

اختبار الفصل الثاني لمادة الرياضيات

التمرين الأول: (6 نقاط)

الجزء الأول: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0, \sqrt{6}]$ ب: $f(x) = \frac{3}{\sqrt{6-x^2}}$

(C_f) منحناها البياني في المستوى المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة f على $[0, \sqrt{6}]$ ثم شكل جدول تغيراتها.

الجزء الثاني: لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

(1) أحسب: $u_1; u_2; u_3$ ثم ضع تخميننا حول اتجاه تغير (u_n) .

(2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$.

(3) أ/ أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

ب/ استنتج أن (u_n) متقاربة مع تحديد نهايتها.

(4) نعتبر (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = \frac{u_n^2}{3-u_n^2}$

أ/ بين أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب/ أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

ج/ أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

(5) لتكن المتتالية العددية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $w_n = e^{v_n}$.

أ/ بين أن (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب/ أحسب الجداء P_n بدلالة n : $P_n = w_0 \times w_1 \times w_2 \times \dots \times w_n$.

ج/ من أجل أي قيمة للعدد الطبيعي n يكون: $P_n \geq e^{3^n}$.

التمرين الثاني: (5 نقاط)

(1) أ/ أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n وباقي قسمة 5^n على 7.

ب/ أحسب المجموع S_n بدلالة n : $S_n = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n$.

ج/ استنتج باقي القسمة الاقليدية للعددين $S_{2022}; S_{1962}$ على 7.

(2) عين كل الثنائيات (x, y) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث: $\begin{cases} 25x - 31y = 7 \\ p \gcd(x, y) = 7 \end{cases}$

(3) لتكن في مجموعة الاعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ المعادلة (E) ذات المجهول x حيث: $3x(x+2) \equiv 2[7]$.

أ/ حل المعادلة (E) في $\mathbb{Z}$.

ب/ ليكن العدد الطبيعي n يكتب 361 في النظام ذي الأساس α و باقي قسمته على 7 هو 3.

عين قيم العدد الطبيعي α .

-استنتج قيمة العدد الطبيعي α اذا علمت أن: $n = 241$.

الجزء الأول: نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln(x)$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

(2) أدرس اتجاه تغير g على $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $1,75 < \alpha < 2$.

(4) استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.

الجزء الثاني: لتكن الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 + 1}$

(C_f) منحنىها البياني في مستوي مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.

(1) أحسب النهايتين: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ثم فسر النتيجةين بيانيا.

(2) أ/ تحقق أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x^2 + 1)^2}$

ب/ أدرس اتجاه تغير f على $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

ج/ بين أنه من أجل كل x من $[1; +\infty[$: $0 \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x^2}$

د/ بين أن $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج الى 10^{-2}).

(3) أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 1$.

(4) أنشئ (Δ) و (C_f).

(5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x : $f(x) = \frac{1}{2}x + m$

(6) أ/ تحقق أن الدالة H المعرفة على $[1; +\infty[$ ب: $H(x) = \frac{-1}{x}(1 + \ln x) + 1$ هي دالة أصلية للدالة h حيث: $h(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

ب/ لتكن A مساحة الخيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتها $x = 1$ و $x = e$.

حين حصرا للمساحة A .