تمرين1 (06نقاط)

I- (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=2-\frac{2}{u_n+1}$.

1) برهن بالتراجع أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $0<u_n<1$.

2) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

3) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها.

II- (v_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $v_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}=\sqrt{2v_n-1}$.

1) برهن بالتراجع أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $1<v_n\leq 2$.

2) بيّن أنّ المتتالية (v_n) متناقصة تماما.

3) استنتج أنّ المتتالية (v_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها.

III- 1) بيّن أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=\frac{2^n}{2^n+1}$.

3) احسب بدلالة العدد طبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{2}{u_1}++\frac{2^2}{u_2}...+\frac{2^n}{u_n}$.

تمرين2 (06نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=\alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{{u_n}^2}{2u_n+1}$.

1) عيّن قيم العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

في باقي التمرين نفرض أنّ المتتالية (u_n) ليست ثابتة، وأنّ $u_0=1$.

2) برهن بالتراجع أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $0\leq u_n\leq 1$.

3) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة، استنتج أنّها متقاربة.

4) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}\leq\frac{1}{2}u_n$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$. استنتج حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

5) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2، ثم اكتب كل من v_n و u_n بدلالة n.

ب) احسب بدلالة العدد طبيعي n الجداء P_n حيث: $P_n=\frac{u_0}{u_0+1}\times\frac{u_1}{u_1+1}\times...\times\frac{u_n}{u_n+1}$.

ency-education.net/exams

www.ency-education.net

تمرين3 (08نقاط)

f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{2e^x+3}{e^x-1}$.

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to 0^{<}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^{>}} f(x)$ ، أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة.

ب) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-3$ وأنّ: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=2$. أعط تفسيرا هندسيا لكل نهاية.

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد x غير معدوم، $f'(x)=\dfrac{-5e^x}{(e^x-1)^2}$. استنتج اتّجاه تغيّر f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) أثبت أنّ النقطة $\omega\left(0\,;-\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني $(\mathscr{C})$.

4) برهن على وجود مماسين (T) و (T') للمنحني $(\mathscr{C})$ معامل توجيه كل منهما يساوي $-\frac{6}{5}$. اكتب معادلة لكل منهما.

5) احسب $f(\ln 2)$ و $f(\ln 3)$ ، ثم ارسم المماسين (T) و (T') والمنحني $(\mathscr{C})$.

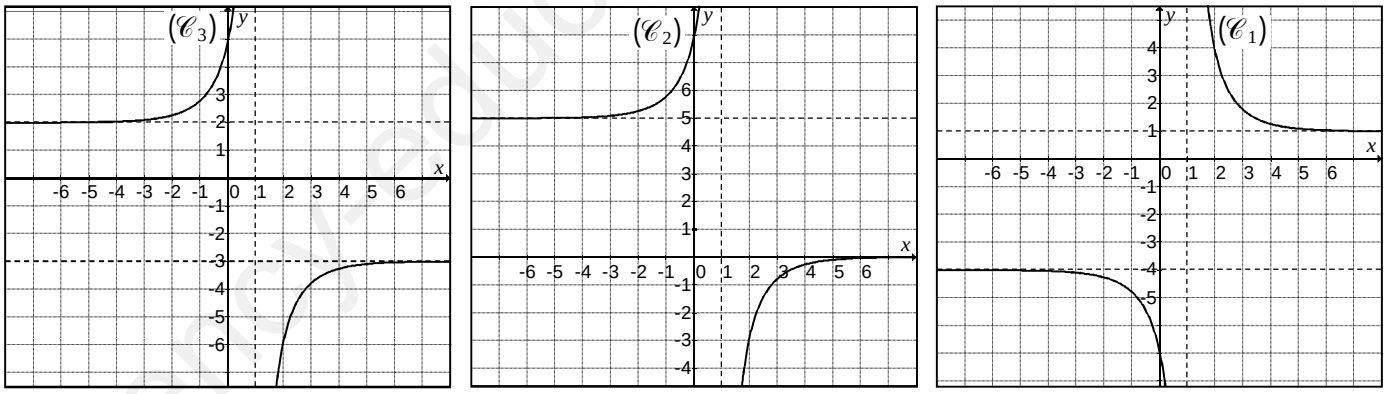
6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $(m+3)(e^x-1)-5e^x=0$.

7) أ) عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $f(x)=a+\dfrac{be^x}{e^x-1}$.

ب) احسب المساحة $\mathcal{A}$ للحيّز المستوي المحدد بـ $(\mathscr{C})$ والمستقيمات التي معادلاتها: $x=1$ ، $x=3$ و $y=2$.

8) g ، h و k الدوال المعرّفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $g(x)=f(1-x)$ ، $h(x)=f(x-1)-1$ و $k(x)=2-f(x-1)$.

باستعمال المنحني $(\mathscr{C})$ للدالة f ، تعرّف على المنحنيات $(\mathscr{C}_g)$ ، $(\mathscr{C}_h)$ و $(\mathscr{C}_k)$ من بين التمثيلات البيانية $(\mathscr{C}_1)$ ، $(\mathscr{C}_2)$ و $(\mathscr{C}_3)$ المبيّنه في الشكل أسفله مع تبرير الإجابة.



بالتوفيق

www.ency-education.net

تصحيح فرض الفصل الثاني 2026م

تمرين 1: "عبد المطلب"

I- 1) $n=0$: $0 < u_0 = \frac{1}{2} < 1$ (محققة)

نفرض أنّ $0 < u_n < 1$ من أجل n كيفي

ونبرهن صحة: $0 < u_{n+1} < 1$.

لدينا: $0 < u_n < 1$ ، $1 < u_n + 1 < 2$

$\frac{1}{2} < \frac{1}{u_n+1} < 1$ ، $1 < \frac{2}{u_n+1} < 2$

$-1 < \frac{-2}{u_n+1} < -\frac{2}{2}$ ؛ $-2 < \frac{-2}{u_n+1} < -1$

$0 < 2 - \frac{2}{u_n+1} < 1$

ومنه: $0 < u_{n+1} < 1$. ومنه: $0 < u_n < 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

$u_{n+1} - u_n = 2 - \frac{2}{u_n+1} - u_n = \frac{-u_n(u_n-1)}{u_n+1} > 0$ (2

لأن $0 < u_n < 1$ ومنه: $u_n - 1 < 0$

إذن (u_n) متزايدة

3) (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ، $\ell = 2 - \frac{2}{\ell+1}$

$\ell(\ell-1) = 0$ $\ell = 0$ مرفوض

$\ell = 1$ مقبول لأن (u_n) متزايدة

II- 1) $n=0$: $1 < v_0 = 2 \leq 2$ (محققة)

نفرض أن $1 < v_n \leq 2$ ونبرهن: $1 < v_{n+1} \leq 2$

$1 < 2v_n - 1 \leq 3$ ؛ $2 < 2v_n \leq 4$ ؛ $1 < v_n \leq 2$

$1 < v_{n+1} \leq 2$ ومنه $1 < \sqrt{2v_n - 1} \leq \sqrt{3} \leq 2$

إذن $1 < v_n \leq 2$ مهما يكن $n \in \mathbb{N}$

2) $v_{n+1} - v_n = \frac{(\sqrt{2v_n-1} - v_n)(\sqrt{2v_n-1} + v_n)}{\sqrt{2v_n-1} + v_n}$

$v_{n+1} - v_n = \frac{-(v_n-1)^2}{\sqrt{2v_n-1} + v_n} < 0$ (v_n) متناقصة

3) (v_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

$\ell' = \sqrt{2\ell'-1}$ ، $(\ell'-1)^2 = 0$ ومنه: $\ell' = 1$

III- 1) (u_n) متزايدة ، (v_n) متناقصة، ولهما النهاية نفسها إذن متجاورتان.

2) $n=0$: $u_0 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ محققة

نفرض أن: $u_n = \frac{2^n}{2^n+1}$ ونبرهن $u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}+1}$

$u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+1} = \frac{2 \cdot \frac{2^n}{2^n+1}}{\frac{2^n}{2^n+1}+1} = \frac{\frac{2^{n+1}}{2^n+1}}{\frac{2 \cdot 2^n + 1}{2^n+1}} = \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}+1}$

ومنه: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \frac{2^n}{2^n+1}$

3) $S_n = \frac{1}{\frac{1}{2^0+1}} + \frac{2}{\frac{2}{2^1+1}} + \frac{4}{\frac{4}{2^2+1}} + \dots + \frac{2^n}{\frac{2^n}{2^n+1}}$

$S_n = (2^0+1) + (2^1+1) + (2^2+1) + \dots + 2^n + 1$

$S_n = \underbrace{2^0 + 2^1 + \dots + 2^n}_{\text{مجموع متتالية هندسية}} + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n+1 \text{ مرة}}$

$S_n = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} + 1(n+1) = 2^{n+1} + n$

تمرين 2:

I- 1) (u_n) ثابتة : $u_{n+1} = u_n$ ، $u_1 = u_0 = \alpha$

$\alpha = \frac{\alpha^2}{2\alpha+1}$: $\alpha(\alpha+1) = 0$ أو $\alpha = 0$ أو $\alpha = -1$

2) $n=0$: $u_0 = 1$. $0 \leq u_0 \leq 1$ (محققة)

نفرض أن $0 \leq u_n \leq 1$ ونبرهن $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

$0 \leq u_n \leq 1$ ؛ $0 \leq 2u_n \leq 2$ ؛ $1 \leq 2u_n + 1 \leq 3$

$0 \leq u_n^2 \leq 1$ ، ولدينا: $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2u_n+1} \leq 1$

ومنه: $0 \leq u_{n+1} \leq 1$ أي: $0 < \frac{u_n^2}{2u_n+1} \leq 1$

$0 \leq u_n \leq 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

3) $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{2u_n+1} - u_n = \frac{-u_n(u_n+1)}{2u_n+1} \leq 0$

لأن: $u_n + 1 > 0$ و $2u_n + 1 > 0$ (u_n) متناقصة

4) (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

$u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = \frac{u_n^2}{2u_n+1} - \frac{u_n}{2} = \frac{-u_n}{2(2u_n+1)} \leq 0$

ومنه: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

ب) $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$: طريقة 1: البرهان بالتراجع

$n=0$: $u_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0$ ، $u_0 = 1$ (محققة)

نفرض أن $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ونبرهن $u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$\frac{1}{2}u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ، $\frac{1}{2}u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ وسابقا $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

ومنه: $u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ إذن $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

طريقة 2: لدينا: $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

$u_1 \leq \frac{1}{2}u_0$

$u_2 \leq \frac{1}{2}u_1$

$\vdots \quad \vdots$

$u_n \leq \frac{1}{2}u_{n-1}$

بالضرب طرف لطرف

$u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n u_0$

$0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

حسب مبرهنة الحصر

$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

$V_{n+1} = \ln\left(1+\frac{1}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(1+\frac{2u_n+1}{u_n^2}\right)$ (P (5

$V_{n+1} = \ln\left(\frac{u_n^2+2u_n+1}{u_n^2}\right) = \ln\left(\frac{u_n+1}{u_n}\right)^2$

$V_{n+1} = 2\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) = 2V_n$

متتالية (V_n) هندسية: $q=2$ ، $V_0 = \ln 2$.

$V_n = V_0 \cdot q^n = \ln 2\,(2^n)$

$\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) = V_n$ ؛ $1+\frac{1}{u_n} = e^{V_n}$ ؛ $\frac{1}{u_n} = e^{V_n}-1$

$u_n = \frac{1}{e^{V_n}-1} = \frac{1}{e^{\ln 2(2^n)}-1} = \frac{1}{2^{2^n}-1}$

(ب $\frac{1+u_n}{u_n} = e^{V_n}$ ، إذن $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{e^{V_n}}$

$P_n = \frac{1}{e^{V_0}} \times \frac{1}{e^{V_1}} \times \cdots \times \frac{1}{e^{V_n}} = \frac{1}{e^{V_0}\cdot e^{V_1}\cdots e^{V_n}} = \frac{1}{e^{V_0+V_1+\cdots+V_n}}$

$P_n = \frac{1}{e^{\ln 2\left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right)}} = \frac{1}{e^{\ln 2(2^{n+1}-1)}} = \frac{1}{2^{2^{n+1}}-1}$

تمرين 3:

(P (1 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2e^x+3}{e^x-1} = -\infty$ ($e^x-1 \to 0^-$, $2e^x+3 \to 5$)

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2e^x+3}{e^x-1} = +\infty$ ($e^x-1 \to 0^+$)

$x=0$ يقبل: مستقيم مقارب عمودي $(\mathcal{C})$

(ب $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2e^x+3}{e^x-1} = -3$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x\left(2+\frac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)} = 2$

$(\mathcal{C})$ يقبل: مستقيمان مقاربان أفقيان $y=-3$، $y=2$

(2 $f'(x) = \frac{2e^x(e^x-1)-e^x(2e^x+3)}{(e^x-1)^2} = \frac{-5e^x}{(e^x-1)^2} < 0$

f متناقصة تماما على كل: $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-3	↘	‖	↘	2
		$+\infty$	‖	$-\infty$	

(3 $x \in \mathbb{R}^*$ ، كذلك $-x \in \mathbb{R}^*$ (تناظر بالنسبة لمعلم)

$f(2(0)-x) + f(x) = f(-x) + f(x)$

$\frac{2e^{-x}+3}{e^{-x}-1} + \frac{2e^x+3}{e^x-1} = \frac{e^{-x}(2+3e^x)}{e^{-x}(1-e^x)} + \frac{2e^x+3}{e^x-1}$

$f(-x)+f(x) = \frac{-2-3e^x+2e^x+3}{e^x-1} = \frac{-(e^x-1)}{e^x-1}$

$f(-x)+f(x) = -1 = 2\left(-\frac{1}{2}\right)$

و منه $\omega\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر لـ $(\mathcal{C})$.

(4 $f'(x_0) = -\frac{6}{5}$ ، $\frac{-5e^{x_0}}{(e^{x_0}-1)^2} = -\frac{6}{5}$

$25e^{x_0} = 6(e^{2x_0} - 2e^{x_0} + 1)$

$6(e^{x_0})^2 - 37e^{x_0} + 6 = 0$

نضع: $t = e^{x_0}$ ؛ $6t^2 - 37t + 6 = 0$

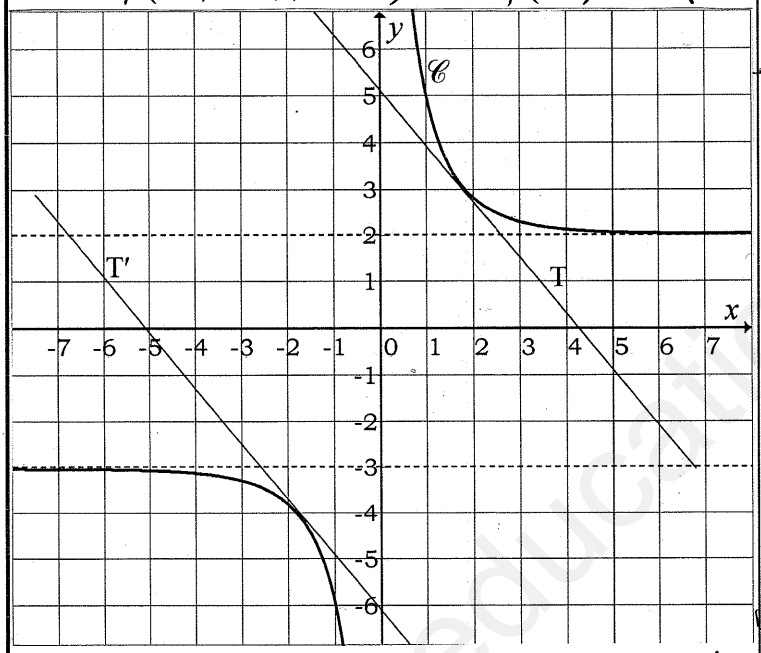
$t_1 = 6$ ؛ $e^{x_0} = 6$ ؛ $x_0 = \ln 6$

$t_2 = \frac{1}{6}$ ؛ $e^{x_0} = \frac{1}{6}$ ؛ $x_0 = \ln\frac{1}{6} = -\ln 6$

$y_1 = f'(\ln 6)(x-\ln 6) + f(\ln 6) = \frac{-6}{5}x + \frac{6}{5}\ln 6 + 3$

$y_2 = f'(-\ln 6)(x+\ln 6) + f(-\ln 6) = \frac{-6}{5}x - \frac{6}{5}\ln 6 - 4$

(5 $f(\ln 3) = 4{,}5$ ، $f(\ln 2) = 7$



(6 $m = \frac{2e^x+3}{e^x-1} = f(x)$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع $(\mathcal{C})$ مع المستقيمات ذات المعادلة $y=m$.

المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا $m \in]-\infty;-3[$

المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا $m \in]2;+\infty[$

المعادلة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$ $m \in [-3;2]$

(P (7 $f(x) = a + \frac{be^x}{e^x-1} = \frac{(a+b)e^x - a}{e^x-1}$

بالمطابقة نجد: $f(x) = -3 + \frac{5e^x}{e^x-1}$

(ب $A = \int_1^3 (f(x)-2)\,dx = \int_1^3 \left(-5+5\frac{e^x}{e^x-1}\right)dx$

$A = \left[-5x+5\ln(e^x-1)\right]_1^3 = -10+5\ln(e^3-1)-5\ln(e-1) = 5\ln\left(\frac{e^3-1}{e-1}\right)$ ua

(8 $(\mathcal{C}_1)$ هو $(\mathcal{C})$ منسحب وفق $\vec{v}(1;1)$ ثم $(\mathcal{C}_2)$ هو $(\mathcal{C}_1)$ منسحب وفق $\vec{v}(2;0)$.

$(\mathcal{C}_3)$ هو $(\mathcal{C}_2)$ مناظر بالنسبة لـ (Ox) ثم $(\mathcal{C}_4)$ هو $(\mathcal{C}_3)$ مناظر بالنسبة لـ (Oy).

$k = 1-\ln 2$: $(\mathcal{C}_k)$ هو $(\mathcal{C}_4)$ مناظر بالنسبة لـ (Ox) ثم منسحب وفق $\vec{v}(1;0)$.

e-Y-solutions.net/exams