وبالتالي $x = 1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)
- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = +\infty$ وبالتالي $x = 1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)

تمرين 23 مع الحل

الشكل اسفله يمثل (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f حيث $f(0) = -\frac{1}{4}$.



باستعمال منحنى الدالة f

① عين مجموعة تعريف الدالة f .

② عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف مع تفسيرها هندسيا

③ مثل جدول تغيرات الدالة f.

الجواب:

① مجموعة تعريف الدالة f هي:

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2;2\} =]-\infty;-2[\cup]-2;2[\cup]2;+\infty[$$

② تعيين نهايات الدالة f

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ وبالتالي $y = 1$ معادلة مستقيم مقارب افقي لـ (C_f) بجوار $-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ وبالتالي $y = 1$ معادلة مستقيم مقارب افقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$.
- $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-2} f(x) = +\infty$ وبالتالي $x = -2$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) .
- $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-2} f(x) = -\infty$ وبالتالي $x = -2$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) .
- $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}2} f(x) = -\infty$ وبالتالي $x = 2$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)
- $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}2} f(x) = +\infty$ وبالتالي $x = 2$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)

③ جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$	1	↗	$+\infty$	↗	$-\frac{1}{4}$	↘	$+\infty$	↘	1
			$-\infty$						