المادّة: الرياضيات — التّاريخ: 2025/12/03
المستوى: 1 ج م ع ت — المدّة: 02 سا

اختبار الفصل الأول

التمرين الأول : (05 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+a}}$ حيث a عدد حقيقي .

1) عين قيمة العدد a حتى تكون مجموعة تعريف الدالة f هي $D_f=]3,+\infty[$.

✦ نضع $a=2$ في كل ما يلي :

2) عين مجموعة تعريف الدالة f.

3) أحسب صور العددين التاليين بالدالة f : 6 , $-\frac{1}{4}$.

4) عين السوابق الممكنة للأعداد التالية بالدالة f : 2 , $\frac{1}{3}$, -3 .

5) أدرس اتجاه تغير الدالة f على مجال تعريفها , ثم شكل جدول تغيراتها.

6) أدرس شفعية الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\frac{x}{1+f(x^2)}$.

7) لتكن الدالة h المعرفة بـ: $h(x)=\frac{1-3x}{\sqrt{3-|2x|}}$, عين D_h مجموعة تعريف الدالة h.

التمرين الثاني : (05 نقاط)

أجب بـ «صحيح» أو «خطأ» مع التعليل وتصحيح الخطأ إن وُجد في كل حالة:

1) ليكن العدد $A=\left(\frac{6}{3+6\sqrt{2}}+\frac{20}{10-20\sqrt{2}}+\frac{27}{35}\right)$, عندئذ يكون $A>A^2$.

2) ليكن $B=]-5,-3]\cup[3,5]$ و $C=[-3,5]$ عندئذ يكون $B\cup C=]-5,5]$ و $B\cap C=[3,5]$.

3) لتكن الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=\frac{2}{\sqrt{4-x}}$, مجال تعريف الدالة f هو $D_f=]-\infty,4]$.

4) ليكن $E=19^{n+1}+19^{n}$ و $D=3^{2n+2}+3^{2n+1}$, القاسم المشترك الأكبر للعددين E و D هو 4.

التمرين الثالث : (06,5 نقاط)

الجزء الأول :

1) أكتب ما يلي دون الرمز القيمة المطلقة مع تبسيط النتيجة :

أ) $A=\left|1-\sqrt{3}\right|+\left|4-\sqrt{5}\right|+\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}$ ب) $B=\left|2x-1\right|+2\left|3-2x\right|+3$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين التاليتين :

أ) $\left|2x-1\right|-x=2\sqrt{5}-1$ ب) $\left|2x-1\right|+\left|3-2x\right|+3=0$

3) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحتين التاليتين :

أ) $\left|3-x\right|-2\geq 4$ ب) $\left|-2x+1\right|\leq 5$

الجزء الثاني :

أكمل الجدول التالي

الحصر	المجال	المسافة	القيمة المطلقة
$-\frac{5}{2}\leq x\leq\frac{7}{2}$			
			$\left|3x\right|\leq 12$
	$\left[-\frac{3}{2};3\right]$		
		$d(5-\frac{3x}{5};-\frac{7}{2})\leq\frac{3}{2}$	

التمرين الرابع : (03,5 نقاط)

نعتبر العدد الحقيقي a حيث : $a=\sqrt{27}-\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+2\right)$.

1) بين أن $a=\sqrt{3}-3$, ثم استنتج إشارة العدد a .

2) نعتبر العددين الحقيقيين x و y حيث : $x=\frac{4}{\sqrt{3}+1}$, $y=\frac{2}{\sqrt{3}-1}$.

أ) بين أن $x-y=a$.

ب) استنتج مقارنة بين العددين x و y .

ت) أحسب قيمة العدد $\left(y^2-x-1\right)^2$.

التمرين الأول (05 نقاط)

1) تعيين قيمة العدد a: 0,5ن

تكون الدالة f معرفة إذا كان $x+a>0$

أي $x>-a$. ومنه $D_f=]-a;+\infty[$.

لدينا $D_f=]3;+\infty[$، بالمطابقة نجد $-a=3$ أي $\boxed{a=-3}$.

2) تعيين مجموعة تعريف الدالة f (حيث $a=2$): 0,5ن

لدينا $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$. شرط التعريف هو $x+2>0$

أي $x>-2$, منه $D_f=]-2;+\infty[$

3) حساب الصور:

◄ $f(6)=\dfrac{1}{\sqrt{6+2}}=\dfrac{1}{\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 0,25ن

◄ $f\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{-\dfrac{1}{4}+2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{7}{4}}}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$ 0,25ن

4) تعيين السوابق المكنة:

◄ حل المعادلة $f(x)=2$: 0,5ن لدينا $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}=2$ تكافئ $\sqrt{x+2}=\dfrac{1}{2}$ ومنه $x+2=\dfrac{1}{4}$ أي $x=-\dfrac{7}{4}$.

و منه سابقة 2 هي $x=-\dfrac{7}{4}$

◄ حل المعادلة $f(x)=\dfrac{1}{3}$: 0,5ن لدينا $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}=\dfrac{1}{3}$ معناه $\sqrt{x+2}=3$ ومنه $x+2=9$ إذن $x=7$.

و منه سابقة $\frac{1}{3}$ هي $x=7$

◄ حل المعادلة $f(x)=-3$: 0,25ن بما أن البسط عدد موجب، والمقام هو جذر تربيعي (موجب دوماً)، فإن قيمة الكسر موجبة تماماً.

إذن المعادلة مستحيلة الحل لأن النتيجة لا يمكن أن تساوي عدداً سالباً (-3).

وعليه: العدد -3 ليس له سوابق بالدالة f.

5) دراسة اتجاه تغير الدالة f 0,75ن و جدول تغيراتها 0,25ن

ليكن x_1 و x_2 عددين من المجال $]-2;+\infty[$ حيث $x_1<x_2$.

$-2<x_1<x_2$

$0<x_1+2<x_2+2$ (نضيف 2 للأطراف)

$\sqrt{x_1+2}<\sqrt{x_2+2}$ (نجذر الطرفين)

$\dfrac{1}{\sqrt{x_1+2}}>\dfrac{1}{\sqrt{x_2+2}}$ (نقلب)

$f(x_1)>f(x_2)$

بما أن الترتيب قد انعكس، فإن f متناقصة تماماً على المجال $]-2;+\infty[$.

x	-2	$+\infty$
$f(x)$	↘	

6) دراسة شفعية الدالة g: 0,5ن

$$g(-x)=\frac{-x}{1+f((-x)^2)}=\frac{-x}{1+f(x^2)}=-\left(\frac{x}{1+f(x^2)}\right)=-g(x)$$

إذن الدالة g فردية.

7) مجموعة تعريف الدالة h: 0,75ن

الشرط هو أن يكون ما داخل الجذر في المقام موجباً تماماً.

$3-|2x|>0$ تكافئ $|2x|<3$ معناه $-3<2x<3$

ومنه $-\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{3}{2}$ إذن: $D_h=\left]-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right[$

التمرين الثاني (05 نقاط)

1) العبارة خاطئة. 1,25ن

التعليل: نقوم بتبسيط العبارة A:

$$\frac{6}{3+6\sqrt{2}}+\frac{20}{10-20\sqrt{2}}=\frac{2}{1+2\sqrt{2}}+\frac{2}{1-2\sqrt{2}}$$
$$=2\left(\frac{(1-2\sqrt{2})+(1+2\sqrt{2})}{(1+2\sqrt{2})(1-2\sqrt{2})}\right)$$
$$=2\left(\frac{2}{1-8}\right)=2\left(\frac{2}{-7}\right)=-\frac{4}{7}$$

إذن: $A=-\dfrac{4}{7}+\dfrac{27}{35}=-\dfrac{20}{35}+\dfrac{27}{35}=\dfrac{7}{35}=\dfrac{1}{5}$

بما أن A محصور بين 0 و 1، فإن مربعه يكون أصغر منه , إذن: $A^2<A$

2) العبارة خاطئة. 1,25ن

التصحيح:

الاتحاد صحيح $B\cup C=]-5;5]$، لكن التقاطع خاطئ.

المجال $C=[-3;5]$ يشمل العدد -3، والمجال B يحتوي على الجزء $]-5;-3]$ (مغلق من جهة -3)، إذن العنصر -3 مشترك بينهما.

وعليه فإن التقاطع الصحيح هو:

$$B\cap C=\{-3\}\cup[3;5]$$

3) العبارة خاطئة. 1,25ن

التصحيح: تكون الدالة معرفة إذا كان ما تحت الجذر موجباً تماماً (لأنه في المقام): أي $4-x>0$ منه $x<4$.

ومنه مجال التعريف الصحيح هو المجال المفتوح: $D_f=]-\infty;4[$.

4) العبارة صحيحة. 1,25ن

التعليل: نقوم بتحليل العددين E و D إلى جداء عوامل:

$$E=19^{n+1}+19^n=19^n(19+1)=20\times19^n=2^2\times5\times19^n$$
$$D=3^{2n+2}+3^{2n+1}=3^{2n+1}(3^1+1)=2^2\times3^{2n+1}$$

بما أن الأعداد 3, 5 و 19 أولية فيما بينها، فإن القاسم المشترك الأكبر هو أخذ العناصر المشتركة بأصغر أس و منه :

$$PGCD(E,D)=2^2=4$$

التمرين الثالث (06,5 نقاط)

حل الجزء الأول:

1) كتابة العبارات دون رمز القيمة المطلقة وتبسيطها:

◄ العبارة A: 0,5ن بما أن $\sqrt{3} > 1$ فإن $(1-\sqrt{3})$ سالب و بما أن $\sqrt{5} < 4$ فإن $(4-\sqrt{5})$ موجب و بما أن $\sqrt{5} > \sqrt{3}$ فإن $(\sqrt{5}-\sqrt{3})$ موجب.

$$A = -(1-\sqrt{3})+(4-\sqrt{5})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})$$
$$= -1+\sqrt{3}+4-\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{3} = -1+4 = \boxed{3}$$

◄ العبارة B: 0,75ن

$$B = |2x-1|+2|3-2x|+3$$

x	$-\infty$ $\quad\frac{1}{2}$	$\quad\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x-1$	$-2x+1$ $\quad 0$	$2x-1$	$2x-1$
$3-2x$	$3-2x$	$3-2x$ $\quad 0$	$-3+2x$
B	$-6x+10$	$-2x+8$	$6x-4$

$$B(x) = \begin{cases} -6x+10 & \text{إذا كان } x \in \left]-\infty;\frac{1}{2}\right] \\ -2x+8 & \text{إذا كان } x \in \left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right] \\ 6x-4 & \text{إذا كان } x \in \left[\frac{3}{2};+\infty\right[\end{cases}$$

2) حل المعادلات في $\mathbb{R}$:

◄ المعادلة (أ): 0,75ن

$|2x-1|-x = 2\sqrt{5}-1$ إذن $|2x-1| = x+2\sqrt{5}-1$

الحالة 1: $2x-1 = x+2\sqrt{5}-1$ أي $x = 2\sqrt{5}$

الحالة 2:

$2x-1 = -(x+2\sqrt{5}-1)$ أي $3x = 2-2\sqrt{5}$

ومنه $x = \dfrac{2-2\sqrt{5}}{3}$

منه حلول المعادلة (أ) هي $S_1 = \left\{\dfrac{2-2\sqrt{5}}{3};2\sqrt{5}\right\}$

◄ المعادلة (ب): 0,5ن $|2x-1|+|3-2x| = -3$

بما أن مجموع قيمتين مطلقتين هو مقدار موجب دوماً، فلا يمكن أن يساوي -3 إذن $S_2 = \emptyset$.

3) حل المتراجحات في $\mathbb{R}$:

◄ المتراجحة (أ): 0,5ن $|3-x|-2 \geq 4$ تصبح $|3-x| \geq 6$

$$\begin{array}{ccc} 3-x \leq -6 & \text{أو} & 3-x \geq 6 \\ -x \leq -9 & & -x \geq 3 \\ x \geq 9 & & x \leq -3 \end{array}$$

منه حلول المتراجحة (أ) هي $S_3 =]-\infty,-3] \cup [9,+\infty[$

◄ المتراجحة (ب): 0,5ن $|-2x+1| \leq 5$

$$-5 \leq -2x+1 \leq 5$$
$$-6 \leq -2x \leq 4 \quad \text{(بإضافة -1)}$$
$$-2 \leq x \leq 3 \quad \left(\text{بالضرب في } -\frac{1}{2}\right)$$

منه حلول المتراجحة (ب) هي $S_4 = [-2,3]$

حل الجزء الثاني: 3ن $(0,25 \times 12$ن$)$

القيمة المطلقة	المسافة	المجال	الحصر
$\lvert x-c\rvert \leq r$	$d(x,c) \leq r$	$[c-r;c+r]$	$c-r \leq x \leq c+r$
$\lvert x-\frac{1}{2}\rvert \leq 3$	$d\left(x,\frac{1}{2}\right) \leq 3$	$\left[-\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right]$	$-\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}$
$\lvert 3x\rvert \leq 12$	$d(x,0) \leq 4$	$[-4;4]$	$-4 \leq x \leq 4$
$\lvert x-\frac{3}{4}\rvert \leq \frac{9}{4}$	$d\left(x,\frac{3}{4}\right) \leq \frac{9}{4}$	$\left[-\frac{3}{2};3\right]$	$-\frac{3}{2} \leq x \leq 3$
$\lvert x-\frac{85}{6}\rvert \leq \frac{5}{2}$	$d\left(5-\frac{3x}{5},-\frac{7}{2}\right) \leq \frac{3}{2}$	$\left[\frac{35}{3};\frac{50}{3}\right]$	$\frac{35}{3} \leq x \leq \frac{50}{3}$

التمرين الرابع (03,5 نقاط)

1) تبيين أن $a = \sqrt{3}-3$ 0,75ن واستنتاج إشارته0,25ن:

$$a = \sqrt{27}-\sqrt{3}(\sqrt{3}+2) = \sqrt{9\times 3}-(\sqrt{3}\times\sqrt{3}+2\sqrt{3})$$
$$= 3\sqrt{3}-(3+2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}-3-2\sqrt{3} = \sqrt{3}-3$$

استنتاج الإشارة: بما أن $\sqrt{3} < 3$، فإن الفرق سالب : $a < 0$.

2) العمليات على x و y:

ا) تبيين أن $x-y = a$: 1ن

$$x = \frac{4}{\sqrt{3}+1} = \frac{4(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1(\sqrt{3}-1)} = \frac{4(\sqrt{3}-1)}{2} = 2\sqrt{3}-2$$

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}-1(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} = \sqrt{3}+1$$

الآن نحسب الفرق:

$$x-y = (2\sqrt{3}-2)-(\sqrt{3}+1) \quad = \sqrt{3}-3$$

إذن: $x-y = a$.

ب) استنتاج مقارنة بين x و y: 0,5ن

بما أن $x-y = a$ ومن السؤال (1) وجدنا أن $a < 0$ (سالب)، فإن: $x-y < 0$ ومنه $x < y$

ج) حساب قيمة العدد $(y^2-x-1)^2$: 1ن

- لدينا $y = \sqrt{3}+1$ ومنه $y^2 = 4+2\sqrt{3}$
- ولدينا $x = 2\sqrt{3}-2$

$$(y^2-x-1)^2 = \left((4+2\sqrt{3})-(2\sqrt{3}-2)-1\right)^2$$
$$= (4+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+2-1)^2 = (5)^2 = 25$$