

(u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $u_0 = \frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن : $0 < u_n < \frac{1}{2}$.
2. أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n + 1}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
ب) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها .

3. لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كمايلي : $v_n = \frac{5^n u_n}{2u_n - 1}$.
أ - بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 10 يطلب حساب حددها الأول .
ب . أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم بين أن $u_n = \frac{2^n}{2^{n+1} + 3}$ ، أحسب نهاية (u_n) .

أحسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$

التمرين الثاني (4 نقاط) :

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة C : $(z - \sqrt{3})(z^2 - \sqrt{3}z + 1) = 0$.
المستوي المركب منسوب إلى معلم $(\vec{0} ; \vec{i} ; \vec{j})$ ، لتكن A ، B و C نقط لواحقها على الترتيب :

$$z_C = \bar{z}_A \quad , \quad z_B = \sqrt{3} \quad , \quad z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

2. أثبت أن $z_A^{1962} + z_C^{2016} = 0$ ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$

حقيقي موجب

3. أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .
4. عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $\frac{z - z_A}{z - z_C}$ تخيليا صرفا :)

$$z \neq z_C$$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 8 كرات لا نميز بينها عند اللمس منها: 4 كرات بيضاء تحمل الأرقام: 0, 1, 1, 2. و 4 كرات حمراء تحمل الأرقام: 1, 1, 2, 2.

(1) نسحب ثلاث كرات في آن واحد من هذا الكيس.

❖ أحسب احتمال الحوادث التالية:

A : " الكرات المسحوبة تحمل نفس الرقم " . B : " الكرات المسحوبة من نفس اللون " .

C : " الكرات المسحوبة أقاربها مختلفة مثنى مثنى " .

(2) X هو المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات التي تحمل رقم 1.

❖ أكتب قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي.

❖ أحسب التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X .

التمرين الرابع: 07 نقاط:

1. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

(C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

أ. أحسب نهايتي f عند $+\infty$ و 0

ب. أحسب $f'(x)$ حيث f' الدالة المشتقة لدالة f

ت. استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

2. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$

(C_g) التمثيل البياني لدالة g في معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

أ. أحسب نهايتي f عند $+\infty$ و 0 (لاحظ أن $\left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{(\ln x)^2}{x}$)

ب. تحقق من أجل $x > 0$ أن : $g'(x) = \frac{\ln x (2 - \ln x)}{x^2}$

ت. استنتج اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

3. أ. بين أن المنحنيين (C_f) و (C_g) يتقاطعان في نقطتين يطلب تعيينهما

ب. أدرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g)

ج. أرسم المنحنى (C_g)

4. حل في المجال $]0, +\infty[$ المعادلة $(\ln x)^2 - 3 \ln x + 1 = 0$

- عين فواصل النقط التي يكون فيها مماس المنحنى (C_f) يوازي مماس المنحنى (C_g)

بالتوفيق في امتحان شهادة البكالوريا

التمرين الاول :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ: $u_0 = \frac{1}{5}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}$.

$$1. \text{ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$$

$$2. \text{ (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : 0 < u_n < \frac{1}{2}$$

(ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n + 1}$ ثم بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة ، برر تقاربها .

$$3. \text{ نضع من أجل كل عدد طبيعي } n : v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n + 1}$$

(أ) اثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 6$ يطلب تعيين حدها الاول

(ب) أحسب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أن : $u_n = \frac{2^n}{2^{n+1} + 3}$ ، أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$4. \text{ احسب المجموع } S_n \text{ بدلالة } n \text{ حيث : } S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$$

التمرين الثاني :

يحتوي صندوق U_1 علي 4كرات : كرتين حمراوتين و كرتين بيضاوتين

و يحتوي صندوق U_2 علي 5 كرات : ثلاثة حمراء و كرتين بيضاوتين

(كل الكرات متماثلة ولا نفرق بينها أثناء اللمس)

نسحب عشوائيا كرة من الصندوق U_1 نسجل لونها و نضعها في الصندوق U_2 ثم نسحب من الصندوق U_2 كرتان علي التوالي دون ارجاع.

RR

R

RB

BB

RR

B

RB

BB

1. انقل ثم اكمل شجرة الاحتمال الموضحة في الشكل .

2. احسب احتمال الحوادث التالية :

A احتمال سحب ثلاث كرات حمراء

C احتمال سحب كرتان حمراوتان و كرة بيضاء

3. احتمال سحب كرة بيضاء من الصندوق U_1 علما اننا سجلنا سحب كرتان حمراوتان و كرة بيضاء.

4. عند سحب كرة بيضاء نربح نقطتين وعند سحب كرة حمراء نخسر نقطة

X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع النقاط المحصل عليها

- حدد قانون احتمال المتغير العشوائي و احسب امله الرياضي

التمرين الثالث:

I) نعتبر في C كثير الحدود $P(z)$ المعرف بـ: $P(z) = z^3 + (2\sqrt{2} - 4)z^2 + (8 - 8\sqrt{2})z + 16\sqrt{2}$.

1. احسب $P(-2\sqrt{2})$ ماذا تستنتج؟

2. بين أن من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z + 2\sqrt{2})(z^2 - 4z + 8)$.

3. حل في المعادلة $P(z) = 0$.

II) المستوي منسوب الي معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ نعتبر النقط A, B, C التي لواحقتها

على الترتيب $z_A = 2 + 2i$ ، $z_B = 2 - 2i$ ، $z_C = -2\sqrt{2}$.

1. علم النقط A, B, C .

2. اكتب كل من z_A, z_B, z_C علي الشكل الاسي، ثم استنتج ان النقط A, B, C تنتمي الي الدائرة (E) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

3. بين أن $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AO}\right) = \frac{\pi}{2} + 2K\pi$ حيث $K \in \mathbb{Z}$

4. أ) عين z_D لاحقة النقطة D حيث النقطة O منتصف القطعة $[BD]$

ت) بين أن: $\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ثم استنتج وجود تحويل نقطي يحول النقطة D الي النقطة B يطلب تعيين عناصره المميزة.

ث) استنتج طبيعة المثلث ABD .

5. لتكن (E') مجموعة نقط M ذات الاحقة z حيث: $z = 2\sqrt{2}e^{i\theta}$ حيث θ عدد حقيقي.

أ) تحقق أن النقطة D تنتمي الي المجموعة (E') .

ب) عين طبيعة مجموعة النقط (E') .

بالتوفيق

ملاحظة

كما تُمنح نُقْطَة وَاحِدَة عَلَى تَنْظِيم وَرَقَة الإِجَابَة

السؤال النظري: (نقطة واحدة)

بين أنه من أجل كل θ من $\mathbb{R}$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.
التمرين الأول: (08 نقطاً):

g الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = -x^2 - 2 + 2 \ln x$.

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ ، $\ln x < \frac{1}{2}x^2 + 1$.

f الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - 1 + \frac{2 \ln(x)}{x}$.

C_f تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أحسب $f(1)$ و فسر النتيجة هندسياً.

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$.

(3) استنتج تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. (حساب النهايات عند أطراف مجال التعريف مطلوب).

(4) بين أن المستقيم Δ ذو المعادلة $y - x + 1 = 0$ مقارب مائل لـ C_f . ثم استنتج الوضع النسبي بين C_f و Δ .

(5) عين قيمة العدد الحقيقي α حتى يكون $T: y = x + \alpha$ مماساً لـ C_f .

(6) في الشكل (1) جدول تغيرات الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = \frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{e}$.

- أحسب $h(e)$ ثم استنتج الوضع النسبي بين C_f و T .

(7) بين أن المعادلة $f(x) + 3 = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $0.51 < \alpha < 0.53$.

- أنشئ Δ و T و C_f في نفس المعلم.

(8) ناقش بياناً و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $-x + \ln\left(\frac{x^2}{e^{mx}}\right) = 0$.

(9) K الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $K(x) = [f(x)]^2 + 3[f(x)]$.

- استنتج مجموعة حلول المعادلة $K(x) = 0$.



x	0	e	$+\infty$
$h(x)$			

الشكل (1)

التمرين الثاني: (10 نِقْاطِ):

P كثير حدود معرف على $\mathbb{C}$ بـ : $P(z) = z^3 + z^2 - 2$.

(1) أحسب $P(1)$ ثم استنتج تحليلاً لـ $P(z)$.

(2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 + 2z + 2 = 0$.

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A, B, C, D التي

لواحقها على الترتيب : $z_A = -1 + i, z_B = -1 - i, z_C = i^{1440}, z_D = 3 - i$ و

1- أثبت أن النقطة C تقع على حامل محور الفواصل.

2- (Y) مجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوي المركب ذات اللاحقة z بحيث : $|z + 1 - i| = |z_D|$: (Y) .

- عين طبيعة المجموعة (Y) و اذكر عناصرها المميزة.

3- أكتب z_B على الشكل الأسّي ثم عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $\left(\frac{z_B}{\sqrt{2}}\right)^n$ تخيلياً صرفاً.

4- **ليكن** H التحاكي الذي مركزه C ونسبته 2 و R الدوران الذي مركزه C و $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ زاوية له.

- عين z_D لاحقة D صورة A بالتحاكي H و z_E لاحقة E صورة D بالدوران R .

- عين اللاحقة z_F للنقطة F نظيرة E بالنسبة إلى A .

- استنتج طبيعة الرباعي $DFCE$.

5- عين طبيعة التحويل $S = H \circ R$ و عناصره المميزة.

6- يحتوي كيس على أربع كريات تحمل العدد (-1) و ثلاث كريات تحمل الحرف $(-i)$ و كرتان تحمل الحرف (i) ,

كل الكريات لا تفرق بينها عند اللمس، باعتبار الحرف (i) يرمز إلى العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له.

الجزء الأول: نسحب و في آن واحد **كريتين** من هذا الكيس و نسجل على لوح إلكتروني مجموع العددين المسجلين عليهما .

(1) أحسب احتمال كل حادثة من الحوادث التالية:

A_1 : "يُسجل على اللوح الإلكتروني لاحقة النقطة A ".

A_2 : "طويلة العدد المسجل على اللوح الإلكتروني تساوي 2".

A_3 : "العدد المسجل على اللوح الإلكتروني شكله الأسّي $\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ ".

الجزء الثاني: نعيد الكرتين المسحوبتين إلى نفس الكيس، ونقترح التجربة التالية :

نسحب و في آن واحد **ثلاث كريات** من هذا الكيس و نسجل على لوح إلكتروني **جداً** العددين المسجلين عليهما .

(1) أحسب احتمال الحادثة B_1 : " العدد المسجل على اللوح الإلكتروني حقيقي".

الأستاذو: زيرة يتمنى الشجاع للجميع

تحقيق النجاح، اعمل كما لو كان يستحيل عليك أن تفشل.

التمرين الأول: (4 نقاط)

(u_n) متتالية معرفة على N بـ $u_0 = 1$ و من أجل كل n من N : $u_{n+1} = \frac{4}{4-u_n}$

- (1) أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من N : $u_n < 2$
ب - ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.
ج - إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = l$ حيث $(l \in R)$ فبين أن العدد l يحقق $(l-2)^2 = 0$ ثم اوجد قيمة l .
- (2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على N بـ : $v_n(u_n - 2) = 1$
أ - بين أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{-1}{2}$ و يطلب حساب حدها الأول v_0 .
ب - اوجد بدلالة n عبارة كل من u_n و v_n .

(3) اوجد بدلالة n المجموع : $s_n = \frac{1}{e^{2v_0}} + \frac{1}{e^{2v_1}} + \dots + \frac{1}{e^{2v_n}}$

التمرين الثاني: (4 نقاط)

- اراد الأستاذ الرئيسي لقسم 3 علوم تجريبية اختيار لجنة مسؤولة عن هذا القسم تنظم ثلاث تلاميذ.
- القسم يتكون من 24 تلميذ منهم 8 داخليين و 10 خارجيين و 6 نصف داخليين.
- (1) ما هو احتمال أن تنظم اللجنة الداخليين فقط؟
 - (2) ما هو احتمال أن تنظم اللجنة تلميذا داخليا على الأكثر؟
 - (3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل اختيار عدد التلاميذ الداخليين.
أ - ما هي قيم المتغير العشوائي X ؟
ب - عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.
 - (4) في الفصل الثاني انضم تلميذ جديد إلى القسم و تم تسجيله في النظام الداخلي.
- احسب $P(X = 2)$ مع X هو نفس المتغير العشوائي السابق.

التمرين الثالث: (4 نقاط)

نعتبر في المستوى المركب المنسوب إلى م م م $(O; \vec{i}; \vec{j})$ النقطتين A و B حيث: $z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}$ و $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ (1) أ - اكتب العدد المركب z_B على الشكل الأسّي.

ب - صورة C صورة B بالدوران r الذي مركزه المبدأ وزاويته $\theta = \frac{2\pi}{3}$. بين أن: $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

(2) أ - اكتب العدد $1 - z_A$ على الشكل الأسّي ثم بين أن: $\frac{2z_C}{1 - z_A} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$

ب - عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{2z_C}{1 - z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا.

(3) أ - عين z_E لاحقة النقطة E صورة النقطة D بالتحاكي h الذي مركزه A و نسبته 2 حيث $z_D = \overline{z_C}$

ب - عين المجموعة (E) للنقط $M(Z)$ التي تحقق: $|z - z_A| = |\overline{z} - \overline{z_E}|$

التمرين الرابع: (8 نقاط)

(I) $g(x) = e^x + 2 - x$ دالة معرفة على R ب: (1) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها. (دون حساب النهايات)

(2) استنتج أنه من أجل x من R : $g(x) > 0$

(II) لتكن الدالة f المعرفة على R ب: $f(x) = x + (x - 1)e^{-x}$

(1) أ - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب - بين أنه من أجل كل x من R : $f'(x) = e^{-x} g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(2) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في R حلا وحيدا α ثم تحقق أن: $0 < \alpha < 0,5$.

(3) بين أن النقطة ذات الفاصلة 3 هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) .

(4) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

(5) أ - ادرس الوضعية النسبية بين المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

ب - احسب $f(0)$ ثم انشئ (Δ) و المنحنى (C_f) .

(6) $h(x) = \ln x - \frac{1 - \ln x}{x}$ دالة معرفة على $]0; +\infty[$ ب: (1) بين أنه من أجل كل x من R : $h(x) = f(\ln x)$

ب - حل في $]0; +\infty[$ المعادلة $h(x) = 0$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

بالتوفيق

التمرين الأول :

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ و $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتاليتان معرفتان كما يلي :

$$V_n = U_n - \frac{1}{n} \text{ و } \begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = 2U_n - \frac{n+2}{n(n+1)} \end{cases}$$

1- ا- احسب $U_1 ; U_2 ; U_3$.

ب- بين ان المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين اساسها .

2- اكتب V_n ثم U_n بدلالة n ثم احسب نهاية U_n .

3- احسب $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$

التمرين الثاني :

المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1- حل في $\square$ المعادلة $(z-i)(z^2-4z+13)=0$.

2- علم النقط A و B و C ذات اللواحق $z_A = i$. $z_B = 2+3i$. $z_C = 2-3i$.

3- ليكن الدوران R الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

ا- عين لاحقة A' صورة A بالدوران R

ب- بين ان النقط $A'; B; C$ في استقامية

4- لتكن D و E ذات اللواحق $z_D = 3z_A$ و $\overline{z_E} = \overline{z_D}$.

ا- عين لاحقة G مرجح الجملة $\{(D;1), (E;2), (C;-2)\}$.

ب- عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $\|\overline{MD} + 2\overline{ME} - 2\overline{MC}\| = \|\overline{MB} - \overline{MA}\|$.

ج - عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $z = z_B + e^{i\theta}$ لما θ تسمح IR.

التمرين الثالث :

كيس به 10 كريات متماثلة لا نميز بينها باللمس منها 4 بيضاء و 6 حمراء .

- 1- نسحب عشوائيا من الكيس 3 كريات في ان واحد
ا- احسب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء
ب- احسب احتمال الحصول على كرية حمراء على الاقل
- 2- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة
عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و احسب امله الرياضي .



boudebza_2Tr_Maths_bac_2019

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

ثانوية بوديزة عبدالسلام

يوم : 04 مارس 2019

المدة : 03 سـا

مديرية التربية لولاية سكيكدة

الشعبة : علوم تجريبية

اختبار في مادة : الرياضيات

التمرين الأول : (04 ن)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}$.

- (1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$.
- (2) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة و احسب نهايتها .
- (3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على N بـ : $v_n = u_n^2 - 1$.
 (أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2v_{n+1} = v_n$.
 (ب) استنتج أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_0 .
 (ج) اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n ، احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- (4) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_n^2 + u_{n+1}^2 + \dots + u_{n+2018}^2$.

التمرين الثاني : (04 ن)

يحتوي كيس U على 9 كريات لا نفرق بينها عند اللمس ، من بينها ثلاثة بيضاء تحمل الارقام 1 ، 1 ، 2 و إثنان حمراء تحمل الأرقام 2 ، 3 و اربعة سوداء اللون تحمل الأرقام 1 ، 3 ، 3 ، 3 .

نسحب من العلبة 3 كريات في ان واحد .

- (1) ما احتمال الحوادث التالية : E : " الحصول على 3 كريات من نفس اللون " F : " الحصول على كرية على الاكثر تحمل رقم فردي .
- (2) ليكن X متغير عشوائي يرفق عند سحب الكرات عدد الكرات الحمراء المتبقية في العلبة .
 - عين القيم الممكنة لـ X ثم احسب امله الرياضي .
- (3) نعتبر الان الكيس الأول U و كيس ثاني V يحوي كرتان بيضاوان ، كرتان سوداوان و كرتان حمراوان ، نرمي مرة واحدة زهرة نرد متوازنة مرقمة من 1 إلى 6 .
 إذا ظهر الرقم 4 على زهرة نرد نسحب كرية واحدة من الكيس الأول U و إلا فنسحب كرية واحدة من الكيس الثاني V .

(أ) بين أن احتمال سحب كرية بيضاء هو $P(B) = \frac{1}{3}$.

(ب) إذا سحبنا كرية بيضاء ما احتمال أن تكون من الكيس الثاني V .

اقلب الصفحة

يتبع

**التمرين الثالث : (05 ن)**

I. حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : (1)..... $(z-2)(z^2+2z+4)=0$.

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$

النقط A, B, C لواحقتها : $z_C = -1 - \sqrt{3}i$; $z_B = -1 + \sqrt{3}i$; $z_A = 2$.

(1) أ) اكتب العدد المركب z_B على الشكل الآسي .

ب) أنشئ بدقة النقط A, B, C .

(2) عين طويلة و عمدة العدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_A - z_B}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(3) أ) بين أن العدد $\left(\frac{z_B}{2}\right)^{2019} + \left(\frac{z_B}{2}\right)^{1440}$ حقيقي .

ب) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_B}{2}\right)^n$ حقيقي موجب .

(4) لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث :

$$(E): \text{Arg}(\bar{z} - z_B) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

أ) بين أن النقطة O تنتمي إلى المجموعة (E) .

ب) عين طبيعة المجموعة (E) و أنشأها .

التمرين الرابع : (07 ن)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \ln(x + e^{-x})$ ،

(C_f) تمثيلها البياني معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -x + \ln(xe^x + 1)$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(4) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

(5) ليكن (γ) منحنى الدالة $x \mapsto \ln(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

أ) بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f(x) - \ln(x) = \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right)$.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \ln(x)$ ، فسّر النتيجة بيانياً .

ت) استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (γ) على المجال $]0; +\infty[$.

(6) انشئ (Δ) ، (γ) و (C_f) .

إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

الهدء: ساعتان

الستوى: ثالثءعلمى

التمرين الأول : (6 نقاط)

يحتوي كيس U_1 على 10 كرات لانفرق بينها باللمس , منها 5 كرات بيضاء و3 حمراء وكرتان خضروان, نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من هذا الكيس.

1. ماهي عدد الطرق الممكنة لهذه التجربة

2. احسب إءتمال الحوادث التالية :

(أ) A "من بين الكرات الثلاث المسحوبة توجد كرة خضراء واحدة فقط"

(ب) C "الكرات الثلاث المسحوبة من نفس اللون"

3. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل مخرج بعدد الألوان الظاهرة في المخرج

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X

(ب) عرف قانون إءتمال المتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضي

4. نعتبر الكيس الأول U_1 وكيس آخر U_2 يحوي كرتين بيضاوين وكرتين حمراوين وكرة خضراء, نرمي زهرة نرد غير مزيف مرقعة من 1 إلى 6, فإذا ظهر الرقم 6 نسحب كرة من الكيس الأول U_1 وإن كان غير ذلك نسحب كرة من الكيس U_2 .

(أ) بين أن إءتمال سحب كرة بيضاء هو $P(B) = \frac{5}{12}$

(ب) علما أن الكرة المسحوبة بيضاء , فما إءتمال أن تكون من الكيس U_2

التمرين الثاني : (6 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ حيث : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 5cm$

نضع $z_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$ علما أن A_n النقطة ذات اللاحقة z_n

1. احسب z_1, z_2, z_3 ثم تحقق أن $z_4 \in \mathbb{R}$

2. علم النقط A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 في المعلم السابق

3. لتكن المتتالية (U_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = |z_n|$

(أ) بين أن (U_n) هندسية يءلب تعيين أساسها وحدها الأول

(ب) اكتب U_n بدلالة n

4. نضع L_n طول الخط $A_0A_1A_2 \dots A_nA_{n+1}$ حيث : $L_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_nA_{n+1}$

(أ) احسب L_n ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n$

التمرين الثالث : (8 نقاط)

1. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كإيلي : $g(x) = 4xe^{2x} + 1$

(أ) ادرس إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

(ب) استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) > 0$

2. نعرف الدالة f على $\mathbb{R}$ بالشكل : $f(x) = x + (2x - 1)e^{2x}$ و (C_f) منحنيا البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(أ) أحسب نهاياتي الدالة f

(ب) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f مشكلا جدول تغيراتها

(ج) بين أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

(د) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (d)

(هـ) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0.40 < \alpha < 0.41$

(و) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

(ز) ارسم المماس (Δ) والمستقيم (d) والمنحنى (C_f)

3. m وسيط حقيقي و h_m الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كإيلي : $h_m(x) = (x - 1)e^{2x} - mx$

(أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $h'_m(x) = f(x) - (x + m)$

(ب) ناقش بياننا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد المماسات للمنحنى (C_{h_m}) الموازية لمحور الفواصل

4. ليكن n عدد طبيعي حيث $n \geq 2$

(أ) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$: $f^{(n)}(x) = 2^n(2x + n - 1)e^{2x}$ حيث $f^{(n)}$ هي المشتقة من الرتبة n للدالة f

(ب) ادرس إتجاه المتتالية (U_n) ذات الحد العام $U_n = f^{(n)}(0)$

(ج) بين أن المتتالية (U_n) متباعدة

اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول: (3 نقاط)

- (1) - حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 + 6z + 34 = 0$.
- (2) - نعتبر في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ النقط A, B, C لواحقتها على الترتيب : $z_A = 2, z_B = -3 + 5i, z_C = -3 - 5i$.
احسب طولية و عمدة العدد $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .
- (3) - أ - عين z_D لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.
ب - عين مجموعة النقط M من المستوى ذات اللاحقة z حيث :
- $$z = 2 + ke^{\frac{\pi}{4}i} \quad \text{مع} \quad k \in \mathbb{R}_+^*$$

التمرين الثاني: (5 نقاط)

- يحتوي كيس على خمس كرات بيضاء مرقمة بـ 1، 1، 1، 0، و -1 و خمس كرات سوداء مرقمة بـ 1، 1، 0، 0، و -1 لا نفرق بينها عند اللمس .
نسحب عشوائيا و في آن واحد 3 كرات من الكيس.
- (1) - نعتبر الأحداث التالية :
- A : " الحصول على كرة بيضاء واحدة فقط " .
B : " الحصول على كرة بيضاء على الأقل " .
C : " الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون " .
D : " الحصول على اللونين الأبيض والأسود " .
F : " مجموع أرقام الكرات الثلاث المسحوبة يساوي 0 " .
- أ - أحسب إحصاء الاحداث : A ، B ، و C .
- ب - بين أن $P(D) = \frac{5}{6}$ ، $P(F) = \frac{31}{120}$ ، و $P(C \cap F) = \frac{7}{120}$.
- ج - إذا كان مجموع أرقام الكرات المسحوبة يساوي 0 ما هو احتمال أن تكون الكرات الثلاث من نفس اللون ؟
- (2) - نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات التي تحمل الرقم -1 .

- أ - عين قيم المتغير العشوائي X .
 ب - عين قانون احتمال المتغير العشوائي X .
 ج - احسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

التمرين الثالث: (6 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{7x}{2x+1}$.
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (انظر الشكل في الوثيقة المرافقة).

- (1) - أ - ادرس إتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; +\infty[$.
 ب - بين أنه من أجل كل $x \in [0, 3]$ فإن $f(x) \in [0, 3]$.
 (2) - نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بحدها الأول U_0 حيث : $U_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$U_{n+1} = f(U_n)$$

أ - باستعمال المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ، مثل على حامل محور الفواصل الحدود U_2, U_1, U_0 ، دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل.
 ب - ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) و تقاربها .

- (3) - أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_n \leq 3$.

ب - ادرس إتجاه تغير المتتالية (U_n) .

ج - استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها .

- (4) - نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي n ، $V_n = \frac{U_n}{3 - U_n}$.

أ - برهن أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب - اكتب عبارة V_n بدلالة n .

- (5) - احسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n = V_0^2 + V_1^2 + \dots + V_n^2$$

التمرين الرابع: (6 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = e^{x-2} + 1 - x$.

- (1) - برر أن g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ثم احسب $g'(x)$.

(2) - عين إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها (النهايات غير مطلوبة).

(3) - استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - 1 + \frac{x}{e^{x-2}}$.
و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) - أ - أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب - أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)]$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) .

(2) - بتن أن الدالة المشتقة $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{x-2}}$.

(3) - استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها ، و أن النقطة التي فاصلتها 2 نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) .

(4) - بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (D) معامل توجيهه 1 يطلب تعيين معادلته.

(5) - بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0, 1; 0, 2[$.

(6) - ارسم المنحنى (C_f) الممثل للدالة f والمستقيم (D) .

بالتوفيق

الاجازات التالفة ففف ماففة الرباضففات

المستوى: ثالثة علوم تجرفففة

المدة: 3 ساعات ونصف

التمرفن الأول: 5

- 1- حل فف ففموفة الأعداد المركبة C المعادلة: $(z-1-\sqrt{3}i)(z^2+2z+2)=0$
- 2- فف المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ النقط A, B, C لواحفها: $z_A = -1+i$ $z_C = 1+\sqrt{3}i$ $z_B = \overline{z_A}$
 - أ- أكتب العددان المركبان: z_A, z_C على الشكل الأسف، استنتج الشكل الأسف لـ z_B .
 - ب- أكتب العدد المركب $\frac{z_C}{z_A}$ على الشكل الجبرف ثم على الشكل الأسف.
 - ج- استنتج الفففة المضبوطة لـ: $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.
- 3- عفف النقط D لافقة z_D ففث ففكون الرباعف $ABDC$ متوازف أضلاع.
- 4- عفف العدد الطبعف n ففث ففكون العدد: $\left(\frac{z_C}{z_A}\right)^n \in \mathbb{R}$.
- 5- عفف (E_1) و (E_2) ففموفف النقط M من المستوى ذات اللافقة z ففث:
$$(E_1): |z+1-i| = |\overline{z}+1-i|$$

$$(E_2): \text{Arg}(z) = \text{Arg}(\overline{z}) + \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

التمرفن الثاني: 4

- 1- لفكن (u_n) المتتالفة العددفة المعرفة على N كما فلف: $u_0 = e^2$ و $u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}}$.
 - أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبعف n ففان: $u_n > \frac{1}{e}$.
 - ب- ادرس اففاه فففر المتتالفة (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.
- 2- نففر المتتالفة (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبعف n بـ: $v_n = \frac{1}{2} \ln(u_n) + \frac{1}{2}$.
 - أ- بفن أن المتتالفة (v_n) هندسفة ففطلب فعفن أساسها و حدّها الأول.
 - ب- أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n .
 - ج- احسب بدلالة n الففموع S_n ففث: $S_n = v_0 - v_1 - \dots - v_n$.
 - د- احسب بدلالة n الجداء P_n ففث: $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

التمرفن الثالث: 4

- (I)- فففوفف كفس U_1 على 9 كرفات لا ففرق بفنفا باللمس 4 كرفات بفضاء و 3 كرفات سوداء وكرتان حمروافان ونسحب عشوائفا ففف آن واحد 3 كرفات من الكفس U_1 ولفكن الفففر العشوائف X الففف كل سحبة بالعدد $2n-1$ ففث n عدد الكرات البفضاء الففبقفة فف الكفس U_1 .
- عرّف قانون اففمال الفففر العشوائف X ثم احسب افمله الرفاضفافف $E(X)$.

- (II) - يحتوي كيس U_2 على 10 كرات لا نفرق بينها باللمس 7 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء.
 نسحب عشوائياً كرتة من الكيس U_2 ثم نضعها في الكيس U_1 بعد تسجيل لونها ثم نسحب كرتة من الكيس U_1 .
 1- احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_1 حمراء.
 2- احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_2 بيضاء.

التمرين الرابع: 7 ن

- f الدالة المعرفة على $R - \{1\}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x}{x-1} - \ln|x-1|$
 (C_f) منحنىها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- 1- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ثم فسر النهايتين الأخيرتين هندسياً.
- 2- أ- يبين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على مجالي تعريفها، ثم يبين أن: $f'(x) = \frac{-x}{(x-1)^2}$
 ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- 3- أ- يبين أن المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha \in]4; 5[$ حيث
 ب- يبين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثياتها.
- 4- اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (Δ) و (Δ') معامل توجيه كل منهما -2 واكتب معادلتيهما.
- 5- احسب $f(6), f(-1), f(-4), f(-6)$ ثم ارسم المماسين (Δ) و (Δ') والمنحنى (C_f) .
- 6- ناقش بياناً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $m(x-1) = 2x^2 - x - (x-1)\ln|x-1|$
- 7- نعتبر الدالة h والمعرفة على $R - \{-1; 1\}$ كما يلي: $h(x) = f(|x|)$
- أ- احسب $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x)}{x}$ ماذا تستنتج بالنسبة للدالة h ؟ ثم فسر النتيجة هندسياً.
- ب- يبين أن الدالة h زوجية ثم ارسم (C_h) المنحنى الدالة h في نفس المعلم السابق.
- 8- نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = e^{-x} \ln(e^x - 1)$
- أ- يبين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً فإن: $g'(x) = e^{-x} f(e^x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g .
- ب- احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ و يبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة g .

انتهى بالتوفيق للجمع

التمرين الأول: 5

حل المعادلة: $(z-1-\sqrt{3}i)(z^2+2z+2)=0$

يكافئ $z^2+2z+2=0$ أو $z-1-\sqrt{3}i=0$

ومنه $\Delta=i^2 4$ ومنه $z_1=-1+i$ و $z_2=-1-i$ أو $z=1+\sqrt{3}i$

1- في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

$z_A=1+\sqrt{3}i$ و $z_B=-1-i$ و $z_C=-1+i$

أ- كتابة: z_A, z_C على الشكل الأسّي، استنتاج الشكل الأسّي ل z_B .

$z_c=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $Arg(z_c)=\frac{\pi}{3}+2k\pi, (k \in \mathbb{Z}); |z_c|=2$

$z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ومنه $Arg(z_A)=\frac{3\pi}{4}+2k\pi, (k \in \mathbb{Z}); |z_A|=\sqrt{2}$

لدينا $z_B=\overline{z_A}=\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

ب- كتابة $\frac{z_C}{z_A}$ على الشكل الجبري $\frac{z_C}{z_A}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}-i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

الشكل الأسّي ل $\frac{z_C}{z_A}$ هو: $\frac{z_C}{z_A}=\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$ لأن:

$Arg\left(\frac{z_C}{z_A}\right)=arg(z_C)-arg(z_A)=\frac{5\pi}{12}+2k\pi; \left|\frac{z_C}{z_A}\right|=\sqrt{2}$

ج- استنتاج القيمة المضبوطة ل: $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

$\frac{z_C}{z_A}=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]$

$=\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)-i\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

لدينا $\frac{z_C}{z_A}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}-i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ومنه

$\left\{\begin{array}{l} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{array}\right.$ ومنه $\left\{\begin{array}{l} \sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ -\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=-\frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

2- تعيين النقط D لاحقة z_D بحيث يكون الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع.

يكافئ $\overline{AC}=\overline{BD}$ ومنه $z_D=z_C-z_A+z_B=1+i(\sqrt{3}-2)$

3- عين العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد: $\left(\frac{z_C}{z_A}\right)^n \in \mathbb{R}$.

$\left(\frac{z_C}{z_A}\right)^n=\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}\right)^n=\sqrt{2}^n e^{-i\frac{5n\pi}{12}}$ ومنه

$\sqrt{2}^n e^{-i\frac{5n\pi}{12}}=\sqrt{2}^n \left[\cos\left(\frac{5n\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5n\pi}{12}\right)\right]$

$\left(\frac{z_C}{z_A}\right)^n \in \mathbb{R}$ يكافئ $\sin\left(\frac{5n\pi}{12}\right)=0$ ومنه $n=12k' (k' \in \mathbb{N})$

4- تعيين (E_1) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث:

$|z-(-1+i)|=|\overline{z}-(-1+i)|$ يكافئ $|z+1-i|=\overline{|z+1-i|}$

$|z-z_A|=|z-z_B|$ ومنه $|z-z_A|=|z-\overline{z_A}|$ ومنه $|z-z_A|=\overline{|z-z_A|}$

يكافئ: $AM=BM$

ومنه (E_1) مجموعة النقط: محور القطعة $[AB]$

$Arg(z)=Arg(\overline{z})+\pi+2k\pi$ يكافئ $Arg(z)=-Arg(z)+\pi+2k\pi$

ومنه $2Arg(z)=\pi+2k\pi$ ومنه $Arg(z)=\frac{\pi}{2}+k\pi$

ومنه $(i, \overline{OM})=\frac{\pi}{2}+k\pi$

ومنه (E_2) مجموعة النقط: محور الترتيب ما عدا المبدأ.

التمرين الثاني: 4

1- (u_n) المعرفة على N كما يلي: $\left\{\begin{array}{l} u_0=e^2 \\ u_{n+1}=\sqrt{\frac{u_n}{e}} \end{array}\right.$ يكافئ $\left\{\begin{array}{l} u_0=e^2 \\ u_n=\sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}} \end{array}\right.$

أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n > \frac{1}{e}$

من أجل $n=0$ $u_0=e^2$ ومنه $u_0 > \frac{1}{e}$ ومنه محققة

نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي $u_n > \frac{1}{e}$

نبرهن صحة الخاصية من أجل $P(n+1)$ أي $u_{n+1} > \frac{1}{e}$

لدينا من الفرضية $u_n > \frac{1}{e}$ ومنه $\frac{u_n}{e} > \frac{1}{e^2}$ ومنه $\sqrt{\frac{u_n}{e}} > \sqrt{\frac{1}{e^2}}$

إذا $u_{n+1} > \frac{1}{e}$

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن من أجل $n \in N$ $u_n > \frac{1}{e}$

ب- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$u_{n+1}-u_n=\sqrt{\frac{u_n}{e}}-u_n=\frac{\left(\sqrt{\frac{u_n}{e}}\right)^2-u_n^2}{\sqrt{\frac{u_n}{e}}+u_n}=\frac{\frac{u_n}{e}-u_n^2}{\sqrt{\frac{u_n}{e}}+u_n}=\frac{u_n(1-eu_n)}{\sqrt{\frac{u_n}{e}}+u_n}$

لدينا $u_n > \frac{1}{e}$ ومنه $1-eu_n < 0$ إذا $u_{n+1}-u_n < 0$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على N

بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد $\frac{1}{e}$ فإنها متقاربة.

التمرين الرابع: 8

الدالة المعرفة على $R - \{1\}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x}{x-1} - \ln|x-1|$

1- حساب النهايات

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} \right) (1 - (x-1) \ln(x-1)) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

المنحنى يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=1$

2- أ- بما أن الدالة معرفة على مجالي تعريفها فإنها قابلة للاشتقاق

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} = \frac{-x}{(x-1)^2}$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-

ومنه الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty; 0]$ ومزيدة تماما على $]0; 1[$ و $]1; +\infty[$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$

3- أ- بيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in]4; 5[$

الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على $]4; 5[$ و $f(4) = 0,2$ $f(5) = -0,14$

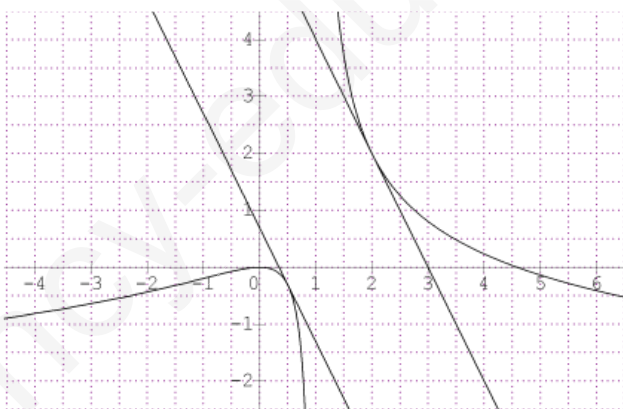
ومنه $f(4) \times f(5) < 0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة تقبل حلا

وحيدا $\alpha \in]4; 5[$

4- إيجاد المماسين معامل توجيهها 2- يكافئ $f'(x) = -2$ ومنه $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}$

$$(\Delta): y = -2x + 6 \quad (\Delta'): y = -2x + \ln 2$$

انشاء المنحنى (C_f) والمماسين (Δ) و (Δ')



6- المناقشة البيانية: $m(x-1) = 2x^2 - x - (x-1) \ln|x-1|$

2- (v_n) متتالية معرفة على N بـ: $v_n = \frac{1}{2} \ln(u_n) + \frac{1}{2}$

أ- بيان أن المتتالية (v_n) هندسية ثم تعيين أساسها وحدها الأول.

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} \ln(u_{n+1}) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln\left(\sqrt{\frac{u_n}{e}}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{u_n}{e}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{u_n}{e}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} (\ln u_n - \ln e) + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} (\ln u_n - 1) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \ln u_n - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \ln(u_n) + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{3}{2}$

ب- كتابة v_n و u_n بدلالة n . $v_n = v_0 \times q^n = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا $e^{2v_n-1} = e^{\ln(u_n)}$ ومنه $v_n = \frac{1}{2} \ln(u_n) + \frac{1}{2}$ ومنه $2v_n - 1 = \ln(u_n)$

$$u_n = e^{2v_n-1} = e^{2\left(\frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)} = e^{3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2}$$

ج- حساب بدلالة n المجموع S_n

$$S_n = v_0 - v_1 - \dots - v_n = v_0 - (v_1 + \dots + v_n)$$

$$= \frac{3}{2} - \left[v_1 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) \right] = \frac{3}{2} - \left[\frac{3}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) \right]$$

د- احسب بدلالة n الجداء P_n حيث:

$$u_n = e^{2v_n-1} \text{ لدينا } P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$$

$$P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n = e^{2v_0-1} \times e^{2v_1-1} \times \dots \times e^{2v_n-1}$$

$$= e^{2v_0-1+2v_1-1+\dots+2v_n-1} = e^{(-1)(n+1)+2(v_0+v_1+\dots+v_n)}$$

ومنه

$$= e^{-(n+1)+2 \left[3 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) \right]}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = e^{-(n+1)+2 \left[3 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) \right]} = 0 \quad \text{لأن } -1 < q < 1$$

التمرين الثالث: 3

1- تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X = 2n-1$ ومنه $\{1; 3; 5; 7\}$

n عدد الكرات البيضاء المتبقية في الكيس U_1

x	1	3	5	7
$P(X=x)$	$\frac{10}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{4}{84}$

الامل الرياضياتي: $E(X) = \frac{196}{84}$

II- 1- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_1 حمراء هو $\frac{1}{5}$

2- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_2 بيضاء هو $\frac{1}{7}$

دراسة إشارة $e^{-x}f(e^x)$

لدينا $e^{-x} > 0$ نضع $k(x) = f(e^x)$

الدالة k عبارة عن مركب دالتين $f(x)$ والاسية

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	—	—	
e^x		+	
$k'(x)$		—	
$k(x)$	$+\infty$		$-\infty$

ومنه نقطة تقاطع مع محور الفواصل $k(x) = 0$

$x = \ln \alpha$ ومنه $e^x = \alpha$ يكفي $f(e^x) = 0$

جدول الإشارة لـ $k(x)$

x	0	$\ln \alpha$	$+\infty$
$k(x)$	+	—	

ومنه الدالة g متزايدة تماماً $[-\infty; \ln \alpha]$ ومتناقصة تماماً $[\ln \alpha; +\infty]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

جدول التغيرات

x	0	$\ln \alpha$	$+\infty$
$g'(x)$	+	—	
$g(x)$	$-\infty$	$g(\alpha)$	0

$$\begin{aligned} m &= \frac{2x^2 - x - x + x}{(x-1)} - \ln|x-1| \\ &= \frac{2x^2 - 2x}{(x-1)} + \frac{x}{x-1} - \ln|x-1| \\ &= \frac{2x(x-1)}{(x-1)} + \frac{x}{x-1} - \ln|x-1| \\ &= 2x + \frac{x}{x-1} - \ln|x-1| \\ -2x + m &= \frac{x}{x-1} - \ln|x-1| \\ -2x + m &= f(x) \end{aligned}$$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم

$$y = -2x + m$$

$$m \in]-\infty; \ln 2[\text{ تقبل حلين مختلفين.}$$

$$m = \ln 2 \text{ تقبل حل مضاعف}$$

$$m \in]\ln 2; 6[\text{ لا تقبل حلول.}$$

$$m = 6 \text{ تقبل حل مضاعف}$$

$$m \in]6; +\infty[\text{ تقبل حلين مختلفين.}$$

1- نعتبر الدالة h والمعرفة على $R - \{-1; 1\}$ كما يلي: $h(x) = f(|x|)$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases}$$

$$h'(0) = f'(0) = 0 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = h'(0)$$

$$h'(0) = f'(0) = 0 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = h'(0)$$

نستنتج أن الدالة h تقبل الاشتقاق عند 0 وتقبل مماس افقي.

ب-دراسة الشفعية: لدينا D_h متناظرة بالنسبة بالمبدأ.

$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

ومنه دالة h زوجية.

8- نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = e^{-x} \ln(e^x - 1)$

$$g'(x) = e^{-x} f(e^x)$$

$$g'(x) = -e^{-x} \ln(e^x - 1) + \frac{e^x}{e^x - 1} \times e^{-x}$$

$$= e^{-x} \left(\frac{e^x}{e^x - 1} - \ln(e^x - 1) \right)$$

$$= e^{-x} f(e^x)$$

التمرين الأول (04 ن):

I. نعتبر المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$, فيما يلي اختر الاجابة الصحيحة في كل حالة مع التعليل.

- (1) حل المعادلة $2z - i \bar{z} = 5 - 4i$ هو : (أ) $2 + i$ (ب) $2 - i$ (ج) $2i$
- (2) اذا كان $\frac{-\pi}{6}$ عمدة z فان عمدة العدد المركب $\frac{i}{z^2}$ هي : (أ) $\frac{-5\pi}{6}$ (ب) $\frac{-\pi}{6}$ (ج) $\frac{5\pi}{6}$
- (3) $A ; B ; C$ لواحقها على الترتيب المثلث $z_A = 1 + 2i$; $z_B = 1 - 2i$; $z_C = 1 + \sqrt{3} - i$, المثلث ABC : (أ) قائم في A (ب) متساوي الساقين في A (ج) متقايس الاضلاع.
- (4) (E) مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة z حيث $z = 1 - 2i + e^{i\theta}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$, A و B نقطتان لاحقتهما على الترتيب $z_A = 1 - 2i$ و $z_B = -1 + 2i$ (أ) (E) هي دائرة مركزها A و نصف قطرها 1 (ب) (E) هي دائرة مركزها B و نصف قطرها 1 (ج) (E) هي نصف مستقيم $[AM]$

التمرين الثاني (04 ن):

يحتوي الكيس A و B على كريات لا نفرق بينهما عند اللمس حيث نجد في الكيس A : 3 كريات بيضاء و 4 كريات حمراء و كريتان خضراوان, بينما في الكيس B نجد 5 كريات بيضاء و 4 كريات حمراء و 3 كريات خضراء.

I. تجربة 1 : يسحب اللاعب عشوائيا 3 كريات في آن واحد في الكيس B

(1) احسب احتمال كل من الحوادث التالية :

☒ V : من بين الكريات الثلاث المسحوبة توجد كرية خضراء واحدة فقط

☒ M : الكريات المسحوبة الثلاث من نفس اللون.

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط بكل مخرج بعدد الالوان في المخرج.

(أ) حدد القيم التي ياخذها X .

(ب) حدد قانون احتمال للمتغير العشوائي X .

(ج) احسب كل من الامل الرياضي, التباين و الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X .

II. تجربة 2 : يرمي اللاعب زهرة نرد غير مزيف و مرقمة من 1 الى 6, اذا تحصل على رقم مضاعف لـ 3 $\{3; 6\}$

يسحب اللاعب كرية واحدة في الكيس A , اما اذا تحصل على رقم آخر فيسحب كرية واحدة في الكيس B

(1) شكل شجرة الاحتمالات للتجربة 2.

(2) احسب احتمال الحصول على كرية حمراء واستنتج احتمال الحصول على كرية بيضاء او خضراء.

لتكن الدالة f المعرفة على: $I =]\frac{1}{2}; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{3x-1}{2x}$, (C_f) تمثيلها البياني في المستوى

المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$, و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

☑ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها , ما ذا تستنتج ؟

نعتبر (U_n) المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

(1) مثل دون حساب على محور الفواصل الحدود U_0, U_1, U_2, U_3 مبرزاً خطوط الرسم (على الوثيقة المرفقة 1)

(2) خمن اتجاه تغير المتتالية (U_n) و تقاربها.

(3) أ) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n من N فان : $U_n > 1$.

ب) اثبت أن (U_n) متقاربة نحو نهاية يطلب تعيينها.

(4) (V_n) متتالية عددية معرفة على N كما يلي : $V_n = \frac{U_n - 1}{2U_n - 1}$

أ) بين أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الاول.

ب) استنتج عبارة U_n بدلالة n ثم نهاية المتتالية (U_n)

ج) احسب المجموع : $s = \frac{V_0 - 1}{U_0} + \frac{V_1 - 1}{U_1} + \frac{V_2 - 1}{U_2} + \dots + \frac{V_n - 1}{U_n}$

التمرين الرابع (07 ن):

g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x) = -1 + \ln(e^{2x} - e^x + 1)$ و (C_g) تمثيلها البياني في المستوى

المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها و استنتج مستقيماً مقارب للمنحنى (C_g) .

(2) أحسب عبارة الدالة المشتقة $g'(x)$, ثم ادرس إشارتها.

(3) ادرس اتجاه تغير الدالة g , ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) أ) برهن انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) = 2x - 1 + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$.

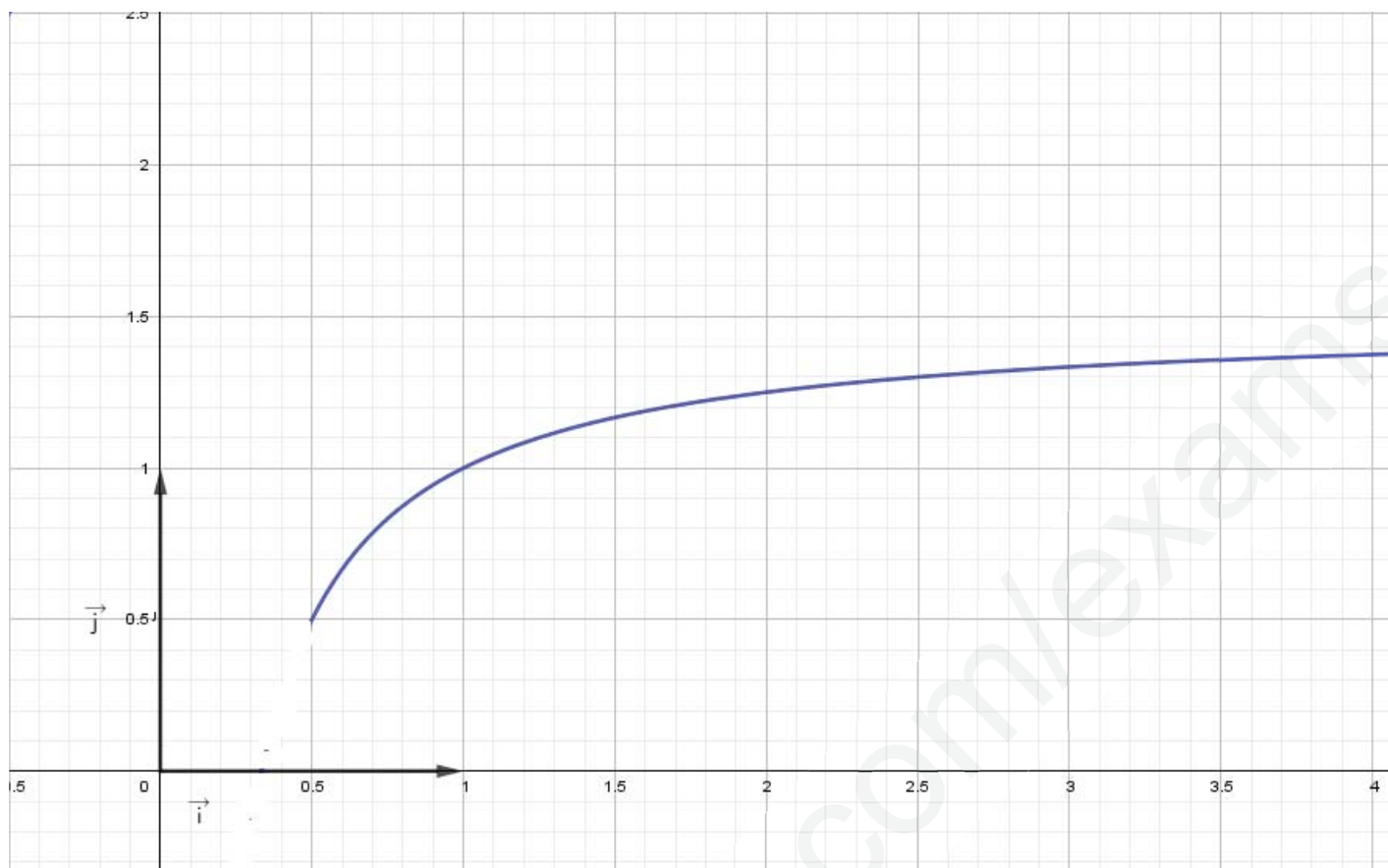
ب) استنتج أن (C_g) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً يطلب كتابة معادلة له.

ج) ادرس وضعية المنحنى (C_g) بالنسبة الى المستقيم $y = 2x - 1$: (Δ) .

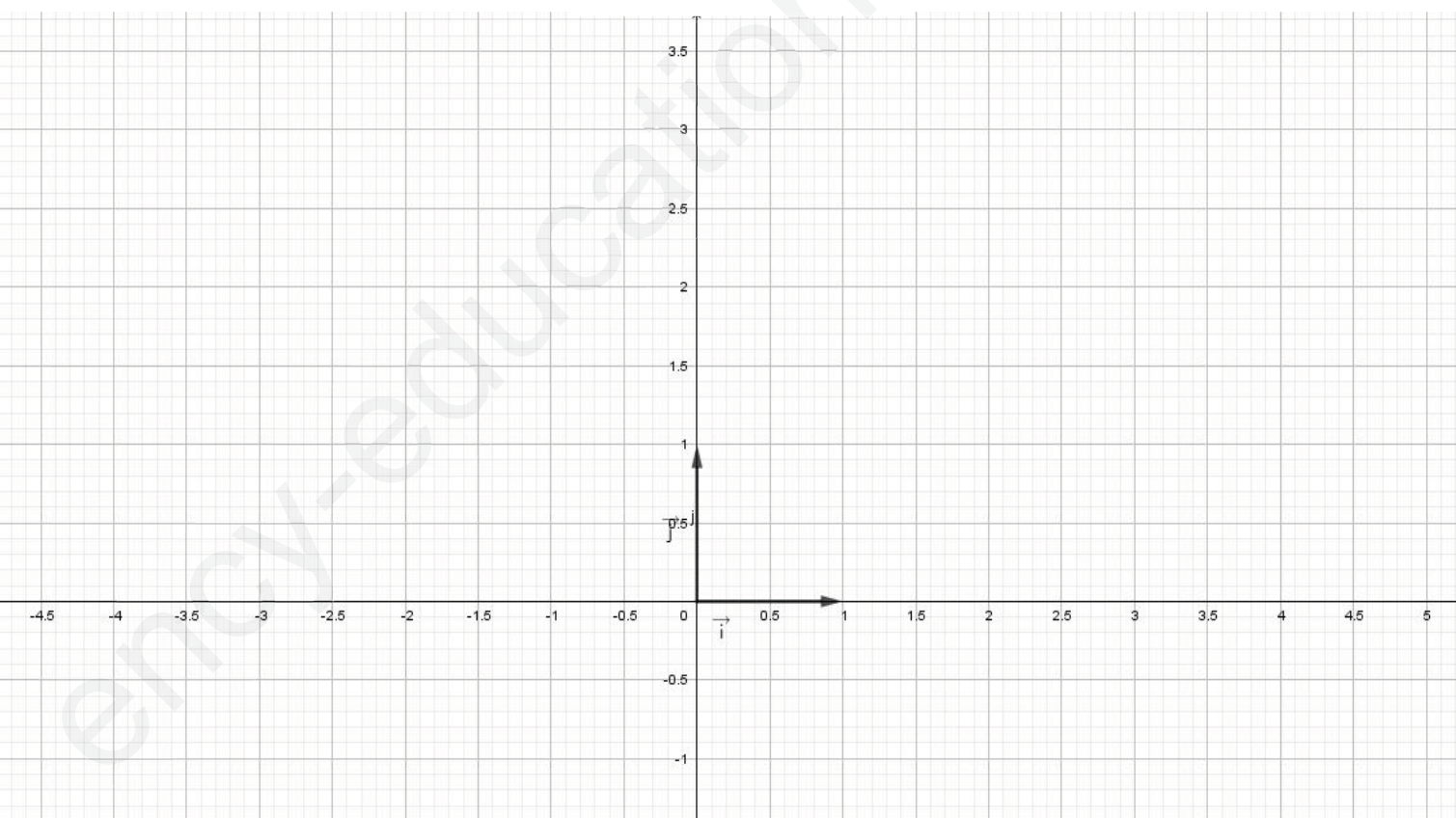
(5) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_g) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$.

(6) أنشئ المماس (T) , المستقيمين المقاربين و المنحنى (C_g) . (على الوثيقة المرفقة 2)

(7) ناقش بيانها و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $g(x) = mx - 1$.



الوثيقة المرفقة رقم 2



اختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول:

يحتوي كيس على 7 كرات لا نفرق بينها باللمس ، منها 3 بيضاء تحمل الأرقام 2 , 2 , 1 و 4 حمراء تحمل الأرقام 2 , 2 , 1 , 1 .

(1) نسحب كرتين من الكيس في آن واحد . احسب احتمال الحوادث التالية:

A " الحصول على كرتين من نفس اللون "

B " الحصول على كرتين كل منهما تحمل رقما فرديا "

C " الحصول على كرتين يكون فيهما مجموع الرقمين الظاهرين يساوي 3 "

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات التي تحمل رقما فرديا المتبقية في الكيس.

أ/ عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله.

ب/ احسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

التمرين الثاني:

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0 = e^3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq e^2$

(2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة .

(3) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \ln(u_n) - 2$

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n ، احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

ج) احسب بدلالة n الجداء : $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$

التمرين الثالث:

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2z + 2 = 0$

(II) المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و I

ذات اللاحقات : $z_A = 1 + i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 2 - 2i$ و $z_I = 3$ على الترتيب.

(1) اكتب كل من : z_A ، z_B ، z_C و z_I على الشكل الأسّي.

(2) اكتب العدد $\frac{z_C - z_I}{z_A - z_I}$ على الشكل الأسّي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACI .

(3) اوجد قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا سالبا.

(4) بين أن النقط A ، B ، C تنتمي الى دائرة مركزها I ، يطلب اعطاء نصف قطرها.

اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول: (4 نقاط ونصف)

كيس به 9 كرات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها أربعة بيضاء مرقمة من بـ: 1، 0، 1، -1، وثلاثة حمراء مرقمة بـ: 1، 0، -1 وكرتان سوداوان مرقمة بـ: -1، 0،

نسحب عشوائيا من هذا الكيس كرتان على التوالي وبدون ارجاع.

1. شكل شجرة الاحتمال الموافقة لهذه الوضعية في الحالتين التاليتين:
(أ) بالاعتماد على ألوان الكرات
(ب) بالاعتماد على أرقام الكرات.

2. أحسب احتمال الحوادث التالية:

الحادثة A: "سحب كرتين من نفس اللون"، الحادثة B "سحب كرة حمراء على الأكثر"، الحادثة C "سحب كرتين من نفس الرقم"

3. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الرقمين الظاهرين على الكرتين المسحوبتين.

أ. عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X.

ب. عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

ج. أحسب التباين $V(X)$ والانحراف المعياري $\sigma(X)$ للمتغير العشوائي X.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة مما يلي:

1. مجموعة حلول المعادلة $\left(\frac{z+3-2i}{iz-i}\right)^2 = -1$ في المجموعة $\square$ هي $S = \{-1+i\}$.

2. من أجل كل عدد مركب z : إذا كان $|z|=1$ فإن $\bar{z} = \frac{1}{z}$

3. من أجل كل عدد طبيعي n : $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{6n} = (-1)^n$

4. من أجل كل عدد حقيقي θ : إذا كان $Z = (\sin \theta - i \cos \theta)(\cos \theta + i \sin \theta)$

فإن : $\arg(Z) = 2\theta - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ، حيث $k \in \square$.

الصفحة 1 من 2

التمرين الثالث: (04 نقاط ونصف)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

نعتبر f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ: $f(x) = \frac{6x+5}{x+2}$ و (C_f) المنحني الممثل لها، (D) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (أنظر الى الوثيقة المرفقة)

(I) تحقق أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $\mathbb{R}^+$.

(II) (u_n) متتالية معرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) أ) مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 5$.

(3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، هل هي متقاربة؟

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n - 5}{u_n + 1}$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) عبّر عن v_n و u_n بدلالة n ثم عين نهاية المتتالية (u_n) .

(5) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{1}{u_0 + 1} + \frac{1}{u_1 + 1} + \dots + \frac{1}{u_n + 1}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 - 1 - 2 \ln x$.

1/ ❖ أدرس تغيرات الدالة g .

2/ ❖ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x + \frac{1 - (\ln x)^2}{x}$.

(C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي النسب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ ❖ احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسياً.

2/ ❖ برهن أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (إرشاد: ضع $t = \sqrt{x}$)، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3/ ❖ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x) + (\ln x)^2}{x^2}$.

❖ استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

❖ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.3 < \alpha < 0.4$.

4/ ❖ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

❖ ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

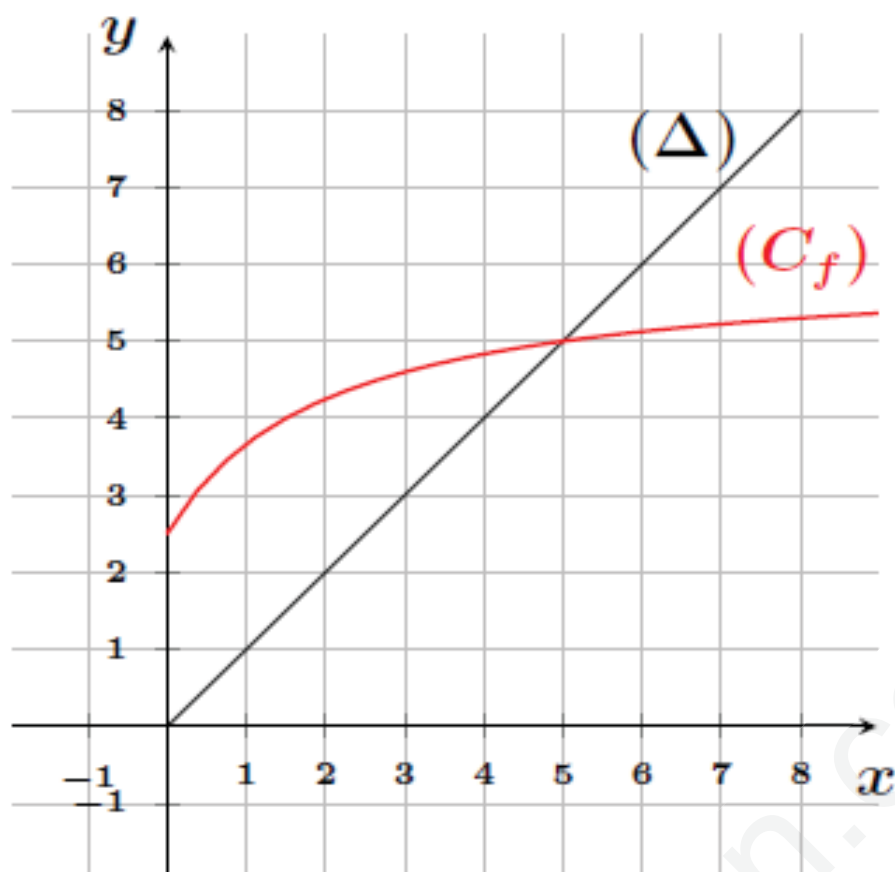
5/ ❖ ارسم (Δ) و (C_f) علما أن $f(0.5) \simeq 1.5$ ، $f(1) = 2$ و $f(2) \simeq 2.25$.

6/ ❖ نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]-\infty; 0[$ بـ: $h(x) = f(-x)$.

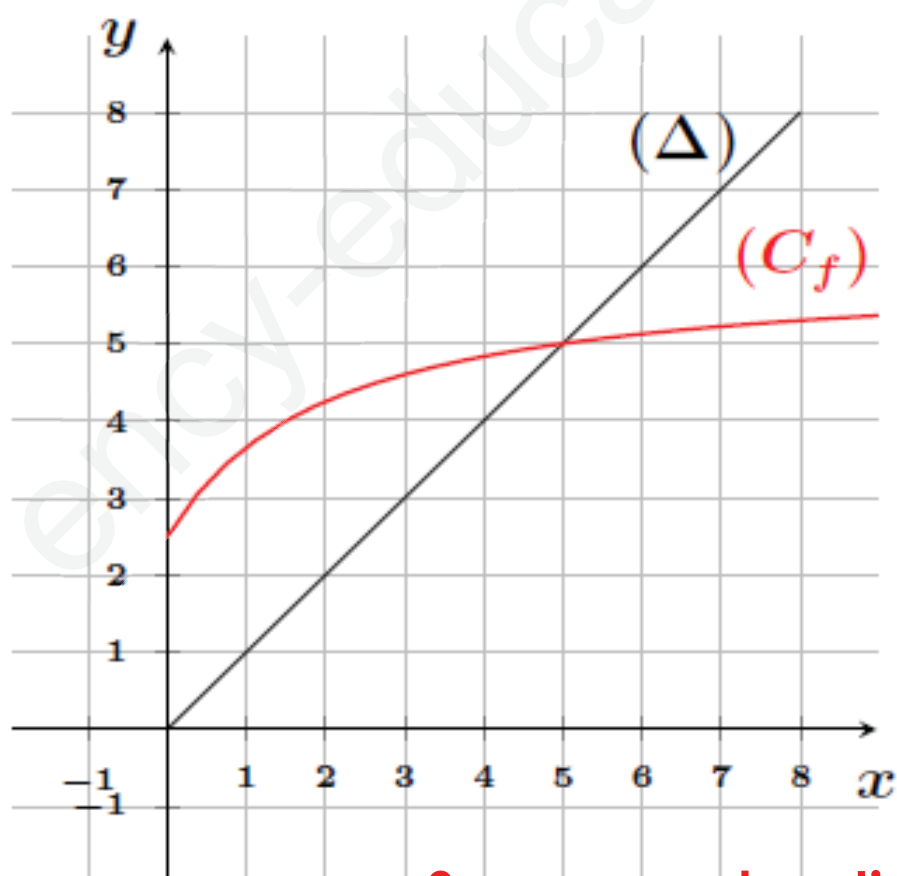
- اشرح كيفية رسم المنحني (C_h) انطلاقا من المنحني (C_f) ثم ارسمه في المعلم السابق.

الاسم واللقب:

القسم:

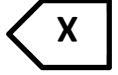


الاسم واللقب:
القسم:





BAC 2019 S J - 1 - C H 1 0 R 1 9



الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
دورة: جوان 2019



وزارة التربية الوطنية
ثانوية الشهيد عمر ادريس
الشعبة: ثالثة علوم تجريبية

المدة: 3 ساعات

الاختبار الثاني في مادة: الرياضيات

التمرين الأول: 03 نقاط : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الثلاث المقترحة مبررا اختيارك .

ج	ب	أ	العبارة
لا تقبل حلول	$(2; -1)$	$(4; -1)$	حلول المعادلة $n^2 C_2^1 - 3!n - \frac{2}{3} A_4^2 = 0$
$r = 3$ $\theta = \frac{4\pi}{3}$	$r = 3$ $\theta = -\frac{\pi}{3}$	$r = -3$ $\theta = \frac{\pi}{3}$	Z . عدد مركب غير معدوم، طويلته وعمدته هي $Z = -3 \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]$
$-1+i$	$1+i$	1	المجموع $S = 1 + e^{i\pi} + e^{i2\pi} + e^{i3\pi} + e^{i4\pi}$ يساوي

التمرين الثاني: 06 نقاط: .

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z التالية : $(i\bar{Z} - 1 + i)(Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4) = 0$

(2) نعتبر في المستوي المركب النقطتين A و B ذات اللاحقتين على الترتيب : $Z_A = \sqrt{3} + i$, $Z_B = \sqrt{3} - i$.

(أ) أكتب كل من العددين المركبين Z_A , Z_B على الشكل الأسّي .

(ب) أكتب العدد : $\left(\frac{Z_A}{Z_B}\right)^{2019} + \left(\frac{Z_A}{Z_B}\right)^{1440}$ على الشكل الجبري .

(ت) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{Z_A}{2}\right)^n$ عدد تخيليا صرفا .

(3) نعتبر العدد المركب Z_C حيث $Z_C \times Z_B = 2\sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}$

(أ) أكتب Z_C على الشكل الأسّي ثم على الشكل الجبري .

(ب) أكتب العدد المركب $Z_C \times Z_B$ على الشكل الجبري .

(ت) إستنتج القيم المضبوطة لكل من $\cos \frac{7\pi}{12}$ و $\sin \frac{7\pi}{12}$.

(3) ليكن f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z بالنقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$$z' = -2iz + 10i$$

أ- عين طبيعة التحويل f محددا عناصره المميزة .

ب- أكتب العبارة المركبة للدوران الذي مركزه B و زاويته $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

ت- أوجد لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران r .

التمرين الثالث: 5 نقاط

يحتوي صندوق على خمس كرات بيضاء مرقمة بـ : 1 ، 1 ، 1 ، 0 ، -1 وخمس كرات سوداء مرقمة بـ :

1 ، 1 ، 0 ، 0 ، -1 لا نميز بينها باللمس ، نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كرات من الصندوق .

I. نعتبر الأحداث التالية :

A : " الحصول على كرة بيضاء واحدة فقط " B : " الحصول على كرة بيضاء على الأقل "

C : " الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون " D : " الحصول على اللونين الأبيض والأسود "

F : " مجموع أرقام الكرات الثلاث المسحوبة يساوي 0 "

1- أحسب إحتمال الأحداث A ، B و C .

2- بين أن: $P(D) = \frac{5}{6}$ ، $P(F) = \frac{31}{120}$ و $P(C \cap F) = \frac{7}{120}$.

3- إذا كان مجموع أرقام الكرات المسحوبة يساوي 0 ما هو إحتمال أن تكون الكرات الثلاث من نفس اللون؟

II. نعتبر المتغير العشوائي x الذي يرفق بكل مخرج مجموع أرقام الكرات الثلاث المسحوبة.

1- عين قيم المتغير العشوائي x .

2- عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي x ثم أحسب أمله الرياضياتي .

التمرين الرابع: 6 نقاط

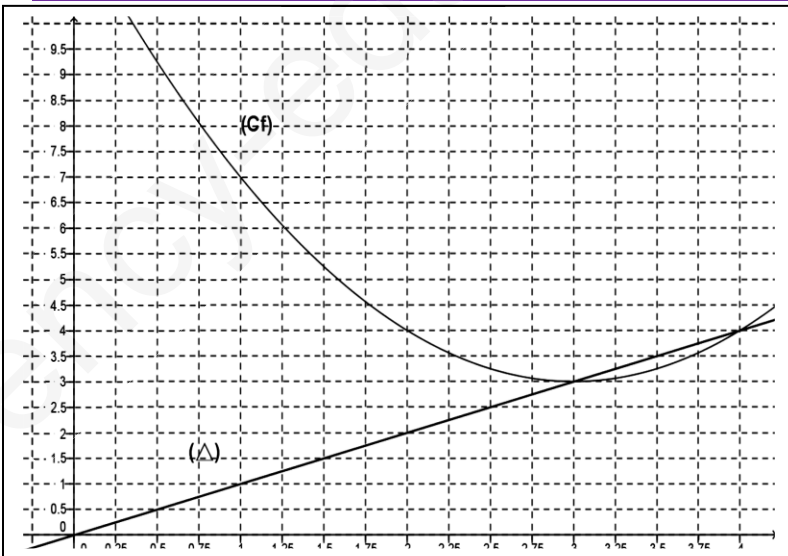
في الشكل المقابل (C_f) التمثيل البياني للدالة f

على المجال $[0,5]$ بالعلاقة $f(x) = (x-3)^2 + 3$

و (d) المستقيم الذي معادلته: $y = x$

(1) (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي:

$$U_{n+1} = f(U_n) \text{ و } U_0 = \frac{15}{4}$$



أ- مثل على محور الفواصل الحدود التالية : U_3, U_2, U_1, U_0 دون حسابها مبرزاً خطوط التمثيل

ب- ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها

(2) أ- برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$

ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج انها متقاربة

(3) (V_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $V_n = \ln(U_n - 3)$

أ- برهن أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الأول V_0 .

ب- أكتب بدلالة n كلا من U_n و V_n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n)$

ج - احسب بدلالة بدلالة n المجموع : $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$

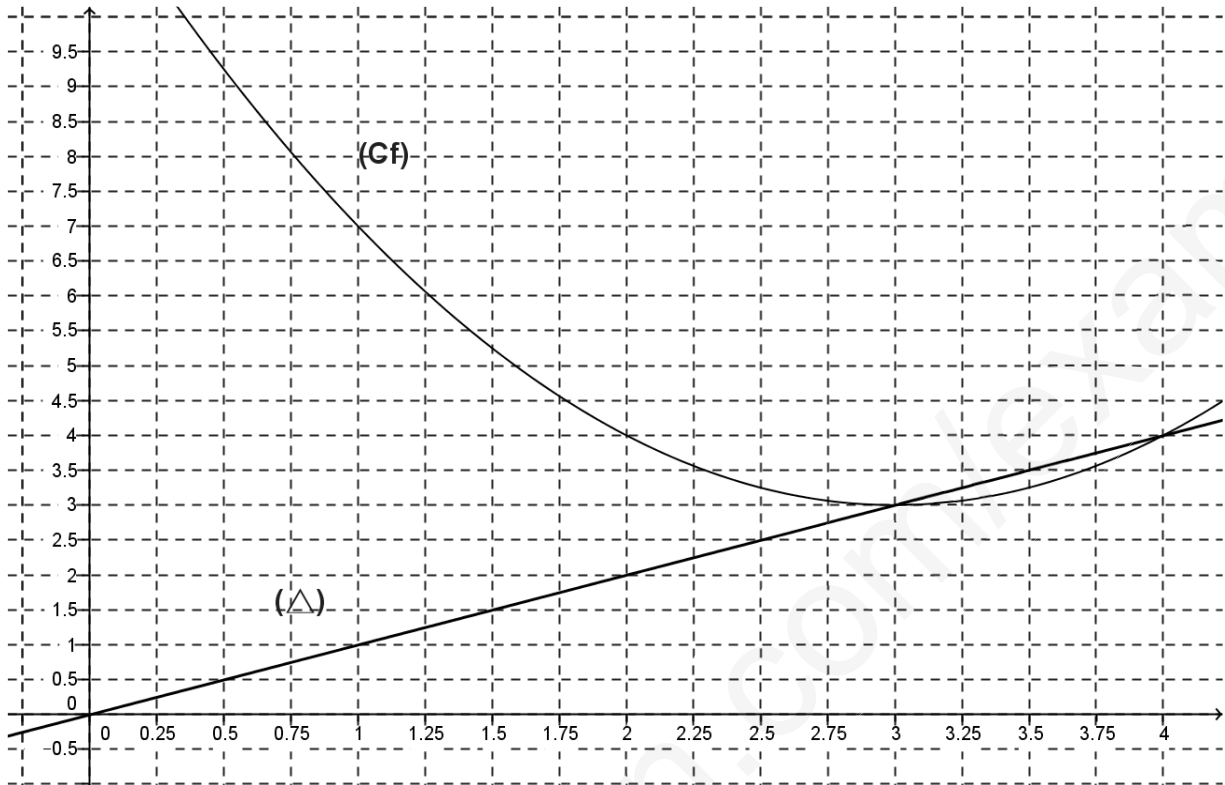
د- احسب بدلالة n الجداء : $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \dots (u_n - 3)$

من رام العلى من غيرك * أضاع العمر في طلب الحال
بقدر الكد تكتسب المعالي * ومن أراد العلى سهر الليالي

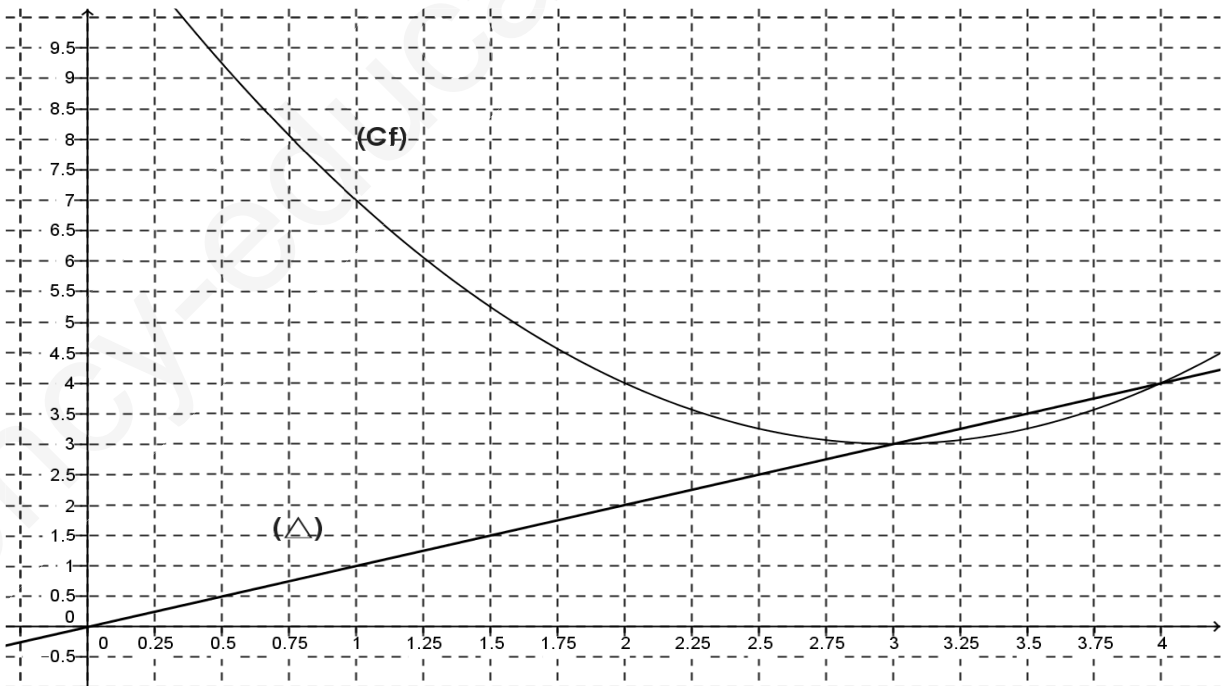
السلامة والوقاية من الأمراض المعدية

الوثيقة المرفقة

الاسم : اللقب : القسم :



الاسم : اللقب : القسم :



التمرين الثالث

: عدد الحالات الممكنة هو

$$C_{10}^3 = 120$$

حساب احتمال كل حادثة :

: الحصول على كرة بيضاء واحدة فقط :

$$P(A) = \frac{\text{الحالات الملائمة}}{\text{الحالات الممكنة}} = \frac{C_5^1 \times C_5^2}{C_{10}^3} = \frac{5 \times 10}{120} = \frac{5}{12}$$

: الحصول على كرتين بيضاء على الأقل :

$$P(B) = \frac{\text{الحالات الملائمة}}{\text{الحالات الممكنة}} = \frac{C_5^2 \times C_5^1 + C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{11}{12}$$

: الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون :

$$P(C) = \frac{\text{الحالات الملائمة}}{\text{الحالات الممكنة}} = \frac{C_5^3 + C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

-1 نبين أن :

$$P(D) = \frac{7}{120} \text{ و } P(F) = \frac{31}{120} \text{ ، } P(C \cap F) = \frac{5}{6}$$

: الحصول على اللونين الأبيض والأسود :

$$P(D) = \frac{\text{الحالات الملائمة}}{\text{الحالات الممكنة}} = \frac{C_5^2 \times C_5^1 + C_5^1 \times C_5^2}{C_{10}^3} = \frac{100}{120} = \frac{5}{6}$$

: مجموع أرقام الكرات الثلاث المسحوبة يساوي 0 :

$$P(F) = \frac{\text{الحالات الملائمة}}{\text{الحالات الممكنة}} = \frac{C_5^1 \times C_3^1 \times C_2^1 + C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{31}{120}$$

: حساب $P(C \cap F)$:

$$P(C \cap F) = \frac{\text{الحالات الملائمة}}{\text{الحالات الممكنة}} = \frac{C_3^1 \times C_1^1 \times C_1^1 + C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{C_{10}^3} = \frac{7}{120}$$

2- إذا كان مجموع أرقام الكرات المسحوبة يساوي 0 ما هو احتمال أن تكون الكرات الثلاث من نفس اللون ؟

حساب احتمال أن تكون الكرات الثلاث من نفس اللون علما أن مجموع أرقامها هو 0 :

احتمال شرطي

$$P_F(C) = \frac{P(C \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{7}{120}}{\frac{31}{120}} = \frac{7}{31}$$

- القيم الممكنة للمتغير X هي : $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ و قانون الاحتمال هو :

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{120}$	$\frac{11}{120}$	$\frac{31}{120}$	$\frac{35}{120}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{10}{120}$

قيم X	الحالات الملائمة	الاحتمالات $P(X = x_i)$
$X = -2$	سحب 3 كرات مرقمة بـ -1، -1، 0	$P(X = -2) = \frac{C_2^2 \times C_3^1}{120} = \frac{3}{120}$
$X = -1$	سحب 3 كرات مرقمة بـ -1، 0، 0 أو سحب 3 كرات مرقمة بـ -1، -1، 1	$P(X = -1) = \frac{C_2^1 \times C_3^2}{120} + \frac{C_2^2 \times C_5^1}{120} = \frac{11}{120}$
$X = 0$	سحب 3 كرات مرقمة بـ -1، 0، 1 أو سحب 3 كرات مرقمة بـ 0، 0، 0	$P(X = 0) = \frac{C_2^1 \times C_3^1 \times C_5^1}{120} + \frac{C_3^3}{120} = \frac{31}{120}$
$X = 1$	سحب 3 كرات مرقمة بـ 0، 0، 1 أو سحب 3 كرات مرقمة بـ -1، 1، 1	$P(X = 1) = \frac{C_3^2 \times C_5^1}{120} + \frac{C_5^2 \times C_2^1}{120} = \frac{35}{120}$
$X = 2$	سحب 3 كرات مرقمة بـ 0، 1، 1	$P(X = 2) = \frac{C_5^2 \times C_3^1}{120} = \frac{30}{120}$
$X = 3$	سحب ثلاث كرات مرقمة بـ 1، 1، 1	$P(X = 3) = \frac{C_5^3}{120} = \frac{10}{120}$

$$E(x) = \frac{9}{10}$$

الأمّل الرياضيائي :

المدة: 3 ساعات ونصف سا	اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات	القسم: 3 ع تجريبية
------------------------	---------------------------------------	--------------------

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول (04 نطا)

نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة على N كما يلي: $U_0 = 11$ و $U_{n+1} = 2 + \sqrt{U_n - 2}$

- 1- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $3 \leq U_n \leq 11$
- 2- (أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $U_{n+1} - U_n = (\sqrt{U_n - 2})(1 - \sqrt{U_n - 2})$
(ب) بين أن المتتالية (U_n) متناقصة و برر تقاربها.

- 3- (أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $0 \leq U_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{2}(U_n - 3)$

- (ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_n - 3 \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

- 4- لتكن (V_n) المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي: $V_n = \ln(U_n - 2)$

- (أ) برهن أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و يطلب تعيين حدها الأول V_0 .

- (ب) أكتب عبارة الحد العام لـ: (V_n) ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n .

- 5- احسب المجموع S حيث: $S = V_{1440} + V_{1441} + \dots + V_{2019}$

- ثم استنتج الجداء: $P = (U_{1440} - 2)(U_{1441} - 2) \dots (U_{2019} - 2)$

التمرين الثاني (04 نطا)

يحتوي كيس على ثماني كرات لا يمكن التمييز بينهما باللمس وتحمل الأرقام التالية: 0، 0، 1، 2، 2، 2، 2، 4. نسحب عشوائيا وفي أن واحد ثلاث كرات من الكيس:

(1) نعتبر الحدثين:

A : من بين الكرات المسحوبة لا توجد أية كرة تحمل رقم 0.

B : جداء الأرقام التي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة يساوي 8.

$$(أ) \text{ بين أن: } P(A) = \frac{5}{14} \text{ وأن } P(B) = \frac{1}{7}.$$

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة جداء الأرقام التي تحملها الكرات الثلاثة المسحوبة

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X .

(ب) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

(ج) احسب الأمل الرياضياتي والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X .

التمرين الثالث : (05.5نقط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B و C ذات اللواحق على الترتيب :

$$z_C = 2 \text{ و } z_B = -1 - i\sqrt{3} , z_A = -1 + i\sqrt{3}$$

1- (ا) اكتب العدد المركب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ على الشكل الأسي .

(ب) استنتج طبيعة المثلث ABC .

(ج) عين Ω و r مركز ونصف قطر الدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC .

2- (أ) عين طبيعة وعناصر المجموعة (Γ) للنقط $M(z)$ بحيث : $z\bar{z} + 2(z + \bar{z}) = 0$

(ب) تحقق أن النقطتان A و B تنتميان إلى المجموعة (Γ) .

3- ليكن R الدوران الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

(أ) عين صورة النقطة B بالدوران R .

(ب) عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

(ج) عين صورة النقطة Ω بالدوران R ثم استنتج مما سبق صورة المجموعة (Γ) بالدوران R .

(د) عين طبيعة (Δ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $z = z_\Omega + ke^{\frac{i\pi}{4}}$ و k عدد حقيقي

ثم جد معادلة ديكارتية لـ (Δ) .

التمرين الرابع : (06.5نقط)

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - (x^2 + 1)e^{-x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(2) بين أنه لأجل كل $x \in D_f$ فإن : $f'(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$

(3) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y = x$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$ ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

(5) بين المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,8 < \alpha < 1,9$

(6) أكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

(7) بين أنه لأجل كل $x \in D_f$ فإن : $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$

ثم استنتج أن : (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .

(8) أحسب $f(0)$; $f(3)$ ثم أرسم كلا من (Δ) و (T) و (C_f)

(9) ناقش بيانها وحسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود وعدد حلول المعادلة ذات المجهول x : $(x^2 + 1)e^{-(x+m)+1} = 1$

1. $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 + 1}$: كما يلي : $[2, +\infty[$ المجال

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[2, +\infty[$

2. (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = \frac{5}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) برهن بالتراجع انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن : $2 < u_n < 3$ ثم استنتج انه من اجل $n \in \mathbb{N}$: $u_n^2 < \frac{9}{10}(u_n^2 + 1)$

(2) أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

(3) تحقق انه من اجل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - 2 = \frac{u_n^2}{u_n^2 + 1}(u_n - 2)$

(4) اثبت انه من اجل $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{9}{10}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين الثاني (05نقطة)

يعرض متجر تخفيضات هامة أثناء بيع جزء من مدخراته للأحذية التي تشمل ثلاثة أنواع A ، B و C .
في المتجر يوجد ربع المدخرات من النوع A وخمسها من النوع B أما البقية من النوع C ، 24% من السلعة A و 75% من السلعة B و 20% من السلعة C كلها مخفضة الأثمان .

اشترى زبون من المتجر حذاء بطريقة عشوائية ، نعتبر الأحداث التالية :

S : الحذاء الذي اشتراه الزبون من السلعة المخفضة . A : الحذاء الذي اشتراه الزبون من السلعة A .

B : الحذاء الذي اشتراه الزبون من السلعة B . C : الحذاء الذي اشتراه الزبون من السلعة C .

(1) أحسب الاحتمالات $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$.

(2) قدم شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية ثم بين أن : $P(S) = \frac{8}{25}$.

(3) استنتج احتمال أن يكون الحذاء من النوع B علما أنه من السلعة المخفضة .

(4) نختار بطريقة عشوائية على التوالي مع إرجاع 3 أحذية .

أحسب احتمال الحدث D : الحصول على حذاء واحد فقط من السلعة المخفضة .

(5) نختار بطريقة عشوائية على التوالي مع إرجاع n حذاء .

نعتبر E الحدث : الحصول على الأقل على حذاء واحد من بين n حذاء من السلعة المخفضة .

(أ) بين أن : $P(E) = 1 - \left(\frac{17}{25}\right)^n$

(ب) عين أصغر قيمة لـ n حتى يكون $P(E) \geq 0.999$

التمرين الثالث (05نقطة)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21) = 0$.

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D ذات اللواحق :

$$z_D = \bar{z}_C \text{ و } z_C = 3 + 2i\sqrt{3} , z_B = \bar{z}_A , z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

(أ) بين أن النقط A ، B ، C و D تنتمي لنفس الدائرة ذات المركز النقطة Ω حيث : $z_\Omega = 3$ يطلب تعيين نصف قطرها

$$(ب) \text{ بين أن : } z_A = \left(\frac{z_D - 1}{4}\right)^{1439} + \left(\frac{z_C - 1}{4}\right)^{2018}$$

(3) لتكن النقطة E نظيرة D بالنسبة للمبدأ O .

(أ) اكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة المثلث BEC

(ب) بين وجود دوران r مركزه النقطة B ويحول E إلى C يطلب تعيين زاويته .

(4) S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطة $M'(z')$ من المستوي حيث :

$$z' = (1 - i\sqrt{3})z + 3$$

(أ) عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل S .

(ب) (δ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $|iz - 3i| = |-3 + i\sqrt{3}|$ ،

عين المجموعة (δ) ثم أوجد صورة (δ) بالتحويل S

(ج) عين المجموعة (φ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $\text{Arg}\left(\frac{z}{z}\right) = 2\pi k$ مع $z \neq 0$ و k عدد صحيح نسبي .

التمرين الرابع (06 نقطة)

١. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = \ln x + \frac{x-2}{x}$.

(1) احسب نهايات الدالة g عند 0 و $+\infty$.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1,4 < \alpha < 1,5$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

٢. f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ ب : $f(x) = 1 + (x-2)\ln x$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) احسب نهاية الدالة f عند 0 وعند $+\infty$ ثم فسر النهاية عند 0 هندسيا .

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول التغيرات .

(3) بين أن : $f(\alpha) = 1 - \frac{(\alpha-2)^2}{\alpha}$ ثم أعط قيمة مقربة لـ $f(\alpha)$ من اجل $\alpha = 1,45$.

(4) (T_{x_0}) هو المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة M_0 ذات الفاصلة x_0 .

(أ) اكتب المعادلة الديكارتيّة للمماس (T_{x_0}) .

(ب) عين x_0 إذا علمت أن المماس (T_{x_0}) يمر بالنقطة $A(2; 0)$.

(ت) استنتج أن (C_f) يقبل مماسين يمران بالنقطة A ثم اكتب معادلة كل منهما .

(5) ارسم كلا من المماسين والمنحنى (C_f) .

٣. نعتبر المستقيم (D_m) ذو المعادلة $y = mx - 2m$ حيث m وسيط حقيقي .

(1) تحقق أن (D_m) يمر بالنقطة A .

(2) ناقش بيانها وحسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx - 2m$.

السنة الدراسية : 2018 / 2019	ثانوية سيدي اعجاز- بنورة -
المستوى : الثالثة علوم تجريبية	اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات
المدة : 3 ساعات	

b y N . A

التمرين الأول : (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ :
$$\begin{cases} u_0 = e \\ u_{n+1} = (e+1)u_n - e^{-1} \end{cases}$$

و (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بالشكل : $v_n = e^2 u_n - 1$

1. (ا) يرهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > e^{-2}$

(ب) بين أن (u_n) متزايدة.

2. (ا) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الاول.

(ب) أكتب عبارة v_n و u_n بدلالة n .

(ج) هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

3. (ا) أحسب الجداء : $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$ بدلالة n .

(ب) استنتج عبارة الجداء P_n بدلالة n : $P_n = (u_0 - e^{-2}) \times (u_1 - e^{-2}) \times (u_2 - e^{-2}) \times \dots \times (u_n - e^{-2})$

التمرين الثاني :

يضم صندوق 10 كرات متماثلة ، 4 منها سوداء والباقي بيضاء ، نسحب من الصندوق 3 كرات في ان واحد.

1. ما عدد الحالات الممكنة ؟

2. احسب احتمال الحوادث الآتية:

A " كرة بيضاء".

B " كرة بيضاء على الاقل".

C " 3 كرات ليست من نفس اللون".

3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة:

(ا) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

4. نضيف الى الصندوق n كرة سوداء و n كرة بيضاء و نسحب من الصندوق كرتان في ان واحد و نعتبر X_n عدد

الحالات الممكنة لسحب كرتين من نفس اللون:

(ا) أثبت انه مهما يكن $n \in \mathbb{N}^*$: $X_n = n^2 + 9n + 21$

(ب) كم نضيف من كرة حتى يكون : $X_n = 10713$

1. $P(Z) = Z^3 + Z^2 - 4Z - 24$ عدد مركب حيث :

(أ) أحسب $P(3)$ ، ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(Z) = 0$.

(ب) أكتب الحلول المتحصل عليها على الشكل المثلثي.

2. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

لتكن النقط C, B, A ذات اللواحق : $Z_A = 3$ ، $Z_B = -2 + 2i$ ، $Z_C = -2 - 2i$.

(أ) أحسب الأطوال AB, AC, BC ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(ب) عين المجموعة (E_1) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z بحيث : $|Z + 2 + 2i| = |Z + 2 - 2i|$.

(ج) عين المجموعة (E_2) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z بحيث : $|Z + 2 + 2i| = |Z_A|$.

التمرين الرابع : المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; I; J)$

أ. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$

(1) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) علل وجود عدد حقيقي وحيد α بحيث $-0.38 < \alpha < -0.36$ و الذي يحقق $g(\alpha) = 0$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $\mathbb{R}$.

II. f الدالة العددية المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني .

(1) بين أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(2) (أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$

(ب) استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيراتها.

(ج) بين أن : $f(\alpha) = 2\alpha + 3 + \frac{2}{\alpha - 1}$ ثم جد حصرًا للعدد $f(\alpha)$.

(3) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثيتها.

(4) (أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (D) معادلته : $y = 2x + 1$ ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة

للمستقيم (D) .

(ب) أنشئ المنحنى (C_f) في المعلم السابق و على المجال $[-1.5; +\infty[$ (تعطى $f(-1.5) = 4.72$)

بالتوفيق

3

علوم تجريبية

المدة: ساعتان
التاريخ: 2019/03/04ثانوية أول نوفمبر 1954
الاغواط

الرياضيات

اختبار الثلاثي الثاني في مادة

التوقيت (35 دقيقة)

التمرين الأول:

06.5
نقاط

يحتوي صندوق u_1 على أربع كرات بيضاء وثلاث كرات سوداء وكرتين حمراوين . لا يمكن التمييز بينها باللمس
نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من u_1 ولتكن الأحداث :

A " سحب كرتين سوداوين وكرة حمراء " ، B " سحب ثلاث كرات من نفس اللون " ، C " سحب كرة بيضاء واحدة على الأقل "

(1) بين أن : $P(A) = \frac{1}{14}$ ثم أحسب $P(B)$ و $P(C)$

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الألوان التي تحملها الكرات المسحوبة
أ/ حدّد قيم المتغير العشوائي X

ب/ حدّد قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

ج/ اللاعب يدفع 50DA قبل إجراء السحب، ويكسب 25DA لكل لون من الألوان المحصل عليها. هل اللعبة مربحة له ؟

(4) نعتبر صندوقا آخر u_2 يحتوي على كرتين بيضاوين وكرة سوداء

نضع الكرات الثلاثة المسحوبة من u_1 في الصندوق u_2 ثم نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من u_2
* ما احتمال أن الكرتان المسحوبتان من u_2 بيضاوين علما أن الكرات الثلاث المسحوبة من u_1 لها نفس اللون

التوقيت (35 دقيقة)

التمرين الثاني

المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقط $A; B; C$ التي لواحقها على الترتيب:

$$(z_A \text{ مرافق } \overline{z_A}) \quad z_C = \overline{z_A} \quad \text{و} \quad z_B = -(i)^{2019} z_A \quad , \quad z_A = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

(1) أكتب z_B, z_A على الشكل الجبري .

(2) أكتب العدد $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

(3) أ) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $\frac{1+i-z}{-1+i-z} = 2e^{i\pi}$ (E)

ب) استنتج أن النقطة A هي صورة النقطة B بواسطة تشابه مباشر S مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة z_Ω

(حيث z_Ω هي حل المعادلة (E)) يطلب تعيين عناصره المميزة وكتابة عبارته المركبة .

06.5
نقاط

إقلب الصفحة

(4) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد المركب $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا موجبا.

(5) (أ) عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوى ذات اللاحقة z حيث: $z = z_C - k \frac{z_A}{z_C}$ ، k يسمح $\mathcal{R}_+$

(ب) عيّن (Γ') مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى حيث: $\arg \left[\left(\frac{z_A - z}{z_B - z} \right)^2 \right] = \pi + 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

التوقيت (40 دقيقة)

التمرين الثالث

06.5

نقاط

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

حيث a ، b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس

1- عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0; -3)$ مماسا معامل توجيهه 3

والعدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x) = 0$.

2- نضع $a = 1$ ، $b = 0$ ، $c = -3$

أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3- أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$ ثم عين إحداثيات نقط تقاطع

(C_f) مع حامل محور الفواصل.

4- أرسم (T) و (C_f) .

5- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن $f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$ ثم استنتج دالة

أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

6- عيّن (بيانيا) قيم العدد الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $x^2 - 3 + me^x = 0$ حلين ساليين.

تمنح (0.5 نقطة) لتنظيم وثيقة الإجابة

*** انتهى ***



حكمة: تستطيع أن تنجح في حياتك ولو كان كل الناس يعتقدون أنك غير ناجح ولكنك لا تنجح أبدا إذا كنت تعتقد في نفسك أنك غير ناجح.

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح....أستاذ المادة: تونسي ن



$$(1) \text{ تبين أن: } P(A) = \frac{1}{14}, \text{ لدينا } p(A) = \frac{c_3^2 \times c_2^1}{c_9^3} = \frac{6}{84} = \frac{1}{14}$$

$$p(B) = \frac{c_4^3 + c_3^3}{c_9^3} = \frac{5}{84} \approx 0.06.$$

الحدث C : سحب كرة بيضاء على الأقل الحدث $\bar{C}$: عدم سحب كرة بيضاء

$$p(C) = \frac{c_4^1 \times c_5^2 + c_4^2 \times c_5^1 + c_4^3 \times c_5^0}{c_9^3} = \frac{74}{84} \approx 0.88 \text{ ط } p(C) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - \frac{c_5^3}{c_9^3} = \frac{74}{84} \approx 0.88$$

(2) قيم المتغير العشوائي X هي: 1 ; 2 ; 3

$$p(X=1) = p(B) = \frac{c_4^3 + c_3^3}{c_9^3} = \frac{5}{84} \text{ "سحب 3 كرات بلون واحد"}$$

$X=2$: "سحب 3 كرات بلونين مختلفين"

$$p(X=2) = \frac{c_4^2 \times c_5^1 + c_3^2 \times c_6^1 + c_2^2 \times c_7^1}{c_9^3} = \frac{55}{84} \text{ أو } (B; B; \bar{B}) \text{ أو } (N; N; \bar{N}) \text{ أو } (R; R; \bar{R})$$

$$p(X=3) = \frac{c_4^1 \times c_3^1 \times c_2^1}{c_9^3} = \frac{24}{84} \text{ "سحب 3 كرات بثلاث ألوان مختلفة"}$$

(ج) ليكن Y متغير عشوائي يمثل الربح الصافي الذي يحققه اللاعب قيمه: $+25$; 0 ; -25 .

$$E(Y) = -25 \left(\frac{5}{84} \right) + 0 \left(\frac{55}{84} \right) + 25 \left(\frac{24}{84} \right) = \frac{475}{84} \approx 5.65 \text{ بمأن: } E(Y) > 0 \text{ فإن اللعبة مربحة لهذا اللاعب}$$

(3) حساب احتمال ان تكون الكرتان من U_2 بيضاوين علما أن الكرات المسحوبة من لها نفس اللون:

$$\text{ليكن الحدث } F: \text{ سحب كرتان من } U_2 \text{ بيضاوين. لدينا: } p(B) = \frac{c_4^3 + c_3^3}{c_9^3} = \frac{5}{84}, p_B(F) = \frac{p(B \cap F)}{p(B)}$$

$$p_B(F) = \frac{p(B \cap F)}{p(B)} = \frac{\frac{41}{1260}}{\frac{5}{84}} = \frac{41}{75} \approx 0.55, \text{ ومنه: } p(B \cap F) = \frac{c_4^3}{84} \times \frac{c_5^2}{c_6^2} + \frac{c_3^3}{84} \times \frac{c_2^2}{c_6^2} = \frac{41}{1260}$$

التمرين الثاني:

$$(1) \text{ كتابة } z_B, z_A \text{ على الشكل الجبري: } z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i, z_B = -(i)^{2019} z_A = i z_A = -1 + i$$

$$(2) \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i \text{ الاستنتاج: بما أن } \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) = \frac{\pi}{2} \text{ و } \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1$$

فإن $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ اذن المثلث ABC قائم في A ومتقايس الضلعين

(3) (أ) نحل في C المعادلة (E) ذات المجهول z :

$$(E) \text{ يكافئ } \frac{1+i-z}{-1-i-z} = 2(-1) \text{ يكافئ } 3z = -1 + 3i \text{ ومنه: } z = \frac{-1}{3} + i \text{ اذن: } S = \left\{ \frac{-1}{3} + i \right\}$$

(ب) استنتاج أن A هي صورة B بواسطة تشابه مباشر S مركزه النقطة Ω لاحتقائها $z_\Omega = \frac{-1}{3} + i$ من (E) نستنتج $\frac{z_A - z_\Omega}{z_B - z_\Omega} = 2e^{i\pi}$

ومنه: $z_A - z_\Omega = 2e^{i\pi}(z_B - z_\Omega)$ العبارة من الشكل $z_A - z_\Omega = ke^{i\theta}(z_B - z_\Omega)$ معناها $S(B) = A$ حيث S تشابه مباشر

نسبته $k=2$ وزاويته $\theta = \pi$ ومركزه النقطة الصامدة Ω لاحتقائها $z_\Omega = \frac{-1}{3} + i$. عبارته المركبة: $z' = -2z - 1 + 3i$

حالة خاصة: S هو تحاك مركزه النقطة Ω ونسبته $K = -2$

$$(4) \text{ نعين قيم العدد الطبيعي } n \text{ التي من أجلها يكون العدد المركب } \left(\frac{z_A}{z_C} \right)^n \text{ حقيقيا موجيا: } \frac{z_A}{z_C} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{4}}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ ومنه: } \frac{n\pi}{2} = 2k\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{N}$$

$$(5) \text{ نعين } (\Gamma) \text{ مجموعة النقط } M(z) \text{ من المستوى حيث: } z = z_C - k \frac{z_A}{z_C} \text{ , } k \text{ يمسخ } \mathcal{R}_+^*$$

$$z - z_C = k \left(e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)} \right) = k \left(e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)} \right) \text{ أي } z - z_C = k \left(-e^{i\frac{\pi}{2}} \right) \text{ أي } z - z_C = -k \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right) \text{ أي } z = z_C - k \frac{z_A}{z_C}$$

$$|z - z_C| = k \text{ و } \arg(z - z_C) = \frac{3\pi}{2}$$

ومنه: (Γ) هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة C موازي لحامل محور الترتيب شعاع توجيهه لاحقه $-i$. $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$. (باستثناء C)

0.75

(ب) تعيّن (Γ') مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى حيث: $\arg \left[\left(\frac{z_A - z}{z_B - z} \right)^2 \right] = \pi + 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، (1) يكافئ
 $2 \arg \left(\frac{z_A - z}{z_B - z} \right) = \pi + 2k\pi$ يكافئ $\arg \left(\frac{z_A - z}{z_B - z} \right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ومنه: (Γ') هي دائرة قطرها $[AB]$ ماعدا النقطتين A, B

التمرين الثالث:

0.75

1- تعيّن الأعداد الحقيقية a, b, c : $f(0) = -3$ وهذا يعني $c = -3$
 ولدينا $f'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x}$
 $f'(0) = 3$ يعني أن $b - c = 3$ ومنه $b = 0$ ، $f(\sqrt{3}) = 0$ يعني أن $f(\sqrt{3}) = (3a - 3)e^{-\sqrt{3}} = 0$ ومنه $a = 1$
 2- نضع $a = 1, b = 0, c = -3$ تصبح $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$

0.5

0.5

حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4t^2}{e^{2t}} \right]$ نضع $x = 2t$ لأنه بوضع $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2)e^{-x} = +\infty$ ، $4 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{e^t} \right)^2 = 0$

0.5

دراسة اتجاه تغير الدالة f : المشتقة: $f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$ إشارة $(-x^2 + 2x + 3)$ تنعدم عند العددين 3 و -1 ومنه f متناقصة على المجالين $[-1; 3]$ و $[3; +\infty[$ متزايدة على المجال $[-1; 3]$

0.5

0.5

0.5

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		$\frac{6}{e^3}$	0

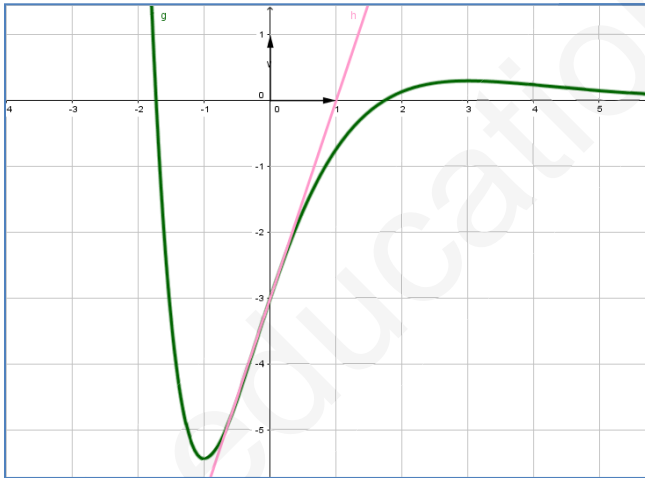
و شكل جدول تغيراتها:

3- معادلة المماس (T) هي $y = 3x - 3$

تعيّن إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

0.25

0.5+



$f(x) = 0$ يكافئ $x^2 - 3 = 0$ أي $x = \sqrt{3}$ أو

$x = -\sqrt{3}$ نقطتي التقاطع هما

$C(-\sqrt{3}; 0)$ و $B(\sqrt{3}; 0)$

4- رسم (T) و (C_f)

5- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$$

$$f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$$

$$f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x} \text{ و}$$

$$f''(x) = (-2x + 2)e^{-x} + (x^2 - 2x - 3)e^{-x}$$

$$f''(x) = (x^2 - 4x - 1)e^{-x} \text{ أي أن}$$

0.75

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = (x^2 - 3 - 2x^2 + 4x + 6 + x^2 - 4x - 1)e^{-x} = 2e^{-x} \text{ ومنه}$$

استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

0.75

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x} \text{ يكافئ } f(x) = -2f'(x) - f''(x) + 2e^{-x} \text{ ومنه الدالة الأصلية للدالة } f \text{ هي الدالة } F$$

$$\text{حيث } F(x) = -2f(x) - f'(x) - 2e^{-x} \text{ أي } F(x) = -2(x^2 - 3)e^{-x} - (-x^2 + 2x + 3)e^{-x} - 2e^{-x}$$

$$F(x) = (-2x^2 + 6)e^{-x} + (x^2 - 2x - 3)e^{-x} - 2e^{-x} \text{ ومنه } F(x) = (-x^2 - 2x + 1)e^{-x}$$

6- تعيّن قيم العدد الحقيقي m : المعادلة تكافئ $me^x = -(x^2 - 3)$ أي أن $-m = (x^2 - 3)e^{-x}$ يكافئ $f(x) = -m$

0.5

لما $-3 > -m > -2e$ أي أن $3 < m < 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما سالبان ومنه للمعادلة حلين سالبين

الأستاذ: تونسي ن يمتنى لكم التوفيق والنجاح

التمرين الأول 6 نقاط :

تكتب كل النتائج المطلوبة في شكل كسر غير قابل للاختزال .

كيس يحتوي على 5 كريات لا نفرق بينها عند اللمس 2 بيضاء و 3 سوداء .

الجزء الأول : نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتان من الكيس .

1- أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : « كرتان بيضاويتان » B : « كرتان من نفس اللون »

2- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة .

حدد قانون الاحتمال و أحسب أمله الرياضي .

الجزء الثاني : نسحب الآن كرتان من الكيس كمايلي :

نسحب كرة واحدة فقط في المرة الأولى و نسجل لونها ثم نعيدها في الكيس و نظيف إلى الكيس كرة من نفس اللون

الذي سجل ثم نسحب كرة واحدة فقط في المرة الثانية . هناك إذا 6 كريات في الكيس قبل السحب الثاني .

نعتبر الحوادث التالية : B_1 : « نحصل على كرة بيضاء في السحب الأول »

B_2 : « نحصل على كرة بيضاء في السحب الثاني »

N_1 : « نحصل على كرة سوداء في السحب الأول »

أحسب كل من : $P(B_1)$, $P(N_1)$, $P_{N_1}(B_2)$, $P_{B_1}(B_2)$ ثم استنتج $P(B_2)$

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(z + 2)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$

A , B و C ثلاث نقط من المستوي المركب $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لواقعهم على الترتيب : $z_A = -2$

$$z_C = \overline{z_B} \text{ و } z_B = \sqrt{3} + i$$

1- أكتب z_A و z_B و z_C على الشكل الآسي و استنتج أن النقاط A , B و C تنتمي إلى نفس

الدائرة يطلب تحديد عناصرها المميزة .

2- أ- بين أن : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{6}}$ ثم إستنتج طبيعة المثلث ABC .

ب- عين زاوية الدوران r الذي مركزه A و يحول C إلى B .

3- ما طبيعة المجموعة (E) ؟ مجموعة النقاط $M(z)$ من المستوي المركب التي تحقق :

$$2 = ke^{i\frac{\pi}{12}} \text{ لما } k \in \mathbb{R}_+$$

التمرين الثالث 8 نقاط :

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = e^{-x} + x - 1$

أدرس إتجاه تغير الدالة g على مجال تعريفها و أستنتج أنه مهما يكن x من $\mathbb{R}$ فإن : $g(x) \geq 0$

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (2 - x)(1 + e^x)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2- بين أن المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2 - x$ كمقارب مائل.

3- أثبت أنه مهما يكن x من $\mathbb{R}$ فإن : $f'(x) = -g(x) \times e^x$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

4- اثبت أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثيها .

5- أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند 2 .

6- أنشئ كل من (Δ) , (T) و (C_f) .

7- بين أن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + (3 - x)e^x$

دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

III. نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة على IN بـ : $U_n = g(n)$

أحسب المجموع التالي : $U_0 + U_1 + \dots + U_n = S_n$ لاحظ أن (U_n) هي مجموع متتاليتين

الأولى هندسية و الثانية حسابية .

التمرين 1: (05 نقاط)

- 1- حل في C المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 - 10z + 29 = 0$
- 2- A ، B و C نقط من المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر $(O; \vec{u}; \vec{v})$ لاحقتها على الترتيب: $z_A = 3$ ، $z_B = 5 - 2i$ و $z_C = 5 + 2i$
- أ- علم النقط A ، B و C
- ب- أكتب العدد $\frac{z_C - z_B}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري. استنتج أن ABC مثلث قائم و متساوي الساقين.
- ج- استنتج أن صورة B بدوران R مركزه A ، عين زاويته.
- 3- أ- عين وأنشئ (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $\frac{z-3}{z-5+2i}$ عدد حقيقي سالب تماماً.
- ب- عين وأنشئ (Δ') صورة (Δ) بالدوران R
- 4- لتكن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $\arg \left[\left(\frac{z_C - z}{z_B - z} \right)^2 \right] = \pi + 2k\pi$ مع k عدد صحيح
- أ- تحقق أن A تنتمي إلى (Γ)
- ب- عين وأنشئ (Γ)

التمرين 2: (04 نقاط)

- لدى لاعب زهرة نرد ذات ستة أوجه متجانسة مرقمة من 1 إلى 6 و ثلاثة صناديق U_1 ، U_2 و U_3 يحتوي كل منها k كرة، k عدد طبيعي أكبر أو يساوي 3.
- توجد 3 كرات سوداء في U_3 ، كرتين سوداوين في U_2 و كرة سوداء وحيدة في U_1 وكل الكرات المتبقية في الصناديق بيضاء. كل الكرات غير معروفة عند اللمس.
- تجري اللعبة بالطريقة التالية: يرمي اللاعب زهرة النرد.
- إذا كان الرقم المحصل عليه 1، يسحب عشوائياً كرة من U_1 ، يكتب لونها ثم يعيدها للصندوق U_1 .
 - إذا كان الرقم المحصل عليه مضاعف لـ 3، يسحب عشوائياً كرة من U_2 ، يكتب لونها ثم يعيدها للصندوق U_2 .
 - إذا كان الرقم المحصل عليه ليس 1 وليس مضاعفاً لـ 3، يسحب عشوائياً كرة من U_3 ، يكتب لونها ثم يعيدها لـ U_3
- نرمز بـ A ، B ، C و N للحوادث التالية:
- A : "ظهور الرقم 1 في زهرة النرد"
- B : "ظهور مضاعف للعدد 3 في زهرة النرد"
- C : "ظهور رقم ليس 1 وليس مضاعفاً للعدد 3 في زهرة النرد"
- N : "الكرة المسحوبة سوداء"
- نذكر أن: $p_A(B)$ هو احتمال الحصول على B علماً أن A محققة مع $p(A) \neq 0$.
- 1- يجري اللاعب لعبة.

أ- بين أن احتمال أن يحصل على كرة سوداء هو $\frac{7}{3k}$

ب- أحسب احتمال أن يظهر الرقم 1 في زهرة النرد علماً أن الكرة المسحوبة سوداء.

ج- عين k حتى يكون احتمال الحصول على كرة سوداء أكبر من $\frac{1}{2}$

د- عين k حتى يكون احتمال الحصول على كرة سوداء يساوي $\frac{1}{30}$

- 2- في هذا السؤال، k يساوي القيمة المحصل عليها لما يكون احتمال الحصول على كرة سوداء يساوي $\frac{1}{30}$. يقوم اللاعب بـ 20 لعبة، مستقلة مثلي مثلي. أحسب، على شكل مضبوط ثم قيمة مقربة بتقريب 10^{-3} ، احتمال أن يحصل على الأقل مرة على كرة سوداء

التمرين 3: (04 نقاط)

1. أ - بين أن النقط $A(2;0;1)$ ، $B(3;1;2)$ ، $C(4;1;-2)$ ، $D(5;-6;1)$ نقط من الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
 ب - عين معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) .
 ج - بين أن المثلث ABC مثلث قائم و أحسب مساحته.
 2. (P) مستوي معادلته : $4x - 5y + z - 9 = 0$
 أ - أحسب المسافة بين D و المستوي (P)
 ب - أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$
 3. أ - عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار بالنقطة D و العمودي على المستوي (P)
 ب - عين إحداثيات H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P)
 ج - أستنتج المسافة بين A و المستقيم (Δ)
 4. (S) سطح كرة مركزه D و يقطع (P) حسب دائرة مركزها H و تشمل A .
 عين نصف قطر (S) ثم أكتب معادلة لسطح الكرة (S)

التمرين 4: (07 نقاط)

- الجزء I : نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x + e^{-x}$
 نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$
 1. أ - أحسب نهاية f عند $+\infty$
 ب - بين أن (C_f) له مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلته.
 ج - أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)
 2. أدرس اتجاه تغيرات f على $[0; +\infty[$ وانجز جدول تغيراتها
 3. أنشئ (Δ) و (C_f)
 الجزء II : (u_n) متتالية حدودها موجبة، معرفة بـ: $u_1 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1} = f(u_n)$
 1. أ - أدرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x - \ln(1+x)$
 ب - استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x ، $\ln(x+1) \leq x$
 ج - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\ln(n+1) \leq \ln n + \frac{1}{n}$
 2. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f(\ln n) = \ln n + \frac{1}{n}$
 3. أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\ln n \leq u_n$
 ب - استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$
 4. فيما تبقى من التمرين ، نتقبل أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ ، $u_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}$
 أ - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $k \geq 2$ ، $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$
 ب - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$: $u_n \leq 1 + \ln(n-1)$
 ج - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$: $\ln n \leq u_n \leq 1 + \ln(n-1)$
 د - برهن أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 2}$ المعرفة بـ $v_n = \frac{u_n}{\ln n}$ متقاربة وتقارب 1

انتهى الموضوع

-1 حلل المعادلة : $z^2+10z+29=0$: (05 نقاط) 0,50

$$\Delta=100-116=-16=(4i)^2 \quad z_1=5+2i \quad z_2=5-2i$$

مجموعة الحلول: $S = \{5 + 2i; 5 - 2i\}$

-2 0,25 **أ - تعليم النقط A ، B و C :**

$$z_C=5+2i \quad \text{و} \quad z_B=5-2i \quad , \quad z_A=3$$

ب - كتابة العدد $\frac{z_C-z_B}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري : 0,50

$$\frac{z_C-z_B}{z_B-z_A} = \frac{5+2i-5-2i}{5-2i-3} = \frac{4i}{2-2i} = \frac{2i}{1-i} = \frac{2i(1+i)}{2} = -1+i$$

- استنتاج أن مثلث ABC مثلث قائم و متساوي الساقين : 0,50

$$\left\{ \begin{array}{l} AC = AB \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{z_C-z_B+z_B-z_A}{z_B-z_A} = i \Leftrightarrow \frac{z_C-z_B}{z_B-z_A} + 1 = i \Leftrightarrow \frac{z_C-z_B}{z_B-z_A} = -1+i$$

لدينا: $\frac{z_C-z_B}{z_B-z_A} = -1+i$ ومنه ABC مثلث قائم و متساوي الساقين في A .

ج - استنتاج أن صورة C بدوران R مركزه A ، عين زاويته : 0,50

$$R(B)=C \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} AC = AB \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \text{صورة B بدوران R مركزه A وزاويته } \frac{\pi}{2} \text{ أي } R(B)=C$$

-3 0,25+0,50 **أ - تعيين وأنشاء (Δ) :**

$$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \frac{z-3}{z-5+2i} = k \Leftrightarrow \text{مع } k \text{ عدد حقيقي سالب تماماً}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{BM} \\ k < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_M - z_A = k(z_M - z_B) \\ k < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{z_M-z_A}{z_M-z_B} = k \\ k < 0 \end{array} \right\}$$

$\Leftrightarrow$ الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BM}$ لهما نفس المنحى واتجاهين متعاكسين

(Δ) هي القطعة $]AB[$ أي $]AB[\cup \{A; B\}$ (القطعة $[AB]$)

ب - تعيين وأنشاء (Δ') : 0,25+0,50

$$R(B)=C \text{ و } R(A)=A \Leftrightarrow (\Delta') =]AC[\Leftrightarrow R(\Delta)=(\Delta')$$

-4 0,50 **أ - تحقق أن A تنتمي إلى (Γ) :**

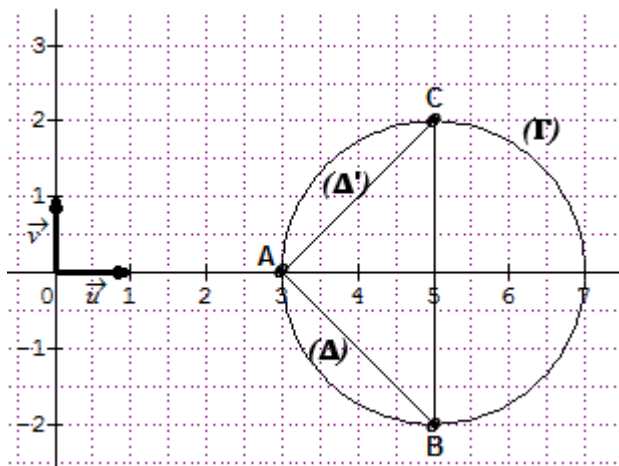
$$A \in (\Gamma) \Leftrightarrow \arg \left[\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} \right)^2 \right] = \arg \left[\left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^2 \right] = \arg(e^{i\pi}) = \pi + 2k\pi$$

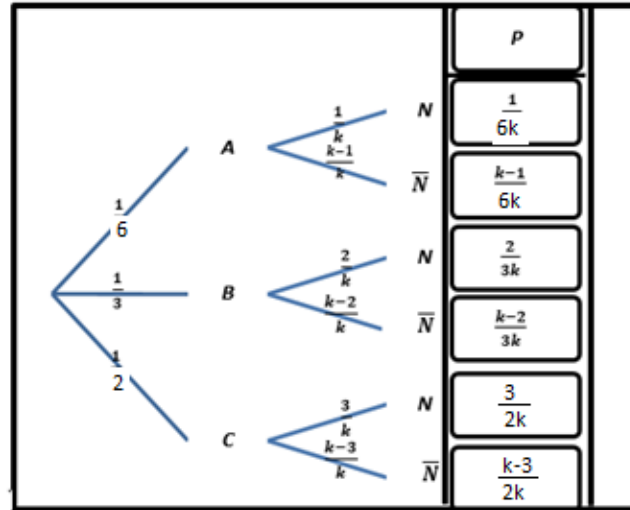
ب - تعيين وأنشاء (Γ) : 0,25+0,50

$$2\arg \left(\frac{z_C-z_M}{z_B-z_M} \right) = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow \arg \left[\left(\frac{z_C-z}{z_B-z} \right)^2 \right] = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow M(z) \in (\Gamma)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MC} \\ M \neq B \text{ و } M \neq C \end{array} \right\} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \arg \left(\frac{z_C-z_M}{z_B-z_M} \right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow$$

(Γ) : الدائر التي قطرها $[CB]$ ما عدا B و ما عدا C





1- أ - تبيان أن احتمال أن يحصل على كرة سوداء هو $p(N) = \frac{1}{6k} + \frac{2}{3k} + \frac{3}{2k} = \frac{14}{6k} = \frac{7}{3k} : \frac{7}{3k}$ 0,50

ب - حساب احتمال أن يظهر الرقم 1 في زهرة النرد علما أن الكرة المسحوبة سوداء: $p_N(A) = \frac{p(A \cap N)}{p(N)} = \frac{(\frac{1}{6k})}{(\frac{7}{3k})} = \frac{1}{14}$ 0,50

ج - تعيين k حتى يكون احتمال الحصول على كرة سوداء أكبر من $\frac{1}{2}$: 0,50

$$k = 4 \text{ أو } k = 3 \Leftrightarrow 3 \leq k \leq \frac{14}{3} \Leftrightarrow \frac{7}{3k} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow p(N) \geq \frac{1}{2}$$

د - تعيين k حتى يكون احتمال الحصول على كرة سوداء يساوي $\frac{1}{30}$: 0,50

$$k = 70 \Leftrightarrow \frac{7}{3k} = \frac{1}{30} \Leftrightarrow p(N) = \frac{1}{30}$$

2- في هذا السؤال، $k = 70$ يقوم اللاعب بـ 20 لعبة، مستقلة مثنى مثنى. حساب، على شكل مضبوط ثم قيمة مقربة بتقريب 10^{-3} ، احتمال أن يحصل على الأقل مرة على كرة سوداء: 01

ليكن X عدد المرات التي يحصل فيها اللاعب على كرة سوداء خلال 20 لعبة.

X يتبع قانون ثنائي الحد ذو الوسيطين $n = 20$ و $p = p(N) = \frac{1}{30}$

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(1 - \frac{1}{30}\right)^{20} \cong 0,492$$

التمرين 3: (04 نقاط)

1. أ - تبيان أن النقاط A، B، C ليست على استقامة واحدة: 0,50

$$\vec{AC}(2; 1; -3), \vec{AB}(1; 1; 1)$$

لدينا: $\vec{AB} \neq \frac{1}{2} \vec{AC} \Leftrightarrow \vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطيا $\Leftrightarrow A, B, C$ ليست على استقامة واحدة

ب - معادلة ديكارتية للمستوى (ABC): 0,50

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{AB} \\ \vec{n} \perp \vec{AC} \end{cases} \Leftrightarrow (a; b; c) \neq (0; 0; 0) \text{ مع } (ABC) \text{ مع } \vec{n}(a; b; c) \text{ شعاع ناظمي للمستوي}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a + b - 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

بالطرح نجد: $-a + 4c = 0 \Leftrightarrow a = 4c$ وبالتعويض نجد: $5c + b = 0 \Leftrightarrow b = -5c$

بوضع $c = 1$ نجد: $a = 4$ و $b = -5$

ومنه $\vec{n}(4; -5; 1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) $\Leftrightarrow (ABC): 4x - 5y + z + d = 0$

لدينا: $d = -9 \Leftrightarrow 4(2) - 5(0) + (1) + d = 0 \Leftrightarrow A \in (ABC)$

وبالتالي (ABC): $4x - 5y + z - 9 = 0$

ج - تبيان أن المثلث ABC مثلث قائم وحساب مساحته: 0,50+0,50

لدينا: $BC = \sqrt{17}$, $AC = \sqrt{14}$, $AB = \sqrt{3}$

$ABC \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = 3 + 14 = 17 = BC^2$ (حسب مبرهنة فيثاغورس)

$$S_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{42}}{2} u. a.$$

2. $(P)=(ABC): 4x - 5y + z - 9 = 0$

أ - حساب المسافة بين D والمستوي (P) : 0,25.....

$$d(D; (P)) = \frac{|4(5) - 5(-6) + (1) - 9|}{\sqrt{4^2 + (-5)^2 + 1^2}} = \frac{42}{\sqrt{42}} = \sqrt{42}$$

ب - حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$: 0,25.....

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times S_{ABC} \times d(D; (P)) = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{42}}{2} \times \sqrt{42} = 7 u.v.$$

3. أ - تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) : 0,50.....

$$(P) \perp (\Delta) \Leftrightarrow \vec{n}(4; -5; 1) \cdot \vec{d}(4; -5; 1) = 0 \quad \text{هو شعاع توجيه لـ } (\Delta)$$

$$(\Delta): \begin{cases} x = 4t + 5 \\ y = -5t - 6 \\ z = t + 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

ب - إحداثيات H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P) : 0,50.....

H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P) هي نقطة تقاطع (P) و (Δ) ، إحداثياتها هي حلول الجملة:

$$\begin{cases} x = 4t + 5 \\ y = -5t - 6 \\ z = t + 1 \\ 4x - 5y + z - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\text{بالتعويض نجد: } 4(4t+5) - 5(-5t-6) + (t+1) - 9 = 0 \Leftrightarrow 42t = -42 \Leftrightarrow t = -1 \text{ ومنه } H(1; -1; 0)$$

ج - استنتاج المسافة بين A والمستقيم (Δ) : 0,25.....

$$d(A; (\Delta)) = AH = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

4. (S) سطح كرة مركزه D ويقطع (P) حسب دائرة مركزها H وتشمل A .

تعيين نصف قطر (S) و معادلة لسطح الكرة (S) : 0,25+0,25.....

$$\text{نصف قطر } (S) \text{ هو } DA = 3\sqrt{5} \text{ و } (S): (x-5)^2 + (y+6)^2 + (z-1)^2 = 45$$

التمرين 5: (07 نقاط)

الجزء I : نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x + e^{-x}$

1. أ - حساب نهاية f عند $+\infty$: 0,25.....

$$\lim_{+\infty} f = +\infty$$

أ - تبيين أن (C_f) له مستقيم مقارب مائل (Δ) : 0,50.....

$$(C_f) \Leftrightarrow \lim_{+\infty} [f(x) - x] = \lim_{+\infty} e^{-x} = 0 \quad \text{له مستقيم مقارب مائل } (\Delta) \text{ معادلة له } y = x$$

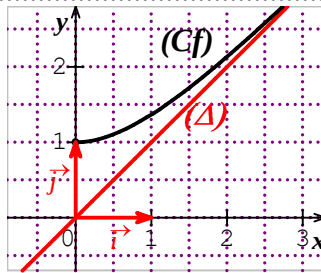
أ - وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) : 0,25.....

$$\text{لدينا: } (C_f) \text{ يقع فوق } (\Delta) \Leftrightarrow f(x) - x = e^{-x} > 0$$

2. اتجاه تغير f على $[0; +\infty[$: 0,50.....

$$\text{لدينا: } f \text{ متزايدة تماماً على } [0; +\infty[\Leftrightarrow \forall x \in [0; +\infty[; f'(x) = 1 - e^{-x} \geq 0$$

جدول تغيرات f : 0,25..... $f(0)=1$



x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	1	$+\infty$

3. إنشاء (Δ) و (C_f) : 0,50+0,50.....

الجزء II : (u_n) متتالية حدودها موجبة، معرفة بـ: $u_1 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

1. g دالة معرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x - \ln(1+x)$

أ - اتجاه تغير الدالة g : 0,50.....

$$\text{لدينا: } g \text{ متزايدة تماماً على } [0; +\infty[\Leftrightarrow \forall x \in [0; +\infty[; g'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} \geq 0$$

ب - استنتاج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x ، $\ln(x+1) < x$: 0,25.....

$$\text{لدينا: } \ln(x+1) < x \Leftrightarrow x - \ln(x+1) > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(0) \Leftrightarrow x > 0$$

ج - استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\ln(n+1) < \ln n + \frac{1}{n}$: 0,50.....

$$\text{لدينا: } \forall n \in \mathbb{N}^*; \ln(n+1) \leq \ln n + \frac{1}{n} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

2. البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f(\ln n) = \ln n + \frac{1}{n}$ 0,50

$$f(\ln n) = \ln n + e^{-\ln n} = \ln n + \frac{1}{e^{\ln n}} = \ln n + \frac{1}{n}$$

3. أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\ln n \leq u_n$ 0,50

- نتحقق من أنها صحيحة من أجل $n = 0$
لدينا: $u_1 = 0$ و $\ln 1 = 0$ (صحيحة)

- نفرض أنها صحيحة من أجل n أي $\ln n \leq u_n$

- نبرهن أنها صحيحة من أجل $n+1$ أي $\ln(n+1) \leq u_{n+1}$

$$\text{لدينا: } \ln(n+1) \leq \ln n + \frac{1}{n} \iff \begin{cases} \ln(n+1) \leq f(\ln n) \\ f(\ln n) \leq f(u_n) \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(n+1) \leq \ln n + \frac{1}{n} \\ \ln n \leq u_n \end{cases}$$

$$\iff \ln(n+1) \leq f(u_n) \iff \ln(n+1) \leq u_{n+1} \text{ (صحيحة)}$$

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\ln n \leq u_n$

ب- استنتاج نهاية المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$: 0,25

$$\text{لدينا: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \iff \begin{cases} \forall n > 0; u_n \geq \ln n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n = +\infty \end{cases}$$

4. فيما تبقى من التمرين ، نتقبل أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ ، $u_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}$

أ- البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي $k \geq 2$ ، $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$ 0,50

$$\text{لدينا: } \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{k-1} dx \iff \forall k \geq 2; \frac{1}{k} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k-1} \iff \forall k \geq 2; k-1 \leq x \leq k$$

$$\iff \forall k \geq 2; \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx \text{ ومنه } \frac{1}{k} (k - (k-1)) \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k-1} (k - (k-1)) \iff$$

ب- استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$: $u_n \leq 1 + \ln(n-1)$ 0,50

$$\text{لدينا: } \begin{cases} \frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{1}{x} dx \\ \frac{1}{3} \leq \int_2^3 \frac{1}{x} dx \\ \frac{1}{4} \leq \int_3^4 \frac{1}{x} dx \\ \dots \\ \frac{1}{n-1} \leq \int_{n-2}^{n-1} \frac{1}{x} dx \end{cases}$$

$$\text{بالجمع نجد: } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} \leq 1 + \int_1^{n-1} \frac{1}{x} dx \iff 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} \leq 1 + \ln(n-1) \iff$$

$$\forall n \geq 2; u_n \leq 1 + \ln(n-1) \iff \forall n \geq 2; \begin{cases} u_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} \leq 1 + \ln(n-1) \end{cases} \text{ لدينا:}$$

ج- البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$: $\ln n \leq u_n \leq 1 + \ln(n-1)$ 0,25

من السؤالين (3) و (4) نستنتج أنه : من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$: $\ln n \leq u_n \leq 1 + \ln(n-1)$

د- البرهان أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 2}$ المعرفة بـ $v_n = \frac{u_n}{\ln n}$ متقاربة وتقترب 1 : 0,50

$$\text{لدينا: } \forall n \geq 2; 1 \leq \frac{u_n}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} + \frac{\ln(n-1)}{\ln n} \iff \forall n \geq 2; \ln n \leq u_n \leq 1 + \ln(n-1)$$

$$\iff \forall n \geq 2; 1 \leq v_n \leq \frac{1}{\ln n} + \frac{\ln(n-1)}{\ln n} \iff \forall n \geq 2; 1 \leq v_n \leq \frac{1}{\ln n} + 1 + \frac{\ln(1-\frac{1}{n})}{\ln n}$$

$$\iff \forall n \geq 2; 1 \leq v_n \leq \frac{1}{\ln n} + 1 + \frac{\ln(1-\frac{1}{n})}{\ln n}$$

$$\text{لدينا: } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1 \iff \begin{cases} \forall n \geq 2; 1 \leq v_n \leq \frac{1}{\ln n} + 1 + \frac{\ln(1-\frac{1}{n})}{\ln n} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln n} + 1 + \frac{\ln(1-\frac{1}{n})}{\ln n} \right) = 1 \end{cases}$$

$$\iff \text{المتتالية } (v_n)_{n \geq 2} \text{ المعرفة بـ } v_n = \frac{u_n}{\ln n} \text{ متقاربة وتقترب 1}$$