التمرين الأول: بكالوريا 2018 – الموضوع الأول

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5.

2) عيّن العدد الطبيعي a بحيث يكون: $2018 = 4a + 2$.

3) بيّن أنّ العدد: $2^{2018} + 2017^8 - 5$ يقبل القسمة على 5.

4) أ- تحقّق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $12^n \equiv 2^n\ [5]$ و $(-3)^n \equiv 2^n\ [5]$.

ب- عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث: $12^n + (-3)^n - 4 \equiv 0\ [5]$.

التمرين الثاني: بكالوريا 2018 – الموضوع الثاني

a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث: $a = 4b + 6$.

1) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 4.

2) بيّن أنّ a و b متوافقان بترديد 3.

3) نضع: $b = 489$.

أ- تحقّق أنّ: $a \equiv -1\ [13]$.

ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^{2018} + 40^{2968}$ على 13.

جـ- عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $a^{2n} + n + 3$ قابلا للقسمة على 13.

حل التمرين الأول: بكالوريا 2018 – الموضوع الأول

1) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5:

لدينا:

$$n = 0 : \; 2^0 \equiv 1\,[5]$$
$$n = 1 : \; 2^1 \equiv 2\,[5]$$
$$n = 2 : \; 2^2 \equiv 4\,[5]$$
$$n = 3 : \; 2^3 \equiv 3\,[5]$$
$$n = 4 : \; 2^4 \equiv 1\,[5]$$

لاحظ أن:

دور بواقي القسمة هو 4.

فنكتب:

من أجل كل عدد طبيعي n :

$$n = 4k \quad : \; 2^{4k} \equiv 1\,[5]$$
$$n = 4k+1 : \; 2^{4k+1} \equiv 2\,[5]$$
$$n = 4k+2 : \; 2^{4k+2} \equiv 4\,[5]$$
$$n = 4k+3 : \; 2^{4k+3} \equiv 3\,[5]$$

ومنه:

بواقي قسمة العدد 2^n على 5 هي:

$$r = \{1\,;2\,;3\,;4\}$$

نلخص بواقي قسمة العدد 2^n على 5 في الجدول التالي:

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$k \in \mathbb{N}$
$2^n \equiv$	1	2	4	3	[5]

2) تعيين العدد الطبيعي a بحيث يكون: $2018 = 4a + 2$.

نحل في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ المعادلة $2018 = 4a + 2$ كما يلي:

$$4a + 2 = 2018$$
$$4a = 2018 - 2$$
$$4a = 2016$$
$$a = \frac{2016}{4}$$

ومنه:

$$a = 504$$

3) تبيان أنّ العدد: $2^{2018} + 2017^8 - 5$ يقبل القسمة على 5.

لتبيان أنّ العدد $2^{2018} + 2017^8 - 5$ يقبل القسمة على 5 يكفي أن نبيّن أن:

$$2^{2018} + 2017^8 - 5 \equiv 0\,[5]$$

حسب 2) نكتب:

$$2^{2018} \equiv 2^{4a+2}\ [5]\ ;\ a = 504$$

وحسب الجدول أعلاه لدينا:

$$2^{4k+2} \equiv 4\ [5]$$

ومنه:

$$2^{2018} \equiv 4\ [5]$$

ولدينا:

$$2017 \equiv 2\ [5]$$
$$2017^8 \equiv 2^8\ [5]$$
$$2017^8 \equiv 2^{4\times 2}\ [5]$$
$$2017^8 \equiv 2^{4k}\ [5]\ ;\ k = 2$$

وحسب الجدول أعلاه لدينا:

$$2^{4k} \equiv 1\ [5]$$

ومنه:

$$2017^8 \equiv 1\ [5]$$

فنكتب:

$$2^{2018} + 2017^8 - 5 \equiv 4 + 1 - 5\ [5]$$

نجد:

$$2^{2018} + 2017^8 - 5 \equiv 0\ [5]$$

ومنه:

العدد: $2^{2018} + 2017^8 - 5$ يقبل القسمة على 5.

4) أ- التّحقّق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $12^n \equiv 2^n\ [5]$ و $(-3)^n \equiv 2^n\ [5]$.

لدينا:

$$12 \equiv 2\ [5]$$

ومنه:

$$12^n \equiv 2^n\ [5]$$

ولدينا:

$$5 \equiv 0\ [5]$$
$$5 - 2 \equiv 0 - 2\ [5]$$
$$3 \equiv -2\ [5]$$
$$-3 \equiv 2\ [5]$$

ومنه:

$$(-3)^n \equiv 2^n\ [5]$$

4) ب- تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $12^n + (-3)^n - 4 \equiv 0\ [5]$.

لدينا:

$$12^n + (-3)^n - 4 \equiv 0\ [5]$$

من 4) أ- نكتب:

$$2^n + 2^n - 4 \equiv 0\ [5]$$
$$2 \times 2^n - 4 \equiv 0\ [5]$$
$$2^{n+1} - 4 \equiv 0\ [5]$$

ومنه:

$$2^{n+1} \equiv 4\ [5]$$

ومن جدول البواقي أعلاه لدينا:

$$2^{4k+2} \equiv 4\ [5]$$

فنجد بالمطابقة:

$$n + 1 = 4k + 2$$
$$n = 4k + 2 - 1$$

ومنه:

$$n = 4k + 1\ ;\ k \in \mathbb{N}$$

حل التمرين الثاني: بكالوريا 2018 – الموضوع الثاني

1) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 4:

➢ الطريقة الأولى:

لدينا:

$$a = 4b + 6$$

ونكتب:

$$a \equiv 6\ [4]$$

ملاحظة:

لا يمكن أن يكون باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 4 هو 6 لأن: 6 أكبر من 4.

حيث:

$$6 \equiv 2\ [4]$$

فنجد:

$$a \equiv 2\ [4]$$

ومنه:

باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 4 هو 2.

➢ الطريقة الثانية:

لدينا:

$$a = 4b + 6$$
$$a = (4b + 4) + 2$$
$$a = 4(b + 1) + 2$$
$$a = 4m + 2\ ;\ m = b + 1$$
$$a \equiv 2\ [4]$$

باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 4 هو 2.

2) تبيان أنّ a و b متوافقان بترديد 3:

لتبيان أنّ a و b متوافقان بترديد 3 يكفي أن نبيّن أنّ: $a - b \equiv 0\ [3]$ أو $a \equiv b\ [3]$.

معناه:

$a - b$ من مضاعفات العدد 3.

لدينا:

$a = 4b + 6$

$a = (3b + 6) + b$

$a = 3(b + 2) + b$

$a - b = 3(b + 2)$

$a - b = 3p\ ;\ p = b + 2$

أي:

$a - b$ من مضاعفات العدد 3.

ونكتب أيضا:

$$\begin{cases} a - b \equiv 0\ [3] \\ \text{أو} \\ a \equiv b\ [3] \end{cases}$$

ومنه:

a و b متوافقان بترديد 3.

3) نضع: $b = 489$.

أ- التّحقّق أن: $a \equiv -1\ [13]$.

$a = 4b + 6$

$a = 4 \times 489 + 6$

$a = 1956 + 6$

$a = 1962$

لدينا:

$1963 \equiv 0\ [13]$

$1963 - 1 \equiv 0 - 1\ [13]$

$1962 \equiv -1\ [13]$

ومنه:

$$a \equiv -1\ [13]$$

ب- استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد $40^{2968} + a^{2018}$ على 13:

لدينا:

$a \equiv -1\ [13]$

$a^{2018} \equiv (-1)^{2018}\ [13]$

بما أنّ 2018 عدد زوجي فإن: $(-1)^{2018} = 1$.

ومنه:

$$a^{2018} \equiv 1\ [13]$$

ولدينا:

$40 \equiv 1\ [13]$

$40^{2968} \equiv (1)^{2968}\ [13]$

ومنه:

$$40^{2968} \equiv 1\ [13]$$

فنكتب:

$a^{2018} + 40^{2968} \equiv 1 + 1\ [13]$

$a^{2018} + 40^{2968} \equiv 2\ [13]$

ومنه:

باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^{2018} + 40^{2968}$ على 13 هو 2.

ج- تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $a^{2n} + n + 3$ قابلا للقسمة على 13:

العدد $a^{2n} + n + 3$ يقبل القسمة على 13 معناه: $a^{2n} + n + 3 \equiv 0\ [13]$.

لدينا:

$a \equiv -1\ [13]$

$a^{2n} \equiv (-1)^{2n}\ [13]$

بما أنّ $2n$ عدد زوجي فإن: $(-1)^{2n} = 1$.

ومنه:

$$a^{2n} \equiv 1\ [13]$$

فنكتب:

$a^{2n} + n + 3 \equiv 0\ [13]$

$1 + n + 3 \equiv 0\ [13]$

$n + 4 \equiv 0\ [13]$

$n \equiv -4\ [13]$

$n \equiv -4 + 13\ [13]$

$n \equiv 9\ [13]$

ومنه:

$$n = 13k + 9\ ;\ k \in \mathbb{N}$$