مجلة المتفوق في الرياضيات

بـــــكالــوريـا 2025

③ الدوال الأصلية والحساب التكاملي + المتتاليات

عدد التمارين 296

للشعب: علوم تجريبية + تقني رياضي + رياضيات

تجميع، كتابة واعداد الأستاذ: ياحي رشيد

✍ **المحتوى:** مجلة المتفوق الرياضيات في حلتها الجديدة تحوي مايلي

- ♣ ملخص شامل حول وحدة الدوال الاصلية والتكاملات (التكامل بالتجزئة وحساب مساحة حيز مستو)
- ♣ تمارين شامة ومتنوعة حول التكاملات
- ♣ ملخص شامل حول وحدة المتتاليات
- ♣ أسئلة صح أو خطأ + اسئلة اختيار من متعدد
- ♣ تمارين شاملة(بكالوريات جزائرية واجنبية ومواضيع مقترحة)

للتواصل معنا

لمن يريد التواصل مع الأستاذ ياحي رشيد

- لتلقي نصائح حول المادة،
- لرفع مستواه في المادة
- للانظمام لمجموعة تيليغرام خاصة بكل مستوى (1 + 2 + 3 ثانوي)
- ، لعمل حصص دعم فردي(خاص) أو جماعي عن بعدأو حضوري تشرف بكم بالتواصل معنا عبر :

✆ رقم الهاتف 0656836024

Facebook: Rachidyahiyahi

مجموعة تيليغرام الخاصة بتلاميذ البكالوريا : https://t.me/+SKl_1wBJn584ODhk

قناتنا على اليوتيوب : رياضيات التعليم الثانوي-الأستاذ ياحي رشيد

https://www.youtube.com/@user-mq7hv5vl1n/playlists

فايسبوك الصفحة : دروس دعم في رياضيات التعليم الثانوي - الأستاذ ياحي رشيد

https://www.facebook.com/profile.php?id=100075474326596

مجموعة الأستاذ ياحي رشيد لدروس الدعم والتقوية (رياضيات): :

https://www.facebook.com/groups/389083745788555/member-requests

1) ملخص حول الدوال الأصلية والحساب التكاملي

1) الدالة الأصلية لدالة على مجال

F دالة أصلية للدالة f على المجال I إذا تحقق $F'(x)=f(x)$ من اجل كل $x\in I$

2) قواعد لحساب الدوال الأصلية

قاعدة 01

الدالة f	الدوال الأصلية F
$x\mapsto a$	$x\mapsto ax+c$
$x\mapsto x^n$	$x\mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$

قاعدة 02

الدالة f	الدوال الأصلية F
$x\mapsto \frac{1}{x}\ ,x>0$	$x\mapsto \ln(x)+c$
$x\mapsto \frac{g(x)'}{g(x)}$	$x\mapsto \ln\lvert g(x)\rvert+c$
$x\mapsto \frac{1}{x^n}\ ,x>0\ ,n\geq 2$	$x\mapsto \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}+c$
$x\mapsto \frac{g'(x)}{(g(x))^n}\ ,n\geq 2$	$x\mapsto \frac{-1}{(n-1)(g(x))^{n-1}}+c$

قاعدة 03

الدالة f	الدوال الأصلية F
$x\mapsto g'(x)\times g(x)^n$	$x\mapsto \frac{1}{n+1}g(x)^{n+1}+c$

قاعدة 04

الدالة f	الدوال الأصلية F
$x\mapsto e^x$	$x\mapsto e^x+c$
$x\mapsto e^{ax+b}, a\neq 0$	$x\mapsto \frac{1}{a}e^{ax+b}+c$
$x\mapsto g'(x)e^{g(x)}$	$x\mapsto e^{g(x)}+c$

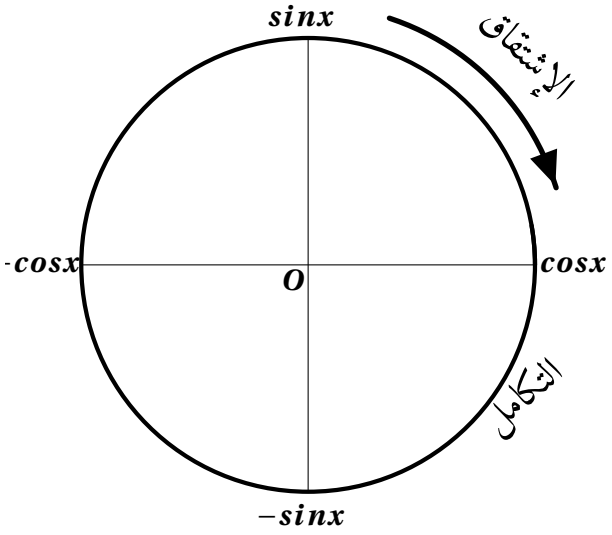
قاعدة 05

الدالة f	الدوال الأصلية F
$x \mapsto \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}$	$x \mapsto 2\sqrt{g(x)}+c$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}+c$

قاعدة 06

الدالة f	الدوال الأصلية F
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x)+c$
$x \mapsto \cos(ax+b)$	$x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$
$x \mapsto g'(x)\cos(g(x))$	$x \mapsto \cos(g(x))+c$

طريقة لحفظ الدوال الأصلية للدوال $x \mapsto cosx$ ؛ $x \mapsto sinx$



3) التكامل:

تكامل دالة f من a إلى b هو العدد الحقيقي

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

حيث F إحدى الدوال الأصلية لـ f

4) القيمة التوسطة لدالة f على مجال $[a,b]$

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

5) الدالة التي تنعدم عند قيمة x_0:

توجد دالة حيدة للدالة f والتي تنعدم عند القيمة x_0 هي: $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$

6) خواص التكامل :

1) $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

2) $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

4) $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ (علاقة شال)

5) إذا كان $f(x) \geq 0$ على مجال $[a;b]$ فإن: $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

7) التفسير الهندسي للتكامل وحساب مساحة حيز مستو :

1) إذا كان $f(x) \geq 0$ على مجال $[a;b]$ فإن:

$S = \int_a^b f(x)dx \geq 0$ تمثل مساحة الحيز المستوي المحدد بالمستقيمات التي معادلاتها $x = a$; $x = b$; $y = 0$ (محور الفواصل) والمنحنى (C_f).

2) ليكن (Δ) مستقيم معادلته $y = cx + d$ إذا كان $f(x) - (cx+d) \geq 0$ على مجال $[a;b]$ فإن:

$S = \int_a^b f(x) - (cx+d)dx \geq 0$ تمثل مساحة الحيز المستوي المحدد بالمستقيمات التي معادلاتها $x = a$; $x = b$; $y = cx + d$ (المستقيم (Δ)) والمنحنى (C_f)

2) إذا كان $f(x) - g(x) \geq 0$ على مجال $[a;b]$ فإن:

$S = \int_a^b f(x) - g(x)dx \geq 0$ تمثل مساحة الحيز المستوي المحدد المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g)

8) التكامل بالتجزئة :

★ ليكن a و b عددان حقيقيان حيث $a < b$. لتكن u و v دالتان قابلتان للإشتقاق على المجال $[a;b]$ حيث u' و v' مستمرتان ومنه

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

تمارين شاملة حول الدوال الاصلية والحساب التكاملي

التمرين 01 تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;+\infty[$ فإن $F:x\mapsto (x+1)\ln(x+1)-x$ دالة أصلية للدالة $f:x\mapsto \ln(x+1)$

التمرين 02 عين العددين الحقيقين a و b حتى تكون الدالة $H:x\mapsto (ax+b)e^x$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto (3x+1)e^x$

التمرين 03 لكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ بـ $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$

1) عين العددين الحقيقين a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ يكون $f(x)=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+2}$

1) استنتج دالة أصلية للدالة f

التمرين 04 اوجد الدوال الأصلية للدالة f المعرفة على I في الحالات التالية:

1) $I=\mathbb{R};\ f(x)=5$
2) $I=\mathbb{R};\ f(x)=\ln(2)$
3) $I=\mathbb{R};\ f(x)=e^2$
4) $I=\mathbb{R};\ f(x)=x^2$
5) $I=\mathbb{R};\ f(x)=2x^2+7x$
6) $I=\mathbb{R};\ f(x)=\dfrac{2}{5}x^3-x+1$

التمرين 05 اوجد الدوال الأصلية للدوال التالية، المعرفة على I

1) $I=\mathbb{R}^*;\ f(x)=\dfrac{3}{x}$
2) $I=]2;+\infty[;\ f(x)=\dfrac{1}{x-2}$
3) $I=]4;+\infty[;\ f(x)=\dfrac{3}{x-4}$
4) $I=]-\dfrac{2}{3};+\infty[;\ f(x)=\dfrac{2}{2+3x}$
5) $I=]-\infty;3[;\ f(x)=\dfrac{5}{2x-6}$
6) $I=]0;+\infty[;\ f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$
7) $I=]0;+\infty[;\ f(x)=\dfrac{1+\ln(x)}{1+x\ln(x)}$
8) $I=]0;+\infty[;\ f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$
9) $I=]0;+\infty[;\ f(x)=\dfrac{x^2}{x^3+1}$
10) $I=]0;+\infty[;\ f(x)=\dfrac{1}{x^2}$
11) $I=]0;+\infty[;\ f(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$
12) $I=]0;+\infty[;\ f(x)=\dfrac{2}{x^4}$
13) $I=]2;+\infty[;\ f(x)=\dfrac{5}{(x-2)^2}$
14) $I=]4;+\infty[;\ f(x)=\dfrac{3}{(-2x+3)^5}$
15) $I=]0;+\infty[;\ f(x)=\dfrac{2x}{(x^2+1)^4}$
16) $I=]0;+\infty[;\ f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$
17) $I=]2;+\infty[;\ f(x)=\dfrac{1}{x\ln(x)}$
18) $I=]3;+\infty[;\ f(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln(x))}$

التمرين 06

اوجد الدوال الأصلية للدوال التالية، المعرفة على I

1) $I=\mathbb{R};\ f(x)=2x(x^2+3)^5$

2) $I=]0;+\infty[;\ f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$

3) $I=]1;+\infty[;\ f(x)=\dfrac{\ln(x-1)}{x-1}$

4) $I=]1;+\infty[;\ f(x)=\dfrac{\ln(x-1)+2}{x-1}$

5) $I=]0;+\infty[;\ f(x)=\dfrac{\ln(x)^2}{x}$

6) $I=]0;+\infty[;\ f(x)=\dfrac{2}{x}(1+\ln(x))$

التمرين 07

اوجد الدوال الأصلية للدوال التالية، المعرفة على I

1) $I=\mathbb{R};\ f(x)=e^x-\ln(2)$

2) $I=\mathbb{R};\ f(x)=e^{3x+2}$

3) $I=\mathbb{R};\ f(x)=x^2e^{x^3+2}$

4) $I=]3;+\infty[;\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$

5) $I=]-\infty;+\infty[;\ f(x)=\cos(3x+2)$

التمرين 08

احسب التكاملات التالية

1) $\displaystyle\int_0^1 x^2dx$.

2) $\displaystyle\int_1^2 e^{2x+1}dx$.

3) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x}{1+x^2}dx$

4) $\displaystyle\int_2^e \frac{1}{x\ln(x)}dx$

4) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}dx$

التمرين 09

باستعمال التكامل بالتجزئة احسب مايلي

1) $\displaystyle\int_{-1}^0 xe^xdx$.

2) $\displaystyle\int_{-1}^0 (x^2+1)e^xdx$.

3) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx$.

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (x-1)e^{2x}dx$

5) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x+1}dx$

6) $\displaystyle\int_1^2 \ln(x)dx$

7) $\displaystyle\int_1^2 x\ln(x)dx$

8) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2}dx$

التمرين 10

جد دالة أصلية للدالة f والتي تنعدم عند x_0 في الحالات التالية

1) $f(x)=x^2$. $x_0=1$

2) $f(x)=\ln(x)$. $x_0=2$

3) $f(x)=2xe^x$. $x_0=1$

التمرين 11

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x+1-(x^2+1)e^x$.
(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2\,cm$)

1/ تحقق أن الدالة $H:x\longmapsto(x-1)e^x$ هي دالة أصلية للدالة $h:x\longmapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$ ثم أثبت أن: $\int_{-1}^{0}xe^x\,dx=\frac{2}{e}-1$.

2/ باستعمال التكامل بالتجزئة، أثبت أن: $\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^x\,dx=3\left(1-\frac{2}{e}\right)$.

3/ احسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=-1$، $x=0$ و $y=x+1$.

التمرين 12

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $f(x)=x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x$.
(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $1\,cm$)

1/ أثبت أن: $\int_{1}^{2}\frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}(\ln 2)^2$.

2/ تحقق أن الدالة $H:x\longmapsto 2\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $h:x\longmapsto\frac{2}{x}-1$ على المجال $]0,+\infty[$.

3/ باستعمال التكامل بالتجزئة، أثبت أن: $\int_{1}^{2}\left(\frac{2}{x}-1\right)\ln(x)\,dx=(1-\ln 2)^2$.

4/ احسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=1$، $x=2$ و $y=x$.

التمرين 13

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x-2+e^{2x}-4e^x$.
(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $1\,cm$)

1/ أثبت أن: $\int_{1}^{\ln 4}(e^{2x}-4e^x)\,dx=-\frac{9}{2}$.

2/ احسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$، $x=\ln 4$ و $y=2x-2$.

التمرين 14

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $f(x)=3-3x+2(x+1)\ln x$.
(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2\,cm$)

1/ باستعمال التكامل بالتجزئة، أثبت أن: $\int_{1}^{2}(x+1)\ln(x)\,dx=4\ln 2-\frac{7}{4}$.

2/ احسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f)، محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=2$.

التمرين 15

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{x}{e^x-2x}$.
(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $1\,cm$)

1/ باستعمال التكامل بالتجزئة، أثبت أن: $\int_0^1 xe^{-x}dx = 1-\frac{2}{e}$.

2/ أثبت أنه من أجل كل x من المجال $[0,+\infty[$: $xe^{-x} \leqslant \frac{x}{e^x-2x} \leqslant \frac{1}{e-1}$.

3/ لتكن A مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f)، محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$.

- أثبت أن: $1-\frac{2}{e} \leqslant A \leqslant \frac{1}{e-1}$.

التمرين 16

لتكن f الدالة المعرفة على $]0,e[\cup]e,+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)}$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2\,cm$)

1/ أثبت أن: $\int_1^{\sqrt{e}} f(x)\,dx = \ln 2$.

2/ أ/ أثبت أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2.2<\alpha<2.3$.

ب/ ادرس إشارة $f(x)-x$ حسب قيم x من $]0,e[\cup]e,+\infty[$.

3/ احسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=1$، $x=\sqrt{e}$ و $y=x$.

التمرين 17

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $f(x)=3-\frac{1}{x^2}-\frac{2\ln x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $1\,cm$)

1/ أثبت أن: $\int_1^e \frac{2\ln x}{x}dx = 1$.

2/ احسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f)، محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$.

التمرين 18

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $f(x)=(1+\ln x)^2+\frac{1}{x^2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $1\,cm$)

1/ تحقق أن الدالة $H: x \longmapsto x\ln x$ هي دالة أصلية للدالة $h: x \longmapsto 1+\ln x$ على المجال $]0,+\infty[$ ثم أثبت أن:

$\int_1^2 (1+\ln x)\,dx = e$.

2/ باستعمال التكامل بالتجزئة، أثبت أن: $\int_1^2 (1+\ln x)^2\,dx = 2e-1$.

3/ احسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f)، محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=2$.

التمرين 19

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{-x}\ln(e^x+1)$.

1/ تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)+f'(x)=1-\frac{e^x}{e^x+1}$.

2/ استنتج الدالة الأصلية F للدالة f على على $\mathbb{R}$ والتي تحقق $F(0)=-2\ln 2$.

3/ نعتبر التكامل I حيث: $I=\int_0^1 f(x)\,dx$.

أ/ أثبت أن: $I>0$.

ب/ احسب التكامل I ثم تحقق حسابيا من نتيجة السؤال السابق.

التمرين 20

لتكن f و g الدالتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{xe^x}{e^x+1}$ و $g(x)=-\ln(e^x+1)$.

(C_f) و (C_g) تمثيليهما البيانيين على الترتيب في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1/ تحقق أن الدالة $H:x\longmapsto x\ln(e^x+1)$ هي دالة أصلية للدالة $h:x\longmapsto f(x)-g(x)$ على المجال $[0,+\infty[$.

2/ أثبت أنه من أجل كل x من المجال $[0,+\infty[$: $f(x)-g(x)>0$.

3/ λ عدد حقيقي موجب تماما. احسب $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f)، (C_g) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\lambda$.

4/ عين قيمة العدد الحقيقي الموجب تماما λ حتى يكون $A(\lambda)=4\ln(e+1)^{\lambda}$.

التمرين 21

1) لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x+3-2xe^{2x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. وحدة الطول $2cm$.

أ) x عدد حقيقي , باستعمال التكامل بالتجزئة جد: $\int_0^x 2te^{2t}dt$.

ب) λ عدد حقيقي أصغر تماما من 0, أحسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و بالمستقيمات ذات المعادلات: $x=0;x=\lambda;y=x+3$, ثم جد $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}A(\lambda)$.

التمرين 22

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x)=2x-1-(x-1)e^{-x+2}$, (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=2cm;\|\vec{j}\|=2cm$.

1) عين باستعمال التكامل بالتجزئة الدالة الاصلية H للدالة $h:x\mapsto(x-1)e^{-x+2}$ على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم عند 0.

2) ليكن λ عددا حقيقيا حيث $\lambda>1$, $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيم $(\Delta):y=2x-1$ و المستقيمات التي معادلتها: $x=1;x=\lambda$.

- احسب المساحة $A(\lambda)$ بدلالة λ ثم أحسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$.

التمرين 23 بكالوريا 2024 (علمي)

I. الجدول المقابل يمثل تغيرات الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=xe^{-x+1}-2$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$	$g(1)$	-2

- احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$.

II. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=-2x+3-xe^{-x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1/ احسب $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)$.

2/ أ/ أثبت أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-2x+3$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

3/ أ/ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)-e^{-x+1}$.

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4/ أثبت أن (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي المستقيم (Δ) ثم اكتب معادلة للمماس (T).

5/ أنشئ (Δ)، (T) و (C_f).

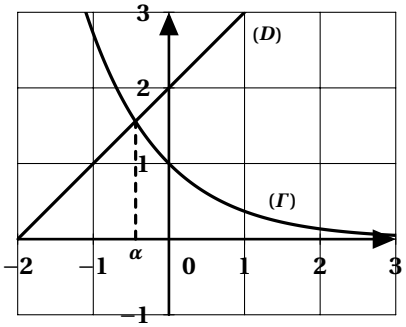
6/ عين بيانيا، قيم الوسيط الحقيقي m، حتى تقبل المعادلة $f(x)=-2x+m$ حلين مختلفين.

7/ أ/ باستعمال التكامل بالتجزئة، أثبت أن $\int_0^1 xe^{-x+1}dx=e-2$.

ب/ احسب، بالسنتيمتر المربع، S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f)، (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$.

التمرين 24 بكالوريا 2024 (تقني رياضي)

I. المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. في الشكل المقابل، (D) المستقيم ذو المعادلة $y=x+2$، (Γ) التمثيل البياني للدالة $x\longmapsto e^{-x}$ و α فاصلة نقطة تقاطع (D) و (Γ).



1/ بقراءة بيانية، حدد وضعية (Γ) بالنسبة إلى (D).

2/ لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=e^{-x}-x-2$.

- عين إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$.

II. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = -x + (x+1)e^x$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1/ احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2/ أ/ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = -g(x) \times e^x$.

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3/ أ/ أثبت أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

4/ أثبت أن (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي المستقيم (Δ) ثم اكتب معادلة للمماس (T).

5/ أنشئ (Δ)، (T) و (C_f). (نأخذ $\alpha \simeq -0.5$ و $f(\alpha) \simeq 0.8$)

6/ عين بيانيا، قيم الوسيط الحقيقي m، حتى تقبل المعادلة $f(x) = -x - e^m$ حلين مختلفين.

7/ أ/ باستعمال التكامل بالتجزئة، أثبت أن $\int_{-1}^{0} xe^x dx = \frac{2}{e} - 1$.

ب/ احسب، بالسنتيمتر المربع، S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x = -1$، $x = 0$ و $y = -x$.

التمرين 25 بكالوريا 2024 (شعبة رياضيات)

I. الجدول المقابل يمثل تغيرات الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (8 - 4x)e^x + 16$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	16	↗	$g(1)$	↘	$-\infty$

1/ أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2.37 < \alpha < 2.38$.

2/ استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$.

II. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{e^x + 4x}{e^x + 4}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ أ/ أثبت أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب/ احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2/ أ/ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x + 4)^2}$.

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3/ أ/ أثبت أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

4/ أنشئ (Δ) و (C_f). (نأخذ $f(\alpha) \simeq 1.4$)

5/ عين بيانيا، قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m، حتى تقبل المعادلة $f(x)=\ln m$ حلين مختلفين.

6/ أ/ أثبت أنه من أجل كل x من المجال $[1,+\infty[$: $\frac{e^x}{e^x+4}\leqslant f(x)\leqslant x$.

ب/ S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=1$، $x=2$ و $y=0$. أثبت أن $\ln\left(\frac{e^2+4}{e+4}\right)\leqslant S\leqslant\frac{3}{2}$.

7/ لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n=(e^n+4)\times f(n)$.

- احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

التمرين 26 بكالوريا 2023 (علمي)

II. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(x-1)(e^{2x}-1)$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. (وحدة الطول $2\,cm$)

ب/ احسب، بالسنتيمتر المربع، S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$، $x=\frac{1}{2}$ و $y=-x+1$.

التمرين 27 بكالوريا 2023 (تقني رياضي)

II. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=-x+4+(2x-3)e^x$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

7/ لتكن H الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $H(x)=(-2x+5)e^x$.

أ/ تحقق أن الدالة H هي دالة أصلية للدالة $h:x\longmapsto(-2x+3)e^x$ على $\mathbb{R}$.

ب/ احسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=-1$، $x=0$ و $y=-x+4$.

التمرين 28 بكالوريا 2023 (رياضيات)

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x+1-3xe^{2x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. (وحدة الطول $2\,cm$)

7/ أ/ باستعمال التكامل بالتجزئة، احسب $\int_{-\alpha}^{0}xe^{2x}$.

ب/ احسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=-\alpha$، $x=0$ و $y=x+1$.

جـ/ أثبت أن $A(\alpha)=2\left(\frac{4\alpha-1}{2\alpha-1}\right)cm^2$.

التمرين 29 بكالوريا 2022 (تقني رياضي)

II. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{-x}-\frac{x+1}{x^2+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

6/ نقبل أنه من أجل كل x من المجال $[-1,0]$: $\frac{1}{2}x+1\leqslant\frac{1}{x^2+1}\leqslant\frac{5}{4(1-x)}$.

أ/ عين حصرا للتكامل I حيث: $I=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2+1}$.

ب/ احسب التكامل J حيث: $J=\int_{-1}^{0}\frac{x}{x^2+1}dx$.

جـ/ استنتج حصرا لـ S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f)، (Γ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=0$.

التمرين 30

I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]-\infty;+\infty[$ بـ: $g(x)=xe^x-1$ وليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

لتكن الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $G(x)=(ax+b)e^x-x$

• عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون G دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

التمرين 31 بكالوريا 2019 (رياضيات)

II. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x+1)^2e^{-2x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3/ لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(x+1)e^{-2x}$.

أ/ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=0$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

ب/ باستعمال التكامل بالتجزئة، احسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=-1$، $x=0$ و $y=0$.

التمرين 32 بكالوريا 2018 (علمي)

II. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

7/ أ/ باستعمال التكامل بالتجزئة، عين الدالة الأصلية للدالة $x\longmapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم عند العدد 1.

ب/ احسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=1$، $x=3$ و $y=2x+1$.

التمرين 33 بكالوريا 2018 (تقني)

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty,1[$ بـ: $f(x)=\frac{x}{x-1}e^{-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

7/ أ/ أثبت أنه من أجل كل x من المجال $[-1,0]$: $\frac{x}{x-1}\leqslant f(x)<e^{-x}$.

ب/ تحقق أنه من أجل كل x من المجال $[-1,0]$: $\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$ ثم أثبت أن $1-\ln 2\leq\int_{-1}^{0}f(x)dx<e-1$.

التمرين 34 بكالوريا 2014 (تقني)

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x-1)e^x$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

8/ لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(ax+b)e^x$ حيث a و b عددان حقيقيان ثابتان.

- عين العددين الحقيقيين a و b حيث يكون من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x)=f(x)$.

التمرين 35بكالوريا (2017) ع-ت الموضوع الثاني (الدورة العادية)

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=2-x^2e^{1-x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

④ F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $F(x)=2x+(x^2+2x+2)e^{1-x}$.

• تحقق أنَ F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم أحسب مساحة الحيّز المستوي المحدَد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=1$. .

التمرين 36بكالوريا (2017) ع-ت الموضوع الأول (الدورة الإستثنائية)

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}^\star$ كمايلي: $f(x)=e^{-x}-2-\frac{e}{x}$.

و (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

⑥ ليكن n عددا طبيعيا و $A(n)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (γ) والمستقيمين اللذين معدلتيهما $x\mapsto -e^n$ و $x\mapsto -e^{n-1}$.

• احسب العدد الحقيقي I حيث:

$$I=A(0)+A(1)+...+A(2016)$$

التمرين 37بكالوريا (2016) ع-ت الموضوع الثاني

II) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x+(x^2+3x+2)e^{-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول هي $1cm$).

h و H الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=x+f(x)$ و $H(x)=(ax^2+b+c)e^{-x}$.

① عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c حتى الدّالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

② أ) أحسب التكامل التالي: $A(\lambda)=\int_0^\lambda h(x)dx$ حيث λ عدد حقيقي موجب تماما و فسّر النتيجة هندسيا.

ب) أحسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$

التمرين 38 بكالوريا (2015) ع ت الموضوع الثاني

II) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

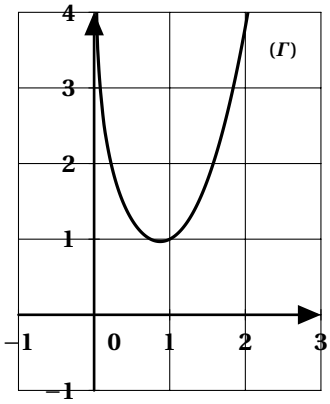
① أ) تحقّق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{3x+2}$.

ب) استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

التمرين 39 بكالوريا (2024) ع-ت

I. المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

في الشكل المقابل، (Γ) التمثيل البياني للدالة g المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}-\ln x$.



- بقراءة بيانية، عين إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

II. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $f(x)=-x-\frac{\ln x}{x^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2\,cm$)

1/ أ/ احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب/ احسب $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$.

2/ أ/ أثبت أنه من أجل كل x من المجال $]0,+\infty[$: $f'(x)=\frac{-2g(x)}{x^3}$.

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3/ أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.7<\alpha<0.71$.

4/ أ/ أثبت أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

5/ أثبت أن (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) معامل توجيهه يساوي -1 ثم اكتب معادلة للمماس (T).

6/ أنشئ (Δ)، (T) و (C_f).

7/ عين بيانيا، قيم الوسيط الحقيقي m، حتى تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلين مختلفين.

8/ أ/ تحقق أن الدالة $x\longmapsto\frac{-1-\ln x}{x}$ هي دالة أصلية للدالة $x\longmapsto\frac{\ln x}{x^2}$ على المجال $]0,+\infty[$.

ب/ احسب، بالسنتيمتر المربع، $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=\alpha$، $x=1$ و $y=-x$.

جـ/ أثبت أن $A(\alpha)=4\left(\alpha^2-\frac{1}{\alpha}+1\right)$.

التمرين 40بكالوريا (2024) ت-ر

I. الجدول المقابل يمثل تغيرات الدالة g على المجال $]-2,+\infty[$ بـ : $g(x)=x+\ln(x+2)$.

x	-2	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

1/ أثبت أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.45 < \alpha < -0.44$.
2/ استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0,+\infty[$.

II. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ بـ : $f(x)=\left(\frac{x+1}{x+2}\right)(-1+\ln(x+2))$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2\,cm$)

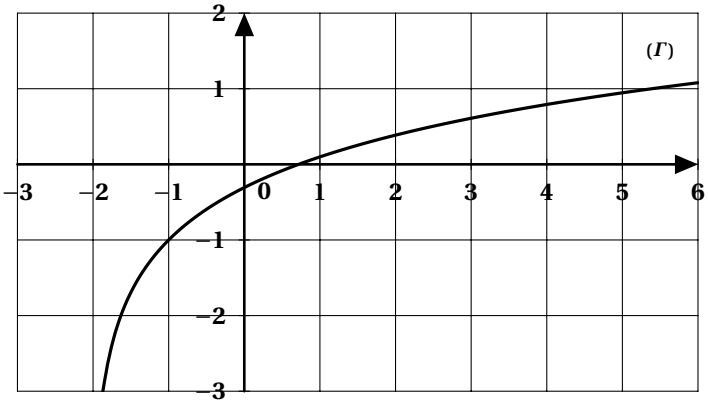
1/ أ/ احسب $\lim\limits_{x\longrightarrow -2^{>}} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب/ احسب $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)$.

2/ أ/ أثبت أنه من أجل كل x من المجال $]0,+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+2)^2}$.

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3/ في الشكل المقابل، (Γ) التمثيل البياني للدالة h المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ بـ : $h(x)=-1+\ln(x+2)$.



أ/ أثبت أن المنحنى (Γ) مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Γ).

4/ أعد رسم (Γ) ثم أنشئ (C_f). (نأخذ $f(\alpha)\simeq -0.2$)

5/ أ/ أثبت أن $\int_{-1}^{e-2}\frac{\ln(x+2)}{x+2}dx=\frac{1}{2}$.

ب/ احسب، بالسنتيمتر المربع، S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f)، (Γ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=e-2$.

التمرين 41 بكالوريا (2024) ر-يا

I. لتكن g الدالة المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $g(x)=1+x^2\ln x$.

1/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2/ احسب $g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ ثم عين إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

II. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ : $f(0)=0$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0,+\infty[$: $f(x)=\frac{x}{1+x^2\ln x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ أ/ احسب $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$.

ب/ أثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 0 من اليمين ثم فسر النتيجة بيانيا.

ج/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (T) ذي المعادلة $y=x$.

2/ أ/ أثبت أنه من أجل كل x من المجال $]0,+\infty[$: $f'(x)=\frac{1-x^2-x^2\ln x}{(1+x^2\ln x)^2}$.

ب/ ادرس إشارة كل من العبارتين $1-x^2$ و $-x^2\ln x$ على المجال $]0,+\infty[$.

ج/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3/ أنشئ (T) و (C_f).

4/ عين بيانيا، قيم الوسيط الحقيقي m، حتى تقبل المعادلة $f(x)=m^2$ حلا على الأقل.

5/ أ/ أثبت أنه من أجل كل x من المجال $[1,e]$: $\frac{x}{x^2+1}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

ب/ S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=1$، $x=e$ و $y=0$. أثبت أن $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^2+1}{2}\right)\leqslant S\leqslant e-1$.

6/ لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n=\frac{1}{f(e^n)}-ne^n$.

أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{1}{e^n}$.

ب/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$ ثم احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} S_n$.

التمرين 42 بكالوريا (2022) ع-ت

II. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $f(x)=\left(\frac{1}{x}-2-\ln x\right)e^{-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

4/ لتكن F الدالة المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $F(x)=e^{-x}(2+\ln x)$.

أ/ أثبت أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]0,+\infty[$.

ب/ λ عدد حقيقي حيث $0<\lambda<\frac{1}{2}$. احسب التكامل $S(\lambda)$ حيث: $S(\lambda)=\int_{\lambda}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

التمرين 43 بكالوريا 2019 ع- ت

لتكن f الدالة المعرفة على $]0,2[\cup]2,+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1}{x-2}+\ln x$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ أ/ احسب $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 0\\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 2\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 2\\ <}} f(x)$ ثم فسر النتائج بيانيا.

بـ/ احسب $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$.

2/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3/ ليكن (γ) التمثيل البياني للدالة $x\longmapsto \ln x$.

أ/ احسب $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}[f(x)-\ln x]$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

بـ/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (γ).

4/ أنشئ (γ) و (C_f).

5/ لتكن H الدالة المعرفة على المجال $[3,+\infty[$ بـ : $H(x)=\int_3^x \ln(t)\,dt$.

أ/ باستعمال التكامل بالتجزئة، عين عبارة $H(x)$ بدلالة x.

بـ/ احسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=3$، $x=4$ و $y=0$.

6/ لتكن k الدالة المعرفة على $]-\infty,-1[\cup]-1,0[$ بـ : $k(x)=f(-2x)$.

- دون تعيين عبارة الدالة k، ادرس اتجاه تغير الدالة k.

التمرين 44 بكالوريا 2019 ت-ر

I. لتكن g الدالة المعرفة والمتزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $g(x)=(x+1)(x+e)-e(x\ln x)$.

- احسب $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 0\\ >}} g(x)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

II. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $f(x)=\ln(x+1)+\frac{e\ln x}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ أ/ احسب $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 0\\ >}} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

بـ/ أثبت أن $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=+\infty$.

2/ أ/ أثبت أنه من أجل كل x من المجال $]0,+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x(x+1)^2}$.

بـ/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3/ اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

4/ أ/ أثبت أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α.

بـ/ تحقق أن $0.7<\alpha<0.8$.

5/ ليكن (γ) التمثيل البياني للدالة $x\longmapsto \ln(x+1)$.

أ/ احسب $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}[f(x)-\ln(x+1)]$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

بـ/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (γ).

6/ أنشئ (T)، (γ) و (C_f).

7/ عين بيانيا، قيم الوسيط الحقيقي m، حتى تقبل المعادلة $f(x)=\frac{1+e}{2}x-m$ حلين مختلفين.

8/ نقبل أنه من أجل كل x من المجال $]1,+\infty[$: $\ln x < x+1$.

أ/ أثبت أنه من أجل كل x من المجال $]1,+\infty[$: $\ln 2 < f(x) < e+\ln(x+1)$.

ب/ تحقق أن الدالة $x \longmapsto (x+1)\ln(x+1)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \ln(x+1)$ على المجال $]1,+\infty[$.

جـ/ S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=e-1$، $x=e^2-1$ و $y=0$.

- أثبت أن $(e^2-e)\ln 2 < S < e^3$.

التمرين 45 بكالوريا 2019 ريا

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ : $\begin{cases} f(x)=x-x^2\ln x & ,x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. (وحدة الطول $3\,cm$)

1/ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :

- إذا كان $x>1$ فإن $1-x-2x\ln x<0$.

- إذا كان $0<x<1$ فإن $1-x-2x\ln x>0$.

2/ أ/ أثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 0 من اليمين ثم اكتب معادلة لـ (Δ) نصف مماس (C_f) عند النقطة O مبدأ المعلم.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

3/ أ/ احسب $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4/ اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) الذي يوازي المستقيم (Δ).

5/ أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1,+\infty[$ ثم تحقق أن $1.76<\alpha<1.77$.

6/ اكتب معادلة للمستقيم (d) الذي يوازي المستقيم (Δ) ويشمل النقطة $A(\alpha,0)$.

7/ أنشئ (Δ)، (T)، (d) و (C_f) على المجال $[0,\alpha]$.

8/ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة $x^2\ln x+m=0$ على المجال $[0,\alpha]$.

9/ λ عدد حقيقي حيث $0<\lambda<1$. نضع: $A(\lambda)=\int_{\lambda}^{1} -x^2\ln(x)\,dx$.

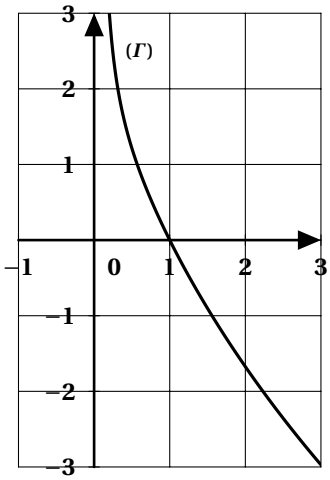
أ/ باستعمال التكامل بالتجزئة، احسب $A(\lambda)$ بدلالة λ.

ب/ احسب $\lim\limits_{\lambda\longrightarrow 0^{>}} A(\lambda)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

التمرين 46 بكالوريا 2018 ع- ت

I. المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

في الشكل المقابل، (Γ) التمثيل البياني للدالة g المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1$.



1/ احسب $g(1)$.

2/ بقراءة بيانية، عين إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0,+\infty[$.

II. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ احسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ثم أثبت أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ وفسر النتيجتين بيانيا.

2/ أ/ أثبت أنه من أجل كل x من المجال $]0,+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$.

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3/ أثبت أن المعادلة $y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند نقطة تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.

4/ أنشئ (T) و (C_f).

5/ عين بيانيا، قيم الوسيط الحقيقي m، حتى تقبل المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-me$ حلين مختلفين.

6/ n عدد طبيعي حيث $n>1$. لتكن I_n مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=1$، $x=n$ و $y=0$.

أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>1$: $I_n=\ln(1+n\ln n)$.

ب/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (I_n).

التمرين 47 (اختيار من متعدد)

في كل حالة من الحالات التالية، هناك إجابة صحيحة واحدة فقط، اخترها مع التعليل:

1/ قيمة التكامل $\int_0^{\ln(2)}(e^{-x}+1)dx$ هي:

أ/ $\frac{1}{2}+\ln(2)$ ب/ $\frac{1}{2}-\ln(2)$ جـ/ $-\frac{1}{2}+\ln(2)$

2/ قيمة التكامل $\int_1^2(x-1)e^{x^2-2x}dx$ هي:

أ/ $1-\frac{1}{e}$ ب/ $\frac{e-1}{2e}$ جـ/ $\frac{e+1}{2e}$

3/ لتكن المعادلة التفاضلية (E): حيث $(E): y' = 2 - \frac{1}{x^2}$: عبارة الحل H للمعادلة (E) على المجال $]0;+\infty[$ والذي يحقق $H(1) = 4$ و $H'(1) = 2$ هي:

أ/ $H(x) = x^2 - x + 4 + \ln(x)$ ب/ $H(x) = x^2 - x + 1 + \ln(x)$ جـ/ $H(x) = x^2 - x + 4 - \ln(x)$

4/ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+2}$. القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[-2,-1]$ هي:

أ/ -3 ب/ $\frac{6}{\ln 3}$ جـ/ $\frac{1}{3\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$

5/ لتكن g الدالة المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{\ln x}{x}$. القيمة المتوسطة للدالة g على المجال $[1,e]$ هي:

أ/ $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e}\right)$ ب/ $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e-1}\right)$ جـ/ $\frac{1}{2-2e}$

6/ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 3^{x-1}$. القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[2,3]$ هي:

أ/ $\frac{6}{\ln 3}$ ب/ -3 جـ/ $\ln 3$

7/ لتكن g الدالة المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{x+1}{x}$. الدالة الأصلية G للدالة g على المجال $]0,+\infty[$ والتي تحقق $G(1) = 0$ معرفة بـ :

أ/ $G(x) = x - 1 + \ln x$ ب/ $G(x) = 1 - x + \ln x$ جـ/ $G(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

8/ y عدد حقيقي حيث $y > 1$، نضع: $A(y) = \int_1^y x\ln(x)\,dx$. علما أن الدالة $x \longmapsto \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto x\ln x$ على المجال $]0,+\infty[$ فإن قيمة العدد الحقيقي y حتى يكون $A(y) = \frac{1}{2}$ هي:

أ/ e^{-1} ب/ $\sqrt{e}$ جـ/ $2e$

9/ قيمة التكامل $\int_1^e \frac{1}{x}(2x^2 + \ln x^2)\,dx$ هي:

أ/ e ب/ e^2 جـ/ $e^2 - 1$

10/ قيمة التكامل $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x-1}$ هي:

أ/ $\ln(e^2+1)$ ب/ $\ln(e+1)$ جـ/ $\ln(e-1)$

11/ لتكن g الدالة المعرفة على المجال $]1,+\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{1}{x\ln(x^2)}$. الدالة الأصلية G للدالة g على المجال $]1,+\infty[$ والتي تنعدم عند العدد $\sqrt{e}$ معرفة بـ :

أ/ $G(x) = \frac{1}{2}\ln(\ln x) + \ln 2$ ب/ $G(x) = \frac{1}{2}\ln(\ln x) - \ln 2$ جـ/ $G(x) = \frac{1}{2}\ln(2\ln x) + \ln 2$

12/ لتكن g الدالة المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $g(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$. القيمة المتوسطة للدالة g على المجال $[1,3]$ هي:

أ/ $2 - \frac{1}{3}\ln 3$ ب/ $1 - \frac{1}{4}(\ln 3)^2$ جـ/ $\frac{1}{2}(\ln 3)^2$

13/ قيمة التكامل $\int_{-1}^{1} xe^x dx$ هي:

أ/ $2e^{-1}$ ب/ $2e$ جـ/ $2 + e$

14/ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = e^{2x+3} - x$. القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[2,3]$ هي:

أ/ $\frac{1}{2}(e^9 - e^7 - 5)$ ب/ $e^2 - \frac{5}{2}$ جـ/ $\frac{1}{2}(e^2 - 5)$

15/ قيمة التكامل $\int_{-2}^{2} xe^x dx$ هي:

أ/ $e^{-2} - 3e^2$ ب/ $4(e^2 - e^{-2})$ جـ/ $e^2 + 3e^{-2}$

16/ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=8x^3+1$. الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم عند العدد 1 معرفة بـ :

أ/ $F(x)=x^4+1$ ب/ $F(x)=3x^4+1$ جـ/ $F(x)=2x^4+x-3$

17/ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x\times 2^{-x}$. من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

أ/ $f'(x)=(1-x\ln 2)e^{-x\ln 2}$ ب/ $f'(x)=(1-x)2^{-x}$ جـ/ $f'(x)=(2+x\ln 2)2^{-x}$

18/ x عدد حقيقي موجب تماما . قيمة التكامل $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dt$ هي:

أ/ $\frac{-2\ln x-1}{x}$ ب/ $\frac{-\ln x}{x}-\frac{1}{x}$ جـ/ $\frac{-\ln x-1+x}{x}$

19/ قيمة التكامل $\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{dx}{x\ln x}$ هي:

أ/ $\ln 2$ ب/ $-\ln 2$ جـ/ $\frac{3}{8}$

التمرين 48 (أجب بصحيح أم خطأ مع التعليل)

أجب بصحيح أم خطأ مع التعليل 1/ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ معرفة بـ : $F(x)=x+\ln\left(1+e^{-2x}\right)$.

2/ الدالة العددية $x\mapsto x^2+2x+x\ln(x)$ حل للمعادلة التفاضلية (E): حيث $(E):y'=2+\frac{1}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$

3/ لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]1,+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$. الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $]1,+\infty[$ والتي تحقق $F(e)=e$ معرفة بـ : $F(x)=\ln(\ln x)+e$.

4/ القيمة المتوسطة للدالة $x\longmapsto\frac{\ln x}{x^2}$ على المجال $[1,2]$ هي $\frac{1-\ln 2}{2}$.

5/ a عدد حقيقي موجب تماما و f دالة مستمرة وفردية على المجال $[-a,a]$. قيمة التكامل $\int_{-a}^{a}f(x)dx$ هي 0.

6/ إذا كانت الدالة f حلا للمعادلة التفاضلية $y'=-2y$ وتمثيلها البياني يقطع محور التراتيب في النقطة ذات الترتيبة $\frac{3}{2}$ فإن مساحة الحيز المستوي المحدد بالتمثيل البياني للدالة f والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$، $x=\ln 3$ و $y=0$ هي $\frac{3}{2}u.a$.

ملخص + تمارين شاملة حول المتتاليات العددية

1) تراميز وإصطلاحات

- يرمز لمتتالية بأحد الرموز: (u_n) ; (v_n) ; (w_n) ; ...الخ
- إذا كانت (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ فإن حدها الأول هو u_0 أما إذا كانت معرفة على $\mathbb{N}^*$ فإن حدها الأول هو u_1 (مالم يصرح عكس ذلك).
- المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ حدها الأول هو u_{n_0}
- الحد الذي دليله p هو u_p حيث p عدد الطبيعي
- u_n يسمى **الحد العام** للمتتالية (u_n)

2) حساب الحدود

أ) **متتالية معرفة بعبارة الحد العام:**

التمرين 49

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 3\sqrt{e^n - 1} + 2$.

1) احسب الحدود: u_0 ، u_1 (تعطى النتائج مدورة إلى 10^{-2})

2) احسب الحد الذي دليله 3 .

التمرين 50

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = 3n + 7$

1) احسب الحدود: u_1 ، u_4

2) احسب الحد الذي دليله: 2

3) هل 97 حد من حدود المتتالية (u_n)

ب) **متتالية معرفة بعلاقة تراجعية:** وتعطى فيها قيمة الحد الأول وعلاقة تربط بين حدين بدلالة n

التمرين 51

(u_n) متتالية معرفة بـ:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + 8 \end{cases}$$

1) احسب الحدود: u_1 ، u_2 ، u_3

التمرين 52

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول: $u_1 = \sqrt{e}$ (e يرمز لأساس اللوغاريتم النيبيري) ومن أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

1) احسب الحدود u_2 ، u_3 و u_4 (تدور النتائج إلى 10^{-2}) ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

التمرين 53

(u_n) متتالية معرفة بـ:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 4 - u_n + 5n \end{cases}$$

1) احسب الحدود: u_1 ، u_2

التمرين 54

(u_n) متتالية معرفة بـ:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \ ; \ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{2}{3}u_{n+1} - \frac{1}{9}u_n + 2 \end{cases}$$

1) احسب الحدود: u_2 ، u_3

3) العلاقة بين رتبة حد ودليله في متتالية

u_p حد من حدود المتتالية (u_n) رتبة الحد u_p هي العدد a المعرف بـ

$$\boxed{a = p - n_0 + 1}$$

حيث n_0 هو دليل الحد الأول في المتتالية (u_n)

ملاحظة اذا كان الحد الأول للمتالية (u_n) هو u_1 فإن رتبة حد تساوي دليله.

التمرين 55

(u_n) متتالية معرفة بـ: $u_n = 2n + 7$ حدها الأول هو u_0

1) حدد رتبة الحد u_8

2) احسب الحد الخامس والعشرون لهده المتتالية

التمرين 56

(u_n) متتالية معرفة بـ: $u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$ حدها الأول هو u_1

1) احسب الحد العشرون لهده المتتالية

4) البرهان بالتراجع

طريقة ومنهجية: للبرهان بالتراجع على صحة خاصية $P(n)$ متعلقة بعدد طبيعي n نتبع مايلي:

1) نتأكد من صحة الخاصية من أجل أصغر عدد طبيعي n_0 أي $P(n_0)$ محققة

2) نفرض أن $P(n)$ صحيحة من اجل عدد طبيعي n ونبرهن صحتها من اجل عدد طبيعي $n+1$ أي $P(n+1)$ صحيحة

3) وضع خلاصة

5) اتجاه تغير متتالية

نعتبر المتتالية (u_n)

1) المتتالية (u_n) متزايدة تماما تكافئ $u_{n+1}-u_n>0$ من أجل كل عدد طبيعي n .

2) المتتالية (u_n) متناقصة تماما تكافئ $u_{n+1}-u_n<0$ من أجل كل عدد طبيعي n .

3) المتتالية (u_n) ثابتة تكافئ $u_{n+1}-u_n=0$ من أجل كل عدد طبيعي n .

6) نهاية متتالية

قاعدة:01 في حال متتالية معرفة بعدها العام أو تعطى عبارة المجموع :نستعمل القاعدة التالية a عدد حقيقي

1) إذا كان $a>1$ فإنَ $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n=+\infty$

2) إذا كان $-1<a<1$ فإنَ $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n=0$

قاعدة:02 في حال متتالية معرفة بعلاقة تراجعية $f(u_n)=u_{n+1}$

إذا كانت (u_n) متقاربة نحو عدد حقيقي نهاية l فنقوم بحل المعادلة $f(l)=l$ والتي تمثل فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$.

قاعدة:03 في حال متتالية حدها العام محصور

إذا كانت $w_n<u_n<v_n$ من أجل كل عدد طبيعي n , وكانت: $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=l$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=l$ فإن: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l}$

7) المتتاليات المحدودة

1) المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى اذا وجد عدد حقيقي A حيث $u_n<A$ من أجل كل عدد طبيعي n

2) المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل اذا وجد عدد حقيقي B حيث $u_n>B$ من أجل كل عدد طبيعي n

8) المتتاليات المتقاربة

1) المتتالية (u_n) متقاربة تعني أنَ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$ حيث l عدد حقيقي

2) كل متتالية متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل متقاربة

3) كل متتالية متزايد تماما ومحدودة من الأعلى متقاربة

4) المتتالية الهندسية التي أساسها q متقاربة تكافئ $q \in]-1,1]$

5) كل متتالي حسابية أساسها $r \neq 0$ هي متتالية غير متقاربة (متباعدة)

9) المتتاليات المتجاورتان

المتتاليتان (u_n) و (v_n) تجاورتان اذا كان احداهما متناقصة تماما والأخرى متزايدة تماما و كانت $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$

التمرين 57

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3}$

1/ برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 2$

التمرين 58

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي $u_0 = -4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - 1$

1/ برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -4$

التمرين 59

f دالة معرفة على $[4;7[$ بـ: $f(x) = \sqrt{x+2} + 4$ و

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{u_n + 2} + 4$

1/ ادرس اتجاه تغير الدالة f. 2/ برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $4 \leq u_n < 7$

التمرين 60

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$

1/ برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$

التمرين 61

f دالة معرفة على $]-4;1[$ بـ: $f(x) = \frac{3x - 16}{x + 11}$ و

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{3u_n - 16}{u_n + 11}$

1/ ادرس اتجاه تغير الدالة f. 2/ برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $-4 \leq u_n \leq 0$

التمرين 62

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$

1/ عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد طبيعي n يكون $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 4}$

2/ برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$

التمرين 63

f دالة معرفة على $[0;4]$ بـ: $f(x) = \frac{13x}{9x + 13}$ و

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} = f(u_n)$

1/ ادرس اتجاه تغير الدالة f.

2/ برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 4$

التمرين 64

f دالة معرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{5x}{x+2}$ و (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} = f(u_n)$

1/ ادرس اتجاه تغير الدالة f. 2/ برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 3$

التمرين 65

حدد اتجاه تغير المتتاليات العددية التالية المعرفة بحدها العام

1) $u_n = 3n + 2$ 2) $v_n = 5 \times 3^n$ 3) $w_n = 4 \times 3^n + 9$

التمرين 66

احسب نهايات المتتالية (u_n) في الحالات التالية ثم استنتج تقاربها

1) $u_n = 2^n$

2) $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + 2$

3) $u_n = \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n + 3$

4) $u_n = \dfrac{2^n}{n}$

5) $0 \leq u_n \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

6) $0 < 8 - u_n \leq 8(\dfrac{1}{2})^n$

7) $0 < 1 - u_n \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

8) $u_n = 3^n$

9) $u_n = \left(\dfrac{-3}{4}\right)^n + 7$

10) $u_n = \dfrac{5}{3}\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 8\right)$

11) $u_n = \dfrac{-1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 2} + 3$

التمرين 67

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = -1 + \dfrac{2}{2 - u_n}$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n \leq \dfrac{1}{2}$.

ب/ أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

التمرين 68

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الاول $u_0 = \dfrac{13}{4}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$

1) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n: $3 < u_n < 4$

2) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$، استنتج ان (u_n) متزايدة تماما

3) برر لماذا (u_n) متقاربة .

ملخص حول المتتاليات الحسابية والهندسية

	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
التعريف	(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي r بحيث من أجل كل عدد طبيعي n : $\boxed{u_{n+1}-u_n=r}$ أو $u_{n+1}=u_n+r$ ، يسمى r أساس المتتالية (u_n)	(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث من أجل كل عدد طبيعي n : $\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n}=q}$ أو $\boxed{u_{n+1}=q\times u_n}$ ، يسمى q أساس المتتالية (u_n)
عبارة الحد العام	p عدد طبيعي ، عبارة الحد العام u_n هي: $\boxed{u_n=u_p+(n-p)r}$	p عدد طبيعي ، عبارة الحد العام u_n هي: $\boxed{u_n=u_p\times q^{n-p}}$
مجموع حدود متتابعة	مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية يساوي: $\frac{\text{عدد الحدود}}{2}$(الحد الأول الوارد في المجموع + الحد الأخير)	مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها $q\neq 1$ يساوي: $\left(\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right)\times$ الحد الأول الوارد في المجموع
خاصية ثلاث حدود متتابعة	إذا كانت a ، b و c ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية فإن: $a+b+c=3b$ أو $a+c=2b$	إذا كانت a ، b و c ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن: $a\times b\times c=b^3$ أو $a\times c=b^2$

ملاحظة عدد الحدود = دليل الحد الأخير – دليل الحد الأول الوارد في المجموع +1

تمارين حول المتتاليات الحسابية

التمرين 69

1) (u_n) متتالية معرفة بـ: $u_n=-4n+1$

* بين أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r وحدها الأول u_0

التمرين 70

1) (u_n) متتالية معرفة بـ: $u_n=3n+2$

* بين أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r وحدها الأول u_0

التمرين 71

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{13u_n}{9u_n + 13}$

1) بين أن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n = 2 + \dfrac{13}{u_n}$ حسابية يطلب تعين أساسها وحدها الأول .

2) أكتب عبارة v_n بدلالة n .

التمرين 72

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 9}{u_n - 2}$

1) بين أن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$ حسابية يطلب تعين أساسها وحدها الأول .

2) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم أستنتج عبارة u_n بدلالة n .

التمرين 73

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 7e^{-2n}$

1) بين أن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n = \ln(u_n) + \ln(u_{n+1})$ حسابية يطلب تعين أساسها وحدها الأول .

التمرين 74

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \dfrac{9}{u_n + 5}$

1) بين أن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n = \dfrac{1}{u_n + 2}$ حسابية يطلب تعين أساسها وحدها الأول .

2) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم أستنتج عبارة u_n بدلالة n .

التمرين 75

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 13$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{4}{5}$

1) بين أن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n = \ln(u_n - 1)$ حسابية يطلب تعين أساسها وحدها الأول .

2) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم أستنتج عبارة u_n بدلالة n .

التمرين 76

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_1 = 5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{1 + u_n}$

1) بين أن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n = \frac{3}{u_n - 2}$ حسابية يطلب تعين أساسها وحدها الأول .

2) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم أستنتج عبارة u_n بدلالة n .

التمرين 77

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n}$

1) بين أن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$ حسابية يطلب تعين أساسها وحدها الأول .

2) أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم أستنتج عبارة v_n بدلالة n .

التمرين 78

(u_n) تعتبر متتالية حسابية أساسها r . أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) في الحالات التالية:

1) $r = 3$, $u_0 = 1$ 3) $r = 3$, $u_5 = 20$

2) $r = 2$, $u_1 = 5$ 4) $r = -4$, $u_2 = 3$

التمرين 79

(u_n) تعتبر متتالية حسابية أساسها r

1) $u_3 = 17$, $u_7 = 23$ احسب r

التمرين 80

(u_n) تعتبر متتالية حسابية أساسها r

1) $u_1 = 17$, $3u_2 + 7u_5 - 9u_7 = -6$ احسب r

1) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n

التمرين 81

(u_n) تعتبر متتالية حسابية أساسها $r = 2$ و $u_2 + u_5 - 5u_8 = -75$

1) احسب u_1

2) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n

التمرين 82

(u_n) متتالية حسابية متناقصة تماما و معرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35 \end{cases}$$

1 احسب حدها الأول u_0 و اساسها r .

2 اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

3 بيّن ان العدد 2681- حد من حدود هذه المتتالية ثم احسب كلا من المجموعين S_1 و S_2 . حيث

$$S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{1344}$$

و

$$S_2 = u_2 + u_4 + u_6 + ... + u_{1344}$$

• استنتج حساب المجموع S_3 حيث: $S_3 = u_1 + u_3 + u_5 + ... + u_{1343}$

التمرين 83

احسب المجاميع والجداءات التالية

1) $S_1 = 0 + 1 + 2 + ... + n$

2) $S_2 = 3 + 6 + 9 + ... + 3n$

3) $S_2 = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + ... + 2n - 1$

4) $S_2 = 19 + 23 + 27 + ... + 4n + 7$

5) $S_n = \left(\frac{5}{2}\right)^0 \times \left(\frac{5}{2}\right)^1 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times ... \times \left(\frac{5}{2}\right)^n$

5) $S_n = \left[2 \times \left(\frac{7}{5}\right)^0\right] \times \left[2 \times \left(\frac{7}{5}\right)^1\right] \times \left[2 \times \left(\frac{7}{5}\right)^2\right] \times \left[2 \times \left(\frac{7}{5}\right)^3\right] \times ... \times \left[2 \times \left(\frac{7}{5}\right)^n\right]$

التمرين 84

بين أن المتتاليات التالية هندسية يطلب تعيين الأساس لكل منها:

1) $u_n = 5 \times 2^n$

2) $u_n = -3 \times 2^n$

3) $u_n = \frac{3}{2^n}$

4) $u_n = \frac{5^n}{3^n}$

5) $u_n = 5 \times 7^n \times 3^n$

التمرين 85

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$

1) بين أن المتتالية (v_n) المعرفة بـ $v_n = u_n + 3$ هندسية يطلب تعين أساسها وحدها الأول .

2) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم أستنتج عبارة u_n بدلالة n .

التمرين 86

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{4}{7}u_n + \frac{3}{7}$

1) بين أن المتتالية (v_n) المعرفة بـ $v_n = u_n - 1$ هندسية يطلب تعين أساسها وحدها الأول .

2) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم أستنتج عبارة u_n بدلالة n .

التمرين 87

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 5u_n + 6$

* عين قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) المعرفة بـ $v_n = u_n + \alpha$ هندسية يطلب تعين أساسها وحدها الأول .

التمرين 88

(v_n) تعتبر متتالية هندسية أساسها q . أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) في الحالات التالية:

1) $q = 3$, $v_0 = 1$ 3) $q = 3$, $v_5 = 20$

2) $q = 2$, $v_1 = 5$ 4) $q = -4$, $v_2 = 3$

التمرين 89

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3u_n - 2$

1) بين أن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n = u_{n+1} - u_n$ هندسية يطلب تعين أساسها وحدها الأول .

2) أكتب عبارة v_n بدلالة n .

التمرين 90

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{5u_n}{u_n + 2}$

1) بين أن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$ هندسية يطلب تعين أساسها وحدها الأول .

2) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم أستنتج عبارة u_n بدلالة n .

التمرين 91

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3}$

1) بين أن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$ هندسية يطلب تعين أساسها وحدها الأول .

2) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم أستنتج عبارة u_n بدلالة n .

التمرين 93

(u_n) متتالية هندسية حيث: $u_9 = 1536$ و $u_6 = 192$

1) بين انَ أساس هذه المتتالية هو $q = 2$

التدرب على حساب المجاميع والجداءات

التمرين 94

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 3n + 2$ (حيث $r = 3$ و $u_0 = 2$).

(v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 4\left(\frac{2}{3}\right)^n$ (حيث $q = \frac{3}{2}$ و $v_0 = 4$). ، (w_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ:

$w_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$ ، (t_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $t_n = \ln(n+1) - \ln(n)$ ، (β_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث: $v_n = \frac{3\beta_n + 5}{\beta_n + 2}$

، (α_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث: $v_n = \frac{2}{\alpha_n - 1}$

1 احسب u_0، u_1 و u_2.

2 هل 2681- حد من حدود هذه المتتالية (u_n).

3 احسب مايلي:

- $S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{1344}$
- $S_2 = u_2 + u_4 + u_6 + ... + u_{1344}$
- $S_3 = 0 + 1 + 2 + ... + n$
- $S_4 = 19 + 23 + 27 + ... + 4n + 7$
- $P_n = e^2 \times e^5 \times e^7 \times ... \times e^{3n+2}$
- $I_n = \left[2 \times \left(\frac{7}{5}\right)^0\right] \times \left[2 \times \left(\frac{7}{5}\right)^1\right] \times \left[2 \times \left(\frac{7}{5}\right)^2\right] \times \left[2 \times \left(\frac{7}{5}\right)^3\right] \times ... \times \left[2 \times \left(\frac{7}{5}\right)^n\right]$.

4 أحسب مايلي:

- $S_5 = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$
- $S_6 = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + ... + \frac{1}{v_n}$
- $S_7 = \sqrt{v_0} + \sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} + ... + \sqrt{v_n}$
- $S_8 = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2$
- $S_9 = v_0 + 4v_1 + 4^2 v_2 + ... + 4^n v_n$
- $S_{10} = v_0 \times v_1 \times + v_2 \times ... \times v_n$
- $S_{11} = v_0 + \frac{v_1}{4} + \frac{v_2}{4^2} + ... + \times \frac{v_n}{4^n}$

- $S_{12} = v_0 \times v_1 \times + v_2 \times ... \times v_n$
- $S_{13} = \ln(v_0) + \ln(v_1) + \ln(v_2) + ... + \ln(v_n)$
- $S_{14} = w_1 + w_2 + w_3 + ... + w_n$

5 احسب مايلي

- $S_{15} = \frac{1}{\beta_0 + 2} + \frac{1}{\beta_1 + 2} + ... + \frac{1}{\beta_n + 2}$
- $S_{16} = \alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$

مقترحات البكالوريا + اجنبية

التمرين 95

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 13$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 7$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 14$.

بـ/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln(14 - u_n)$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

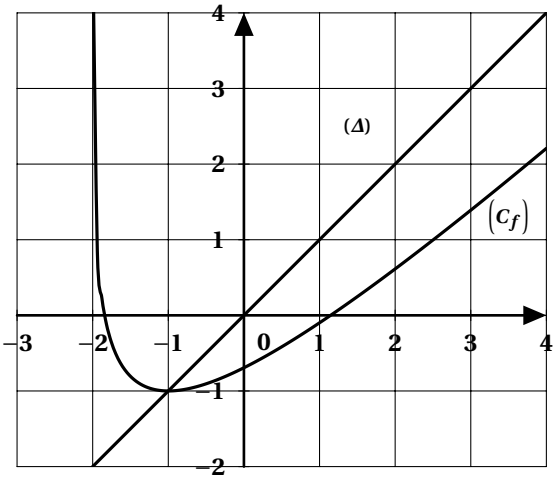
3/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $(14-u_0)\times(14-u_1)\times\cdots\times(14-u_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n^2+n}$.

التمرين 96

I. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ بـ : $f(x) = x - \ln(x+2)$، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ كما هو موضح في الشكل.

1/ احسب $f(-1)$.

2/ بقراءة بيانية، عين اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-2,+\infty[$.



II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

بـ/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -1$.

بـ/ أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة واحسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln[(u_0+2)\times(u_1+2)\times\cdots\times(u_n+2)]$.

أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3 - u_{n+1}$.

بـ/ احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \ln[(u_0+2)\times(u_1+2)\times\cdots\times(u_n+2)]$.

التمرين 97

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 2$.

بـ/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة واحسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

جـ/ أثبت أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 1.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = 2u_n - 4$.

أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+2} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{2}$ و $v_{n+2} = \frac{1}{2}u_n - 1$.

بـ/ تحقق أن $\frac{v_1}{v_0} = \frac{1}{2}$ ثم أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n \times v_{n+2} = v_{n+1}^2$.

جـ/ استنتج طبيعة المتتالية (v_n) ثم اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

3/ لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = \frac{6}{u_n} - 1$.

أ/ أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (w_n) متجاورتان.

بـ/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{12}{w_0+1} + \frac{12}{w_1+1} + \cdots + \frac{12}{w_n+1}$.

التمرين 98

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = \frac{1}{3}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+(n+2)u_n}$.

1/ تحقق أن $u_0 + u_2 \neq 2u_1$. ماذا تستنتج؟

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : (u_n) موجبة تماما.

بـ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

جـ/ استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n). هل (u_n) متقاربة؟

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها 1 ويطلب حساب حدها الأول.

بـ/ احسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.

جـ/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{2}{n^2+3n+6}$ ثم احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

3/ لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = n^2 u_n - 2$.
- أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (w_n) متجاورتان.

التمرين 99

I. (v_n) متتالية هندسية ذات حدود موجبة تماما حدها الأول v_0 وأساسها q حيث: $\begin{cases} \ln v_0 + \ln v_2 = 2\ln 2 \\ e^{-6}\left(e^{v_0} \times e^{v_1}\right) = 1 \end{cases}$.

1/ احسب v_0 و v_1 ثم استنتج قيمة الأساس q.

2/ نفرض أن $v_0 = 4$ و $q = \frac{1}{2}$. اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{9u_n + 10}$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $6 \leqslant u_n \leqslant 10$.

ب/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $10 - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(10 - u_n)$.

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 10 - u_n \leqslant v_n$.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

التمرين 100

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = \frac{3}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 5}$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$.

ب/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_{n+1} \leqslant \frac{2}{5}u_n$.

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n \leqslant \frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ ويطلب حساب حدها الأول.

ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب من جديد نهاية المتتالية (u_n).

4/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{6}{2u_0 + 3} + \frac{6}{2u_1 + 3} + \cdots + \frac{6}{2u_n + 3}$.

التمرين 101

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 2}$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 < u_n \leqslant 4$.

بـ/ أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln\left(\frac{u_n}{u_n - 2}\right)$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{2}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

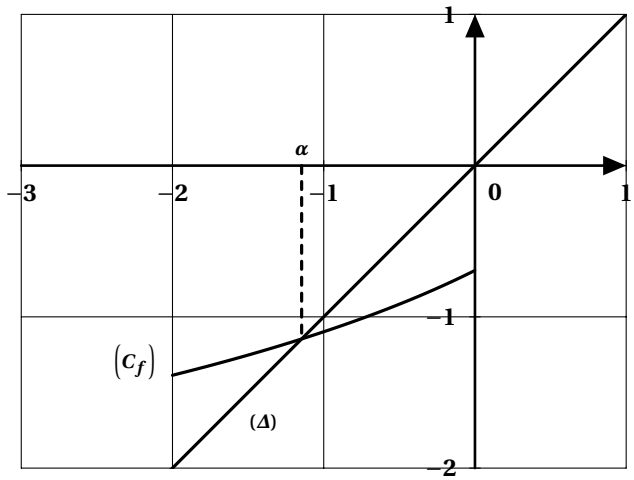
3/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = e^{v_0} + e^{v_1} + \cdots + e^{v_n}$.

التمرين 102

I. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[-2,0]$ بـ : $f(x) = -\ln(2-x)$، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$، α فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (Δ) كما هو موضح في الشكل.

1/ تحقق أن الدالة f متزايدة تماما.

2/ استنتج أنه من أجل كل x من المجال $[-2,0]$ فإن $f(x) \in [-2,0]$.



II. لتكن (u_n) و (v_n) المتتاليتين العدديتين المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$.

1/ أ/ برر وجود المتتاليتين (u_n) و (v_n).

بـ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2، v_0، v_1 و v_2 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

جـ/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2 \leqslant u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n \leqslant 0$.

بـ/ استنتج اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

3/ نقبل أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{v_n - u_n}{2 - v_n}$.

أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.

بـ/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < v_n - u_n \leqslant 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

جـ/ أثبت أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \alpha$. ماذا يمكن القول عن المتتاليتين (u_n) و (v_n) ؟

التمرين 103

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1 + \sqrt{e}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + e}{2u_n}$.

أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - \sqrt{e} = \frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{e})^2$.

بـ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \sqrt{e}$.

جـ/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln\left(\frac{u_n - \sqrt{e}}{u_n + \sqrt{e}}\right)$.

أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} + \sqrt{e} = \frac{1}{2u_n}(u_n + \sqrt{e})^2$.

بـ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 ويطلب حساب حدها الأول.

جـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

د/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

التمرين 104

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{4}{\alpha}u_n + 1$ حيث α عدد حقيقي ثابت غير معدوم.

I. عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية.

II. في كل ما يأتي نضع $\alpha = 9$.

1/ احسب كلا من u_1 و u_2 ثم استنتج أن المتتالية (u_n) ليست هندسية.

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < \frac{9}{5}$.

بـ/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \sqrt{u_{n+1} - u_n}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ ويطلب حساب حدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم عين أصغر عدد طبيعي n حتى يكون $v_n < 0.001$.

جـ/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0^2 + v_1^2 + \cdots + v_n^2$.

د/ استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 105

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{u_n + 2}$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leqslant u_n < 2$.

ب/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n). هل (u_n) متقاربة؟

2/ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_{n+1} - 2| \leqslant \dfrac{2}{3}|u_n - 2|$.

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_n - 2| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n}$.

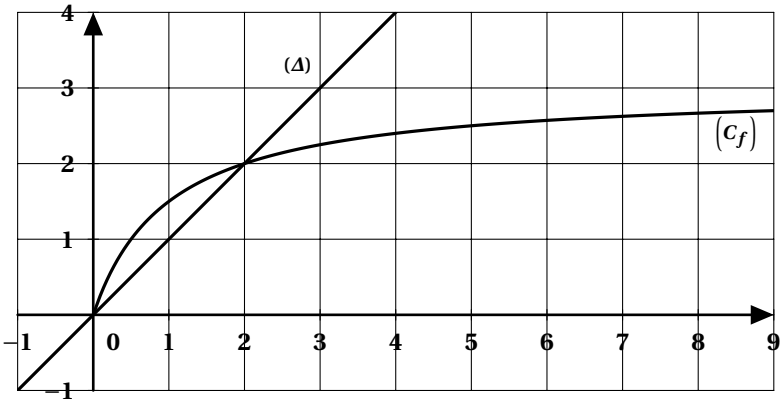
أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = \dfrac{1}{u_0} + \dfrac{1}{u_1} + \cdots + \dfrac{1}{u_n}$.

التمرين 106

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{3x}{x+1}$، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ كما هو موضح في الشكل.



لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 8$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 < u_n \leqslant 8$.

ب/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln\left(1 - \dfrac{2}{u_n}\right)$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \dfrac{2}{1-\dfrac{3}{4}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

4/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n الجداء P_n حيث: $P_n = \left(\dfrac{u_0}{u_0-2}\right)\times\left(\dfrac{u_1}{u_1-2}\right)\times\cdots\times\left(\dfrac{u_n}{u_n-2}\right)$.

التمرين 107

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{2}{\sqrt{4-u_n^2}}$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leqslant u_n < \sqrt{2}$.

ب/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}^2 - u_n^2 = \dfrac{(2-u_n^2)^2}{4-u_n^2}$.

جـ/ استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما. هل (u_n) متقاربة؟

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \dfrac{u_n^2}{2-u_n^2}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها 1 ويطلب حساب حدها الأول.

ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

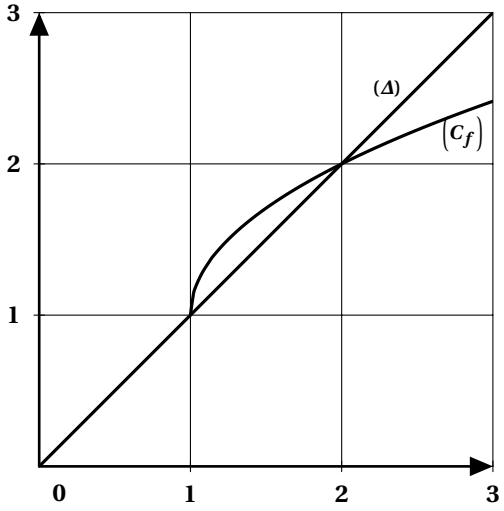
جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $w_n = \ln\left(\dfrac{2}{u_n^2}\right)$.

- احسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم n المجموع S_n حيث: $S_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$.

التمرين 108

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[1,+\infty[$ بـ : $f(x) = 1+\sqrt{x-1}$، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ كما هو موضح في الشكل.



لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = \dfrac{5}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 2$.

ب/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = e^{-\frac{1}{2}+2n}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموعين S_n و T_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = v_0^2 + v_1^2 + \cdots + v_n^2$.

جـ/ عين قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{1-e^2}\left(1-e^{4048}\right)$.

التمرين 109

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{6u_n - 4}{2 + u_n}$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 2$.

ب/ أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 2}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{1}{u_1 - 2} + \frac{1}{u_2 - 2} + \cdots + \frac{1}{u_n - 2} = \frac{n^2 + 9n}{8}$.

التمرين 110

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_1 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = 2u_n + \frac{n+2}{n(n+1)}$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n \geq 1$.

ب/ أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ هل (u_n) متقاربة؟

3/ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 2^{n+1} - 2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$.

بـ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k : $2^k \geq 1+\frac{1}{k}$.

4/ لتكن (S_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $S_n = \frac{1}{u_1 \times v_1} + \frac{1}{u_2 \times v_2} + \cdots + \frac{1}{u_n \times v_n}$.

- أثبت أن المتتالية (S_n) متقاربة.

التمرين 111

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)u_n + \alpha - 2$ حيث α عدد حقيقي ثابت.

I. 1/ عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية.

2/ عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) هندسية.

II. في كل ما يأتي نضع $\alpha = 0$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -4$.

بـ/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln(u_n + 4)$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ ويطلب حساب حدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{10}{2^n} - 4$.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $(u_0+4) \times (u_1+4) \times \cdots \times (u_n+4) = \left(\frac{10}{2^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$.

التمرين 112

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

1/ أ/ عين العددين الحقيقيين a و b حيث يكون من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 3}$.

بـ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -1$.

جـ/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{2}$ ويطلب حساب حدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

د/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 \times v_0 + u_1 \times v_1 + \cdots + u_n \times v_n$.

التمرين 113

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $\ln(u_{n+1}) = -1 + \ln(u_n)$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$.

بـ/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ أ/ أثبت أن المتتالية (u_n) هندسية أساسها e^{-1}.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = 2 + \ln\sqrt{u_n}$.

أ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

بـ/ احسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم n الجداء P_n حيث: $P_n = \left(v_1 + \frac{1}{2}\right)^1 \times (v_2+1)^2 \times \cdots \times \left(v_n + \frac{n}{2}\right)^n$.

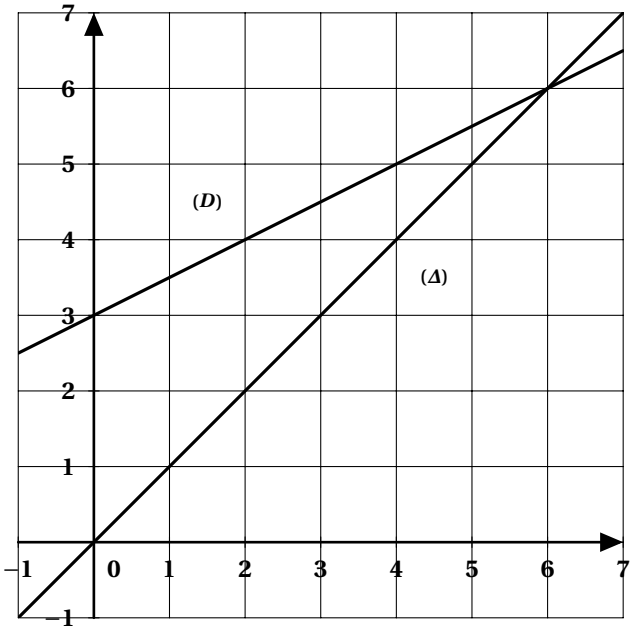
جـ/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = e^{2(v_0-2)} + e^{2(v_1-2)} + \cdots + e^{2(v_n-2)}$ ثم احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (e-1)\,S_n$.

التمرين 114

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 0$ و $u_1 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

1/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

2/ المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. في الشكل المقابل، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ و (D) المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x + 3$.



أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2، u_3 و u_4 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

بـ/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n - 6$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ويطلب حساب حدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n). ماذا تستنتج؟

4/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \frac{6}{6-u_0} + \frac{6}{6-u_1} + \cdots + \frac{6}{6-u_n}$ و $P_n = e^{\frac{1}{2}u_0 - 6} \times e^{\frac{1}{2}u_1 - 6} \times \cdots \times e^{\frac{1}{2}u_n - 6}$.

أ/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n ثم عين قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n = 255$.

بـ/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n الجداء P_n ثم احسب $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} P_n$.

التمرين 115

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1$.

1/ أ/ احسب كلا من u_1 و u_2.

بـ/ هل المتتالية (u_n) رتيبة؟ علل.

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $n \leqslant u_n \leqslant n+3$ ثم احسب $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$.

بـ/ هل المتتالية (u_n) متقاربة؟

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n - n$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ويطلب حساب حدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ عين أكبر عدد طبيعي n حتى يكون $u_n \geqslant \frac{3}{256} + n$.

4/ أ/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = \left(\frac{3}{u_0}\right)^2 + \left(\frac{3}{u_1 - 1}\right)^2 + \left(\frac{3}{u_2 - 2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{u_n - n}\right)^2$.

بـ/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع T_n حيث: $T_n = \ln\left(\frac{u_0}{3}\right) + \ln\left(\frac{u_1 - 1}{3}\right) + \ln\left(\frac{u_2 - 2}{3}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{u_n - n}{3}\right)$.

التمرين 116

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = 3^{-n}C_n^0 + 3^{-n}C_n^1 + 3^{-n}C_n^2 + \cdots + 3^{-n}C_n^n$.

1/ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ثم احسب $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$.

بـ/ أثبت أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln(u_n)$.

أ/ ما طبيعة المتتالية (v_n) ؟ احسب $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{v_n}{n}$.

ب/ احسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم n الجداء P_n حيث: $P_n = v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_n$.

التمرين 117

لتكن (u_n) و (v_n) المتتاليتين العدديتين المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + 4v_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \frac{1}{5}(3u_n + 2v_n) \end{cases}$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n + 4v_n = 0$.

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = -\frac{2}{5}u_n$ ثم عين طبيعة المتتالية (u_n).

2/ أ/ اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

ب/ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

3/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{v_0^2}{u_0^3} + \frac{v_1^2}{u_1^3} + \cdots + \frac{v_n^2}{u_n^3}$.

التمرين 118

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$.

1/ أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2 - \frac{3}{u_n + 2}$.

ب/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$.

جـ/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n + 1}{1 - u_n}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

4/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{2}{v_0} + \frac{2}{v_1} + \cdots + \frac{2}{v_n}$.

التمرين 119

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2 + \frac{1}{2}u_n^2}$.

1/ احسب كلا من u_1 و u_2 ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n).

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 2$.

ب/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n^2 - 4$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

4/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_0^2+u_1^2+\cdots+u_n^2=\dfrac{n\times 2^{n+2}+3}{2^n}-2$.

التمرين 120

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=\dfrac{1}{4}$ و $u_1=\dfrac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $4u_{n+2}=7u_{n+1}-3u_n$

ولتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_{n+1}-u_n$.

1/ احسب كلا من u_2 و v_0.

2/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{3}{4}$ ثم اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

3/ احسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم n المجموع S_n حيث: $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_{n-1}$.

4/ استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}u_n$.

التمرين 121

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3-\dfrac{9}{4u_n}$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\dfrac{3}{2}<u_n\leqslant 3$.

بـ/ أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\dfrac{2}{2u_n-3}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

د/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n=u_0\times v_0+u_1\times v_1+\cdots+u_n\times v_n$.

التمرين 122

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $3u_{n+1}=u_n+1$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>\dfrac{1}{2}$.

بـ/ أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\ln\left(u_n-\dfrac{1}{2}\right)$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب من جديد نهاية المتتالية (u_n).

3/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n=u_{n+1442}+u_{n+1443}+\cdots+u_{n+2023}$.

التمرين 123

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{4}{3}$.

1/ المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

أ/ أنشئ (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y = x$ و (D) المستقيم ذا المعادلة $y = \frac{3}{4}x + \frac{4}{3}$.

بـ/ عين إحداثيي نقطة تقاطع (Δ) و (D).

جـ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2، u_3 و u_4 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

د/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \alpha u_n - 4(\alpha + 1)$ حيث α عدد حقيقي ثابت.

أ/ عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ ثم احسب حدها الأول.

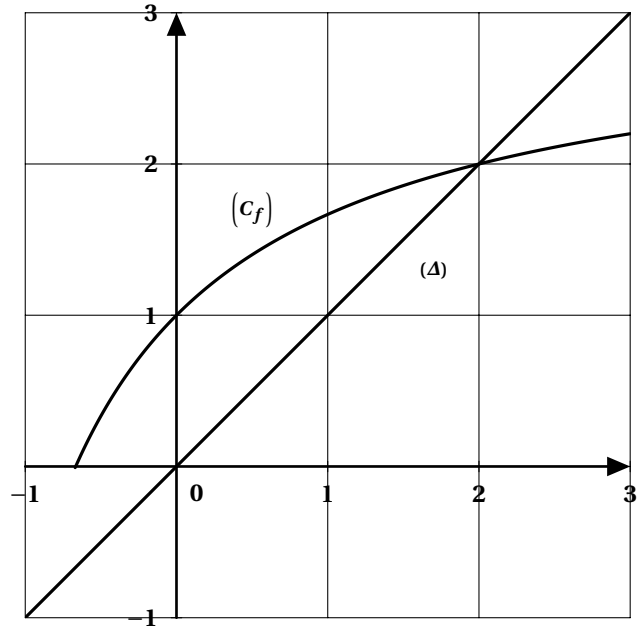
بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{16}{3} - \frac{7}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

جـ/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم احسب $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$.

3/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + \frac{4}{3}v_1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 v_2 + \cdots + \left(\frac{4}{3}\right)^n v_n$ ثم احسب $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} S_n$.

التمرين 124

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $\left]-\frac{2}{3}, +\infty\right[$ بـ : $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ كما هو موضح في الشكل.



لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leqslant u_n < 2$.

ب/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

4/ أ/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

ب/ استنتج بدلالة العدد الطبيعي n الجداء P_n حيث: $P_n = e^{\frac{3}{u_0+1}} \times e^{\frac{3}{u_1+1}} \times \cdots \times e^{\frac{3}{u_n+1}}$.

التمرين 125

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n \leqslant 2$.

ب/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة واحسب $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = 3 + \dfrac{1}{u_n - 1}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$.

جـ/ احسب من جديد نهاية المتتالية (u_n).

3/ أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

ب/ احسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم n المجموع S_n حيث: $S_n = \dfrac{u_1}{3} + \dfrac{u_2}{8} + \dfrac{u_3}{15} + \cdots + \dfrac{u_n}{n(n+2)}$.

التمرين 126

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 5 - \dfrac{4}{u_n}$.

1/ أ/ احسب كلا من u_1 و u_2 ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leqslant u_n < 4$.

ب/ أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{4 - u_n}{2}$.

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 4 - u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4\left(n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \leqslant S_n \leqslant 4(n+1)$.

بـ/ احسب $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} S_n$.

التمرين 127

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $3u_{n+1} = 2u_n - 4$ ولتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي ثابت.

I. عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ ثم احسب حدها الأول.

II. في كل ما يأتي نضع $\alpha = 4$.

1/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 4$.

2/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم احسب $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$.

3/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

4/ لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = \frac{5}{v_n + 5} - 5$.

أ/ أثبت أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما.

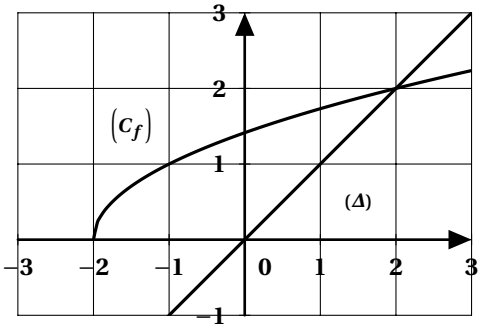
بـ/ أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (w_n) متجاورتان ثم استنتج $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} w_n$.

جـ/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{1}{w_0 + 5} + \frac{1}{w_1 + 5} + \cdots + \frac{1}{w_n + 5}$.

التمرين 128

I. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ بـ : $f(x) = \sqrt{x+2}$، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ كما هو موضح في الشكل.

- تحقق أن الدالة f متزايدة تماما.



II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

بـ/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leqslant u_n < 2$.

ب/ أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة واحسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

3/ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2-u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(2-u_n)$.

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2-u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

جـ/ احسب من جديد نهاية المتتالية (u_n).

التمرين 129

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 2}$.

1/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 2$ ثم أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

2/ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 2 = \frac{(u_n+2)(u_n-2)}{2(u_{n+1}+2)}$.

ب/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 2 \leqslant \frac{3}{4}(u_n - 2)$.

جـ/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n - 2 \leqslant 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ثم احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln\left(u_n^2 - 4\right)$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ ويطلب حساب حدها الأول.

ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2\sqrt{\frac{3}{2^n}+1}$.

جـ/ احسب من جديد نهاية المتتالية (u_n).

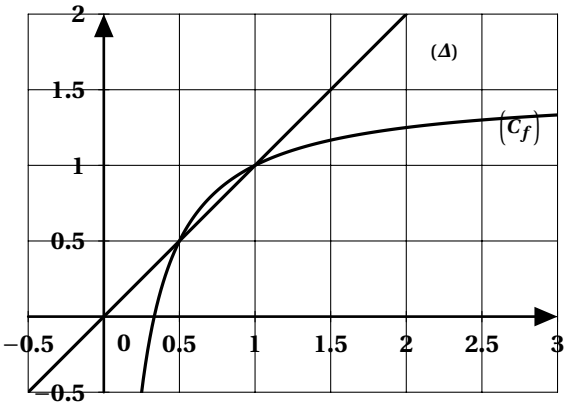
د/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n الجداء P_n حيث: $P_n = (u_0^2-4)\times(u_1^2-4)\times\cdots\times(u_n^2-4)$.

التمرين 130

I. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0,4]$ بـ : $f(x) = \frac{3x-1}{2x}$، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ كما هو موضح في الشكل.

1/ تحقق أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0,4]$.

2/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).



II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_{n+1} < u_n \leqslant 2$.

ب/ استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n). هل (u_n) متقاربة؟

3/ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(u_n - 1)$.

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n - 1 \leqslant \frac{1}{2^n}$.

جـ/ احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين 131

I. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

- أنشئ (C_f) والمستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$.

II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$.

1/ أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 6$.

ب/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n - 6$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

4/ أ/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

بـ/ استنتج بدلالة العدد الطبيعي n المجموع T_n حيث: $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

التمرين 132

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$.

1/ أثبت أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

2/ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. ماذا تستنتج؟

3/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

4/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln u_n$.

أ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج نوع المتتالية (v_n).

بـ/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n العدد P_n حيث: $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_n)$.

جـ/ عين قيم العدد الطبيعي n حيث $4P_n - 3n > 0$.

التمرين 133

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n^3}{3u_n^2+1}$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$.

بـ/ أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{3}u_n$.

بـ/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

جـ/ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 134

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{4u_n}{1+u_n}$.

1/ احسب كلا من u_1 و u_2.

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$.

بـ/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ويطلب حساب حدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

4/ لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = \frac{3}{u_n}$.

أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 1 - v_n$.

ب/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$.

جـ/ احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$.

التمرين 135

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_1 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = \frac{nu_n + 2}{n+1}$.

1/ احسب كلا من u_2 و u_3.

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n < 2$.

ب/ أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = n(\alpha - u_n)$ حيث α عدد حقيقي ثابت.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $2 - \alpha$ ويطلب حساب حدها الأول بدلالة α.

ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n و α ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n و α.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

4/ أ/ احسب بدلالة α والعدد الطبيعي غير المعدوم n المجموع S_n حيث: $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

ب/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n = n(n-1)$.

التمرين 136

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 8\left(1 - \frac{3}{u_n + 2}\right)$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 < u_n < 4$.

ب/ أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_{n+1} \leqslant \frac{4}{5}(4 - u_n)$.

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 4 - u_n \leqslant \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

4/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

التمرين 137

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=-\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=(u_n+1)e^{u_n}-1$.

1/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1<u_n\leqslant -\frac{1}{2}$.

2/ أ/ ادرس إشارة $(x+1)(e^x-1)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$ ثم أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

ب/ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة واحسب نهايتها.

2/ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1+u_{n+1}\leqslant \frac{1}{\sqrt{e}}(1+u_n)$.

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1+u_n\leqslant \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{2}$.

جـ/ احسب من جديد نهاية المتتالية (u_n).

3/ نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}$.

- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n=\ln(2u_n+2)$.

التمرين 138

I. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{x}{x+8}$.

1/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2/ استنتج أنه من أجل كل x من المجال $[0,+\infty[$ فإن $f(x)\geqslant 0$.

II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\geqslant 0$.

ب/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=1+\frac{7}{u_n}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 8 ويطلب حساب حدها الأول.

ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

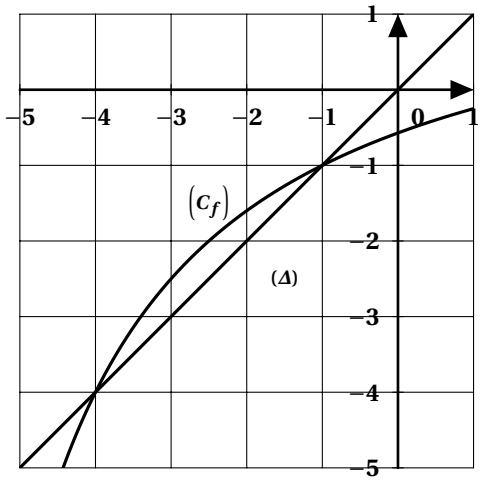
3/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\cdots+\frac{1}{u_n}$.

التمرين 139

I. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[-4,-1]$ بـ : $f(x)=\frac{2x-4}{x+7}$، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ كما هو موضح في الشكل.

1/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2/ استنتج أنه من أجل كل x من المجال $]-4,-1[$ فإن $f(x)\in]-4,-1[$.



II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = -3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

بـ/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-4 < u_n < -1$.

بـ/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \dfrac{-u_n - 1}{u_n + 4}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ ويطلب حساب حدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -4 + \dfrac{3}{1 + 2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

4/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = \dfrac{1}{u_0 + 4} + \dfrac{1}{u_1 + 4} + \cdots + \dfrac{1}{u_n + 4}$.

التمرين 140

(v_n) متتالية هندسية ذات حدود موجبة تماما حدها الأول v_0 وأساسها q حيث $v_0 = e^2$ و $v_4 - 9v_2 = 0$.

1/ أثبت أن $q = 3$ ثم اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

2/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n والجداء P_n حيث: $S_n = v_0^2 + v_1^2 + \cdots + v_n^2$ و $P_n = v_0 \times v_1 \times \cdots \times v_n$.

3/ لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = \ln u_n$.

أ/ أثبت أن المتتالية (w_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n.

جـ/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع T_n حيث: $T_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$.

التمرين 141

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 - \dfrac{2}{u_n}$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 < u_n \leqslant 3$.

بـ/ أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n - 2}\right)$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\ln 2$ ويطلب حساب حدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{2^{n+2} - 1}{2^{n+1} - 1}$.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ أ/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

بـ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\left(\frac{u_0 - 1}{u_0 - 2}\right) \times \left(\frac{u_1 - 1}{u_1 - 2}\right) \times \cdots \times \left(\frac{u_n - 1}{u_n - 2}\right) = 2^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$.

التمرين 142

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leqslant u_n < 4$.

بـ/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(4 - u_n)$.

بـ/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 4 - u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

جـ/ نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n \geqslant 4n - 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{4\alpha - u_n}{\alpha - u_n}$ حيث α عدد حقيقي ثابت.

أ/ عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ثم احسب حدها الأول.

بـ/ نفرض أن $\alpha = 1$. اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{v_0}{4^n} + \frac{v_1}{4^{n-1}} + \frac{v_2}{4^{n-2}} + \cdots + \frac{v_{n-1}}{4} + v_n$.

التمرين 143

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = \ln 8$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \ln\left(\frac{2}{7}e^{u_n} + 5\right)$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \ln 7$.

بـ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $e^{u_{n+1}} - e^{u_n} = \frac{5}{7}(7 - e^{u_n})$.

جـ/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $e^{u_{n+1}} > e^{u_n}$ ثم ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = e^{u_n} - 7$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \ln\left(7 + \left(\frac{2}{7}\right)^n\right)$.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = 2023^{\ln(e^{u_0}-7)} + 2023^{\ln(e^{u_1}-7)} + \cdots + 2023^{\ln(e^{u_n}-7)}$.

التمرين 144

I. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x+4}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$.

3/ أنشئ (Δ) و (C_f).

II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

بـ/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leqslant u_n \leqslant \frac{5}{2}$.

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{6-3u_n}{u_n+2}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $-\frac{1}{3}$ ثم اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

بـ/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{v_0+1}{v_0} + \frac{2v_1+1}{v_1} + \frac{4v_2+1}{v_2} + \cdots + \frac{2^n v_n+1}{v_n}$.

التمرين 145

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{4u_n+3}{6}$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < \frac{3}{2}$.

بـ/ أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = 2u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي ثابت.

أ/ عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = \ln|v_0| + \ln|v_1| + \cdots + \ln|v_n|$.

التمرين 146

I. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$.

3/ أنشئ (Δ) و (C_f).

II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)$.

1/ أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n\geqslant\sqrt{2}$.

ب/ أثبت أنه من أجل كل x من المجال $\left[\sqrt{2},+\infty\right[$ فإن $f(x)\leqslant x$.

جـ/ استنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ابتداء من الرتبة الأولى.

د/ أثبت أن المتتالية (u_n) متقاربة.

3/ لتكن ℓ نهاية المتتالية (u_n). أثبت أن ℓ هو حل للمعادلة $f(x)=x$ ذات المجهول x ثم استنتج قيمة العدد الحقيقي ℓ.

التمرين 147

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n^2+3u_n-\frac{3}{2}$.

1/ احسب كلا من u_1 و u_2 ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n).

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_n-3$.

أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}=-\frac{1}{2}v_n^2$.

ب/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1\leqslant v_n\leqslant 0$.

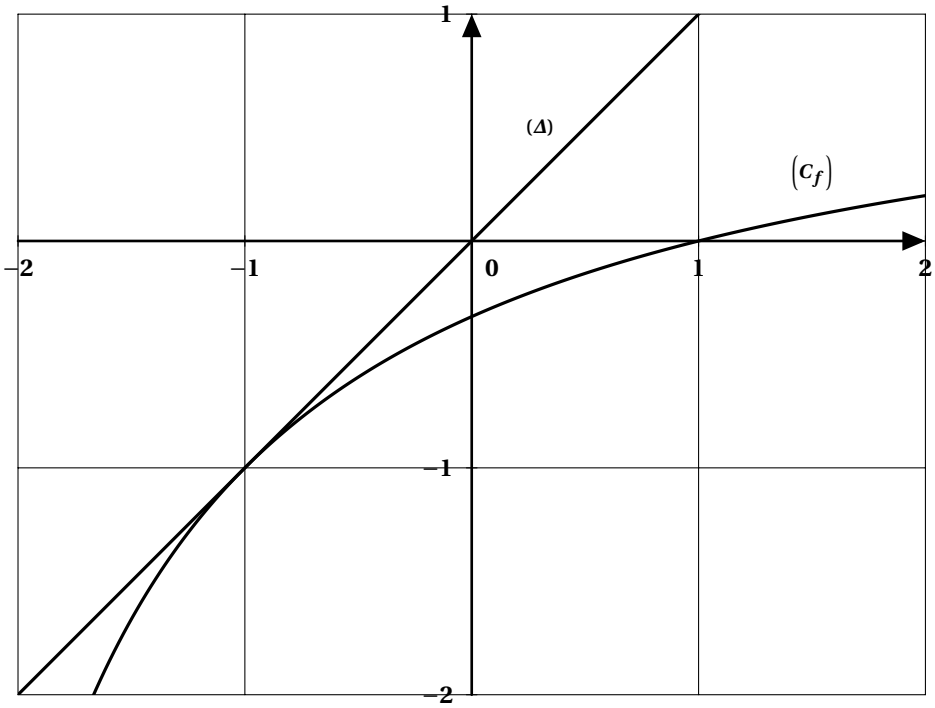
جـ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}-v_n=-v_n\left(\frac{1}{2}v_n+1\right)$.

د/ استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n). هل (u_n) متقاربة؟

هـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

التمرين 148

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty,-3[$ بـ : $f(x)=\frac{x-1}{x+3}$، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ كما هو موضح في الشكل.



لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 < u_n \leqslant 0$.

ب/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \dfrac{1}{u_n + 1}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = 2^{v_0} + 2^{v_1} + \cdots + 2^{v_n}$.

التمرين 149

I. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{2x}{3x+2}$.

- أثبت أن الدالة f متزايدة تماما.

II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3u_n + 2}$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n \leqslant 2$.

ب/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \dfrac{\alpha}{u_n}$ حيث α عدد حقيقي ثابت.

- عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\dfrac{3}{2}$.

3/ في كل ما يأتي نضع $\alpha = 1$.

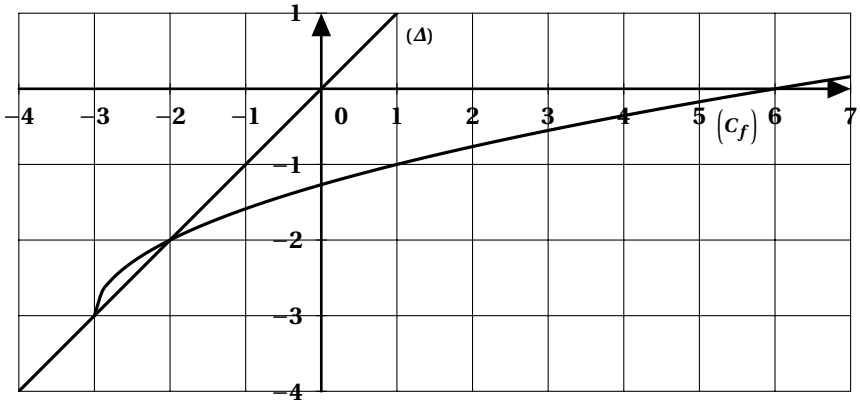
أ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

ب/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

جـ/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n الجداء P_n حيث: $P_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \cdots \times e^{v_n}$.

التمرين 150

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-3,+\infty[$ بـ : $f(x) = -3 + \sqrt{x+3}$، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ كما هو موضح في الشكل.



لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$.

ب/ أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{2}{3}\ln(u_n + 3)$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ويطلب حساب حدها الأول.

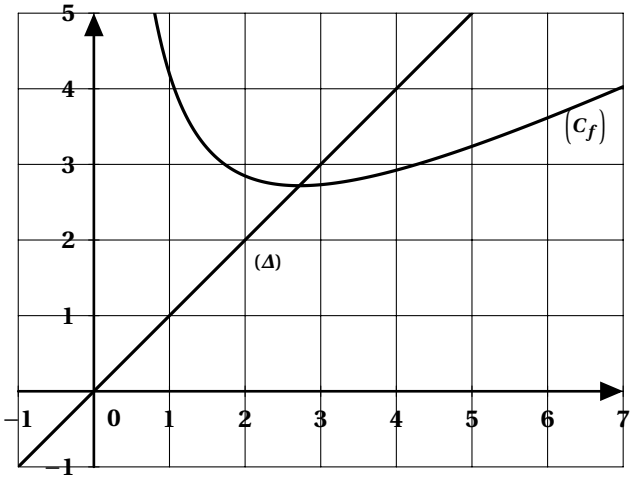
ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

د/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n الجداء P_n حيث: $P_n = (u_0 + 3) \times (u_1 + 3) \times \cdots \times (u_n + 3)$.

التمرين 151

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x^2 + e^2}{2x}$، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ كما هو موضح في الشكل.



لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 2e$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ أ/ أثبت أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]e,+\infty[$ ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > e$.

ب/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(e-u_n)(e+u_n)}{2u_n}$ ثم ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

جـ/ استنتج أن المتتالية (u_n) محدودة ومتقاربة ثم احسب نهايتها.

3/ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - e \leqslant \dfrac{1}{4}(u_n - e)$.

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n - e \leqslant e \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

جـ/ احسب من جديد نهاية المتتالية (u_n).

التمرين 152

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{u_n + 2}$.

1/ أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 4 - \dfrac{8}{u_n + 2}$.

ب/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leqslant u_n < 2$.

جـ/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = 1 - \dfrac{2}{u_n}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = \dfrac{1}{u_0} + \dfrac{1}{u_1} + \cdots + \dfrac{1}{u_n}$.

التمرين 153

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 4e^3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 4$.

ب/ أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln(u_n) - 2\ln 2$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ويطلب حساب حدها الأول.

ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ أ/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0^2 + v_1^2 + \cdots + v_n^2$.

ب/ هل المتتالية (S_n) متقاربة؟ علل.

التمرين 154

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+3u_n}$.

1/ أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3} - \frac{4}{3(2+3u_n)}$.

ب/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n \leqslant 2$.

جـ/ أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{\alpha}{u_n}$ حيث α عدد حقيقي ثابت.

- عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{3}{2}$.

3/ في كل ما يأتي نضع $\alpha = 1$.

أ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

ب/ لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = e^{v_n}$.

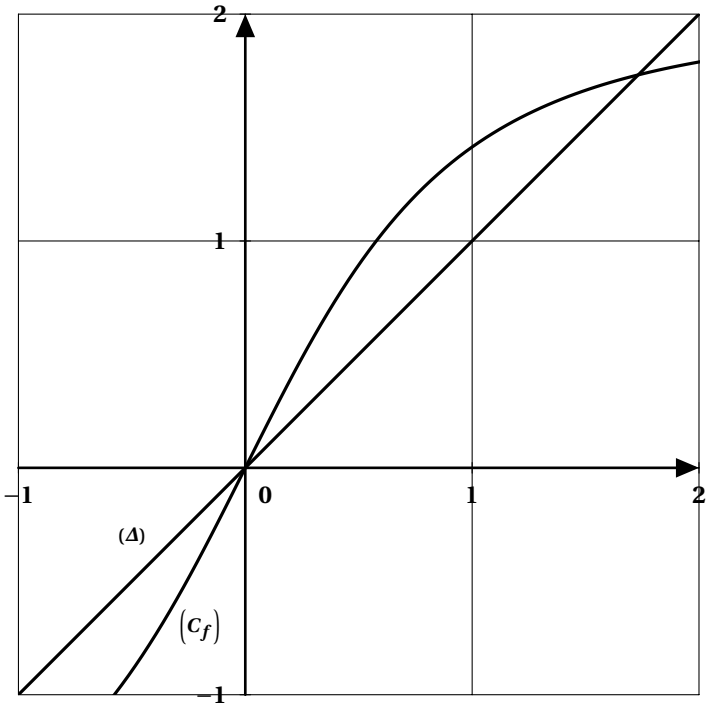
- عين طبيعة المتتالية (w_n) ثم احسب بدلالة العدد الطبيعي n الجداء P_n حيث: $P_n = w_0 \times w_1 \times \cdots \times w_n$.

التمرين 155

I. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ كما هو موضح في الشكل.

1/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2/ استنتج أنه من أجل كل x من المجال $\left[1, \sqrt{3}\right]$ فإن $f(x) \in \left[1, \sqrt{3}\right]$.



II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leqslant u_n < \sqrt{3}$.

ب/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n\left(2 - \sqrt{u_n^2+1}\right)}{\sqrt{u_n^2+1}}$ ثم ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

جـ/ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \dfrac{u_n^2}{3-u_n^2}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

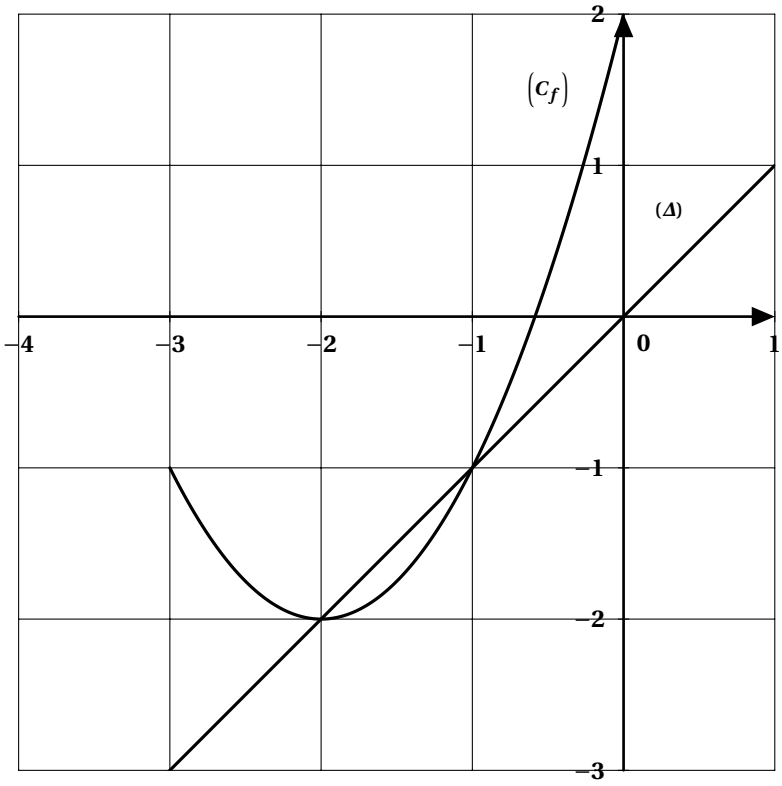
جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

د/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = \dfrac{1}{3-u_0^2} + \dfrac{1}{3-u_1^2} + \cdots + \dfrac{1}{3-u_n^2}$.

هـ/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n الجداء P_n حيث: $P_n = \dfrac{1}{2}v_0 \times \dfrac{1}{2}v_1 \times \cdots \times \dfrac{1}{2}v_n$.

التمرين 156

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[-3,0]$ بـ : $f(x) = (x+2)^2 - 2$، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ كما هو موضح في الشكل.



لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = -\frac{5}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

بـ/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2 < u_n < -1$.

بـ/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln(u_n + 2)$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 ويطلب حساب حدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

4/ أ/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

بـ/ استنتج بدلالة العدد الطبيعي n الجداء P_n حيث: $P_n = (u_0 + 2) \times (u_1 + 2) \times \cdots \times (u_n + 2)$ ثم احسب $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} P_n$.

التمرين 157

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_1 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = \frac{2(u_n + \alpha) + 1}{5}$

حيث α عدد حقيقي ثابت يختلف عن -2 ولتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = \frac{-3u_n + 2\alpha + 1}{2}$.

1/ أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ ويطلب حساب حدها الأول بدلالة α.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n و α ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n و α.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

د/ ناقش، حسب قيم العدد الحقيقي α، اتجاه تغير المتتالية (v_n).

هـ/ احسب بدلالة α والعدد الطبيعي غير المعدوم n المجموعين S_n و S'_n حيث: $S_n = v_1+v_2+\cdots+v_n$ و $S'_n = u_1+u_2+\cdots+u_n$.

2/ في كل ما يأتي نضع $\alpha = -5$ ولتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $w_n = \ln(u_n+3)$.

أ/ أثبت أن المتتالية (w_n) حسابية أساسها $\ln 2 - \ln 5$ ويطلب حساب حدها الأول.

بـ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $(u_1+3)\times(u_2+3)\times\cdots\times(u_n+3) = \sqrt{e^{n[(n+1)\ln 2-(n-1)\ln 5]}}$.

التمرين 158

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ ولتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$.

1/ أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما وأن المتتالية (v_n) متناقصة تماما.

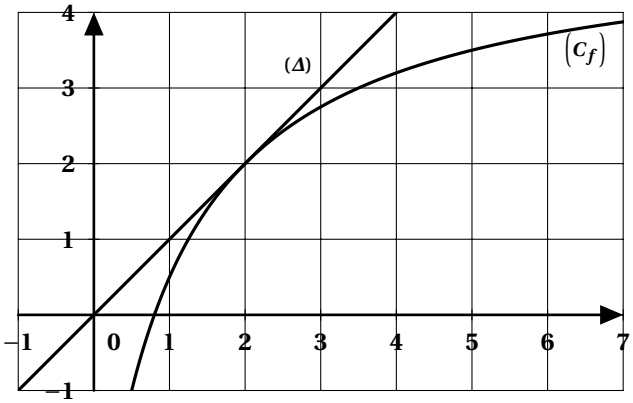
2/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < v_n$.

3/ استنتج أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتان.

4/ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)$ ثم استنتج أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

التمرين 159

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{5x-4}{x+1}$، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ كما هو موضح في الشكل.



لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

بـ/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 2$.

بـ/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{18+8n}{3+4n}$.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = e^{12v_0} + e^{12v_1} + \cdots + e^{12v_n}$.

التمرين 160

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 6 - \frac{7}{u_n + 2}$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leqslant u_n < 5$.

بـ/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n - 5}{u_n + 1}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ أ/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

بـ/ استنتج بدلالة العدد الطبيعي n المجموع T_n حيث: $T_n = \frac{1}{u_0 + 1} + \frac{1}{u_1 + 1} + \cdots + \frac{1}{u_n + 1}$.

التمرين 161

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_1 = -2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = \frac{3(n+1)u_n - (8n+12)}{n}$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n < 0$.

بـ/ أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = \frac{4 - u_n}{n}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 ويطلب حساب حدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = 4 - 2n \times 3^n$.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

د/ احسب بدلالة العدد الطبيعي غير معدوم n الجداء P_n حيث: $P_n = (4 - u_1) \times (4 - u_2) \times \cdots \times (4 - u_n)$.

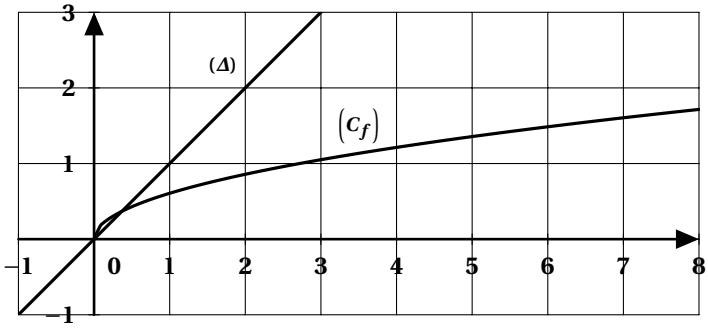
3/ لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $w_n = \ln\left(\frac{n}{4 - u_n}\right)$.

- اكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n ثم احسب بدلالة العدد الطبيعي غير معدوم n المجموع S_n حيث: $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$.

التمرين 162

I. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ : $f(x)=e^{-\frac{1}{2}}\times\sqrt{x}$، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ كما هو موضح في الشكل.

- أثبت أن الدالة f متزايدة تماما.



II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=e^2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1/ أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>\frac{1}{e}$.

ب/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها.

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\frac{1}{2}+\ln\sqrt{u_n}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ويطلب حساب حدها الأول.

ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

4/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n=\frac{1}{1+\ln u_0}+\frac{1}{1+\ln u_1}+\cdots+\frac{1}{1+\ln u_n}$.

التمرين 163

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=\alpha$ (α عدد حقيقي ثابت) ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=2-\frac{4}{u_n+3}$.

I. عين قيم العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

II. في كل ما يأتي نضع $\alpha=0$ (أي $u_0=0$).

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leq u_n<1$.

ب/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها.

2/ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<1-u_{n+1}\leq\frac{1}{3}(1-u_n)$.

بـ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 1 - u_n \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $\ln S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

بـ/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع T_n حيث: $T_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \cdots + \frac{1}{u_n + 2}$.

التمرين 164

α و β عددان حقيقيان حيث $0 < \alpha < \beta$.

لتكن (u_n) و (v_n) المتتاليتين العدديتين المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = \frac{2u_n \times v_n}{u_n + v_n} \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = \beta \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$.

1/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n \leqslant v_n$.

2/ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.

بـ/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n - u_n \leqslant \frac{1}{2^n}(\beta - \alpha)$ ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n)$.

3/ أ/ ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

بـ/ استنتج أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

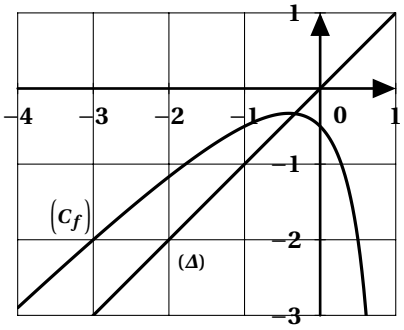
4/ لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = u_n \times v_n$.

أ/ أثبت أن المتتالية (w_n) ثابتة يطلب تعيين عبارتها بدلالة α و β.

بـ/ احسب نهاية المتتاليتين (u_n) و (v_n).

التمرين 165

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty, 1[$ بـ : $f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{2x - 2}$، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ كما هو موضح في الشكل.



لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=-3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1/ أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

بـ/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-3\leqslant u_n<-\frac{1}{3}$.

3/ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}+\frac{1}{3}\geqslant\frac{5}{8}\left(u_n+\frac{1}{3}\right)$.

بـ/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n+\frac{1}{3}\geqslant-\frac{8}{3}\times\left(\frac{5}{8}\right)^n$ ثم احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}u_n$.

4/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\left(u_0+\frac{1}{3}\right)+\left(u_1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(u_n+\frac{1}{3}\right)<0\leqslant\frac{64}{9}\left[\left(\frac{5}{8}\right)^{n+1}-1\right]$.

بـ/ أثبت أن $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}S_n=-\infty$.

التمرين 166

لتكن (u_n) و (v_n) المتتاليتين العدديتين المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n=\frac{2^n+3n-1}{2}$ و $v_n=\frac{2^n-3n+1}{2}$.

1/ احسب كلا من u_0، u_1، u_2، v_0، v_1 و v_2.

2/ لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n=u_n-v_n$.

أ/ أثبت أن المتتالية (w_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

بـ/ احسب المجموع S حيث: $S=w_0+w_1+\cdots+w_{10}$.

3/ لتكن (t_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $t_n=u_n+v_n$.

أ/ أثبت أن المتتالية (t_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

بـ/ احسب المجموع S' حيث: $S'=t_0+t_1+\cdots+t_{10}$.

4/ نعتبر المجموعين S_1 و S_2 حيث: $S_1=u_0+u_1+\cdots+u_{10}$ و $S_2=v_0+v_1+\cdots+v_{10}$.

أ/ تحقق أن $S=S_1-S_2$ و $S'=S_1+S_2$.

بـ/ استنتج قيمة كل من S_1 و S_2.

التمرين 167

a عدد حقيقي موجب تماما.

I. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ : $f(x)=\sqrt{1+ax^2}$.

- أثبت أن الدالة f متزايدة تماما.

II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1/ نفرض أن $0<a<1$:

أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leqslant u_n<\frac{1}{\sqrt{1-a}}$.

بـ/ أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها.

2/ نفرض أن $a>1$ ولتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

بـ/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}^2 - u_n^2 = a^n$.

جـ/ لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $w_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}$.

- اكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n و a.

- اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \sqrt{w_n}$ ثم احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

التمرين 168

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{9u_n + 2}{u_n + 8}$.

1/ أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 9 - \frac{70}{u_n + 8}$.

بـ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 2$.

جـ/ أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 - u_{n+1} \leqslant \frac{7}{8}(2 - u_n)$.

بـ/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 2 - u_n \leqslant \frac{3}{2} \times \left(\frac{7}{8}\right)^n$.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب من جديد نهاية المتتالية (u_n).

4/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0(v_0 - 1) + 10u_1(v_1 - 1) + \cdots + 10^n u_n(v_n - 1)$.

التمرين 169

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{4u_n + 2}{u_n + 3}$.

1/ أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 4 - \frac{10}{u_n + 3}$.

بـ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 < u_n < 2$.

جـ/ أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها.

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب من جديد نهاية المتتالية (u_n).

التمرين 170

I. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x^2}{4}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ ادرس إشارة $x(x-4)$ حسب قيم x من المجال $[0,+\infty[$ ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$.

2/ أنشئ (Δ) و (C_f).

II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

بـ/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 4$.

جـ/ أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها.

التمرين 171

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = \alpha$ (α عدد حقيقي ثابت) ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

I. عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

II. في كل ما يأتي نضع $\alpha = 0$ (أي $u_0 = 0$).

1/ أ/ عين العدد الحقيقي b حيث يكون من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 + \frac{b}{u_n + 3}$.

بـ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 < u_n \leqslant 0$.

جـ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n+1)^2}{u_n + 3}$ ثم ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

د/ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{2}$ ويطلب حساب حدها الأول.

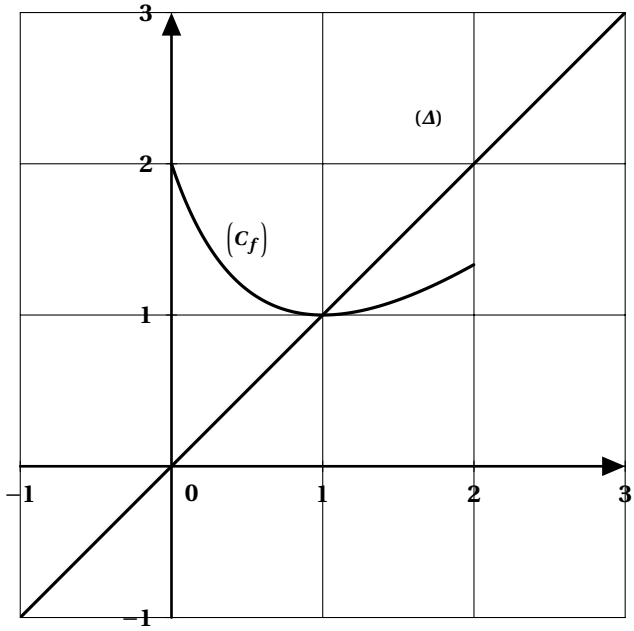
بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ احسب المجموع S حيث: $S = \frac{8}{u_0 + 1} + \frac{8}{u_1 + 1} + \cdots + \frac{8}{u_{2022} + 1}$.

التمرين 172

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0,2]$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x+1}$، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ كما هو موضح في الشكل.



لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1/ أ/ بقراءة بيانية، حدد اتجاه تغير الدالة f على المجال $[1,2]$.

ب/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

جـ/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1<u_n\leqslant 2$.

ب/ أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

3/ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1<\dfrac{u_n-1}{u_n+1}\leqslant\dfrac{1}{3}$.

ب/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_{n+1}-1\leqslant\dfrac{1}{3}(u_n-1)$.

جـ/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n-1\leqslant\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ ثم احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}u_n$.

4/ نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$.

- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $n<S_n\leqslant n+\dfrac{1}{2}\left[1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right]$ ثم احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}S_n$.

التمرين 173

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=4+e^{-2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=u_n^2-8u_n+20$.

1/ أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=(u_n-4)^2+4$.

ب/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4<u_n<5$.

جـ/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln(u_n - 4)$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + \frac{v_1}{2} + \frac{v_2}{2^2} + \cdots + \frac{v_n}{2^n}$.

4/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n الجداء P_n حيث: $P_n = (u_0 - 4) \times (u_1 - 4) \times \cdots \times (u_n - 4)$.

التمرين 174

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 2 + e^{-\frac{1}{3}}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2 + \sqrt{u_n - 2}$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 < u_n < 3$.

بـ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 5u_n - 6}{u_n - 2 + \sqrt{u_n - 2}}$ ثم ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

جـ/ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{1}{\ln(u_n - 2)}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 ويطلب حساب حدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ و $P_n = (u_0 - 4) \times (u_1 - 4) \times \cdots \times (u_n - 4)$.

أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = e^{S_n}$.

بـ/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n ثم استنتج بدلالة العدد الطبيعي n الجداء P_n.

التمرين 175

(u_n) متتالية هندسية ذات حدود موجبة تماما حدها الأول u_0 وأساسها q حيث: $\begin{cases} u_1 \times u_3 = e^4 \\ \ln u_2 + \ln u_5 = 1 \end{cases}$.

1/ أ/ احسب u_2 و q.

بـ/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = e^{4-n}$.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_0 = e^4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = e^{-1}(3u_n + v_n)$ ولتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = \frac{v_n}{u_n} + 1$.

أ/ أثبت أن المتتالية (w_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (v_n).

3/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{v_0}{u_0} + \frac{v_1}{u_1} + \cdots + \frac{v_n}{u_n}$.

التمرين 176

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = \alpha$ (α عدد حقيقي ثابت) ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 2}$.

I. عين قيم العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

II. في كل ما يأتي نضع $\alpha = 1$ (أي $u_0 = 1$).

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leqslant u_n < 2$.

بـ/ أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

د/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \cdots + \frac{1}{u_n}$.

3/ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_{n+1} - 2| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - 2|$.

بـ/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_n - 2| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

جـ/ احسب من جديد نهاية المتتالية (u_n).

التمرين 177

a عدد حقيقي موجب تماما.

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = a$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{a + u_n}{1 + au_n}$.

1/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n - b}{u_n + b}$ حيث b عدد حقيقي ثابت.

- عين قيمة العدد الحقيقي b حتى تكون المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول بدلالة a.

3/ نفرض أن $a = 3$ و $b = 1$.

أ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

جـ/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

4/ نفرض أن a عدد حقيقي موجب تماما و $b=1$.

- اكتب بدلالة a والعدد الطبيعي n كلا من v_n، u_n و S_n.

التمرين 178

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{3u_n}{1+2u_n}$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$.

بـ/ أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\frac{u_n}{1-u_n}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 ويطلب حساب حدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{3^n}{3^n+1}$.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=\frac{1}{1-u_n}+\frac{1}{1-u_n}+\cdots+\frac{1}{1-u_n}$.

أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2S_n=2n+1+3^{n+1}$.

بـ/ ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5.

جـ/ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $2S_n-2n$ قابلا للقسمة على 5.

التمرين 179

1/ أ/ ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2^n و 3^n على 5.

بـ/ عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $2023^{1444}+1444^{2023}$ على 5.

2/ لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=2$ و $u_1=5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+2}=5u_{n+1}-6u_n$.

- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3u_n-2^n$.

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_n-2^n$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=2^n+3^n$.

4/ أ/ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $u_n\equiv 0\,[5]$.

بـ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : العدد u_n فردي.

جـ/ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون رقم آحاد العدد u_n هو 3.

التمرين 180

(u_n) متتالية هندسية ذات حدود موجبة تماما حدها الأول u_1 وأساسها q حيث: $\begin{cases} u_1+2u_2+u_3=116 \\ u_1\times u_3=256 \end{cases}$.

I. احسب الحدود u_1، u_2 و u_3 والأساس q.

II. في كل ما يأتي نفرض أن $u_1=4$ و $q=4$.

1/ اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

2/ عين حدود المتتالية (u_n) التي تحقق $1443<u_n<2023$.

3/ احسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم n المجموع S_n والجداء P_n حيث: $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$ و $P_n=u_1\times u_2\times\cdots\times u_n$.

4/ أ/ ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 5.

بـ/ n عدد طبيعي. عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $1444^{1443}+49^{2n+1}+5n-2023$ على 5.

جـ/ نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $T_n=\frac{1}{\ln 2}\left[\ln 4+\ln 4^2+\cdots+\ln 4^n\right]$.

- احسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم n المجموع T_n ثم عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $T_n+4n^2+7^{4n}\equiv 0\,[5]$.

التمرين 181 بكالوريا علمي 2024

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{4-u_n}{2+u_n}$.

1/ احسب كلا من u_1، u_2 و u_3 ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leqslant u_n\leqslant 2$.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+4}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $-\frac{2}{3}$ ثم اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

بـ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{5}{1-v_n}-4$ ثم احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}u_n$.

3/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=v_n+v_{n+1}+\cdots+v_{n+2024}$ و $T_n=\frac{1}{4+u_n}+\frac{1}{4+u_{n+1}}+\cdots+\frac{1}{4+u_{n+2024}}$.

- احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n ثم استنتج بدلالة العدد الطبيعي n المجموع T_n.

التمرين 182 بكالوريا علمي 2024

I. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[2,+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{x+1}{2x}$.

- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم استنتج أنه من أجل كل x من المجال $[2,+\infty[$ فإن $\frac{1}{2}<f(x)\leqslant\frac{3}{4}$.

II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geqslant 2$ بـ : $u_n=\frac{n}{2^n}$.

1/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geqslant 2$: $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\frac{3}{4}$.

2/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geqslant 2$: $u_n\leqslant\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$ ثم احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}u_n$.

3/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geqslant 2$: $S_n=\frac{u_2}{2}+\frac{u_3}{3}+\cdots+\frac{u_n}{n}$.

- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geqslant 2$: $S_n=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$ ثم عين قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون: $S_n=\frac{511}{1024}$.

التمرين 183 بكالوريا علمي 2023

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=-1+\frac{2}{2-u_n}$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n\leqslant\frac{1}{2}$.

ب/ أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\frac{1}{u_n}-1$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 ثم اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{1}{2^n+1}$ ثم احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}u_n$.

3/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$ و $T_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\cdots+\frac{1}{u_n}$.

- احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n ثم أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $T_n=2^{n+1}+n$.

التمرين 184 بكالوريا علمي 2023

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{4}{5}u_n+1$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n<5$.

ب/ أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_n-5$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{4}{5}$ ويطلب حساب حدها الأول.

ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=-5\times\left(\frac{4}{5}\right)^n+5$.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

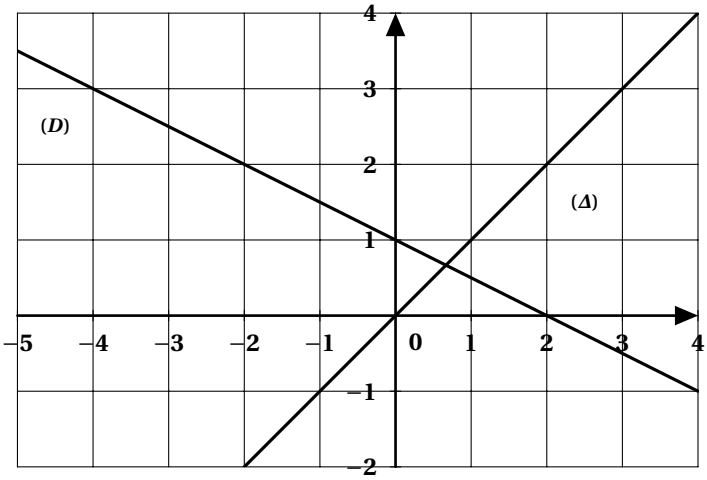
3/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$ و $T_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

- احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n ثم أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $T_n=5n-20\times\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]$.

التمرين 185 بكالوريا علمي 2022

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

في الشكل المقابل، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ و (D) المستقيم ذو المعادلة $y=-\frac{1}{2}x+1$.



لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=-4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n+1$.
1/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.
2/ أ/ هل (u_n) رتيبة؟ برر.

ب/ ضع تخمينا حول تقارب المتتالية (u_n).

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\left(u_n-\frac{2}{3}\right)^2$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ويطلب حساب حدها الأول.

ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ واستنتج أن (u_n) متقاربة.

4/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_0\times v_1\times\cdots\times v_{n-1}=\left(\frac{14}{3}\right)^{2n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2-n}$.

التمرين 186 بكالوريا علمي 2022

(u_n) متتالية هندسية ذات حدود موجبة تماما حدها الأول u_0 وأساسها q حيث: $\begin{cases}u_0\times u_2=e^2\\ \ln(u_1)+\ln(u_7)=-4\end{cases}$.

1/ أ/ عين u_1 و q.

ب/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=e^{2-n}$.

2/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_0=e^3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}=v_n+u_n$.

أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{e^{3-n}-e^4}{1-e}$.

ب/ أثبت أن المتتالية (v_n) متقاربة.

4/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $T_n=\frac{1}{e}v_0+\frac{1}{e}v_1+\cdots+\frac{1}{e}v_n$.

أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{e}v_n=\frac{1}{1-e}(u_n-e^3)$.

ب/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $T_n=\frac{1}{1-e}\left[S_n-(n+1)e^3\right]$.

التمرين 187 بكالوريا علمي 2021

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n=-4n+3$.
1/ أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
2/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=-2n^2+n+3$.

بـ/ عين العدد الطبيعي n حيث: $S_n=-30132$.

3/ (v_n) متتالية عددية ذات حدود موجبة تماما حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\ln(v_n)$.

أ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

بـ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها e^{-4}.

4/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $T_n=\ln\left[v_0\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]+\ln\left[v_1\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]+\cdots+\ln\left[v_n\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\right]$.
- احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع T_n.

التمرين 188 بكالوريا علمي 2021

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{3}{8}(u_n+5)$.
1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n<3$.

بـ/ أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.
2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=3(3-u_n)$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{8}$ ويطلب حساب حدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=3-3\times\left(\frac{3}{8}\right)^n$.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).
3/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n=(3-u_0)\times(3-u_1)\times\cdots\times(3-u_n)$.
- احسب بدلالة العدد الطبيعي n الجداء P_n.

التمرين 189 بكالوريا علمي 2020

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=\alpha$ (α عدد حقيقي ثابت) ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n-1$.

I. نفرض أن $\alpha=-4$ أي أن $u_0=-4$.
- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=-4$.

II. في كل ما يأتي نفرض أن $\alpha\neq-4$.
لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_n+4$.
1/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$.
2/ اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n و α ثم أثبت أن (u_n) متقاربة.
3/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

- احسب بدلالة α والعدد الطبيعي n المجموع S_n ثم احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} S_n$.

التمرين 190 بكالوريا علمي 2020

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3u_n-2n+3$.

1/ احسب كلا من u_1 و u_2 ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n).

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_n-n+1$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 ويطلب حساب حدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=\frac{1}{2}(3^{n+1}+n^2-n-3)$.

بـ/ احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} S_n$ ، $\lim S_n$.

التمرين 191 بكالوريا علمي 2008

1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[0;2]$ بالعبارة $f(x)=\frac{x+2}{-x+4}$

ا- بين ان الدالة f متزايدة على I

ب- يبّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ تنتمي الى I.

2) (u_n) هي المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما ياتي $u_0=\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$.

ا- برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي الى I.

ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج انها متقاربة .

3) ا- برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n=1+\frac{1}{(\frac{3}{2})^n+1}$

ب- عين النهاية $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n$.

التمرين 192 بكالوريا علمي 2008

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي

$u_0=\frac{5}{2}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{3}{2}u_n+2$.

1) ا- ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ والمنحنى (d) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب $f(x)=\frac{2}{3}x+2$.

ب- ب- باستعمال الرسم السابق ، مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 و u_4.

ج- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

2) ا- برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 6$.

ب- تحقق ان (u_n) متزايدة

.

ج- هل (u_n) متقاربة؟ برر اجابتك.

3) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$.

ا- اثبت ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.

ب- اكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

التمرين 193 بكالوريا علمي 2009

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ و $u_1 = 2$ و $u_0 = 1$.

المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1) احسب v_0 و v_1.

2) برهن ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها.

3) ا- احسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_{n-1}$

ب- برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + 1$.

ج- بين ان (u_n) متقاربة.

التمرين 194 بكالوريا علمي 2009

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما وحدها الاول u_1 واساسها q حيث :

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

1) ا- أحسب u_2 والاساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الاول u_1.

ب- اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

ج- احسب S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ بدلالة n ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 728$.

2) (v_n) متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم كما يلي $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$ و $v_1 = 2$

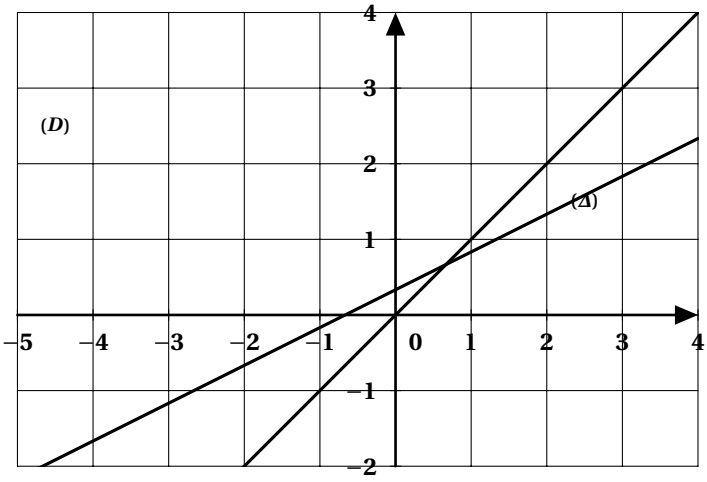
ا- احسب v_2 ، v_3

ب- نضع من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$ ، بين ان (w_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{2}$

ج- اكتب w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n.

التمرين 195 بكالوريا علمي 2010

في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس مثلنا المستقيمين (Δ) و (D) معادلتيهما على الترتيب : $y=x$ و $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$.



1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ب: $u_0=6$ ومن اجل كل عدد طبيعي n:
$u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}$

ا- انقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية u_0, u_1, u_2, u_3 و u_4 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم.

ب- عين احداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D)

ج- اعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n).

2) ا- باستعمال الاستدلال بالتراجع ،اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n، $u_n \geq \frac{2}{3}$

ب- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) نعتبر المتتالية (v_n)المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $v_n=u_n-\frac{2}{3}$.

ا- بين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد اساسها وحدها الاول .

ب- اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، واستنتج عبارة u_n بدلالة n.

ج- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ ، استنتج المجموع S'_n حيث $S'_n=u_0+u_1+...+u_n$.

التمرين 196 بكالوريا علمي 2011

(u_n) المتتالية العددية المعرفة ب : $u_0=-1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=3u_n+1$

و(v_n) المتتالية العددية المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n ب: $v_n=u_n+\frac{1}{2}$.

في كل الحالات الثلاث الاتية اقترحت ثلاث اجابات ، اجابة واحدة فقط منها صحيحة، حددها مع التعليل.

1) المتتالية (v_n) : ا- حسابية ب- هندسية ج-لا حسابية ولا هندسية

2) نهاية المتتالية (u_n) هي : ا-$+\infty$ ب- $-\frac{1}{2}$ ج- $-\infty$.

3) نضع من اجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = -\frac{1}{2}\left[1+e^{\ln 3}+e^{2\ln 3}+e^{3\ln 3}+...+e^{n\ln 3}\right]$

ا- $S_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$ ب- $S_n = \frac{1-3^n}{4}$ ج- $S_n = \frac{1-3^{n+1}}{4}$.

التمرين 197 بكالوريا علمي 2011

α عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1 .

(u_n) متتالية عددية معرفة ب : $u_0 = 6$ ومن اجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$

و(v_n) متتالية عددية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n ب: $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$.

1) ا- بين ان (v_n) متتالية هندسية اساسها α

ب- اكتب بدلالة n و α عبارة v_n ثم استنتج بدلالة n و α، عبارة u_n.

ج- عين قيم العدد الحقيقي α التي تكون من اجلها المتتالية (v_n) متقاربة.

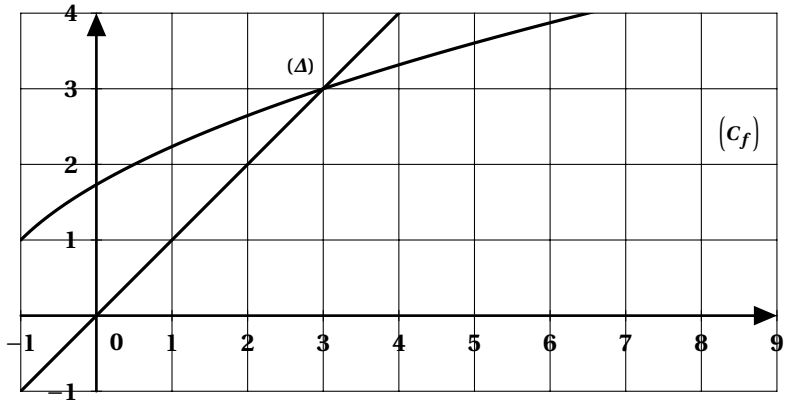
2) نضع $\alpha = \frac{3}{2}$

- احسب بدلالة n المجموعين S_n و T_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

التمرين 198 بكالوريا علمي 2012

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الاول $u_0 = 1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

1) لتكن الدالة h المعرفة على المجال $\left]-\frac{2}{3}, +\infty\right[$ كما يلي $h(x) = \sqrt{2x+3}$ و (C) تمثيلها البياني و(Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس (انظر الشكل المقابل)



ا- اعد رسم الشكل المقابل على ورقة الاجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية u_2, u_1, u_0 و u_3.
(دون حسابها موضحا خطوط الانشاء)

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها.

2) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$

3) ا- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ب- استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

التمرين 199 بكالوريا علمي 2012

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الاول $u_0 = \frac{13}{4}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$

1) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n: $3 < u_n < 4$

2) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$، استنتج ان (u_n) متزايدة تماما 3) برر لماذا (u_n) متقاربة . 4) المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = \ln(3 - u_n)$.

ا- برهن ان (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم احسب حدها الاول . ب- اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n : ثم احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n$.

ج- نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $p_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times ... \times (u_n - 3)$

اكتب P_n بدلالة n ، ثم بين ان : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} P_n = \frac{1}{16}$

التمرين 200 بكالوريا علمي 2013

I) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$

1) بين ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول .

2) احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} v_n$.

II) المتتالية (u_n) معرفة ب: $u_0 = 1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$

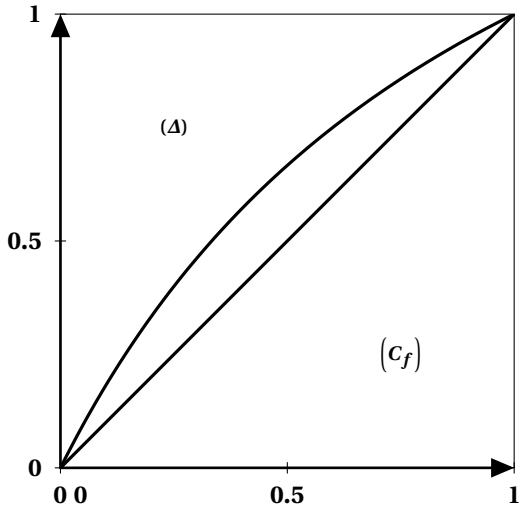
1) برهن بالتراجع انه، من اجل كل عدد طبيبعي n : $1 \le u_n \le 6$

2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n: $6 - u_{n+1} \le \frac{5}{6}(6 - u_n)$ بين انه من اجل كل عدد طبيعي n: $0 \le 6 - u_n \le v_n$ ، استنتج $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$

التمرين 202 بكالوريا علمي 2013

في الشكل المقابل ، (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ ب: $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ و (d) المستقيم ذو المعادلة : $y = x$



1) (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول $u_0=\frac{1}{2}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

ا- اعد رسم هذا الشكل في ورقة الاجابة ثم مثل الحدود u_2,u_1,u_0 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها ، مبرزا خطوط التمثيل.

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2)

ا- اثبت ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$

ب- برهن بالتراجع انه، من اجل كل عدد طبيعي n: $0<u_n<1$

ج- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3) (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n}$

ا- برهن (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب حساب حدها الاول v_0.

ب- احسب نهاية (v_n).

التمرين 203 بكالوريا علمي 2014

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة كمايلي :$u_0=1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-\frac{4}{3}$
و (v_n) المتتالية المعرفة كما يلي : من اجل كل عدد طبيعي n، $v_n=u_n+4$

1) بين ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول

2) اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n.

3) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.

4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

5) لتكن (w_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n=5\left(\frac{1}{v_n+5}-1\right)$

ا- بين ان المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - w_n)$.

التمرين 204 بكالوريا علمي 2014

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها العام : $u_n = e^{\frac{1}{2}} - n$ (هو اساس اللوغاريتم النيبيري e)

I) 1) بين ان (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول

2) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج؟

3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

II) نضع من اجل كل عدد طبيعي n، $v_n = \ln(u_n)$ ($\ln$ يرمز الى اللوغاريتم النيبيري)

1) عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج نوع المتتالية (v_n) .

2) ا- احسب بدلالة n العدد P_n حيث : $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times ... \times u_n)$

ب-عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P_n + 4n > 0$

التمرين 205 بكالوريا علمي 2015

(u_n) المتتالية العددية المعرفة ب: $u_0 = e^2 - 1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = (1+u_n)e^{-2} - 1$

1) احسب u_1 ، u_2 و u_3.

2) اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n : $1 + u_n > 0$

3) بين ان المتتالية (u_n) متناقصة. هل هي متقاربة؟ علل.

4) نضع من جل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3(1+u_n)$

ا- اثبت ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول

ب- اكتب v_n و u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

ج- بين انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + ... + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$

التمرين 206 بكالوريا علمي 2015

المستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) f الدالة المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ ب $f(x) = \dfrac{4x+1}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني .

1) عين اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0,+\infty[$.

2) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) ذي المعادلة : $y = x$

3) مثل (C_f) و (D) على المجال $[0;6]$.

4) نعتبر المتتالين (u_n) و (v_n)المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \text{ و } \begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$$

1) ا-انشئ على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 ، v_0, v_1, v_2 و v_3 دون حسابها

ب- خمن اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

2) ا-اثبت انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $2 \le u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \le 5$ حيث : $\alpha = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

ب- استنتج اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n)

3) ا-اثبت انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{3}(v_n - u_n)$

ب- بين انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 < v_n - u_n \le \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

ج- استنتج ان : $\lim\limits_{n \to +\infty}(v_n - u_n) = 0$ ، ثم حدد نهاية كل من (u_n) و(v_n).

التمرين 207 بكالوريا علمي 2016

I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ ب: $f(x) = \sqrt{2x+8}$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) ا-احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

2) عين احداثيتي نقطة تقاطع المنحني (C) مع المستقيم (Δ) الذي : $y = x$ معادلة له .

3) ارسم (C) و(Δ).

II) المتتالية (u_n) معرفة ب: $u_0 = 0$ ، ومن اجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = f(u_n)$

1) مثل في الشكل لسابق على محور الفواصل ،الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 (دون حسابها) موضحا خطوط الانشاء.

2) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

3) ا- برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le u_n < 4$.

ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

ج- بين انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $4 - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(4 - u_n)$.

ثم استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n: $4 - u_n \le \frac{1}{2^n}(4 - u_0)$.

د-استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين 208 بكالوريا علمي 2016

I) f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ ب: $f(x) = \frac{5x}{x+2}$

1) ا- احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

ادرس اتجاه تغير االدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

2) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f(x) \ge 0$.

II) المتتالية (u_n) معرفة ب: $u_0 = 1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{5u_n}{u_n + 2}$

1) ا- برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n، $1 \le u_n \le 3$.

ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج انها متقاربة.

2) (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$

ا- بين ان (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{2}{5}$ يطلب تعيين حدها الاول.

ب- اكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n.

ج- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) احسب بدلالة n االمجموع S_n حيث : $S_n = \frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+...+\frac{1}{u_n}$

التمرين 209 بكالوريا علمي 2016

نعتبر الدالة f الامعرفة على المجال $I=[0;4]$ ب : $f(x)=\frac{13x}{9x+13}$.

1) ا- بين ان الدالة f متزايدة تماما على المجال I.

ب- بين انه من اجل كل من المجال I، $f(x)$ ينتمي الى المجال I.

2) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول $u_0=4$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

ا- برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n\le 4$.

ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)، ثم استنتج انها متقاربة.

3) بين انه من اجل كل عدد طبيبي n : $u_n\neq 0$

4) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=2+\frac{13}{u_n}$

ا- برهن ان المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول v_0.

ب- اكتب v_n بدلالة n.

ج- استنتج ان : $u_n=\frac{52}{36n+13}$ وذلك من اجل كل عدد طبيعي n ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 210 بكالوريا علمي 2017

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول $u_0=0$ ومن اجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{2u_n+2}{u_n+3}$.

ولتكن (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n ب: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}$

1) بين ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول .

2)

أ)- عبر بدلالة n عن الحد العام v_n.

ب- استنتج عبارة الحد u_n العام بدلالة n.

ج- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3)

ا] احسب بدلالة n المجموع : $S_n=v_0+v_1+...+v_n$

ب] تحقق ان $\frac{1}{u_n+2}=\frac{1}{3}(1-v_n)$ وذلك من اجل كل عدد طبيعي n.

ج- احسب بدلالة n المجموع : $S'_n=\frac{1}{u_0+2}+\frac{1}{u_1+2}+...+\frac{1}{u_n+2}$.

التمرين 211 بكالوريا علمي 2017

(u_n) و (v_n) متتاليان معرفتان على مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0=\frac{1}{4}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=3-\frac{10}{u_n+4}$ و $v_n=\frac{u_n+2}{1-u_n}$.

1)

ا- برهن بالتراجع ان: من اجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<1$.

ب] بين ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج انها متقاربة.

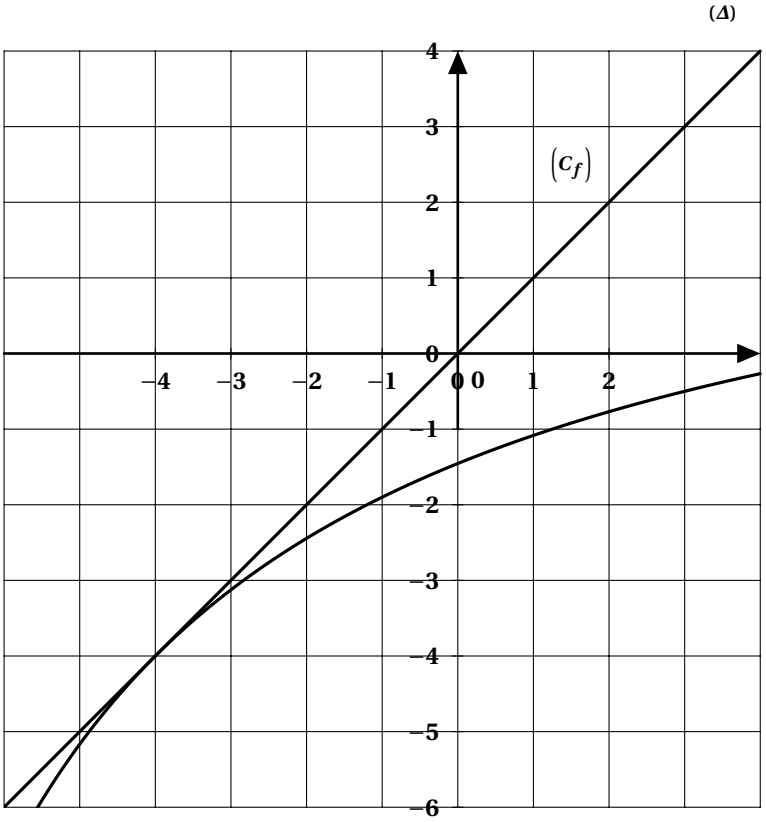
2)

ا- بين ان المتتالية (v_n) هندسية اساسها $\frac{5}{2}$ ثم عبر عن حدها العام v_n بدلالة n.

ب- اثب ان : من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 - \frac{3}{v_n + 1}$ ثم استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين 212 بكالوريا علمي 2017

المستوي منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ و f الدالة المعرفة على المجال $[-4;1]$ كما يلي: $f(x) = \frac{3x - 16}{x + 11}$. و (C_f) المنحني الممثل لها ، و (Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y = x$.



1) تحقق ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$. ثم بين ان من اجل $x \in [-4;1]$ فان $f(x) \in [-4;0]$.

2) (u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الاول $u_0 = 0$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

1) ا- انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود $u_0; u_1; u_2$ و u_3 دون حسابها.

ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $-4 \leq u_n \leq 0$

ثم بين ان المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$

اثبت ان المتتالية (v_n) حسابية اساسها $\frac{1}{4}$،

ثم احسب المجموع S حيث: $S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \ldots + v_{2016} \times u_{2016}$

التمرين 213 بكالوريا علمي 2017

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases}$$

1) احسب الحدين u_1 و v_1.

2) ا- اكتب $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$.

ب- باستعمال البرهان بالتراجع بين ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما والمتتالية (v_n) متناقصة تماما .

3) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $w_n = u_n - v_n$.

برهن ان المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين اساسها q وحدها الاول w_0 ثم عبر عن w_n بدلالة n.

4) بين ان المتتالين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

التمرين 214 بكالوريا علمي 2018

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال : $[0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y = x$

عدد حقيقي موجب ، (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول $u_0 = \alpha$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

1) عين قيم α حتى تكون المتتالية (u_n) متتالية ثابتة .

نضع في كل مايلي : $\alpha = 5$

2)

ا- انقل الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_2, u_1, u_0 و u_3 دون حسابها.

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n ب: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

ا- بين ان (v_n) متتالية هندسية اساسها $dfrac12$ يطلب تعيين حدها الاول . ب- عبر بدلالة n عن v_n و u_n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_n + v_{n+1} + ... + v_{n+2016}$

ثم استنتج بدلالة n المجموع : $S'_n = \frac{1}{u_n+1} + \frac{1}{u_{n+1}+1} + ... + \frac{1}{u_{n+2016}+1}$

التمرين 215 بكالوريا علمي 2018

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الاول u_0 حيث $u_0 = 1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$.

1) ا- برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$

ب- بين ان (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ واستنتج انها متقاربة

2) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$

اثبت ان (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الاول

3) عبر بدلالة n عن u_n و v_n ، واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_0v_0+u_1v_1+...+u_nv_n=\frac{1}{3}(1-n^2)$.

التمرين 216 بكالوريا علمي 2018

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0=0$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=u_n+\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$

1) احسب كلا من u_1,u_2 و u_3.

2) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $\frac{2n+3}{2n+1}>1$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) (v_n) متتالية عددية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n ب $v_n=2n+1$.

ا- برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $e^{u_n}=v_n$.

ب- استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}u_n$.

4) احسب المجموعين S_n و T حيث : $S_n=\ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right)+\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)+...+\ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$
و $T=e^{u_{1439}}+e^{u_{1440}}+...+e^{u_{2018}}$.

التمرين 217 بكالوريا علمي 2019

(u_n) المتتالية العددية المعرفة ب: $u_0=13$ ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+\frac{4}{5}$.

1) ا- برهن بالبرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>1$

ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج انها متقاربة .

2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب $v_n=\ln(u_n-1)$
-اثبت ان المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول .

3) اكتب v_n بدلالة n ، ثم بين انه من اجل كل عدد طبيعي n، $u_n=1+\frac{12}{5^n}$ واحسب عندئذ $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}u_n$.

4) بين انه : من اجل كل عدد طبيعي n ، $(u_1-1)\times(u_2-1)\times...\times(u_n-1)=\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$.

التمرين 218 بكالوريا علمي 2019

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[4;7[$ ب: $f(x)=\sqrt{x+2}+4$

1) ا- بين ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4;7[$

ب- استنتج انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ فان $f(x)\in[4;7[$.

2) برهن انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ فان $f(x)-x=\frac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}}$
ثم استنتج انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ فان $f(x)-x>0$

3) (u_n) المتتالية المعرفة ب ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$

ا- برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $4 \leq u_n < 7$

ب- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم برهن انها متقاربة.

4) ا- بين انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $7 - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(7 - u_n)$.

ب- استنتج انه من اجل كل عد طبيعي n ، $0 < 7 - u_n \leq (\frac{1}{4})^n$ ، ثم احسب نهاية المتتالية (u_n).

التمرين 219 بكالوريا تقني رياضي 2024

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{6+6u_n}{5+u_n}$.

1/ احسب كلا من u_1 و u_2 ثم تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 6 - \frac{24}{5+u_n}$.

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leqslant u_n < 3$.

ب/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n+2}{u_n-3}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{8}{3}$ ثم اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

ب/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3 + \frac{5}{v_n - 1}$ ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + 3 \times v_1 + 3^2 \times v_2 + \cdots + 3^n \times v_n$.

التمرين 220 بكالوريا تقني رياضي 2024

I. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[2,3]$ بـ : $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$.

- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم أثبت أنه من أجل كل x من المجال $[2,3]$ فإن $2 \leqslant f(x) \leqslant \frac{11}{5}$.

II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 < u_n \leqslant 3$.

2/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{(1+u_n)(2-u_n)}{2+u_n}$ ثم ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

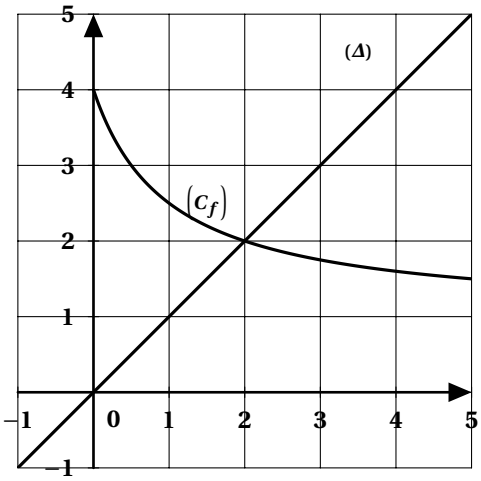
3/ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 2 \leqslant \frac{1}{4}(u_n - 2)$.

ب/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n - 2 \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$ ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_0 + u_1 + \cdots + u_n \leqslant 2(n+1) + \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$.

التمرين 221 بكالوريا تقني رياضي 2023

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x+4}{x+1}$، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ كما هو موضح في الشكل.



لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $-\dfrac{1}{3}$ ويطلب حساب حدها الأول.

ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -2 + \dfrac{4}{1 + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n}$.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = \dfrac{1}{u_0 + 2} + \dfrac{1}{u_1 + 2} + \cdots + \dfrac{1}{u_n + 2}$.

- احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n ثم أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $T_n = \dfrac{1}{16}\left[4n + 7 + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right]$.

التمرين 222 بكالوريا تقني رياضي 2023

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 1$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 3$.

ب/ أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n - 3$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{2}{3}$ ويطلب حساب حدها الأول.

ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -2 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 3$.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

- احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n ثم أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $T_n = 3n - 3 + 4 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

التمرين 223 بكالوريا تقني رياضي 2023

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{3u_n + 1}$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \dfrac{2}{3}$.

بـ/ أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = 3 - \dfrac{2}{u_n}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{3}$ ويطلب حساب حدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \dfrac{2}{3 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$.

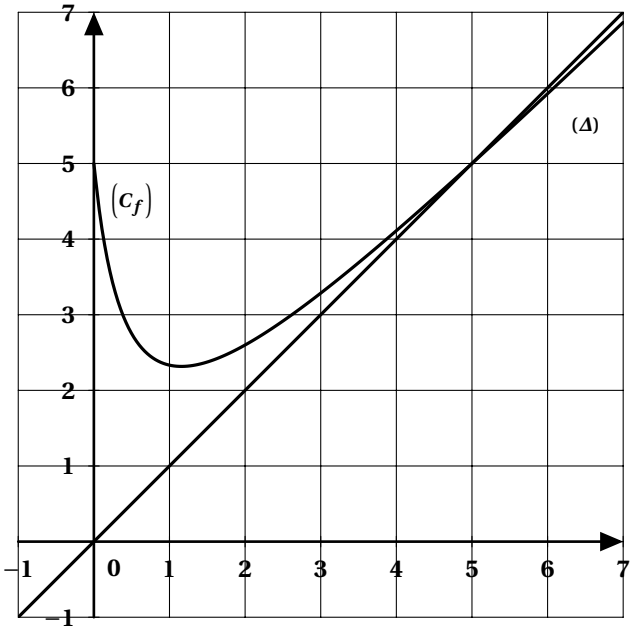
جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = \dfrac{2}{u_0} + \dfrac{2}{u_1} + \cdots + \dfrac{2}{u_n}$.

- احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n ثم أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $T_n = 3n + \dfrac{1}{2}\left[3 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right]$.

التمرين 224 بكالوريا تقني رياضي 2022

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5}{2x + 1}$، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ كما هو موضح في الشكل.



لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ أ/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

بـ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

جـ/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leqslant u_n < 5$.

بـ/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $5 - u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2u_n + 1}(5 - u_n)$.

4/ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\dfrac{2u_n}{2u_n + 1} \leqslant \dfrac{10}{11}$.

بـ/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 5 - u_n \leqslant 3 \times \left(\dfrac{10}{11}\right)^n$ ثم احسب $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$.

التمرين 225 بكالوريا تقني رياضي 2022

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = -\dfrac{1}{3}u_n^2 + \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{2}{3}$ ولتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n - 1$.

1/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = -\dfrac{1}{3}v_n^2$.

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-3 \leqslant v_n < 0$.

بـ/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (v_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3/ لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = \ln\left(-\dfrac{3}{v_n}\right)$.

أ/ أثبت أن المتتالية (w_n) هندسية أساسها 2 ويطلب حساب حدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام v_n و u_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$.

4/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n الجداء P_n حيث: $P_n = \dfrac{1}{v_0} \times \dfrac{1}{v_1} \times \cdots \times \dfrac{1}{v_n}$.

التمرين 226 بكالوريا تقني رياضي 2022

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_1 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{n}{2n+2}u_n - \dfrac{1}{n+1}$ ولتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = nu_n + 2$.

1/ احسب كلا من u_2 و u_3.

2/ أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ ويطلب حساب حدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ احسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم n المجموع S_n حيث: $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

4/ لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $w_n = \dfrac{4n}{v_n - nu_n}$.

- احسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم n المجموع S'_n حيث: $S'_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$.

التمرين 227 بكالوريا تقني رياضي 2022

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n - 2)$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$.

ب/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1} - u_n}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 ثم اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

ب/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = \dfrac{1}{v_0} + \dfrac{1}{v_1} + \cdots + \dfrac{1}{v_n}$.

3/ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2 \times \left(\dfrac{1}{2^n} - 1\right)$ ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

ب/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S'_n حيث: $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

التمرين 228 بكالوريا تقني رياضي 2021

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = -\dfrac{3}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{11u_n + 4}{-4u_n + 1}$.

1/ أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = -\dfrac{11}{4} + \dfrac{27}{4(-4u_n + 1)}$.

ب/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2 < u_n < -1$.

ج/ أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 ويطلب حساب حدها الأول.

ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \dfrac{3}{2 + 4 \times 3^n} - 2$.

ج/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-v_n = \dfrac{3}{u_n + 2} - 2$.

ب/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = \ln\left(\dfrac{3}{u_0 + 2} - 2\right) + \ln\left(\dfrac{3}{u_1 + 2} - 2\right) + \cdots + \ln\left(\dfrac{3}{u_n + 2} - 2\right)$.

التمرين 229 بكالوريا تقني رياضي 2021

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2 + \dfrac{1}{2}u_n^2}$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 2$.

ب/ أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n^2 - 4$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ ويطلب حساب حدها الأول.

ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \sqrt{4 - 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2$.

أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \dfrac{n \times 2^{n+2} + 3}{2^n} - 2$.

بـ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $PGCD\left(2^n, 3 + n \times 2^{n+2}\right) = PGCD\left(2^n, 3\right)$.

جـ/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $PGCD\left(2^n, 3 + n \times 2^{n+2}\right) = 1$.

د/ عين قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون: $S_n = \dfrac{83}{8}$.

التمرين 230 بكالوريا تقني رياضي 2021

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{7}{9}u_n + 1$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < \dfrac{9}{2}$.

بـ/ أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \dfrac{1}{3}u_n - \dfrac{3}{2}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{7}{9}$ ويطلب حساب حدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -\dfrac{3}{2} \times \left(\dfrac{7}{9}\right)^n + \dfrac{9}{2}$.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = \dfrac{1}{3}u_0 + \dfrac{1}{3}u_1 + \cdots + \dfrac{1}{3}u_n$.

التمرين 231 بكالوريا تقني رياضي 2021

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 3 + e^{-2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n^2 - 6u_n + 12$.

1/ أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = (u_n - 3)^2 + 3$.

بـ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$.

جـ/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln(u_n - 3)$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 ويطلب حساب حدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3 + e^{(-2^{n+1})}$.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n الجداء P_n حيث: $P_n = (u_0 - 3) \times (u_1 - 3) \times \cdots \times (u_n - 3)$.

التمرين 232 بكالوريا رياضي 2020

I. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[1,4]$ بـ : $f(x)=\dfrac{4x+4}{9-x}$.

1/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2/ استنتج أنه من أجل كل x من المجال $[1,4]$ فإن $f(x)\in[1,4]$.

II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1<u_n<4$.

ب/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n-4}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n=v_0+8v_1+8^2v_2+\cdots+8^nv_n$.

التمرين 233 بكالوريا رياضي 2020

لتكن (u_n) و (v_n) المتتاليتين العدديتين المعرفتين بـ : $\begin{cases}u_0=-1\\u_{n+1}=3\alpha u_n+(1-3\alpha)v_n\end{cases}$ و $\begin{cases}v_0=3\\v_{n+1}=3\alpha v_n+(1-3\alpha)u_n\end{cases}$

حيث α عدد حقيقي ثابت ولتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n=v_n-u_n$.

1/ أ/ احسب w_0 ثم احسب w_1 بدلالة α.

ب/ أثبت أن المتتالية (w_n) هندسية أساسها $6\alpha-1$.

جـ/ اكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n و α ثم عين قيم العدد الحقيقي α حتى يكون $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}w_n=0$.

2/ في كل ما يأتي نفرض أن $\dfrac{1}{6}<\alpha<\dfrac{1}{3}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما وأن المتتالية (v_n) متناقصة تماما.

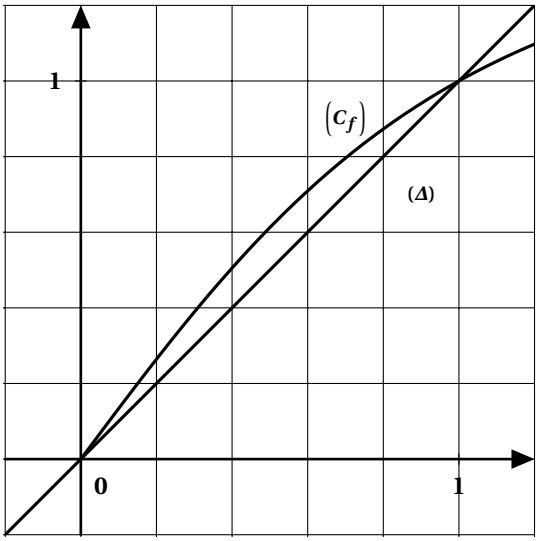
ب/ استنتج أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ.

3/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n+v_n=2$ واستنتج قيمة ℓ.

4/ احسب بدلالة α المجموع S حيث: $S=u_0+u_1+\cdots+u_{2020}$.

التمرين 234 بكالوريا تقني رياضي 2020

لتكن f الدالة المعرفة والمتزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{4x^2+5}}$، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ كما هو موضح في الشكل.



لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

بـ/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{2} \leqslant u_n < 1$.

بـ/ أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n^2}{1-u_n^2}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{9}{5}$ ويطلب حساب حدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

التمرين 235 بكالوريا تقني رياضي 2020

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 - \frac{4}{u_n + 2}$.

1/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 < u_n < 2$.

2/ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(1+u_n)}{u_n+2}$.

بـ/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

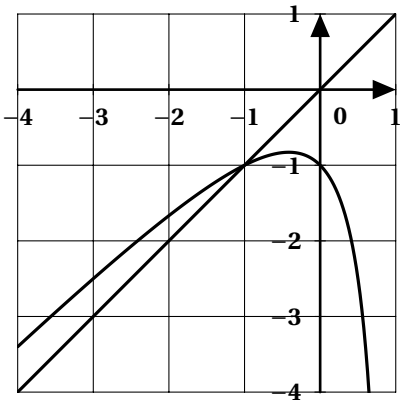
3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n + \alpha}{u_n + 1}$ حيث α عدد حقيقي ثابت.

أ/ عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ثم احسب حدها الأول.

بـ/ أثبت عندئذ أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{2 \times 4^n - 1}{4^n + 1}$ ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين 236 بكالوريا ريا 2018

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty,1[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ كما هو موضح في الشكل.



لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=-3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1/ أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-3\leqslant u_n<-1$.

3/ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}+1\geqslant\dfrac{3}{4}(u_n+1)$.

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n+1\geqslant-2\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ ثم احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}u_n$.

4/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $8\left[\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\leqslant(u_0+1)+(u_1+1)+\cdots+(u_n+1)<0$.

ب/ احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}S_n$.

التمرين 237 بكالوريا تقني رياضي 20

لتكن f الدالة المعرفة والمتزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{2x}{ex+1}$ ولتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=\dfrac{5}{4e}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>\dfrac{1}{e}$.

ب/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{eu_n\left(\dfrac{1}{e}-u_n\right)}{eu_n+1}$.

جـ/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\dfrac{eu_n}{eu_n-1}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 ويطلب حساب حدها الأول.

ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

3/ أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 1 + \frac{1}{eu_n - 1}$ ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

ب/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

ج/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

4/ أ/ ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.

ب/ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد S_n قابلا للقسمة على 7.

التمرين 238 بكالوريا تقني رياضي 20

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = 2 \times 3^n$ ولتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = 5v_n + u_n$.

1/ لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = \frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (w_n) هندسية أساسها $\frac{5}{3}$ ويطلب حساب حدها الأول.

ب/ اكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 5^{n+1} - 3^n$.

2/ أ/ ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 3^n و 5^n على 8.

ب/ استنتج حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد v_n على 8.

التمرين 239 بكالوريا ريا 2017

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 7u_n + 8$.

1/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n = 7^{n+1} - 4$.

2/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

أ/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n ثم جد علاقة بين S_n و S'_n.

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31$.

3/ أ/ ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 5.

ب/ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد S'_n قابلا للقسمة على 5.

التمرين 240 بكالوريا ريا 2017

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 4u_n + 1$.

1/ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$.

ب/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : العددان u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n + \frac{1}{3}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{3n}$.

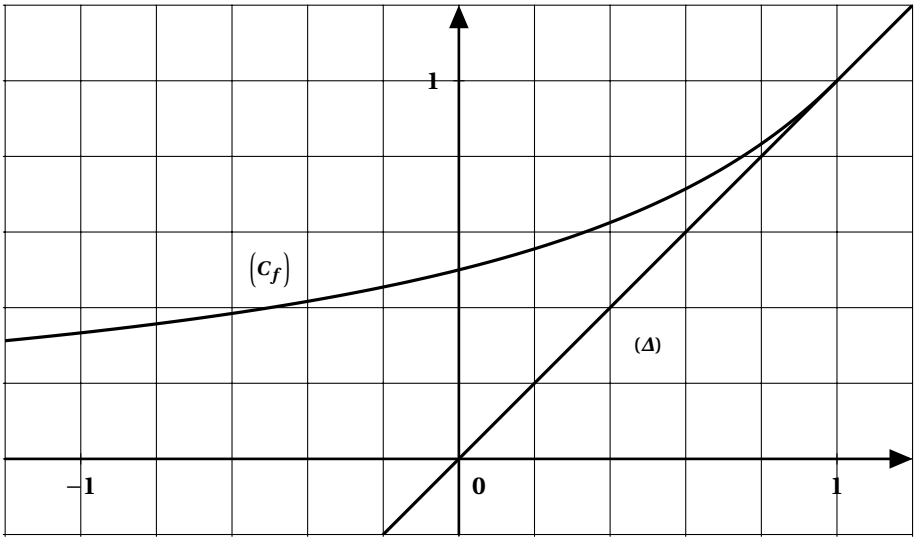
3/ عين من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين $4^n - 1$ و $4^{n+1} - 1$.

4/ أ/ ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7.

ب/ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد A_n المعرف بـ : $A_n = 9S_n - 6n - 3^{6n+4}$ قابلا للقسمة على 7.

التمرين 241 بكالوريا تقني رياضي 20

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty, 1]$ بـ : $f(x) = \frac{1}{2-x}$، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ كما هو موضح في الشكل.



لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 1$.

ب/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{2}{1-u_n}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها 2 ثم اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

ب/ استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين 242 بكالوريا تقني رياضي 2017

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_1 = \frac{1}{\alpha}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = \frac{n+1}{\alpha n} u_n$ حيث α عدد حقيقي ثابت أكبر من أو يساوي 2.

1/ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > 0$.

بـ/ أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = \frac{1}{\alpha n} u_n$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{\alpha}$ ويطلب حساب حدها الأول بدلالة α.

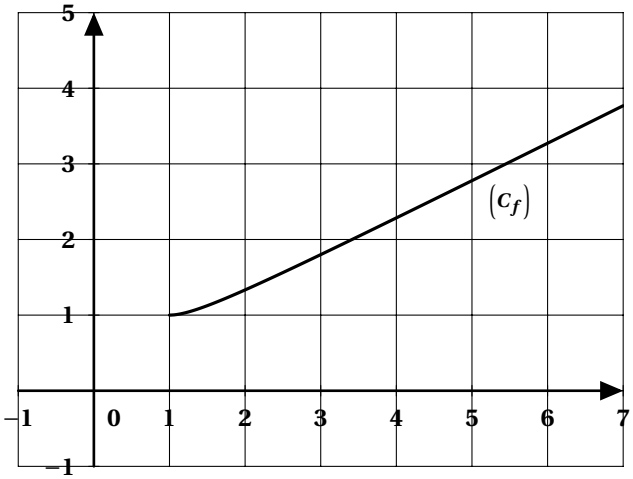
بـ/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n و α ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n و α واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3/ أ/ احسب بدلالة α والعدد الطبيعي غير المعدوم n المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{3}u_3 + \cdots + \frac{1}{n}u_n$.

بـ/ عين قيمة العدد الحقيقي α حتى يكون: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2016}$.

التمرين 243 بكالوريا تقني رياضي 2016

I. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]1,+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ كما هو موضح في الشكل.



- أثبت أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1,+\infty[$.

II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

بـ/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leqslant u_n \leqslant 6$.

بـ/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3/ لتكن (v_n) و (w_n) المتتاليتين العدديتين المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ و $w_n = \ln(v_n)$.

أ/ أثبت أن المتتالية (w_n) هندسية أساسها 2 ويطلب حساب حدها الأول.

بـ/ اكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n ثم اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

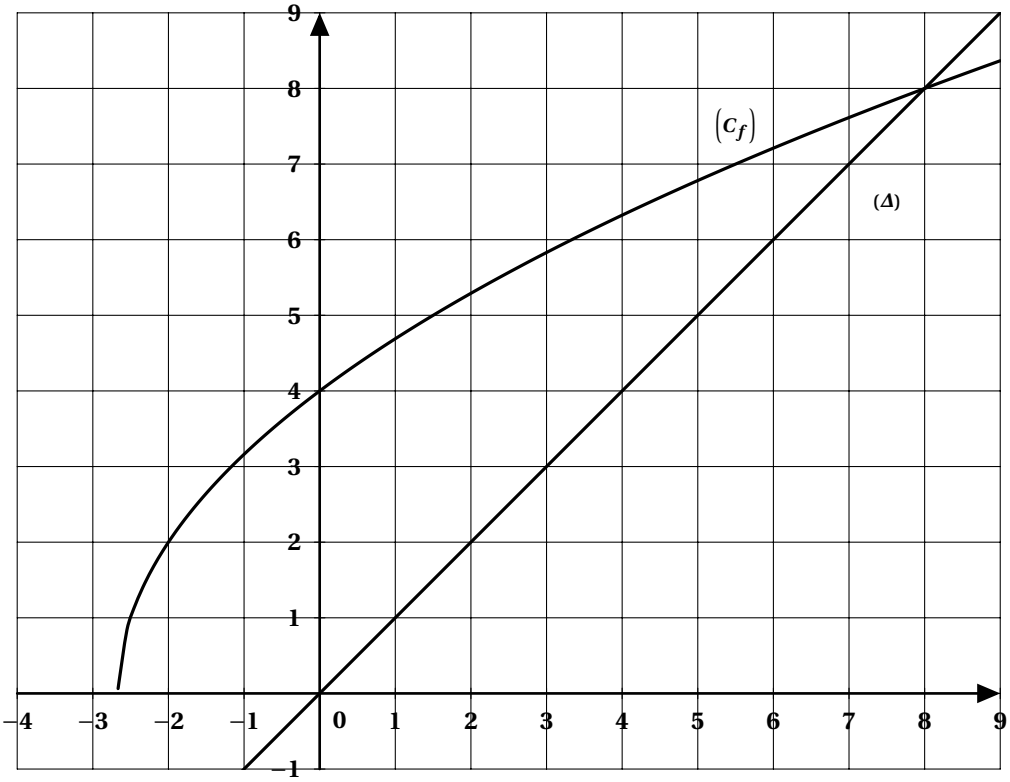
جـ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \dfrac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}$ ثم احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

4/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = \dfrac{1}{w_0} + \dfrac{1}{w_1} + \cdots + \dfrac{1}{w_n}$.

التمرين 244 تقني رياضي 2015

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{6u_n + 16}$.

1/ لتكن f الدالة المعرفة على المجال $\left]-\frac{8}{3}, +\infty\right[$ بـ : $f(x) = \sqrt{6x+16}$، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ كما هو موضح في الشكل.



أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

بـ/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leqslant u_n < 8$.

بـ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}$.

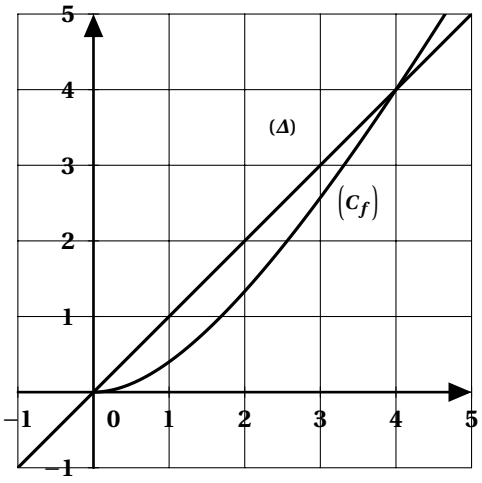
جـ/ استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3/ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 8 - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(8-u_n)$.

بـ/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 8 - u_n \leqslant 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

التمرين 245 بكالوريا ريا 2014

I. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{2x^2}{x+4}$، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ كما هو موضح في الشكل.



- أثبت أن الدالة f متزايدة تماما.

II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1/ أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leqslant u_n\leqslant 3$.

ب/ أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

3/ أ/ n عدد طبيعي. ادرس إشارة العبارة $7u_{n+1}-6u_n$ ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leqslant u_{n+1}\leqslant \dfrac{6}{7}u_n$.

ب/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leqslant u_n\leqslant 3\times\left(\dfrac{6}{7}\right)^n$.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

التمرين 246 بكالوريا تقني رياضي 2014

I. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]1,+\infty[$ بـ : $f(x)=x-\ln(x-1)$.

1/ ادرس إشارة $f(x)-x$ حسب قيم x من المجال $]1,+\infty[$.

2/ أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة f.

ب/ استنتج أنه من أجل كل x من المجال $[2,e+1]$ فإن $f(x)\in[2,e+1]$.

II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=e+1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=u_n-\ln(u_n-1)$.

1/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\in[2,e+1]$.

2/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3/ برر تقارب المتتالية (u_n) ثم احسب نهايتها.

التمرين 247 بكالوريا تقني رياضي 2013

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = e^2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}}$ ولتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{1}{2}\ln u_n + \frac{1}{2}$.

1/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ويطلب حساب حدها الأول.

2/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ ثم احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} S_n$.

4/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n الجداء P_n حيث: $P_n = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_n$ ثم احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} P_n$.

التمرين 248 بكالوريا تقني رياضي 2011

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$.

1/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$ ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > 1$.

2/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها.

3/ نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $P_n = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n$.

- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $P_n = \frac{2n+2}{n+2}$.

4/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = \ln u_n$.

- عبر عن S_n بدلالة P_n حيث $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ ثم احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} S_n$.

التمرين 249 بكالوريا ريا 2009

I. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[1,5]$ بـ : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. (وحدة الطول $3\,cm$)

1/ ادرس تغيرات الدالة f.

2/ أنشئ (C_f) والمستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$.

II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right)$.

1/ أ/ احسب كلا من u_1 و u_2.

ب/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1 و u_2.

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n \geqslant \sqrt{5}$.

ب/ أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

3/ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - \sqrt{5} \leqslant \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{5}\right)$.

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - \sqrt{5} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(u_0 - \sqrt{5}\right)$ ثم احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

التمرين 250 بكالوريا ريا 2009

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3u_n + 2n + 1$ ولتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n + \alpha n + \beta$ حيث α و β عددان حقيقيان ثابتان.

1/ أ/ عين قيمة العددين الحقيقيين α و β حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

2/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموعين S_n و S'_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

3/ أ/ ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5.

ب/ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد u_n مضاعفا للعدد 5.

التمرين 251 ريا 2008

I. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[1,+\infty[$ بـ: $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول $2\,cm$)

1/ احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

2/ ادرس تغيرات الدالة f.

3/ باستعمال التمثيل البياني للدالة جذر تربيعي أنشئ (C_f).

4/ أنشئ في نفس المعلم السابق المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$.

II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1 و u_2 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leqslant u_n \leqslant 5$ و $u_{n+1} > u_n$.

ب/ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين 252 بكالوريا ريا 2008

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 1$.

1/ احسب كلا من u_1، u_2 و u_3.

2/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

أ/ برهن بالتراجع أن المتتالية (v_n) ثابتة.

ب/ استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ/ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3/ لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = \dfrac{2}{3}n - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

- احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$.

التمرين 253 بكالوريا تقني رياضي 2008

I. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0,2]$ بـ: $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $4\,cm$)

1/ ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0,2]$.

2/ استنتج أنه من أجل كل x من المجال $[0,2]$ فإن $f(x)\in[0,2]$.

3/ أنشئ (C_f) والمستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$.

II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1/ برر وجود المتتالية (u_n) ثم احسب كلا من u_1 و u_2.

2/ أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1 و u_2 مبرزا خطوط الإنشاء.

ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

3/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leqslant u_n\leqslant\sqrt{3}$.

ب/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}>u_n$.

جـ/ ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب المتتالية (u_n) ؟

4/ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1}-\sqrt{3}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}\left(u_n-\sqrt{3}\right)$.

ب/ عين عددا حقيقيا k من المجال $]0,1[$ حيث يكون من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\left|u_{n+1}-\sqrt{3}\right|\leqslant k\left|u_n-\sqrt{3}\right|$.

جـ/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\left|u_n-\sqrt{3}\right|\leqslant k^n\left|u_0-\sqrt{3}\right|$ ثم احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}u_n$.

التمرين 254 بكالوريا تقني رياضي 2008

I. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x+2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2\,cm$)

1/ احسب نهايات الدالة f عند الأطراف المفتوحة لمجموعة تعريفها.

2/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3/ أثبت أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

4/ أنشئ (Δ) و (C_f).

5/ أثبت أن صورة المجال $\left[1,\dfrac{5}{2}\right]$ محتواة في المجال $\left[1,\dfrac{5}{2}\right]$.

II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1/ أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\leqslant u_n\leqslant\dfrac{5}{2}$ وأن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

3/ استنتج أن (u_n) متقاربة ثم احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}u_n$.

التمرين 255

بكالوريا المغرب 2020

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي : $u_0=\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+5}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1) احسب u_1.

2) بين بالتراجع أن لكل n من $\mathbb{N}$، $u_n>0$.

3) ا- بين ان $0<u_{n+1}\leq\frac{2}{5}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$ ، ثم استنتج ان $0<u_n\leq\frac{3}{2}(\frac{2}{5})^n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب- احسب النهاية $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}u_n$.

4) نعتبر (v_n) المتتالية العددية المعرفة $v_n=\frac{4u_n}{2u_n+3}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ا- بين ان (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{2}{5}$

ب- حدد v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n لكل n من $\mathbb{N}$.

التمرين 256

بكالوريا المغرب 2016

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي : $u_0=2$ و $u_{n+1}=\frac{3+u_n}{5-u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1) ا- تحقق من أن $u_{n+1}-3=\frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب- بين بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي n ان $u_n<3$

2) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي : $v_n=\frac{u_n-1}{3-u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ا- بين ان (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

ب- استنتج ان $v_n=(\frac{1}{2})^n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ج- بين ان $u_n=\frac{1+3v_n}{1+v_n}$ ، لكل n من $\mathbb{N}$ ثم اكتب u_n بدلالة n

د- حدد نهاية المتتالية (u_n)

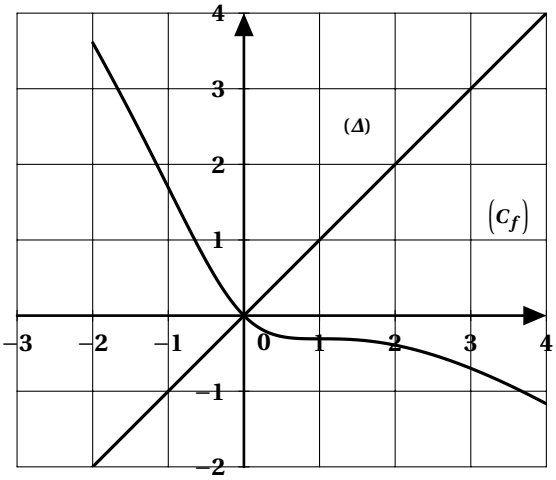
التمرين 257

بكالوريا تونس 2016

المنحنى (Γ) المقابل هو التمثيل البياني، في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ للدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ ب:

$f(x)=-x+\ln(1+x^2)$

(Γ) يقطع محور الفواصل ، فقط عند المبدأ O



1) بقراءة بيانية، برر انه من اجل كل x من $[0,+\infty[$: $\ln(1+x^2) \leq x$

2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\ln(1+u_n^2) \qquad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ا- بين انه ، من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > 0$

ب- بين انه ، من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n$

ج- استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n \leq \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة ، واعط نهايتها.

3) لتكن المتتالية (S_n) المعرفة ب: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

ا- بين ان المتتالية (S_n) متزايدة تماما.

ب- بين انه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \leq 3 - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

ج- استنتج ان المتتالية (S_n) متقاربة

التمرين 258

بكالوريا تونس 2015

1) لتكن المتتالية الهندسية (u_n) التي حدها الأول $u_0 = \dfrac{1}{3}$ و اساسها $q = \dfrac{1}{3}$

ا- احسب u_1

ب- عين $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

ج- من اجل كل عدد طبيعي n، نضع: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

بين ان : $S_n = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3^{n+1}}\right)$

2) بدراسة تغيرات الدالة h المعرفة على : $\mathbb{R}$ ب : $h(x) = e^x - 1 - x$ بين انه مهما يكن $x \in \mathbb{R}$: $1 + x \leq e^x$

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب : $v_n = (1+u_0)(1+u_1)\times ...\times (1+u_n)$

ا- احسب v_0 و v_1

ب- بين ان المتتالية (v_n) متزايدة

ج- بين أنه، من اجل كل عدد طبيعي n: $v_n \le e^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)}$

د- بين ان المتتالية (v_n) متقاربة.

ه- لتكن l نهاية المتتالية (v_n) .بين ان $1 < l < \sqrt{e}$

التمرين 259

بكالوريا تونس 2010

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتان كمايلي : $u_0 = 1$ ، $v_0 = 2$

و من اجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \alpha u_n + (1-\alpha)v_n$ و $v_{n+1} = (1-\alpha)u_n + \alpha v_n$ حيث α عدد حقيقي مع $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

1) لتكن (w_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب : $w_n = v_n - u_n$

ا- احسب w_0 و w_1

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n = (2\alpha-1)^n$

ج- استنتج نهاية المتتالية (w_n)

2) ا- اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \le v_n$

ب- بين ان المتتالية متزايدة (u_n) و ان المتتالية (v_n) متناقصة

ج- استنتج ان المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية

د- بين انه من اجل كل عدد طبيعي n، $u_n + v_n = 3$ و استنتج قيمة النهاية.

التمرين 260

بكالوريا فرنسا 2018

اجب بصح او خطا مع التبرير

1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب :

$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$$

ولتكن المتتالية (t_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب : $t_n = u_n - 5$

- المتتالية (t_n) متتالية هندسية ؟
- من أجل كل عدد طبيعي n ، فان : $u_n = 9\times 2n + 5$

2) لتكن المتتالية (v_n)

- اذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من 1
$-1-\frac{1}{n} \le v_n \le 1+\frac{1}{n}$ فان المتتالية (v_n) متقاربة.

3) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $(8\times 1+3)+(8\times 2+3)+..+(8\times n+3)=n(4n+7)$

4) لتكن (w_n) متتالية متقاربة

- اذا كان انطلاقا من رتبة معينة كل حدود المتتالية (w_n) موجبة تماما فإن نهاية المتتالية (w_n) موجبة تماما.

التمرين 261

بكالوريا فرنسا 2017 Nord) du (Amérique

الهدف من هذا التمرين هو دراسة المتتاليات التي حدودها موجبة حيث حدها الأول u_0 أكبر تماما من 1 وتمتلك الخاصية الاتية : من أجل كل عدد طبيعي $n>0$ مجموع n حد متتابعة الاولى تساوي جداء n حد متتابعة الأولى.
نقبل ان هذه المتتالية موجودة ولتكن (u_n) و التي تحقق :

- $u_0>1$
- من أجل كل عدد طبيعي $n\ge 0$ ، $u_n\ge 0$
- من أجل كل عدد طبيعي $n>0$ ، $u_0+u_1+...+u_n=u_0\times u_1\times ...u_{n-1}$

1) ليكن $u_0=3$ احسب u_1 و u_2

2) من أجل كل عدد طبيعي $n>0$ ، لتكن : $S_n=u_0+u_1+...+u_n=u_0\times u_1\times ...u_{n-1}$ لدينا على وجه الخصوص $S_1=u_0$

ا- تحقق انه من أجل كل عدد طبيعي $n>0$ ، $S_{n+1}=S_n+u_n$ و $S_n>1$

ب- استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي $n>0$: $u_n=\frac{S_n}{S_n-1}$

3) اثبت انه من أجل كل $n\ge 0$ فان $u_n>1$.

4) ا- برر انه من اجل كل عدد طبيعي $n>0$ فان $S_n>n$

ب- استنتج نهاية المتتالية (S_n) و (u_n)

التمرين 262

في كل حالة من الحالات التالية، هناك إجابة صحيحة واحدة فقط، اخترها مع التعليل:
II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n=\ln(n+3)-\ln(n+2)$.
1/ المتتالية (u_n) هي متتالية:

أ/ حسابية ب/ هندسية جـ/ لا حسابية ولا هندسية

2/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. لدينا:

أ/ $S_n = \ln\left(\frac{n+3}{2}\right)$ ب/ $S_n = \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right)$ جـ/ $S_n = 0$

3/ لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = \left[e^{n}\right] e^{n+1} \int \frac{2}{x}(1+\ln x)\,dx$، نضع $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{36}$. S يساوي:

أ/ 2022 ب/ 1443 جـ/ 1444

4/ لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3}$ ولتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n + 1}$ حيث α عدد حقيقي ثابت. قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية هي:

أ/ -2 ب/ 1 جـ/ 3

5/ α عدد حقيقي. تكون الأعداد $e^{-2}-1$، $e^{-4}-e^{-2}$ و α بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية هندسية إذا وفقط إذا كان:

أ/ $\alpha = 1 - e^{-4}$ ب/ $\alpha = e^{-2} - e^{-6}$ جـ/ $\alpha = e^{-4} - e^{-6}$

في كل حالة من الحالات التالية، هناك إجابة صحيحة واحدة فقط، اخترها مع التعليل:

6/ لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = e$ و $u_1 = e^2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \times u_{n+2} = u_{n+1}^2$. المتتالية (u_n) هي متتالية:

أ/ حسابية ب/ هندسية جـ/ لا حسابية ولا هندسية

7/ (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{1}{3}(n^2 + n)$. المتتالية (u_n) هي متتالية:

أ/ حسابية ب/ هندسية جـ/ لا حسابية ولا هندسية

8/ لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2u_n - n$. عبارة الحد العام u_n بدلالة n هي:

أ/ $u_n = 2^n + n + 1$ ب/ $u_n = 2^n + n + 2$ جـ/ $u_n = 2^n - n + 1$

9/ لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $2u_{n+1} = u_n + 2000$ ولتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{1}{2}u_n - \alpha$ حيث α عدد حقيقي ثابت. قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ هي:

أ/ 1000 ب/ 500 جـ/ -500

10/ قيمة العدد الحقيقي $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)^{2022} + \ln\left(2-\sqrt{3}\right)^{2022}$ هي:

أ/ 0 ب/ 2022 جـ/ 1

11/ لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = \left[0\right] n \int 2^x \times \ln 2\,dx$. عبارة الحد العام u_n بدلالة n هي:

أ/ $u_n = 2^n$ ب/ $u_n = 2^n + 1$ جـ/ $u_n = 2^n - 1$

12/ لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = e^{-4n}$، نضع: $P_n = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_n$. من أجل كل عدد طبيعي n :

أ/ $P_n = e^{-2n(n+1)}$ ب/ $P_n = e^{\frac{-n(n+1)}{2}}$ جـ/ $P_n = e^{2n(n+1)}$

13/ لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = \left(\frac{2}{3}\alpha\right)^n$ حيث α عدد حقيقي موجب تماما. مجموعة قيم العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) متقاربة هي:

أ/ $\left]0,\frac{3}{2}\right[$ ب/ $]-1,1[$ جـ/ $\left]0,\frac{2}{3}\right[$

2/ (u_n) متتالية هندسية حدها الأول e^{-1} وأساسها e^2، نضع: $A_n=\ln(u_0\times u_1\times\cdots\times u_n)$. من أجل كل عدد طبيعي n :

أ/ $A_n=n^2+1$ ب/ $A_n=n^2-1$ جـ/ $A_n=n^2$

14/ لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n=\int_n^{n+1}e^{1-x}dx$. المتتالية (u_n) هي متتالية هندسية أساسها:

أ/ $\frac{e-1}{e}$ ب/ $\frac{1}{e}$ جـ/ $e-1$

15/ لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n=1+\ln\left(\frac{2}{3}\right)^n$. المتتالية (u_n) هي متتالية:

أ/ حسابية متناقصة تماما ب/ هندسية متزايدة تماما جـ/ حسابية متزايدة تماما

التمرين 263

بكالوريا فرنسا 2015 (Polynesie)

1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ $u_n=e^{v_n}$ و المتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_1=\ln(2)$ و $v_{n+1}=\ln(2-e^{-v_n})$ من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

ا- تحقق ان $u_1=2$ و أن من اجل كل عدد طبيعي nغير معدوم $u_{n+1}=2-\frac{1}{u_n}$

ب- احسب كل من u_2 ، u_3 و u_4 (تعطى النتائج على شكل كسور)

ج- اثبت انه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $u_n=\frac{n+1}{n}$

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة بـ : $v_1=\ln(2)$ و من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $v_{n+1}=\ln(2-e^{-v_n})$

ا- عبر عن v_n بدلالة u_n ثم بدلالة n

3) ا- لتكن المتتالية (S_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ : $S_n=v_1+v_2+...+v_n$

ب- تحقق ان $S_3=\ln(4)$

ج- عبر عن S_n بدلالة n ثم استنتج نهاية المتتالية (S_n)

التمرين 264

بكالوريا فرنسا 2015 (Centres étrangers)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0=\alpha$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=e^{2u_n}-e^{u_n}$ حيث α عدد حقيقي ثابت غير معدوم

1) لتكن g الدالة المعرفة من اجل كل عدد حقيقي x ب : $g(x)=e^{2x}-e^x-x$

ا- احسب $g'(x)$ ، وتحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)=(e^x-1)(2e^x+1)$

ب- حدد تغيرات الدالة g واعط قيمتها الحدية الصغرى.

ج- بملاحظة أن $u_{n+1}-u_n=g(u_n)$ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2) في هذا السؤال، نفرض ان $\alpha\leq 0$

ا- برهن بالتراجع، من اجل كل عدد طبيعي n: أن $u_n\leq 0$.

ب- استنتج من الاسئلة السابقة، أن (u_n) متقاربة.

ج- اعط نهاية المتتالية (u_n) . في حالة $\alpha=0$

3) في هذا السؤال، نفرض ان $\alpha>0$

ا- برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1}-u_n\geq g(\alpha)$

ب- برهن بالتراجع، من أجل كل عدد طبيعي n $u_n\geq \alpha+n\times g(\alpha)$ عين نهاية المتتالية (u_n)

التمرين 265

بكالوريا فرنسا 2014 (Polynesie) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $u_0=0$ و من اجل كل $n\in\mathbb{N}$، $u_{n+1}=u_n+2n+2$

1) احسب u_1 و u_2

2) لنكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n=u_{n+1}-u_n$

ا- اكتب v_n بدلالة n

ب- ماهي طبيعة المتتالية (v_n) ؟

ج- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n=(n+1)(n+2)$

د- بين انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$، $S_n=u_{n+1}-u_0$ ثم استنتج u_n بدلالة n .

التمرين 266

بكالوريا فرنسا 2013 (Metropole) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة : $u_0=2$ و من اجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}n+1$

1) ا- احسب u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4.

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2) ا- اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\leq 3$

ب- اثبت انه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$

ج- استنتج اتجاه تغير المنتالية (u_n) .

3) لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ ب : $v_n=u_n-n$

ا- بين ان (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{2}{3}$

ب- استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n، $u_n=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

ج- احسب نهاية المتتالية (u_n) .

4) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، نضع : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$ و $T_n = \frac{S_n}{n^2}$

ا- عبر عن S_n بدلالة n .

ب- عين نهاية المتتالية (T_n)

التمرين 267

بكالوريا فرنسا (Antilles 2012 Guyane)

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة : $u_1 = \frac{1}{2}$ و

$u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right) u_n$.

1) احسب u_2، u_3 و u_4.

2) ا- بين انه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فان u_n موجب تماما.

ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) و استنتج انها متقاربة، ثم احسب نهايتها l

3) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع : $v_n = \frac{u_n}{n}$

ا- اثبت ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الأول v_1

ب- استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $u_n = \frac{n}{2^n}$

4) نعتبر الدالة f و المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ ب : $f(x) = \ln x - x\ln 2$

ا- عين نهاية الدالة f عند $+\infty$

ب- استنتج نهاية المتتالية (u_n)

التمرين 268

بكالوريا فرنسا (Antilles 2010 Gayine)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب $u_0 = -1$ و $u_1 = \frac{1}{2}$ و من اجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

1) احسب u_2 ثم استنتج أن (u_n) .لا هي هندسية ولا هي حسابية.

2) نعرف المتتالية (v_n) من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

ا- احسب v_0

ب- عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n .

ج- استنتج ان المتتالية (v_n) هندسية اساسها $\frac{1}{2}$

د- عبر عن v_n بدلالة n.

3) نعرف المتتالية (w_n) من أجل كل عدد طبيعي n: $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

ا- احسب w_0

ب- باستعمال العلاقة $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$، عبر عن w_{n+1} بدلالة u_n و v_n

ج- استنتج انه من أجل كل عدد طبيعي n، $w_{n+1} = w_n + 2$.

د- عبر عن w_n بدلالة n.

4) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$

5) من أجل كل عدد طبيعي n، نضع : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$

برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

التمرين 269

بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة 2021. دورة ماي الموضوع الأول (05) نقاط)

تمرين 01 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = 2 - \frac{4}{u_n + 3} \end{cases}$$

1) عين قيم u_0 حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2) فيما يلي تضع : $u_0 = 0$

ا- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \leq u_n < 1$

ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) . ثم استنتج انها متقاربة و احسب : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$

3) ا- بين انه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $0 < 1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(1 - u_n)$

ب- برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون: $0 < 1 - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

ج- استنتج نهاية المتتالية (u_n) من جديد

4) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$

ا- بين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب- عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

ج- احسب بدلالة n المجموعين T_n و T'_n حيث :

$$T_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + ... + \frac{1}{u_n + 2} \text{ و } \ln(T'_n) = v_0 + v_0 + ... + v_n$$

التمرين 270

بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة -2021 - دورة ماي الموضوع الثاني (04) نقاط)

I) f الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ ب: $f(x)=x-\ln(x+1)$

1 ادرس اتجاه تغير الدالة f على $[0;+\infty[$

2 استنتج انه من اجل x : من $[0;+\infty[$ فان : $\ln(x+1)\le x$

II) نضع من اجل كل عدد طبيعي

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=u_n-\ln(u_n+1) \end{cases}$$

1 احسب u_1 ، u_2

2 اثبت بالتراجع انه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n\ge 0$

3 ا- اثبت ان المتتالية (u_n) متناقصة واستنتج انه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n\le 1$

ب- استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة و احسب نهايتها

التمرين 271

بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2020 - دورة سبتمبر، الموضوع الأول (04) نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{4u_n}{u_n+2} \end{cases}$$

1 برهن انه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $1\le u_n<2$

2 ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) هل هي متقاربة ؟

3 نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n=1-\dfrac{2}{u_n}$

ا- برهن ان المتتالية (v_n) يطلب تعيين عبارة حدها العام v_n بدلالة n

ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم جد $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

ج- احسب المجموع S_n حيث: $S_n=\dfrac{1}{u_0}+\dfrac{1}{u_1}+...+\dfrac{1}{u_n}$

4 ا- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $|u_{n+1}-2|\le|u_n-2|$

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $|u_n-2|\le\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

ثم استنتج $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

التمرين 272

بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2020 - دورة سبتمبر. الموضوع الثاني (04) نقاط)
(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0 = e^{-1}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{eu_n - 1}{2}$ (e هو اساس اللوغاريتم النيبيري).

1 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq \frac{1}{e-2}$

2 عين اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3 (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = 2u_n + \frac{2}{2-e}$

ا- برهن ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الأول

ب- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = \frac{1}{e-2}\left[1 - \left(\frac{e}{2}\right)^{n-1}\right]$

ج- احسب نهاية المتتالية (u_n) ماذا تستنتج.

4 نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$

ا- عبر عن S_n بدلالة n.

ب- احسب المجموع $S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$ بدلالة n.

التمرين 273

بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2019 - دورة ماي الموضوع الأول (04) نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

1) ا- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \leq n + 3$

ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ج- استنتج أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل. هل هي متقاربة؟ برر.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب : $v_n = u_n - n$

ا- برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الأول

ب- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

ج- احسب المجموع $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

3) نعتبر المتتالية (t_n) المعرفة : $t_n = \ln(v_n)$

ا- برهن أن المتتالية (t_n) هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الأول

ب- احسب المجموع $S_n = t_0 + t_1 + ... + t_n$

التمرين 274

بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2019 - دورة ماي الموضوع الثاني (04) نقاط)
f دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كمايلي : $f(x) = x - \ln(x+2)$

1) أدرس تغيرات الدالة f.

2) (u_n) متتالية معرفة كمايلي : $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

ا- برهن بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \geq 1$

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ج- استنتج أن المنتالية (u_n) متقاربة و احسب نهايتها.

3) (v_n) متتالية معرفة كمايلي : $v_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_n = \ln[(u_0+2)\times(u_1+2)\times ...\times(u_{n-1}+2)]$$

ا- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = 3 - u_n$

ب- استنتج $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}[(u_0+2)\times(u_1+2)\times ...\times(u_{n-1}+2)]$

التمرين 275

بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2018 - دورة ماي الموضوع الأول (04) نقاط)

1) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$

ا- برهن بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \geq n$

ب- استنتج $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$

ج- بين ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما

2) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n = u_n - n + 1$

ا- برهن أن المتتالية (v_n) هندسية ثم اكتب v_n و u_n بدلالة n

ب- احسب قيمة المجموع : $S_n = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + ... + v_{n-1}^2$ بدلالة n .

ج- احسب قيمة المجموع: $K_n = (u_0)^2 + (u_1-1)^2 + (u_2-2)^2 + ... + (u_{n-1}-n+1)^2$ بدلالة n.

التمرين 276

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ ب :

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ 3u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$$

1) ا- برهن بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > \frac{1}{2}$

ب- بين ان المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج انها متقاربة

ج- عين نهاية المتتالية (u_n)

2) لنعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على : $\mathbb{N}$ ب: $v_n = \ln\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$

ا- بين ان (v_n) متتالية حسابية، يطلب تحديد اساسها r وحدها الأول

ب- عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

ج- عين نهاية ثانية للمتتالية (u_n).

التمرين 278

بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2016 - دورة ماي الموضوع الثاني (4) نقاط)

نعتبر (u_n) متتالية عددية معرفة ب $u_0 = 1$ و $u_1 = 2$ من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$u_{n+1} = 2\alpha u_n + 3\alpha^2 u_{n-1}$ حيث α عدد حقيقي من المجموعة $]-1;1[-\{0\}$

نضع و من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_{n+1} - 3\alpha u_n$

1) اثبت ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد اساسها وحدها الأول بدلالة α

2) هل المتتالية (v_n) منقاربة ؟

3) احسب بدلالة α و n المجموع $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

4) عين قيمة العدد الحقيقي α ، علما ان $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{3}{4}$

استنتج عندئذ (u_n) بدلالة n ثم بين أن (u_n) متقاربة

5) في كل مايلي نضع $\alpha = -\frac{1}{3}$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $\pi_n = v_0 \times v_1 \times ... \times v_n$

ا- بين ان : $\pi_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$

ب- عين اصغر عدد طبيعي n حتى يكون $\pi_n \leq 3^{-44}$

التمرين 279

لمدارس أشبال الأمة - 2021 - دورة ماي الموضوع الأول (04) نقاط)

التمرين

1 نعتبر v_1 و q عددان طبيعيان ، (v_n) هي المتتالية الهندسية التي أساسها q، وحدها الأول v_1

I) عين v_1 و q علما ان v_1 و q اوليان فيما بينهما $2v_1^2 = v_4 - v_2$

II) نفرض ان : $v_1 = 3$ و $q = 2$

1 اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم عين كل الحدود المحصورة بين العددين : 2020و 1441

2 نضع : $S_n = v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2$ و $P_n = \ln(S_n)$

احسب كلا من S_n و P_n بدلالة n . ثم احسب: $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} S_n$ و $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} S_n$

3 نعتبر α و β عددان طبيعيان حيث : $v_\alpha < v_\beta$

ا- حلل العدد 2304 الى جداء عوامل أولية

ب- عين كل الثنائية الطبيعية (α, β) بحيث يكون :

$$\begin{cases} v_\alpha \times v_\beta &= 2304 \\ PGCD(\alpha, \beta) &= 2 \end{cases}$$

ج- نسجل قيم الحدود السنة الأولى للمتتالية v_n على 6 بطاقات متماثلة و نخلطها جيدا ثم نسحب منها بصفة عشوائية بطاقتان في ان واحد.

- ماهو احتمال سحب بطاقتين تحملان حدين رقميا اوليان فيما بينهما؟

التمرين 280

بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة -2021 - دورة ماي الموضوع الثاني (04) نقاط)

متتاليتا الاعداد الطبيعية (x_n) و (y_n) معرفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} x_0 &= 3 \\ x_{n+1} &= 2x_n - 1 \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} y_0 &= 1 \\ y_{n+1} &= 2y_n + 3 \end{cases}$$

1) اثبت بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ان: $x_n = 2^{n+1} + 1$

2) ا- احسب $PGCD(x_8; x_9)$ و $PGCD(x_2; x_3)$

ب- هل x_n و x_{n+1} اوليان فيما بينهما من اجل كل عدد طبيعي n

3) ا- اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n ان: $2x_n - y_n = 5$

ب- اكتب y_n بدلالة n

ب- ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5

4) نضع $d_n = PGCD(x_n; y_n)$

ا- ما هي القيم الممكنة لـ d_n

ب- عين مجموعة قيم n التي يكون من اجلها x_n وy_n اوليين فيما بينهما.

التمرين 281

بكالوريا تجريبية المدارس أشبال الأمة - 2020 - دورة سبتمبر، الموضوع الأول (04) نقاط

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$$

1) ا- بين انه من أجل كل عدد طبيعي n: $2 \leq u_n \leq 4$

ب- بين انه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}^2 - u_n^2 = -(u_n + 1)(u_n - 4)$

ج- استنتج ان المتتالية (u_n) متزايدة

2) ا- بين انه من أجل كل عدد طبيعي n: $4 - u_{n+1} = \dfrac{3(4 - u_n)}{4 + \sqrt{3u_n + 4}}$

ب- استنتج انه من أجل كل عدد طبيعي n: $4 - u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(4 - u_n)$

ج- استنتج انه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \leq 4 - u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

د- اوجد عندئذ نهاية المتتالية (u_n)

التمرين 282

بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2020 - دورة سبتمبر. الموضوع الثاني (04) نقاط

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 1$، $u_1 = 2$ و $u_n = 2u_{n-1} + 3u_n - 2$

1) نعتبر (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بما يلي :

$v_n = \alpha u_n + \beta u_{n-1}$ حيث α و β عددان حقيقيان غير معدومين

ا- احسب u_2 و u_3

ب- احسب v_1 ، v_2 و v_3 بدلالة α و β

ج- بين انه اذا كانت v_1 ، v_2 و v_3 ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية فان : $3\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 = 0$

2) نضع $\alpha = \beta$:

ا- برهن ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الأول.

ب- استنتج انه من أجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$: $u_n + u_{n-1} = 3^n$

التمرين 283

بكالوريا تجريبية المدارس أشبال الأمة - 2018 - دورة ماي الموضوع الأول (04) نقاط

1) (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 5$ واساسها 4،

ا- اكتب الحد العام u_n بدلالة n .

ب- احسب قيمة المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n

ج- اذا كان مجموع خمسة حدود متعاقبة من (u_n) هو 2025 فما هو الحد الأول من هذه الحدود

2) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = (2n+1) \times 2^{(4n+5)}$

ا- عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 7

ب- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون باقي قسمة v_n على 7 هو 3

ج- برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}$

د- استنتج قيمة الجداء $P_n = v_0 \times v_1 \times ... \times v_n$ بدلالة n .

التمرين 284

بكالوريا تجريبية المدارس أشبال الأمة - 2016 - دورة ماي الموضوع الأول (04) نقاط)

a و b عددان حقيقيان حيث $0 < a < b$. (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان ب $u_0 = a$ و $v_0 = b$ و من أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ و $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$

1 اثبت من أجل كل عدد طبيعي n أن $0 \leq u_n \leq v_n$

2 بين من أجل كل عدد طبيعي n أن $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

(يمكن استعمال النتيجة $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq 1$ حيث $x > 0$ و $y > 0$)

3 استنتج ان $v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(b-a)$ من أجل كل عدد طبيعي n.

4 اثبت ان المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان

5 فيما يلي نضع $a = 2$ و $b = 5$

بواسطة آلة حاسبة احسب u_3 ثم استنتج قيمة مقربة بالنقصان إلى 10^{-3} للنهاية المشتركة للمتتاليتين.

التمرين 285

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول: $u_1 = \sqrt{e}$ (e يرمز لأساس اللوغاريتم النيبيري) ومن أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

1 احسب الحدود u_2 ، u_3 و u_4 (تدور النتائج إلى 10^{-2}) ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2 أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_n \leq n + 3$

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$ مستنتجا إتجاه تغير المتتالية (u_n)

3 لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n = u_n - n$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب) اكتب v_n بدلالة n ثم بين أنه من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_n = n + (\sqrt{e}-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

4 نضع من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^1 v_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 v_2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^n v_n$ و $S'_n = u_1 + u_2 \ldots + u_n$ و $T_n = \frac{S'_n}{n^2}$

• احسب المجموعين: S_n و S'_n ثم عين $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$

التمرين 286

في الشكل المقابل (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول: $u_0 = 5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

1 حدد اتجاه تغير الدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

2 باستعمال التمثيل البياني للدالة f ، مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3

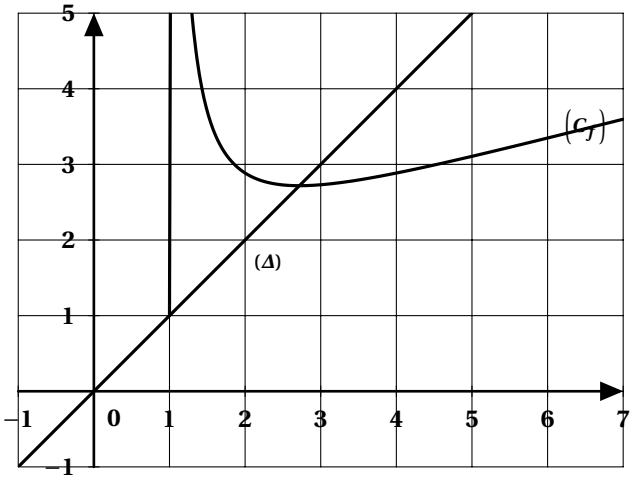
3 ضع تخمينا حول سلوك المتتالية (u_n)

4 أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq e$

5 أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n)

6 استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو عدد حقيقي l من المجال $[e;+\infty]$

7 أثبت أن $f(l) = l$ ثم استنتج قيمة l



التمرين 287

❶ نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية بحدها العام : $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$

✍ بين أن (u_n) متتالية هندسية، أساسها وحدها الاول.

✍ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. ماذا تستنتج ؟

✍ احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

❷ نضع من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = ln(u_n)$

✍ عبر عن (v_n) بدلالة n ثم استنتج نوعها .

✍ أحسب بدلالة n العدد P_n حيث : $P_n = ln(u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_n)$

✍ عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $P_n + 4n > 0$

التمرين 288

لتكن (u_n) متتالية معرفة كما يلي :$u_0 = 1$ ومن اجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$ و $v_n = u_n + 4$

① بين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحده الاول .

② أكتب كلا من (v_n) و (u_n) بدلالة n

③ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$

④ احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

⑤ لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = 5\left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right)$

✍ بين أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

✍ أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - w_n)$

التمرين 289

① (u_n) متتالية معرفة كما يلي : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{4u_n}{1 + u_n}$

✍ أحسب u_1 و u_2

✍ برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$

② لتكن (v_n) المتتالية المعرفة من اجل كل عدد طبيعي بـــ : $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$

✍ بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$

✍ أكتب (v_n) بدلالة n ثم استنتج (u_n) بدلالة n

✍ احسب نهاية المتتالية (u_n)

③ (w_n) متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $w_n = \frac{3}{u_n}$ نضع و $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$

✍ أثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 1 - v_n$

✍ بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n = n + 1 + \frac{8}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$

✍ احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$

التمرين 290

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{(u_n)^3}{3(u_n)^2 + 1} \end{cases}$

❶ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: لدينا $u_n > 0$.

❷ بين أن المتتالية متناقصة تماما.

❸ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

❹ بين أنه من أجل كـــــــل عدد طبيعـــــــــي : $u_{n+1} \leq \frac{1}{3}u_n$

❺ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي : $u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

❻ أحسب نهاية المتتالية (u_n).

التمرين 291

❶ (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1 \end{cases}$

✍ احسب u_1 ، u_2 و u_3

✍ هل المتتالية (u_n) حسابية ؟ هندسية ؟

❷ نضع من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 2n + 6$

✍ احسب v_0 ، v_1 ، v_2 و v_3

✍ اثبت أن المتتالية v_n هندسية يطلب تعيين أساسها.

✍ أكتب عبارة (v_n) بدلالة n ، ثم استنتج عبارة (u_n) بدلالة n

✍ ما هي نهاية المتتالية (u_n)

✍ احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

التمرين 293

نعرف على $\mathbb{N}^*$ المتتالية (u_n) كما يلي : $u_n = \frac{n^2}{2^n}$

❶ نضع من أجل كل عدد $n \in \mathbb{N}^*$: $V_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

- أ - بين أن $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \frac{1}{2}$

- ب - بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ يكون $V_n \geq \frac{1}{2}$

- ج- عين أصغر عدد طبيعي p بحيث إذا كـان : $n \leq p$ فإن : $V_n \geq \frac{3}{4}$

- د - إستنتج أنه إذا كان : $n \geq p$ فإنه يكون : $u_{n+1} \leq \frac{3}{4}u_n$

❷ نضع من أجل $n \geq 5$: $S_n = \sum_{k=5}^{k=n} u_k$

- أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \geq 5$ يكون : $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \times u_5$

- ب - بين أنه من أجل كل $n \geq 5$ يكون : $S_n \leq \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] \times u_5$

- ج- إستنتج أنه من اجل كل $n \geq 5$ يكون : $S_n \leq 4u_5$

❸ بين أن المتتالية $(S_n)_{n \geq 5}$ متزايدة، ثم استنتج أنها متقاربة

التمرين 294

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نعرف المتتالية (u_n) كمـايلي : $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right)u_n \end{cases}$

① أحسب الحدود الثلاثة الأولى

② - أ - برهن انه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ يكون : $u_n > 0$
- ب - برهن أن المتالية (u_n) متناقصة،
ماذا تستنتج بالنسبة للمتتالية (u_n)؟
③ نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $V_n = \frac{u_n}{n}$
- أ - برهن أن المتتالية (V_n) هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_1
- ب - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}^*$ يكون: $u_n = \frac{n}{2^n}$
④ نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = lnx - xln2$
- أ - عين نهاية الدالة f عند $+\infty$
- ب - إستنتج نهاية المتتالية (u_n)

التمرين 295

من أجل كل عدد طبيعي n نعرف المتتالية (u_n) كمايلي : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 3 - \frac{9}{4u_n} \end{cases}$
① برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 3$
② أدرس اتجاه تغير (u_n)، ثم استنتج انها متقاربة
(v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{2}{2u_n - 3}$
① بين أن (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
② أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n
③ عين نهاية المتتالية (u_n)
④ عين بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0v_0 + u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$

التمرين 296

في كل حالة من الحالات التالية، أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل:
1/ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $1 + \ln(2e) + \ln(3e) + \cdots + \ln(en) = n + \ln(n!)$.
2/ a، b و c أعداد حقيقية موجبة تماما. إذا كانت الأعداد $\ln a$، $\ln b$ و $\ln c$ بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية حسابية وكانت الأعداد e^a، e^b و e^c بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية هندسية فإن $a = b = c$.
3/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = e \times e^2 \times e^3 \times \cdots \times e^n$. لدينا $\ln(P_n^2) = n(n+1)$.
4/ المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = -3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$ متزايدة تماما.
5/ المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = \frac{\ln n}{e^n}$ متقاربة.
6/ لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = \ln(n+2) - \ln(n+1)$. لدينا $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \ln\left(\frac{n+2}{2}\right)$.