مجلة المتفوق في الرياضيات
بـــكالـــوريـــا 2027

① الدوال العددية

للشعب: علوم تجريبية +هندسة + رياضيات

تجميع، كتابة واعداد الأستاذ: ياحي رشيد

عدد التمارين 126

✍ **المحتوى:** مجلة المتفوق الرياضيات في حلتها الجديدة مقسمة الى جزئين:

♣ **الجزء الأول:** ملخص شامل حول محور الدوال العددية

♣ **الجزء الثاني** : سلسلة تمارين حول الدوال العدية ، مواضيع مقترحة

لطلب نسخة من الحلول تواصلو معنا عبر

مجموعة تيليغرام خاصة بتلاميد البكالوريا https://t.me/+SKI_1wBJn584ODhk

تيليغرم | اليوتيوب | الانستغرام | الفيس بوك

✆ للتواصل معنا 0656836024

Prof : Yahi Rachid

الجزء الأول: ملخص شامل حول محور الدوال العددية

1) إشارة العبارة $ax+b$ مع $a\neq 0$

إشارة العبارة $ax+b$ مدونة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$	عكس إشارة a		0	مثل إشارة a	

2) إشارة العبارة ax^2+bx+c مع $a\neq 0$

لدراسة إشارة العبارة ax^2+bx+c أولا نقوم بحل المعادلة $ax^2+bx+c=0...(1)$ بحساب المميز Δ حيث $\Delta=b^2-4ac$ نميز الثلاث حالات التالية:

✓ الحالة01: $\Delta<0$ وبالتالي المعادلة (1) لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$ ومنه

x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+bx+c	مثل إشارة a	

العبارة ax^2+bx+c لاتقبل تحليل

✓ الحالة02: $\Delta=0$ وبالتالي المعادلة (1) تقبل حلا مضاعف هو $x_1=-\frac{b}{2a}$ ومنه:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
ax^2+bx+c	مثل إشارة a		0	مثل إشارة a	

تحليل العبارة ax^2+bx+c هو $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$

✓ الحالة03: $\Delta>0$ وبالتالي المعادلة (1) تقبل حلين مختلفين $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$، $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ (نفرض $x_1<x_2$) ومنه

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c	مثل إشارة a		0	عكس إشارة a	0	مثل إشارة a	

تحليل العبارة ax^2+bx+c هو $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Prof : Yahi Rachid

الأسئلة الشائعة في الدوال وكيفية الإجابة عليها

السؤال	جواب
☜ التفسير البياني أو الهندسي للنهايات (المستقيمات المقاربة) .	
فسر هندسيا النتيجة $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$	(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = a$
فسر هندسيا النتيجة $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = a$	(C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي (موازٍ لمحور الفواصل) عند $\pm\infty$ معادلته $y = a$
فسر هندسيا النتيجة $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$	(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل عند $\pm\infty$ معادلته $y = ax+b$
فسر هندسيا النتيجة $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) - (ax+b) = c$	(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل عند $\pm\infty$ معادلته $y = ax+b+c$
إذا كان $f(x) = ax+b+g(x)$ استنتج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب تعيين معادلة له.	نتحقق أن $\lim\limits_{x\to \pm\infty} g(x) = 0$ وبالتالي (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل عند $\pm\infty$ معادلته $y = ax+b$
☜ المنحنيان المتقاربان بجوار $\pm\infty$	
فسر هندسيا النتيجة $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) - g(x) = 0$	المنحنيان (C_f) و (C_g) متقاربان بجوار $\pm\infty$
☜ دراسة وضعية منحنى بالنسبة للمستقيم	
لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم $(\Delta): y = ax+b$	ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$ وبالتالي إذا كان: • $f(x) - y > 0$ فإن: (C_f) أعلى المستقيم (Δ). • $f(x) - y < 0$ فإن: (C_f) اسفل المستقيم (Δ). • $f(x) - y = 0$ فإن: (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في نقطة $A(x_0; f(x_0))$ (أو يمس في حال لم تتغير اشارة الفرق) .
☜ نعيين نقط التقاطع مع محوري الإحداثيات	
عين نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل (xx')	نقوم بحل المعادلة $f(x) = 0$
عين نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب (yy')	نقوم بحساب $f(0)$ حيث $(C_f) \cap (yy') = A(0; f(0))$

Prof Yahi Rachid

شفعية دالة

اثبت أن f دالة زوجية **ملاحظة:** منحنى الدالة الزوجية متناظر بالنسبة لمحور التراتيب	✓ من أجل كل x من D_f فإن: $-x \in D_f$ ✓ من أجل كل x من D_f فإن: $f(-x)=f(x)$ أو $f(-x)-f(x)=0$
اثبت أن f دالة فردية **ملاحظة:** منحنى الدالة الفردية متناظر بالنسبة لمبدأ المعلم	✓ من أجل كل x من D_f فإن: $-x \in D_f$ ✓ من أجل كل x من D_f فإن: $f(-x)=-f(x)$ أو $f(-x)+f(x)=0$

مركز ومحور تناظر

مركز تناظر : بين أن النقطة $\Omega(a;b)$ مركز تناظر لمنحنى الدالة f .	✓ **ط 1** نتحقق أنه لكل x من D_f يكون $2a-x \in D_f$ و $f(2a-x)+f(x)=2b$ أو ✓ **ط 2** نتحقق أنه لكل $a+x$ من D_f يكون $a-x \in D_f$ و $f(a-x)+f(a+x)=2b$
المسألة العكسية لمركز تناظر تحقق أنه لكل x من D_f يكون $2a-x \in D_f$ و $f(2a-x)+f(x)=2b$ ثم فسر النتيجة هندسيا.	التحقق يكون حسابيا. والتفسير الهندسي هو: النقطة $\Omega(a;b)$ مركز تناظر لمنحنى الدالة f
محور تناظر : بين أن المستقيم $x=a$ محور تناظر لمنحنى الدالة f .	✓ **ط 1** نتحقق أن لكل x من D_f يكون $2a-x \in D_f$ و $f(2a-x)-f(x)=0$ أو ✓ **ط 2** نتحقق أنه لكل $a+x$ من D_f يكون $a-x \in D_f$ و $f(a-x)-f(a+x)=0$
المسألة العكسية لمحور تناظر : تحقق أنه لكل x من D_f يكون $2a-x \in D_f$ و $f(2a-x)-f(x)=0$ ثم فسر النتيجة هندسيا	التحقق يكون حسابيا. والتفسير الهندسي هو: أن المستقيم دي المعادلة $x=a$ محور تناظر لمنحنى الدالة f .

Prof: Yahi Rachid

نقطة انعطاف

بين أن $A(x_0;f(x_0))$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f	توجد 3 طرق: **طريقة01:** نتحقق أن المشتقة الثانية f'' تنعدم و**تغير** من إشارتها بجوار x_0 **طريقة02:** نتحقق أن المشتقة الأولى f' تنعدم و **لا تغير** من إشارتها بجوار x_0 **طريقة03:** نتحقق أن المماس (T) عند $A(x_0;f(x_0))$ يخترق المنحنى (C_f). اي الفرق $f(x)-y$ يغير اشارته بجوار x_0 حيث: $y=ax+b$ معادلة المماس (T)

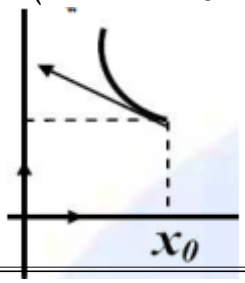
استمرارية دالة

اثبت أن f مستمرة عند a من اليسار.	نتحقق من أن $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}a} f(x)=f(a)$
اثبت أن f مستمرة عند a من اليمين.	نتحقق من أن : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}a} f(x)=f(a)$
اثبت أن f مستمرة عند a	نتحقق من أن : $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}a} f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}a} f(x)=f(a)$

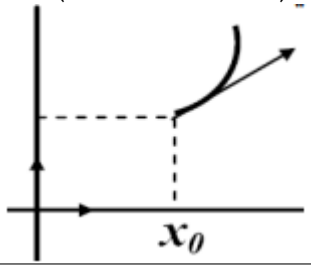
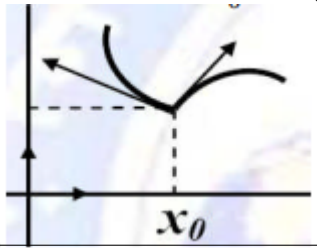
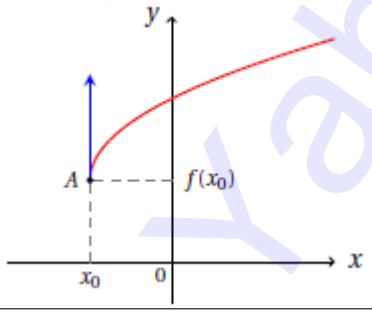
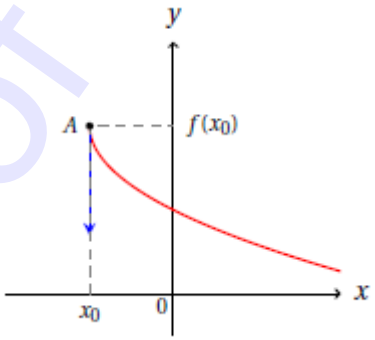
مبرهنة القيم المتوسطة

الحالة الخاصة: اثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على المجال $]a;b[$ **ملاحظة:** قد يكون السؤال كذلك على الشكل بين أن منحنى الدالة f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $a<\alpha<b$	نتحقق مما يلي: • الدالة f مستمرة ورتيبة على المجال $]a;b[$ • $f(a)\times f(b)<0$.
اعط التفسير الهندسي لمبرهنة القيم المتوسطة (الحالة الخاصة) .	منحنى الدالة f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $a<\alpha<b$
الحالة العامة: اثبت أن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا على المجال $]a;b[$ **ملاحظة:** قد يكون السؤال كذلك على الشكل : بين أن منحنى الدالة f يقطع المستقيم ذي المعادلة $y=k$ في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $a<\alpha<b$	نتحقق مما يلي: • الدالة f مستمرة ورتيبة على المجال $]a;b[$ • العدد k محصور بين العددين $f(a)$ و $f(b)$

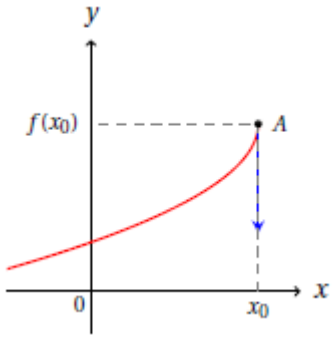
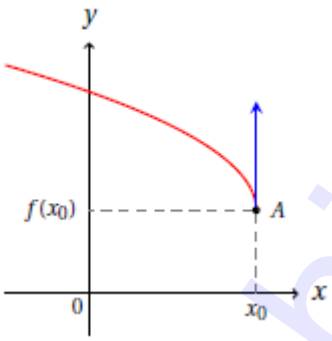
قابلية الإشتقاق والتفسير الهندسي

① ادا كانت $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a$ فإن :	f تقبل الإشتقاق عند x_0 ومنحناها يقبل مماس عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ معامل توجيهه هو a (في حالة $a=0$ يوجد مماس افقي)
② اداكانت $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a$ فإن:	الدالة f تقبل الإشتقاق عند x_0 من اليسار ومنحناها يقبل نصف مماس من اليسار عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ معامل توجيهه هو a (انظر الشكل اسفله) 

Prof : Yahi Rachid

③ اذاكانت $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a$ فإن:	الدالة f تقبل الإشتقاق عند x_0 من اليمين ومنحناها يقبل نصف مماس من اليمين عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ معامل توجيهه هو a (انظر الشكل اسفله) 
④ اذاكانت $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a$ و $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a'$ حيث $a \neq a'$ فإن:	الدالة f لا تقبل الإشتقاق عند x_0 و منحنى الدالة f يقبل نصفي مماس عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ تسمى نقطة زاوية (انظر الشكل اسفله) 
⑤ اذاكانت $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ فإن:	الدالة f لا تقبل الإشتقاق عند a من اليمين و منحنى الدالة f يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى معادلته $x = x_0$ (انظر الشكل اسفله) 
⑥ اذاكانت $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ فإن:	الدالة f لا تقبل الإشتقاق عند a من اليمين و منحنى الدالة f يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الاسفل معادلته $x = x_0$ (انظر الشكل اسفله) 

Prof Yahi Rachid

⑦ اذاكانت $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ فإن:	الدالة f لا تقبل الإشتقاق عند a من اليسار و منحنى الدالة f يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الاسفل معادلته $x=x_0$ (انظر الشكل اسفله) 
⑧ اذاكانت $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ فإن:	الدالة f لا تقبل الإشتقاق عند a من اليسار و منحنى الدالة f يقبل مماس عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نص مماس عمودي موجه نحو الاعلى معادلته $x=x_0$ (انظر الشكل اسفله) 
☜ المماس و مايتعلق به من أسئلة	
① اكتب معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة x_0	$(T): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
② اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الترتيبة y_0 .	نقوم بحل المعادلة $f(x)=y_0$ وبعد ايجاد الحل x_0 (أو الحلول) نكتب معادلة المماس كما في الحالة ① .
③ بين أن (C_f) يقبل مماس (أو أكثر) **معامل توجيهه** أو **ميله** a أو **موازٍ للمستقيم** ذي المعادلة $y=ax+b$ يطلب كتابة معادلته.	نقوم بحل المعادلة $f'(x)=a$ وبعد ايجاد الحل x_0 (أو الحلول) نكتب معادلة المماس كما في الحالة ① .
④ بين أن (C_f) يقبل مماس (أو أكثر) يشملان النقطة $A(a;b)$ يطلب كتابة معادلته.	نقوم بحل المعادلة $b=f'(x_0)(a-x_0)+f(x_0)$ وبعد ايجاد الحل x_0 (أو الحلول) نكتب معادلة المماس كما في الحالة ① .
⑤ بين أن (C_f) يقبل مماس (أو أكثر) يعامد المستقيم دي ابمعادلة $y=ax+b$	نقوم بحل المعادلة $f'(x)=-\dfrac{1}{a}$ وبعد ايجاد الحل x_0 (أو الحلول) نكتب معادلة المماس كما في الحالة ① .
⑥ بين أنه يوجد مماس مشترك بين (C_f) و (C_g)	نقوم بحل الجملة: $\begin{cases} f'(x_0) = g'(x_0) \\ f(x_0) = g(x_0) \end{cases}$ بعد ايجاد الحل x_0 (أو الحلول) نكتب معادلة المماس كما في الحالة ① .

Prof : Yahi Rachid

تعيين $f'(x_0)$ بيانيا	
عين صورة x_0 بالدالة f' بيانيا: (والذي يمثل معامل توجيه المماس (T) عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$)	**طريقة ومنهجية** : لنعيين $f'(x_0)$ بيانيا نميز حالتين ✓ اذا قبل منحنى الدالة f مماس افقي (T) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 فإن $f'(x_0)=0$ ✓ اذا قبل منحنى الدالة مماس (مائل) (T) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 فإنه لحساب $f'(x_0)$ نعين نقطتين $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ من المماس (T) ومنه: $f'(x_0)=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$
اتجاه تغير دالة	
لتحديد اتجاه تغير دالة f حسابيا نقوم بحساب المشتقة f' حيث :	• اذا كانت $f'(x)<0$ على مجال I فان الدالة f متناقصة تماما على المجال I • اذا كانت $f'(x)>0$ على مجال I فان الدالة f متزايدة تماما على المجال I .
دراسة تغيرات دالة f على مجال I	
لدراسة تغيرات دالة f على مجال I نتبع مايلي:	✓ نحسب نهايات الدالة f عند الاطراف المفتوحة لي I ✓ ندرس اتجاه تغير f (كما ذكر اعلاه) ✓ نشكيل جدول تغيرات الدالة f
إستنتاج تمثيل بياني لدالة إنطلاقا من تمثيل بياني لدالة اخرى:	
① نضع $g(x)=f(x+a)+b$	(C_g) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-a\\b\end{pmatrix}$
② نضع $g(x)=-f(x)$	المنحنيان (C_f) و (C_g) متناظرين بالنسبة لمحور الفواصل.
③ نضع $K(x)=f(-x)$	نقوم باستنتاج (C_K) إنطلاقا من (C_f) على النحو التالي: ✓ (C_K) و (C_f) متناظران بالنسبة لمحور التراتيب.
④ نضع $h(x)=\lvert f(x)\rvert$	نقوم باستنتاج (C_f) إنطلاقا من (C_h) على النحو التالي: ✓ الجزء من (C_f) الواقع فوق محور الفواصل يكون فيه (C_f) و (C_h) متطابقين. ✓ الجزء من (C_f) الواقع تحت محور الفواصل يكون فيه (C_f) و (C_h) متناظرين بالنسبة لمحور الفواصل.
⑤ نضع $S(x)=f(\lvert x\rvert)$	نقوم باستنتاج (C_f) إنطلاقا من (C_S) على النحو التالي: ✓ نبين أن S دالة زوجية. ✓ من أجل $x\in[0;+\infty[$ يكون $S(x)=f(x)$ و بالتالي (C_S) و (C_f) متطابقان على المجال $[0;+\infty[$ وبماأن S دالة زوجية فنتم رسم (C_S) بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

Prof : Yahi Rachid

⑥ نضع $L(x)=f(-\|x\|)$	نقوم باستنتاج (C_L) إنطلاقا من (C_f) على النحو التالي: ✓ نبين أن L دالة زوجية. ✓ من أجل $x\in]-\infty;0]$ يكون $L(x)=f(x)$ و بالتالي (C_L) و (C_f) متطابقان على المجال $]-\infty;0]$ وبماأن L دالة زوجية فنتم رسم (C_L) بالتناظر باالنسبة لمحور التراتيب.
⑦ نضع $P(x)=-f(-x)$	نقوم باستنتاج (C_P) إنطلاقا من (C_f) على النحو التالي: ✓ (C_P) و (C_f) متناظران باالنسبة لمبدأ المعلم.

مشتقات الدوال المألوفة (نتائج و مبرهنات)

☜ مشتقات الدوال المألوفة (نتائج و مبرهنات)

الدالة	مشتقتها
$x\mapsto a$	$x\mapsto 0$
$x\mapsto ax+b$	$x\mapsto a$
$x\mapsto x^2$	$x\mapsto 2x$
$x\mapsto x^n$	$x\mapsto nx^{n-1}$
$x\mapsto g(x)^n$	$x\mapsto ng(x)'\times g(x)^{n-1}$
$x\mapsto \sqrt{x}$	$x\mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$x\mapsto \sqrt{g(x)}$	$x\mapsto \dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$
$x\mapsto \dfrac{1}{x}$	$x\mapsto -\dfrac{1}{x^2}$
$x\mapsto cos(x)$	$x\mapsto -sin(x)$
$x\mapsto sinx$	$x\mapsto cosx$
$x\mapsto f(ax+b)$	$x\mapsto af'(ax+b)$
$x\mapsto f(x)\times g(x)$	$x\mapsto f'(x)\times g(x)+g'(x)\times f(x)$
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$x\mapsto \dfrac{f'(x)\times g(x)-g'(x)\times f(x)}{g(x)^2}$

☜ ترجمة معطيات لايجاد مجاهيل

✓ (C_f) يشمل النقطة $A(x_0,y_0)$ تعني $\boxed{f(x_0)=y_0}$

✓ (C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0,y_0)$ مماس **معامل توجيهه** أو **ميله** a أو **موازٍ للمستقيم** ذي المعالة $y=ax+b$ تعني $\boxed{f(x_0)=y_0}$ و $\boxed{f'(x_0)=a}$

✓ الدال f قابلة للأشتقاق عند x_0 وتملك قمية حدية (او (C_f) يملك مماس افقي) عند x_0 قيمتها y_0 (او معادلة المماس الافقي هي $y=y_0$) تعني أن $\boxed{f(x_0)=y_0}$ و $\boxed{f'(x_0)=0}$

✓ الدال f تقبل الاشتقاق مرتين عند x_0 و منحناها (C_f) يقبل $A(x_0,y_0)$ كنقطة انعطاف تعني أن $\boxed{f(x_0)=y_0}$ و $\boxed{f''(x_0)=0}$

Prof : Yahi Rachid

مشتقات الدوال المركبة

الدالة	مشتقتها
$x \mapsto f \circ g(x)$	$g'(x)f'(g(x))$
$x \mapsto g(x)^n$	$x \mapsto ng(x)^{n-1} \times g'(x)$
$x \mapsto \sqrt{f(x)}$	$x \mapsto \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

النهاية باستعمال المقارنة

f و g دالتان

1) اذا كانت $f(x) \geq g(x)$ (من أجل x يأخذ فيم قريبة من a) و $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ فإن

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

2) اذا كانت $f(x) \leq g(x)$ (من أجل x يأخذ فيم قريبة من a) و $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ فإن

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

النهاية باستعمال الحصر

f ، g و h ثلاث دوال

اذا كانت $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ (من أجل x يأخذ فيم قريبة من a) و $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l$ فإن

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

حساب نهاية دالة مركبة

f ، g و h دالتين . اذاكانت $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. وكانت $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$ فإن:

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = c$$

.

Prof : Yahi Rachid

الجزء الثاني : سلسلة تمارين حول الدوال العدية + (فروض واختبارات)

1) دراسة اشارة عبارة جبرية

التمرين 01

حدد إشارة العبارات التالية:

- $4x+2$
- $-12x+4$
- $(x-3)(4x-8)$
- $-x$
- x
- $\dfrac{-2}{x+3}$
- $\dfrac{2x+1}{x-5}$
- $2x^2+3x+7$
- x^2+x+1
- $-x^2+6x-9$
- $2x^2-6x+4$
- x^2-3x
- $3x^2-6x$
- $2x^2-18$
- x^2+3
- x^3-4x
- x^4-3x^2+2
- $\dfrac{x-2}{(x+1)^2}$
- $\dfrac{x^3-9x^2+20x}{(x+3)^3}$

التمرين 02 (واجب منزلي)

حل في D_f (مجموعة تعريف f) المعادلة $f(x)=0$ ثم حدد حسب قيم x إشارة $f(x)$ في الحالات التالية

1) $f(x)=3x^2+7x+8$
2) $f(x)=-3x^2+2x-4$
3) $f(x)=x^2+6x+9$
4) $f(x)=x^2-5x+6$
5) $f(x)=x^4-5x^2+6$
6) $f(x)=x^2-36$
7) $f(x)=2x^2-1$
8) $f(x)=x^2+6$
9) $f(x)=x^2-9x$
10) $f(x)=8x^3-4x^2$
11) $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{(x+1)^2}$
12) $f(x)=\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$
13) $f(x)=-1+\dfrac{1}{(x+2)^2}$
14) $f(x)=\dfrac{-x^3+5x^2-6x}{(x+3)^3}$

التمرين 03

$f(x)$ كثير حدود و α جذرا له. أعط تحليلا لـ $f(x)$ ثم ادرس اشارة $f(x)$ في الحالات التالية

- $f(x)=x^2-3x+2, \alpha=1$
- $f(x)=x^3+2x^2+x+2, \alpha=-2$
- $f(x)=x^3+4x^2-6x+1$ (استنتج قيمة α)
- $f(x)=x^3-1, \alpha=1$

2) كتابة عبارة جبرية دون زمز القيمة المطلقة

التمرين 04

اكتب $f(x)$ دون زمز القيمة المطلقة في الحالات التالية

Prof . Yahi Rachid

1) $f(x)=\dfrac{|x|-3}{x^2-3|x|+2}$ حيث $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1;-2;2\}$

2) $f(x)=\dfrac{|x-3|}{x^2-3x+2}$ حيث $D_f=\mathbb{R}-\{1;2\}$

3) $f(x)=\dfrac{x-3}{|x^2-3x+2|}$ حيث $D_f=\mathbb{R}-\{1;2\}$

4) $f(x)=\left|\dfrac{x-3}{x^2-3x+2}\right|$ حيث $D_f=\mathbb{R}-\{1;2\}$

التمرين 05 (واجب منزلي)

اكتب $f(x)$ دون زمز القيمة المطلقة في الحالات التالية

1) $f(x)=\dfrac{|x|-1}{x^2-5|x|+6}$ حيث $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2;-3;3\}$

2) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x^2-5x+6}$ حيث $D_f=\mathbb{R}-\{2;3\}$

3) $f(x)=\dfrac{x-1}{|x^2-5x+6|}$ حيث $D_f=\mathbb{R}-\{2;3\}$

4) $f(x)=\left|\dfrac{x-1}{x^2-5x+6}\right|$ حيث $D_f=\mathbb{R}-\{2;3\}$

3) التناظر والشفعية

التمرين 06 نعتبرالدالة العددية f المعرفة على $]-\infty;+\infty[$ كمابلي: $f(x)=|x|+\sqrt{x^2+1}$ يرمز (C_f) إلى المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

① ادرس شفعية الدالة f مفسرا النتيجة هندسيا

التمرين 07 (واجب منزلي)

نعتبرالدالة العددية f المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ كمابلي: $f(x)=|x|+\sqrt{x^2-1}$ يرمز (C_f) إلى المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

① ادرس شفعية الدالة f مفسرا النتيجة هندسيا

التمرين 08 (واجب منزلي) نعتبرالدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمابلي: $f(x)=x\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ يرمز (C_f) إلى المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

① بين أنه من أجل عدد حقيقي x فإن: $f(-x)+f(x)=0$ ، ماذا تستنتج؟ فسر النتيجة هندسيا.

التمرين 09 (واجب منزلي) نعتبرالدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ كمابلي: $f(x)=x+3+\dfrac{1}{x-2}$ يرمز (C_f) إلى المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

①اثبت أنَ النقطة $\omega(2;5)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f).

التمرين 10 (واجب منزلي)

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{2x^2-7x+1}{x-3}$

*) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{3\}$ فإن

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-3}$$

①اثبت أنَ النقطة انه من اجل كل عدد حقيقي $x\in\mathbb{R}-\{3\}$ فان: $6-x\in\mathbb{R}-\{3\}$ و $f(6-x)+f(x)=10$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

التمرين 11 (واجب منزلي)

نعتبرالدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x-2)^2+3$

Prof : Yahi Rachid

①اثبت أنَ المستقيم $(\Delta): x=2$ محور تناظر للمنحنى (C_f).

التمرين 12 (واجب منزلي) نعتبرالدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2+x-12}{x^2+x+3}$ حيث (C_f) هو المحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

① بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f(-1-x)-f(x)=0$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

التمرين 13 (واجب منزلي)

نعتبرالدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كمابلي: $f(x)=x+1+\dfrac{1}{4x-4}$ يرمز (C_f) إلى المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

①اثبت أنَ النقطة $\omega(1;2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f).

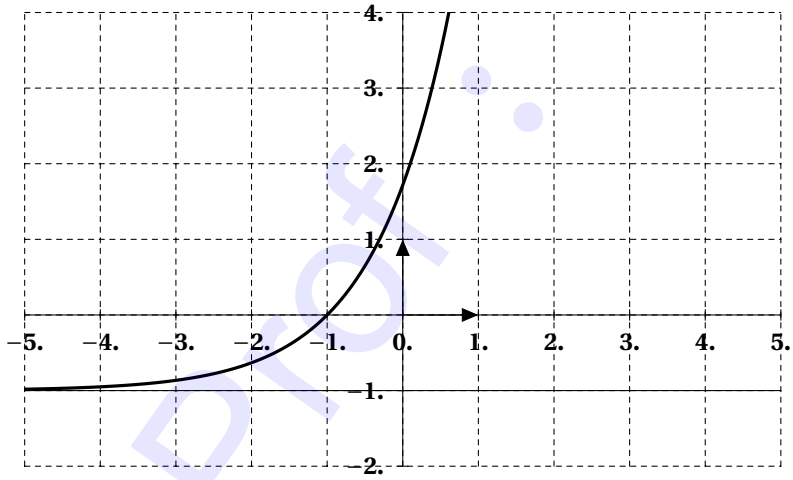
التمرين 14 (واجب منزلي)

نعتبرالدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x-2)^2+6$

①اثبت أنَ المستقيم $(\Delta): x=2$ محور تناظر للمنحنى (C_f).

4) إستنتاج تمثيل بياني لدالة إنطلاقا من تمثيل بياني لدالة اخرى:

التمرين 15



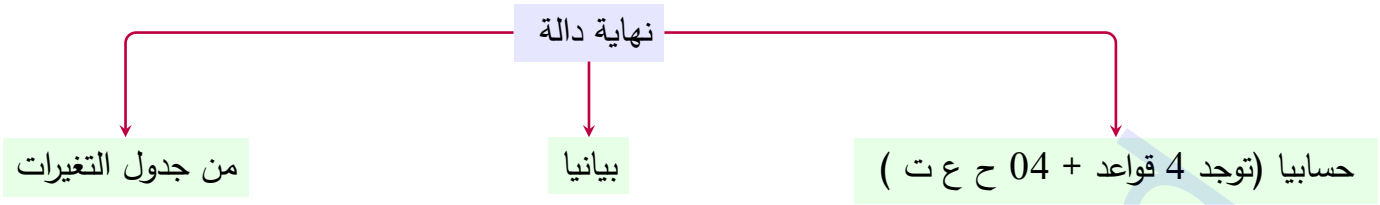
(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ (انظر الشكل المقابل)

أنشئ في نفس المعلم التمثيل الباني للدوال التالية

- $g_1(x)=f(x-2)$
- $g_2(x)=-f(x)$
- $g_3(x)=|f(x)|$
- $g_4(x)=f(|x|)$
- $g_5(x)=f(-|x|)$
- $g_6(x)=f(-x)$
- $g_7(x)=-f(-x)$

Prof : Yahi Rachid

5) النهايات حسابيا :



قاعدة 01

نهاية دالة كثير حدود عند $-\infty$ أو $+\infty$هي نهاية الحد الأعلى درجة عند $-\infty$ أو $+\infty$

ملاحظة:

✓ $(+\infty)^n \to +\infty$

✓ $(-\infty)^n \to \begin{cases} -\infty & ; \quad n \text{فردي} \\ +\infty & ; \quad n \text{زوجي} \end{cases}$

قاعدة 02

f و g دالتان إذا كان $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ حيث l عدد حقيقي و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ أي أن

$$\frac{\text{عدد}}{\pm\infty} \to 0$$

قاعدة 03

نهاية دالة ناطقة عند $-\infty$ أو $+\infty$ هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة في البسط والمقام عند $-\infty$ أو $+\infty$

قاعدة 04

f و g دالتان إذا كان $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ حيث l عدد حقيقي غير معدوم وكانت $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ فإن $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ أي أن

$$\frac{l \neq 0}{0^{\pm}} \to \pm\infty$$

ملاحظة: الكتابة: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a}$ تعني النهاية عند a بقيم كبرى والكتابة $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a}$ تعني النهاية عند a بقيم صغرى.

التمرين 16

احسب النهايتين التاليتين:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 7x$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 + x^2 + 5x$

Prof : Yahi Rachid

التمرين 17 أحسب مايلي

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x+3}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}5+\dfrac{3}{x^2+1}$ 3) $\lim\limits_{x\to-\infty}2x+4+\dfrac{1}{x+1}$

التمرين 18

احسب النهايتين التاليتين:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^3+3x+7}{x^2+3}$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+7}{x+1}$

التمرين 19

احسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-3}\dfrac{2x+7}{x+3}$ 2) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}2}\dfrac{x+1}{-x+2}$ 3) $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}\dfrac{-x+4}{x^2-3x+2}$ 4) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3}{(x+1)^2}$ 5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-3x+4}{|x-1|}$ 6) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1}\dfrac{3}{\sqrt{x+1}}$

التمرين 20 (واجب منزلي)

احسب النهايات التالية

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}-3x^2+5x+2$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3+7x+4x$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{\sqrt{x-2}}$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-1}+3x+2$ 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7x^2+2}{x-4}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{2x^2+x+1}$ 7) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}2}\dfrac{x+4}{3x-6}$ 8) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}5}\dfrac{x+3}{-4x+20}$ 9) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{-3x+1}{|x-2|}$ 10) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{|x^2-3x+2|}$ 11) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{-2x+1}{(x-4)^2}$ 12) $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}2}\dfrac{4}{\sqrt{-3x+6}}$ 13) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}2}\dfrac{4}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ 14) $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}5}\dfrac{x+4}{x^2-11x+30}$ 15) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}4}\dfrac{x+1}{-x^2+7x-12}$

التمرين 21

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$.

① احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

Prof : Yahi Rachid

6) حالات عدم التعيين :

نوضيح

- حالات عدم التعيين المقررة في المرحلة الثانوية هي: $(-\infty)+(+\infty)$ ✓ ، $0\times\infty$ ✓ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ✓ ، $\frac{0}{0}$.
- أي أن $\frac{0}{\infty}\to 0$; $\frac{\infty}{0}\to\pm\infty$ ليست حالات عدم التعيين

التمرين 22 (حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$)

باستعمال طريقة مناسبة أحسب مايلي:

1) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x^2+3)(x+2)}{(x+4)(x+2)}$
2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$
3) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+x-2}$
4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$
5) $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-4}}$
6) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}$
7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{x-1}$
8) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$
9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x}$
10) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$
11) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{2021}-1}{x-1}$
12) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{2022}-1}{x^{1011}-1}$
13) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$
14) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{7x}$
15) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{x}{\sqrt{x}}$
16) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{|x|}{x}$
17) $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{|x|}{x}$
18) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
19) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3-\sqrt{5x+4}}{\sqrt{x+3}-2}$

التمرين 23 (حالات عدم التعيين من الشكل $(-\infty)+\infty+$ و $\frac{\infty}{\infty}$)

قاعدة

- $\sqrt{ax+b}=\sqrt{x^2\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}$
- $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{x^2\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}$

ملاحظة

✓ $\sqrt{x^2}=|x|$
✓ عند حساب النهاية عند $+\infty$ تقوم بتعويض $|x|$ بـ x
✓ عند حساب النهاية عند $-\infty$ تقوم بتعويض $|x|$ بـ $-x$

Prof : Yahi Rachid

التمرين 24

: باستعمال طريقة مناسبة أحسب مايلي:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2-2x}+2x$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{9x^2+x+2}-3x$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$

7) نهاية دالة تتضمن قيمة مطلقة :

قاعدة

$|x|=\begin{cases} x & , \ x\geq 0 \\ -x & , \ x<0 \end{cases}$ وبصفة عامة، من أجل كل عبارة جبرية $A(x)$ لدينا: $|A(x)|=\begin{cases} A(x) & , \ A(x)\geq 0 \\ -A(x) & , \ A(x)<0 \end{cases}$

لدينا

التمرين 25

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ $f(x)=\dfrac{|x^2-4|}{x-2}$.

① اكتب $|x^2-4|$ دون رمز القيمة المطلقة. ثم استنتج نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفها.

8) النهاية باستعمال الحصر والمقارنة :

التمرين 26

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $\dfrac{1}{2+sinx}\geq\dfrac{1}{3}$ ثم استنتج النهايتين التاليتين:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2+sinx},\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2+sinx},$$

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقيx موجب تماما فإن $-\dfrac{1}{x}\leq\dfrac{sinx}{x}\leq\dfrac{1}{x}$ ثم استنتج النهاية:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{sinx}{x}$$

9) المستقيمات المقاربة (التفسير البياني (الهندسي) للنهايات) :

المستقيمات المقاربة–التفسير الهندسي أو البياني للنهايات f دالة و (C_f) تمثيلها البياني. في المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، a و b عددان حقيقيان

① المستقيم المقارب الافقي (الموازي لحامل محور الفواصل)

إذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=b$ فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب افقي (موازي لحامل محور الفواصل)عند $\pm\infty$ معادلته $y=b$

② المستقيم المقارب العمودي (الموازي لحامل محور التراتيب)

إذا كان $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\pm\infty$ فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي (موازي لحامل محور التراتيب) معادلته $x=a$

Prof : Yahi Rachid

③ المستقيم المقارب المائل

• الحالة 01: تعطى عبارة f ومعادلة المستقيم $(\Delta): y = ax + b$
السؤال هو: بين ان المستقيم $(\Delta): y = ax + b$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $\pm\infty$

جواب: نتحقق أن: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0$

• الحالة 02: إذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x) - (ax+b)] = c$ فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل عند $\pm\infty$ معادلته $y = ax+b+c$

• الحالة 03 إذا كان $f(x) = ax + b + h(x)$
السؤال هو: استنتج ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب كتابة معادلته:

• الجواب نقوم بحساب $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x)$

✓ ادا كانت $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x) = 0$ فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل عند $\pm\infty$ معادلته $y = ax + b$

✓ ادا كانت $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x) = c$ فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل عند $\pm\infty$ معادلته $y = ax + b + c$

④ المنحنيان المتقاربان

إذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x) - h(x)] = 0$ فإن (C_f) و (C_h) متقاربان عند $\pm\infty$

التمرين 27

f دالة و (C_f) تمثيلها البياني. في المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، فسر هندسيا النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x) = +\infty$
2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$
4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
5) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + 2x = 0$
6) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x = 0$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (2x+1) = 3$
8) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - x^2 = 0$

التمرين 28

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ: $f(x) = \dfrac{3x^2+2x+5}{(x-2)^2}$

1) أحسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة تعريفها ثم فسر النتائج هندسيا.

التمرين 29

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}-\{3\}$ بـ: $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{2}{x-3}$.

1) بين ان المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f عند كل من $+\infty$ و $-\infty$.

2) حدد وضعية (Δ) بالنسبة للمنحنى (C_f)

التمرين 30

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x) = x + \dfrac{3x-6}{(x-1)^2}$.

1) استنتج ان (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) عند كل من $+\infty$ و $-\infty$ يطلب كتابة معادلته

2) حدد وضعية (Δ) بالنسبة للمنحنى (C_f)

Prof : Yahi Rachid

10) النهايات بيانيا ومن جدول التغيرات:

التمرين 31

في كل حالة من الحالات الآتية f دالة عددية قابلة للإشتقاق على كل مجال من مجموعة تعريفها. ومعرفة بجدول تغيراتها.

المطلوب: عين نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها مفسرا النتائج هندسيا إن أمكن:

الحالة ①

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0.5	↘	0	↗	$+\infty$

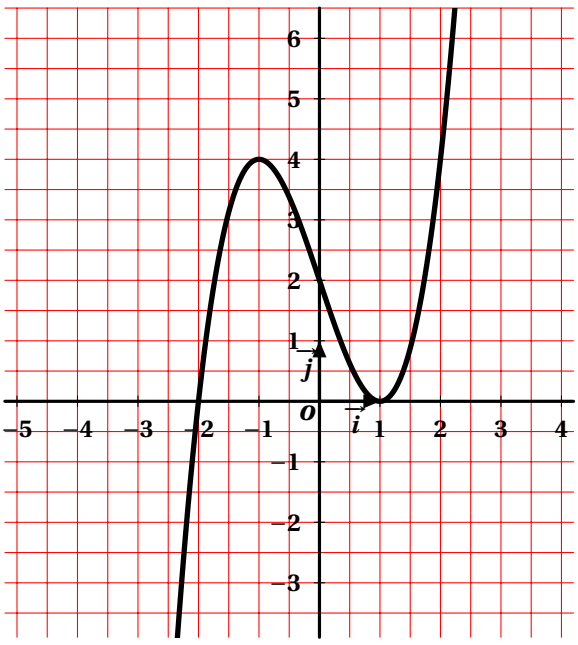
الحالة ②

x	-3		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	$-\frac{1}{4}$	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	1

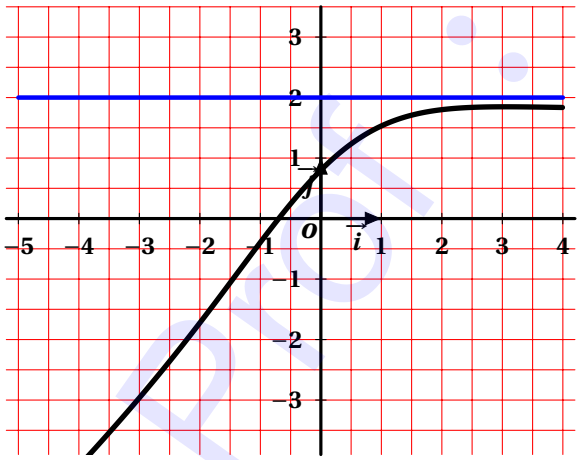
التمرين 32

في كل حالة من الحالات الآتية f دالة و (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f عين نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها مفسرا النتائج هندسيا إن أمكن.:

الحالة ①

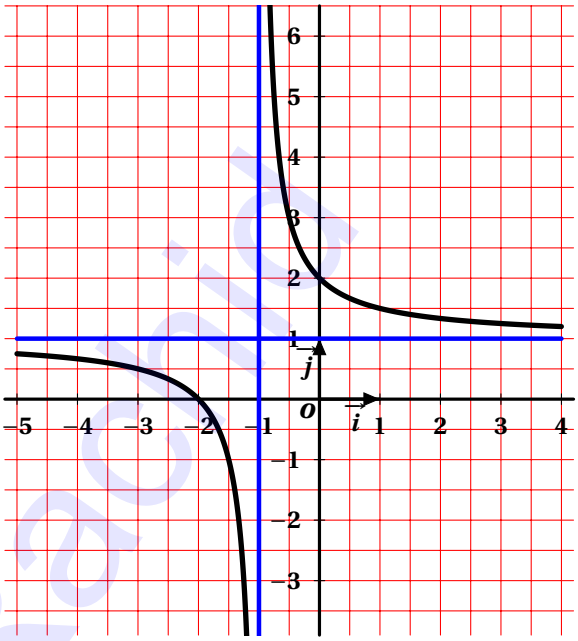


الحالة ②

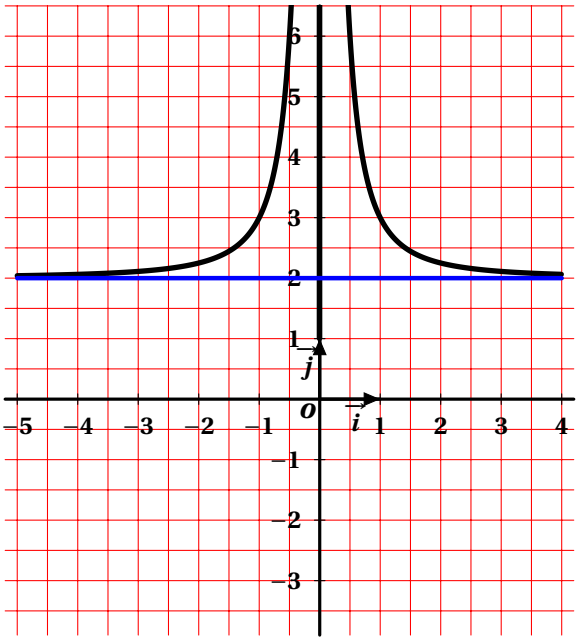


Prof : Yahi Rachid

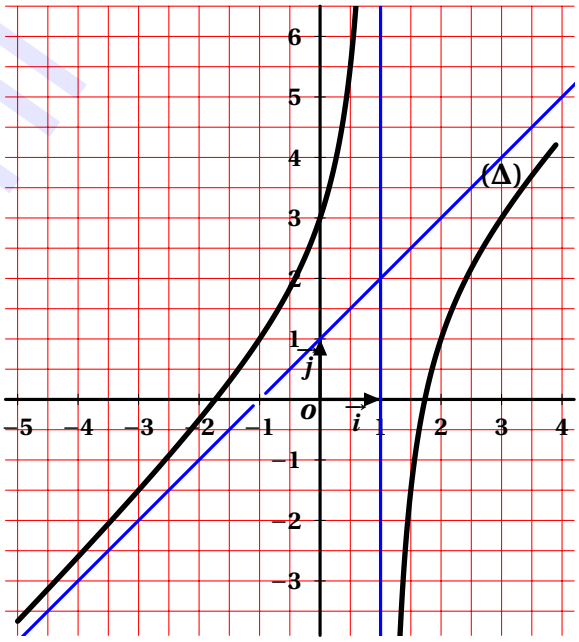
③ الحالة



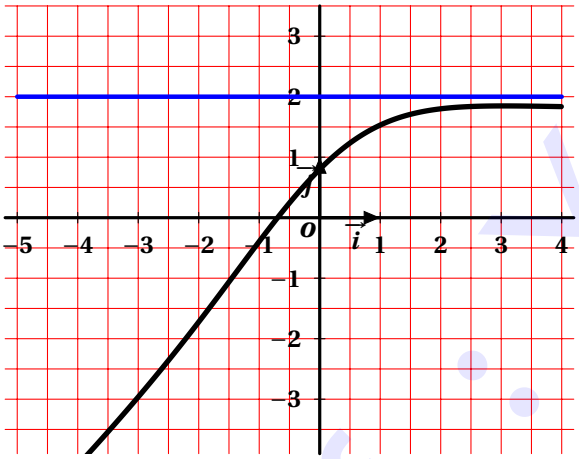
④ الحالة



⑤ الحالة

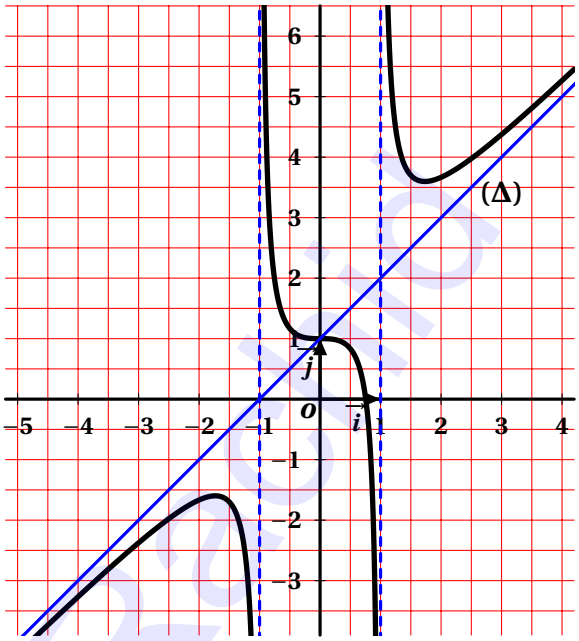


⑥ الحالة

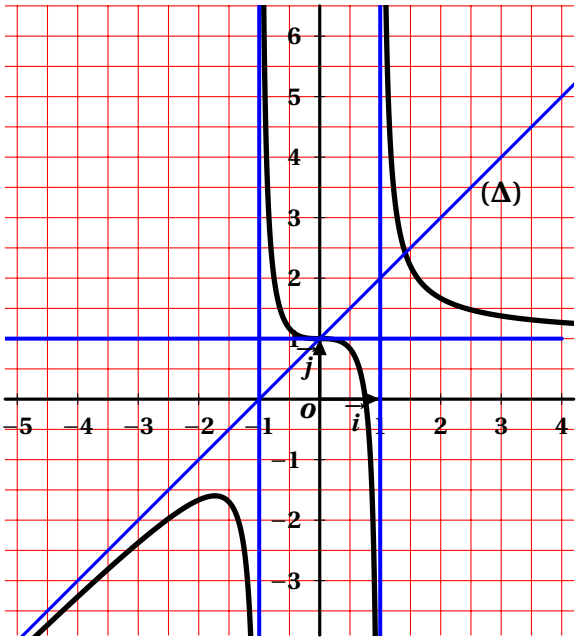


Prof : Yahi Rachid

الحالة ⑦



الحالة ⑧



11) الاستمرارية

التمرين 33

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & x\in]-\infty;2] \\ x^2+x-5 & ,x\in]2;+\infty[\end{cases}$$

1) هل الدالة f مستمرة عند 2

2) هل الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$

التمرين 34

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$f(x)=\begin{cases} x^2-5 & x\in]-\infty;3] \\ x+m & ,x\in]3;+\infty[\end{cases}$$

1) عين قيمة m حتى تكون الدالة f مستمرة عند 3

12) الاشتقاقية وتطبيقاتها

التمرين 35

ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد a في الحالات التالية

1) $a=-2$,$f(x)=\sqrt{x+2}$

2) $a=2$,$f(x)=|x-2|+\dfrac{1}{x-1}$

Prof : Yahi Rachid

التمرين 36

f دالة و (C_f) تمثيلها البياني، اعطي استنتاجا و تفسيرا هندسيا للنتائج التالية:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=1$

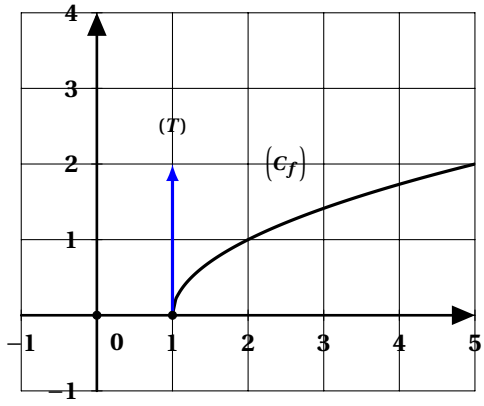
2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ علما أن $f(0)=0$

3) $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=0$

4) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=2$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=5$

التمرين 37

لتكن f الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\sqrt{x-1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$، (T) نصف مماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 كما هو موضح في الشكل.

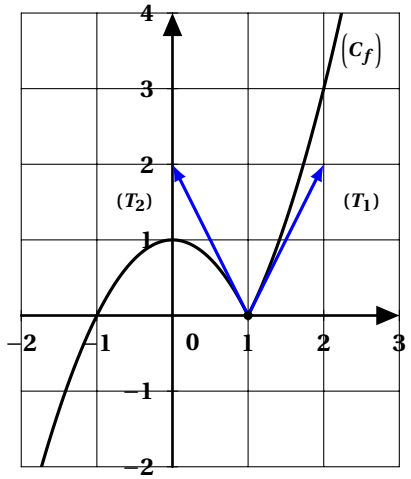


1) خمن قابلية اشتقاق الدالة f عند 1 من اليمين

2) أثبت صحة تخمينك ثم فسر النتيجة هندسيا

التمرين 38

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=|x-1|(x+1)$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$، (T_1) و (T_2) نصفي مماسي (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 كما هو موضح في الشكل.



1/ أ/ بقراءة بيانية، ضع تخمينا مناسبا حول قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد 1.

ب/ أثبت صحة تخمينك.

2/ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة $f(x)=m$.

تمرين 39

احسب مشتقة الدالة f على المجال I في الحالات التالية:

1) $f(x)=x^3+3x+7$ ؛ $I=\mathbb{R}$.

2) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+x+1$ ؛ $I=\mathbb{R}$.

3) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ ؛ $I=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$.

4) $f(x)=2x+1+\dfrac{1}{x-3}$ ؛ $I=]3;+\infty[$.

5) $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$ ؛ $I=]0;+\infty[$.

6) $f(x)=x^2\sqrt{x}$ ؛ $I=]0;+\infty[$.

7) $f(x)=\sqrt{2x-4}$ ؛ $I=]2;+\infty[$.

8) $f(x)=-sinx$ ؛ $I=\mathbb{R}$.

9) $f(x)=5cosx-8sinx$ ؛ $I=\mathbb{R}$.

10) $f(x)=sin(3x+8)$ ؛ $I=\mathbb{R}$.

Prof : Yahi Rachid

التمرين 40 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^4+3x^2+7x+2$

1) اكتب معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة 2

التمرين 41 احسب مشتقة الدالة f في الحالات التالية:

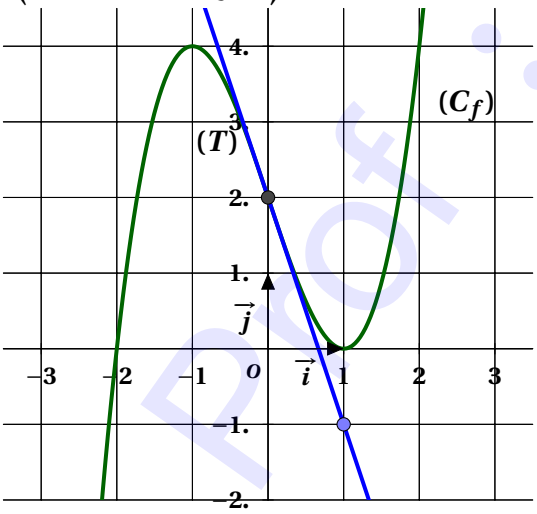
1) $f(x)=\sqrt{x^3+2x+7}$
2) $f(x)=(x^2+x+1)^7$
3) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{(x-2)^2}$
4) $f(x)=g(7x^2+3x)$
4') $f(x)=g\left(\dfrac{1}{x}\right)$
5) $f(x)=\dfrac{1}{g(x)}$
6) $f(x)=g(x^2)$
7) $f(x)=(g(x))^2$
8) $f(x)=cos(7x^2+3x)$

التمرين 42 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أكتب معادلة المماس (T_1) لمنحى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة 3 .
2) أكتب معادلة المماس (T_2) لمنحى الدالة f عند النقطة ذات الترتيبة $\dfrac{2}{3}$.
3) بين أنه يوجد مماسين (T_3) و (T_4) لمنحى الدالة f معامله توجيههما (ميليهما) هو 1 (يطلب كتابة معادلتيهما)
4) أكتب معادلة المماس (T_5) لمنحى الدالة f الذي يشمل النقطة $A(3;1)$.
5) أكتب معادلة المماس (T_6) لمنحى الدالة f الذي يشمل يعامد المستقيم دي المعادلة $y=-x+3$.

التمرين 43 تعيين مجاهيل بيانيا، تحديد نقطة الانعطاف حسابيا و بيانيا

نعتبر الدالة f المعرفة على: $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=ax^3+bx+c$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية و ليكن (C_f)تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و (T) يمثل مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 (أنظر الشكل المقابل).



1) بقراءة بيانية عين كلا من $f(0)$ ، $f'(0)$ ، $f'(1)$ و $f'(-1)$
2) باستعمال النتائج السابقة عين كلا من a ، b و c .
3) حدد بيانيا وضعية (C_f) بالنسبة الى (T)، ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.
4) احسب $f'(x)$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.
5) اكتب معادلة المماس (T) ثم حدد حسابيا وضعية (C_f) بالنسبة الى (T)، و استنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

Prof : Yahi Rachid

التمرين 44

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3+3x^2+7x+2$

1) بين أنَ منحنى الدالة f يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياها.

التمرين 45

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=ax^3+bx+c$ حيث a ، b و c اعداد حقيقية و (C) المنحنى البياني للدالة f في معلم.

① عين كلا من a ، b و c بحيث (C) يشمل النقطة $A(1;-3)$ ويقبل عند النقطة $B(0;1)$ مماسا موازيا للمستقيم ذي المعادلة $y=-6x$.

② هل توجد مماسات لـ (C) موازية للمستقيم ذي المعادلة $y=-x+1$

التمرين 46

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^2+ax+2$ و (C) المنحنى البياني للدالة f في معلم.

✓ عين العدد الحقيقي a حيث (C) يقبل مماس موازٍ لحامل محور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة 1

التمرين 47

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=ax^3+bx^2+c$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية و (C) المنحنى البياني للدالة f في معلم. عين كلا من a ، b و c بحيث:

✓ (C) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$ مماسا معامل توجيهه -3

✓ $f(2)=-2$ قيمة حدية صغرى للدالة f.

Prof : Yahi Rachid

13) دراسة دوال عددية شاملة

التمرين 48

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x)=x^3+3x-6$

① ادرس تغيّرات الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها.

② أ) بين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.2<\alpha<1.3$

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) نعتبرالدالة العددية f المعرفة على $]-\infty;+\infty[$ كمابلي: $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+4}{x^2+1}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

⑤ تحقق أن: $f(\alpha)=\dfrac{2+3\alpha}{2}$ ، ثمّ عين حصرا للعدد $f(\alpha)$.

التمرين 49

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=x^3-3x^2-2$. (C_g) تمثيلها البياني.

1) شكل جدول تغيرات الدالة g

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]3.1;3.2[$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبرالدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كمابلي: $f(x)=\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

① أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

② بين أن: $f(\alpha)=3+\dfrac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ ثم اعط حصرا لـ $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-1})

التمرين 50

الدالة كثير الحدود f معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=x^3-4x^2+4x+\dfrac{1}{2}$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2) حدد اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3) بين أنَ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]-\dfrac{1}{2},0\right[$. فسر النتيجة هندسيا

4) استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

التمرين 51

I) نعتبرالدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمابلي: $g(x)=x^3-3x-4$

Prof : Yahi Rachid

① احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

② ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

③ أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2.1<\alpha<2.2$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) نعتبرالدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ كمابلي: $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. .

① أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب) احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} f(x)$ وفسر النتائج هندسيا.

② بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ لدينا $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$.

③ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

④ عين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ و فسر النتيجة هندسيا.

⑤ أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ فإن: $f(x)=x+2+\dfrac{x+2}{x^2-1}$.

ب) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب كتابة معادلته

جـ) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

⑥ بين أن: $f(\alpha)=\dfrac{3}{2}\alpha+2$ ، ثمّ عين حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-1}).

⑦ أنشئ (C_f) و (Δ) .

⑧ أ) عين فواصل النقط من المنحنى (C_f) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم ذا المعادلة $y=x+2$

ب) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=m$.

التمرين 52

I. لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^3+x^2+7x+3$.

1/ أ/ احسب $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} g(x)$.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2/ أ/ أثبت أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.45<\alpha<-0.44$.

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$.

II. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^3-3x+2}{x^2+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ احسب $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)$.

2/ أ/ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{(x-1)\times g(x)}{(x^2+1)^2}$.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3/ أ/ أثبت أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

Prof : Yahi Rachid

4/ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$ ذات المجهول x.
5/ أثبت أن (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) يوازيان المستقيم (Δ). (لا يطلب كتابة معادلة لكل من المماسين (T_1) و (T_2))
6/ أنشئ (Δ)، (T_1)، (T_2) و (C_f).
7/ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=m$.
8/ لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=f(|x|)$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

أ/ أثبت أن الدالة h زوجية.

ب/ اشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه في نفس المعلم السابق.

التمرين 53

الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ كمايلي: $f(x)=\dfrac{x^2-8x+16}{x-3}$. يرمز (C_f) إلى المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

① احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها وفسر النتائج هندسيا للنهاية عند 3 .
② ادرس اتجاه تغير الدالة f على مجالي مجموعة تعريفها و شكل جدول تغيراتها.
③ أ) عين الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x من: $\mathbb{R}-\{3\}$:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-3}$$

ب) استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب كتابة معادلته.

جـ) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

④ عين إحداثيي A نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين للمنحنى (C_f).
⑤ أ) أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما يساوي 3- يطلب تعيين احداثيات نقطتي التماس B و C.

ب) برهن أن النقطتين B و C. متناظرتين بالنسبة إلى A.

⑥ احسب $f(6-x)+f(x)$. ماذا تستنتج
⑥ ارسم كلا من (Δ) و المماسين
⑦ نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ كمايلي: $g(x)=\dfrac{x^2-8x+16}{|x-3|}$

أ) اكتب $g(x)$ بدلالة $f(x)$

ب) ارسم المنحنى (C_g) الممثل للدالة g اعتمادا على (C_f) .

التمرين 54

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.
1/ احسب نهايات الدالة f عند الأطراف المفتوحة لمجموعة تعريفها ثم فسر النتائج بيانيا.
2/ أ/ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $f'(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

Prof : Yahi Rachid

3/ أ/ عين الأعداد الحقيقية a، b و c حيث يكون من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$.

ب/ استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ و $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

جـ/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

4/ أثبت أن (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) معامل توجيه كل منهما يساوي 3 ثم اكتب معادلة لكل من المماسين (T_1) و (T_2).

5/ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $f(-2-x)+f(x)=-2$. ماذا تستنتج؟

6/ عين نقاط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات.

7/ أنشئ (Δ)، (T_1)، (T_2) و (C_f).

التمرين 55

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=x-1+\frac{1-x}{x^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ احسب نهايات الدالة f عند الأطراف المفتوحة لمجموعة تعريفها.

2/ أ/ أثبت أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

3/ أ/ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x)=\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x^3}$.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4/ أثبت أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياها.

5/ (T) مستقيم معادلته $y=x+\alpha$ حيث α عدد حقيقي.

- عين قيمة العدد الحقيقي α حتى يكون المستقيم (T) مماسا لـ (C_f) في نقطة يطلب تعيين إحداثياها.

6/ أ/ تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x)=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)$.

ب/ استنتج نقاط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.

7/ أنشئ (Δ)، (T) و (C_f).

8/ لتكن v الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $v(x)=f(x^2)$.

- ادرس اتجاه تغير الدالة v ثم شكل جدول تغيراتها.

التمرين 56 بكالوريا (2014) ع-ت الموضوع الثاني (واجب منزلي)

I) نعتبرالدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمابلي: $g(x)=2x^3-4x^2+7x-4$

① أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

② أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,7<\alpha<0,8$

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

II) نعتبرالدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمابلي: $f(x)=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$ وليكن (C_f) تمثيلها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

① احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

② أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$.

ب) استنتج ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعين معادلته

جـ) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

③ أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من : $f'(x) = \frac{x.g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$. حيث f' مشتقة الدالة f

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f
(ياخذ $f(\alpha) \approx -0,1$)

④ احسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$

⑤ انشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

⑥ لتكن h الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كمابلي: $h(x) = \frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$ وليكن (C_h) تمثيلها في المعلم السابق

أ) تحقّق أنّه من أجل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) - 2$

ب) استنتج ان (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه، ثم انشئ (C_h)

التمرين 57

I) g الدالة العددية المعرفة على $]-1;+\infty[$ كمايلي: $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

① ادرس تغيّرات الدالة g على $]-1;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها

② بين أن (C_g) منحنى الدالة g يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $1.6 < \alpha < 1.7$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

II) نعتبرالدالة العددية f المعرفة على $]-1;+\infty[$ كمايلي: $f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. (وحدة الرسم $4cm$)

① بين أن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = +\infty$ ثم احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ واعط تفسيرا بيانيا للنتيجتين

② أ) تحقق أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ لدينا $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^3+1)^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

③ عين معادلة لـ (Δ) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

④ تحقق أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ فإن: $f(x) - (-x+1) = \frac{x^3(x-1)}{x^3+1}$

⑤ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) . ماذا تلاحظ ؟

⑥ ارسم (C_f) و (Δ) .

التمرين 58

I) نعتبرالدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$

① ادرس تغيرات الدالة g.

② بين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]0.6;0.7[$.

③ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) نعتبرالدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمابلي: $f(x) = \frac{x^3+x^2+1}{3x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Prof : Yahi Rachid

① احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. وفسر النتيجة الأخيرة هندسيا

⑤ أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

⑥ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

⑦ بين أن: $f(\alpha)=\frac{\alpha}{6}+\frac{1}{2\alpha}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

⑦ أنشئ المنحنى (C_f)

التمرين 59 (بكالوريا 2017 تقني رياضي)

I) نعتبرالدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x)=x^3+6x+12$

① ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

② بين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]-1.48;-1.47[$.

③ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) نعتبرالدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمابلي: $f(x)=\frac{x^3-6}{x^2+2}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. .

① احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

② بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $f'(x)=\frac{x.g(x)}{(x^2+2)^2}$.

③ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

④ أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=x$

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

⑤ بين أن: $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

⑥ أنشئ المنحنى (C_f) و (Δ) .

التمرين 60

I) نعتبرالدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x)=x^3+3x-16$

① ادرس تغيرات الدالة g

② بين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]2.1;2.2[$.

③ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) نعتبرالدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمابلي: $f(x)=x-\frac{x-8}{x^2+1}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. .

① احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

② بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $f'(x)=\frac{x.g(x)}{(x^2+1)^2}$.

③ استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

④ أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=x$

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

⑤ عين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وفسر النتيجة هندسيا.

Prof : Yahi Rachid

⑥ بين أن: $f(\alpha)=\frac{3(8-\alpha)}{\alpha^2+1}$ ، ثمّ عين حصرا للعدد $f(\alpha)$.
⑦ عين معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) . عند النقطة ذات الفاصلة 1.
⑧ احسب $f(-2)$ ثم أنشئ (C_f) ، (T) و (Δ) . (نأخذ $f(\alpha)\approx 3$)
⑨ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=m-1$.

التمرين 61

I. لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^3+3x+8$.
1/ أ/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
2/ أ/ أثبت أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1.52<\alpha<-1.51$.

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$.
II. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{x^3-4}{x^2+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.
1/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2/ أ/ عين الأعداد الحقيقية a، b، c و d حيث يكون من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{x^2+1}$.

ب/ استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ و $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

جـ/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).
3/ أ/ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{x\times g(x)}{(x^2+1)^2}$.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
4/ أثبت أن $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$ ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$.
5/ أثبت أن (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) يوازيان المستقيم (Δ)
6/ أثبت أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث $1.5<x_0<1.6$.
7/ أنشئ (Δ)، (T_1)، (T_2) و (C_f).
8/ لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=\frac{|x^3|+4}{x^2+1}$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

أ/ أثبت أن الدالة h زوجية.

ب/ اشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه في نفس المعلم السابق.

التمرين 62

I) نعتبرالدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمابلي: $g(x)=x^3-3x^2+3x-9$
① أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$
② ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.
③ احسب $g(3)$ و استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

II) نعتبرالدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كمابلي: $f(x)=\frac{x^3-5x^2+7x+1}{(x-1)^2}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.
① أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Prof : Yahi Rachid

ب) احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)$ وفسر النتائج هندسيا.

② اثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$ يكون: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x-1)^3}$.

③ استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}-\{1\}$ ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

④ أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$ فإن: $f(x) = x-3+\dfrac{4}{(x-1)^2}$.

ب) استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب كتابة معادلته

ج) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

⑤ بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث $-0.2 < x_0 < -0.1$.

⑥ عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1 .

⑦ احسب $f(0)$ ثم أنشئ (C_f) ، (Δ) و (T) .

⑧ أ) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = m+1$.

ب) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = x+m$.

⑨ نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ: $h(x) = f(|x|)$
• ارسم (C_h) منحنى الدالة h انطلاقا من (C_f) مع الشرح

⑩ نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $k(x) = |f(x)|$
• ارسم (C_k) منحنى الدالة k انطلاقا من (C_f) مع الشرح

التمرين 63

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2x^3+6x^2+7x+1$

① ادرس إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

② بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ثم تحقق أن: $-0.2 < \alpha < -0.1$.

③ استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{2x^3+4x^2+x}{(x+1)^2}$
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

① أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

② أحسب $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

③ عين الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث من أجل كل عدد حقيقي $x \in \mathbb{R}-\{-1\}$:

$$f(x) = ax+b+\frac{cx}{(x+1)^2}$$

④ بين أن المستقيم (D) ذي المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

⑤ ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (D).

⑥ بين أن من أجل كل عدد حقيقي $x \in \mathbb{R}-\{-1\}$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^3}$.

⑦ ادرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

⑧ هل توجد مماسات موازية للمستقيم (D)؟ اكتب معادلة المماس ان وجدت.

⑨ عين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.

Prof : Yahi Rachid

⑩ بين أن: $f(\alpha) = -2 - \frac{2}{\alpha+1} + \frac{3}{(\alpha+1)^2}$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.
11) ارسم (D) و (C_f) في نفس المعلم.
12) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = 2x + m$.

III) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ: $h(x) = [f(x)]^2$
① أحسب $h'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ ثم استنتج اشارة $h'(x)$.
② ادرس إتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها.

IV) نعتبر الدالة t المعرفة على $]-3;+\infty[$ بـ $t(x) = f(x+2)$.
و (C_t) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
① إشرح كيف يمكن رسم (C_t) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه في نفس المعلم.

التمرين 64 من اعداد الأستاذ لقمان بونان

I. لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ و (C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ حيث a، b و c أعداد حقيقية ثابتة.
1/ عين الأعداد الحقيقية a، b و c علما أن (C_g) يشمل النقطتين $A(0,-5)$ و $B(1,0)$ ويقبل عند النقطة ذات الفاصلة -1 مماسا معادلته $y = -2x - 6$.
2/ نفرض أن $a = 3$، $b = 1$ و $c = -5$ أي أن: $g(x) = x^3 + 3x^2 + x - 5$.

أ/ احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

جـ/ احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$.

II. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 5}{(x+1)^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1/ احسب نهايات الدالة f عند الأطراف المفتوحة لمجموعة تعريفها.
2/ أ/ عين الأعداد الحقيقية a، b، c و d حيث يكون من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$: $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{(x+1)^2}$.

ب/ استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ و $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

جـ/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).
3/ أ/ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
4/ عين دون حساب $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ ثم فسر النتيجة بيانيا.
5/ أثبت أن (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي المستقيم (Δ) ثم اكتب معادلة للمماس (T).
6/ أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-2,-1[$ ثم عين حصرا له سعته 10^{-1}.
7/ عين نقاط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات.
8/ أنشئ (Δ)، (T) و (C_f).
9/ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلول المعادلة $(1-m)(x+1)^2 + 2x + 4 = 0$.
10/ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلول المعادلة $|f(x)| = 2m - 1$.

III. لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = \frac{|x|^3 + 3x^2 + 5|x| + 5}{(|x|+1)^2}$ و (C_h) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم

Prof : Yahi Rachid

متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ أثبت أن الدالة h زوجية.

2/ اكتب عبارة الدالة h دون رمز القيمة المطلقة.

3/ ادرس استمرارية الدالة h عند العدد 0.

4/ أثبت أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{h(x)-h(0)}{x}\neq\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\frac{h(x)-h(0)}{x}$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

5/ اشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه في نفس المعلم السابق.

التمرين 65 (من أعداد الأستاذ مزيان محمد)

الجزء الأول : ✍ لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^3-3x^2+4x$, و (C_g) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أدرس تغيرات الدالة g .

2) برهن أن (C_g) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثييها ثم برهن أن هذه النقطة هي مركز تناظر للمنحنى (C_g).

3) α و β عددان حقيقيان .

برهن أنه إذا كان $\beta>\alpha$ فإن $g(\beta)>g(\alpha)$ ثم إستنتج مقارنة العددين $g(2021)$ و $g(2022)$ دون حساب قيمتها .

4) أعط إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم إستنتج وضعية (C_g) بالنسبة لمحور الفواصل .

5) أرسم المنحنى (C_g).

الجزء الثاني :

✍ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$, (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) عين العددين الحقيقين a و b حيث : $f(x)=ax+\frac{bx}{(x-1)^2}$.

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1}f(x)$, ثم فسر النتيجة هندسيا .

3) أحسب $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$, ثم فسر النتيجة هندسيا .

4) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$ فإن : $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^3}$.

5) إستنتج إتجاه تغير الدالة f على مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

6) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

7) بين أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة وحيدة A يطلب تعيينها ثم أكتب معادلة لـ (T).

8) أحسب إحداثيات نقطتي تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل.

9) إعط إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}-\{1\}$ ثم إستنتج وضعية (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل .

10) أرسم (Δ), (T), ثم (C_f) في معلم جديد يختلف عن (C_g).

11) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلات التالية :

$f(x)=m$; $f(x)=|m|-1$; $f(x)=f(m)$; $-\frac{x}{(x-1)^2}=m$; $f(x)=x+m^2-4$; $x^3-2x^2=mx(x-1)^2$.

الجزء الثالث :

✍ لتكن الدوال العددية التالية : h_1 , h_2 , h_3 حيث :

$h_1(x)=f(|x|)$ و $D_{h_1}=\mathbb{R}-\{-1;1\}$, $h_2(x)=|f(x)|$ و $D_{h_2}=D_f$, $h_3(x)=f(x-1)+2$ و $D_{h_3}=\mathbb{R}-\{2\}$

1) بين أن h_1 دالة زوجية .

2) إشرح كيف يتم رسم المنحنيات (C_{h_1}), (C_{h_2}), (C_{h_3}) إنطلاقا من منحنى (C_f) ثم أنشئها .

الجزء الرابع :

✍ لتكن الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ : $k(x)=f(x^2)$

1) أدرس إتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها.

التمرين 66

I) نعتبرالدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمابلي: $g(x)=x^3+6x^2+12x+7$

① أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

② ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

③ أ)احسب $g(-1)$ و استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

II) نعتبرالدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ كمابلي: $f(x)=x+\frac{3}{2}+\frac{1}{2(x+2)^2}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. .

① أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب) احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-2} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-2} f(x)$ وفسر النتائج هندسيا.

② اثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2\}$ يكون: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+2)^3}$.

③ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

④ بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-2.5<\alpha<-3$ وفسر ذلك هندسيا.

⑤ أ) بيّن انّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+\frac{3}{2}$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ثم ارسمهما.

⑥ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=m-1$.

⑦ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=x+m$.

⑧ نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـ: $h(x)=f(x^2)$

أ) احسب $h'(x)$ واستنتج اتجاه تغير الدالة h (عبارة $h(x)$ غير مطلوبة)

ب) استنتج نهايات الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها.

التمرين 67

I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بجدول تغيراتها كما يلي:

x	$-\infty$		-2		-1		α		0		β		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘		↘	5	↗	$-\infty$	↗	1	↘	0	↘	$-\infty$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث:

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x+1}$$

2) عيّن احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-1} f(x)$ وفسر النتائج هندسيا.، ثم فسر النتيجتين هندسيا.

3) عيّن معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة (-2).

4) أجب بصحيح أم خطأ مع التبرير:

Prof : Yahi Rachid

أ/ $f(2) > f(1)$

ب/ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد في $\mathbb{R} - \{-1\}$.

جـ/ $f'(1) > 0$

5) عيّن إشارة الدالة f

II) نضع فيما يلي: $a = -1$ و $b = 1$ و $c = 1$:

1)

أ/ بيّن أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ لدينا:

$$f(x) = -x + 2 - \frac{1}{x+1}$$

ب/ استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $\pm\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

جـ/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

2)

أ/ عيّن إحداثيات النقطة ω نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = -1$.

ب/ بيّن أن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

جـ/ أثبت أنه لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω.

3) ارسم كل من (Δ) و (C_f).

4) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x) = -x + m$.

(III) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ: $g(x) = [f(x)]^2$.

1) عيّن نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) احسب: $g(\alpha)$ ، $g(\beta)$ ، $g(0)$ و $g(-2)$

3) باستعمال مشتق مركب دالتين، احسب $g'(x)$

4) استنتج تغيرات الدالة g دون دراسة تغيراتها.

IV) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = f(|x|)$

1) ادرس شفعية الدالة h.

2) وضّح كيف يمكن إنشاء المنحنى (C_h) الممثل للدالة h انطلاقا من المنحنى (C_f).

التمرين 68

I- ليكن a و b عددين حقيقيين و f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x - 1}$$

◄ (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

• عين العددين الحقيقيين a و b حتى تكون $f(-1) = 0$ قيمة حدية لـ f.

II- نضع فيما يلي: $a = 1$ و $b = 2$.

1) أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2) احسب $\lim\limits_{x \to 1^{\geq}} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to 1^{\leq}} f(x)$ وفسر النتائج هندسيا.

3) أ- أثبت أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}/\{1\}$:

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

ب- استنتج تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) أ- أثبت أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.
ب- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

5) جد إحداثيي Ω نقطة تقاطع (Δ) مع المستقيم المقارب العمودي.

6) أثبت أن النقطة Ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

7) أثبت أنه لايوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة Ω.

8) بين أن (C_f) يقبل مماسين موازيين للمستقيم ذو المعادلة $y = -3x - 5$ ثم اكتب معادلة كل منهما.

9) أرسم (C_f) ، المستقيمان المقاربان و المماس (T).

III- g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}/\{-1;1\}$ بـ:

$$g(x) = \frac{x^2 + 2|x| + 1}{|x| - 1}$$

◄ (C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

1) أثبت أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}/\{-1;1\}$: $g(x) = f(|x|)$.
2) اشرح كيفية رسم (C_g) انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه.
3) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $g(x) = m$.

التمرين 69

I. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ : $f(x) = ax + \frac{bx + c}{(x-2)^2}$ والقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{2\}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1/ عين الأعداد الحقيقية a، b و c علما أن (C_f) يشمل النقطة $A(3,1)$ والنقطة $B(1,0)$ ذروة للمنحنى (C_f).

2/ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{2\}$: $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 1}{(x-2)^2}$.

3/ ادرس تغيرات الدالة f ثم استنتج معادلات المستقيمات المقاربة لـ (C_f).

4/ أ/ عين عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ثم أثبت أنها تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]\frac{1}{2}, 3\right[$.

5/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.

6/ أثبت أن (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي المستقيم المقارب المائل ثم اكتب معادلة للمماس (T).

7/ أثبت أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياها.

8/ أنشئ (Δ)، (T) و (C_f).

9/ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = m$.

التمرين 70

I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x}{x^2 - 2x + 2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) عين العددين الحقيقين α و β بحيث (C_f) يقبل مماسا يوازي محور الفواصل عند النقطة $A(1;-1)$.
2) نضع $\alpha=1$ و $\beta=-2$ ، بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x)=\frac{4x-4}{(x^2-2x+2)^2}$
3) أدرس إشارة $f'(x)$ ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة f مشكلا جدول تغيراتها
4) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f(2-x)=f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.
5) عين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حاملي المحورين.
6) اكتب معادلة المستقيم (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.
7) ارسم المستقيم (T) والمنحنى (C_f)
8) m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$

II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\frac{x^2-2|x|}{x^2-2|x|+2}$

1) اكتب عبارة الدالة g دون رمز القيمة المطلقة، ثم أدرس قابلية إشتقاق الدالة g عند 0.
2) اشرح كيفية رسم (C_g) منحنى الدالة g إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه في نفس المعلم

التمرين 71

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{x^2-x+4}{x^2+x+2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجتين بيانيا.

2/ لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=f(x)-1$.

أ/ ادرس إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$.

ب/ استنتج وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=1$.

3/ أ/ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{2(x+1)(x-3)}{(x^2+x+2)^2}$.

ب/ أثبت أن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty,-1]$ و $[3,+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[-1,3]$.

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f.

4/ أ/ اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

ب/ تحقق أن (T) يقطع (C_f) في النقطة $A\left(-2,\frac{5}{2}\right)$.

5/ أنشئ (Δ)، (T) و (C_f).

6/ لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=\frac{x^2-|x|+4}{x^2+|x|+2}$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

أ/ أثبت أن الدالة h زوجية.

ب/ أثبت أنه من أجل كل x من المجال $[0,+\infty[$: $h(x)=f(x)$.

ج/ اشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه في نفس المعلم السابق.

التمرين 72

I) f_k دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f_k(x)=\frac{x^2+kx}{x+1}$ حيث $k\in\mathbb{R}$ و (C_k) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم.

1) بين أن جميع المنحنيات (C_k) تمر من نقطة واحدة يطلب تعيين إحداثييها.
2) عين قيم العدد k التي من أجلها تكون للدالة f_k قيمتين حديتين.
3) عين المنحنى (C_k) الذي يشمل النقطة $A(2;4)$.

Prof : Yahi Rachid

II) بأخذ $k=2$ أي $f_2(x)=\dfrac{x^2+2x}{x+1}$

1) عين الأعداد a ، b و c والتي من أجلها: $f_2(x)=ax+b+\dfrac{c}{c+1}$

2) أدرس تغيرات الدالة f_2.

3) أ- بين أن (C_2) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلته.

ب- أدرس وضعية (C_2) بالنسبة للمستقيم (Δ).

4) بين أن النقطة $I(-1;0)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_2).

5) اكتب معادلتي المماسين (T) و (T') للمنحنى (C_2) عند الفاصلتين (-2) و 0 على الترتيب.

6) ارسم المماسين (T) و (T') والمنحنى (C_2).

7) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f_2(x)=2x+m$

8) p وسيط حقيقي و (Δ_p) مستقيم معادلته: $y=px+p$

أ- بين أن المنحنى (C_2) لا يقبل مماسات تشمل I.

ب- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي p عدد وإشارة حلول المعادلة $f_2(x)=px+p$

9) نعتبر الدالة المعرفة بـ: $h(x)=f_2(\sin(x))$

أ- عين مجموعة تعريف الدالة h.

ب- إستنتج إتجاه تغير h على المجال $[0;\pi]$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

التمرين 73

I. لتكن g الدالة المعرفة بـ : $g(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+ax+1}$ حيث a و b عددان حقيقيان ثابتان.

(C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

- عين قيمة العددين الحقيقيين a و b علما أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته $x=1$ ويقطع محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $\dfrac{3}{2}$.

II. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{-2x+3}{x^2-2x+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ احسبر $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}f(x)$ ثم فسر النتائج بيانيا.

2/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3/ ادرس إشارة $f(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}-\{1\}$ ثم استنتج وضعية (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل.

4/ اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند نقطة تقاطع (C_f) مع محور التراتيب.

5/ أنشئ (T) و (C_f).

6/ عين بيانيا، قيم الوسيط الحقيقي m، حتى تقبل المعادلة $mx^2+2(1-m)x+m-3=0$ حلين مختلفين في الإشارة.

7/ لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $h(x)=\dfrac{|2x-3|}{(x-1)^2}$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

- اشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه في نفس المعلم السابق.

التمرين 74

I. لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1,3\}$ بـ : $g(x)=a+\dfrac{b}{x^2-2x-3}$ حيث a و b عددان حقيقيان ثابتان.

(C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1,3\}$: $g'(x)=\dfrac{-2b(x-1)}{\left(x^2-2x-3\right)^2}$.

2/ عين قيمة العددين الحقيقيين a و b علما أن (C_f) يقبل عند النقطة $A(5,-4)$ مماسا موازيا للمستقيم ذي المعادلة $2x-3y+1=0$.

II. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1,3\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{-3x^2+6x-3}{x^2-2x-3}$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Prof : Yahi Rachid

1/ احسب نهايات الدالة f عند الأطراف المفتوحة لمجموعة تعريفها ثم فسر النتائج بيانيا.

2/ أ/ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1,3\}$: $f'(x)=\dfrac{24x-24}{(x^2-2x-3)^2}$.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=1$.

4/ اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -3.

5/ أثبت أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $x=1$ هو محور تناظر لـ (C_f).

6/ احسب $f(-2)$ و $f(0)$ ثم أنشئ (Δ)، (T) و (C_f).

7/ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلول المعادلة $(m+3)x^2-2(m+3)x-3(m-1)=0$.

III. لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1,3\}$ بـ : $h(x)=\dfrac{-3x^2+6x-3}{x^2-2x-3}$.

(C_h) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ ادرس اتجاه تغير الدالة h.

2/ أثبت أنه يوجد مماس مشترك بين (C_f) و (C_h) يطلب تعيين معادلة له.

التمرين 75

I. الجدول المقابل يمثل تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^3-x^2+7x-3$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

1/ أ/ أثبت أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α.

ب/ تحقق أن $g(0.6)\times g(0.2)<0$ ثم عين حصرا لـ α سعته 0.1.

2/ أ/ عين إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$.

ب/ استنتج إشارة $g(-x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$.

II. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}\left(-x^2+2x+3\right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

2/ أ/ عين العددين الحقيقيين a و b حيث يكون من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=-x+2+\dfrac{ax+b}{x^2+1}$.

ب/ استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ و $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

جـ/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

3/ أ/ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{(x-1)\times g(-x)}{(x^2+1)^2}$.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4/ برر دون حساب أن $\lim\limits_{x\to-\alpha}\dfrac{f(x)-f(-\alpha)}{x+\alpha}=0$.

5/ احسب $f(-1)$، $f(0)$ و $f(3)$ ثم أنشئ (Δ) و (C_f). (نأخذ $f(-\alpha)\simeq-0.7$)

Prof : Yahi Rachid

III. لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = -x - 1 + \dfrac{4x+2}{x^2+2x+2}$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1/ تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x-1) = f(x) - 2$.

2/ اشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه في نفس المعلم السابق.

التمرين 76

I. لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

1/ أ/ احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2/ أ/ أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2.1 < \alpha < 2.2$.

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$.

II. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ بـ : $f(x) = \dfrac{2x^3+3}{x^2-1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1/ أ/ احسب نهايات الدالة f عند الأطراف المفتوحة لمجموعة تعريفها.

ب/ استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (d) و (d') يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

2/ أ/ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$: $f'(x) = \dfrac{2x \times g(x)}{(x^2-1)^2}$.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3/ أثبت أن $f(\alpha) = 3\alpha$ ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$.

4/ أ/ تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$: $f(x) = 2x + \dfrac{2x+3}{x^2-1}$.

ب/ استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ و $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

جـ/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

5/ أ/ عين فواصل نقاط (C_f) التي يكون عندها المماس لـ (C_f) موازيا للمستقيم (Δ).

ب/ اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$. (نأخذ $f\left(\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right) \simeq -3.3$)

6/ أنشئ (d)، (d')، (Δ)، (T) و (C_f).

التمرين 77

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \dfrac{x^3+1}{3x^2+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1/ احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2/ أ/ عين الأعداد الحقيقية a، b و c حيث يكون من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{3x(x-1)(ax^2+bx+c)}{(3x^2+1)^2}$.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3/ أ/ احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - \dfrac{1}{3}x\right]$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - \dfrac{1}{3}x\right]$.

ب/ استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا عند $+\infty$ و $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

جـ/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = \dfrac{1}{3}x$.

4/ احسب $f(-1)$ ثم أنشئ (Δ) و (C_f).

Prof : Yahi Rachid

5/ لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=\dfrac{x^3-3x^2+3x}{3x^2-6x+4}$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

أ/ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x)=f(x-1)$.

ب/ اشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه في نفس المعلم السابق.

التمرين 78

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;3\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2-2x-3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ احسب نهايات الدالة f عند الأطراف المفتوحة لمجموعة تعريفها ثم فسر النتائج بيانيا.

2/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3/ أثبت أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $x=1$ هو محور تناظر لـ (C_f).

4/ عين نقاط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.

5/ أنشئ (Δ) و (C_f).

6/ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلول المعادلة $(m-1)x^2-2(m-1)x-3m=0$.

7/ لتكن g، h، k و l الدوال المعرفة بـ : $g(x)=\dfrac{x^2-2|x|}{x^2-2|x|-3}$، $h(x)=\dfrac{|x^2-2x|}{x^2-2x-3}$، $k(x)=\dfrac{x^2-2x}{|x^2-2x-3|}$ و $l(x)=|f(x)|$ و (C_g)، (C_h)، (C_k) و (C_l) تمثيلاتها البيانية في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

– اشرح كيف يمكن إنشاء (C_g)، (C_h)، (C_k) و (C_l) انطلاقا من (C_f) ثم أنشئها في نفس المعلم السابق.

التمرين 79

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{0,2\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{2x^2-4x-2}{x^2-2x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ أ/ احسب نهايات الدالة f عند الأطراف المفتوحة لمجموعة تعريفها.

ب/ اكتب معادلات المستقيمات المقاربة لـ (C_f).

2/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3/ اكتب معادلة لكل من (T_1) و (T_2) مماسي (C_f) عند النقطتين ذات الفاصلتين -1 و 3 على الترتيب.

4/ أثبت أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $x=1$ هو محور تناظر لـ (C_f).

5/ عين نقاط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.

6/ أنشئ (Δ)، (T_1)، (T_2) و (C_f).

7/ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=-m$.

8/ لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{0,2\}$ بـ : $f(x)+g(x)=4$ و (C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

– اشرح كيف يمكن إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه في نفس المعلم السابق.

التمرين 80

لتكن f الدالة المعرفة بـ : $f(x)=\dfrac{3x^2+\alpha x+3}{3x^2+2x+\beta}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث α و β عددين حقيقيين ثابتين.

I. 1/ عين قيم العدد الحقيقي β التي تكون من أجلها الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$.

2/ عين العددين الحقيقيين α و β علما أن الدالة f تقبل قيمة حدية عند العدد -1 هي -1.

II. نفرض أن $\alpha=10$ و $\beta=3$ أي أن: $f(x)=\dfrac{3x^2+10x+3}{3x^2+2x+3}$.

Prof : Yahi Rachid

1/ أ/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجتين بيانيا.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=1$.
2/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3/ (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين A و B.
– أثبت أن المماسين لـ (C_f) في النقطتين A و B يتقاطعان عموديا في نقطة C ثم احسب مساحة المثلث ABC.
4/ أنشئ (Δ) و (C_f).
5/ (D_m) مستقيم معادلته $y=m$ حيث m وسيط حقيقي.

أ/ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم (D_m).

ب/ تحقق من النتائج حسابيا.

جـ/ عندما يتقاطع (C_f) مع المستقيم (D_m) في نقطتين نسميهما M و N، ولتكن L منتصف القطعة $[MN]$.
– عين (Γ) مجموعة النقط L عندما يتغير m.
6/ لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=\dfrac{3x^2-10|x|+3}{3x^2-2|x|+3}$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

أ/ أثبت أن الدالة h زوجية.

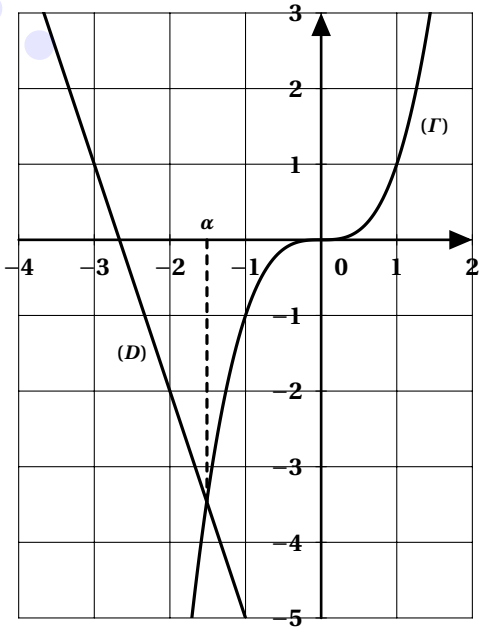
ب/ اشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه في نفس المعلم السابق.

التمرين 81

I. المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.
في الشكل المقابل، (D) المستقيم ذو المعادلة $y=-3x-8$، (Γ) التمثيل البياني للدالة $x\longmapsto x^3$ و α فاصلة نقطة تقاطع (D) و (Γ).
1/ بقراءة بيانية، حدد وضعية (Γ) بالنسبة إلى (D).
2/ لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^3+3x+8$.

أ/ عين إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$.

ب/ تحقق حسابيا أن $-1.6<\alpha<-1.5$.



II. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2-2}{x^2+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2/ أ/ عين العددين الحقيقيين a و b حيث يكون من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = x + 2 + \dfrac{ax+b}{x^2+1}$.

ب/ استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ و $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

ج/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

3/ أ/ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{x \times g(x)}{(x^2+1)^2}$.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4/ عين دون حساب $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x)+2}{x}$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

5/ أنشئ (Δ) و (C_f). (نأخذ $f(\alpha) \simeq -0.3$)

6/ لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = f(|x|)$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

أ/ أثبت أن الدالة h زوجية.

ب/ اشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه في نفس المعلم السابق.

التمرين 82

I. المستوي منسوب إلى معلم متعامد $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

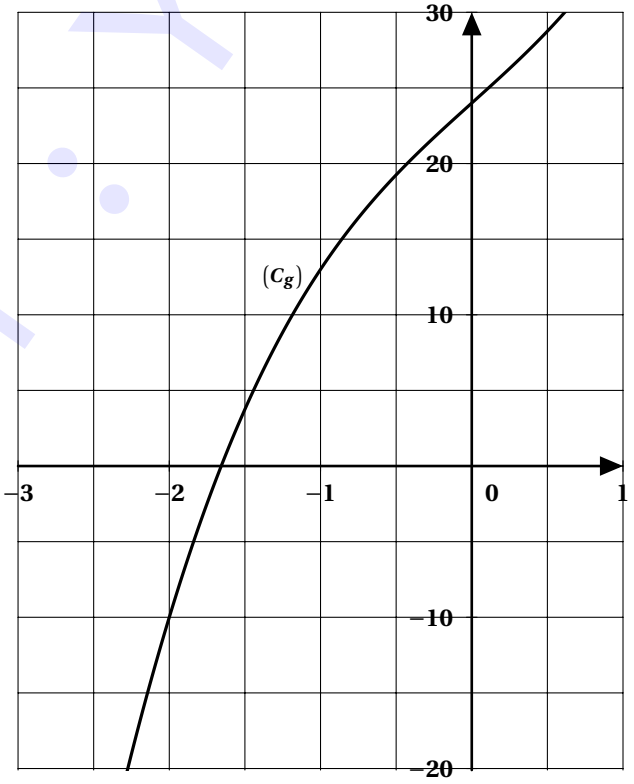
في الشكل المقابل، (C_g) التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 2x^3 + 9x + 24$.

- بقراءة بيانية:

1/ عين إشارة كل من $g(-2)$ و $g(-1)$.

2/ استنتج وجود عدد حقيقي وحيد α من المجال $]-2,-1[$ حيث $g(\alpha) = 0$ ثم تحقق أن $-1.7 < \alpha < -1.6$.

3/ عين إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$.



II. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \dfrac{-x^3-6}{2x^2+3}$.

Prof : Yahi Rachid

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2/ أ/ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{x\times g(-x)}{(2x^2+3)^2}$.

ب/ استنتج أن الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty,0]$ و $[-\alpha,+\infty[$ ومتزايدة تماما على المجال $[0,-\alpha]$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3/ أ/ تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)+\dfrac{x}{2}=\dfrac{3x-12}{2(2x^2+3)}$.

ب/ استنتج أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-\dfrac{x}{2}$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

جـ/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

4/ أثبت أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث $-1.82<x_0<-1.81$.

5/ أنشئ (Δ) و (C_f). (نأخذ $f(-\alpha)\simeq f(1.75)\simeq -1.2$)

6/ لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=f(|x|)$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

أ/ أثبت أن الدالة h زوجية.

ب/ اشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه في نفس المعلم السابق.

التمرين 83

لتكن f دالة عددية قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}-\{0\}$ ، حيث $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x}$ ، حيث a ، b و c اعداد حقيقية، و لها جدول التغيرات التالي:

x	$-\infty$		1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-5	↘	‖	$+\infty$ ↘	-1	↗	$+\infty$

① احسب $f'(x)$ بدلالة a و c

② بالاستعانة بجدول التغيرات، عين الأعداد a ، b و c

③ عين $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

④ استنتج معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=-1$.

⑤ اذكر عدد حلول المعادلة $f(x)=0$

⑥ أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل:

أ) $f\left(\dfrac{1}{3}\right)<f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

ب) المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left[\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right]$

جـ) $f'(3)>0$

⑦ نأخذ فيما يلي $a=1$ ، $b=-3$ و $c=1$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

أ) بين أن (C_f) يقبل المستقيم (D) ذا المعادلة $y=x-3$ مقارب مائل بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

Prof : Yahi Rachid

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (D)

جـ) بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ فإن: $f(-x) + f(x) = -6$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

د) نأخذ الحل الثاني للمعادلة $f(x) = 0$ ، $\beta \approx 2.6$. انشئ (C_f).

هـ) عين قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)| = m^2$ ثلاث حلول.

⑧ h دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ: $h(x) = [f(x)]^2$

أ) باستعمال مشتق مركب دالتين احسب $h'(x)$

ب) ادرس تغيرات الدالة $h(x)$

التمرين 84

لتكن f دالة عددية قابلة للإشتقاق على كل مجال من مجموعة تعريفها. لها جدول التغيرات التالي:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	‖	$+\infty$	↘	↗	$+\infty$
					‖		3		

تكتب عبارة f على الشكل: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ حيث a، b و c أعداد حقيقية.

① احسب $f'(x)$

② اعتمادا على جدول تغيرات الدالة f

أ) عين الأعداد الحقيقية ، a، b و c.

ب) عين $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. ثم فسر النتائج هندسيا.

جـ) قارن بين صورتي العددين $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ بالدالة f معللا إجابتك.

د) ماهو عدد حلول المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}$

③ نأخذ فيما يلي: $a = 1$، $b = 1$ و $c = \frac{1}{4}$. وليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس.

أ) بين انه عندما يؤول x إلى $+\infty$ أو $-\infty$ فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) معادلته $y = x + 1$

ب) ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

جـ) اثبت أنَ النقطة $\omega(1;2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f).

د) عين نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

Prof : Yahi Rachid

هـ) أنشئ كلا من (C_f) و (Δ)

④ λ عدد حقيقي، عين بيانيا، حسب قيم λ عدد حلول المعادلة $f(x)=|\lambda|$.

⑤ g دالة معرفة على بـ: $g(x)=[f(x)]^2$

أ) باستعمال مشتق مركب دالتين أحسب $g'(x)$

ب) شكل جدول تغيرات الدالة g (**دون دراسة تغيراتها**).

⑥ نعتبر الدالة h المعرفة على $]1;+\infty[$ كمايلي: $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

أ) باستعمال مشتق مركب دالتين أحسب $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة h ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة g (**دون دراسة تغيراتها**).

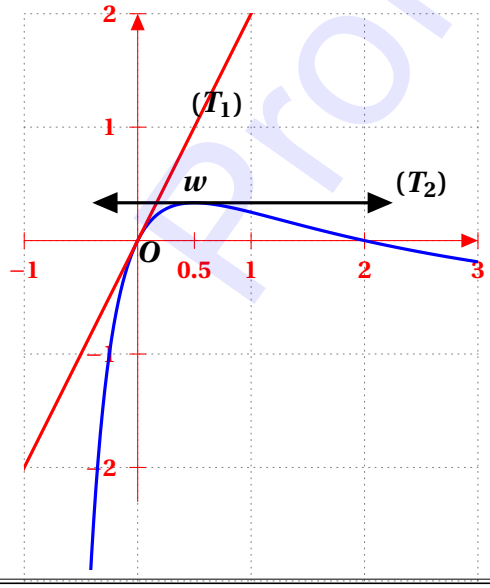
التمرين 85

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2,0\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+2x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث a، b و c أعداد حقيقية ثابتة.
الجدول المقابل يمثل تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	1	↘	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$	↗	1
		$-\infty$							$-\infty$

1/ اعتمادا على جدول تغيرات الدالة f أثبت أن $a=1$، $b=2$ و $c=-2$.
2/ عين فاصلتي نقطتي تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.
3/ أثبت أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $x=-1$ هو محور تناظر لـ (C_f).
4/ أنشئ (Δ) و (C_f).
5/ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة $f(x)=m$.

التمرين 86



الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{(x+1)^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.
(T_1) و $(T2)$ مماسين للمنحنى (C_f) في النقطتين O و ω ذات الفاصلتين 0 و $\dfrac{1}{2}$ على الترتيب.
كما هو مبين في الشكل المقابل:

I) بقراءة بيانية أجب على ما يلي:

1) عين حلول المعادلة $f(x)=0$ في المجال $]-1;+\infty[$

2) شكل جدول إشارة الدالة f.
3) شكل جدول إشارة الدالة المشتقة f'.
4) شكل جدول تغيرات الدالة f.
5) عين $f(0)$ ، $f(2)$ ، $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ و $f'(0)$. ثم جد معادلة كلا من (T_1) و $(T2)$
6) إستنتج الأعداد الحقيقية a ، b و c.

II) نضع: $f(x)=\frac{-x^2+2x}{(x+1)^2}$

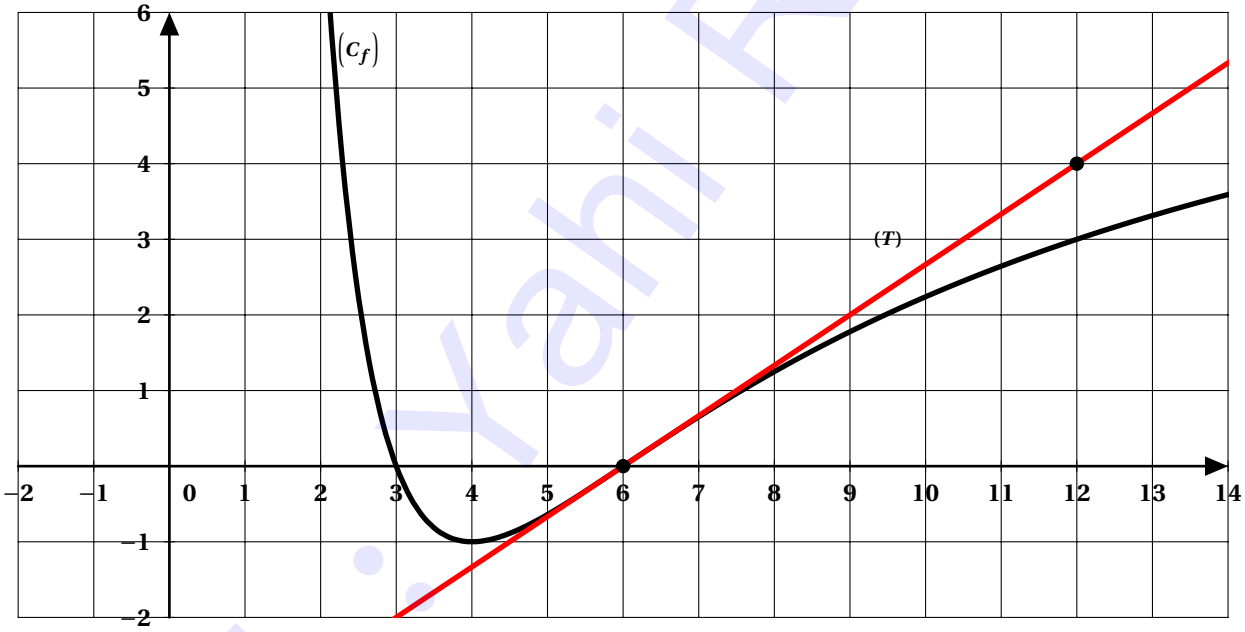
1) بين أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ لدينا: $f'(x)=\frac{2(1-2x)}{(x+1)^3}$
2) أدرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

III) لتكن الدالة g المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=[f(x)]^2$

1) احسب $g'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$.
2) إستنتج إشارة $g'(x)$ ثم شكل جدول تغيراتها.

التمرين 87

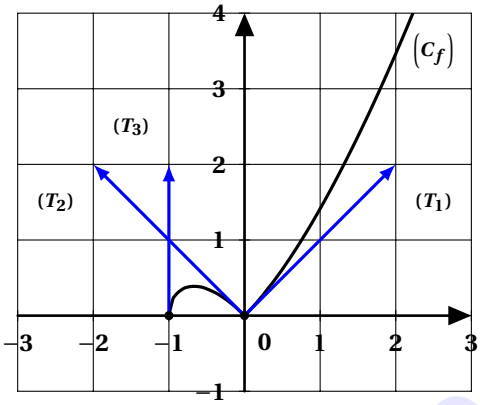
في الشكل المرفق التمثيل البياني (C_f) للدالة f والمعرفة على المجال $]0;+\infty[$ ، المستقيم (Δ) هو المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 6



1) عين كلا من $f(3)$ ، $f'(6)$ و $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h+4)+1}{h}$
2) عين معادلة المستقيم (Δ).
3) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ، ثم إستنتج $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(h+6)-f'(6)}{h}$
4) شكل جدول إشارة كل من $f(x)$ و $f'(x)$.
5) g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\frac{f(x)}{x}$
أ- اكتب عبارة $g'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$
ب- أدرس إتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$
ج- حل المعادلة: $g(x)=f(x)$
6) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما فإن: $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x^2}$

التمرين 88

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بـ : $f(x)=\sqrt{x^2(x+1)}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$، (T_1) و (T_2) نصفي مماسي (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 و (T_3) نصف المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1 موجه نحو الأعلى كما هو موضح في الشكل.



1/ أ/ بقراءة بيانية، ضع تخمينا مناسبا حول قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد 0 وعند العدد -1 من اليمين.

ب/ أثبت صحة تخمينك.

2/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

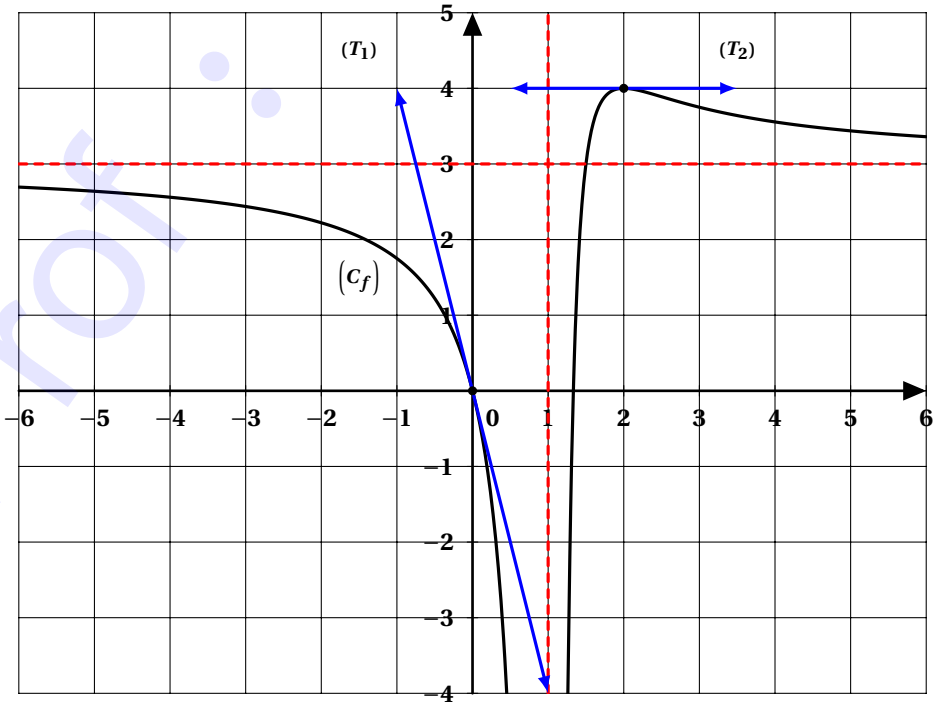
3/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4/ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=m$.

5/ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=mx$. حيث $m\in]-\infty;1]$

التمرين 89

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{ax^2+bx}{(x-1)^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث a و b عددان حقيقيان ثابتان، (T_1) المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 و (T_2) المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2 كما هو موضح في الشكل.



بقراءة بيانية:

Prof : Yahi Rachid

1/ عين نهايات الدالة f عند الأطراف المفتوحة لمجموعة تعريفها.
2/ عين معادلات المستقيمات المقاربة لـ (C_f).
3/ عين كلا من $f(0)$، $f'(0)$، $f(2)$ و $f'(2)$.
4/ عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
5/ أثبت أن $a=3$ و $b=-4$.
6/ أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.3<\alpha<1.4$.
7/ عين إشارة كل من $f(x)$ و $f'(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}-\{1\}$.
8/ لتكن g، h، k و l الدوال المعرفة بـ : $g=f^2$، $h=f^3$، $k=\frac{1}{f}$ و $l=\sqrt{f}$.

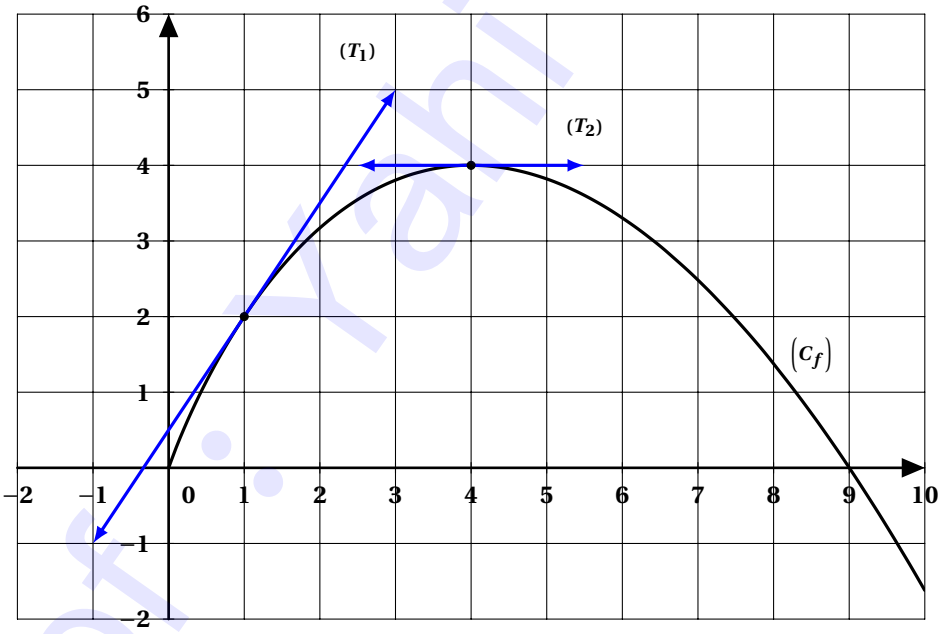
أ/ عين كلا من D_g، D_h، D_k و D_l مجموعة تعريف الدوال g، h، k و l على الترتيب.

ب/ عين كلا من g'، h'، k' و l' بدلالة كل من f و f'.

جـ/ استنتج جدول تغيرات كل من الدوال g، h، k و l.

التمرين 90

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. f دالة معرفة على المجال $[0,+\infty[$ وقابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$، (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$، (T_1) المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 و (T_2) المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 4 كما هو موضح في الشكل.



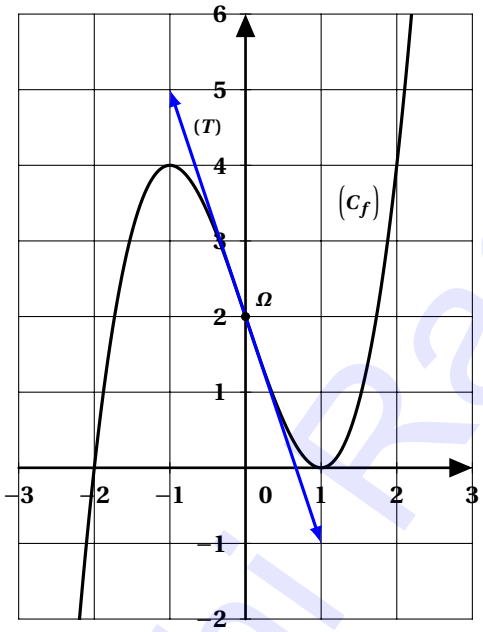
بقراءة بيانية:
1/ عين كلا من $f(4)$، $f'(4)$ و $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$.
2/ عين قيمة تقريبية للعدد $f(0.9994)$.
3/ عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
4/ عين إشارة $f'(x)$ حسب قيم x من المجال $]0,+\infty[$.
5/ عين حصرا للدالة f على المجال $[1,9]$.
6/ حل في المجال $]0,+\infty[$ المتراجحة $f(x)\times f'(x)\geq 0$ ذات المجهول x.
7/ عين بيانيا، قيم الوسيط الحقيقي m، حتى تقبل المعادلة المعادلة $f(x)=1+m^2$ حلين مختلفين.
8/ إذا علمت أن الدالة f الدالة معرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ : $f(x)=ax(b-\sqrt{x})$ حيث a و b عددان حقيقيان ثابتان.

أ/ عين f' بدلالة a و b.

بـ/ اعتمادا على السؤال 1/ عين قيمة العددين الحقيقيين a و b.

التمرين 91

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ و (T) المماس لـ (C_f) عند النقطة $\Omega(0,2)$ كما هو موضح في الشكل.



I. بقراءة بيانية:

1/ عين كلا من $f(0)$، $f'(0)$، $f(1)$ و $f'(-1)$.

2/ أ/ عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

بـ/ عين إشارة كل من $f(x)$ و $f'(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$.

3/ اكتب معادلة للمماس (T).

4/ حل في $\mathbb{R}$ المتراجحتين $f(x)>0$ و $f'(x)<0$ ذات المجهول x.

5/ ماذا تمثل النقطة Ω بالنسبة إلى (C_f) ؟ علل.

6/ إذا علمت أن الدالة f الدالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ حيث a، b، c و d أعداد حقيقية ثابتة.

– عين الأعداد الحقيقية a، b، c و d.

7/ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة $f(x)=2m$.

II. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^3-3x+2$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد 0.

2/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3/ عين حصرا للدالة f على المجال $[1,9]$.

4/ أثبت أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياها.

5/ أ/ اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

بـ/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T).

6/ لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=[f(x)]^2$.

أ/ عين h' بدلالة كل من f و f'.

Prof : Yahi Rachid

بـ/ ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها.

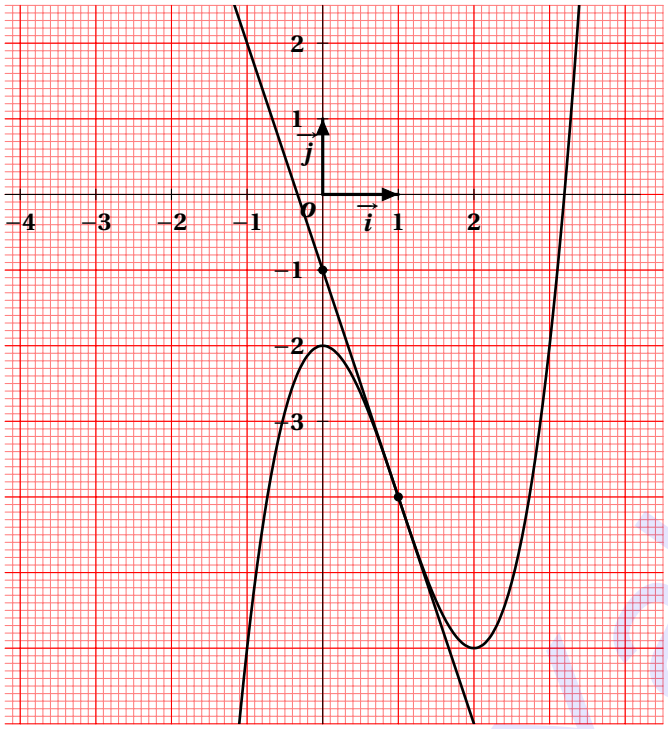
7/ لتكن k الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $k(x)=f(|x|)$ و (C_k) تمثيلها البياني في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

أ/ ادرس شفعية الدالة k.

بـ/ اشرح كيف يمكن إنشاء (C_k) انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه في نفس المعلم السابق.

التمرين 92

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=ax^3+bx^2+c$.
(C_g) تمثيلها البياني. (T) هو المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1 كما هو مبين في الشكل المقابل.



① بقراءة بيانية عين $g(0)$ ، $g'(1)$ و $g'(2)$.

② باستعمال نتائج السؤال ① تحقق أن: $a=1$ ، $b=-3$ و $c=-2$.

③ **بقراءة بيانية**

أ) حل المتراجحة $g'(x)\leq 0$.

ب) ماذا تمثل النقطة $A(1;-4)$ بالنسبة لـ (C_g) . برر جوابك.

ج) شكل جدول تغيرات الدالة g

د) حدد إشارة $g(3)$ و $g\left(\frac{7}{2}\right)$ ثم إستنتج وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $\left]3;\frac{7}{2}\right[$ بحيث $g(\alpha)=0$ ثم تحقق أن : $3.1<\alpha<3.2$.

4) إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$. ثم استنتج إشارة $g(x)$ على . $\mathbb{R}$.

II) نعتبرالدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كمابلي: $f(x)=\frac{x^3+1}{(x-1)^2}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. .

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

2) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$ لدينا $f'(x)=\frac{(x-1)g(x)}{(x-1)^4}$.

3) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

4) بين أن: $f(\alpha)=3+\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ ثم اعط حصرا لـ $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-1})

5) أحسب $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(f(x)-x\right)$ ثم إستنتج أن (C_f)يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له .

6) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

7) عين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

8)أكتب معادلة المستقيم (D) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $-\frac{1}{3}$.

9) جد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات.

10) أنشئ (Δ) , (C_f).

Prof : Yahi Rachid

11) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$.

III h الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ : $h(x) = \dfrac{|x^3+1|}{(x-1)^2}$ و (C_h) تمثيلها البياني .

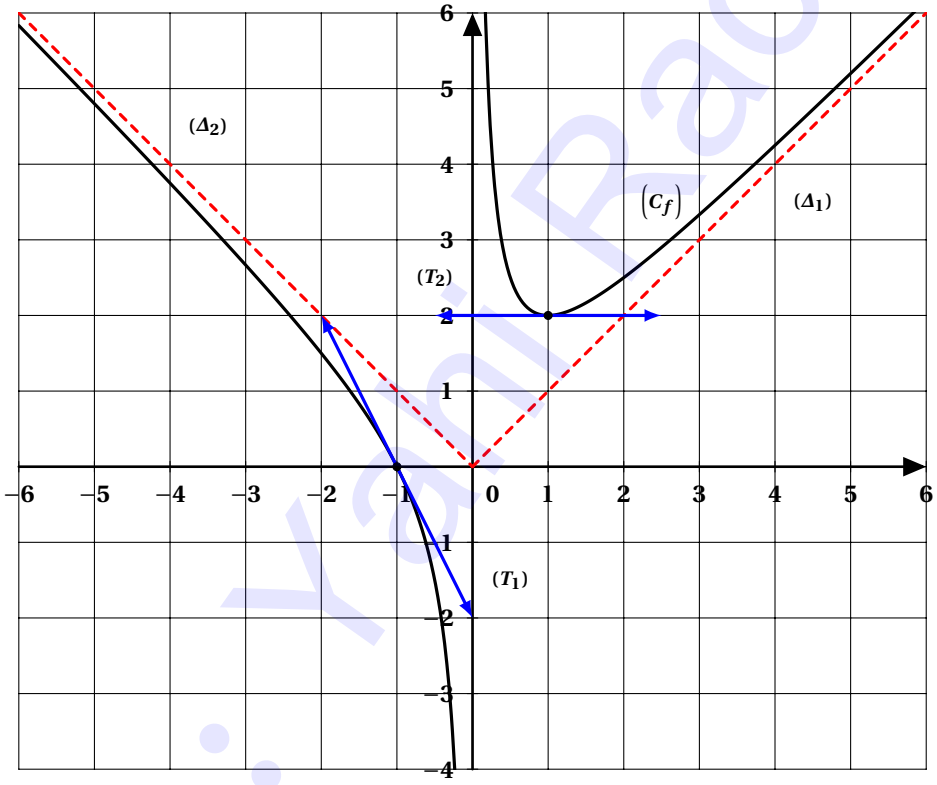
1) أكتب $h(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

2) أدرس قابلية إشتقاق الدالة h عند القيمة -1 ثم فسر النتيجة هندسيا.

3) إستنتج رسم المنحنى (C_h) إنطلاقا من (C_f).

التمرين 93

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$، (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$، (Δ_1) و (Δ_2) مستقيمان مقاربان لـ (C_f)، (T_1) المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1 و (T_2) المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 كما هو موضح في الشكل.



بقراءة بيانية:

1/ عين نهايات الدالة f عند الأطراف المفتوحة لمجموعة تعريفها.

2/ عين كلا من $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$، $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]$، $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

3/ عين كلا من $f'(-1)$ و $f'(1)$.

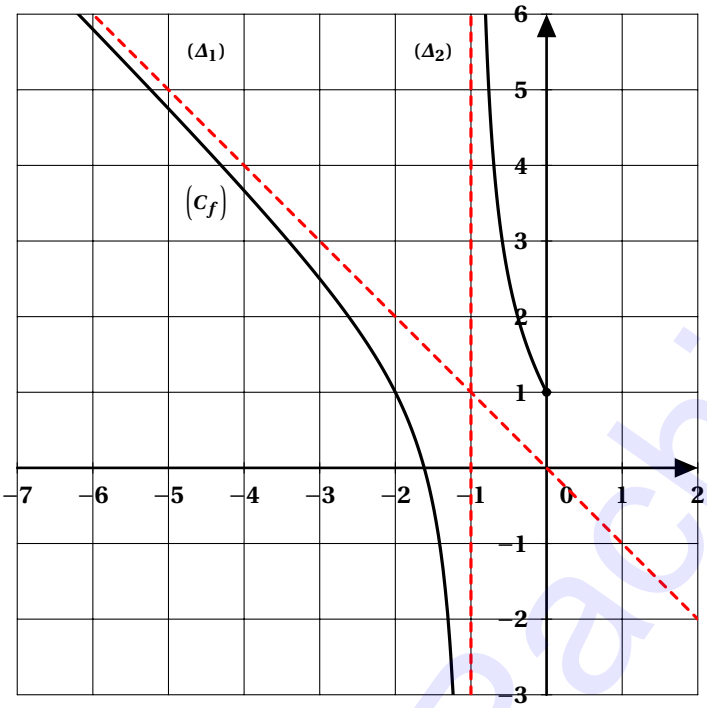
4/ اكتب معادلة للمماس (T).

5/ حل في $\mathbb{R}^*$ المتراجحة $f(x) \times f'(x) > 0$ ذات المجهول x.

التمرين 94

لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty,-1[\cup]-1,0]$ بـ : $f(x) = ax + \dfrac{b}{x+c}$، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ حيث a، b و c أعداد حقيقية ثابتة و (Δ_1) و (Δ_2) مستقيمان مقاربان لـ (C_f) كما هو موضح في الشكل.

Prof : Yahi Rachid



I. بقراءة بيانية:

1/ عين كلا من $\lim\limits_{x\to-1^{<}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-1^{>}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+\frac{x}{3}\right]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$.

2/ عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3/ اعتمادا على المعطيات السابقة أثبت أن $a=-1$ و $b=c=1$.

II. لتكن g الدالة المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ : $g(x)=x+\frac{1}{x+1}$ و (C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2/ أثبت أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ_3) عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

3/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

III. لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $h(x)=|x|+\frac{1}{x+1}$ و (C_h) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ اكتب عبارة الدالة h دون رمز القيمة المطلقة.

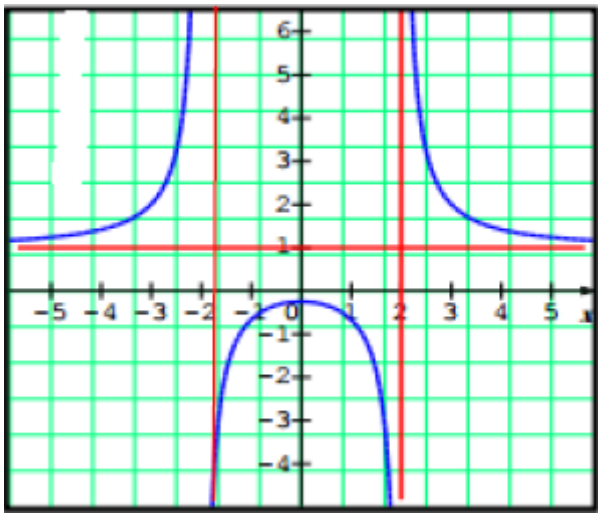
2/ أ/ احسب $\lim\limits_{x\to0^{>}}\frac{h(x)-h(0)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to0^{<}}\frac{h(x)-h(0)}{x}$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب/ اكتب معادلة لكل من (T_1) و (T_2) نصفي مماسي (C_h) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

3/ أنشئ (T_1)، (T_2) و (C_h).

4/ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلول المعادلة $h(x)=|m|$.

التمرين 95



الشكل المقابل يمثل (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f حيث $f(0) = -\frac{1}{4}$.

باستعمال منحنى الدالة f

① عين مجموعة تعريف الدالة f .

② عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف مع تفسيرها هندسيا

③ مثل جدول تغيرات الدالة f.

④شكل جدول اشارة كلا من f و f' (مشتقة الدالة f)

⑤ أ) حدد بيانيا وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) ذي المعادلة $(D): y = 1$ ، ثم شكل جدول اشارة الدالة g المعرفة بـ $g(x) = f(x) - 1$

ب) استنتج النهايات التالية $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{g(x)}$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{g(x)}$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -2} \frac{1}{g(x)}$

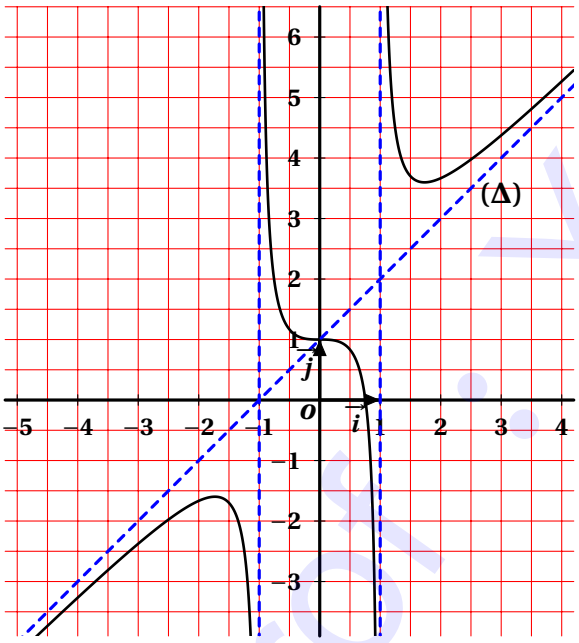
⑥ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = m$

⑦ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = |m|$

التمرين 96 (واجب منزلي)

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ بـ $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس كما هو مبين في الشكل المقابل.



① حدد بيانيا ثم حسابيا النهايات التالية $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)$; $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x)$; $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)$; $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

② استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين عموديين يطلب كتابة معادلتيهما.

③ باستعمال عبارة f. حدد اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها.

④ اكتب معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة f عند 0.

⑤ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (T) واستنتج ان (C_f) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين احادياتها

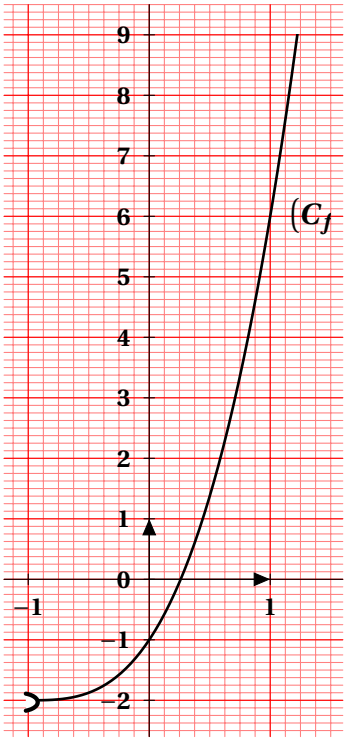
⑥ أ) إذا علمت ان (Δ) مقارب مائل لـ (C_f). عند كل من $-\infty$ و $+\infty$ فأوجد معادلته، ثم تحقق بالحساب أن (Δ) مقارب مائل لـ (C_f).

ب) حدد بيانيا الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) ثم تحقق من ذلك حسابيا.

⑦ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = x + m$

التمرين 97 بكالوريا (2008) ع-ت الموضوع الأول

Prof: Yahi Rachid



I) المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البايني للدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كمابلي:

$$g(x)=x^3+3x^2+3x-1$$

أ) بقراءة بيانية شكّل جدول تغيرات الدالة g وحدّد $g(0)$ و إشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$

ب) علّل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يحقّق: $g(\alpha)=0$.

ج) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$

II) f هي الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بمايلي

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$$

وليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

① احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$ وفسّر النتيجة الثانية هندسيا.

② احسب: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1}f(x)$ و فسّر النتيجة هندسيا.

③ تحقّق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$. حيث f' هي الدالة مشتقة للدالة f

④ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

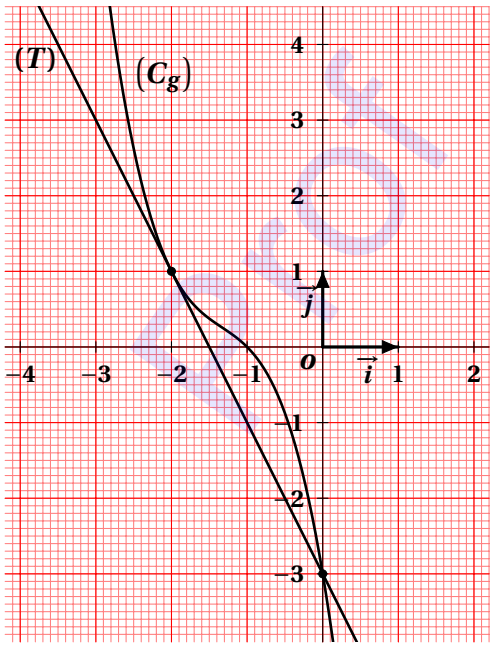
⑤ عين دون حساب $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ وفسّر النتيجة بيانيا.

⑥ ناخذ $\alpha=0,26$

أ) عين مدور $f(\alpha)$ الى 10^{-2}

ب) ارسم المنحنى (Γ) .

التمرين 98



I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=ax^3-4x^2-6x+b$. (C_g) تمثيلها البياني.
(T) هو المماس عند النقطة ذات الفاصلة -2 كما هو مبين في الشكل المقابل.

بقراءة بيانية

① احسب $g'(-2)$ ، ثم اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة -2

② شكل جدول تغيرات الدالة g .

③ عين العددين الحقيقيين a و b

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x)=-2x-1-\frac{1}{(x+1)^2}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب

إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

① احسب نهاية f عند -1 ثم فسر النتيجة بيانيا.

② احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

③ اثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ يكون: $f'(x)=\dfrac{2xg(x)}{(x+1)^4}$.

④ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

⑤ بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث $-1.7<x_0<-1.6$ وفسر ذلك هندسيا.

⑤ بيّن انّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-2x-1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

⑥ ارسم المنحنى (C_f) .

⑦ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $(x+1)^2+m+mx^2=-1-2mx$.

التمرين 99 بكالوريا (2009) ع-ت الموضوع الأول

I) f دالة معرفة على $I=]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ بـ $f(x)=-x+\dfrac{4}{x+1}$. (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس كما هو مبين في الشكل المقابل.

① أ) احسب نهايات الدالة f عند الحدود المفتوحة لـ I.

ب) بقراءة بيانية ودون دراسة اتجاه تغيرات f شكّل جدول تغيراتها .

② g دالة معرفة على المجال $[0;+\infty[$ كمايلي: $g(x)=x+\dfrac{4}{x+1}$. (C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس.

أ) احسب نهاية g عند $+\infty$.

ب) تحقق من أنّ (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

جـ) ادرس تغيرات g .

II) k دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كمايلي: $k(x)=|x|+\dfrac{4}{x+1}$

② أ) احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$ ، $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$ ماذا تستنتج؟

ب) اعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

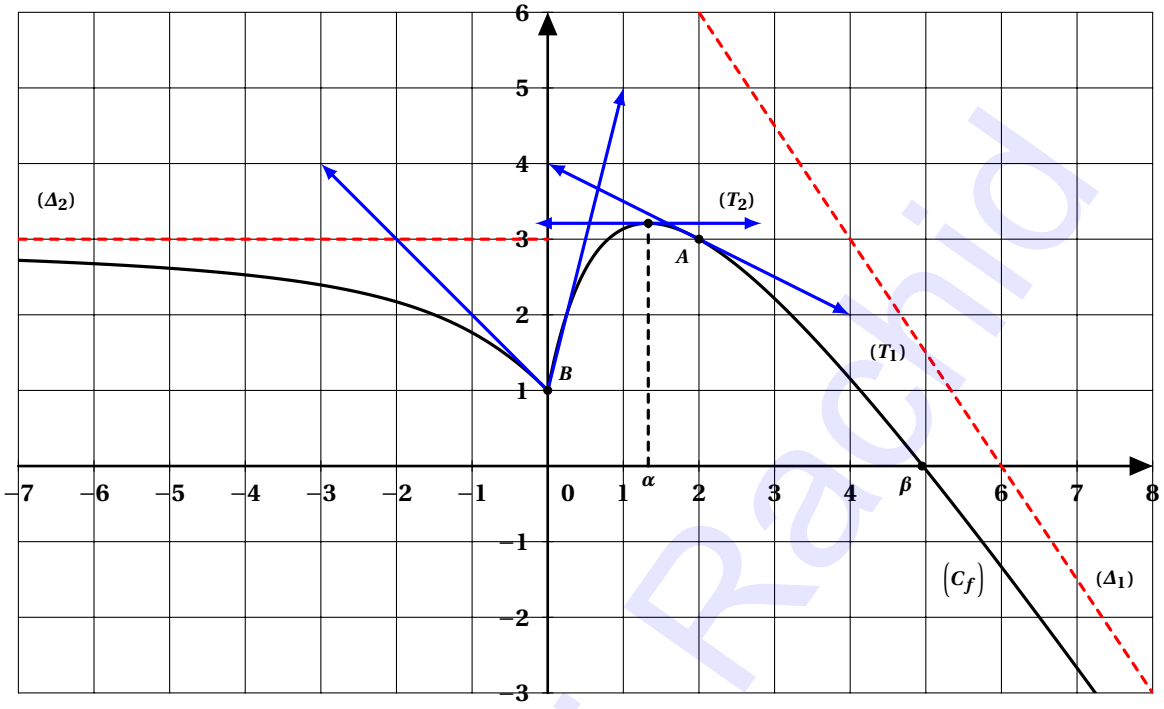
③ اكتب معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$.

④ ارسم (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_k) (منحنى الدالة k) .

التمرين 100

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$، (C_f) تمثيلها البياني

في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$، (Δ_1) و (Δ_2) مستقيمان مقاربان لـ (C_f)، (T_1) المماس لـ (C_f) عند النقطة $A(2,3)$، (T_2) المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة α و (C_f) يقبل عند النقطة $B(0,1)$ نصفي مماس كما هو موضح في الشكل.



I. بقراءة بيانية:

1/ اكتب معادلة لكل من (Δ_1) و (T_1).

2/ عين كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$، $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\sqrt{f(x)+1}}$، $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x)+\dfrac{3}{2}x\right]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)+x]$.

3/ عين كلا من $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} \dfrac{f(x)-1}{x}$، $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \dfrac{f(x)-1}{x}$، $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ و $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{f(-x+4)-3}{x-2}$.

4/ برر لماذا الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند العدد 0 ؟ ماذا تمثل النقطة B بالنسبة إلى (C_f) ؟

5/ أ/ عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ عين إشارة $f'(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}^*$.

جـ/ باستعمال التقريب التآلفي للدالة f، عين قيمة مقربة لـ $f(2.001)$.

6/ أ/ أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β ثم عين حصرا له سعته 0.5.

ب/ عين إشارة $f(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$.

7/ عين بيانيا، قيم الوسيط الحقيقي m، حتى تقبل المعادلة $f(x)=m+1$ ثلاث حلول مختلفة.

II. لتكن g الدالة المعرفة بـ : $g(x)=ax+b+\sqrt{x^2+c}$ حيث a، b و c أعداد حقيقية ثابتة.

1/ عين قيم العدد الحقيقي c حتى تكون الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$.

2/ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ في كل حالة مما يأتي: $a<0$، $a=1$ و $a>1$.

3/ إذا علمت أنه من أجل كل x من المجال $]-\infty,0]$: $f(x)=g(x)$، وبالاعتماد على القيم $f(0)$، $f'_g(0)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

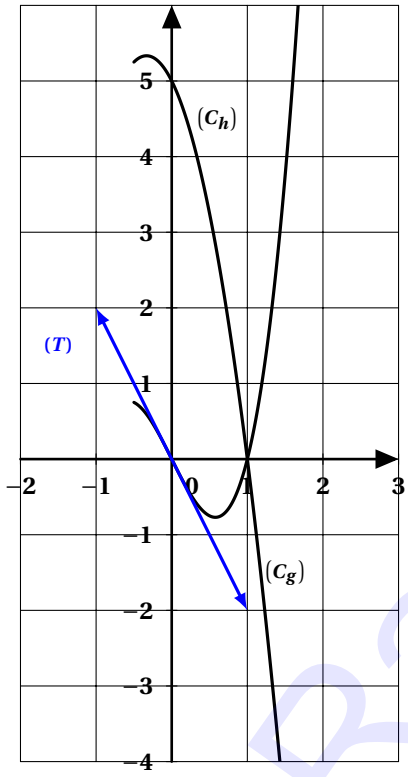
– عين الأعداد الحقيقية a، b و c.

التمرين 101

I. المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

لتكن g و h الدالتين المعرفتين على المجال $\left[-\dfrac{1}{2},2\right]$ بـ : $g(x)=2x^3-2x$ و $h(x)=-3x^2-2x+5$، (C_g) و (C_h) تمثيليهما البيانيين في في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ و (T) مماس (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة 0 كما هو موضح في الشكل.

Prof : Yahi Rachid



– بقراءة بيانية، وفي كل حالة من الحالات التالية، أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل:

1/ مجموعة حلول المعادلة $g(x)=h(x)$ في المجال $\left[-\frac{1}{2},2\right]$ هي $\{0,1\}$.

2/ العدد المشتق للدالة g عند 0 يساوي 0.

3/ النقطة $O(0,0)$ هي نقطة انعطاف لـ (C_g).

4/ من أجل كل x من المجال $[0,1]$: $h(x)\times h'(x)>0$.

5/ جدول إشارة $g(x)-h(x)$ على المجال $\left[-\frac{1}{2},2\right]$ يعطى بـ :

x	$-\frac{1}{2}$		1		2
$g(x)-h(x)$		$-$	0	$+$	

II. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $\left[-\frac{1}{2},2\right]$ بـ : $f(x)=\frac{x^3-x+4}{x+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ أ/ أثبت أنه من أجل كل x من المجال $\left[-\frac{1}{2},2\right]$: $f'(x)=\frac{g(x)-h(x)}{(x+1)^2}$.

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2/ عين القيم الحدية المحلية للدالة f إن وجدت.

3/ عين دون حساب $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

4/ اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 ثم استنتج قيمة تقريبية لـ $f(0.002)$.

5/ عين حصرا للدالة f على المجال $[0,1]$.

6/ لتكن k الدالة المعرفة على المجال $[-2,2]$ بـ : $k(x)=-f(|x|)$ و (C_k) تمثيلها البياني في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

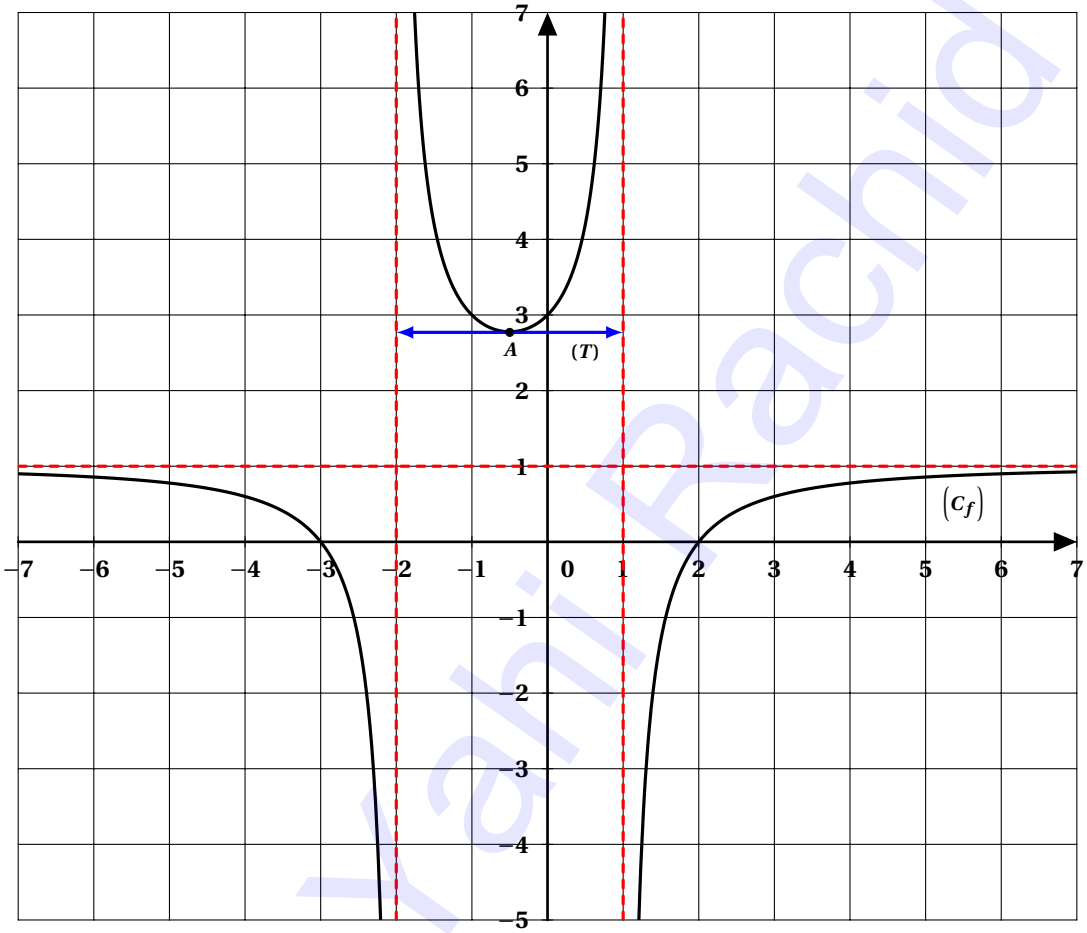
أ/ أثبت أن الدالة k زوجية.

ب/ اشرح كيف يمكن إنشاء (C_k) انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه في نفس المعلم السابق.

Prof : Yahi Rachid

التمرين 102

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2,1\}$ بـ : $f(x)=a+\dfrac{b}{x^2+x-2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث a و b عددان حقيقيان ثابتان، (T) المماس لـ (C_f) عند النقطة $A\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{25}{9}\right)$ كما هو موضح في الشكل.



I. بقراءة بيانية:

1/ عين كلا من $f(0)$، $f(2)$ و $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

2/ عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3/ عين إشارة كل من $f(x)$ و $f'(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}-\{-2,1\}$.

4/ عين قيمة العددين الحقيقيين a و b.

5/ أثبت أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $x=-\dfrac{1}{2}$ هو محور تناظر لـ (C_f).

6/ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=m$.

II. لتكن h الدالة المعرفة بـ : $h(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+x-6}{x^2+x-2}}$.

1/ عين D_h مجموعة تعريف الدالة h.

2/ عين h' بدلالة كل من f و f'.

3/ ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها.

III. لتكن f_m الدالة المعرفة بـ : $f_m(x)=\dfrac{x^2+mx-6}{x^2+mx-2}$ حيث m وسيط حقيقي.

(C_m) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ عين، بدلالة m، D_m مجموعة تعريف الدالة f_m.

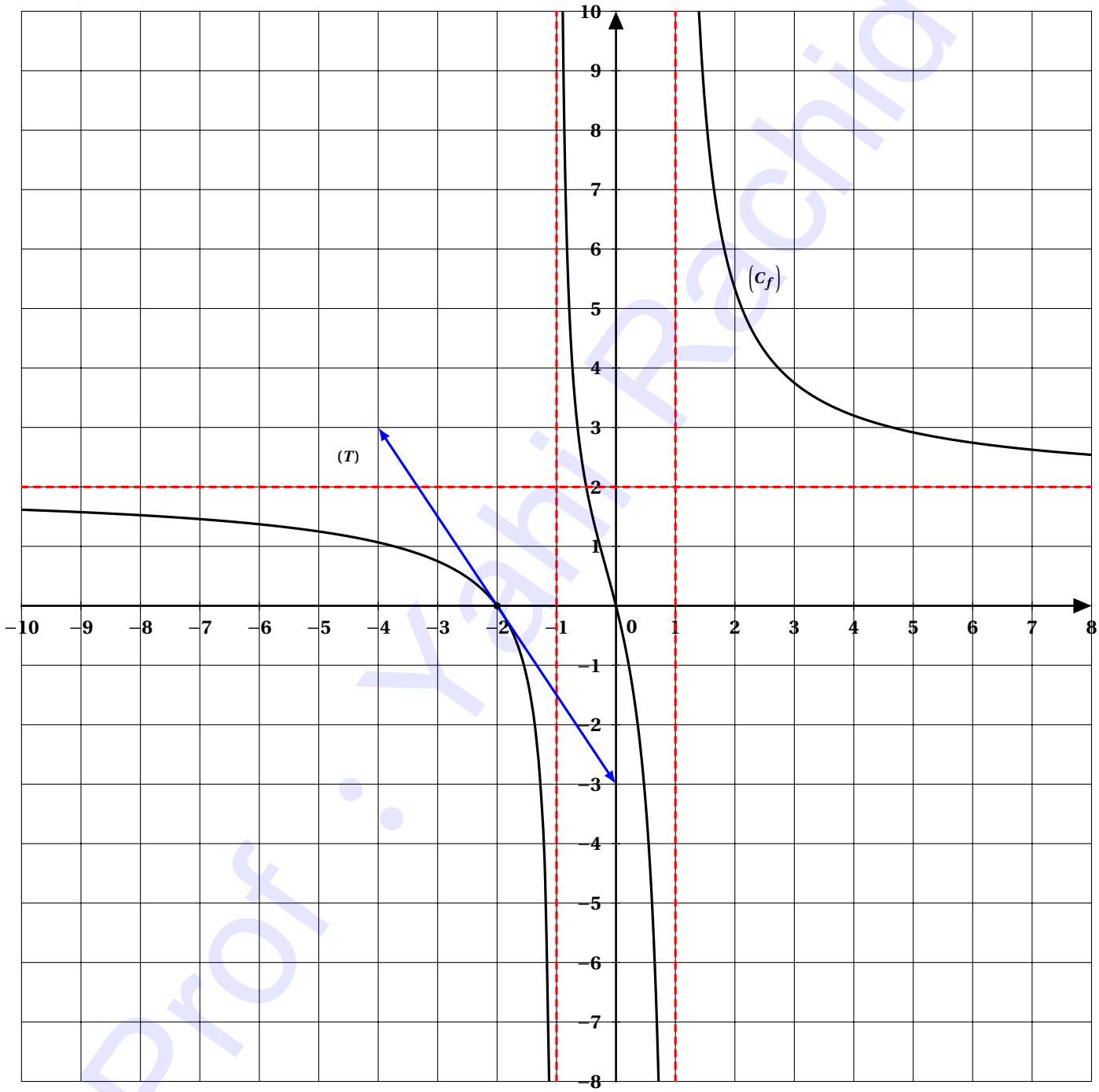
2/ ادرس اتجاه تغير الدالة f_m ثم شكل جدول تغيراتها.

Prof : Yahi Rachid

3/ أثبت أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثياها.

التمرين 103

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ بـ : $f(x)=2+\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث a و b عددان حقيقيان ثابتان، (T) المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1 كما هو موضح في الشكل.



Prof : Yahi Rachid

I. بقراءة بيانية:

1/ عين نهايات الدالة f عند الأطراف المفتوحة لمجموعة تعريفها.

2/ عين كلا من $f(0)$، $f(-2)$ و $f'(-2)$.

3/ عين إشارة كل من $f(x)$ و $f'(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

4/ شكل جدول تغيرات الدالة f.

5/ اكتب معادلة للمماس (T).

6/ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1,1\}$: $f(x)=2x\left(\frac{x+2}{x^2-1}\right)$.

7/ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=m$.

II. نفرض أن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ بـ : $f(x)=2x\left(\dfrac{x+2}{x^2-1}\right)$.

1/ احسب نهايات الدالة f عند الأطراف المفتوحة لمجموعة تعريفها.

2/ عين f' مشتقة الدالة f.

3/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

III. لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ بـ : $h(x)=f(-|x|)$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

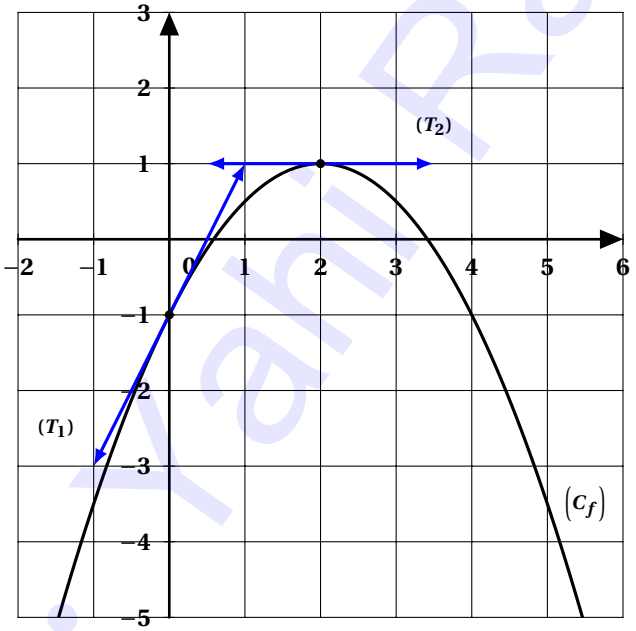
1/ أثبت أن الدالة h زوجية.

2/ اكتب عبارة الدالة h دون رمز القيمة المطلقة.

3/ اشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه في نفس المعلم السابق.

التمرين 104

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$، (T_1) المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 و (T_2) المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2 كما هو موضح في الشكل.



I. بقراءة بيانية:

1/ عين كلا من $f(0)$، $f'(0)$ و $f'(2)$.

2/ عين إشارة $f'(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$.

3/ اكتب معادلة للمماس (T_1) ثم استنتج قيمة تقريبية لـ $f(0.01)$.

4/ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة $f(x)=m$.

5/ إذا علمت أن الدالة f الدالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث a، b و c أعداد حقيقية ثابتة.

– عين الأعداد الحقيقية a، b و c.

II. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+2x-1$ و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2/ عين حصرا للدالة f على المجال $[0,4]$.

3/ اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 4.

4/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T).

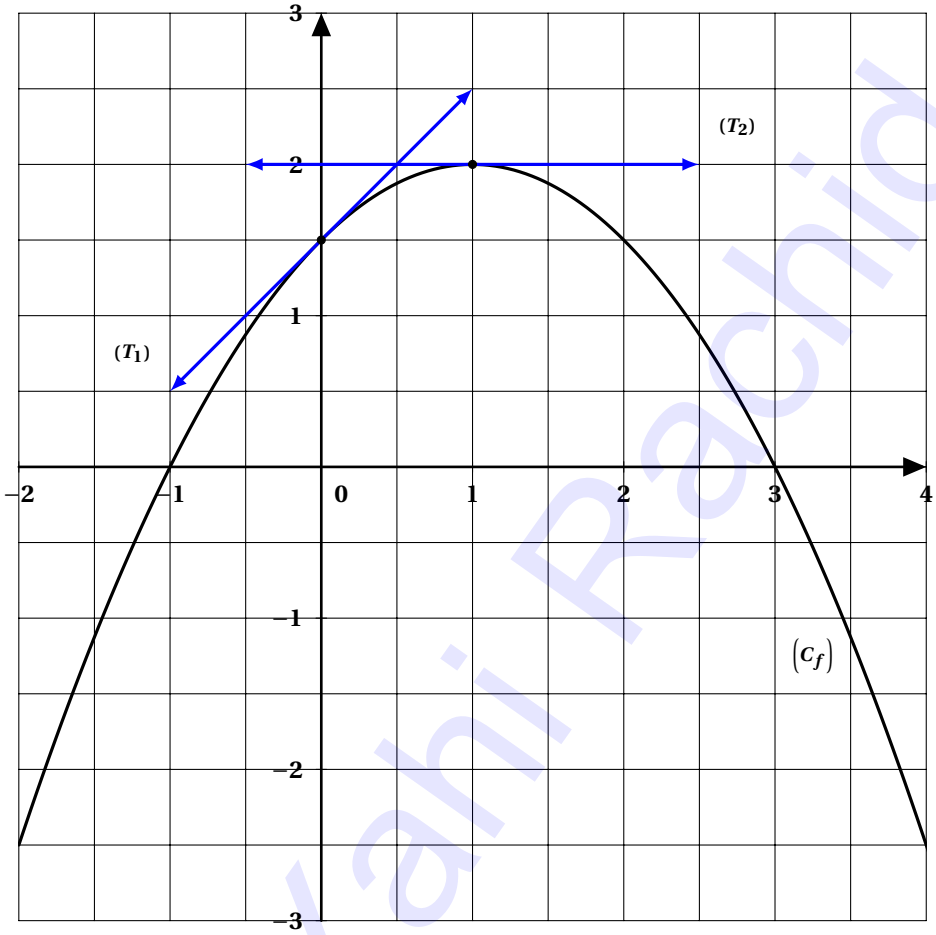
5/ لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=|f(x)+1|$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

– اشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه في نفس المعلم السابق.

التمرين 105

Prof : Yahi Rachid

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=ax^2+bx+c$، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث a، b و c أعداد حقيقية ثابتة، (T_1) المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 و (T_2) المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 كما هو موضح في الشكل.



I. بقراءة بيانية:

1/ عين كلا من $f(0)$، $f'(0)$ و $\lim\limits_{h\longrightarrow 0}\dfrac{f(1+h)-2}{h}$.

2/ اكتب معادلة للمماس (T_1) ثم استنتج قيمة تقريبية لـ $f\left(10^{-2}\right)$.

3/ عين إشارة كل من $f(x)$ و $f'(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$.

4/ عين الأعداد الحقيقية a، b و c.

II. لتكن h الدالة المعرفة على المجال $]-1,3[$ بـ : $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

1/ عين h' بدلالة كل من f و f'.

2/ ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها.

III. لتكن k الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $k(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+|x|+\dfrac{3}{2}$ و (C_k) تمثيلها البياني في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ ادرس شفعية الدالة k.

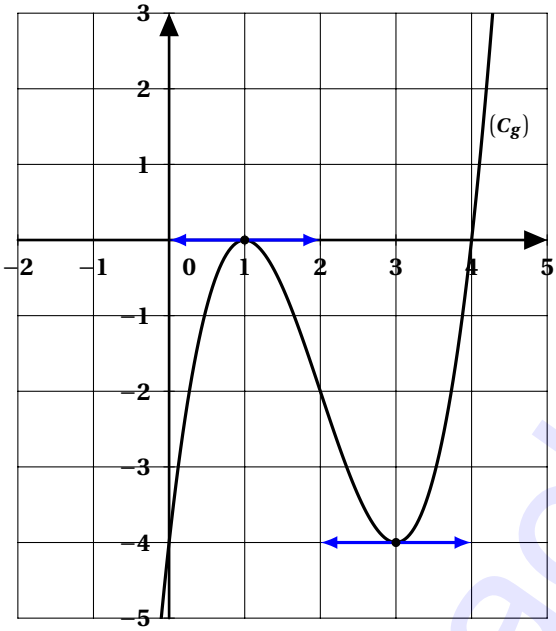
2/ أثبت أنه من أجل كل x من المجال $[0,+\infty[$: $k(x)=f(x)$.

3/ اشرح كيف يمكن إنشاء (C_k) انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه في نفس المعلم السابق.

التمرين 106

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. g دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و (C_g) تمثيلها البياني في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ كما هو موضح في الشكل.

Prof : Yahi Rachid



I. بقراءة بيانية:

1/ شكل جدول تغيرات الدالة g.

2/ عين إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$.

II. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1,4\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{4}{g(x)}+1$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ احسب نهايات الدالة f عند الأطراف المفتوحة لمجموعة تعريفها ثم فسر النتائج بيانيا.

2/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3/ احسب $f(0)$ ثم أنشئ (C_f).

4/ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=|m|$.

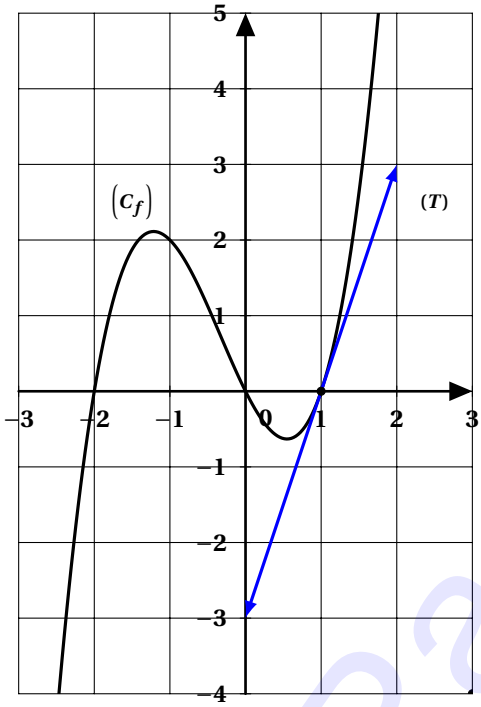
5/ لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1,4\}$ بـ : $h(x)=|f(x)|$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

– اشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه في نفس المعلم السابق.

التمرين 107

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$، (T) المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 كما هو موضح في الشكل.

Prof : Yahi Rachid



– بقراءة بيانية، وفي كل حالة من الحالات التالية، أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل:

1/ من أجل كل x من المجال $[0,1]$: $f(x) \leqslant 0$.

2/ المعادلة $f(x) = 3$ ذات المجهول x تقبل حلا وحيدا في المجال $[2,3]$.

3/ العدد المشتق للدالة f عند 1 يساوي 3.

4/ من أجل كل x من المجال $]1,+\infty[$: $f'(x) > 0$.

5/ المعادلة $y = 3x - 1$ هي معادلة للمماس (T).

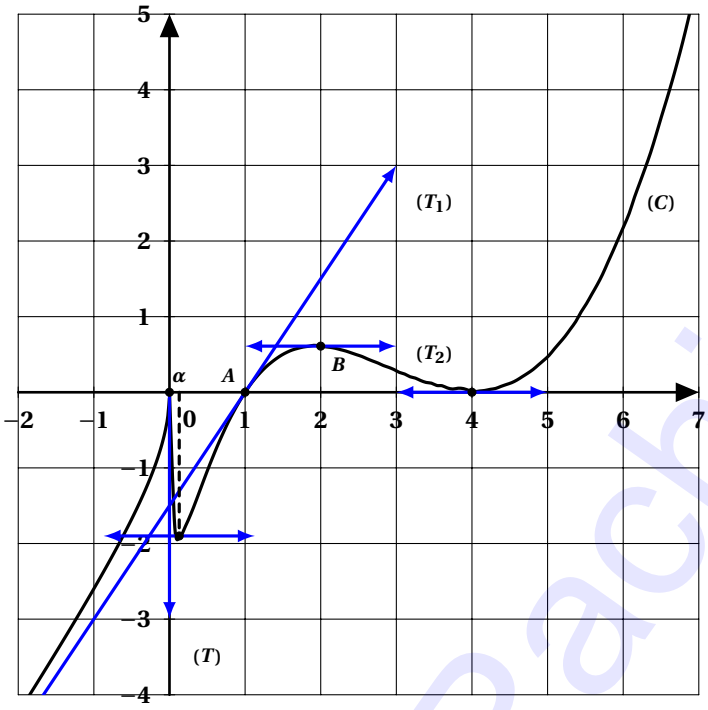
6/ الدالة f فردية.

7/ $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

التمرين 108

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، (C) التمثيل البياني للدالة المشتقة f' في المعلم $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$، (T) نصف المماس لـ (C) عند المبدأ $O(0,0)$ موجه نحو الأسفل، (T_1) المماس لـ (C) عند النقطة $A(1,0)$، (T_2) المماس لـ (C) عند النقطة $B(2,0.6)$ و (T_1) مستقيم مقارب لـ (C) عند $-\infty$ كما هو موضح في الشكل.

Prof : Yahi Rachid



بقراءة بيانية:

1/ أ/ هل الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟ وهل الدالة f' مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟

ب/ هل الدالة f' قابلة للاشتقاق عند العدد 0 ؟

2/ أ/ اكتب معادلة للمماس (T_1).

ب/ عين كلا من $f'(1)$، $f'(2)$، $f'(4)$ و $f''(2)$.

جـ/ عين كلا من $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(\alpha+h)-f'(\alpha)}{h}$ ، $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{[f'(x)]^2}{x-4}$ ، $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\times f'(x)}{x-1}$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{f'(x)}{x}$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{f'(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x}{f'(x)}$.

3/ أ/ عين اتجاه تغير الدالة f' مبينا إشارة مشتقتها.

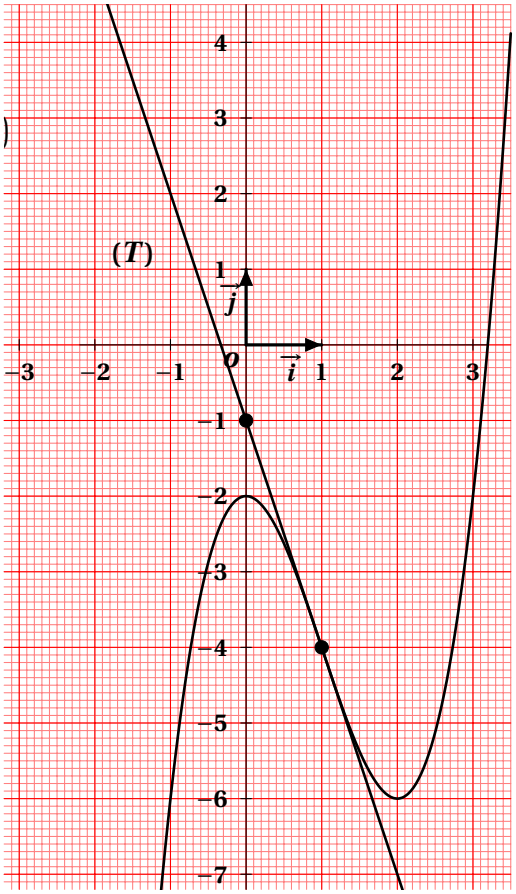
ب/ عين إشارة الدالة f' ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

جـ/ عين فواصل نقط انعطاف منحنى الدالة f وفواصل نقاطه الحدية.

4/ ادرس اتجاه تغير الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{0,1,4\}$ بـ : $h(x)=-\dfrac{1}{f'(x)}$.

التمرين 109

Prof : Yahi Rachid



الجزء الأول: g دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث $g(x)=ax^3+bx^2+c$. (C_g) تمثيلها البياني. (T) هو المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1 كما هو مبين في الشكل المقابل.

① بقراءة بيانية عين $g(0)$ ، $g(1)$ ، $g'(0)$ ، $g'(2)$ ، $g'(1)$ ، $\left(\frac{3}{g}\right)'(1)$ و $g''(1)$.

② عين دون حساب كلا من: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$ ، $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)+2}{x}$ ، و $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(h+2)-g(2)}{h}$

③ شكل جدول إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}$.

④ عين نهايات الدالة g بيانيا

⑤ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $g(x)=m$

⑥ باستعمال نتائج السؤال ① أحسب كلا من a ، b و c

⑦ ادرس تغيرات الدالتين المركبتين $H(x)=[g(x)]^2$ و $G(x)=\dfrac{1}{g(x)}$

الجزء الثاني: نضع: $a=1$ ، $b=-3$ و $c=-2$

① بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]3.1;3,2[$ ثم فسر ذلك هندسيا , استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$

② بين أن: (C_g) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين إحداثياها.

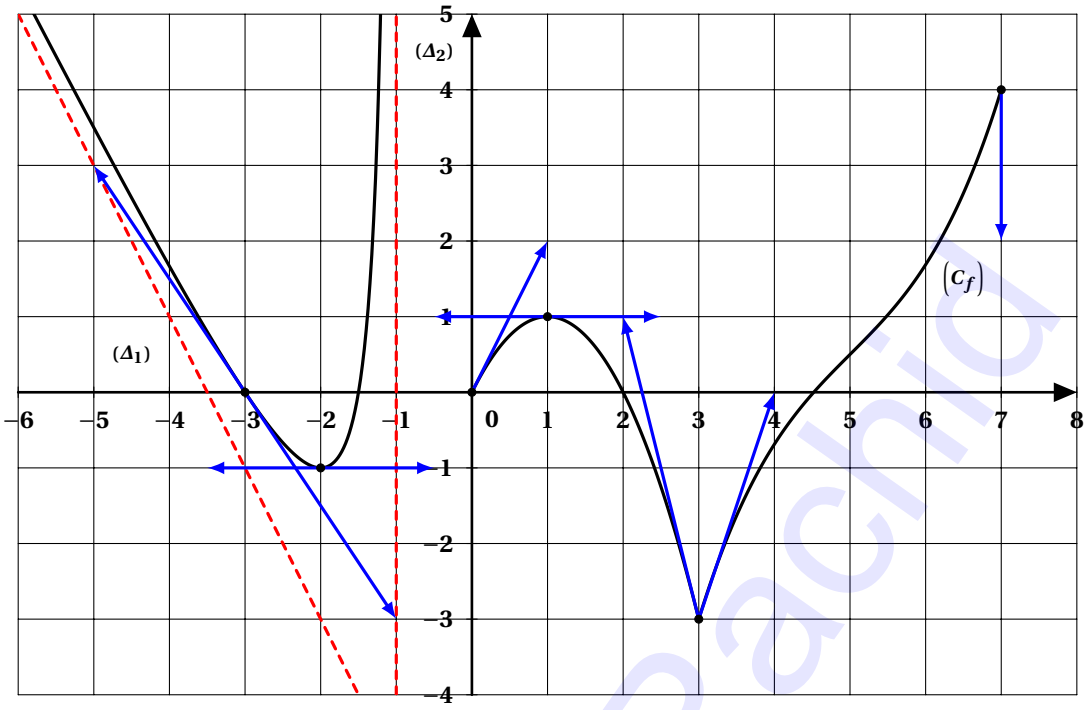
③ بين أن (C_g) يقبل مماسين موازيين للمستقيم ذي المعادلة $y=4$

④ اشرح كيف يتم أنشاء منحنيات الدوال التالية ثم ارسمها: $f_1(x)=|x|^3-3x^2-2$; $f_2(x)=-|x|^3+3x^2+2$

التمرين 110

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. f دالة معرفة على $]-\infty,-1[\cup[0,7]$ وقابلة للاشتقاق على $]-\infty,-1[\cup]0,7[$، (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$، (Δ_1) و (Δ_2) مستقيمان مقاربان لـ (C_f) معادلتاهما $y=-2x-7$ و $x=-1$ على الترتيب كما هو موضح في الشكل.

Prof . Yahi Rachid



I. بقراءة بيانية:

1/ عين كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+2x+7]$.

2/ عين كلا من $f'(-2)$، $\lim\limits_{x\to>0}\dfrac{f(x)}{x}$، $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-1}{h}$ و $\lim\limits_{x\to<7}\dfrac{f(x)-4}{x-7}$.

3/ عين كلا من $\lim\limits_{x\to>3}\dfrac{f(x)+3}{x-3}$ و $\lim\limits_{x\to<3}\dfrac{f(x)+3}{x-3}$ ثم فسر النتيجتين بيانيا.

4/ أثبت أن $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{f(x)}{x^2-9}=\dfrac{1}{4}$.

II. لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $g(x)=\dfrac{-2x^2-9x-9}{x+1}$.

1/ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $g'(x)=\dfrac{-2x(x+2)}{(x+1)^2}$.

2/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

III. لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $h(x)=\begin{cases}\dfrac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2+4x-2}} & ,x\in]-\infty,-1[\cup]-1,0[\\ & ,x\geq 0\end{cases}$ و (C_h) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ باستعمال مشتقة مركب دالتين، ادرس اتجاه تغير الدالة h على $]-1,0[\cup]-\infty,-1[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

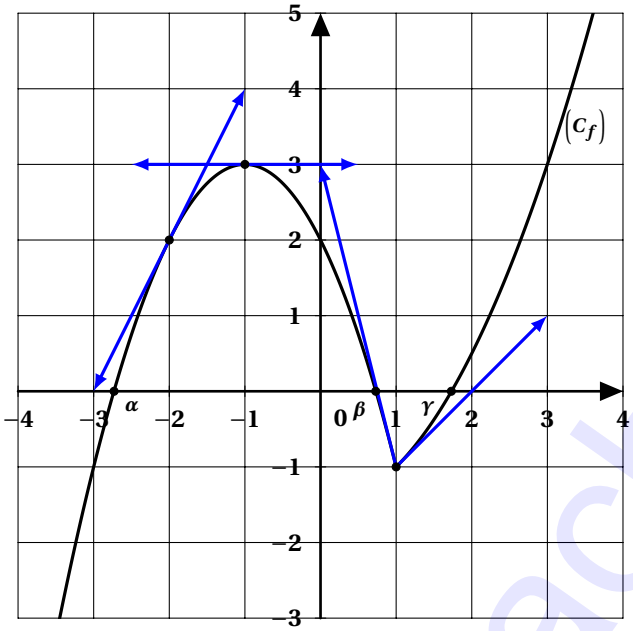
2/ ادرس قابلية اشتقاق الدالة h عند العدد 0 من اليمين ثم فسر النتيجة بيانيا.

3/ أثبت أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=2x$ مقارب مائل لـ (C_h) عند $+\infty$.

التمرين 111

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$، (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ و α، β و γ فواصل نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل كما هو موضح في الشكل.

Prof : Yahi Rachid



بقراءة بيانية:

1/ عين كلا من $f(-2)$، $f(0)$، $f(\beta)$، $f'(-1)$ و $\lim\limits_{x\longrightarrow -2}\dfrac{f(x)-2}{x+2}$.

1/ عين كلا من $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$.

3/ عين كلا من $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 1\\ x>1}}\dfrac{f(x)+1}{x-1}$ و $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 1\\ x<1}}\dfrac{f(x)+1}{x-1}$.

4/ أ/ برر لماذا الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند العدد 1 ؟

ب/ اكتب معادلة لكل من (T_1) و (T_2) نصفي مماسي (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

5/ أ/ عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ عين إشارة $f(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$ وإشارة $f'(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}-\{1\}$.

6/ اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -2.

7/ حل في $\mathbb{R}-\{1\}$ المتراجحة $f(x)\times f'(x)<0$ ذات المجهول x.

التمرين 112 (بكالوريا 2010 شعبة تقني رياضي)

نعتبرالدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمابلي: $f(x)=x\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ يرمز (C_f) إلى المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

① بين أن الدالة f فردية.

② أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f'(x)=1+\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

③ ادرس تغيرات الدالة f.

④ اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

⑤ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) واستنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

⑥ بين ان المستقيم (d) ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و (d') الذي معادلته $y=x-1$ مقارب عند $-\infty$.

⑦ ارسم (d) ، (d') و (C_f)

⑧ g الدالة العددية المعرفة على كمايلي: $g(x)=|x|\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

Prof : Yahi Rachid

أ) بين أن g دالة زوجية.

ب) ارسم (C_g) انطلاقا من (C_f) في نفس المعلم السابق

التمرين 113

I. لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

1/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

2/ أ/ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x)=\dfrac{1}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

جـ/ استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x)>0$.

II. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x-1+\sqrt{x^2+2x+2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ أ/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب/ أثبت أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

2/ أ/ أثبت أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=2x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

3/ أ/ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4/ أثبت أن (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يشمل مبدأ المعلم ثم اكتب معادلة للمماس (T).

5/ عين فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.

6/ أنشئ (Δ)، (T) و (C_f).

7/ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=mx$.

التمرين 114

نعتبرالدالة العددية f المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ كمابلي: $f(x)=|x|+\sqrt{x^2-1}$ يرمز (C_f) إلى المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

① ادرس شفعية الدالة f ثم احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$

② بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

② ادرس اتجاه تغير الدالة f على $]1;+\infty[$ ثم استنتج اتجاه تغيرها على $]-\infty;-1[$ و شكل جدول تغيراتها.

.

③ أنشئ (C_f) والمستقيمات المقاربة.

التمرين 115 (بكالوريا شعبة رياضيات 2009)

نعتبرالدالة العددية f المعرفة على $]-1;+\infty[$ كمابلي: $f(x)=x-\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$ يرمز (C_f) إلى المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

① ادرس تغيرات الدالة f.

② بين ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (d) معادلته: $y=x$.

③ ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (d) .

④ بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث $1.3 < x_0 < 1.4$

⑤ عين معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور التراتيب.

⑥ ارسم (C_f) و (T) في نفس المعلم .

⑦ g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كمايأتي $g(x)=|f(x)|$ و (C_g) منحنى الدالة g في المعلم السابق.

أ) بين كيف يتم إنشاء (C_g)

ب) ارسم (C_g) في نفس المعلم السابق.

⑤ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $g(x)=m^2$.

التمرين 116

نعتبرالدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمابلي: $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$ يرمز (C_f) إلى المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

① احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

② احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x-2)]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x+2]$ ثم فسر النتائج هندسا.

③ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

④ أنشئ (C_f) والمستقيمات المقاربة.

⑤ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=mx-2$

⑥ g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $g(x)=f(x-2)-1$ ، (C_g) منحنى الدالة g في المعلم السابق.

• بين أن (C_g) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه ثم ارسمه في نفس المعلم السابق.

التمرين 117

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}-x$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ احسب نهايات الدالة f عند الأطراف المفتوحة لمجموعة تعريفها ثم فسر النتائج بيانيا.

2/ أ/ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x)=\dfrac{-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3/ أثبت أن الدالة f فردية ثم فسر النتيجة بيانيا.

4/ أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,+\infty[$ ثم تحقق أن $1.26<\alpha<1.28$ وعين الحل الآخر.

5/ أ/ أثبت أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

6/ أ/ أثبت أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y=-x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ').

7/ أنشئ (Δ)، (Δ') و (C_f).

8/ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلول المعادلة $\sqrt{x^2+1}-mx=0$.

9/ لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}-|x|$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

أ/ أثبت أن الدالة h زوجية.

بـ/ اشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه في نفس المعلم السابق.

التمرين 118

لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty,-3]\cup[3,+\infty[$ بـ : $f(x)=x-\sqrt{x^2-9}$.
(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ أ/ احسب $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

بـ/ احسب $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)$.

2/ أثبت أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=2x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

3/ أ/ أثبت أنه من أجل كل h من المجال $]-\infty,0[$: $\dfrac{f(-3+h)+3}{h}=\dfrac{6}{h+\sqrt{h^2-6h}}$.

بـ/ ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد -3 من اليسار ثم فسر النتيجة بيانيا.

جـ/ ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد 3 من اليمين ثم فسر النتيجة بيانيا.

4/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

5/ أنشئ (Δ) و (C_f).

6/ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=\ln m$.

7/ لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty,-3]\cup[3,+\infty[$ بـ : $g(x)=\left|f(-|x|)\right|$ و (C_g) تمثيلها البياني في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

أ/ أثبت أن الدالة g زوجية.

بـ/ اكتب عبارة الدالة g دون رمز القيمة المطلقة.

جـ/ اشرح كيف يمكن إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه في نفس المعلم السابق.

8/ لتكن k الدالة المعرفة على $]-\infty,-3]\cup[3,+\infty[$ بـ : $k(x)=\ln\left|f(x)\right|$.

أ/ دون تعيين عبارة الدالة k، ادرس اتجاه تغير الدالة k واحسب نهايات الدالة k عند الأطراف المفتوحة لمجموعة تعريفها.

بـ/ شكل جدول تغيرات الدالة k.

التمرين 119

لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ بـ : $f(x)=\sqrt{3x^2-3}$.
(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ أثبت أن الدالة f زوجية ثم فسر النتيجة بيانيا.

2/ أ/ هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 1 من اليمين؟ فسر النتيجة بيانيا.

بـ/ هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد -1 من اليسار؟ فسر النتيجة بيانيا.

3/ احسب $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)$.

4/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

5/ أ/ أثبت أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=\sqrt{3}x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

بـ/ استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ') عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

6/ أثبت أن (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T_1) معامل توجيهه يساوي 2 ويقبل مماسا وحيدا (T_2) معامل توجيهه يساوي -2 ثم اكتب معادلة لكل من المماسين (T_1) و (T_2).

7/ أثبت أنه من أجل كل x من المجال $\left]1,\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right[$: $\sqrt{3}<f(x)<x$.

8/ أنشئ (Δ)، (Δ') و (C_f).

9/ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=f(m)$.

Prof : Yahi Rachid

10/ لتكن k الدالة المعرفة على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ بـ : $k(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

أ/ عين k' بدلالة كل من f و f'.

بـ/ ادرس اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها.

التمرين 120

I. لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x\sqrt{x^2+1}-1$.

1/ أ/ احسب $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}g(x)$.

بـ/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2/ أ/ أثبت أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.7<\alpha<0.8$.

بـ/ استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$.

II. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\sqrt{x^2+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ احسب $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}f(x)$.

2/ أ/ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{x\times g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$.

بـ/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3/ أثبت أن $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^4-3}{3\alpha}$ ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$.

4/ أ/ أثبت أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث $1.8<\beta<1.9$.

بـ/ أثبت أن معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة β هي $y=\left(\beta^2-\dfrac{3}{\beta^2}\right)(x-\beta)$.

5/ عين إشارة $f(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$.

6/ أنشئ (C_f).

8/ لتكن h الدالة المعرفة بـ : $h(x)=\sqrt{f\left(x^2\right)}$.

أ/ عين D_h مجموعة تعريف الدالة h.

بـ/ عين h' ثم ادرس اتجاه تغير الدالة h وشكل جدول تغيراتها.

التمرين 121

لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty,-2]\cup[0,+\infty[$ بـ : $f(x)=x+2+\sqrt{x^2+2x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ أ/ احسب $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}f(x)$.

بـ/ استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا يطلب تعيين معادلة له.

2/ أثبت أن $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}[f(x)-2x-3]=0$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

3/ هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 0 ؟ عند العدد -2 ؟

4/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

5/ أنشئ (C_f).

التمرين 122

Prof : Yahi Rachid

I) نعتبرالدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمابلي: $g(x)=2x-\sqrt{1+x^2}$

① احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

② ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

③ بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعيينه.

④ استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II) نعتبرالدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمابلي: $f(x)=2\sqrt{1+x^2}-x$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. .

① احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

② أ) برهن أن، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

ب) استنتج جدول تغيرات f

③ أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+3x]$ ، ثم فسر النتيجة المحصل عليها بيانيا.

ب) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ج) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ). والمستقيم (Δ') الذي معادلته $y=-3x$.

④ ارسم كلا من (Δ) ، (Δ') و (C_f)

التمرين 123

الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كمايلي:

$$f(x)=|x+1|-\frac{4}{x-1}$$

يرمز (C_f) إلى المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

① احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها

② اكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

③ احسب $f'(x)$ وادرس إشارتها، ثم شكل جدول تغيراتها.

④ بين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) بجوار $+\infty$ و (Δ') بجوار $-\infty$.

⑤ ادرس الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ) على المجال. $]1;+\infty[$ و (Δ') على المجال $]-\infty;-1[$

أ) احسب $\lim\limits_{h\overset{<}{\to}0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ و $\lim\limits_{h\overset{>}{\to}0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ ، ماذا تستنتج؟

ب) اعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

ج) اكتب معادلتي نصفي المماسين (T_1) و (T_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0=-1$.

⑥ أنشئ (C_f) ، (Δ) ، (Δ') و نصفي المماس .

⑦ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=m+1$.

التمرين 124

الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ كمايلي:

$$f(x)=|x+1|+\frac{x}{x^2-1}$$

Prof : Yahi Rachid

يرمز (C_f) إلى المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

① أ) اكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

ب) احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها.

② ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

③ اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند 0 ثم ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (T) .

④ استنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثييها.

④ أ) أثبت أن المستقيمين $(\Delta): y=x+1$ و $(D): y=-x-1$ مقاربين مائلين للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

ب) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) مع (Δ) و (D) .

⑤ بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $0.7<\alpha<0.8$ و $-1.9<\beta<1.8$

⑥ انشئ (C_f) ، (Δ) و (D).

⑦ نعتبر المستقيم (D_m) ذا المعادلة: $y=mx+1$ حيث m وسيط حقيقي.

أ) بين أنه عندما يتغير m في $\mathbb{R}$ فإن: (D_m) يشمل نقطة يطلب تعيين احاثياتها.

ب) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $|x+1|+\dfrac{x}{x^2-1}-mx=1$

التمرين 125

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $f(x)=|-x+2|+\dfrac{1}{x+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ اكتب عبارة الدالة f دون رمز القيمة المطلقة.

2/ ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد 2 ثم فسر النتيجة بيانيا.

3/ أ/ احسب نهايات الدالة f عند الأطراف المفتوحة لمجموعة تعريفها ثم فسر النتائج بيانيا.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4/ أ/ أثبت أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x+2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

5/ أ/ أثبت أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ').

6/ أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-2<\alpha<-1$.

7/ أنشئ (Δ)، (Δ') و (C_f).

8/ لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-3\}$ بـ : $h(x)=|x|+\dfrac{1}{x+3}$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

– اشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه في نفس المعلم السابق.

التمرين 126

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=|x-2|+\dfrac{1}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد 2 ثم فسر النتيجة بيانيا.

2/ اكتب معادلة لكل من (T_1) و (T_2) نصفي مماسي (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2.

3/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.