

سلسلة الرياضيات السهلة

حواليات الرياضيات

■ شعبة : علوم تجريبية

من 2008 إلى 2019

مقدمة

المقدمات لا يقرأها أحد ..

إقلب الصفحة

الفهرس

3.....	تصحيح مقترح لباكالوريا 2008
16.....	تصحيح مقترح لباكالوريا 2009
29.....	تصحيح مقترح لباكالوريا 2010
43.....	تصحيح مقترح لباكالوريا 2011
54.....	تصحيح مقترح لباكالوريا 2012
69.....	تصحيح مقترح لباكالوريا 2013
84.....	تصحيح مقترح لباكالوريا 2014
98.....	تصحيح مقترح لباكالوريا 2015
113.....	تصحيح مقترح لباكالوريا 2016 المسرّب
131.....	تصحيح مقترح لباكالوريا 2016
148.....	تصحيح مقترح لباكالوريا 2017 الدورة العادية
161.....	تصحيح مقترح لباكالوريا 2017 الدورة الإستثنائية
177.....	تصحيح مقترح لباكالوريا 2018
192.....	تصحيح مقترح لباكالوريا 2019

الموضوع الأول

التمرين الأول (4,5 ن)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة: $z^2 - (1+2i)z - 1+i = 0$.

نرمز للحلين بـ z_1 و z_2 حيث $|z_1| < |z_2|$. بين أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي.

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

لتكن A ، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب: 1 ، z_1 و z_2 .

ليكن z العدد المركب حيث: $z = \frac{z_2 - 1}{z_1 - 1}$.

أ. إنطلاقاً من التعريف $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ومن الخاصية $e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2}$.

برهن أن: $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$ وأن: $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ بحيث θ ، θ_1 و θ_2 أعداد حقيقية.

ب. أكتب z على الشكل الأسّي.

ج. أكتب z على الشكل المثلثي واستنتج أن C هي صورة B بتشابه مباشر مركزه A ، يطلب تعيين نسبته وزاويته.

التمرين الثاني (4 ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر المستوي (P) الذي معادلته: $x + 2y - z + 7 = 0$.

والنقط: $A(2; 0; 1)$ ، $B(3; 2; 0)$ ، $C(-1; -2; 2)$.

(1) تحقق أن النقط A ، B و C ليست على استقامية، ثم بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي: $y + 2z - 2 = 0$.

(2) أتحقق أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان، ثم عين تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (P) و (ABC) .

ب. أحسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) .

(3) لتكن G مرجح الجملة $\{(A; 1), (B; \alpha), (C; \beta)\}$ حيث α, β عدنان حقيقيان يحققان $\alpha + \beta + 1 \neq 0$.

(4) عين α حتى تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ) .

التمرين الثالث (4 ن)

(1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [1; 2]$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$.

أ. بين أن الدالة f متزايدة على I .

ب. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I .

(2) (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي: $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I .

ب. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

(3) أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$.

ب. عين النهاية: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الرابع (5,7ن)

(I) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$.
تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول 1 cm .

عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1; 1)$ تنتمي إلى (C_f) ومعامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

(II) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = (-x - 1)e^{-x} + 1$.
(C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق .

(1) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ وفسر النتيجة بيانياً . (نذكر أن $\lim_{u \rightarrow -\infty} ue^u = 0$)

(2) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها .

(3) بين أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I يطلب تعيين إحداثيها .

(4) أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I .

(5) أرسم (C_g) .

(6) H الدالة العددية المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يلي : $H(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$ حيث α و β عدنان حقيقيان .

- عين α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x \mapsto g(x) - 1$. استنتج الدالة الأصلية للدالة g والتي تنعدم عند 0 .

(III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يأتي : $k(x) = g(x^2)$.
باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عين اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها .

الموضوع الثاني

التمرين الأول (3ن)

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد فقط صحيح ، عين الجواب الصحيح معللاً اختيارك .

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقط $A(1; 3; -1)$ ، $B(4; 1; 0)$ ، $C(-2; 0; -2)$ و $D(3; 2; 1)$.
و المستوي (P) الذي معادلته $x - 3z - 4 = 0$.

(1) المستوي (P) هو : (1ج) (BCD) (2ج) (ABC) (3ج) (ABD)

(2) شعاع ناظمي للمستوي (P) هو : (1ج) $\vec{n}_1(1; 2; 1)$ (2ج) $\vec{n}_2(-2; 0; 6)$ (3ج) $\vec{n}_3(2; 0; -1)$

(3) المسافة بين النقطة D و المستوي (P) هي : (1ج) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ (2ج) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ (3ج) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

التمرين الثاني (5ن)

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0 = \frac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$

(1) أرسم في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ والمنحنى (d) الممثل للدالة f

المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$.

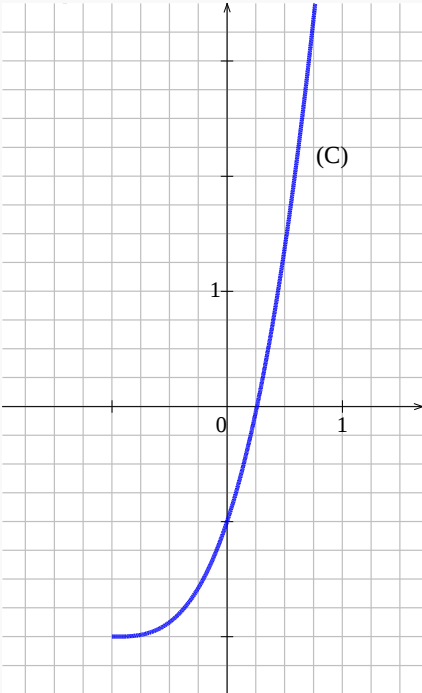
- بـ باستعمال الرسم السابق ، مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود : u_4 و u_3, u_2, u_1, u_0 .
- جـ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .
- (2) أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n \leq 6$.
- بـ تحقق أن (u_n) متزايدة .
- جـ هل (u_n) متقاربة ؟ برز إجابتك .
- (3) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n : v_n = u_n - 6$.
- أـ أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .
- بـ أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثالث (5ن)

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 + iz - 2 - 6i = 0$
- (2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب حيث : $z_A = 2 + i$ و $z_B = -2 - 2i$.
- عين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.
- (3) لتكن C النقطة ذات الاحقة z_C حيث : $z_C = \frac{4-i}{1+i}$.
- أكتب z_C على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) .
- (4) أـ برهن أن عبارة التشابه المباشر الذي مركزه $M_0(z_0)$ ونسبته k ($k > 0$) وزاويته θ والذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$.
- بـ تطبيق : عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل S المعرف بـ : $z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z + \frac{1}{2}i)$.

التمرين الرابع (7ن)

- المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$
- (1) أـ بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g وحدد $g(0)$ وإشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$.
- بـ علل وجود عدد حقيقي α من المجال $0; \frac{1}{2}$ يحقق $g(\alpha) = 0$.
- جـ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$.
- (2) f هي الدالة العددية المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$ وليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- أـ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$.
- بـ عين دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ وفسر النتيجة بيانيا .
- جـ أحسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)]$ وفسر النتيجتين بيانيا .
- دـ شكل جدول تغيرات f .
- (3) نأخذ $\alpha \approx 0.26$ ،
- أـ عين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} .



بـ. أرسم المنحنى (Γ) .

4) أـ. أكتب $f(x)$ على الشكل $f(x) = x + a + \frac{b}{(x-1)^2}$ حيث a و b عدنان حقيقيان .

بـ. عين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ والتي تحقق $F(1) = 2$.

تصحيح مقترح للموضوع الأول

حل مقترح التمرين الأول

1) حل في $\mathbb{C}$ ، المعادلة : $z^2 - (1+2i)z - 1+i = 0$.

لدينا : $\Delta = (1+2i)^2 - 4 \times 1 \times (-1+i) = 1$ ومنه للمعادلة حلين هما :

$$z_2 = \frac{1+2i+1}{2} = 1+i \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{1+2i-1}{2} = i$$

• تبين أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ حقيقي :

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008} = \left(\frac{i}{1+i}\right)^{2008} = \left(\frac{i(1-i)}{2}\right)^{2008} = \left(\frac{i+1}{2}\right)^{2008} = \left(\frac{(i+1)^2}{4}\right)^{1004} = \left(\frac{2i}{4}\right)^{1004} = \left(\frac{i}{2}\right)^{1004} = \frac{(i^4)^{251}}{2^{1004}} = \frac{1}{2^{1004}}$$

2) أـ. إعتماذا على التعريف $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ومن الخاصية $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2}$

• لبرهان أن : $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$ يكفي إثبات أن : $e^{-i\theta} \times e^{i\theta} = 1$.

لدينا : $e^{-i\theta} \times e^{i\theta} = e^{(-i\theta+i\theta)} = e^0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$.

• إثبات : $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1} \times \frac{1}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1} \times e^{-i\theta_2} = e^{i\theta_1-i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

بـ. كتابة z على الشكل الأسّي .

$$z = \frac{z_2-1}{z_1-1} = \frac{1+i-1}{i-1} = \frac{i}{i-1} = \frac{i(-i-1)}{2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{ومنه} \quad z = \frac{z_2-1}{z_1-1}$$

$$|z| = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ومنه} \quad z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\text{وبفرض } \theta \text{ عمدة للعدد المركب } z, \text{ يكون : } \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{ومنه } \arg(z) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{إذن : } z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

جـ. كتابة z على الشكل المثلثي :

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

- استنتاج أن C هي صورة B بتشابه مباشر مركزه A ، مع تعيين نسبته وزاوية له :
لدينا : $z = \frac{z_2 - 1}{z_1 - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} (z_1 - 1)$ يكافئ $z_2 - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} (z_1 - 1)$ ومنه C هي صورة B بالتشابه المباشر الذي مركزه A ونسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاوية له $-\frac{\pi}{4}$.

حل مقترح التمرين الثاني

- التحقق من أن النقط A ، B و C ليست على استقامية :
لدينا : $A(2;0;1)$ ، $B(3;2;0)$ ، $C(-1;-2;2)$ ، ومنه $\overrightarrow{AB}(1;2;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(-3;-2;1)$.
لدينا $\frac{-3}{1} \neq \frac{-2}{2}$ وبالتالي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا أي أن النقط A ، B و C ليست في استقامية وتعين مستويا وحيدا وهو المستوي (ABC) .
• تبيان أن المعادلة الديكارتيّة للمستوي (ABC) هي : $y + 2z - 2 = 0$.
علما أن النقط A ، B و C ليست في استقامية، يكفي إثبات أن إحداثياتها تحقق المعادلة.
• $A \in (ABC)$ لأن : $y_A + 2z_A - 2 = 0 + 2 \times 1 - 2 = 0$
• $B \in (ABC)$ لأن : $y_B + 2z_B - 2 = 2 + 2 \times 0 - 2 = 0$
• $C \in (ABC)$ لأن : $y_C + 2z_C - 2 = -2 + 2 \times 2 - 2 = 0$
(2) أ. التحقق أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان :
لدينا : $(P): x + 2y - z + 7 = 0$ و $(ABC): y + 2z - 2 = 0$.
ومنه : $\vec{n}_1(1;2;-1)$ شعاع ناظمي لـ (P) و $\vec{n}_2(0;1;2)$ شعاع ناظمي لـ (ABC) .
لدينا $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 \times 0 + 2 \times 1 + (-1) \times 2 = 0$ وبالتالي $\vec{n}_1$ و $\vec{n}_2$ متعامدان أي أن (P) و (ABC) متعامدان.
• تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (ABC) :
لدينا : تمثيل ديكارتي للمستقيم (Δ) من الشكل : $\begin{cases} x + 2y - z + 7 = 0 \\ y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$ ، بوضع مثلا : $z = t$

$$\begin{cases} x = 5t - 11 \\ y = -2t + 2 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$
 ومنه تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) من الشكل : $\begin{cases} x = -2y + t - 7 \\ y = -2t + 2 \end{cases}$ نجد :
ب- حساب المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) :
المستويان (P) و (ABC) متقاطعان وفق المستقيم (Δ) و $A \in (ABC)$ ومنه :

$$d(A;(\Delta)) = d(A;(P)) = \frac{|2 + 2 \times 0 - 1 + 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$
- (3) G مرجع الجملة $\{(A;1), (B;\alpha), (C;\beta)\}$ حيث α, β عدنان حقيقيان يحققان $\alpha + \beta + 1 \neq 0$
تعيين α حتى تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ) .

$$\begin{cases} x_G = \frac{3\alpha - \beta + 2}{1 + \alpha + \beta} \\ y_G = \frac{2\alpha - 2\beta}{1 + \alpha + \beta} \\ z_G = \frac{2\beta + 1}{1 + \alpha + \beta} \end{cases}$$
 لدينا إحداثيات G هي :

$G \in (\Delta)$ معناه $G \in (P)$ لأن $G \in (ABC)$ ، وبالتالي $x_G + 2y_G - z_G + 7 = 0$ ، نجد: $\alpha = -\frac{4}{7}$.

حل مقترح التمرين الثالث

$$f(x) = \frac{x+2}{-x+4}, \quad I = [1; 2] \quad (1)$$

أ- تبين أن الدالة f متزايدة على I .

$$\text{الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على } I \text{ و } f'(x) = \frac{6}{(-x+4)^2}$$

ومنه من أجل كل x من I ، $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماماً على I .

ب- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I .

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماماً على I ومنه من أجل كل $x \in [1; 2]$ ، $f(x) \in [f(1); f(2)]$

ولدينا: $f(1) = 1$ و $f(2) = 2$ ، إذن من أجل كل $x \in I$ ، $f(x) \in I$

$$(2) \quad (u_n) \text{ هي المتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ كما يأتي: } u_0 = \frac{3}{2} \text{ و } u_{n+1} = f(u_n)$$

أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I .

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 2$ "

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = \frac{3}{2}$ ومنه $1 \leq u_0 \leq 2$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $1 \leq u_n \leq 2$ ، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

لدينا حسب الفرض $1 \leq u_n \leq 2$ ومنه حسب السؤال (أ) $1 \leq f(u_n) \leq 2$ أي: $1 \leq u_{n+1} \leq 2$ وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

• الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 2$.

ب- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$\text{لدينا: من أجل كل عدد طبيعي } n, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2}{-u_n + 4} - u_n = \frac{u_n^2 - 3u_n + 2}{-u_n + 4} = \frac{(u_n - 1)(u_n - 2)}{-u_n + 4}$$

وبما أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 2$ فإن $u_n - 1 \geq 0$ و $u_n - 2 \leq 0$ و $-u_n + 4 > 0$

وبالتالي $u_{n+1} - u_n < 0$. إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً.

• المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

$$(3) \quad \text{أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي } n: u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$$

$$\text{نسمي } P(n) \text{ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي } n: u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$$

• نتحقق من صحة $P(0)$.

$$\text{من أجل } n = 0, \text{ لدينا } u_0 = \frac{3}{2} \text{ و } u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^0 + 1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ وبالتالي } P(0) \text{ صحيحة.}$$

$$\text{• نفرض صحة } P(n) \text{ من أجل عدد طبيعي } n \text{ أي: } u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$$

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1} \text{ أي}$$

$$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n + 2}{-u_n + 4} = -1 + \frac{6}{-u_n + 4} = -1 + \frac{6}{4 - u_n} = \frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^n + 4}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1} \text{ لدينا}$$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة.

$$\bullet \text{ الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي } n, u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$$

$$\text{ب- } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n = +\infty \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1} \right) = 1$$

حل مقترح التمرين الرابع

(I) $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$ كما يلي: $[-2; +\infty[$ تعيين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1; 1)$ تنتمي إلى (C_f) ومعامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

$$A \in (C_f) \text{ معناه: } f(-1) = 1 \text{ أي: } (-a + b)e + 1 = 1 \text{ ومنه: } a = b$$

$$\text{معامل توجيه المماس عند } A \text{ يساوي } (-e) \text{ معناه: } f'(-1) = -e$$

$$\text{الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على } [-2; +\infty[\text{ و: } f'(x) = ae^{-x} + (-e^{-x})(ax + b) = (-ax - b + a)e^{-x}$$

$$\text{ومنه } f'(-1) = (2a - b)e = -e \text{ ومما سبق } f'(-1) = -e$$

$$\text{بالمطابقة لدينا } 2a - b = -1 \text{ و } a = b \text{ ومنه نجد: } a = b = -1$$

(II) الدالة g معرفة على المجال $[-2; +\infty[$ بـ: $g(x) = (-x - 1)e^{-x} + 1$

$$(1) \text{ تبيان أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} (-xe^{-x}) = \lim_{u \rightarrow -\infty} ue^u = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x - 1)e^{-x} + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^{-x} - e^{-x} + 1) = 1$$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_g) عند $+\infty$.

(2) دراسة تغيرات الدالة g :

$$\text{الدالة } g \text{ قابلة للاشتقاق على المجال } [-2; +\infty[\text{ و } g'(x) = -e^{-x} + (-e^{-x})(-x - 1) = xe^{-x}$$

- اتجاه تغير الدالة g :

$$\text{إشارة } g'(x) \text{ من إشارة } x \text{، ومنه الدالة } g \text{ متناقصة على المجال } [-2; 0] \text{ ومتزايدة على المجال } [0; +\infty[$$

جدول تغيرات الدالة g :

x	-2	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$e^2 + 1$	1	1

(3) تبيان أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I مع تعيين إحداثيها.

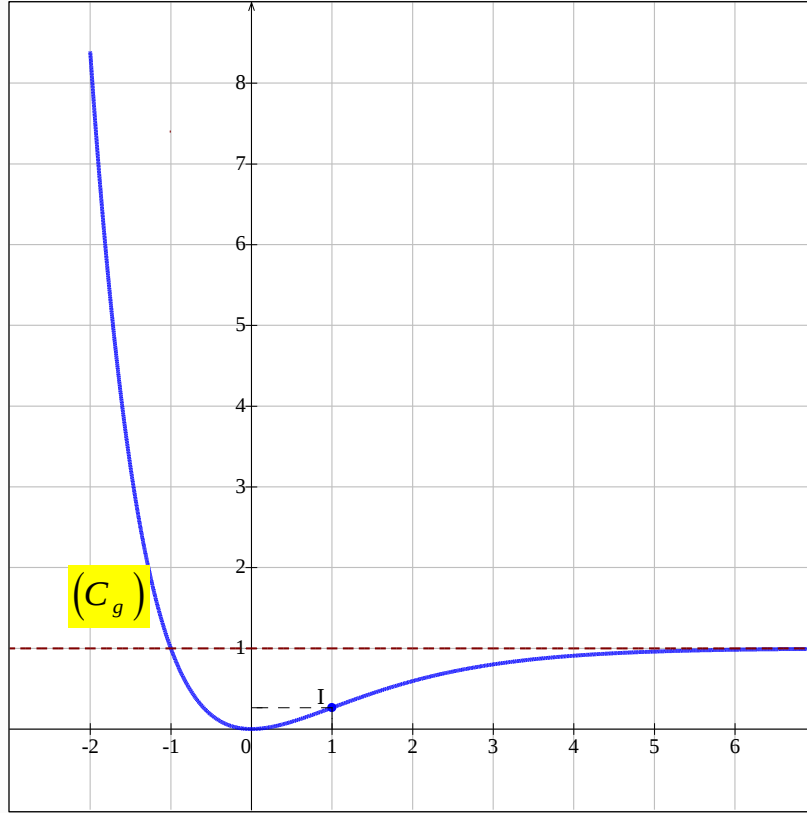
$$\text{الدالة } g' \text{ قابلة للاشتقاق على المجال } [-2; +\infty[\text{ و } g''(x) = (1 - x)e^{-x}$$

إشارة $g''(x)$ من إشارة $1-x$ وبالتالي $g''(x)$ ينعدم عند 1 مغيرا إشارته، ومنه $I\left(1; 1-\frac{2}{e}\right)$ هي نقطة إنعطاف لـ (C_g)

(4) كتابة معادلة المماس (T) للمنحى (C_g) عند النقطة I .

لدينا: $(T): y = g'(1)(x-1) + g(1)$ ومنه $(T): y = \frac{1}{e}x + 1 - \frac{3}{e}$.

(5) الرسم:



(6) الدالة العددية المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يلي: $H(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$ حيث α و β عدنان حقيقيان.

- تعيين α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة: $x \mapsto g(x) - 1$.

الدالة H قابلة للاشتقاق على المجال $[-2; +\infty[$ ، و $H'(x) = \alpha e^{-x} + (-e^{-x})(\alpha x + \beta) = (-\alpha x - \beta + \alpha)e^{-x}$

H دالة أصلية للدالة: $x \mapsto g(x) - 1$ معناه: $(-\alpha x - \beta + \alpha)e^{-x} = (-x - 1)e^{-x}$ ومنه نجد: $\alpha = 1$ و $\beta = 2$.

لدينا: $g(x) = g(x) + 1 - 1 = H'(x) + 1$ ومنه الدالة الأصلية للدالة g من الشكل: $G(x) = H(x) + x + c$

الدالة الأصلية للدالة g والتي تنعدم عند 0 هي: $G(x) = (x + 2)e^{-x} + x + 2$.

(III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يأتي: $k(x) = g(x^2)$

الدالة k قابلة للاشتقاق على المجال $[-2; +\infty[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للاشتقاق،

و $k'(x) = 2xg'(x^2) = 2x(x^2e^{-x^2}) = 2x^3e^{-x^2}$

إتجاه تغير الدالة k :

إشارة $k'(x)$ من إشارة x ، ومنه الدالة k متناقصة على المجال $[-2; 0]$ و متزايدة على المجال $[0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة k :

x	-2	0	$+\infty$
$k'(x)$	-	0	+
$k(x)$	$1 - 5e^{-4}$	0	1

حل مقترح التمرين الأول

تعيين الجواب الصحيح مع التعليل :

لدينا : $A(1;3;-1)$ ، $B(4;1;0)$ ، $C(-2;0;-2)$ ، $D(3;2;1)$ و $(P): x - 3z - 4 = 0$

(1) المستوي (P) هو : ج (2) (ABC)

التبرير :

يكفي إثبات أن النقط ليست في استقامية وأن إحداثياتها تحقق معادلة (P) .

لدينا : $\overrightarrow{AB}(3;-2;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-3;-3;-1)$ و $\frac{-3}{3} \neq \frac{-2}{-3}$ وبالتالي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا أي أن

النقط A ، B و C ليست في استقامية .

$$x_A - 3z_A - 4 = 1 - 3 \times (-1) - 4 = 0 \text{ لأن } A \in (P)$$

$$x_B - 3z_B - 4 = 4 - 3 \times 0 - 4 = 0 \text{ لأن } B \in (P)$$

$$x_C - 3z_C - 4 = -2 - 3 \times (-2) - 4 = 0 \text{ لأن } C \in (P)$$

$$\vec{n}_2(-2;0;6) \text{ (ج 2) شعاع ناظمي للمستوي } (P) \text{ هو :}$$

التبرير :

لدينا : $\vec{n}(1;0;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) و $\vec{n}_2 = -2\vec{n}$ ومنه $\vec{n}_2$ شعاع ناظمي للمستوي (P) .

(لاحظ أن : كلا من $\vec{n}_1$ و $\vec{n}_3$ ليسا مرتبطين خطيا مع $\vec{n}$)

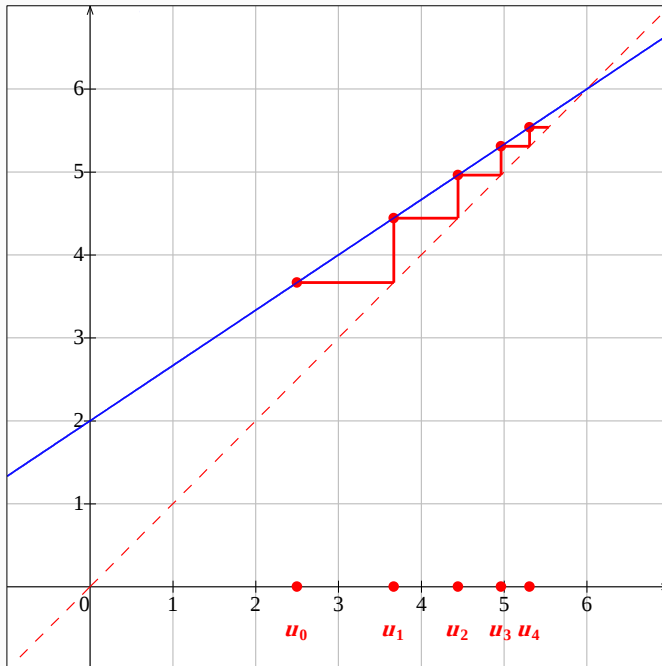
(3) المسافة بين النقطة D و المستوي (P) هي : ج (3) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

$$d = (D; (P)) = \frac{|1 \times 3 - 0 \times 2 - 3 \times 1 - 4|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-3)^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{10}}{5} \text{ : التبرير}$$

حل مقترح التمرين الثاني

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0 = \frac{5}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$

(1) أ. ب. الرسم وتمثيل الحدود :



جـ- التخمين :

$$u_4 > u_3 > u_2 > u_1 > u_0$$

الحدود تتراكم حول العدد 6 .

وضع تخمين : المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة نحو 6 .

(2) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n \leq 6$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n \leq 6$ "

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = \frac{5}{2}$ ومنه $u_0 \leq 6$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة .

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $u_n \leq 6$ ، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1} \leq 6$.

$$u_{n+1} \leq 6 \text{ لدينا حسب الفرض } u_n \leq 6 \text{ ومنه } \frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3} \times 6 \text{ ومنه } \frac{2}{3}u_n + 2 \leq \frac{2}{3} \times 6 + 2 \text{ أي } \frac{2}{3}u_n + 2 \leq 6$$

وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq 6$.

ب- التحقق أن (u_n) متزايدة :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 2 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + 2 = -\frac{1}{3}(u_n - 6)$$

$$\text{ولدينا مما سبق أن : } u_n \leq 6 \text{ ومنه } u_n - 6 \leq 0 \text{ . إذن } -\frac{1}{3}(u_n - 6) \geq 0$$

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ، وعليه المتتالية (u_n) متزايدة .

جـ- المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى إذن هي متقاربة .

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n : v_n = u_n - 6$

أ- إثبات أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{2}{3}u_n + 2 - 6 = \frac{2}{3}u_n - 4 = \frac{2}{3}u_n - \frac{12}{3} = \frac{2}{3}u_n - \frac{2 \times 6}{3} = \frac{2}{3}(u_n - 6) = \frac{2}{3}v_n$$

$$\text{ومن المتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } q = \frac{2}{3} \text{ . الحد الأول : } v_0 = u_0 - 6 = \frac{5}{2} - 6 = -\frac{7}{2}$$

ب- كتابة عبارة v_n بدلالة n :

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n : v_n = v_0 \times q^n = -\frac{7}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\text{كتابة } u_n \text{ بدلالة } n : u_n = v_n + 6 = -\frac{7}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 6$$

$$\text{جـ- } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{7}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 6 \right) = 6 \text{ لأن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \text{ (لاحظ أن } 0 < \frac{2}{3} < 1 \text{)}$$

حل مقترح التمرين الثالث

(1) حل في $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 + iz - 2 - 6i = 0$

$$\text{لدينا : } \Delta = i^2 - 4 \times 1 \times (-2 - 6i) = 7 + 24i = 7 + 2 \times 4 \times 3i = 16 - 9 + 2 \times 4 \times 3i = (4 + 3i)^2$$

(يمكن استخدام طريقة أخرى للبحث عن الجذرين التربيعيين لـ Δ)

$$\text{ومن المعادلة حلين مركبين هما : } z_1 = \frac{-i + 4 + 3i}{2} = 2 + i \text{ و } z_2 = \frac{-i - 4 - 3i}{2} = -2 - 2i$$

(2) تعيين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$:

$$z_\omega = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-2 - 2i + 2 + i}{2} = -\frac{1}{2}i$$

(3) كتابة z_C على الشكل الجبري :

$$z_C = \frac{4-i}{1+i} = \frac{(4-i)(1-i)}{2} = \frac{4-i-4i-1}{2} = \frac{3-5i}{2}$$

• إثبات أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) :

$$|z_C - z_\omega| = \frac{1}{2}|z_B - z_A| \text{ أي } \omega C = \frac{1}{2}AB$$

$$|z_C - z_\omega| = \left| \frac{3-5i}{2} - \left(-\frac{1}{2}i\right) \right| = \left| \frac{3-2i}{2} \right| = \frac{5}{2} = \frac{1}{2}|z_B - z_A| \text{ و } |z_B - z_A| = |-2-2i-2-i| = |-4-3i| = 5$$

ومنه $C \in (\Gamma)$.

(4) أ. S التشابه المباشر الذي مركزه $M_0(z_0)$ نسبته k ($k > 0$) وزاويته θ معناه :

$$S \quad M_0 = M_0$$

• من أجل كل نقطة M من المستوي تختلف عن M_0 ، $M' = M$ معناه :

$$\begin{cases} \left| \frac{z' - z_0}{z - z_0} \right| = k \\ \arg \left(\frac{z' - z_0}{z - z_0} \right) = \theta + 2k\pi \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} |z' - z_0| = k |z - z_0| \\ \arg \left(\frac{z' - z_0}{z - z_0} \right) = \theta + 2k\pi \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} M_0 M' = k M_0 M \\ \overrightarrow{M_0 M'}, \overrightarrow{M_0 M} = \theta \end{cases}$$

ومنه $\frac{z' - z_0}{z - z_0} = ke^{i\theta}$ أي : $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$ هي عبارة التشابه S .

ب- تطبيق : تعيين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل S المعرف بـ : $z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z + \frac{1}{2}i\right)$.

التحويل S هو التشابه المباشر الذي مركزه النقطة ذات اللاحقة $-\frac{1}{2}i$ أي ω ونسبته 2 وزاوية له $\frac{\pi}{3}$.

حل مقترح التمرين الرابع

(1) أ- بقراءة بيانية :

جدول تغيرات الدالة g :

x	-1	$+\infty$
$g(x)$	-2	$+\infty$

$$g(0) = -1 \text{ و } g\left(\frac{1}{2}\right) > 0$$

ب- الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $[-1; +\infty[$ و $[-1; +\infty[\subset]0; \frac{1}{2}]$ و $g(0) \times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم

المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من المجال $]0; \frac{1}{2}]$ يحقق $g(\alpha) = 0$.

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$	-	○	+

$$(2) \quad f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2} : \text{ب. }]-1; +\infty[\text{ الدالة العددية المعرفة على }]-1; +\infty[$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3} : \text{أ. التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من }]-1; +\infty[$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$ و :

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 6x + 3) \times (x+1)^2 - 2(x+1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(3x^2 + 6x + 3) \times (x+1) - 2(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = 0 \text{ ومنه } f'(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{(\alpha+1)^3} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) \text{ ب.}$$

التفسير : (Γ) يقبل عند النقطة $A(\alpha; f(\alpha))$ مماسا يوازي حامل محور الفواصل .

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2} \right] = +\infty \text{ ج.}$$

التفسير : المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي للمنحنى (Γ) .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{(x+1)^2} \right) = 0$$

التفسير : المستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (Γ) .

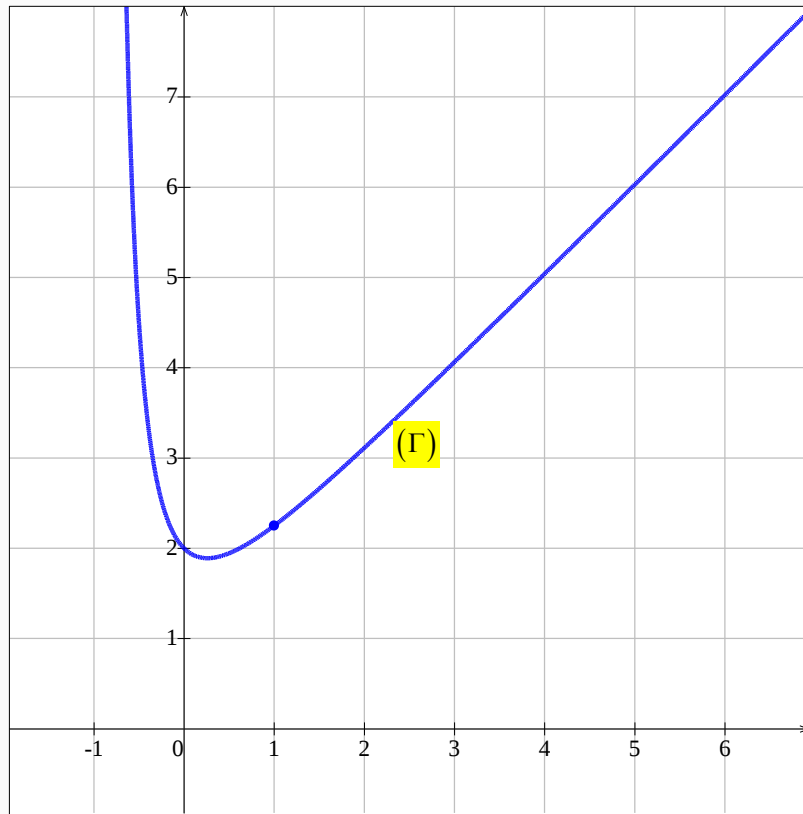
د. جدول تغيرات الدالة f :

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$		$-$ 0 $+$	
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(3) بأخذ $\alpha \approx 0.26$ ،

أ. $f(\alpha) \approx 1.89$.

ب. الرسم :



4 أ- كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = x + a + \frac{b}{(x-1)^2}$ حيث a و b عدنان حقيقيان .

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2} = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^3 + 1}{(x+1)^2} = x + 1 + \frac{1}{(x+1)^2}$$

ب- تعيين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ والتي تحقق $F(1) = 2$.

الدالة f مستمرة على $]-1; +\infty[$ وبالتالي فدالتها الأصلية التي تحقق $F(1) = 2$ هي الدالة F المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ :

$$F(x) = \int_1^x \left(t + 1 + \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt = \left[\frac{1}{2}t^2 + t - \frac{1}{t+1} \right]_1^x = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{x+1} + 1 : \text{ومنه } F(x) = \int_1^x f(t) dt$$

الموضوع الأول

التمرين الأول (3,5)

- (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ و $u_1 = 2$ و $u_0 = 1$.
- المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = u_{n+1} - u_n$.
- أحسب v_0 و v_1 .
 - برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.
 - أحسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$.
- ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right) + 1$.
- ج- بين أن (u_n) متقاربة.

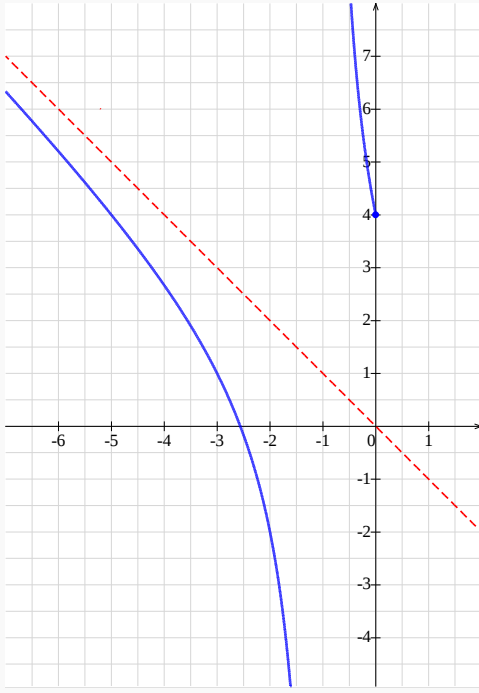
التمرين الثاني (5)

- $P(z)$ كثير حدود حيث: $P(z) = (z - 1 - i)(z^2 - 2z + 4)$ و z عدد مركب.
- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z) = 0$.
 - نضع: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$. أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسّي.
- ب- أكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسّي.
- ج- إستنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.
- (3) أ- n عدد طبيعي، عين قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقياً.
- ب- أحسب قيمة العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$.

التمرين الثالث (4)

- الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقط: $A(1; 0; 2)$, $B(0; 2; 1)$, $C(2; 1; 3)$.
- (P) مستو معادلة له من الشكل: $x - z + 1 = 0$.
- أ- بين أن المستوي (P) هو المستوي (ABC).
- ب- ما طبيعة المثلث ABC ؟
- أتحقق من أن النقطة $D(2; 3; 4)$ لا تنتمي إلى المستوي (ABC).
- ب- ما طبيعة $ABCD$ ؟
- أحسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC).
- ب- أحسب حجم $ABCD$.

التمرين الرابع (5,7ن)



(I) f دالة معرفة على $I =]-\infty; -1[\cup]-1; 0]$ بـ : $f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$
 (تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (الشكل)

(1) أ- أحسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I .

ب- بقراءة بيانية ودون دراسة اتجاه تغير f شكل جدول تغيراتها.

(2) g دالة معرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$

(تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

أ- أحسب نهاية g عند $+\infty$.

ب- تحقق من أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلته.

ج- أدرس تغيرات g .

(II) k دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي : $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$

(1) أ- أحسب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$ ، $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$ ، ماذا تستنتج ؟

ب- أعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة.

(2) أكتب معادلتَي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$.

(3) أرسم (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_k) .

(4) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_k) و المستقيمتين التي معادلاتها : $x = -\frac{1}{2}$ ، $x = \frac{1}{2}$ ، $y = 0$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4ن)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط :

$$D(1; -1; -2) , C(3; 0; -2) , B(1; -2; 4) , A(2; 3; -1)$$

وليكن (π) المستوي المعرف بمعادلته الديكارتية : $2x - y + 2z + 1 = 0$.

المطلوب : أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحالات التالية :

(1) النقط A ، B و C في إستقامية.

(2) (ABD) مستو معادلة ديكارتية له : $25x - 6y - z - 33 = 0$.

(3) المستقيم (CD) عمودي على المستوي (π) .

(4) المسقط العمودي للنقطة B على (π) هو النقطة $H(1; 1; -1)$.

التمرين الثاني (4ن)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2z + 4 = 0$.

(2) نسمي z_1 و z_2 حلي هذه المعادلة.

أ- أكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسّي.

بـ. A ، B و C هي النقط من المستوي التي لواحقتها على الترتيب : $z_A = 1 - i\sqrt{3}$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = \frac{1}{2}(5 + i\sqrt{3})$
 أحسب الأطوال AB ، AC و BC ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .
 جـ. جد الطويلة وعمدة للعدد المركب z حيث : $z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.
 دـ. أحسب z^3 ، z^6 ثم استنتج أن z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k .

التمرين الثالث (5ن)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 وأساسها q حيث :

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

 1) أـ. أحسب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول u_1
 بـ. أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .
 جـ. أحسب S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ بدلالة n ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 728$.
 2) (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي : $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$
 أـ. أحسب v_2 ، v_3 .
 بـ. نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$ ، بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.
 جـ. أكتب w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n .

التمرين الرابع (7ن)

(I) $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$: كما يلي : $]-1; +\infty[$
 1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.
 2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$: $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$
 و استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم أنجز جدول تغيراتها.
 3) أحسب $h(0)$ و استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x .
 (II) لتكن f دالة عددية معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$
 نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$).
 1) أـ. أحسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ ثم فسر هذه النتيجة بياضاً.
 بـ. باستخدام النتيجة $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ ، برهن أن $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$.
 جـ. استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 دـ. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$ واستنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).
 هـ. أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.
 2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
 3) بين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4.
 4) أرسم (C_f).
 5) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $y = x - 1$ ، $x = 0$ و $x = 1$.

حل مقترح التمرين الأول

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ و $u_1 = 2$ و $u_0 = 1$.

المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

(1) حساب v_0 و v_1 :

$$\text{لدينا : } v_1 = u_2 - u_1 = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3} , \quad v_0 = u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$$

(2) برهان أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n - u_{n+1} = \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n = \frac{1}{3}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{3}v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$.

(3) أ- حساب المجموع S_n بدلالة n بحيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \left[\frac{1-q^n}{1-q} \right] = \left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} \right] = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)$$

$$\text{ب- برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : u_n = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) + 1$$

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1}) = -u_0 + u_n$$

$$\text{ومنه } u_n = S_n + u_0 = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) + 1 \text{ أي : } u_n = S_n + u_0$$

(يمكن إستخدام البرهان بالتراجع)

ج- تبين أن المتتالية (u_n) متقاربة :

$$\text{لدينا : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

(لأن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$) ومنه المتتالية (u_n) متقاربة .

حل مقترح التمرين الثاني

$P(z)$ كثير حدود حيث : $P(z) = (z - 1 - i)(z^2 - 2z + 4)$ و z عدد مركب .

(1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 0$.

$$P(z) = 0 \text{ تكافئ } (z - 1 - i)(z^2 - 2z + 4) = 0 \text{ تكافئ } z = 1 + i \text{ أو } z^2 - 2z + 4 = 0$$

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 2z + 4 = 0$:

لدينا : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12 = (i\sqrt{12})^2 = (2i\sqrt{3})^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_2 = \frac{2 - 2i\sqrt{3}}{2} = 1 - i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $P(z) = 0$ هي : $S = \{1+i; 1+i\sqrt{3}; 1-i\sqrt{3}\}$.

(2) نضع : $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ ، $z_1 = 1+i$

أ. كتابة z_1 و z_2 على الشكل الأسّي :

لدينا : $z_1 = 1+i$ ومنه : $|z_1| = \sqrt{2}$.

$$.k \in \mathbb{Z} \text{ ، ومنه } \arg(z_1) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ، حيث } \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ ، يكون : وبفرض } \theta_1 \text{ عمدة للعدد المركب } z_1$$

إذن : $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

لدينا : $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ ومنه : $|z_2| = 2$

$$.k \in \mathbb{Z} \text{ ، ومنه } \arg(z_2) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ، حيث } \begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ ، يكون : وبفرض } \theta_2 \text{ عمدة للعدد المركب } z_2$$

إذن : $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ب. كتابة $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسّي :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(1+i)(1+i\sqrt{3})}{4} = \frac{1+i\sqrt{3}+i-\sqrt{3}}{4} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

ج. إستنتاج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$:

لدينا : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ وبالمطابقة مع الشكل الجبري نجد :

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases} \text{ أي : } \begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{2(1-\sqrt{3})}{4\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{2(1+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}} \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

(3) أ. n عدد طبيعي ، تعيين قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا.

$$\text{لدينا : } \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{7n\pi}{12}}$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n \in \mathbb{R} \text{ يكافئ } \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = k\pi \text{ يكافئ } \frac{7n\pi}{12} = k\pi \text{ ، مع } k \in \mathbb{N} \text{ ، } n = 12k$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456} e^{i\frac{7 \times 456\pi}{12}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{456} e^{266i\pi} = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{228} = \frac{1}{2^{228}} \text{ : حساب قيمة العدد } \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$$

حل مقترح التمرين الثالث

$A(1;0;2)$ ، $B(0;2;1)$ ، $C(2;1;3)$.

(1) (P) مستو معادلة له من الشكل : $x - z + 1 = 0$

أ- تبين أن المستوي (P) هو المستوي (ABC) .

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1;2;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(1;1;1)$ و $\frac{-1}{1} \neq \frac{2}{1}$ وبالتالي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا أي أن النقط A ، B و C

ليست في استقامة وتعين مستويا وحيدا وهو المستوي (ABC) . ولدينا من جهة :

$$x_A - z_A + 1 = 1 - 2 + 1 = 0 \text{ لأن } A \in (P)$$

$$x_B - z_B + 1 = 0 - 1 + 1 = 0 \text{ لأن } B \in (P)$$

$$x_C - z_C + 1 = 2 - 3 + 1 = 0 \text{ لأن } C \in (P)$$

إذن : المستوي (P) هو المستوي (ABC) .

ب- طبيعة المثلث ABC :

لدينا : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1 \times 1 + 2 \times 1 + (-1) \times 1 = 0$ ومنه المثلث ABC قائم في A .

(2) أ- التحقق من أن النقطة $D(2;3;4)$ لا تنتمي إلى المستوي (ABC) .

لدينا : $x_D - z_D + 1 = 2 - 4 + 1 \neq 0$ ومنه $D \notin (ABC)$.

ب- طبيعة $ABCD$:

بما أن $D \notin (ABC)$ فإن $ABCD$ رباعي وجوه .

(3) أ- حساب المسافة بين D والمستوي (ABC) .

$$d(D; (ABC)) = \frac{|2 - 4 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ب- حساب حجم $ABCD$.

$$V = \frac{1}{3} \times S_{ABC} \times h \text{ حيث } h = d(D; (ABC))$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ ومنه : } V = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

حل مقترح التمرين الرابع

(I) f دالة معرفة على $]-\infty; -1[\cup]-1; 0]$ بـ : $f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$

(1) أ- حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(-x + \frac{4}{x+1} \right) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x + \frac{4}{x+1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(-x + \frac{4}{x+1} \right) = +\infty$$

ب- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-1	0
$f'(x)$		-	-
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	4

(2) دالة معرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$

$$أ. \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{4}{x+1} \right) = +\infty$$

$$ب. لدينا : \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x+1} \right) = 0$$

ومنه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_g) عند $+\infty$.

جـ. دراسة تغيرات الدالة g .

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$ ، و $g'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$ ، $x+3 > 0$ ، وبالتالي إشارة $g'(x)$ من إشارة $x-1$.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+

الدالة g متناقصة على المجال $[0; 1]$ و متزايدة على المجال $[1; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	4	3	$+\infty$

(II) دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي : $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$

$$(1) أ. \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{k(h) - k(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{h + \frac{4}{h+1} - 4}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{h-3}{h+1} \right) = -3$$

$$ب. \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{k(h) - k(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \left(\frac{-h + \frac{4}{h+1} - 4}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \left(\frac{-h-5}{h+1} \right) = -5$$

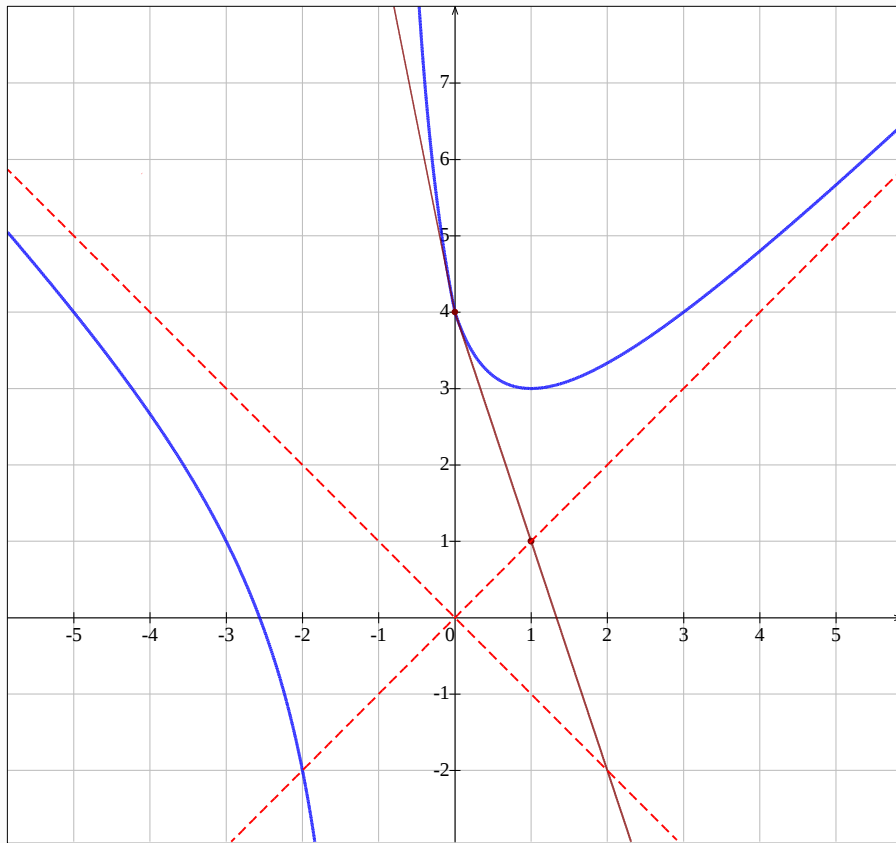
نستنتج أن الدالة k غير قابلة للاشتقاق عند 0.

بـ. النقطة ذات الفاصلة 0 هي نقطة زاوية والمنحنى (C_k) يقبل نصفي مماسين.

(2) كتابة معادلتى المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$:

$$(\Delta_1): y = -3x + 4 \text{ و } (\Delta_2): y = -5x + 4$$

(3) الرسم :



(4) حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_k) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = -\frac{1}{2}$ ، $x = \frac{1}{2}$ ، $y = 0$.

$$A = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} k(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} g(x) dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + 4\ln(x+1) \right]_{-\frac{1}{2}}^0 + \left[\frac{1}{2}x^2 + 4\ln(x+1) \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} + 4\ln 3$$

تصحيح مقترح للموضوع الثاني

حل مقترح التمرين الأول

لدينا: $A(2;3;-1)$ ، $B(1;-2;4)$ ، $C(3;0;-2)$ ، $D(1;-1;-2)$ و $(\pi): 2x - y + 2z + 1 = 0$.
الإجابة بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة:
(1) النقط A ، B و C في إستقامية. ← خطأ
التبرير:

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-1;-5;5)$ و $\overrightarrow{AC}(1;-3;-1)$ و $\frac{1}{-1} \neq \frac{-3}{-5}$ وبالتالي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا.

(2) (ABD) مستو معادلة ديكارتية له: $25x - 6y - z - 33 = 0$. ← صحيح
التبرير:

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-1;-5;5)$ و $\overrightarrow{AD}(-1;-4;-1)$ و $\frac{-1}{-1} \neq \frac{-4}{-5}$ وبالتالي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ ليسا مرتبطين خطيا ، و
 $A \in (ABD)$ لأن: $25 \times 2 - 6 \times 3 + 1 - 33 = 0$.

$$25 \times 1 - 6 \times (-2) - 4 - 33 = 0 : \text{لأن } B \in (ABD)$$

$$25 \times 1 - 6 \times (-1) + 2 - 33 = 0 : \text{لأن } D \in (ABD)$$

(3) المستقيم (CD) عمودي على المستوي (π) . — خطأ
التبرير:

لدينا : $\vec{n}(2; -1; 2)$ شعاع ناظمي لـ (π) و $\overrightarrow{CD}(-2; -1; 0)$ و $\frac{2}{-2} \neq \frac{-1}{-1}$ وبالتالي $\vec{n}$ و $\overrightarrow{CD}$ ليسا مرتبطين خطياً .
إذن المستقيم (CD) لا يعامد المستوي (π) .

(4) المسقط العمودي للنقطة B على (π) هو النقطة $H(1; 1; -1)$. — خطأ
التبرير:

لدينا : $\vec{n}(2; -1; 2)$ شعاع ناظمي لـ (π) و $\overrightarrow{BH}(0; 3; -5)$ و $\frac{0}{2} \neq \frac{3}{-1}$ وبالتالي $\vec{n}$ و $\overrightarrow{BH}$ ليسا مرتبطين خطياً .
إذن H ليست المسقط العمودي للنقطة B على (π) .

حل مقترح التمرين الثاني

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2z + 4 = 0$.

لدينا : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12 = 12i^2 = (\sqrt{12}i)^2 = (2i\sqrt{3})^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_2 = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{2 - 2i\sqrt{3}}{2} = 1 - i\sqrt{3}$$

(2) أـ كتابة العددين z_2 و z_1 على الشكل الأسّي :

لدينا : $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ ومنه : $|z_1| = 2$.

$$\text{وبفرض } \theta_1 \text{ عمدة للعدد المركب } z_1 \text{ ، يكون : } \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ ، ومنه } \arg(z_1) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ، حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{إذن : } z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{لدينا : } z_2 = \overline{z_1} \text{ ومنه : } z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

بـ A, B, C هي النقط من المستوي التي لواحقتها على الترتيب : $z_A = 1 - i\sqrt{3}$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و

$$z_C = \frac{1}{2}(5 + i\sqrt{3})$$

حساب الأطوال :

$$BC = |z_C - z_B| = \left| \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{3} \text{ و } AC = |z_C - z_A| = \left| \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2} \right| = 3 \text{ ، } AB = |z_B - z_A| = |2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

طبيعة المثلث ABC :

لدينا : $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ومنه المثلث ABC قائم في C حسب النظرية العكسية لفيتاغورس .

جـ- إيجاد الطويلة وعمدة للعدد المركب z حيث : $z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.

$$\text{لدينا : } |z| = \frac{|z_C - z_B|}{|z_A - z_B|} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$. k \in \mathbb{Z} \text{ حيث } \arg(z) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ومنه } z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-2i\sqrt{3}} = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4}(1 + i\sqrt{3}) \text{ و}$$

د- حساب z^3, z^6 ثم استنتاج أن z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k .

$$\text{لدينا: } z^3 = \left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = \frac{1}{2^3}e^{i\frac{3\pi}{3}} = \frac{1}{8}e^{i\pi} = -\frac{1}{8} \text{ ومنه } z = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{و } z^6 = \left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6 = \frac{1}{2^6}e^{i\frac{6\pi}{3}} = \frac{1}{8}e^{i2\pi} = \frac{1}{64}$$

$$\text{ولدينا: } z^{3k} = (z^3)^k = \left(-\frac{1}{8}\right)^k \text{ ومنه } z^{3k} \text{ عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي } k.$$

حل مقترح التمرين الثالث

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases} \quad (u_n) \text{ متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول } u_1 \text{ وأساسها } q \text{ حيث:}$$

(1) أ- حساب u_2 والأساس q لهذه المتتالية:

$$\text{لدينا: } u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \text{ وحسب خاصية الوسط الهندسي } (u_2)^2 = u_1 \times u_3 \text{ ومنه نجد: } (u_2)^3 = 216 \text{ أي } u_2 = 6.$$

• حساب الأساس q :

$$\text{لدينا: } u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \text{ وكون المتتالية } (u_n) \text{ هندسية فإن } u_3 = q \times u_2 \text{ و } u_1 = \frac{u_2}{q}$$

$$\text{إذن: } u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \text{ تكافئ } \frac{6}{q} + 12 + 6q = 32 \text{ أي: } 3q^2 - 10q + 3 = 0$$

$$\text{لنحل المعادلة: } 3q^2 - 10q + 3 = 0$$

$$\text{لدينا: } \Delta = 64 \text{ ومنه للمعادلة حلان هما: } q_1 = 3 \text{ و } q_2 = \frac{1}{3}.$$

وبما أنها المتتالية متزايدة تماما فإن أساسها q أكبر تماما من الواحد ومنه $q = 3$.

• حساب الحد الأول u_1 :

$$\text{لدينا } u_1 = \frac{u_2}{q} \text{ ومنه } u_1 = \frac{6}{3} = 2$$

ب- كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

$$\text{لدينا: من أجل كل عدد طبيعي } n, u_n = u_1 \times q^{n-1} \text{ ومنه: } u_n = 2 \times 3^{n-1}$$

ج- حساب S_n بدلالة n :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right) = 2 \left(\frac{1-3^n}{1-3} \right) = -(1-3^n) = 3^n - 1$$

• تعيين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 728$:

$$\text{لدينا: } S_n = 728 \text{ يكافئ } 3^n - 1 = 728 \text{ أي } 3^n = 729 \text{ أي } 3^n = 3^6 \text{ ومنه } n = 6. \text{ (يمكن إستخدام اللوغاريتم)}$$

$$(2) \quad (v_n) \text{ متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n \text{ كما يلي: } v_1 = 2 \text{ و } v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$$

أ- حساب v_2 و v_3 :

$$v_2 = \frac{3}{2}v_1 + u_1 = \frac{3}{2} \times 2 + 2 = 5, \quad v_3 = \frac{3}{2}v_2 + u_2 = \frac{3}{2} \times 5 + 6 = \frac{27}{2}$$

$$\text{ب- من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير معدوم: } w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$$

• تبين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم :

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{3u_n} - \frac{2}{3} = \frac{3}{2 \times 3} \frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{v_n}{2u_n} - \frac{1}{3} = \frac{v_n}{2u_n} - \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{1}{2} \left(\frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{2} w_n$$

ومنه المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

جـ- كتابة w_n بدلالة n :

$$. w_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} : \text{لدينا : من أجل كل عدد طبيعي } n, w_n = w_1 \times q^{n-1}, \text{ ومنه :}$$

• إستنتاج v_n بدلالة n :

$$. v_n = \left(w_n + \frac{2}{3} \right) u_n \text{ أي } \frac{v_n}{u_n} = w_n + \frac{2}{3} \text{ ومنه } w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3} : \text{لدينا : من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير معدوم :}$$

$$. v_n = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} + \frac{4}{3} \times 3^{n-1} : \text{أي } v_n = \left[\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \frac{2}{3} \right] \times 2 \times 3^{n-1} \text{ إذن :}$$

حل مقترح التمرين الرابع

(I) h دالة عددية معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي : $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$.

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x + \ln(x+1)) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 2x + \ln(x+1)) = -\infty$$

(2) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$: $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$.

الدالة h قابلة للاشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$:

$$h'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)(x+1)+1}{x+1} = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$$

إتجاه تغير الدالة h :

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$: $x+1 > 0$ و $1+2(x+1)^2 > 0$ ومنه $h'(x) > 0$

وبالتالي الدالة h متزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة h :

x	-1	$+\infty$
$h'(x)$		+
$h(x)$	$-\infty$	$+\infty$

حساب $h(0)$ وإستنتاج إشارة $h(x)$ حسب قيم x :

$$h(0) = 0^2 + 2 \times 0 + \ln(0+1) = 0$$

• إشارة $h(x)$:

x	-1	0	$+\infty$
$h(x)$	-	0	+

$$(II) \text{ الدالة العددية المعرفة على }]-1; +\infty[\text{ بـ : } f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1} \left(-\frac{1}{x+1} \right) = -\infty \end{cases} \text{ لأن : } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = +\infty$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$$\text{بـ باستخدام النتيجة : } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty \text{ ، نبرهن أن } \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$$

$$\text{نضع } t = \ln u \text{ فيكون } u = e^t \text{ ومنه : } \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^t}{t} \right)} = 0$$

جـ- إستنتاج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = 0 \text{ لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = +\infty$$

د- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = 0$$

التفسير البياني : المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

هـ- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل :

لندرس إشارة الفرق $f(x) - (x-1)$.

$$f(x) - (x-1) = -\frac{\ln(x+1)}{x+1} \text{ وبالتالي إشارة } f(x) - (x-1) \text{ من إشارة } -\ln(x+1) \text{ لأن } x+1 > 0.$$

x	-1	0	$+\infty$
$f(x) - y$		+	-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0; -1)$	(C_f) تحت (Δ)

$$(2) \text{ أ- تبين أنه من أجل كل } x \text{ من }]-1; +\infty[\text{ ، } f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \left[\frac{\frac{1}{x+1} \times (x+1) - 1 \times \ln(x+1)}{(x+1)^2} \right] = 1 - \left(\frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} \right) \\ &= \frac{(x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + \ln(x+1)}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{ومنه : من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من }]-1; +\infty[\text{ ، } f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

(3) تبين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4 .

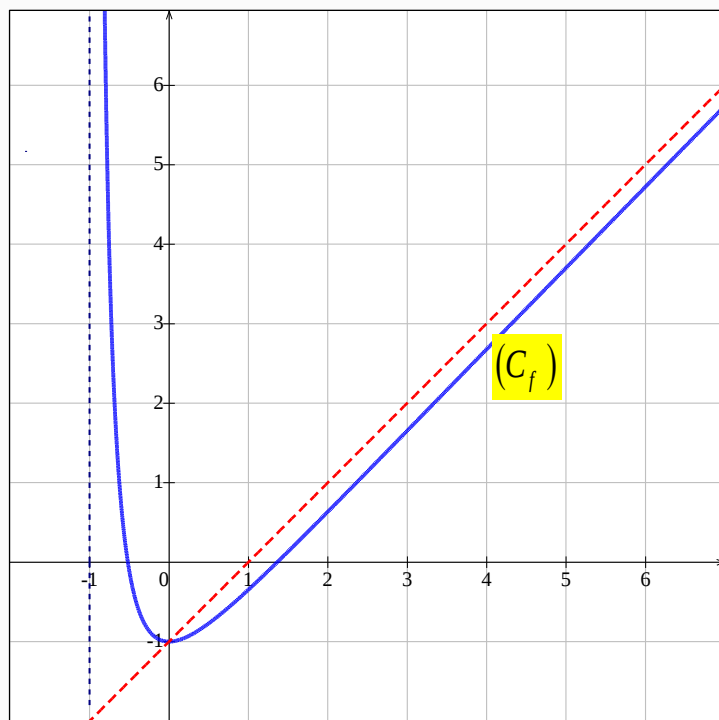
معناه لنثبت أن المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حلا محصورا بين 3,3 و 3,4 .

الدالة f مستمرة على المجال $]-1; +\infty[$ وبالتالي فهي مستمرة على $[3,3;3,4]$ كون $]-1; +\infty[\supset [3,3;3,4]$.

ولدينا $\begin{cases} f(3,3) \approx 1,96 \\ f(3,4) \approx 2,06 \end{cases}$ وبالتالي $f(3,3) < 2 < f(3,4)$ ، إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 2$

تقبل حلا في المجال $[3,3;3,4]$.

(4) الرسم :



(5) حساب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $y = x - 1$ ، $x = 0$ و $x = 1$.

$$S = \int_0^1 [(x-1) - f(x)] dx = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = \left[\frac{1}{2} (\ln(x+1))^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} (\ln 2)^2$$

الموضوع الأول

التمرين الأول (5ن)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطتين A و B لاحقتهما على الترتيب :

$$z_B = 3i \quad \text{و} \quad z_A = 1+i$$

- (1) أكتب كلا من z_B و z_A على الشكل الأسّي .
- (2) ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' بحيث : $z' = 2iz + 6 + 3i$
 أ- عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S .
 ب- عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S .
 ج- استنتج طبيعة المثلث ABC .
- (3) لتكن النقطة D مرجح الجملة $\{(A, 2); (B, -2); (C, 2)\}$.
 أ- عين z_D لاحقة النقطة D .
 ب- عين مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.
- (4) لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B وعن D لاحقتها z ولتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما .

- أ- تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 6 + 3i$ تنتمي إلى (Δ) .
- ب- أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\frac{z_B - z}{z_D - z}$. عين حينئذ المجموعة (Δ) .

التمرين الثاني (5ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقط $A(1; 1; 0)$ ، $B(2; 1; 1)$ و $C(-1; 2; -1)$.

- (1) أ- بين أن النقط A ، B و C ليست في استقامة .
 ب- بين أن المعادلة الديكارتيّة للمستوي (ABC) هي : $x + y - z - 2 = 0$.
- (2) نعتبر المستويين (P) و (Q) اللذين معادلتيهما على الترتيب : $(P): x + 2y - 3z + 1 = 0$ ، $(Q): 2x + y - z - 1 = 0$ ،
 والمستقيم (D) الذي يشمل النقطة $F(0; 4; 3)$ و $\vec{u}(-1; 5; 3)$ شعاع توجيه له .
 أ- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) .
 ب- تحقق أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D) .
- (3) عين تقاطع المستويات الثلاث (ABC) ، (P) و (Q) .

التمرين الثالث (10ن)

(I) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I = \left[\frac{1}{2}; +\infty \right]$ بـ : $f(x) = 1 + \ln(2x - 1)$

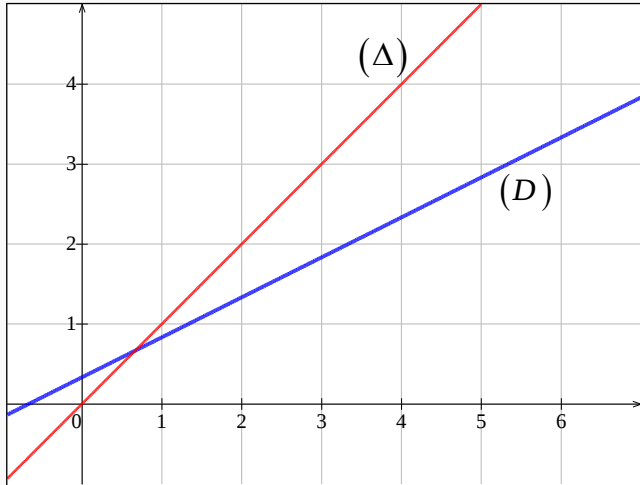
وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$.

- (2) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I ثم شكل جدول تغيراتها .
- (3) عين فاصلة النقطة من (C_f) التي تكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y = x$.
- (4) أ- أثبت أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x) = \ln(x+a) + b$ على الشكل : حيث a, b عدنان حقيقيان يطلب تعيينهما .
- ب- استنتج أنه يمكن رسم (C_f) إنطلاقا من (C) منحنى الدالة اللوغاريتمية "ln" ثم أرسم (C) و (C_f) .
- (II) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال I بـ : $g(x) = f(x) - x$
- (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g(x) = -\infty$
- (2) أدرس اتجاه تغير الدالة g على I ثم شكل جدول تغيراتها .
- (3) أ- أحسب $g(1)$ ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$ حلا وحيدا α . تحقق أن $2 < \alpha < 3$.
- ب- أرسم (C_g) منحنى الدالة g على المجال $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ في المعلم السابق .
- (4) إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثم حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d) .
- (5) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $[\alpha; 1]$: فإن $f(x)$ ينتمي إلى المجال $[\alpha; 1]$.
- (III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يأتي : $u_n = f\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$
- (1) عين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $u_n = 1 + 2\ln 3 - 3\ln 2$
- (2) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول (5ن)



- في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مثلنا المستقيمين (Δ) و (D) معادلتيهما على الترتيب : $y = x$ و $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$
- (1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 6$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$
- أ- أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية :
- u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم
- ب- عين إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D) .
- ج- أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

- (2) أ- باستعمال الاستدلال بالتراجع ، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq \frac{2}{3}$.
- ب- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

- (3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، واستنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، استنتج المجموع S'_n حيث : $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين الثاني(4ن)

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 6z + 18 = 0$ ، ثم أكتب الحلين على الشكل الأسّي .
- (2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقتها على الترتيب :
- $$z_D = -z_B \quad \text{و} \quad z_C = -z_A , \quad z_B = \overline{z_A} , \quad z_A = 3 + 3i$$
- أ- بين أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O .
- ب- عين زاوية للدوران R الذي مركزه O و يحول النقطة A إلى B .
- ج- بين أن النقط A ، O و C في استقامة وكذلك النقط B ، O و D .
- د- إستنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

التمرين الثالث(4ن)

- في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر المستوي (P) الذي معادلته : $x - 2y + z + 3 = 0$.
- (1) نذكر أن حامل محور الفواصل $(O; \vec{i})$ يعرف بالجملة $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.
- عين إحداثيات A نقطة تقاطع حامل $(O; \vec{i})$ مع المستوي (P) .
- (2) $B(0; 0; -3)$ و $C(-1; -4; 2)$.
- أ- تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المستوي (P) .
- ب- أحسب الطول AB .
- ج- أحسب المسافة بين النقطة C و المستوي (P) .
- (3) أ- أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) المار بالنقطة C والعمودي على المستوي (P) .
- ب- تحقق أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ) .
- ج- أحسب مساحة المثلث ABC .

التمرين الرابع(7ن)

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$
- نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ وفسر هندسيا النتيجة .
- (2) أدرس اتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها .
- (3) أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب : $y = x + 1$ و $y = x$.
- ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') .
- (4) أثبت أن النقطة $\omega(0; \frac{1}{2})$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .
- (5) أ- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث : $\ln 2 < \alpha < 1$ و $-1.4 < \beta < -1.3$.
- ب- هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟
- ج- أرسم (Δ) ، (Δ') ثم المنحنى (C_f) .
- د - ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(m-1)e^{-x} = m$.

حل مقترح التمرين الأول

(1) كتابة z_A و z_B على الشكل الأسّي :

لدينا : $z_A = 1 + i$ ومنه : $|z_A| = \sqrt{2}$.

$$\text{وبفرض } \theta_A \text{ عمدة للعدد المركب } z_A \text{ ، يكون : } \begin{cases} \cos \theta_A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ ، ومنه } \arg(z_A) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ، حيث } k \in \mathbb{Z} .$$

إذن : $z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

لدينا : $z_B = 3i$ ومنه : $|z_B| = 3$.

$$\text{وبفرض } \theta_B \text{ عمدة للعدد المركب } z_B \text{ ، يكون : } \begin{cases} \cos \theta_B = \frac{0}{3} = 0 \\ \sin \theta_B = \frac{3}{3} = 1 \end{cases} \text{ ، ومنه } \arg(z_B) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ، حيث } k \in \mathbb{Z} .$$

إذن : $z_B = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$.

(2) S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' بحيث : $z' = 2iz + 6 + 3i$

الكتابة المركبة للتشابه المباشر S من الشكل : $z' = \alpha z + \beta$ بحيث : $\alpha = 2i$ و $\beta = 6 + 3i$.

أ- تعيين العناصر المميزة للتشابه المباشر S :

نسبة التشابه المباشر S هي : $k = |\alpha| = 2$.

زاوية التشابه المباشر S هي : $\theta = \arg(\alpha) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

مركز التشابه المباشر S هو النقطة ذات اللاحقة $\frac{\beta}{1-\alpha}$.

لدينا : $z_B = 3i$ ومنه النقطة B هي مركز التشابه المباشر S . $\frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{6+3i}{1-2i} = \frac{(6+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{15i}{5} = 3i$

ب- تعيين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S .

لدينا $z_C = 2iz_A + 6 + 3i$ ومنه $z_C = 2i(1+i) + 6 + 3i$ ، إذن : $z_C = 4 + 5i$.

ج- طبيعة المثلث ABC :

$$\begin{cases} BC = 2BA \\ \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ لدينا : النقطة } C \text{ صورة النقطة } A \text{ بالتشابه المباشر } S \text{ الذي مركزه } B \text{ ونسبته } 2 \text{ وهذا يعني : } \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \right) = \frac{\pi}{2}$$

ومن المثلث ABC مثلث قائم في النقطة B .

(3) النقطة D مرجح الجملة $\{(A, 2); (B, -2); (C, 2)\}$.

أ- تعيين z_D لاحقة النقطة D :

لدينا : $z_D = \frac{2z_A - 2z_B + 2z_C}{2 - 2 + 2}$ ومنه $z_D = \frac{2(1+i) - 2(3i) + 2(4+5i)}{2}$ ، إذن : $z_D = 5 + 3i$.

ب- تعيين طبيعة الرباعي $ABCD$ مع التبرير :

لدينا : $z_{\overline{AB}} = z_B - z_A = 3i - (1+i) = -1 + 2i$ و $z_{\overline{DC}} = z_C - z_D = 4 + 5i - (5 + 3i) = -1 + 2i$.

ومن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع .

ولدينا مما سبق: ABC مثلث قائم و $BC = 2BA$ وبالتالي الرباعي $ABCD$ مستطيل.
 (4) لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B وعن D لاحقتها z ولتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

أ- التحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 6 + 3i$ تنتمي إلى (Δ) .

لدينا: $\frac{z_B - z_E}{z_D - z_E} = \frac{3i - (6 + 3i)}{5 + 3i - (6 + 3i)} = \frac{-6}{-1} = 6$ ومنه العدد $\frac{z_B - z_E}{z_D - z_E}$ حقيقي موجب تماما وبالتالي $E \in (\Delta)$.

ب- $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_D - z}\right) = (\overline{MD}; \overline{MB})$.

العدد المركب $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ حقيقي موجب تماما يكافئ $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_D - z}\right) = 0 + 2k\pi$ أي $(\overline{MD}; \overline{MB}) = 0 + 2k\pi$.

وبالتالي المجموعة (Δ) هي: $(BD) - [BD]$ (المستقيم (BD) باستثناء القطعة $[BD]$)

حل مقترح التمرين الثاني

A ، B و C النقط من الفضاء بحيث: $A(1;1;0)$ ، $B(2;1;1)$ و $C(-1;2;-1)$.
 (1) أدتبيان أن النقط A ، B و C ليست في استقامية:

لدينا: $\overrightarrow{AB}(1;0;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;1;-1)$

ولدينا: $\frac{1}{-2} \neq \frac{0}{1}$ وبالتالي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا أي أن النقط A ، B و C ليست في استقامية.

ب- تبين أن المعادلة الديكارتيّة للمستوي (ABC) هي: $x + y - z - 2 = 0$

لدينا $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين، وبالتالي يكفي إثبات أن إحداثيات النقط A ، B و C تحقق المعادلة المعطاة.

$$x_A + y_A - z_A - 2 = 1 + 1 - 0 - 2 = 0 \text{ لأن } A \in (ABC)$$

$$x_B + y_B - z_B - 2 = 2 + 1 - 1 - 2 = 0 \text{ لأن } B \in (ABC)$$

$$x_C + y_C - z_C - 2 = -1 + 2 - (-1) - 2 = 0 \text{ لأن } C \in (ABC)$$

(2) نعتبر المستويين (P) و (Q) اللذين معادلتيهما على الترتيب: $(P): x + 2y - 3z + 1 = 0$ ، $(Q): 2x + y - z - 1 = 0$

والمستقيم (D) الذي يشمل النقطة $F(0;4;3)$ و $\vec{u}(-1;5;3)$ شعاع توجيه له.

أ- كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (D) :

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 5t + 4 \\ z = 3t + 3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ من الشكل: } (D) \text{ من الشكل: } (D) \text{ يشمل } F \text{ و } \vec{u}(-1;5;3) \text{ شعاع توجيه له، ومنه تمثيل وسيطي لـ } (D) \text{ من الشكل: } (D)$$

ب- التحقق أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D) :

لدينا: $(D) \subset (P)$ لأن: $-t + 2(5t + 4) - 3(3t + 3) + 1 = 0$

و $(D) \subset (Q)$ لأن: $2(-t) + (5t + 4) - (3t + 3) - 1 = 0$

وبالتالي تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D) .

(كطريقة ثانية يمكن حل الجملة $\begin{cases} x + 2y - 3z + 1 = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$ للحصول على التمثيل الوسيطي لمستقيم التقاطع وهو (D))

(3) تعيين تقاطع المستويات الثلاث (ABC) ، (P) و (Q) :

لدينا: المستويان (P) و (Q) متقاطعان وفق المستقيم (D) وبالتالي لدراسة تقاطع المستويات الثلاث (ABC) ، (P) و

(Q) يكفي دراسة تقاطع المستقيم (D) مع المستوي (ABC) .

نحل الجملة :
$$\begin{cases} x = -t \\ y = 5t + 4 \\ z = 3t + 3 \\ x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$$
 فنجد : $t = 1$ وبتعويض قيمة t في التمثيل الوسيط نجد $(-1; 9; 6)$.
ومنه المستويات الثلاث (ABC) ، (P) و (Q) تتقاطع في النقطة $\Omega(-1; 9; 6)$.

حل مقترح التمرين الثالث

(I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $I = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ بـ : $f(x) = 1 + \ln(2x - 1)$.

(1) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} (1 + \ln(2x - 1)) = -\infty , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \ln(2x - 1)) = +\infty$$

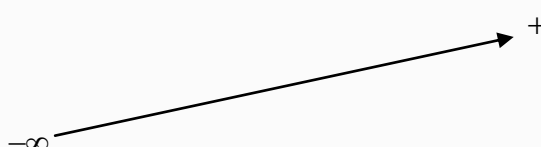
(2) تبين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I :

$$f'(x) = \frac{2}{2x - 1} , \quad \text{و من أجل كل } x \text{ من } I , \quad \text{الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على } I ,$$

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من I ، $2x - 1 > 0$ أي $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال I

جدول تغيرات الدالة f :

x	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$+\infty$



(3) تعيين فاصلة النقطة من (C_f) التي تكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y = x$.

فاصلة هذه النقطة هي حل للمعادلة $f'(x) = 1$ في I .

$$f'(x) = 1 \text{ تكافئ } \frac{2}{2x - 1} = 1 \text{ تكافئ } 2 = 2x - 1 \text{ أي } x = \frac{3}{2} .$$

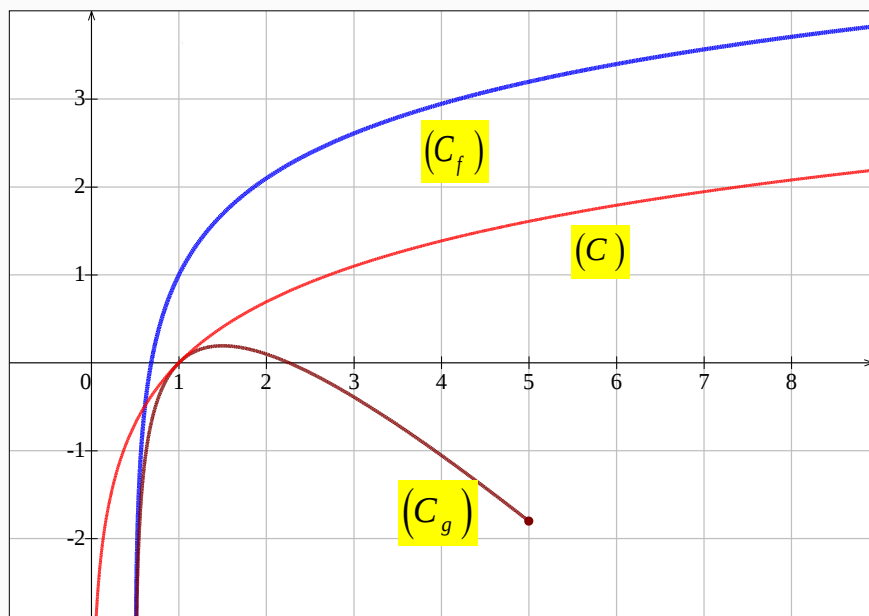
$$(4) \text{ أ- من أجل كل } x \text{ من } I : f(x) = 1 + \ln(2x - 1) = 1 + \ln\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) = 1 + \ln 2 + \ln\left(x - \frac{1}{2}\right) ; \text{ ومنه : } a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{و } b = 1 + \ln 2 .$$

ب- لدينا : $f(x) = h(x + a) + b$ حيث : $h(x) = \ln x$ ومنه (C_f) هو صورة $(\mathcal{C})$ منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

$$\text{بالإنسحاب الذي شعاعه } \vec{v}\left(\begin{matrix} -a \\ b \end{matrix}\right) \text{ أي } \vec{v}\left(\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 1 + \ln 2 \end{matrix}\right) .$$

الرسم :



(II) الدالة العددية المعرفة على المجال I بـ : $g(x) = f(x) - x$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (1 - x + \ln(2x - 1)) = -\infty \quad (1)$$

$$\left(\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0 \text{ : تذكر أن } \right) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) \left[\frac{1-x}{2x-1} + \frac{\ln(2x-1)}{2x-1} \right] = -\infty$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة g على I :

$$g'(x) = -1 + \frac{2}{2x-1} = \frac{-2x+3}{2x-1} \text{ ، و الدالة } g \text{ قابلة للاشتقاق على } I$$

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من I ، $2x-1 > 0$ وبالتالي إشارة $g'(x)$ من إشارة $-2x+3$.

إشارة $g'(x)$:

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 -

الدالة g متزايدة على المجال $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ ومتناقصة على المجال $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 -
$g(x)$		$-\frac{1}{2} + \ln 2$	$-\infty$

(3) أ- لدينا : $g(1) = 0$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$ و $g\left(\frac{3}{2}\right) = \ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0,19$ ، ومنه حسب مبرهنة القيم

المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$ حلا وحيدا α .

التحقق أن $2 < \alpha < 3$:

لدينا : $\begin{cases} g(2) \approx 0,09 \\ g(3) \approx -0,39 \end{cases}$ أي : $g(2) \times g(3) < 0$ ومنه $2 < \alpha < 3$.

ب- رسم المنحنى (C_g) : أنظر الشكل السابق.

x	$\frac{1}{2}$	1	α	$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$

إشارة $g(x)$: (4)

وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d) :

لدينا : $f(x) - y = f(x) - x = g(x)$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $g(x)$.

إذن : من أجل $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right[\cup]\alpha; +\infty[$ يكون (C_f) واقعا أسفل (d) .

من أجل $x \in]1; \alpha[$ يكون (C_f) واقعا أعلى من (d) .

(C_f) يقطع (d) في النقطتين $A(1;1)$ و $B(\alpha; \alpha)$.

(5) الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1; \alpha[$ ومنه : من أجل كل $x \in]1; \alpha[$ فإن : $f(x) \in]f(1); f(\alpha)[$.

ولدينا : $f(1) = 1$ و $f(\alpha) = g(\alpha) + \alpha = \alpha$.

إذن : من أجل كل $x \in]1; \alpha[$ فإن : $f(x) \in]1; \alpha[$.

(III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يأتي : $u_n = f\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$.

(1) تعيين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $u_n = 1 + 2\ln 3 - 3\ln 2$.

لدينا : $u_n = f\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 1 + \ln\left[2\left(1 + \frac{1}{2n}\right) - 1\right] = 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

ومنه : $u_n = 1 + 2\ln 3 - 3\ln 2$ يعني $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln 3^2 - \ln 2^3 = \ln 9 - \ln 8 = \ln \frac{9}{8}$ أي : $n = 8$.

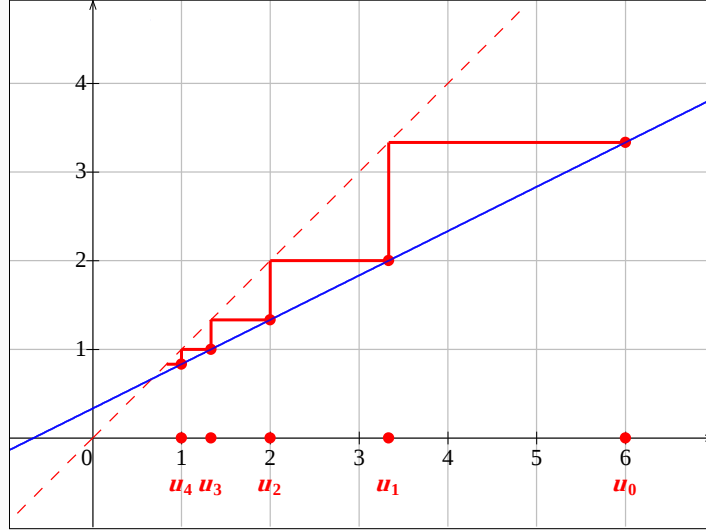
(2) حساب ، بدلالة n ، المجموع S_n بحيث : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

لدينا : من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $u_n = 1 + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

ومنه : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1 + \ln\left(\frac{2}{1}\right) + 1 + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \dots + 1 + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

أي : $S_n = (1+1+\dots+1) + \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = n + \ln\left(\frac{2 \times 3 \times \dots \times n \times (n+1)}{1 \times 2 \times \dots \times n}\right) = n + \ln(n+1)$.

(1) أ- الرسم : (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ ب: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$.



ب- تعيين إحداثيي نقطة تقاطع (Δ) و (D) :

نحل المعادلة : $f(x) = x$.

$$x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \text{ تكافئ } x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{3} \text{ تكافئ } \frac{1}{2}x = \frac{1}{3} \text{ تكافئ } x = \frac{2}{3}$$

وبالتالي المستقيمان (Δ) و (D) يتقاطعان في النقطة $A\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

ج- التخمين :

نلاحظ من الرسم أن : $u_4 < u_3 < u_2 < u_1 < u_0$:

المتتالية (u_n) متناقصة .

(2) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq \frac{2}{3}$:

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq \frac{2}{3}$ " .

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = 6$ ومنه $u_0 \geq \frac{2}{3}$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة .

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $u_n \geq \frac{2}{3}$ ، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1} \geq \frac{2}{3}$.

لدينا حسب الفرض $u_n \geq \frac{2}{3}$ ومنه $\frac{1}{2}u_n \geq \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ ومنه $\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} \geq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ أي $u_{n+1} \geq \frac{2}{3}$ وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq \frac{2}{3}$.

ب- اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{3}\right)$$

$$\text{و لدينا مما سبق أن: } u_n \geq \frac{2}{3} \text{ ومنه } u_n - \frac{2}{3} \geq 0. \text{ إذن } -\frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{3}\right) \leq 0.$$

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ، وعليه المتتالية (u_n) متناقصة.

$$(3) \text{ نضع من أجل كل عدد طبيعي } n: v_n = u_n - \frac{2}{3}$$

أ- إثبات أن (v_n) متتالية هندسية:

$$\text{لدينا من أجل كل عدد طبيعي } n: v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}v_n$$

$$\text{ومن المتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } q = \frac{1}{2}. \text{ وحدها الأول: } v_0 = u_0 - \frac{2}{3} = 6 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3}.$$

ب- كتابة عبارة v_n بدلالة n :

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n: v_n = v_0 \times q^n = \frac{16}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\text{كتابة } u_n \text{ بدلالة } n: u_n = v_n + \frac{2}{3} = \frac{16}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}$$

ج- المجاميع:

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) = \frac{32}{3} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right)$$

$$S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = v_0 + \frac{2}{3} + v_1 + \frac{2}{3} + \dots + v_n + \frac{2}{3} = S_n + \frac{2}{3}(n+1)$$

حل مقترح التمرين الثاني

$$(1) \text{ حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة: } z^2 - 6z + 18 = 0.$$

$$\text{لدينا: } \Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 18 = -36 = 36i^2 = (6i)^2 \text{ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما:}$$

$$z_1 = \frac{6 + 6i}{2} = 3 + 3i \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{6 - 6i}{2} = 3 - 3i$$

كتابة العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسّي:

$$\text{لدينا: } z_1 = 3 + 3i \text{ ومنه: } |z_1| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

$$\text{وبفرض } \theta_1 \text{ عمدة للعدد المركب } z_1, \text{ يكون: } \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ ومنه } \arg(z_1) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \text{ مع } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{إذن: } z_1 = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{لدينا: } z_2 = \overline{z_1} \text{ ومنه: } z_2 = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

$$(2) \text{ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس } (O; \vec{u}, \vec{v}), \text{ نعتبر النقط } A, B, C \text{ و } D \text{ لواحقتها على الترتيب:}$$

$$z_D = -z_B \quad \text{و} \quad z_C = -z_A, \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z_A = 3 + 3i$$

أ- تبين أن النقط A, B, C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O :

$$\text{لدينا: } |z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 3\sqrt{2} \text{ أي: } OA = OB = OC = OD \text{ ومنه النقط } A, B, C \text{ و } D \text{ تنتمي إلى}$$

الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $3\sqrt{2}$.

ب- تعيين زاوية الدوران R الذي مركزه O ويحول النقطة A إلى B :

$$\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \arg\left(\frac{\overline{z_A}}{z_A}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}.$$

ج- إثبات أن النقط A ، O و C في استقامة وكذلك النقط B ، O و D .

$$\text{يكفي إثبات أن كلا من } \frac{z_A - z_O}{z_C - z_O} \text{ و } \frac{z_B - z_O}{z_D - z_O} \text{ حقيقي.}$$

$$\text{لدينا: } \frac{z_B - z_O}{z_D - z_O} = \frac{z_B}{z_D} = -1 \text{ و } \frac{z_A - z_O}{z_C - z_O} = \frac{z_A}{z_C} = -1.$$

(يمكن استخدام كون $z_A + z_C = 0$ و $z_B + z_D = 0$ وبالتالي O منتصف كل من $[AC]$ و $[BD]$)

د- طبيعة الرباعي $ABCD$:

الرباعي $ABCD$ قطراه متناصفان ومتقايسان بالتالي فهو متوازي أضلاع، ولدينا $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{2}$ ومنه $ABCD$ مربع.

حل مقترح التمرين الثالث

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر المستوي (P) الذي معادلته: $x - 2y + z + 3 = 0$

$$(1) \text{ نذكر أن حامل محور الفواصل } (O; \vec{i}) \text{ يعرف بالجملة } \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{إحداثيات } A \text{ نقطة تقاطع حامل } (O; \vec{i}) \text{ مع المستوي } (P) \text{ هي حل الجملة: } \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases} \text{ أي: } A(-3; 0; 0).$$

(2) B و C النقطتان من الفضاء حيث: $B(0; 0; -3)$ و $C(-1; -4; 2)$.

أ- التحقق أن النقطة B تنتمي إلى المستوي (P) :

$$\text{لدينا: } B \in (P) \text{ ومنه } x_B - 2y_B + z_B + 3 = 0 + 0 - 3 + 3 = 0.$$

ب- حسب الطول AB :

$$AB = \sqrt{(0+3)^2 + (0-0)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

ج- حساب المسافة بين النقطة C والمستوي (P) :

$$d(C; (P)) = \frac{|-1+8+2+3|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

(3) أ- كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) المار بالنقطة C والعمودي على المستوي (P) :

لدينا (Δ) يعامد (P) و $\vec{n}(1; -2; 1)$ شعاع ناظمي لـ (P) ومنه شعاع $\vec{n}$ توجيه لـ (Δ) وبالتالي تمثيل

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -4 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases} \text{ وسيطي لـ } (\Delta) \text{ من الشكل:}$$

ب- التحقق أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ) :

بتعويض إحداثيات النقطة A في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد: $t = -2$ ، ومنه $A \in (\Delta)$.

ج- حساب مساحة المثلث ABC :

المثلث ABC قائم في A لأن: $A \in (\Delta)$ ، $C \in (\Delta)$ ، $(\Delta) \perp (P)$ و $B \in (P)$.

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{3\sqrt{2} \times 2\sqrt{6}}{2} = 3\sqrt{12} = 6\sqrt{3} \text{ ua}$$

$f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$: كما يلي : الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{1}{e^x - 1} \right] = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - \frac{1}{e^x - 1} \right] = -\infty$$

$$\text{بـ} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[x - \frac{1}{e^x - 1} \right] = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x - \frac{1}{e^x - 1} \right] = -\infty$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (حامل محور الترتيب) مقارب للمنحنى (C_f) .

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

$$f'(x) = 1 - \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} = 1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$$

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم :
ومنه : من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ، $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

$$(3) \quad \text{أـ لدينا : } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{e^x - 1} \right] = 0 \quad \text{ومنه المستقيم } (\Delta) \text{ ذو المعادلة } y = x \text{ مقارب لـ } (C_f) \text{ عند } +\infty.$$

$$\text{ولدينا : } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{e^x - 1} - 1 \right] = 0 \quad \text{ومنه المستقيم } (\Delta') \text{ ذو المعادلة } y = x + 1 \text{ مقارب مائل للمنحنى } (C_f) \text{ عند } -\infty.$$

بـ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

$$\text{لدينا : } f(x) - y = -\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{1 - e^x} \quad \text{ومنه إشارة الفرق من إشارة } 1 - e^x.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	+	-	-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

• دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ') :

$$\text{لدينا : } f(x) - y = -\frac{1}{e^x - 1} - 1 = \frac{e^x}{1 - e^x} \quad \text{ومنه إشارة الفرق من إشارة } 1 - e^x.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	+	-	-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ')	(C_f) تحت (Δ')	(C_f) تحت (Δ')

(4) إثبات أن النقطة $\omega\left(0; \frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

لدينا : من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ ، $-x \in \mathbb{R}^*$

$$f(-x) + f(x) = -\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{e^{-x} - 1} = -\frac{1}{e^x - 1} + \frac{e^x}{e^x - 1} = 1 = 2 \times \frac{1}{2}$$

ومنه النقطة $\omega\left(0; \frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

(5) أـ تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث : $\ln 2 < \alpha < 1$ و $-1.4 < \beta < -1.3$.

• الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ و $]\ln 2; 1[$ و $f(1) \approx 0,41$
 $f(\ln 2) \approx -0,31$

أي $0 < f(1) \times f(\ln 2) < 0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0; +\infty[$ حلا وحيدا α ، حيث $\ln 2 < \alpha < 1$.

• الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 0[$ و $]-1,4; -1,3[$ و $f(-1,3) \approx 0,07$
 $f(-1,4) \approx -0,07$

أي $0 < f(-1,4) \times f(-1,3) < 0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]-\infty; 0[$ حلا وحيدا β ، حيث $-1.4 < \beta < -1.3$.

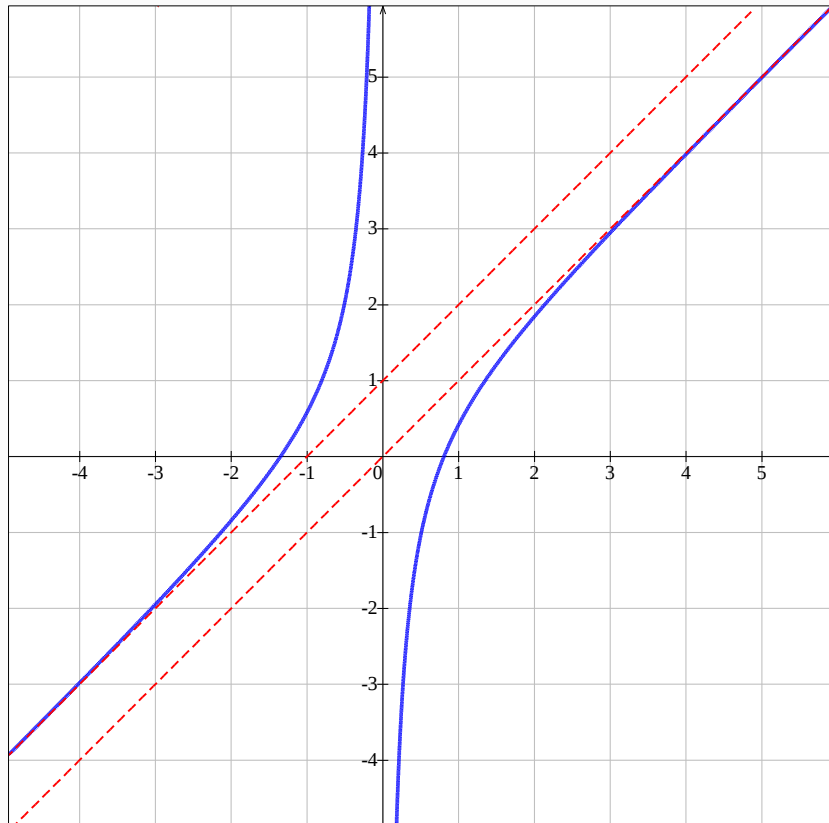
بـ دراسة وجود مماسات للمنحنى (C_f) توازي المستقيم (Δ) .

لنحل في $\mathbb{R}^*$ المعادلة : $f'(x) = 1$.

لدينا : $f'(x) = 1$ تكافئ $1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = 0$ أي $e^x = 0$ وهذا مستحيل و بالتالي المعادلة

ليس لها حلول أي أنه لا توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) .

جـ الرسم :



$$\text{لدينا : } (m-1)e^{-x} = m \text{ تكافئ } m-1 = me^x \text{ تكافئ } m = -\frac{1}{e^x - 1} \text{ تكافئ } m + x = x - \frac{1}{e^x - 1}$$

تكافئ $f(x) = x + m$ ، ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = x + m$

إذا كان $m \in]-\infty; 0[$ فإن للمعادلة حل واحد موجب .

إذا كان $m \in [0; 1]$ فإن المعادلة ليس لها حلول .

إذا كان $m \in]1; +\infty[$ فإن للمعادلة حل واحد سالب .

الموضوع الأول

التمرين الأول (3ن)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

و (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n + \frac{1}{2}$.

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات، إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حددها مع التعليل.

(1) المتتالية (v_n): أ- حسابية. ب- هندسية. ج- لا حسابية ولا هندسية.

(2) نهاية المتتالية (u_n) هي: أ- $+\infty$. ب- $-\frac{1}{2}$. ج- $-\infty$.

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = -\frac{1}{2} [1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3}]$.

أ- $S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$ ب- $S_n = \frac{1 - 3^n}{4}$ ج- $S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$

التمرين الثاني (5ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$)، المستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(1; -2; 1)$.

و $\vec{n}(-2; 1; 5)$ شعاع ناظمي له، وليكن (Q) المستوي ذو المعادلة $x + 2y - 7 = 0$.

(1) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P).

(2) أتحقق أن النقطة $B(-1; 4; -1)$ مشتركة بين المستويين (P) و (Q).

ب- بين أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

(3) لتكن النقطة $C(5; -2; -1)$.

أ- أحسب المسافة بين النقطة C والمستوي (P) ثم المسافة بين النقطة C والمستوي (Q).

ب- أثبت أن المستويين (P) و (Q) متعامدان.

ج- استنتج المسافة بين النقطة C والمستقيم (Δ).

التمرين الثالث (5ن)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{u}, \vec{v}$)، النقط A ، B و C لواحقتها على الترتيب:

$$z_C = -4 + i \quad \text{و} \quad z_B = 2 + 3i, \quad z_A = -i$$

(1) أ- أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

ب- عين طولية العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ وعمدة له، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(2) نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z ، النقطة M' ذات الاحقة z' بحيث:

$$z' = iz - 1 - i$$

أ- عين طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة.

ب- ماهي صورة النقطة B بالتحويل T .

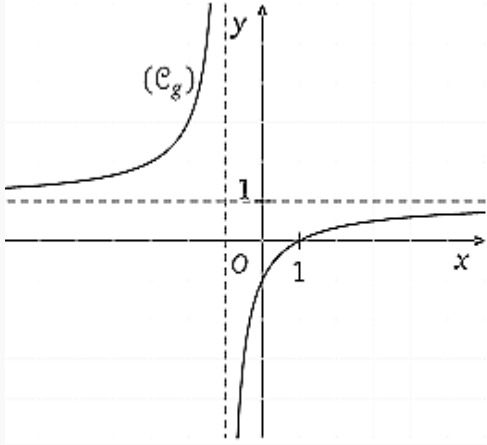
(3) لتكن D ذات اللاحقة $z_D = -6 + 2i$

أبين أن النقط A ، C و D في استقامية.

ب- عين نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحول النقطة C إلى D .

ج- عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S الذي مركزه A و يحول B إلى D .

التمرين الرابع (7ن)



(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد

و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الشكل المقابل)

بقراءة بيانية :

أ- شكل جدول تغيرات الدالة g .

ب- حل بيانيا المتراجحة $g(x) > 0$.

ج- عين بيانيا قيم x التي يكون من أجلها $0 < g(x) < 1$

(II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا .

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$ ، $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$.

ب- أحسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أ- باستعمال الجزء (I) السؤال جـ ، عين إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1; +\infty[$.

ب- α عدد حقيقي . بين أن الدالة $x \mapsto (x-\alpha)\ln(x-\alpha) - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha; +\infty[$.

ج- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$ ، $g(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$ ، ثم عين دالة أصلية للدالة f على $]1; +\infty[$

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4ن)

α عدد حقيقي موجب تماما و يختلف عن 1 .

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 6$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$.

(v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$.

(1) أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها α .

ب- أكتب بدلالة n و α ، عبارة v_n ثم استنتج بدلالة n و α ، عبارة u_n .

ج- عين قيم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها المتتالية (u_n) متقاربة .

(2) نضع : $\alpha = \frac{3}{2}$.

- أحسب بدلالة n ، المجموعين S_n و T_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين الثاني (4ن)

نعتبر في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B و C لواحقتها على الترتيب :

$$z_C = 4i \quad \text{و} \quad z_B = 3 + 2i \quad , \quad z_A = 3 - 2i$$

(1) أـ علم النقط A ، B و C .

بـ ما هي طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ علل إجابتك .

جـ عين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$.

(2) عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق : $\|\vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 12$

(3) أـ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 13 = 0$.

نسمي z_0 ، z_1 حلي هذه المعادلة .

بـ لتكن M نقطة من المستوى لاحقتها العدد المركب z .

ـ عين مجموعة النقطة M من المستوى التي تحقق : $|z - z_0| = |z - z_1|$

التمرين الثالث (5ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقط $A(0; 1; 5)$ ، $B(2; 1; 7)$ و $C(3; -3; 6)$.

(1) أـ أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة B و $\vec{u}(1; -4; -1)$ شعاع توجيه له .

بـ تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

جـ بين أن الشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{BC}$ متعامدان .

د ـ استنتج المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) .

(2) نعتبر النقطة $M(2+t; 1-4t; 7-t)$ حيث t عدد حقيقي ، ولتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(t) = AM$.

أـ أكتب عبارة $h(t)$ بدلالة t .

بـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي t ، $h'(t) = \frac{18t}{\sqrt{18t^2 + 8}}$.

جـ استنتج قيمة العدد الحقيقي t التي من أجلها تكون المسافة AM أصغرها يمكن .

ـ قارن بين القيمة الصغرى للدالة h ، والمسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) .

التمرين الرابع (7ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = e^x - ex - 1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

بـ أحسب $f'(x)$ ، ثم أدرس إشارتها .

جـ شكّل جدول تغيرات الدالة f .

(2) أـ بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = -ex - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $(-\infty)$.

بـ أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

جـ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ ، تقبل في المجال $]1, 75; 1, 76[$ حلا وحيدا α .

دـ أرسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty; 2[$.

(3) أ- أحسب بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين
معادلتيهما: $x = \alpha$ ؛ $x = 0$.

ب- أثبت أن: $A(\alpha) = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha\right) ua$ (ua هي وحدة المساحات)

تصحيح مقترح للموضوع الأول

حل مقترح التمرين الأول

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

و (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n + \frac{1}{2}$.

إختيار الإجابة مع التبرير:

(1) المتتالية (v_n) : $\leftarrow$ ب- هندسية .
التبرير:

لدينا : من من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} = 3u_n + 1 + \frac{1}{2} = 3u_n + \frac{3}{2} = 3\left(u_n + \frac{1}{2}\right) = 3v_n$ ،

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول $v_0 = u_0 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

(2) نهاية المتتالية (u_n) هي : $\leftarrow$ ج- $-\infty$.
التبرير:

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = v_n - \frac{1}{2}$ ، ومنه $u_n = -\frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}$ وبالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ لأن :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$$

(3) من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = -\frac{1}{2} [1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3}] = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$ ،

التبرير:

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$S_n = -\frac{1}{2} [1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3}] = -\frac{1}{2} [3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n] = -\frac{1}{2} \left(\frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} \right) = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$$

حل مقترح التمرين الثاني

(1) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P) :

لدينا : $\vec{n}(-2; 1; 5)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) ومنه معادلة (P) من الشكل $-2x + y + 5z + d = 0$.

و $A \in (P)$ يعني $-2 + 1 + 5 + d = 0$ أي : $d = -1$ وعليه معادلة للمستوي (P) من الشكل $-2x + y + 5z - 1 = 0$.

(2) أ. التحقق أن النقطة $B(-1; 4; -1)$ مشتركة بين المستويين (P) و (Q) :

لدينا : $-2x_B + y_B + 5z_B - 1 = -2 \times (-1) + 4 + 5 \times (-1) - 1 = 0$ ومنه $B \in (P)$

ولدينا : $x_B + 2y_B - 7 = -1 + 2 \times 4 - 7 = 0$ ومنه $B \in (Q)$

إذن : $B \in (P) \cap (Q)$.

ب- تبين أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) مع تعيين تمثيل وسيطي له .

لدينا : $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي لـ (P) و $\vec{n}'(1;2;0)$ شعاع ناظمي لـ (Q) .

$\vec{n}$ و $\vec{n}'$ ليسا مرتبطين خطيا وبالتالي المستويان (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) .

$$\text{وهذه } \begin{cases} x = -2t + 7 \\ y = t \\ z = -t + 3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ نجد } z = t \text{ ومنه بوضع } \begin{cases} -2x + y + 5z - 1 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \quad (\Delta) \text{ المستقيم المعرف بـ:}$$

الجملة هي تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) .

(3) لتكن النقطة $C(5; -2; -1)$.

أ- المسافة بين C و (P) :

$$d_1 = d(C, (P)) = \frac{|-2x_C + y_C + 5z_C - 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 5^2}} = \frac{|-2 \times 5 - 2 + 5 \times (-1) - 1|}{\sqrt{30}} = \frac{18}{\sqrt{30}} = \frac{3\sqrt{30}}{5}$$

$$d_2 = d(C, (Q)) = \frac{|x_C + 2y_C - 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|5 + 2 \times (-2) - 7|}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5} : (Q) \text{ و } C \text{ المسافة بين}$$

ب- إثبات أن المستويين (P) و (Q) متعامدان :

لدينا : $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي لـ (P) و $\vec{n}'(1;2;0)$ شعاع ناظمي لـ (Q) .

و $\vec{n} \cdot \vec{n}' = -2 \times 1 + 1 \times 2 + 5 \times 0 = 0$ ومنه $\vec{n}$ يعامد $\vec{n}'$ وبالتالي المستويان (P) و (Q) متعامدان .

ج- استنتاج المسافة بين النقطة C والمستقيم (Δ) :

$$d(C, (\Delta)) = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{30}}{5}\right)^2 + \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

حل مقترح التمرين الثالث

$$z_C = -4 + i \text{ و } z_B = 2 + 3i, \quad z_A = -i$$

(1) أ- كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري:

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-4 + i - (-i)}{2 + 3i - (-i)} = \frac{-4 + 2i}{2 + 4i} = \frac{(-4 + 2i)(2 - 4i)}{(2 + 4i)(2 - 4i)} = \frac{20i}{20} = i$$

ب- طولية العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ وعمدة له :

$$\begin{cases} \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = |i| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

لدينا : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ ومنه

طبيعة المثلث ABC :

$$\begin{cases} AB = AC \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ أي : } \begin{cases} \frac{AC}{AB} = 1 \\ \arg\left(\frac{AC}{AB}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ لدينا:}$$

ومنه المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في A .

(2) T التحويل النقطي في المستوى الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z ، النقطة M' ذات الاحقة z' بحيث: $z' = iz - 1 - i$.
أ- تعيين طبيعة التحويل T مع تحديد عناصره المميزة :
الكتابة المركبة للتحويل النقطي T من الشكل: $z' = \alpha z + \beta$ بحيث: $\alpha = i$ و $\beta = -1 - i$.
لدينا: $\alpha \in \mathbb{C}$ و $|\alpha| = |i| = 1$ ومنه التحويل T هو دوران .

زاوية للدوران T هي: $\theta = \arg(\alpha) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

مركز الدوران T هو النقطة ذات الاحقة $\frac{\beta}{1-\alpha}$.

لدينا: $\frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{-1-i}{1-i} = \frac{(-1-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -i = z_A$ ومنه النقطة A هي مركز الدوران T .

ب- صورة النقطة B بالتحويل T :

نسمي النقطة B' صورة النقطة B بالتحويل T ومنه $z_{B'} = iz_B - 1 - i = i(2+3i) - 1 - i = i - 4$ ومنه $z_{B'} = z_C$ أي: $z_{B'} = iz_B - 1 - i$.

إذن صورة النقطة B بالتحويل T هي النقطة C .

(3) لتكن D ذات الاحقة $z_D = -6 + 2i$

أ- تبين أن النقط A ، C و D في استقامية:

يكفي إثبات أن $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$ حقيقي .

لدينا: $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \frac{-4 + i - (-i)}{-6 + 2i - (-i)} = \frac{-4 + 2i}{-6 + 3i} = \frac{2(-2 + i)}{3(-2 + i)} = \frac{2}{3}$ ومنه النقط A ، C و D في استقامية .

ب- تعيين نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحول النقطة C إلى D :

العبارة المركبة للتحاكي h من الشكل: $z_D - z_A = k(z_C - z_A)$ بحيث: k هي نسبة التحاكي h .

لدينا: $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{3}{2}$ ومنه نسبة التحاكي h هي: $k = \frac{3}{2}$.

ج- تعيين العناصر المميزة للتشابه المباشر S الذي مركزه A و يحول B إلى D .

العبارة المركبة للتشابه المباشر S من الشكل: $z_D - z_A = a(z_B - z_A)$

لدينا: $a = \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-6 + 2i - (-i)}{2 + 3i - (-i)} = \frac{-6 + 3i}{2 + 4i} = \frac{3i(2i + 1)}{2(1 + 2i)} = \frac{3}{2}i$ ومنه:

نسبة التشابه المباشر S هي: $k = |a| = \frac{3}{2}$.

زاوية للتشابه المباشر S هي: $\theta = \arg(a) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

(يمكن إثبات أن: $S = h \circ T$)

حل مقترح التمرين الرابع

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ ب: $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

أ- جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	1	$+\infty$	1

ب- حل المتراجحة $g(x) > 0$ بيانيا $g(x) > 0$ تكافئ $g(x) > 0$: $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

ج- تعيين قيم x التي يكون من أجلها $0 < g(x) < 1$:

$$0 < g(x) < 1 \text{ تكافئ } x \in]1; +\infty[.$$

$$(II) \text{ الدالة } f \text{ معرفة على المجال }]1; +\infty[\text{ بـ: } f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

(1) حساب النهايات :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\infty \end{cases} \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \right] = -\infty$$

التفسير الهندسي: المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0 \end{cases} \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \right] = 1$$

التفسير الهندسي: المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) .

$$(2) \text{ أ- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من المجال }]1; +\infty[\text{ يكون: } g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]1; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]1; +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1 \times (x+1) - 1 \times (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

ب- حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]1; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]1; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{\frac{(x+1)^2}{x-1}}{x+1} = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{(x+1)^2} \left(\frac{2x}{x-1} \right) = \frac{4x}{(x-1)(x+1)^2}$$

ولدينا: من أجل كل عدد حقيقي x من $]1; +\infty[$ ، $f'(x) > 0$ ، وبالتالي الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]1; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	1

(3) أ- باستعمال الجزء (I) السؤال ج، تعيين إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1; +\infty[$.

لدينا حسب الجزء (I) السؤال ج: من أجل كل $x \in]1; +\infty[$ ، فإن $0 < \frac{x-1}{x+1} < 1$ ومنه $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) < 0$.

ب- α عدد حقيقي.

تبين أن الدالة h بحيث $h(x) = (x-\alpha)\ln(x-\alpha) - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x-\alpha)$ على $]\alpha; +\infty[$.

الدالة h قابلة للإشتقاق على المجال $]\alpha; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]\alpha; +\infty[$:

$$h'(x) = 1 \times \ln(x-\alpha) + \frac{1}{x-\alpha} \times (x-\alpha) - 1 = \ln(x-\alpha)$$

جـ - التحقق :

$$g(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}, \quad x \in]1; +\infty[$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$ ،
 تعيين دالة أصلية للدالة f على المجال $]1; +\infty[$:

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1 - \frac{2}{x+1} + \ln(x-1) - \ln(x+1), \quad x \in]1; +\infty[$$

وبالتالي دالة أصلية للدالة f على المجال $]1; +\infty[$ من الشكل :

$$F(x) = x - 2\ln(x+1) + [(x-1)\ln(x-1) - x] - [(x+1)\ln(x+1) - x] \\ = x - (x+3)\ln(x+1) + (x-1)\ln(x-1)$$

تصحيح مقترح للموضوع الثاني

حل مقترح التمرين الأول

α عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1 .

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$.

(v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha-1}$.

(1) أ- تبيان أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{\alpha-1} = \alpha u_n + 1 + \frac{1}{\alpha-1} = \alpha u_n + \frac{\alpha}{\alpha-1} = \alpha \left(u_n + \frac{1}{\alpha-1} \right) = \alpha v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \alpha$ وحدها الأول $v_0 = u_0 + \frac{1}{\alpha-1} = 6 + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{6\alpha-5}{\alpha-1}$.

ب- كتابة v_n بدلالة n و α :

$$v_n = \left(\frac{6\alpha-5}{\alpha-1} \right) \times \alpha^n \quad \text{ومنه } v_n = v_0 \times q^n, \quad n \text{ عدد طبيعي}$$

• كتابة u_n بدلالة n و α :

$$u_n = \left(\frac{6\alpha-5}{\alpha-1} \right) \times \alpha^n - \frac{1}{\alpha-1} \quad \text{ومنه } u_n = v_n - \frac{1}{\alpha-1}, \quad n \text{ عدد طبيعي}$$

ج - تعيين قيم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها المتتالية (u_n) متقاربة .

تكون المتتالية (u_n) متقاربة إذا وفقط إذا كان $\alpha \in]0; 1[$ ، لأن في هذه الحالة يكون $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^n = 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{1}{\alpha-1} \quad \text{ويكون}$$

(2) من أجل : $\alpha = \frac{3}{2}$ يكون أساس المتتالية (v_n) هو $q = \frac{3}{2}$ وحدها الأول $v_0 = 8$.

- حساب المجموعين S_n و T_n :

من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \times \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) = 8 \times \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{2}} \right) = 16 \times \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{n+1} - 1 \right)$$

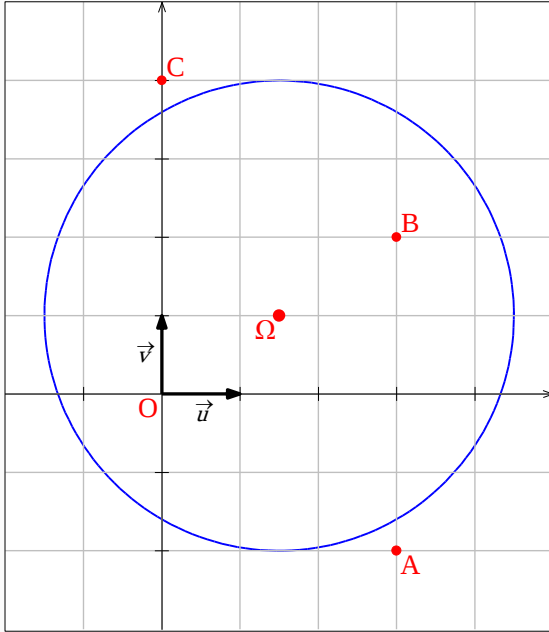
لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = v_n - \frac{1}{\alpha - 1} = v_n - \frac{1}{\frac{3}{2} - 1} = v_n - 2$ ، ومنه

$$T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (v_0 - 2) + (v_1 - 2) + \dots + (v_n - 2) = S_n - 2(n+1) = 16 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 2n - 18$$

حل مقترح التمرين الثاني

$$z_C = 4i \text{ و } z_B = 3 + 2i \text{ ، } z_A = 3 - 2i$$

(1) أـ تعلیم النقط A ، B و C :



بـ طبيعة الرباعي $OABC$:

لدينا : $z_{\overline{OC}} = z_C - z_O = 4i$ أي $z_{\overline{OC}} = z_{\overline{AB}}$ و $z_{\overline{AB}} = z_B - z_A = 3 + 2i - (3 - 2i) = 4i$ وبالتالي $OABC$ متوازي أضلاع.

جـ. تعيين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$:

النقطة Ω هي مرجع الجملة $\{(O,1); (A,1); (B,1); (C,1)\}$ ومنه : $z_{\Omega} = \frac{z_O + z_A + z_B + z_C}{4}$ أي : $z_{\Omega} = \frac{3}{2} + i$.

(2) تعيين (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\Omega \|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 12$

$\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 12$ تكافئ $\|4\overrightarrow{M\Omega}\| = 12$ أي $M\Omega = 3$ وبالتالي (E) هي الدائرة التي مركزها

النقطة Ω ونصف قطرها 3 .

الرسم : أنظر الشكل .

(3) أـ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 13 = 0$.

لدينا : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 13 = -16 = 16i^2 = (4i)^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_1 = \frac{6 + 4i}{2} = 3 + 2i = z_B \text{ و } z_0 = \frac{6 - 4i}{2} = 3 - 2i = z_A$$

بـ. تعيين مجموعة النقطة M من المستوي التي تحقق : $|z - z_0| = |z - z_1|$

وبالتالي المجموعة المطلوبة هي محور القطعة $[AB]$. (محور الفواصل)

حل مقترح التمرين الثالث

أ، B و C النقط من الفضاء بحيث: $A(0;1;5)$ ، $B(2;1;7)$ و $C(3;-3;6)$.

(1) أ- كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) :

لدينا: (Δ) يشمل B و $\vec{u}(1;-4;-1)$ شعاع توجيه له ومنه تمثيل وسيطي لـ (Δ)

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = 7 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ من الشكل}$$

ب- التحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ) :

بتعويض إحداثيات النقطة C في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد $t = 1$ ومنه $C \in (\Delta)$.

ج- تبيان أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان:

لدينا: $\overrightarrow{AB}(2;0;2)$ و $\overrightarrow{AB}(1;-4;-1)$ و $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 \times 1 + 0 \times (-4) + 2 \times (-1) = 0$ ومنه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان.

د- استنتاج المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) :

لدينا: B هي المسقط العمودي لـ A على المستقيم (Δ) ومنه $d(A, (\Delta)) = AB = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

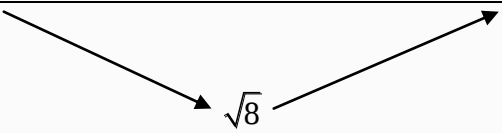
(2) نعتبر النقطة M $(2+t; 1-4t; 7-t)$ حيث t عدد حقيقي، ولتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(t) = AM$.

أ- كتابة عبارة $h(t)$ بدلالة t: $h(t) = AM = \sqrt{(2+t)^2 + (-4t)^2 + (7-t)^2} = \sqrt{18t^2 + 8}$

ب- الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي t، $h'(t) = \frac{36t}{2\sqrt{18t^2 + 8}} = \frac{18t}{\sqrt{18t^2 + 8}}$

ج- استنتاج قيمة العدد الحقيقي t التي من أجلها تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

جدول تغيرات الدالة h:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$		- 0 +	
$h(x)$			

تكون المسافة AM أصغر ما يمكن من أجل $t = 0$ و $AM = \sqrt{h(0)} = \sqrt{8}$.

- المقارنة بين القيمة الصغرى للدالة h، والمسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) .

$$d(A, (\Delta)) = h(0) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

حل مقترح التمرين الرابع

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^x - ex - 1$.

(1) أ- حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{e^x}{x} - e - \frac{1}{x} \right) \right] = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - ex - 1) = +\infty$$

ب- حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = e^x - e$

$f'(x) = 0$ تكافئ $e^x - e = 0$ تكافئ $e^x = e$ تكافئ $x = 1$.

من أجل $x \in]-\infty; 1]$ يكون $e^x \leq e$ أي $f'(x) \leq 0$ وبالتالي الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty; 1]$.

من أجل $x \in [1; +\infty[$ ، يكون $e^x \geq e$ أي $f'(x) \geq 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة على المجال $[1; +\infty[$.

جـ - جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

(2) أ- لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-ex - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x - ex - 1 - (-ex - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -ex - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب- كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

لدينا : $(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ ومنه $(T): y = (1 - e)x$

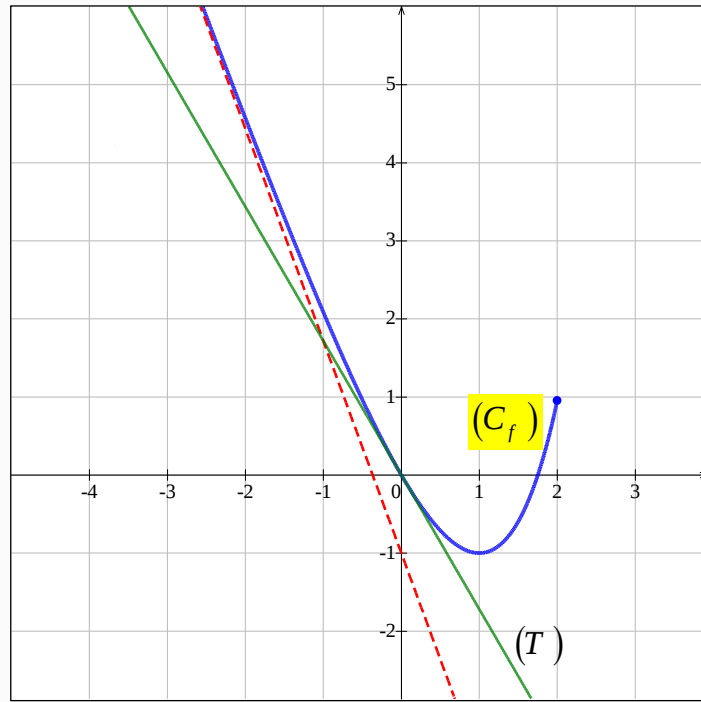
جـ - تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]1,75; 1,76[$ حلا وحيدا α .

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[1; +\infty[$ و $]1,75; 1,76[\subset [1; +\infty[$ و $\begin{cases} f(1,75) \approx -0,002 \\ f(1,76) \approx 0,02 \end{cases}$

أي $f(1,75) \times f(1,76) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

حيث $1.75 < \alpha < 1.76$.

د- الرسم :



(3) أ- حساب ، بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين

معادلتيهما : $x = \alpha$ و $x = 0$.

$$A(\alpha) = -\int_0^\alpha f(x) dx = -\int_0^\alpha (e^x - ex - 1) dx = -\left[e^x - \frac{1}{2}ex^2 - x \right]_0^\alpha = 1 - \left(e^\alpha - \frac{1}{2}e\alpha^2 - \alpha \right)$$

$$A(\alpha) = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha \right) ua \quad \text{ب- إثبات أن :}$$

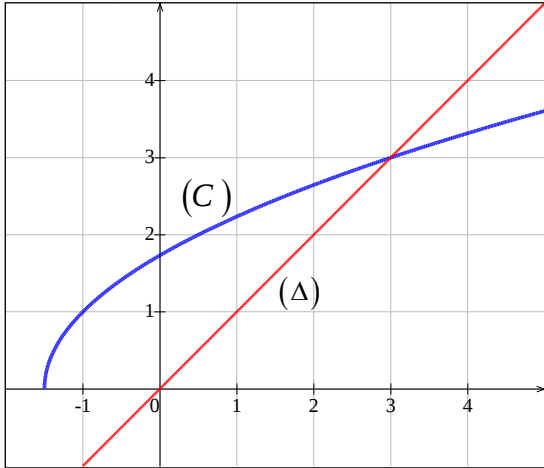
لدينا : $f(\alpha) = 0$ ومنه $e^\alpha - e\alpha - 1 = 0$ أي $e^\alpha = e\alpha + 1$ وبالتالي :

$$(A(\alpha) \text{ هي وحدة المساحات}) \quad A(\alpha) = -e^\alpha + \frac{1}{2}e\alpha^2 + \alpha + 1 = -(e\alpha + 1) + \frac{1}{2}e\alpha^2 + \alpha + 1 = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha \right) ua$$

الموضوع الأول

التمرين الأول (5ن)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.
 (1) لتكن h الدالة المعرفة على المجال $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$ كما يلي : $h(x) = \sqrt{2x + 3}$ و (C) تمثيلها البياني



و (Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y = x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (أنظر الشكل المقابل).

أ- أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية u_0, u_1, u_2, u_3 (دون حسابها وموضحا خطوط الإنشاء)
 ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) و تقاربها .

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$

(3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ب- إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثاني (4ن)

(1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z = \frac{3i(z + 2i)}{z - 2 + 3i}$ (حيث $z \neq 2 - 3i$)
 - حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة .

(2) ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A ، B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب : z_A و z_B حيث :

$$z_B = 1 - i\sqrt{5} \quad \text{و} \quad z_A = 1 + i\sqrt{5}$$

- تحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها .

(3) نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z ، $(z \neq 2 - 3i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z' = \frac{3i(z + 2i)}{z - 2 + 3i}$

النقط C ، D ، E لواحقها على الترتيب : $z_C = -2i$ ، $z_D = 2 - 3i$ و $z_E = 3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$.
 أ- عبر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM .

ب- إستنتج أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها
 تحقق أن E تنتمي إلى (γ) .

التمرين الثالث (4ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر المستوي (P) ذا المعادلة : $14x + 16y + 13z - 47 = 0$ ،

والنقط $A(1; -2; 5)$ ، $B(2; 2; -1)$ و $C(-1; 3; 1)$.

(1) -تحقق أن النقط A ، B و C ليست في استقامية .

ب- بين أن المستوي (ABC) هو (P) .

(2) جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) .

3) أ- أكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة [AB].

ب- تحقق أن النقطة $D\left(-1; -2; \frac{1}{4}\right)$ تنتمي إلى (Q).

ج- أحسب المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB).

التمرين الرابع (7ن)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 0[$ كما يلي: $f(x) = x + 5 + 6 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 0[$ ، $f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)}$.

استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ- بين المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = x + 5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب- أدرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث $-3.5 < \alpha < -3.4$ و $-1.1 < \beta < -1$.

5) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

6) أ- نعتبر النقطتين $A\left(-1; 3 + 6 \ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2; \frac{5}{2} + 6 \ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

بين أن $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6 \ln \frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB).

ب- بين أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثياتها.

7) لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty; 0[$ كما يلي: $g(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6x \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 6 \ln(1-x)$.

بين أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty; 0[$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول (5,4ن)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = \frac{13}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$.

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$. استنتج أن (u_n) متزايدة تماماً.

3) برز لماذا (u_n) متقاربة.

4) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n - 3)$.

أ- برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم أحسب حدها الأول.

ب- أكتب كلا من u_n و v_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

جـ- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times \dots \times (u_n - 3)$.

أكتب P_n بدلالة n ، ثم بين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{1}{16}$.

التمرين الثاني (4ن)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(-1; 0; 1)$ ، $B(2; 1; 0)$ و $C(1; -1; 0)$.

(1) بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا .

(2) بين أن : $2x - y + 5z - 3 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

(3) $D(2; -1; 3)$ و $H\left(\frac{13}{15}; -\frac{13}{30}; \frac{1}{6}\right)$

أ. تحقق أن النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (ABC) .

ب- بين أن H هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .

ج- استنتج أن المستويين (ADH) و (ABC) متعامدان ، ثم جد تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطعهما .

التمرين الثالث (4,5ن)

(1) $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث :

أ. تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

ب- حدد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z - 6)(z^2 + \alpha z + \beta)$.

ج- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z) = 0$.

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A ، B و C نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب

$$z_A = 6, \quad z_B = 3 + i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad z_C = 3 - i\sqrt{3}$$

أ. أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي.

ب- أكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسّي.

ج- استنتج طبيعة المثلث ABC .

(3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ، نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

أ. جد الكتابة المركبة للتشابه S .

ب- عين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S .

ج- بين أن النقط A ، B و A' في إستقامة.

التمرين الرابع (7ن)

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 - xe^x$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ ، تقبل في حلا وحيدا α على المجال $]-1; +\infty[$

ب- تحقق أن $0.5 < \alpha < 0.6$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 2]$ كما يلي : $f(x) = (x-1)e^x - x - 1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) لتكن f' مشتقة الدالة f . بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 2]$ فإن : $f'(x) = -g(x)$ ، استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty; 2]$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) بين أن $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2})

(4) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.
ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(5) أ- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $-1.6 < x_1 < -1.5$ و $1.5 < x_2 < 1.6$.
ب- أنشئ (Δ) و (C_f) .

(6) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = (ax + b)e^x$ كما يلي :

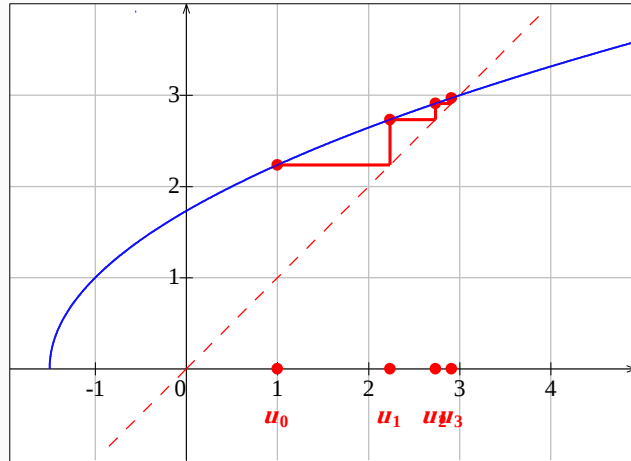
أ- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$.
ب- استنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

تصحيح مقترح للموضوع الأول

حل مقترح التمرين الأول

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

(1) الرسم :



ب- التخمين :

المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة نحو 3.

(2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$.

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$ " .

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = 1$ ومنه $0 < u_0 < 3$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة .

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $0 < u_n < 3$ ، و نبهرن صحة $P(n+1)$ أي $0 < u_{n+1} < 3$.

لدينا حسب الفرض $0 < u_n < 3$ ومنه $0 < 2u_n < 6$ ومنه $3 < 2u_n + 3 < 9$ ومنه $\sqrt{3} < \sqrt{2u_n + 3} < \sqrt{9}$

أي $0 < \sqrt{3} < u_{n+1} < 3$ وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 3$.

(3) أ- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n + 3} - u_n = \frac{(\sqrt{2u_n + 3} - u_n)(\sqrt{2u_n + 3} + u_n)}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n} = \frac{2u_n + 3 - u_n^2}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(3 - u_n)(1 + u_n)}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n} \text{ ومنه}$$

بما أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $3 - u_n > 0$ و $1 + u_n > 0$ فإن $u_{n+1} - u_n > 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة .

ب- إستنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة :

المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 3 ، إذن فهي متقاربة .

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

نضع : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$ إذن $h(l) = l$.

$$h(l) = l \text{ تكافئ } \sqrt{2l + 3} = l \text{ تكافئ } \begin{cases} 2l + 3 = l^2 \\ l > 0 \end{cases} \text{ تكافئ } l^2 - 2l - 3 = 0$$

المعادلة لها حلين هما $l_1 = 3$ و $l_2 = -1$ و l_2 مرفوض

إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

حل مقترح التمرين الثاني

(1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z = \frac{3i(z + 2i)}{z - 2 + 3i}$ (حيث $z \neq 2 - 3i$)

لنحل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة .

$$z = \frac{3i(z + 2i)}{z - 2 + 3i} \text{ تكافئ } z(z - 2 + 3i) = 3i(z + 2i) \text{ تكافئ } z^2 - 2z + 6 = 0$$

لدينا : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 6 = -20 = 20i^2 = (\sqrt{20}i)^2 = (2\sqrt{5}i)^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_2 = \frac{2 - 2\sqrt{5}i}{2} = 1 - i\sqrt{5} \text{ و } z_1 = \frac{2 + 2\sqrt{5}i}{2} = 1 + i\sqrt{5}$$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A ، B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب : z_A و z_B حيث :

$$z_B = 1 - i\sqrt{5} \text{ و } z_A = 1 + i\sqrt{5}$$

التحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها :

لدينا : $|z_A| = |1 + i\sqrt{5}| = \sqrt{6}$ و $|z_B| = |1 - i\sqrt{5}| = \sqrt{6}$ ومنه $|z_A| = |z_B|$ أي : $OA = OB$.

وبالتالي A و B تنتميان إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

(3) نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z ، $(z \neq 2 - 3i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z' = \frac{3i(z + 2i)}{z - 2 + 3i}$

النقط C ، D ، E لواحقها على الترتيب : $z_C = -2i$ ، $z_D = 2 - 3i$ و $z_E = 3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$.

أ- التعبير عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM :

$$\text{لدينا : } z' = \frac{3i(z + 2i)}{z - 2 + 3i} \text{ أي } z' = \frac{z_E(z - z_C)}{z - z_D} \text{ ومنه } |z'| = \frac{|z_E| \cdot |z - z_C|}{|z - z_D|} = \frac{|z_E| \cdot |z - z_C|}{|z - z_D|} \text{ أي : } OM' = \frac{3CM}{DM}$$

بـ. $M \in (\Delta)$ معناه: $CM = DM$ ومنه $OM' = 3$ أي أن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) مركزها O ونصف قطرها 3 .
التحقق أن $E \in (\gamma)$:
لدينا: $|z_E| = |3i| = 3$ أي: $OE = 3$ ومنه $E \in (\gamma)$.

حل مقترح التمرين الثالث

A, B, C والنقط من الفضاء بحيث: $A(1; -2; 5)$ ، $B(2; 2; -1)$ و $C(-1; 3; 1)$.
(P) المستوي ذو المعادلة: $14x + 16y + 13z - 47 = 0$.
(1) أـ. التحقق أن النقط A, B, C ليست في استقامية:
لدينا: $\overrightarrow{AB}(1; 4; -6)$ و $\overrightarrow{AC}(-2; 5; -4)$ ومنه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا وبالتالي النقط A, B, C ليست في استقامية .

بـ. تبيان أن المستوي (ABC) هو (P):

يكفي إثبات أن إحداثيات النقط A, B, C تحقق معادلة (P) .

$$14x_A + 16y_A + 13z_A - 47 = 14 + 16 \times (-2) + 13 \times 5 - 47 = 0 \text{ لأن } A \in (P)$$

$$14x_B + 16y_B + 13z_B - 47 = 14 \times 2 + 16 \times 2 + 13 \times (-1) - 47 = 0 \text{ لأن } B \in (P)$$

$$14x_C + 16y_C + 13z_C - 47 = 14 \times (-1) + 16 \times 3 + 13 \times 1 - 47 = 0 \text{ لأن } C \in (P)$$

(2) إيجاد تمثيل وسيطي للمستقيم (AB):

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 4t - 2 \\ z = -6t + 5 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{لدينا } \overrightarrow{AB}(1; 4; -6) \text{ ومنه تمثيل وسيطي للمستقيم } (AB) \text{ من الشكل:}$$

(3) أـ. كتابة معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$:

لتكن I منتصف القطعة $[AB]$ ومنه $I\left(\frac{3}{2}; 0; 2\right)$ وبالتالي (Q) هو المستوي الذي $\overrightarrow{AB}(1; 4; -6)$ شعاع ناظمي له

ويشمل I ومنه لـ (Q) معادلة من الشكل: $x + 4y - 6z + d = 0$

ولدينا $I \in (Q)$ يعني $\frac{3}{2} + 4 \times 0 - 6 \times 2 + d = 0$ أي $d = \frac{21}{2}$.

إذن $x + 4y - 6z + \frac{21}{2} = 0$ هي معادلة للمستوي (Q) .

(طريقة أخرى: المستوي (Q) هو مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء بحيث: $MA = MB$ )

بـ. التحقق أن النقطة $D\left(-1; -2; \frac{1}{4}\right)$ تنتمي إلى (Q):

$$\text{لدينا } x_D + 4y_D - 6z_D + \frac{21}{2} = -1 + 4 \times (-2) - 6 \times \frac{1}{4} + \frac{21}{2} = 0 \text{ لأن } D \in (Q)$$

جـ. حساب المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB):

لدينا: $D \in (Q)$ ومنه I هي المسقط العمودي للنقطة D على المستقيم (AB) .

$$\text{ومنه: } d(D, (AB)) = ID = \sqrt{\left(\frac{3}{2} + 1\right)^2 + (0 + 2)^2 + \left(2 - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{213}}{4}$$

f الدالة المعرفة على المجال $]0; -\infty[$ بـ : $f(x) = x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

$$(1) \text{ أ. } \lim_{x \rightarrow 0} (x + 5) = 5 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \right] = -\infty \quad \text{لأن : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \right] = -\infty$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (حامل محاور الترتيب) مقارب للمنحنى (C_f) .

$$\text{ب. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 5) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \right] = 0 \quad \text{لأن : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \right] = -\infty$$

(2) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; -\infty[$ ، $f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; -\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; -\infty[$:

$$f'(x) = 1 + 6 \left(\frac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}} \right) = 1 - \frac{6}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{6}{x(x-1)} = \frac{x(x-1)-6}{x(x-1)} = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; -\infty[$ ، $\frac{x}{x-1} > 0$ ومنه $x(x-1) > 0$.
من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; -\infty[$ ، $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$ ، ومنه :

x	$-\infty$	-2	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$

الدالة f متزايدة على المجال $]-2; -\infty[$ ومتناقصة على المجال $]0; -2]$.

x	$-\infty$	-2	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$3 + 6\ln\frac{2}{3}$	$-\infty$

(3) أ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 5)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \right] = 0$ ومنه المستقيم (Δ) الذي معادلته له : $y = x + 5$ هو مستقيم

مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x) - y = f(x) - (x + 5) = 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$:

من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; -\infty[$ ، $x > x - 1$ ومنه $\frac{x}{x-1} < 1$ وبالتالي $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) < 0$.

إذن نستنتج أن (C_f) يقع تحت (Δ) .

(4) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث $-3.5 < \alpha < -3.4$ و $-1.1 < \beta < -1$.

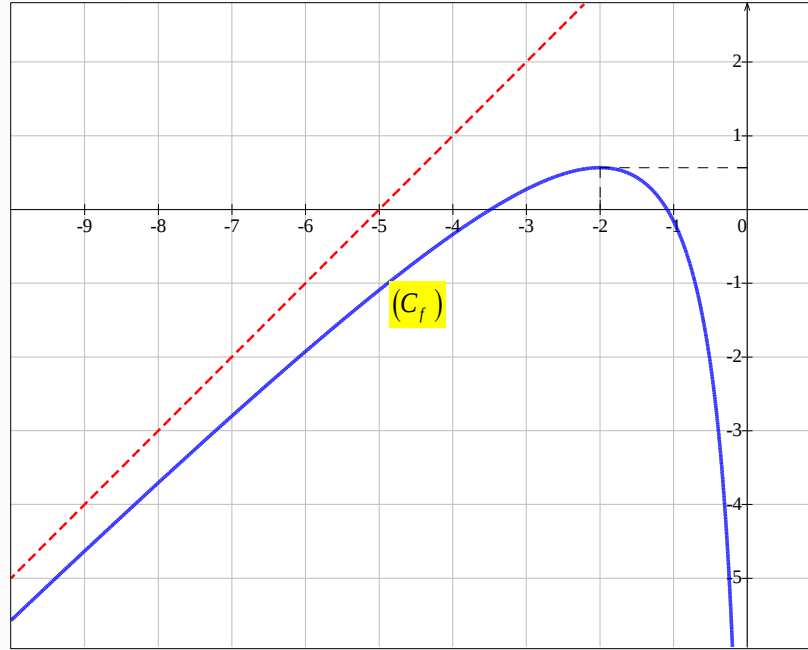
• الدالة f مستمرة و متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; -2[$ و $]-2; -\infty[$ و $]-3,5; -3,4[$ و $\begin{cases} f(-3,4) \approx 0,05 \\ f(-3,5) \approx -0,01 \end{cases}$

أي $f(-3,4) \times f(-3,5) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α حيث $-3.5 < \alpha < -3.4$ و يحقق $f(\alpha) = 0$.

• الدالة f مستمرة و متناقصة تماماً على المجال $]-2; 0[$ و $]-2; 0[$ و $]-1,1; -1[$ و $\begin{cases} f(-1,1) \approx 0,02 \\ f(-1) \approx -0,16 \end{cases}$

أي $f(-1,1) \times f(-1) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي β حيث $-1.1 < \beta < -1$ و يحقق $f(\beta) = 0$.

(5) الرسم:



(6) أـ لدينا: $A\left(-1; 3 + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2; \frac{5}{2} + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

تبين أن $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6\ln\frac{3}{4}$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

يمكن التحقق أن إحداثيات كلا من النقطتين A و B تحقق المعادلة المعطاة.

$$y_B = \frac{1}{2}x_B + \frac{7}{2} + 6\ln\frac{3}{4} = \frac{5}{2} + 6\ln\frac{3}{4}, \quad y_A = \frac{1}{2}x_A + \frac{7}{2} + 6\ln\frac{3}{4} = 3 + 6\ln\frac{3}{4}$$

(أو يمكن كتابة معادلة للمستقيم (AB) والحصول على المعادلة المعطاة)

بـ تبين أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثياتها.

لدينا: معامل توجيه المستقيم (AB) هو $\frac{1}{2}$ وبالتالي نحل في المجال $]-\infty; 0[$ المعادلة $f'(x) = \frac{1}{2}$.

$$f'(x) = \frac{1}{2} \text{ تكافئ } \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)} = \frac{1}{2} \text{ تكافئ } x^2 - x - 12 = 0$$

$$\text{المعادلة } f'(x) = \frac{1}{2} \text{ تقبل في المجال }]-\infty; 0[\text{ حل وهو } x_0 = -3$$

إذن: المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في النقطة $M_0(x_0; y_0)$ مع $y_0 = f(-3) = 2 + 6\ln\frac{3}{4}$.

(7) لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty; 0[$ كما يلي : $g(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6x \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 6\ln(1-x)$

تبيان أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty; 0[$:

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty; 0[$ ومن أجل كل $x \in]-\infty; 0[$:

$$g'(x) = x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{6x}{x(x-1)} - \frac{6}{1-x} = x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{6}{x-1} + \frac{6}{x-1} = f(x)$$

ومنه الدالة g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty; 0[$.

تصحيح مقترح للموضوع الثاني

حل مقترح التمرين الأول

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = \frac{13}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$

(1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$ "

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = \frac{13}{4}$ ومنه $3 < u_0 < 4$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة .

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $3 < u_n < 4$ ، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $3 < u_{n+1} < 4$.

لدينا حسب الفرض $3 < u_n < 4$ ومنه $0 < u_n - 3 < 1$ ومنه $0 < \sqrt{u_n - 3} < 1$ ومنه $3 < \sqrt{u_n - 3} < 4$

أي $3 < u_{n+1} < 4$ بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $3 < u_n < 4$.

(2) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$

من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} - u_n = 3 + \sqrt{u_n - 3} - u_n = \frac{(3 + \sqrt{u_n - 3} - u_n)(\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3)}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3} = \frac{u_n - 3 - (3 - u_n)^2}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3} = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$$

• استنتاج أن (u_n) متزايدة تماما :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3} = \frac{(4 - u_n)(u_n - 3)}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n}$$

وبما أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $3 < u_n < 4$ فإن $4 - u_n > 0$ و $u_n - 3 > 0$ ومنه $u_{n+1} - u_n > 0$.

وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

(3) تبرير تقارب المتتالية (u_n) :

المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 4 ، إذن فهي متقاربة .

(4) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln(u_n - 3)$.

أ- تبيان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$:

من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 3) = \ln(3 + \sqrt{u_n - 3} - 3) = \ln(\sqrt{u_n - 3}) = \frac{1}{2} \ln(u_n - 3) = \frac{1}{2} v_n$$

ومن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = \ln(u_0 - 3) = \ln\left(\frac{13}{4} - 3\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln 4$
بـ كتابة v_n بدلالة n :

$$v_n = \ln \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n : v_n = v_0 \times q^n$$

• كتابة u_n بدلالة n :

$$u_n = 3 + e^{\ln \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n} : \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n : v_n = \ln(u_n - 3) \text{ ومنه } u_n = 3 + e^{v_n}$$

• حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 : \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + e^{\ln \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}\right) = 3 + 1 = 4$$

جــ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times \dots \times (u_n - 3)$
كتابة P_n بدلالة n :

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n : v_n = \ln(u_n - 3) \text{ ومنه } u_n - 3 = e^{v_n} \text{ ومنه :}$$

$$P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times \dots \times (u_n - 3) = e^{v_0} \times e^{v_1} \times e^{v_2} \times \dots \times e^{v_n} = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_n} = e^{2\left(\ln \frac{1}{4}\right)\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}$$

• تبيان أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{1}{16}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0 : \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2\left(\ln \frac{1}{4}\right)\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]} = e^{2\left(\ln \frac{1}{4}\right)} = e^{\ln \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

حل مقترح التمرين الثاني

A ، B و C النقطة من الفضاء بحيث : $A(-1;0;1)$ ، $B(2;1;0)$ و $C(1;-1;0)$.

(1) تبيان أن النقطة A ، B و C تعين مستويا :

لدينا : $\overline{AB}(3;1;-1)$ و $\overline{AC}(2;-1;-1)$

لاحظ أن $z_{\overline{AB}} = z_{\overline{AC}}$ لكن $x_{\overline{AB}} \neq x_{\overline{AC}}$ ومنه $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا إذن النقطة A ، B و C ليست في استقامية وبالتالي فهي تعين مستويا .

(2) تبيان أن : $2x - y + 5z - 3 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

يكفي إثبات أن إحداثيات النقطة A ، B و C تحقق المعادلة .

$$2x_A - y_A + 5z_A - 3 = 2 \times (-1) - 0 + 5 \times 1 - 3 = 0 \text{ لأن } A \in (ABC)$$

$$2x_B - y_B + 5z_B - 3 = 2 \times 2 - 1 + 5 \times 0 - 3 = 0 \text{ لأن } B \in (ABC)$$

$$2x_C - y_C + 5z_C - 3 = 2 \times 1 - (-1) + 5 \times 0 - 3 = 0 \text{ لأن } C \in (ABC)$$

(3) D و H النقطتان من الفضاء حيث : $D(2;-1;3)$ و $H\left(\frac{13}{15}; -\frac{13}{30}; \frac{1}{6}\right)$

أـ التحقق أن النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (ABC) :

$$\text{لدينا : } 2x_D - y_D + 5z_D - 3 = 2 \times 2 - (-1) + 5 \times 3 - 3 = 17 \neq 0 \text{ ومنه } D \notin (ABC)$$

بـ تبيان أن H هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) :

يكفي إثبات أن : $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ و $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ و $H \in (ABC)$

(أو $H \in (ABC)$ و $\overrightarrow{DH}$ ناظمي لـ (ABC))

لدينا : $H \in (ABC)$ ومنه $2x_H - y_H + 5z_H - 3 = 2 \times \frac{13}{15} - \left(-\frac{13}{30}\right) + 5 \times \frac{1}{6} - 3 = \frac{52}{30} + \frac{13}{30} + \frac{25}{30} - 3 = 3 - 3 = 0$

ولدينا : $\overrightarrow{DH} \left(-\frac{17}{15}; \frac{17}{30}; -\frac{17}{6} \right)$ ومنه

$$\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \times \left(-\frac{17}{15}\right) + 1 \times \frac{17}{30} + (-1) \times \left(-\frac{17}{6}\right) = -\frac{102}{30} + \frac{17}{30} + \frac{85}{30} = 0$$

$$\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times \left(-\frac{17}{15}\right) + (-1) \times \frac{17}{30} + (-1) \times \left(-\frac{17}{6}\right) = -\frac{68}{30} - \frac{17}{30} + \frac{85}{30} = 0$$

جـ- استنتاج أن المستويين (ADH) و (ABC) متعامدان :

لدينا $A \in [(ADH) \cap (ABC)]$ و $H \in [(ADH) \cap (ABC)]$ وبالتالي (ADH) و (ABC) متقاطعان وفق

المستقيم (AH) ولكون $(DH) \perp (ABC)$ فالمستويان (ADH) و (ABC) متعامدان .

• إيجاد تمثيل وسيطي للمستقيم (AH) :

$$\begin{cases} x = \frac{28}{15}t - 1 \\ y = -\frac{13}{30}t \\ z = -\frac{5}{6}t + 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{لدينا } \overrightarrow{AH} \left(\frac{28}{15}; -\frac{13}{30}; -\frac{5}{6} \right) \text{ ومنه تمثيل وسيطي للمستقيم } (AH) \text{ من الشكل :}$$

حل مقترح التمرين الثالث

(1) $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث :

أ- التحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$:

$$P(6) = 6^3 - 12 \times 6^2 + 48 \times 6 - 72 = 216 - 432 + 288 - 72 = 0$$

ب- تعيين العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z :

$$\begin{aligned} P(z) &= (z - 6)(z^2 + \alpha z + \beta) \\ &= z^3 + \alpha z^2 + \beta z - 6z^2 - 6\alpha z - 6\beta \\ &= z^3 + (\alpha - 6)z^2 + (\beta - 6\alpha)z - 6\beta \\ &= z^3 - 12z^2 + 48z - 72 \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد $\alpha = -6$ ، $\beta = 12$ ومنه $P(z) = (z - 6)(z^2 - 6z + 12)$

جـ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z) = 0$:

$$P(z) = 0 \text{ تكافئ } (z - 6)(z^2 - 6z + 12) = 0 \text{ معناه } z - 6 = 0 \text{ أو } z^2 - 6z + 12 = 0$$

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 6z + 12 = 0$

لدينا : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 12 = -12 = 12i^2 = (\sqrt{12}i)^2 = (2\sqrt{3}i)^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_2 = \frac{6 + 2\sqrt{3}i}{2} = 3 + i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{6 - 2\sqrt{3}i}{2} = 3 - i\sqrt{3}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $P(z) = 0$ هي : $S = \{6; 3 - i\sqrt{3}; 3 + i\sqrt{3}\}$

(2) أ- كتابة كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي:

لدينا : $z_A = 6$ ومنه $|z_A| = 6$ إذن $z_A = 6e^{i0}$.

لدينا : $z_B = 3 + i\sqrt{3}$ ومنه : $|z_B| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

$$\text{وبفرض } \theta_B \text{ عمدة للعدد المركب } z_B \text{ ، يكون : } \begin{cases} \cos \theta_B = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_B = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ ، ومنه } \arg(z_B) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ، حيث } k \in \mathbb{Z} .$$

إذن : $z_B = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

لدينا : $z_C = \overline{z_B}$ ومنه : $z_C = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

ب- كتابة العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسّي :

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{6 - (3 + i\sqrt{3})}{6 - (3 - i\sqrt{3})} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}} = \frac{(3 - i\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3})}{(3 + i\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3})} = \frac{6 - 6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{لدينا : } \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ومنه } \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \text{ إذن } \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

ج- إستنتاج طبيعة المثلث ABC :

$$\left\{ \begin{array}{l} BA = CA \\ \overline{(CA, BA)} = -\frac{\pi}{3} \end{array} \right. \text{ معناه } \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. \text{ يكافئ } \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ لدينا :}$$

وبالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع .

(3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ، نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

أ- الكتابة المركبة للتشابه S :

لدينا : $z' = az + b$ بحيث $a = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{3}$ و $b = (1 - a)z_C$ ، أي : $b = (1 - i\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3}) = -4i\sqrt{3}$

ومنه $z' = i\sqrt{3}z - 4i\sqrt{3}$ هي العبارة المركبة للتشابه S .

ب- تعيين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S :

$$z_{A'} = i\sqrt{3}z_A - 4i\sqrt{3} = 6i\sqrt{3} - 4i\sqrt{3} = 2i\sqrt{3}$$

ج- تبيان أن النقط A ، B و A' في إستقامية .

يكفي إثبات أن $\frac{z_A - z_{A'}}{z_A - z_B}$ حقيقي .

$$\text{لدينا : } \frac{z_A - z_{A'}}{z_A - z_B} = \frac{6 - 2i\sqrt{3}}{6 - (3 + i\sqrt{3})} = \frac{2(3 - i\sqrt{3})}{3 - i\sqrt{3}} = 2$$

(I) $g(x) = 1 - xe^x$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

(1) حساب النهايات : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - xe^x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - xe^x) = -\infty$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = -1 \times e^x + (-x)e^x = -(x+1)e^x$:
بما أن $e^x > 0$ فإن إشارة $g'(x)$ من إشارة $-(x+1)$ ، ومنه :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-

وبالتالي الدالة g متناقصة على المجال $[-1; +\infty[$ ومتزايدة على المجال $]-\infty; -1]$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	1	$1 + e^{-1}$	$-\infty$

(3) أ- تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ ، تقبل في حلا وحيدا α على المجال $]-1; +\infty[$:

الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-1; +\infty[$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1; +\infty[$.

ب- التحقق أن $0.5 < \alpha < 0.6$:

لدينا : $]-1; +\infty[\supset]0.5; 0.6[$ و $\begin{cases} g(0.5) \approx 0.18 \\ g(0.6) \approx -0.09 \end{cases}$ ومنه $0.5 < \alpha < 0.6$.

إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 2]$ كما يلي : $f(x) = (x-1)e^x - x - 1$:

(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x-1)e^x - x - 1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x - e^x - x - 1] = +\infty$

(2) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 2]$: $f'(x) = -g(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty; 2]$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 2]$:

$f'(x) = 1 \times e^x + (x-1)e^x - 1 = e^x + xe^x - e^x - 1 = xe^x - 1 = -(1 - xe^x) = -g(x)$

إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty; 2]$:

x	$-\infty$	α	2
$f'(x)$	-	0	+

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	2
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$e^2 - 3$

(3) تبين أن: $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$.

لدينا: $f(\alpha) = (\alpha - 1)e^\alpha - \alpha - 1$ ، ولدينا من جهة $g(\alpha) = 0$ يكافئ $1 - \alpha e^\alpha = 0$ يكافئ $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$.

ومنه $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$ أي $f(\alpha) = \frac{(\alpha - 1)}{\alpha} - \alpha - 1 = \frac{(\alpha - 1) - \alpha^2 - \alpha}{\alpha} = \frac{-\alpha^2 - 1}{\alpha}$

إيجاد حصر للعدد $f(\alpha)$:

$$\frac{1,25}{0,6} < \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} < \frac{1,36}{0,5} \text{ يكافئ } \begin{cases} \frac{1}{0,6} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{0,5} \\ 1,25 < \alpha^2 + 1 < 1,36 \end{cases} \text{ يكافئ } 0,5 < \alpha < 0,6$$

يكافئ $-\frac{1,36}{0,5} < -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right) < -\frac{1,25}{0,6}$ أي $-2,72 < f(\alpha) < -2,08$.

(4) أ- لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x - 1)e^x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - e^x) = 0$

ومنه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.
ب- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

لدينا: $f(x) - y = (x - 1)e^x$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $x - 1$ على المجال $]-\infty; 2]$.

x	$-\infty$	1	2
$f(x) - y$	-	0	+
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ) / (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1; -2)$ / (C_f) تحت (Δ)		

(5) أ- تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $-1.6 < x_1 < -1.5$ و $1.5 < x_2 < 1.6$.

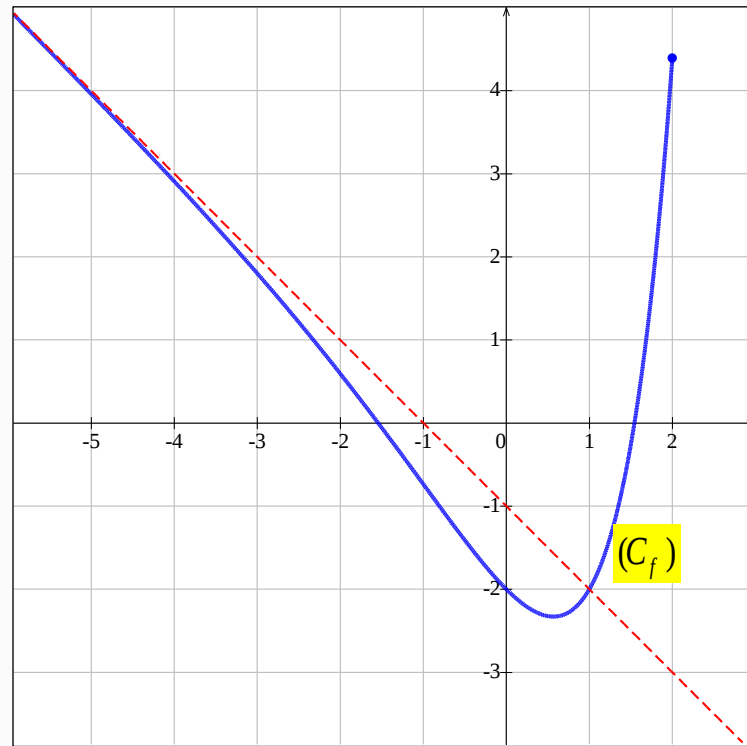
• الدالة f مستمرة ومتناقصة تماماً على المجال $]-\infty; \alpha]$ و $]-\infty; \alpha]$ و $]-1,6; -1,5[$ و $f(-1.5) \approx -0,05$ و $f(-1.6) \approx 0,07$

أي $f(-1,6) \times f(-1,5) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي x_1 حيث $-1.6 < x_1 < -1.5$ و يحقق $f(x_1) = 0$.

• الدالة f مستمرة ومتزايدة تماماً على المجال $[\alpha; 2]$ و $[\alpha; 2]$ و $1,5; 1,6[$ و $f(1.5) \approx -0,26$ و $f(1.6) \approx 0,37$

أي $f(1,5) \times f(1,6) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي x_2 حيث $1.5 < x_2 < 1.6$ و يحقق $f(x_2) = 0$.

ب- الرسم :



(6) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = (ax + b)e^x$.

أ- تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$.

الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x ، $h'(x) = ae^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$ ،

الدالة h أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ يعني : $h'(x) = xe^x$ ، ومنه بالمطابقة نجد : $a = 1$ و $b = -1$.

أي $h(x) = (x - 1)e^x$.

ب- إستنتاج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$:

لدينا : $g(x) = 1 - xe^x$ ومنه دالة أصلية للدالة g من الشكل : $G(x) = x - (x - 1)e^x$.

الموضوع الأول

التمرين الأول (4,5 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقط :

$$D(2; 0; -1) \text{ و } C(2; -1; 1), B(1; 0; -1), A(-1; 1; 3)$$

والمستوي (P) ذا المعادلة : $2y + z + 1 = 0$.

$$\text{ليكن } (\Delta) \text{ المستقيم الذي تمثيل وسيطي له : } \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + \beta \\ z = 1 - 2\beta \end{cases} \text{ حيث } \beta \text{ وسيط حقيقي.}$$

- (1) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC) ، ثم تحقق أن المستقيم (BC) محتوي في المستوي (P) .
- (2) بين أن المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي.
- (3) أ- أحسب المسافة بين النقط A والمستوي (P) .
ب- بين أن D نقطة من (P) ، وأن المثلث BCD قائم.
- (4) بين أن $ABCD$ رباعي وجوه، ثم أحسب حجمه.

التمرين الثاني (4 ن)

(I) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$.

(1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

(2) أحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$.

(II) المتتالية (u_n) معرفة بـ : $u_0 = 1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$

(1) برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 6$

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) أ- برهن أنه، من أجل كل عدد طبيعي n : $6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$.

ب- بين أنه، من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$. استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثالث (5 ن)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة (I) ذات المجهول z التالية :

$$(I) \quad z^2 - (4\cos\alpha)z + 4 = 0 \quad \text{حيث } \alpha \text{ وسيط حقيقي.}$$

(2) من أجل $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ، نرمز إلى حلي المعادلة (I) بـ z_1 و z_2 . بين أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$.

(3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B و C التي لواحقتها على الترتيب :

$$z_A = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_B = 1 - i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad z_C = 4 + i\sqrt{3}$$

أ- أنشئ النقط A ، B و C .

بـ. أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ، ثم استنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويطلب تعيين نسبته وزاويته .

جـ. عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1), (B;-1), (C;2)\}$ ، ثم أنشئ G .

دـ. أحسب z_D لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع .

التمرين الرابع (5,6 ن)

x	$f(x)$
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	-0,005
0,23	-0,026
0,24	-0,048
0,25	-0,070

(I) f الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ : $f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ، ثم استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C) .

(2) أحسب $f'(x)$. بين أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في $]-\infty; 1[$ حلا وحيدا α . باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصرًا للعدد α .

(4) أرسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C) ، ثم أرسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

(5) عين بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة .

(II) g الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ : $g(x) = f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

(1) أدرس تغيرات الدالة g على $]-\infty; 1[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) أـ. تحقق أن $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$ ، ثم بين أن : $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$.

بـ. استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

جـ. تحقق من أن : $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T) .

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4,5 ن)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية : $(E) \quad z^2 + 4z + 13 = 0$

(1) تحقق أن العدد المركب $-2 - 3i$ حل للمعادلة (E) ، ثم جد الحل الآخر .

(2) A و B نقطتان من المستوي المركب لاحقاتهما $z_A = -2 - 3i$ و $z_B = i$ على الترتيب .

S التشابه المباشر الذي مركزه A ، نسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ والذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

أـ. بين أن : $z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$.

بـ. أحسب z_C لاحقة النقطة C ، علما أن C هي صورة B بالتشابه S .

(3) لتكن النقطة D حيث : $2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.

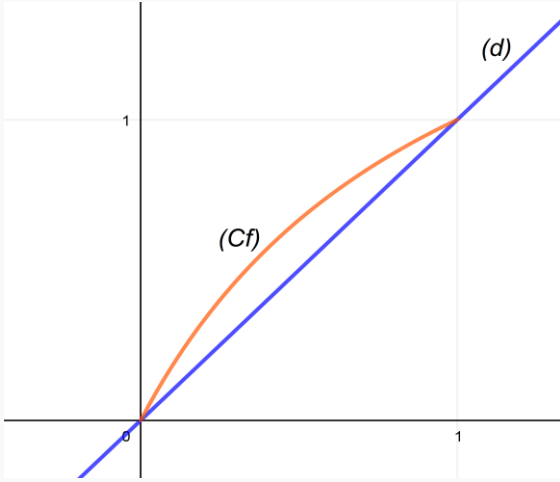
أـ. بين أن D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما .

بـ. أحسب z_D لاحقة النقطة D .

جـ- بين أن $\frac{Z_D - Z_A}{Z_C - Z_A} = i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD .

التمرين الثاني (4ن)

في الشكل المقابل، (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ ،



و (d) المستقيم ذو المعادلة: $y = x$

(1) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول، $u_0 = \frac{1}{2}$

ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- أعد رسم هذا الشكل في ورقة الإجابة، ثم مثل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على محور الفواصل دون حسابها، مبرزاً خطوط التمثيل.

ب- ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(2) أ- أثبت أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0;1]$

ب- برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$

جـ- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$.

أ- برهن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب حساب حدّها الأول v_0 .

بـ- أحسب نهاية (u_n) .

التمرين الثالث (4,5ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاط: $A(2;1;-1)$ ، $B(1;-1;3)$ ، $C(-\frac{3}{2};-2;1)$ ،

و $D(\frac{7}{2};-3;0)$. ولتكن I منتصف القطعة $[AB]$.

(1) أ- أحسب إحداثيات النقطة I .

بـ- بين أن: $2x + 4y - 8z + 5 = 0$ معادلة ديكارتية لـ (P) ، المستوى المحوري لـ $[AB]$.

(2) أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة C و $\vec{u}(1;2;-4)$ شعاع توجيه له .

(3) أ- جد إحداثيات E نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ) .

بـ- بين أن (Δ) و (AB) من نفس المستوي ، ثم استنتج أن المثلث IEC قائم .

(4) أ- بين أن المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) والمستقيم (IE) .

بـ- أحسب حجم رباعي الوجوه $DIEC$.

التمرين الرابع (7ن)

(I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$.

(1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها .

(2) إستنتج أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

$$(II) \quad f \text{ الدالة المعرفة على المجال }]-1; +\infty[\text{ بـ: } f(x) = x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}.$$

- و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)
- 1 أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$. فسر النتيجة بيانياً.
بـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$(2) \quad \text{أـ بين أنه من أجل كل } x \text{ من }]-1; +\infty[, \quad f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2},$$

- بـ أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
- جـ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبلاً حلاً وحيداً α في المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم تحقق أن $0 < \alpha < 0,5$.
- (3) أـ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.
بـ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .
- (4) نقبل أن المستقيم (T) ذا المعادلة $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .
أـ أحسب x_0 .

- بـ أرسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثم المنحنى (C_f) .
- جـ عيّن بيانياً قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين متميزين.

تصحيح مقترح للموضوع الأول

حل مقترح التمرين الأول

A, B, C و D النقط من الفضاء بحيث: $A(-1; 1; 3)$ ، $B(1; 0; -1)$ ، $C(2; -1; 1)$ و $D(2; 0; -1)$.

- و المستوى (P) ذا المعادلة: $2y + z + 1 = 0$ ، و (Δ) المستقيم الذي تمثيل وسيطي له: $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + \beta \\ z = 1 - 2\beta \end{cases}$ حيث β وسيط حقيقي.
- (1) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (BC) :

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \\ z = 2t - 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{لدينا } \overline{BC}(1; -1; 2) \text{ ومنه تمثيل وسيطي للمستقيم } (BC) \text{ من الشكل:}$$

• التحقق أن المستقيم (BC) محتوئ في المستوى (P) :

$$(BC) \subset (P) \text{ لأن } 2(-t) + (2t - 1) + 1 = 0. \text{ (أو يمكن إثبات أن: } B \in (P) \text{ و } C \in (P))$$

(2) تبين أن المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوى:

لنثبت أن المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا متوازيين وليسا متقاطعين.

لندرس التوازي:

لدينا $\overline{BC}(1; -1; 2)$ شعاع توجيه للمستقيم (BC) و $\vec{u}(0; 1; -2)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) ومنه $\overline{BC}$ و $\vec{u}$ ليسا

مرتبطين خطياً لأن $\frac{0}{1} \neq \frac{-1}{1}$ وبالتالي المستقيمان (Δ) و (BC) ليسا متوازيين.

لندرس التقاطع : معناه $\begin{cases} -1 = t + 1 \\ 2 + \beta = -t \\ 1 - 2\beta = 2t - 1 \end{cases}$ ، الجملة لا تقبل حل وبالتالي المستقيمان (Δ) و (BC) ليسا متقاطعين .

(3) أ. حساب المسافة بين النقطة A والمستوي (P) :

$$d(A, (P)) = \frac{|2y_A + z_A + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|2 + 3 + 1|}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

ب. تبين أن D نقطة من (P) :

$$\text{لدينا } D \in (P) \text{ ومنه } 2y_D + z_D + 1 = 2 \times 0 - 1 + 1 = 0$$

تبين أن المثلث BCD قائم :

$$\text{لدينا : } \overrightarrow{DC} (0; -1; 2) , \overrightarrow{BD} (1; 0; 0) , \overrightarrow{BC} (1; -1; 2) \text{ ومنه } \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \times 1 + (-1) \times 0 + 2 \times 0 = 0$$

$$\text{ولدينا : } DC^2 + DB^2 = 1 + 5 = 6 = BC^2 \text{ ومنه حسب عكس نظرية فيثاغورث المثلث } BCD \text{ قائم في } D$$

$$\text{(طريقة أخرى : } \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC} = 1 \times 0 + (-1) \times 0 + 2 \times 0 = 0 \text{ ومنه المثلث } BCD \text{ قائم في } D)$$

(4) تبين أن $ABCD$ رباعي وجوه :

$$\text{لدينا : } \begin{cases} (BC) \subset (P) \\ D \in (P) \end{cases} \text{ و } A \notin (P) \text{ لأن } d(A, (P)) \neq 0 \text{ و } BCD \text{ مثلث ومنه } ABCD \text{ رباعي وجوه .}$$

حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{BCD} \times h \text{ مع } h = d(A, (P)) \text{ ومنه : } V_{ABCD} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} DB \times DC \right) \times h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{5} \times \frac{6}{\sqrt{5}} = 1$$

حل مقترح التمرين الثاني

$$(I) \text{ المتتالية } (v_n) \text{ معرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ : } v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$$

(1) تبين أن (v_n) متتالية هندسية :

$$v_{n+1} = \frac{5^{n+2}}{6^{n+1}} = \frac{5 \times 5^{n+1}}{6 \times 6^n} = \frac{5}{6} \times \frac{5^{n+1}}{6^n} = \frac{5}{6} v_n , n \text{ من أجل كل عدد طبيعي}$$

$$\text{ومن المتتالية هندسية أساسها } q = \frac{5}{6} \text{ وحدها الأول } 5 \text{ ومنه } v_0 = \frac{5^{0+1}}{6^0} = 5$$

(2) حساب $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[5 \times \left(\frac{5}{6} \right)^n \right] = 0 \text{ لأن } 0 < q < 1$$

$$(II) \text{ المتتالية } (u_n) \text{ معرفة بـ : } u_0 = 1 , \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$$

$$(1) \text{ البرهان بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي } n , 1 \leq u_n \leq 6$$

$$\text{نسمي } P(n) \text{ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي } n , 1 \leq u_n \leq 6 \text{ "}$$

• نتحقق من صحة $P(0)$.

$$\text{من أجل } n = 0 , \text{ لدينا } u_0 = 1 \text{ ومنه } 1 \leq u_0 \leq 6 \text{ وبالتالي } P(0) \text{ صحيحة .}$$

$$\text{• نفرض صحة } P(n) \text{ من أجل عدد طبيعي } n \text{ أي : } 1 \leq u_n \leq 6 , \text{ ونبرهن صحة } P(n+1) \text{ أي } 1 \leq u_{n+1} \leq 6$$

$$\text{لدينا حسب الفرض } 1 \leq u_n \leq 6 \text{ ومنه } 5 \leq 5u_n \leq 30 \text{ ومنه } 11 \leq 5u_n + 6 \leq 36 \text{ ومنه } \sqrt{11} \leq \sqrt{5u_n + 6} \leq \sqrt{36}$$

$$\text{أي } 1 \leq \sqrt{11} \leq u_{n+1} \leq 6 \text{ وبالتالي } P(n+1) \text{ صحيحة .}$$

$$\text{• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي } n , 1 \leq u_n \leq 6$$

(2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{5u_n + 6} - u_n = \frac{(\sqrt{5u_n + 6} - u_n)(\sqrt{5u_n + 6} + u_n)}{\sqrt{5u_n + 6} + u_n} = \frac{5u_n + 6 - u_n^2}{\sqrt{5u_n + 6} + u_n}$$

من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(6 - u_n)(1 + u_n)}{\sqrt{5u_n + 6} + u_n}$$

ومنه

بما أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $6 - u_n > 0$ و $1 + u_n > 0$ فإن $u_{n+1} - u_n > 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة.

(3) أ- برهان أنه، من أجل كل عدد طبيعي n : $6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$.

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n :

$$6 - u_{n+1} = 6 - \sqrt{5u_n + 6} = \frac{(6 - \sqrt{5u_n + 6})(6 + \sqrt{5u_n + 6})}{6 + \sqrt{5u_n + 6}} = \frac{36 - 5u_n}{6 + \sqrt{5u_n + 6}} = \frac{5(6 - u_n)}{6 + \sqrt{5u_n + 6}}$$

$$6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n) \text{ ومنه } \frac{1}{6 + \sqrt{5u_n + 6}} \leq \frac{1}{6}$$

ومن جهة أخرى: $1 \leq u_n \leq 6$ يكافئ

ب- تبين أنه، من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$ ".

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = 1$ و $v_0 = 5$ منه $0 \leq 6 - u_0 \leq v_0$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$ ، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0 \leq 6 - u_{n+1} \leq v_{n+1}$.

$$0 \leq 6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}v_n \text{ ولدينا } 0 \leq 6 - u_n \leq v_n$$

ومن هنا $0 \leq 6 - u_{n+1} \leq v_{n+1}$ وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

• الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$.

(يمكن استخدام طريقة أخرى غير البرهان بالتراجع)

- استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$ ولدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} (6 - u_n) = 0$ أي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$.

حل مقترح التمرين الثالث

(1) حل في $\mathbb{C}$ ، المعادلة (I) ذات المجهول z التالية: $z^2 - (4\cos\alpha)z + 4 = 0$ (I) حيث α وسيط حقيقي.

$$\Delta = (-4\cos\alpha)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 16\cos^2\alpha - 16 = 16(\cos^2\alpha - 1) = -16\sin^2\alpha = (4i\sin\alpha)^2$$

ومن هنا للمعادلة حلين مركبين هما:

$$z_1 = \frac{4\cos\alpha + 4i\sin\alpha}{2} = 2(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 2e^{i\alpha}$$

$$z_2 = \frac{4\cos\alpha - 4i\sin\alpha}{2} = 2(\cos\alpha - i\sin\alpha) = 2e^{-i\alpha}$$

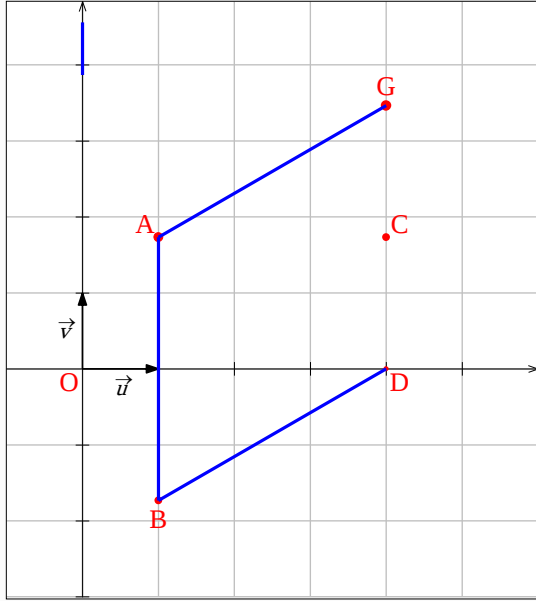
$$(2) \text{ من أجل } \alpha = \frac{\pi}{3}, \text{ نجد: } z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3} \text{ و } z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 1 - i\sqrt{3}$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1 \text{ تبين أن:}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ لدينا}$$

$$\cdot \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{2013} = e^{i\frac{4026\pi}{3}} = e^{i(1342\pi)} = e^{i(0+671 \times 2\pi)} = e^0 = 1 \text{ ومنه}$$

(3) أ. تعليم النقط A ، B و C .



ب. كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4 + i\sqrt{3} - (1 + i\sqrt{3})}{1 - i\sqrt{3} - (1 + i\sqrt{3})} = \frac{3}{-2i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

إستنتاج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A مع تعيين نسبته وزاوية له .

لدينا $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ومنه $z_C - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2}i(z_B - z_A)$ إذن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A

$$\text{ونسبته } \left|\frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ وزاوية له } \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{2}$$

ج. تعيين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1), (B;-1), (C;2)\}$:

$$z_G = \frac{z_A - z_B + 2z_C}{2} = \frac{1 + i\sqrt{3} - (1 - i\sqrt{3}) + 2(4 + i\sqrt{3})}{2} = 4 + 2i\sqrt{3}$$

د. تعيين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي ABDG متوازي أضلاع :

$$\cdot z_D = z_B - z_A + z_G = 4 \text{ وبالتالي } z_B - z_A = z_D - z_G \text{ معناه } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GD} \text{ متوازي أضلاع معناه } ABDG$$

حل مقترح التمرين الرابع

$$(I) \text{ الدالة المعرفة على }]-\infty; 1[\text{ ب : } f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$$

(1) حساب النهايات :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x-1}\right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{\frac{1}{x-1}}\right) = 1 \end{cases} \text{ لأن : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}\right] = 2$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب أفقي للمنحنى (C).

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x}{x-1} \right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(e^{\frac{1}{x-1}} \right) = 0 \end{cases} \quad : \text{لأن ، } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}} \right] = -\infty$$

التفسير الهندسي: المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي للمنحنى (C) .

(2) حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $] -\infty; 1[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $] -\infty; 1[$:

$$f'(x) = \frac{1 \times (x-1) - 1 \times x}{(x-1)^2} + \left(\frac{-1}{(x-1)^2} \right) e^{\frac{1}{x-1}} = \frac{-1}{(x-1)^2} \times \left(1 + e^{\frac{1}{x-1}} \right)$$

بما أن $f'(x) < 0$ من أجل كل $x \in] -\infty; 1[$ ، فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $] -\infty; 1[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	1
$f'(x)$		-
$f(x)$	$-\infty$	2

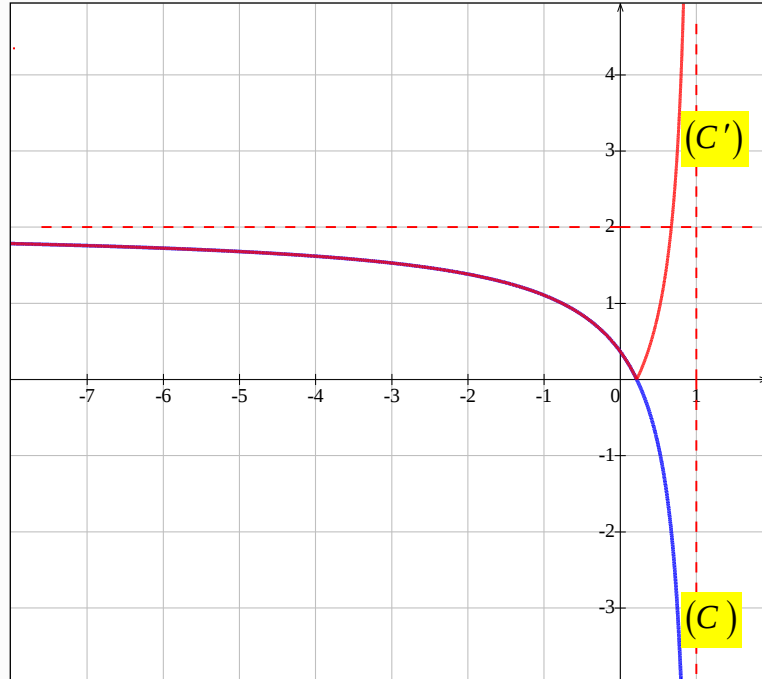
(3) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $] -\infty; 1[$ حلا وحيدا α .

الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $] -\infty; 1[$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $] -\infty; 1[$ حلا وحيدا α .

حسب جدول القيم: $0,21 < \alpha < 0,22$.

(4) الرسم:



(5) تعيين مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة.

حلول المعادلة $|f(x)| = m$ بيانها هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C') مع المستقيم ذي المعادلة $y = m$.

من أجل $\left[\frac{1}{e}; 2 \right]$ $m \in$ المعادلة $|f(x)| = m$ تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

(II) الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ: $g(x) = f(2x - 1)$.

(1) دراسة تغيرات الدالة g :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(2x - 1) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(2x - 1) = 2$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty; 1[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 1[$: $g'(x) = 2f'(2x - 1)$.
بما أنه من أجل كل $x \in]-\infty; 1[$ ، $(2x - 1) \in]-\infty; 1[$ فإن $f'(2x - 1) < 0$ ، وبالتالي الدالة g متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 1[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	1
$g'(x)$		-
$g(x)$	2	$-\infty$

(2) أ- التحقق أن $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$:

$$\text{لدينا : } g(x) = f(2x - 1) \text{ ومنه } g(x) = f\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) - 1\right) = f(\alpha) = 0$$

$$\text{تبيان أن : } g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$$

$$\text{لدينا : } g'(x) = 2f'(2x - 1) \text{ ومنه } g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) - 1\right) = 2f'(\alpha)$$

ب- إستنتاج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

$$\text{لدينا : } (T): y = g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(x - \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right) + g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \text{ ومنه } (T): y = 2f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right)$$

$$\text{ج- التحقق من أن : } y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3} \text{ ، معادلة للمستقيم } (T) .$$

$$\text{لدينا : } f'(\alpha) = \frac{-1}{(\alpha-1)^2} \times \left(1 + e^{\frac{1}{\alpha-1}}\right) \text{ ، لكن } f(\alpha) = 0 \text{ وهذا يعني } e^{\frac{1}{\alpha-1}} = -\frac{\alpha}{\alpha-1} \text{ ومنه } f'(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)^3}$$

$$\text{إذن : } (T): y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3} \text{ أي } (T): y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right)$$

حل مقترح التمرين الأول

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية : (E) $z^2 + 4z + 13 = 0$

(1) التحقق أن العدد المركب $-2 - 3i$ حل للمعادلة (E) :

$$(-2 - 3i)^2 + 4(-2 - 3i) + 13 = 4 - 9 + 12i - 8 - 12i + 13 = 0$$

بما أن $-2 - 3i$ حل للمعادلة (E) فإن $\overline{-2 - 3i} = -2 + 3i$ كذلك حل للمعادلة (E) .

((E) معادلة في $\mathbb{C}$ بمعاملات حقيقية)

(2) A و B نقطتان من المستوي المركب لاحتقتهما $z_A = -2 - 3i$ و $z_B = i$ على الترتيب .

S التشابه المباشر الذي مركزه A ، نسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ والذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

$$z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$$

العبارة المركبة للتشابه S : $z' - z_A = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_A)$ أي $z' = \frac{1}{2}iz + \frac{1}{2}iz_A + z_A$ و منه $z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$.

بـ حساب z_C لاحقة النقطة C هي صورة B بالتشابه S :

$$z_C = \frac{1}{2}iz_B - \frac{7}{2} - 2i = \frac{1}{2}i(i) - \frac{7}{2} - 2i = -\frac{1}{2} - \frac{7}{2} - 2i = -4 - 2i$$

(3) لتكن النقطة D حيث : $2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O}$.

أـ تبين أن مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما :

لدينا $2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O}$ ومنه $2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{O}$ أي $3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{O}$ إذن D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين -3 و 1 على الترتيب .

بـ حساب z_D لاحقة النقطة D .

$$z_D = \frac{-3z_A + z_B}{-2} = \frac{-3(-2 - 3i) + i}{-2} = \frac{6 + 9i + i}{-2} = -3 - 5i$$

$$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i \quad \text{جـ- تبين أن :}$$

$$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-3 - 5i - (-2 - 3i)}{-4 - 2i - (-2 - 3i)} = \frac{-1 - 2i}{-2 + i} = \frac{i(i - 2)}{-2 + i} = i$$

طبيعة المثلث ACD :

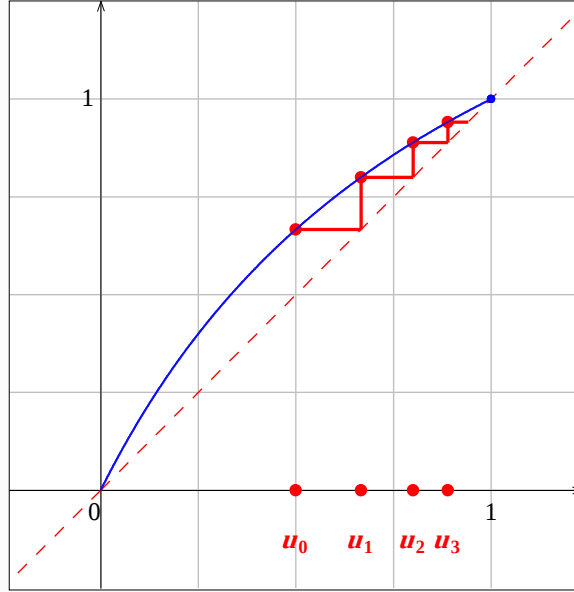
$$\left\{ \begin{array}{l} AD = AC \\ \arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \quad \text{معناه} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \quad \text{يكافئ} \quad \frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$$

ومن المثلث ACD قائم في A ومتساوي الساقين .

f الدالة المعرفة على المجال $[0;1]$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

(1) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول، $u_0 = \frac{1}{2}$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- الرسم :



ب- التخمين :

المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة نحو العدد 1.

(2) أ- إثبات أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0;1]$:

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \text{ و } [0;1] \text{ على المجال}$$

لدينا : من أجل كل $x \in [0;1]$ ، $f'(x) > 0$ ، وبالتالي الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0;1]$.

ب- البرهان بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$ "

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = \frac{1}{2}$ ومنه $0 < u_0 < 1$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $0 < u_n < 1$ ، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0 < u_{n+1} < 1$.

لدينا حسب الفرض $0 < u_n < 1$ وبما أن الدالة f متزايدة تماماً فإن $f(0) < f(u_n) < f(1)$ أي $0 < u_{n+1} < 1$

وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$.

ج- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{u_n + 1} - u_n = \frac{2u_n - u_n(u_n + 1)}{u_n + 1} = \frac{-u_n^2 + u_n}{u_n + 1} = \frac{u_n(1 - u_n)}{u_n + 1}$$

وبما أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$ و $1 - u_n > 0$ فإن $u_{n+1} - u_n > 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة .

(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$

أ- إثبات (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}} = \frac{\frac{2u_n}{u_n+1}-1}{\frac{2u_n}{u_n+1}} = \frac{2u_n-(u_n+1)}{u_n+1} = \frac{u_n-1}{2u_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_n-1}{u_n} \right) = \frac{1}{2} v_n$$

$$. v_0 = \frac{u_0-1}{u_0} = -1 \text{ وحدها الأول } q = \frac{1}{2} \text{ هندسية أساسها } (v_n) \text{ المتتالية}$$

ب- حساب نهاية (u_n) :

$$. u_n = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} \text{ أي } u_n = \frac{1}{1-v_n} \text{ ومنه } v_n = 1 - \frac{1}{u_n} \text{ ومنه } v_n = \frac{u_n-1}{u_n}, n \text{ لدينا من أجل كل عدد طبيعي}$$

$$. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 : \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} \right] = 1 : \text{ إذن}$$

حل مقترح التمرين الثالث

$$D \left(\frac{7}{2}; -3; 0 \right) \text{ و } C \left(-\frac{3}{2}; -2; 1 \right), B(1; -1; 3), A(2; 1; -1) : \text{النقط من الفضاء بحيث}$$

(1) أ- حساب إحداثيات النقطة I منتصف القطعة $[AB]$.

$$. I \left(\frac{3}{2}; 0; 1 \right) \text{ أي } I \left(\frac{2+1}{2}; \frac{1-1}{2}; \frac{-1+3}{2} \right) \text{ ومنه } I \left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2} \right)$$

ب- تبيان أن : $2x + 4y - 8z + 5 = 0$ معادلة ديكارتية لـ (P) ، المستوي المحوري لـ $[AB]$:

يكفي إثبات أن : $I \in (P)$ و $\overrightarrow{AB}$ ناظمي لـ (P) .

$$. I \in (P) \text{ لدينا : } 2x_I + 4y_I - 8z_I + 5 = 2 \times \frac{3}{2} + 4 \times 0 - 8 \times 1 + 5 = 0 : \text{ ومنه } I \in (P)$$

$$\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2} \vec{n} \text{ ومنه } \overrightarrow{AB}(-1; -2; 4) \text{ ولدينا } (P) \text{ شعاع ناظمي للمستوي}$$

إذن $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي لـ (P) .

(2) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة C و $\vec{u}(1; 2; -4)$ شعاع توجيه له :

$$. \begin{cases} x = t - \frac{3}{2} \\ y = 2t - 2 \\ z = -4t + 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{تمثيل وسيطي للمستقيم } (\Delta) \text{ من الشكل :}$$

(3) أ- إيجاد إحداثيات E نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ) :

$$. t = \frac{1}{3} \text{ أي } 2 \left(t - \frac{3}{2} \right) + 4(2t - 2) - 8(-4t + 1) + 5 = 0 \text{ وهذا يكافئ } \begin{cases} x = t - \frac{3}{2} \\ y = 2t - 2 \\ z = -4t + 1 \\ 2x + 4y - 8z + 5 = 0 \end{cases} \text{ نحل الجملة}$$

وبتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد $\left(-\frac{7}{6}; -\frac{4}{3}; -\frac{1}{3} \right)$ وهي إحداثيات النقطة E .

بـ- تبيان أن (Δ) و (AB) من نفس المستوي :

لدينا $\overrightarrow{AB}(-1; -2; 4)$ و $\vec{u}(1; 2; -4)$ منه $\overrightarrow{AB} = -\vec{u}$ أي (Δ) و (AB) متوازيان وبالتالي هما من نفس المستوي .

• استنتاج أن المثلث IEC قائم :

$$\left\{ \begin{array}{l} (EC) \perp (P) \\ E \in (P) \end{array} \right\} \text{ وبالتالي } \left\{ \begin{array}{l} (AB) \perp (P) \\ (AB) \parallel (\Delta) \end{array} \right\} . (\Delta) \text{ على } I \text{ هي المسقط العمودي لـ } I \text{ على } (\Delta)$$

(يمكن إستخدام نظرية فيثاغورث)

4) أ- تبيان أن المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) و المستقيم (IE) .

$$\text{لدينا : } \overrightarrow{ID}(2; -3; -1) , \overrightarrow{AB}(-1; -2; 4) , \overrightarrow{IE}\left(-\frac{8}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)$$

$$\cdot \left\{ \begin{array}{l} (AB) \perp (ID) \\ (IE) \perp (ID) \end{array} \right\} \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ID} = -1 \times 2 + (-2) \times (-3) + 4 \times (-1) = 0 \\ \overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{ID} = \left(-\frac{8}{3}\right) \times 2 + \left(-\frac{4}{3}\right) \times (-3) + \left(-\frac{4}{3}\right) \times (-1) = 0 \end{array} \right.$$

بـ- حساب حجم رباعي الوجوه $DIEC$:

$$ID = \sqrt{14} \text{ و } IE = \frac{4\sqrt{6}}{3} , EC = \frac{\sqrt{21}}{3} , S_{IEC} = \frac{1}{2} IE \times EC : \text{لأن } V_{DIEC} = \frac{1}{3} S \times h = \frac{1}{3} S_{IEC} \times ID = \frac{89}{4} u.v$$

حل مقترح التمرين الرابع

(I) $g(x)$ الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$.

1) دراسة تغيرات الدالة g :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+1) = -\infty : \text{لأن } \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)] = +\infty$$

$$\cdot \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 4}{x+1} \right) = +\infty \end{array} \right. : \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left[\frac{x^2 + 2x + 4}{x+1} - 2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = +\infty$$

$$\cdot \text{الدالة } g \text{ قابلة للإشتقاق على المجال }]-1; +\infty[\text{ و } g'(x) = 2x + 2 - \frac{2}{x+1} = \frac{2x(x+2)}{x+1}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة x ، لأنه من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$ فإن $x+1 > 0$ و $x+2 > 0$.

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	

الدالة g متناقصة على المجال $]-1; 0[$ و متزايدة على المجال $[0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	$+\infty$	4	$+\infty$

(2) من جدول التغيرات : من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$ ، $g(x) \geq 4$ ، وبالتالي نستنتج أنه من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

(II) الدالة المعرّفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$.

(1) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{x+1} \right) [x(x+1) - 1 + 2\ln(x+1)] = -\infty$ أـ

التفسير البياني: المستقيم ذا المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

بـ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$ لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{1}{x+1} + 2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = +\infty$

(2) أـ تبين أنه من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ،

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$ ، ومن أجل كل $x \in]-1; +\infty[$:

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{-2}{x+1}(x+1) - 1 \times (1 - 2\ln(x+1))}{(x+1)^2} = 1 - \frac{-3 + 2\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 + 3 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

بـ دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$:

لدينا: من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$ ، $g(x) > 0$ ، وبالتالي $f'(x) > 0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

جـ تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1; +\infty[$:

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$ و $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]-1; +\infty[$ حلا وحيدا α .

التحقق أن $0 < \alpha < 0,5$.

لدينا: $]-1; +\infty[\subset]0; 0,5[$ و $f(0) = -1$ أي $f(0) \times f(0,5) < 0$ ومنه $0 < \alpha < 0,5$.

(3) أـ لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x+1} + 2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = 0$

للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

لدينا: $f(x) - x = \frac{-1 + 2\ln(x+1)}{x+1}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $-1 + 2\ln(x+1)$.

x	-1	$-1 + \sqrt{e}$	$+\infty$
$f(x) - y$		-	0 +
الوضع النسبي		(C_f) يقطع (Δ) في $A(-1 + \sqrt{e}; -1 + \sqrt{e})$	(C_f) فوق (Δ)

(4) المستقيم (T) ذا المعادلة $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

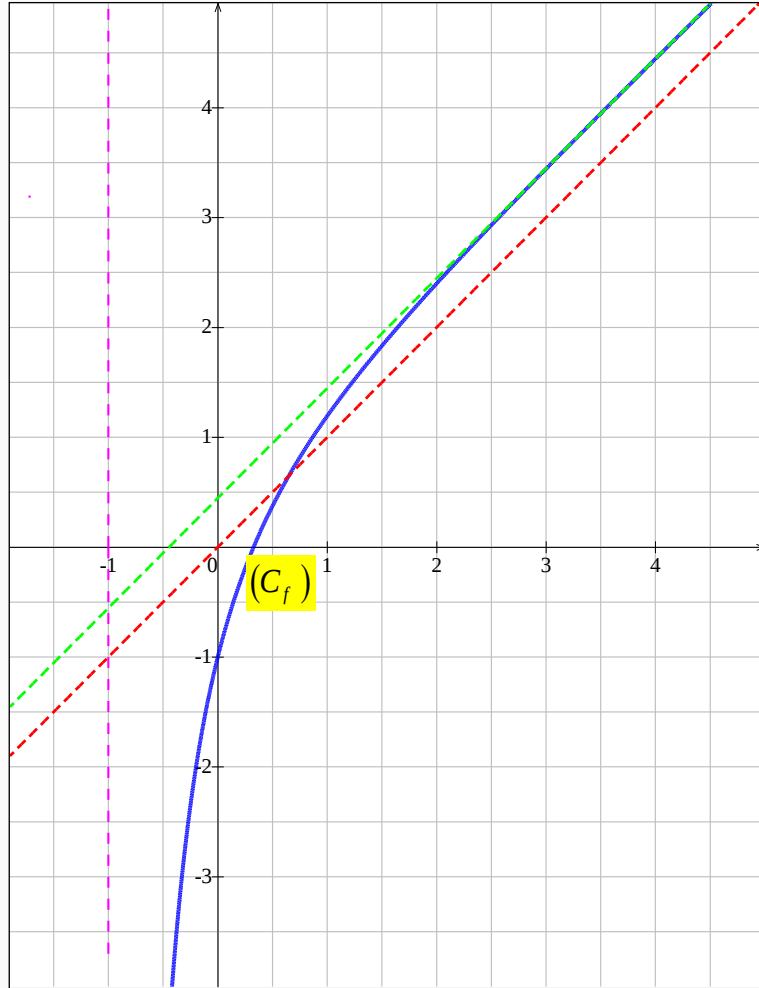
أ- حساب x_0 :

لدينا:

$$f'(x_0) = 1 \text{ تكافئ } \frac{g(x_0)}{(x_0+1)^2} = 1 \text{ تكافئ } g(x_0) = (x_0+1)^2 \text{ تكافئ } 2\ln(x_0+1) = 3 \text{ تكافئ}$$

$$x_0 = -1 + \sqrt{e^3}$$

ب- الرسم:



ج- بياناً، حلول المعادلة $f(x) = x + m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = x + m$.

إذن: تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين متميزين إذا وفقط إذا كان $0 < m < \frac{2}{\sqrt{e^3}}$.

الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$ ،

و (v_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n + 4$ ،

(1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

(2) أكتب كلا من u_n و v_n بدلالة n .

(3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.

(4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(5) لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $w_n = 5 \left(\frac{1}{v_n + 5} - 1 \right)$.

أبين أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

بـ أحسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - w_n)$.

التمرين الثاني (5ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقط: $A(2; -1; 1)$ ، $B(-1; 2; 1)$ ، $C(1; -1; 2)$ و $D(1; 1; 1)$.

(1) أتحقق أن النقط A ، B و C تعين مستويا .

بـ بين أن $\vec{n}(1; 1; 1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

جـ أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

(2) لتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 1), (B; 2), (C; -1)\}$.

أـ أحسب إحداثيات G .

بـ لتكن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}\| = 2\|\vec{MD}\|$.

بين أن (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$.

جـ أثبت أن معادلة (Γ) هي: $6x - 4y + 2z + 3 = 0$.

(3) بين أن المستويين (ABC) و (Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له .

التمرين الثالث (5ن)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

لتكن النقط A ، B ، C و D لواحها على الترتيب:

$$z_D = \frac{z_C}{2} \text{ و } z_C = 6\sqrt{2} \text{ ، } z_B = \overline{z_A} \text{ ، } z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$$

أـ أكتب z_A ، z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسّي.

بـ أحسب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}} \right)^{2014}$

جـ- بين أن النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D ، يطلب تعيين نصف قطرها .

د- أحسب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ ثم جد قياسا للزاوية $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. ماهي طبيعة الرباعي $OACB$ ؟

(3) ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

أ- أكتب العبارة المركبة للدوران R .

ب- عين لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R ثم تحقق أن النقط A ، C و C' في إستقامة .

جـ- عين لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R ثم حدد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R .

التمرين الرابع (6ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = 1 + \frac{2 \ln x}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، فسر النتيجةين هندسيا .

ب- أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) أ- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = 1$.

ب- أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 .

جـ- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0; 1[$ حلا وحيدا α ، حيث $e^{-0.4} < \alpha < e^{-0.3}$.

(3) أنشئ (T) و (C_f) .

(4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ كما يلي : $h(x) = 1 + \frac{2 \ln |x|}{|x|}$

وليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق .

أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ، $h(x) - h(-x) = 0$. ماذا تستنتج ؟

ب- أنشئ المنحنى (C_h) إعتقادا على المنحنى (C_f) .

جـ- ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة : $\ln x^2 = (m-1)|x|$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4ن)

(I) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحددها العام : $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$ (e هو أساس اللوغاريتم النيبيري)

(1) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

(2) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج ؟

(3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(II) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \ln(u_n)$ ($\ln$ يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري) .

(1) عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج نوع المتتالية (v_n) .

(2) أ- أحسب بدلالة n العدد P_n حيث : $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n)$

ب- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث : $P_n + 4n > 0$.

التمرين الثاني (5ن)

- الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقط: $A(1; -1; -2)$ ، $B(1; -2; -3)$ و $C(2; 0; 0)$.
- أ- برهن أن A ، B و C ليست في استقامية.
ب- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (ABC) .
ج- تحقق أن $x + y - z - 2 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
 - نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرفين بمعادلتيهما كما يلي: $(P): x - y - 2z + 5 = 0$ و $(Q): 3x + 2y - z + 10 = 0$.
برهن أن (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) ذي التمثيل الوسيط: $(t \in \mathbb{R})$:

$$\begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t \\ z = t + 1 \end{cases}$$
 - عين تقاطع المستويات (ABC) ، (P) و (Q) .
 - لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء. نسمي $d(M, (P))$ المسافة بين M و (P) و $d(M, (Q))$ المسافة بين M و (Q) .
عين المجموعة (Γ) للنقط M بحيث: $\sqrt{6} \times d(M, (P)) = \sqrt{14} \times d(M, (Q))$.

التمرين الثالث (5ن)

- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z - i)(z^2 - 2z + 5) = 0$
- في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (وحدة الطول 1cm)
تعطى النقط A ، B و C لواحقتها على الترتيب: $z_A = i$ ، $z_B = 1 + 2i$ ، $z_C = 1 - 2i$.
أ- أنشئ النقط A ، B و C .
ب- جد z_H لاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) .
ج- أحسب مساحة المثلث ABC .
- ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.
أ- عين الكتابة المركبة للتشابه S .
ب- بين أن مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2} \text{cm}^2$.
- M نقطة لاحقتها z ، عين مجموعة النقط M حيث: $|z| = |iz + 1 + 2i|$.

التمرين الرابع (7ن)

- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$.
(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
ب- أدرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.
(2) أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,7 < \alpha < 0,8$.
ب- استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.
- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$.
وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
(2) أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

بـ استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له .

جـ أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ) .

$$(3) \text{ أ- بين أنه من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} : f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$$

بـ استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f . (نأخذ $f(\alpha) \approx -0,1$)

(4) أحسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$.

(5) أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

$$(6) \text{ لتكن } h \text{ الدالة المعرفة على } \mathbb{R} \text{ كما يلي : } h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ- تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) - 2$.

بـ استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه ، ثم أنشئ (C_h)

تصحيح مقترح للموضوع الأول

حل مقترح التمرين الأول

$$(u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة كما يلي : } u_0 = 1 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$$

$$\text{و } (v_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي } n, v_n = u_n + 4$$

(1) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 4 = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3} + 4 = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3} + \frac{12}{3} = \frac{2}{3}u_n + \frac{8}{3} = \frac{2}{3}(u_n + 4) = \frac{2}{3}v_n$$

$$\text{ومنه المتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } q = \frac{2}{3} \text{ وحدها الأول } v_0 = u_0 + 4 = 5$$

(2) كتابة v_n بدلالة n :

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n, v_n = v_0 \times q^n \text{ ومنه } v_n = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

• كتابة v_n بدلالة n :

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n, u_n = v_n - 4 \text{ ومنه } u_n = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 4$$

(3) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} - u_n = \left[5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 4\right] - \left[5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 4\right] = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{2}{3} - 1\right) = -\frac{5}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

وبما أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n < 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

(4) حساب المجموع S_n حيث :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) - (4 + 4 + \dots + 4) \\ &= v_0 \left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right] - 4(n+1) = 15 \times \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} \right] - 4(n+1) \\ (5) \quad w_n &= 5 \left(\frac{1}{v_n + 5} - 1 \right) : \text{كما يلي} \end{aligned}$$

أ- تبين أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$:

لدينا : المتتالية (v_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n < v_{n+1}$ ،

$$\text{ومنه } v_n + 5 < v_{n+1} + 5 \text{ وبالتالي } \frac{1}{v_{n+1} + 5} < \frac{1}{v_n + 5} \text{ أي } \frac{1}{v_{n+1} + 5} - 1 < \frac{1}{v_n + 5} - 1$$

$$\text{ومنه } 5 \left(\frac{1}{v_{n+1} + 5} - 1 \right) < 5 \left(\frac{1}{v_n + 5} - 1 \right)$$

إذن : $w_n < w_{n+1}$ ، من أجل كل عدد طبيعي n ، وعليه المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب- حساب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - w_n)$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 5 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{v_n + 5} - 1 \right) = -4 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - w_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - 4 - w_n) = 0$$

حل مقترح التمرين الثاني

A ، B و C النقط من الفضاء بحيث : $A(2; -1; 1)$ ، $B(-1; 2; 1)$ ، $C(1; -1; 2)$ و $D(1; 1; 1)$.

(1) أ- التحقق أن النقط A ، B و C تعين مستويا .

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-3; 3; 0)$ و $\overrightarrow{AC}(-1; 0; 1)$ و $\frac{-1}{-3} \neq \frac{0}{3}$ ، بالتالي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا أي A ، B و C ليست في استقامة وبالتالي فهي تعين مستويا .

ب- تبين أن $\vec{n}(1; 1; 1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

$$\text{لدينا : } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -3 \times 1 + 3 \times 1 + 0 \times 1 = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -1 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times 1 = 0 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} \text{ إذن الشعاع } \vec{n}(1; 1; 1) \text{ ناظمي للمستوي } (ABC) .$$

ج- كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

لدينا : $\vec{n}(1; 1; 1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ومنه معادلة (ABC) من الشكل $x + y + z + d = 0$.

و $A \in (ABC)$ يعني $2 - 1 + 1 + d = 0$ أي : $d = -2$ وعليه معادلة للمستوي (ABC) من الشكل : $x + y + z - 2 = 0$.

(2) النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 1), (B; 2), (C; -1)\}$.

أ- حساب إحداثيات G :

$$\text{لدينا : } \begin{cases} x_G = \frac{x_A + 2x_B - y_C}{1 + 2 - 1} = \frac{2 + 2 \times (-1) - 1}{2} = -\frac{1}{2} \\ y_G = \frac{y_A + 2y_B - y_C}{1 + 2 - 1} = \frac{-1 + 2 \times 2 - (-1)}{2} = 2 \\ z_G = \frac{z_A + 2z_B - z_C}{1 + 2 - 1} = \frac{1 + 2 \times 1 - 2}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ ومنه } G \left(-\frac{1}{2}; 2; \frac{1}{2} \right)$$

ب- (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{MD}\|$:

$$\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{MD}\| \text{ تكافئ } \|2\overrightarrow{MG}\| = 2\|\overrightarrow{MD}\| \text{ تكافئ } \|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{MD}\|$$

ومنه المجموعة (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$.

جـ- إثبات أن معادلة (Γ) هي : $6x - 4y + 2z + 3 = 0$.

يكفي إثبات أن : $I \in (\Gamma)$ و $\vec{n}' = k \overrightarrow{GD}$ ، بحيث $I \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; \frac{3}{4} \right)$ منتصف القطعة $[GD]$ و $\vec{n}'(6; -4; 2)$ شعاع ناظم لـ (Γ)

لدينا : $6x_I - 4y_I + 2z_I + 3 = \frac{6}{4} - 4 \times \frac{3}{2} + 2 \times \frac{3}{4} + 3 = 0$ ومنه $I \in (\Gamma)$ ، ولدينا $\overrightarrow{GD} \left(\frac{3}{2}; -1; \frac{1}{2} \right)$ ومنه $\vec{n}' = 4 \overrightarrow{GD}$.

(يمكن استخدام طرق أخرى)

(3) تبيان أن المستويين (ABC) و (Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) مع تعيين تمثيل وسيطي له .

لدينا : $\vec{n}(1; 1; 1)$ شعاع ناظمي لـ (ABC) و $\vec{n}'(6; -4; 2)$ شعاع ناظمي لـ (Γ) .

$\vec{n}$ و $\vec{n}'$ ليسا مرتبطين خطيا وبالتالي المستويان (ABC) و (Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) .

$$\text{وهذه } \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{3}{5}t \\ y = \frac{3}{2} - \frac{2}{5}t \\ z = t \end{cases} \quad (\Delta) \text{ المستقيم المعرف بـ: } \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ 6x - 4y + 2z + 3 = 0 \end{cases} \text{ ومنه بوضع } z = t \text{ نجد } (t \in \mathbb{R})$$

الجملة هي تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) .

حل مقترح التمرين الثالث

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$

لدينا : $\Delta = (-6\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 36 = -2 \times 36 = (6i\sqrt{2})^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_2 = \frac{6\sqrt{2} + 6i\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2} = 3\sqrt{2}(1+i) \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{6\sqrt{2} - 6i\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2} = 3\sqrt{2}(1-i)$$

(2) لدينا : $z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 6\sqrt{2}$ و $z_D = \frac{z_C}{2} = 3\sqrt{2}$

أ- كتابة z_A ، z_B ، و $z_A(1+i)$ على الشكل الأسّي .

لدينا : $z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$ ومنه : $|z_A| = 6$.

$$\text{وبفرض } \theta_A \text{ عمدة للعدد المركب } z_A \text{ ، يكون : } \begin{cases} \cos \theta_A = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_A = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ ، ومنه } \arg(z_A) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ، حيث } k \in \mathbb{Z}$$

إذن : $z_A = 6e^{i\frac{\pi}{4}}$.

و لدينا : $z_B = \overline{z_A} = 6e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $(1+i)z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times 6e^{i\frac{\pi}{4}} = 6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

ب- حساب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}} \right)^{2014}$

$$\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}} \right)^{2014} = \left(\frac{6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}}{6\sqrt{2}} \right)^{2014} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^{2014} = e^{i1007\pi} = e^{i(\pi+503 \times 2\pi)} = e^{i\pi} = -1$$

جـ- تبيان أن النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D :

لنثبت أن : $DO = DA = DB = DC$

لدينا : $|z_O - z_D| = |-3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2}$ و $|z_A - z_D| = |3\sqrt{2}(1+i) - 3\sqrt{2}| = |3\sqrt{2}i| = 3\sqrt{2}$

و $|z_B - z_D| = |3\sqrt{2}(1-i) - 3\sqrt{2}| = |-3\sqrt{2}i| = 3\sqrt{2}$ و $|z_C - z_D| = |6\sqrt{2} - 3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2}$

ومنه $DO = DA = DB = DC = 3\sqrt{2}$ وبالتالى النقط O, A, B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D و نصف قطرها $3\sqrt{2}$

د- حساب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$:

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{3\sqrt{2}(1-i) - 6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}(1+i) - 6\sqrt{2}} = \frac{-3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}}{-3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}} = \frac{i(3i\sqrt{2} - 3\sqrt{2})}{-3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}} = i$$

إيجاد قياس للزاوية $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$:

$$\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} \text{ ومنه } (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2}$$

طبيعة الرباعي $OACB$:

$$\left\{ \begin{array}{l} CA = CB \\ (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \text{ لدينا : } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = i \text{ يعني :}$$

متساوي الساقين ولدينا النقطة D منتصف القطعة $[AB]$ لأن $z_D = \frac{z_A + z_B}{2}$ وكذلك منتصف القطعة $[OC]$

لأن $z_D = \frac{z_C}{2}$ ومنه الرباعي $OACB$ مربع .

(3) ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

أ- العبارة المركبة للدوران R : $z' - z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_O)$ ومنه $z' = iz$.

ب- تعيين لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R : $z_{C'} = iz_C = 6i\sqrt{2}$.
التحقق أن النقط A, C و C' في إستقامة :

$$\frac{z_{C'} - z_C}{z_A - z_C} \in \mathbb{R} \text{ يكفي إثبات أن :}$$

$$\text{لدينا : } 2 = \frac{z_{C'} - z_C}{z_A - z_C} = \frac{6i\sqrt{2} - 6\sqrt{2}}{3i\sqrt{2} - 3\sqrt{2}} \text{ ومنه النقط } A, C \text{ و } C' \text{ في إستقامة .}$$

$$z_{A'} = iz_A = i3\sqrt{2}(1+i) = 3\sqrt{2}(-1+i) : \text{ صورة } A \text{ بالدوران } R$$

تعيين صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R :

$$z_{B'} = iz_B = i3\sqrt{2}(1-i) = 3\sqrt{2}(1+i) = z_A : \text{ صورة } B \text{ بالدوران } R$$

إذن : صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R هي الرباعي $OAC'A'$. لأن : $R(O) = O, R(A) = A', R(C) = C'$

$$R(B) = A \text{ و}$$

حل مقترح التمرين الرابع

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = 1 + \frac{2 \ln x}{x}$

$$(1) \text{ أ- } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{2 \ln x}{x} \right) = -\infty$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (حامل محور الترتيب) مقارب للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ : لأن } , \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2 \ln x}{x}\right) = 1$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـدراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ، ومن أجل كل x من $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x} \times x - 1 \times 2 \ln x}{x^2} = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $1 - \ln x$.

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -

الدالة f متزايدة على المجال $]0; e]$ ومتناقصة على المجال $[e; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	$-\infty$	$1 + 2e^{-1}$	$+\infty$

(2) أـدراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = 1$.

لدينا : $f(x) - y = 1 + \frac{2 \ln x}{x} - 1 = \frac{2 \ln x}{x}$ ، ولأن $\ln x$ إشارة الفرق من إشارة $\ln x$ ، ومنه إشارة الفرق من إشارة $\ln x$ ، لأن $\frac{2}{x} > 0$ من أجل كل $x \in]0; +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$		-	0 +
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;1)$	(C_f) فوق (Δ)

بـكتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

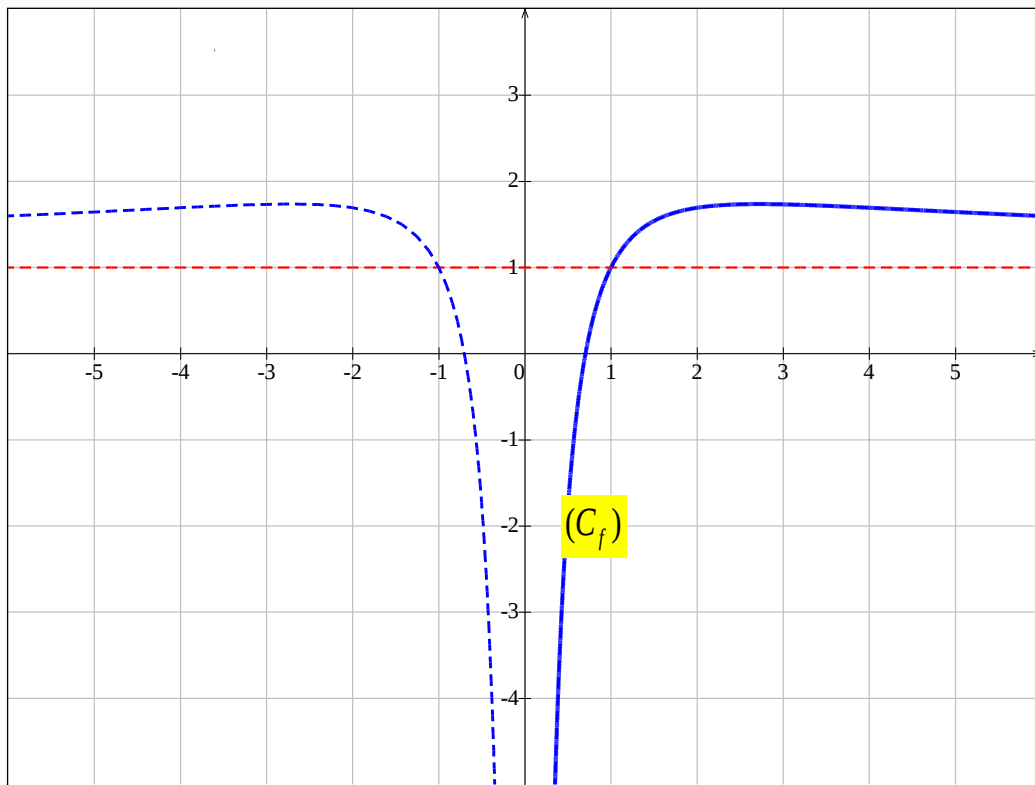
لدينا : $(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ و منه $(T) : y = 2x - 1$.

جــتبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0; 1[$ حلا وحيدا α ، حيث $e^{-0.4} < \alpha < e^{-0.3}$.

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0; 1[$ و $]0; 1[\subset]e^{-0.4}; e^{-0.3}[$ و $f(e^{-0.4}) \approx -0,2$ و $f(e^{-0.3}) \approx 0,2$

أي $f(e^{-0.4}) \times f(e^{-0.3}) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا

وحيدا α بحيث $e^{-0.4} < \alpha < e^{-0.3}$.



(4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ كما يلي: $h(x) = 1 + \frac{2 \ln|x|}{|x|}$.

أ- من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم:

$$h(x) - h(-x) = 1 + \frac{2 \ln|x|}{|x|} - 1 - \frac{2 \ln|-x|}{|-x|} = 1 + \frac{2 \ln|x|}{|x|} - 1 - \frac{2 \ln|x|}{|x|} = 0$$

نستنتج أن الدالة h زوجية وتمثيلها البياني (C_h) متناظر بالنسبة لحامل محور الترتيب.

ب- كيفية إنشاء المنحنى (C_h) اعتماداً على المنحنى (C_f) :

من أجل $x \in]0; +\infty[$ ، يكون $f(x) = h(x)$ وبالتالي (C_h) منطبق على (C_f) .

من أجل $x \in]-\infty; 0[$ ، (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الترتيب لكون الدالة h زوجية.

الرسم: أنظر الشكل.

ج- المناقشة البيانية:

$$\ln x^2 = (m-1)|x| \text{ تكافئ } 2 \ln|x| = (m-1)|x| \text{ تكافئ } 1 + \frac{2 \ln|x|}{|x|} = m \text{ أي } h(x) = m$$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_h) والمستقيم ذي المعادلة $y = m$.

لما $m \in]-\infty; 0]$ المعادلة تقبل حلين.

لما $m \in \left]0; 1 + \frac{2}{e}\right[$ المعادلة تقبل أربعة حلول.

لما $m = 1 + \frac{2}{e}$ المعادلة تقبل حلين (مضاعفين).

لما $m \in \left]1 + \frac{2}{e}; +\infty\right[$ المعادلة ليس لها حلول.

حل مقترح التمرين الأول

(I) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$

(1) تبين أن (u_n) متتالية هندسية :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = e^{\frac{1}{2}-(n+1)} = e^{\frac{1}{2}-n-1} = e^{\frac{1}{2}-n} \times e^{-1} = \frac{1}{e} u_n$ ،

ومنه المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{e}$ وحدها الأول $u_0 = e^{\frac{1}{2}-0} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

(2) حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{2}-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{e} \times \left(\frac{1}{e} \right)^n \right] = 0$$

نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

(3) حساب المجموع S_n :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) = \sqrt{e} \left[\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{e}} \right] = \frac{e\sqrt{e}}{e-1} (1-e^{-n-1})$$

(II) من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \ln(u_n)$

(1) كتابة v_n بدلالة n :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \ln(u_n)$ ، ومنه $v_n = \ln(u_n) = \ln\left(e^{\frac{1}{2}-n}\right) = \frac{1}{2} - n$

استنتاج نوع المتتالية (v_n) :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2} - (n+1) - \left(\frac{1}{2} - n\right) = -1$ ،

ومنه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = -1$ وحدها الأول $v_0 = \ln(u_0) = \ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$.

(2) أ- حساب العدد P_n :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n) = \ln u_0 + \ln u_1 + \dots + \ln u_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$P_n = \frac{n+1}{2} (v_0 + v_n) = \frac{n+1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - n \right) = \frac{(n+1)(1-n)}{2} = \frac{1-n^2}{2}$$

ب- تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث $P_n + 4n > 0$:

$$P_n + 4n > 0 \text{ يكافئ } \frac{1-n^2}{2} + 4n > 0 \text{ يكافئ } \frac{1+8n-n^2}{2} > 0 \text{ يكافئ } -\frac{1}{2}n^2 + 4n + \frac{1}{2} > 0$$

$$\text{ولدينا : } -\frac{1}{2}n^2 + 4n + \frac{1}{2} > 0 \text{ يكافئ } n \in]4 - \sqrt{17}; 4 + \sqrt{17}[\text{ أي } n \in [0; 8]$$

ومنه مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث $P_n + 4n > 0$ هي : $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

1) أ. إثبات أن A, B, C ليست في استقامية. $A(1; -1; -2), B(1; -2; -3), C(2; 0; 0)$.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(0; -1; -1)$ و $\overrightarrow{AC}(1; 1; 2)$ و $\frac{0}{1} \neq \frac{-1}{1}$ بالتالي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا أي أن A, B, C ليست في استقامية، إذن فهي تعين مستويا.
ب. كتابة تمثيل وسيطي للمستوي (ABC) :

بما أن النقط A, B, C ليست في استقامية فإن $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ أساس للمستوي (ABC) .

$$\begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = -1 - \alpha + \beta \\ z = -2 - \alpha + 2\beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

ومنه تمثيل وسيطي للمستوي (ABC) من الشكل:

ج. التحقق أن $x + y - z - 2 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
يكفي إثبات أن إحداثيات النقط A, B, C تحقق المعادلة.

$$x_A + y_A - z_A - 2 = 1 - 1 - (-2) - 2 = 0 \quad \text{لأن } A \in (ABC)$$

$$x_B + y_B - z_B - 2 = 1 - 2 - (-3) - 2 = 0 \quad \text{لأن } B \in (ABC)$$

$$x_C + y_C - z_C - 2 = 2 + 0 - 0 - 2 = 0 \quad \text{لأن } C \in (ABC)$$

2) (P) و (Q) المستويان $(P): x - y - 2z + 5 = 0$ و $(Q): 3x + 2y - z + 10 = 0$.

$$\begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t \\ z = t + 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

إثبات أن (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) ذي التمثيل الوسيطي:

لدينا: $\vec{n}(1; -1; -2)$ شعاع ناظمي لـ (P) و $\vec{n}'(3; 2; -1)$ شعاع ناظمي لـ (Q) .

$\vec{n}$ و $\vec{n}'$ ليسا مرتبطين خطيا وبالتالي المستويان (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم.

ولدينا: $\begin{cases} (t - 3) - (-t) - 2(t + 1) + 5 = 0 \\ 3(t - 3) + 2(-t) - (t + 1) + 10 = 0 \end{cases}$ ومنه $(\Delta) \subset (P)$ و $(\Delta) \subset (Q)$ أي $(\Delta) = (P) \cap (Q)$.

3) تعيين تقاطع المستويات $(ABC), (P)$ و (Q) .

لدينا: $(ABC) \cap (Q) \cap (P) = (\Delta) \cap (ABC)$

$$\begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t \\ z = t + 1 \\ x + y - z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{لدينا}$$

يكافئ $(t - 3) + (-t) - (t + 1) - 2 = 0$ أي $t = -6$.

وبتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد $(-9; 6; -5)$ وهي إحداثيات النقطة E نقطة تقاطع $(ABC), (P)$ و (Q) .

4) $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء. نسمي $d(M, (P))$ المسافة بين M و (P) و $d(M, (Q))$ المسافة بين M و (Q) .

تعيين المجموعة (Γ) للنقط M بحيث: $\sqrt{6} \times d(M, (P)) = \sqrt{14} \times d(M, (Q))$.

$$\sqrt{6} \times d(M, (P)) = \sqrt{14} \times d(M, (Q)) \quad \text{معناه} \quad |x - y - 2z + 5| = |3x + 2y - z + 10|$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + z + 5 = 0 \\ 4x + y - 3z + 15 = 0 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x - y - 2z + 5 = 3x + 2y - z + 10 \\ x - y - 2z + 5 = -(3x + 2y - z + 10) \end{cases} \quad \text{أي:}$$

ومنه مجموعة النقط (Γ) هي إتحاد مستويين معادلتهما: $2x + 3y + z + 5 = 0$ و $4x + y - 3z + 15 = 0$.

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $(z - i)(z^2 - 2z + 5) = 0$

$$z^2 - 2z + 5 = 0 \text{ أو } z = i \text{ تكافئ } (z - i)(z^2 - 2z + 5) = 0$$

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2z + 5 = 0$

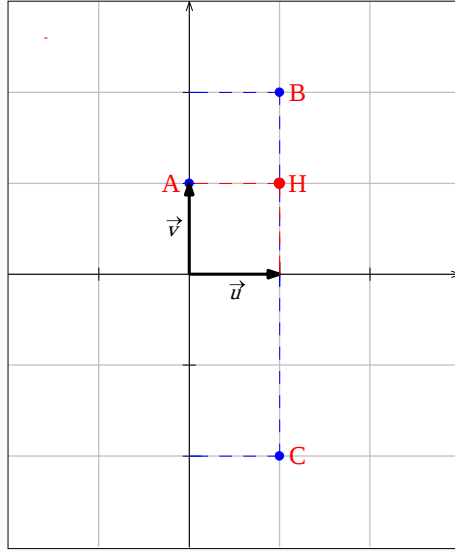
لدينا : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 = 16i^2 = (4i)^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_2 = \frac{2+4i}{2} = 1+2i \text{ و } z_1 = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $(z - i)(z^2 - 2z + 5) = 0$ هي : $S = \{i; 1-2i; 1+2i\}$

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (وحدة الطول 1cm)

تعطى النقط A ، B و C لواحقتها على الترتيب : $z_A = i$ ، $z_B = 1+2i$ ، $z_C = 1-2i$
أ- إنشاء النقط A ، B و C :



ب- تعيين z_H للاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) : $z_H = 1+i$

ج- حساب مساحة المثلث ABC :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \times 1 \times 4 = 2 \text{ cm}^2 \text{ لأن } AH = |z_H - z_A| = |1+i - i| = 1 \text{ و } BC = |z_C - z_B| = |-4i| = 4$$

(3) S التشابه المباشر الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

أ- تعيين الكتابة المركبة للتشابه S :

$$\text{لدينا : } z' - z_A = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} (z - z_A) \text{ ومنه } z' - z_A = \frac{1}{2} i (z - i) + i \text{ أي } z' = \frac{1}{2} iz + \frac{1}{2} + i$$

ب- تبين أن مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2} \text{ cm}^2$:

$$S' = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times S_{ABC} = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ cm}^2 \text{ فإن } \frac{1}{2} \text{ هي نسبة التشابه } S$$

(4) تعيين مجموعة النقط M حيث : $|z| = |iz + 1 + 2i|$

$$|z| = |z - (i - 2)| \text{ تكافئ } |z| = |z - i + 2| \text{ تكافئ } |z| = |i(z - i + 2)| \text{ تكافئ } |z| = |iz + 1 + 2i|$$

ومنه مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[OD]$ بحيث D هي النقطة التي لاحتها $z_D = i - 2$

(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$.

بـ الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $g'(x) = 6x^2 - 8x + 7$.

من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) > 0$ وبالتالي الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

(لأن : $6x^2 - 8x + 7 = 6\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{13}{3}$ أو لأن : مميز العبارة $6x^2 - 8x + 7$ سالب ومعامل x^2 موجب تماما)

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(2) أـ تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,7 < \alpha < 0,8$.

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\begin{cases} g(0,7) \approx -0,37 \\ g(0,8) \approx 0,06 \end{cases}$ أي $g(0,7) \times g(0,8) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم

المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $0,7 < \alpha < 0,8$.

بـ إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2} \right) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2} \right) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$.

(2) أـ من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$\frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} = \frac{(x+1)(2x^2-2x+1)+1-3x}{2(2x^2-2x+1)} = \frac{2x^3-4x+2}{2(2x^2-2x+1)} = \frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1} = f(x)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}(x+1) \right] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} \right] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[\frac{-3x}{4x^2} \right] = 0$$

بـ لدينا : $y = \frac{1}{2}(x+1)$ ذو المعادلة (Δ) ومنه المستقيم (C_f) مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

جـ دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ) :

لدينا : $f(x) - y = f(x) - \frac{1}{2}(x+1) = \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$ ومنه إشارة الفرق $f(x) - y$ من إشارة $1-3x$:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$	(C_f) تحت (Δ)

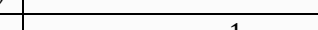
(3) أ. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 2)(2x^2 - 2x + 1) - (4x - 2)(x^3 - 2x + 1)}{(2x^2 - 2x + 1)^2} = \frac{2x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 4x}{(2x^2 - 2x + 1)^2} = \frac{x \cdot g(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$$

بـ إشارة $f'(x)$ من إشارة $x \cdot g(x)$:

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0		α	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$						

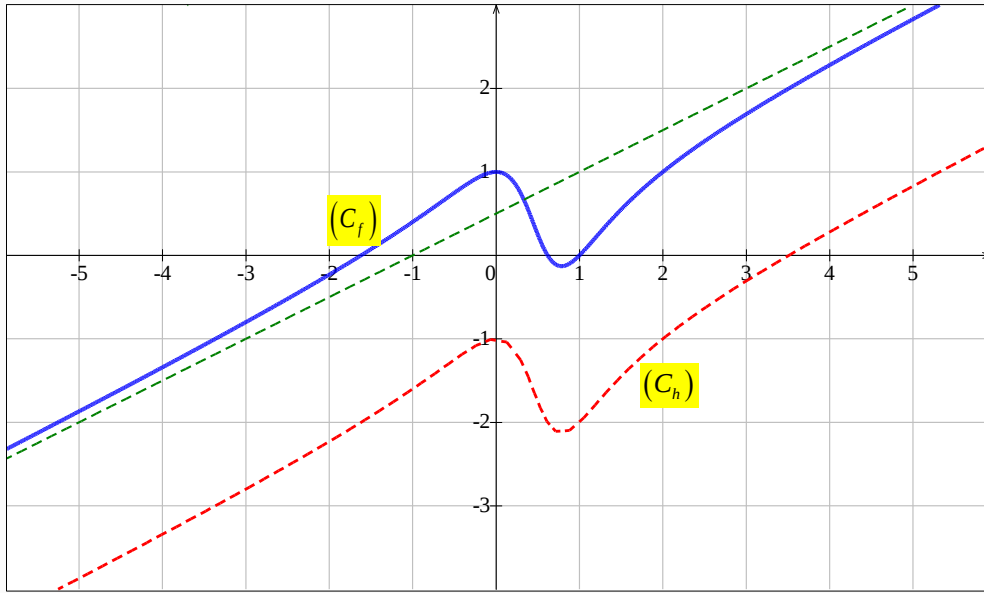
(4) $f(1) = 0$.

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \text{ تكافئ } x^3 - 2x + 1 = 0 \text{ تكافئ } x^3 - 2x + 1 = 0 \text{ تكافئ } (x-1)(x^2 + x - 1) = 0$$

$$\text{إذن حلول المعادلة } f(x) = 0 \text{ هي : } \left\{ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; 1; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

(5) الرسم :



$$(6) \text{ أ. الدالة المعرفة على } \mathbb{R} \text{ كما يلي : } h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

أـ التحقق : من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) - 2 = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1} - 2 = \frac{x^3 - 2x + 1 - 2(2x^2 - 2x + 1)}{2x^2 - 2x + 1} = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1} = h(x)$$

بـ المنحنى (C_h) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(0; -2)$.

الرسم : أنظر الشكل السابق .

الموضوع الأول

التمرين الأول (4,5 ن)

- في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط: $A(2; 1; 0)$ ، $B(1; 2; 2)$ ، $C(3; 3; 1)$ و $D(1; 1; 4)$.
- (1) تحقق أن النقط A ، B و C تعين مستويا وأن $x - y + z - 1 = 0$ معادلة ديكارتية له.
 - (2) بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع، ثم تحقق أن مساحته هي $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ وحدة مساحة.
 - (3) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) العمودي على المستوي (ABC) والذي يشمل النقطة D .
 - (4) النقطة E هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)
أ- عين إحداثيات النقطة E ثم أحسب المسافة بين النقطة D و المستوي (ABC) .
ب- عين مركزي سطحي الكرتين اللذين يمسان (ABC) في النقطة E ونصف قطر كل منهما $\sqrt{3}$.
 - (5) أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

التمرين الثاني (4,5 ن)

- (I) عين العددين المركبين α و β حيث:
$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\bar{\alpha} + \bar{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$$
 مع $\bar{\alpha}$ مرافق α و $\bar{\beta}$ مرافق β .
- (II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A ، B و C النقط التي لواحقها على الترتيب:
$$z_A = z_C e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad z_B = \bar{z}_A, \quad z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
 - (1) أ- أكتب z_A و z_C على الشكل الأسّي ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا.
 - ب- تحقق أن العدد المركب $2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$ حقيقي.
- (2) D النقطة ذات اللاحقة $z_D = 1 + i$
أ- حدد النسبة وزاوية التشابه S الذي مركزه O ويحول D إلى A .
ب- أكتب $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.
- (3) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $z = k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ حيث k يسمح $\mathbb{R}^+$.

التمرين الثالث (4,5 ن)

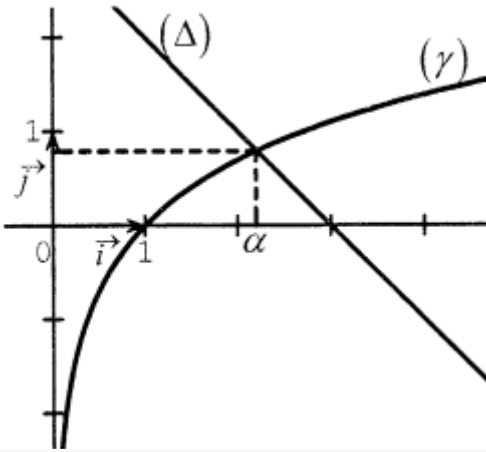
- (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = e^2 - 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = (1+u_n)e^{-2} - 1$.
- (1) أحسب: u_1 ، u_2 و u_3 .
 - (2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1+u_n > 0$.
 - (3) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة. هل هي متقاربة؟ علل.
 - (4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3(1+u_n)$
أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

بـ أكتب v_n و u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

جـ بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + \dots + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$

التمرين الرابع (5,6 ن)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



(I) (γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 3$ هي فاصلة نقطة تقاطع (Δ) و (γ) .

(1) بقراءة بيانية حدد وضعيّة (γ) بالنسبة إلى (Δ) على $]0; +\infty[$.

(2) الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x - 3 + \ln x$.

إستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(3) تحقق أن : $2, 2 < \alpha < 2, 3$.

(II) f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$ و (C_f) تمثيلها البياني .

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

(2) أثبت أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

(3) بين أن : $f(\alpha) = \frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ، ثم إستنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$.

(4) أدرس وضعيّة (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل، ثم أنشئ (C_f) على المجال $]0; e^2]$.

(III) F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$ والتي تحقق : $F(1) = -3$.

(1) بين أن منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما .

(2) بين أن $x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على $]0; +\infty[$ ، ثم إستنتج عبارة الدالة F .

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4 ن)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(2; 4; 1)$ ، $B(0; 4; -3)$ ، $C(3; 1; -3)$ ، $D(1; 0; -2)$.
أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة من الحالات الآتية :

(1) النقط A ، B و C ليست في استقامية .

(2) $2x + 2y - z - 11 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

(3) النقطة $E(3; 2; -1)$ هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .

(4) المستقيمان (AB) و (CD) من نفس المستوي .

(5) تمثيل وسيطي للمستقيم (CD) :
$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t - 1 \\ z = -t - 1 \end{cases} , t \in \mathbb{R}$$

(6) يوجد عدنان حقيقيان α و β حيث النقطة $I(\frac{3}{5}; 4; -\frac{9}{5})$ مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta)\}$.

التمرين الثاني (5ن)

في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقتها على الترتيب :

$$z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \quad , \quad z_B = -\overline{z_A} \quad , \quad z_C = -(z_A + z_B) \quad , \quad (1)$$

أ. أكتب كلا من العددين المركبين z_C و z_B على الشكل الأسّي.

ب. استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .
ج. أنشئ الدائرة (γ) والنقط A ، B و C .

$$(2) \quad \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \quad \text{أ. تحقق أن :}$$

ب. استنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع وأن النقطة O مركز ثقل هذا المثلث .

ج. عين وأنشئ (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z| = |z - \sqrt{3} - i|$.

(3) أ. عين زاوية للدوران r الذي مركزه O ويحول C إلى A .

ب. أثبت أن صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

التمرين الثالث (5ن)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(I) f الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{4x+1}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني .

(1) عين اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; +\infty[$.

(2) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) ذي المعادلة : $y = x$.

(3) مثل (C_f) و (D) على المجال $[0; 6]$.

(II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

(1) أ. أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 ، v_0, v_1, v_2, v_3 دون حسابها .

ب. خمن اتجاه تغير و تقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

(2) أ. أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $2 \leq u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \leq 5$ حيث : $\alpha = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

ب. استنتج اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

(3) أ. أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$.

ب. بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

ج. استنتج أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ ، ثم حدد نهاية كل من (u_n) و (v_n) .

التمرين الرابع (6ن)

(I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}$.

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن : $0,36 < \alpha < 0,37$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أـ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^{2x+2}g(-x)$.

بـ استنتج أن الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; -\alpha]$ ومتزايدة تماماً على $[-\alpha; +\infty[$.

(2) أحسب نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1]$ ثم فسّر النتيجة هندسياً.

(4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -x + 1$.

(5) أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $\left] -\infty; \frac{1}{2} \right]$ ، نأخذ $f(-\alpha) \approx 0,1$.

(6) أـ تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $2f(x) + f'(x) - f''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$.

بـ استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

تصحيح مقترح للموضوع الأول

حل مقترح التمرين الأول

A ، B ، C و D النقط من الفضاء بحيث : $A(2;1;0)$ ، $B(1;2;2)$ ، $C(3;3;1)$ و $D(1;1;4)$.

(1) التحقق أن النقط A ، B و C تعين مستويًا :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1;1;2)$ و $\overrightarrow{AC}(1;2;1)$ و $\frac{-1}{1} \neq \frac{1}{2}$ وبالتالي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطياً أي أن النقط A ، B و C ليست في استقامية إذن فهي تعين مستويًا .

• التحقق أن : $x - y + z - 1 = 0$ معادلة للمستوي (ABC) :

يكفي إثبات أن إحداثيات النقط A ، B و C تحقق المعادلة المعطاة .

$$x_A - y_A + z_A - 1 = 2 - 1 + 0 - 1 = 0 \text{ لأن } A \in (ABC)$$

$$x_B - y_B + z_B - 1 = 1 - 2 + 2 - 1 = 0 \text{ لأن } B \in (ABC)$$

$$x_C - y_C + z_C - 1 = 3 - 3 + 1 - 1 = 0 \text{ لأن } C \in (ABC)$$

(2) تبيان أن المثلث ABC متقايس الأضلاع :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1;1;2)$ ، $\overrightarrow{AC}(1;2;1)$ و $\overrightarrow{BC}(2;1;-1)$ ومنه $AB = AC = BC = \sqrt{6}$ وبالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع.

• التحقق أن مساحة ABC هي : $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ وحدة مساحة

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{6})^2 = \frac{6\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(3) تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) العمودي على المستوي (ABC) والذي يشمل النقطة D :

$(\Delta) \perp (ABC)$ معناه $\vec{n}(1;-1;1)$ هو شعاع توجيه لـ (Δ) .

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = t + 4 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{من الشكل :}$$

(4) النقطة E هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)

أ- تعيين إحداثيات النقطة E :

النقطة E هي نقطة تقاطع المستوي (ABC) والمستقيم (Δ) .

$$\text{لدينا } \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = t + 4 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \text{ يكافئ } t = -1 \text{ أي } (t+1) - (-t+1) + (t+4) - 1 = 0$$

وبتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطى لـ (Δ) نجد $(0; 2; 3)$ وهي إحداثيات النقطة E .
• حساب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC) :

$$d(D, (ABC)) = \frac{|x_D - y_D + z_D - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

ب- تعيين مركزي سطحي الكرتين اللذين يمتان (ABC) في النقطة E ونصف قطر كل منهما $\sqrt{3}$:

لدينا : $d(D, (ABC)) = \sqrt{3}$ ومنه إحدى الكرتين مركزها D والأخرى مركزها D' نظيرة D بالنسبة لـ E .

لدينا E منتصف $[DD']$ ومنه $\overrightarrow{ED'} = -\overrightarrow{ED}$ أي $\overrightarrow{ED'} = \overrightarrow{DE}$ ،

و $\overrightarrow{DE}(-1; 1; -1)$ و $\overrightarrow{ED'}(x_{D'}; y_{D'} - 2; z_{D'} - 3)$ ومنه بالمطابقة نجد : $D'(-1; 3; 2)$.
(5) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

$$h = d(D, (ABC)) = \sqrt{3} \text{ بحيث } V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \times h$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \frac{3}{2} \text{ ومنه :}$$

حل مقترح التمرين الثاني

$$(I) \text{ تعيين العددين المركبين } \alpha \text{ و } \beta \text{ حيث : } \begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\bar{\alpha} + \bar{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{وبالجمع طرف لطرف نجد : } 4\alpha = -6 + 2i\sqrt{3} \text{ تكافئ } \begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\bar{\alpha} + \bar{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{أي : } \alpha = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ وبتعويض قيمة } \alpha \text{ نجد : } \beta = i\sqrt{3}$$

$$(II) \text{ A ، B و C النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب : } z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ، } z_B = \overline{z_A} \text{ ، } z_A = z_C e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ .}$$

(1) أ- كتابة z_A و z_C على الشكل الأسى :

$$\text{لدينا : } z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ومنه : } |z_A| = \sqrt{3}$$

$$\text{وبفرض } \theta_A \text{ عمدة للعدد المركب } z_A \text{ ، يكون : } \begin{cases} \cos \theta_A = \frac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_A = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ ومنه } \arg(z_A) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ، حيث}$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{إذن : } z_A = \sqrt{3} e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

ولدينا: $z_A = z_C e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $z_C = z_A e^{-i\frac{\pi}{3}}$ أي $z_C = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}} \times e^{-i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$

• تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا :

$$\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{3}}$$

لدينا: $e^{i\frac{n\pi}{3}}$

$$\arg\left[\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n\right] = \pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \text{ حقيقي سالب معناه}$$

$$\arg\left(e^{i\frac{n\pi}{3}}\right) = \pi + 2k\pi \text{ يكافئ } \arg\left[\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n\right] = \pi + 2k\pi$$

$$n = 6k + 3 / k \in \mathbb{N} \text{ يكافئ}$$

$$\text{بـ التحقق أن العدد المركب } 2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$$

$$2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435} = 2\left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^{2015} + \left(e^{i\frac{-5\pi}{6}}\right)^{1962} - \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{1435} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} + e^{i\pi} - e^{-i\frac{\pi}{2}} = -\sqrt{3} - 1$$

$$D \text{ النقطة ذات اللاحقة } z_D = 1 + i \quad (2)$$

أ تحديد النسبة وزاوية للتشابه S الذي مركزه O ويحول D إلى A :

$$k = \left|\frac{z_A}{z_D}\right| \text{ ومنه نسبة التشابه } S \text{ هي } \begin{cases} S(O) = O \\ S(D) = A \end{cases} \text{ ومنه } z_A - z_O = k e^{i\theta} (z_D - z_O)$$

$$\theta = \arg\left(\frac{z_A}{z_D}\right) \text{ زاوية للتشابه } S \text{ هي}$$

$$\theta = \arg\left(\frac{z_A}{z_D}\right) = \frac{7\pi}{12} \text{ و } k = \left|\frac{z_A}{z_D}\right| = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ ومنه } \frac{z_A}{z_D} = \frac{\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

بـ كتابة $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري :

$$\frac{z_A}{z_D} = \frac{-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+i} = \frac{\left(-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}-3}{4} + i\frac{\sqrt{3}+3}{4}$$

$$\bullet \text{ إستنتاج القيمة المضبوطة لكل من } \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) \text{ و } \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$\text{لدينا: } \frac{z_A}{z_D} = \frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6}}{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \frac{\sqrt{6}}{2}i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \text{ و بالمطابقة مع الشكل الجبري نجد :}$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases} \text{ أي : } \begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{2(\sqrt{3}-3)}{4\sqrt{6}} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{2(\sqrt{3}+3)}{4\sqrt{6}} \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} \frac{\sqrt{6}}{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-3}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+3}{4} \end{cases}$$

$$(3) \text{ تعيين مجموعة النقط } M \text{ ذات اللاحقة } z \text{ التي تحقق : } z = k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)} \text{ حيث } k \text{ يسمح } \mathbb{R}^+$$

$$z = k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)} \text{ تكافئ } z = k z_A \text{ تكافئ } \vec{OM} = k \vec{OA} \text{ و } k \in \mathbb{R}^+$$

حل مقترح التمرين الثالث

(1) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = e^2 - 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = (1+u_n)e^{-2} - 1$.
حساب u_1, u_2, u_3 :

$$u_2 = (1+u_1)e^{-2} - 1 = e^{-2} - 1, \quad u_1 = (1+u_0)e^{-2} - 1 = e^2 \times e^{-2} - 1 = 0$$

$$u_3 = (1+u_2)e^{-2} - 1 = e^{-4} - 1$$

(2) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $1+u_n > 0$:

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $1+u_n > 0$ ".

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$, لدينا $u_0 = e^2 - 1$ ومنه $1+u_0 > 0$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $1+u_n > 0$, ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $1+u_{n+1} > 0$.

لدينا حسب الفرض $1+u_n > 0$ ولدينا $1+u_{n+1} = (1+u_n)e^{-2} - 1$ ومنه $1+u_{n+1} > 0$ وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

• الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n , $1+u_n > 0$.

(3) تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة:

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} - u_n = (1+u_n)e^{-2} - 1 - u_n = (1+u_n)e^{-2} - (1+u_n) = (1+u_n)(e^{-2} - 1)$.

وبما أنه $1+u_n > 0$, من أجل كل عدد طبيعي n , و $e^{-2} - 1 < 0$ فإن $u_{n+1} - u_n < 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

– المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد -1 , إذن فهي متقاربة.

(4) من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3(1+u_n)$

أ- إثبات أن (v_n) متتالية هندسية:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = 3(1+u_{n+1}) = 3(1+u_n)e^{-2} = e^{-2}v_n$

ومن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = e^{-2}$ وحدها الأول: $v_0 = 3(1+u_0) = 3e^2$.

ب- كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه $v_n = 3 \times e^2 (e^{-2})^n = 3e^{-2n+2}$

• كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3(1+u_n)$ ومنه $u_n = \frac{1}{3}v_n - 1$ أي $u_n = \frac{1}{3}(3e^{-2n+2}) - 1 = e^{-2n+2} - 1$.

• حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2n+2} = 0 \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{-2n+2} - 1) = -1$$

ج- تبيان أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + \dots + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ,

$$v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n = (3 \times e^2)^{n+1} (e^{-2})^{0+1+2+\dots+n} = (3 \times e^2)^{n+1} (e^{-2})^{\frac{n(n+1)}{2}} = (3 \times e^2)^{n+1} e^{-n(n+1)} = (3e^{2-n})^{n+1}$$

ومن $\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + \dots + \ln v_n = (n+1)(\ln 3 + 2 - n)$ أي $\ln(v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n) = (n+1)\ln(3e^{2-n})$ ومنه

(يمكن استخدام طرق أخرى)

(I) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 3$ ، α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ) .
(1) بقراءة بيانية :

تحديد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على المجال $]0; +\infty[$:

من أجل $x \in]0; \alpha[$ ، (γ) يقع تحت (Δ) .

من أجل $x \in]\alpha; +\infty[$ ، (γ) يقع فوق (Δ) .

(2) إشارة $g(x)$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		- 0 +	

(3) التحقق أن : $2,2 < \alpha < 2,3$.

لدينا : $\begin{cases} g(2,2) \approx -0,011 \\ g(2,3) \approx 0,13 \end{cases}$ ومنه $g(2,2) \times g(2,3) < 0$ أي $2,2 < \alpha < 2,3$.

(II) f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$.

(1) حساب النهايات :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - 2) = -\infty \end{cases} \quad \text{لأن : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)\right] = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 2) = +\infty \end{cases} \quad \text{و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)\right] = +\infty$$

(2) تبين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln x - 2) + \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}(\ln x - 2) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{\ln x - 2 + x - 1}{x^2} = \frac{-3 + x + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(3) تبين أن : $f(\alpha) = \frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

لدينا : $g(\alpha) = 0$ أي $\ln \alpha = -\alpha + 3$ وبالتالي : $f(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(\ln \alpha - 2) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)(-\alpha+1) = \frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

إستنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$:

$$\frac{(1,2)^2}{2,3} < \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} < \frac{(1,3)^2}{2,2} \text{ ومنه } \begin{cases} \frac{1}{2,3} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2,2} \\ 1,2 < \alpha-1 < 1,3 \\ (1,2)^2 < (\alpha-1)^2 < (1,3)^2 \end{cases} \text{ لدينا : } 2,2 < \alpha < 2,3 \text{ يكافئ :}$$

$$\text{ومنه : } -\frac{(1,3)^2}{2,2} < f(\alpha) < -\frac{(1,2)^2}{2,3} \text{ أي : } -0,76 < f(\alpha) < -0,62$$

(4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.

لندرس إشارة $f(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

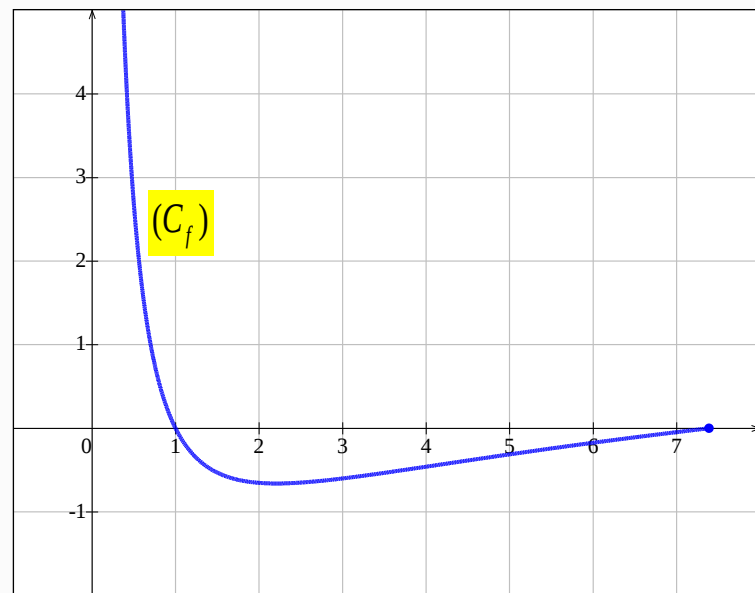
$$\text{لدينا : } f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) = \frac{1}{x}(x-1)(-2 + \ln x) \text{ ومنه إشارة } f(x) \text{ من إشارة } (x-1)(-2 + \ln x).$$

x	0	1	e^2	$+\infty$
$f(x)$		+	0	-

ومنه (C_f) فوق حامل محور الفواصل على كل من المجالين $]e^2; +\infty[$ و $]0; 1[$ وتحت على المجال $]1; e^2[$ ، ويتقاطعان في

النقطتين ذات الفاصلتين 1 و e^2 .

الرسم :



(III) الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$ والتي تحقق: $F(1) = -3$.

(1) تبين أن منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما.

F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$ يعني: من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $F'(x) = f(x)$.

$F'(x) = 0$ تكافئ $f(x) = 0$ تكافئ: $x = 1$ أو $x = e^2$ ، ومنه منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل

محور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين 1 و e^2 .

(2) تبين أن $x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على $]0; +\infty[$:

نضع: $u(x) = x \ln x - x$

الدالة u قابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ومن أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $u'(x) = \ln x + \frac{1}{x} \times x - 1 = \ln x$.

ومنه الدالة u هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على $]0; +\infty[$.

إستنتاج عبارة الدالة F :

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x \left(\ln t - 2 - \frac{\ln t}{t} + \frac{2}{t} \right) dt = \left[t \ln t - t - 2t - \frac{1}{2}(\ln t)^2 - 2 \ln t \right]_1^x = (2+x) \ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 - 3x$$

حل مقترح التمرين الأول

الفضاء مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(2; 4; 1)$ ، $B(0; 4; -3)$ ، $C(3; 1; -3)$ ، $D(1; 0; -2)$.
الإجابة: بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة:

(1) النقط A ، B و C ليست في استقامية. ————— صحيح
التبرير:

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-2; 0; -4)$ و $\overrightarrow{AC}(1; -3; -4)$ و $\frac{0}{-3} \neq \frac{-2}{1}$ وبالتالي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطياً أي أن النقط A ، B و C ليست في استقامية.

(2) $2x + 2y - z - 11 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) . ————— صحيح
التبرير:

يكفي إثبات أن إحداثيات النقط A ، B و C تحقق المعادلة.

$$A \in (ABC) \text{ لأن } 2x_A + 2y_A - z_A - 11 = 2 \times 2 + 2 \times 4 - 1 - 11 = 0$$

$$B \in (ABC) \text{ لأن } 2x_B + 2y_B - z_B - 11 = 2 \times 0 + 2 \times 4 - (-3) - 11 = 0$$

$$C \in (ABC) \text{ لأن } 2x_C + 2y_C - z_C - 11 = 2 \times 3 + 2 \times 1 - (-3) - 11 = 0$$

(3) النقطة $E(3; 2; -1)$ هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) . ————— خطأ
التبرير:

لدينا: $\overrightarrow{DE}(2; 2; 1)$ و $\vec{n}(2; 2; -1)$ ناظمي للمستوي (ABC) .

لاحظ أن $\overrightarrow{DE}$ و $\vec{n}$ ليسا مرتبطين خطياً وبالتالي $\overrightarrow{DE}$ ليس ناظماً للمستوي (ABC) .

(4) المستقيمان (AB) و (CD) من نفس المستوي. ————— خطأ
التبرير:

$$D \notin (ABC) \text{ لأن } 2x_D + 2y_D - z_D - 11 \neq 0$$

$$(5) \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t - 1 \\ z = -t - 1 \end{cases} \text{ تمثيل وسيطي للمستقيم } (CD). \text{ ————— صحيح}$$

التبرير:

إحداثيات كلا من النقطتين C و D تحقق التمثيل الوسيطي.

لأن: بتعويض إحداثيات C في التمثيل الوسيطي نجد $t = 2$ و بتعويض إحداثيات D في التمثيل الوسيطي نجد $t = 1$.

(6) يوجد عدنان حقيقيان α و β حيث النقطة $I(\frac{3}{5}; 4; -\frac{9}{5})$ مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta)\}$. ————— صحيح
التبرير:

لدينا: $\overrightarrow{IA}(\frac{7}{5}; 0; \frac{14}{5})$ و $\overrightarrow{IB}(-\frac{3}{5}; 0; -\frac{6}{5})$ ومنه $\overrightarrow{IA} = -\frac{7}{3}\overrightarrow{IB}$ أي $3\overrightarrow{IA} + 7\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ إذن: $(\alpha; \beta) = (3; 7)$.

حل مقترح التمرين الثاني

$$z_C = -(z_A + z_B) \text{ ، } z_B = \overline{z_A} \text{ ، } z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

(1) كتابة كلا من العددين المركبين z_B و z_C على الشكل الأسّي:

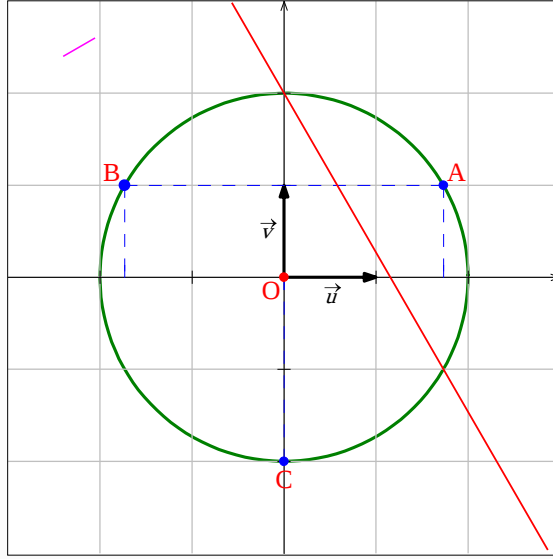
$$z_B = \overline{z_A} = e^{i\pi} \times 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i(\pi - \frac{\pi}{6})} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_C = -(z_A + z_B) = -(z_A + \overline{z_A}) = -2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

بـ استنتاج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

لدينا : $|z_B| = |z_C| = |z_A| = 2$ وهذا يعني : $OA = OB = OC = 2$ وبالتالي النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة (γ) التي مركزها O ونصف قطرها 2 .

جـ الرسم :



$$(2) \text{ أـ التحقق أن : } \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \frac{-\sqrt{3} + i - (-2i)}{-\sqrt{3} + i - (\sqrt{3} + i)} = \frac{\sqrt{3} + 3i}{-2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

بـ استنتاج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع :

$$\left\{ \begin{array}{l} AB = BC \\ (\overline{AB}, \overline{CB}) = -\frac{\pi}{3} \end{array} \right\} \text{ يكافئ } \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right) = -\frac{\pi}{3} \end{array} \right. \text{ يكافئ } \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

• إثبات أن النقطة O مركز ثقل المثلث ABC :

لدينا : $z_A + z_B + z_C = z_A + z_B - (z_A + z_B) = 0$ ومنه $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ وبالتالي O مركز ثقل المثلث ABC .

جـ تعيين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z| = |z - \sqrt{3} - i|$.

$$|z| = |z - \sqrt{3} - i| \text{ تكافئ } |z| = |z - (\sqrt{3} + i)| \text{ تكافئ } |z| = |z - z_A| \text{ تكافئ } OM = AM$$

وبالتالي مجموعة النقط (E) هي محور القطعة $[OA]$.

إنشاء المجموعة (E) : أنظر الشكل .

(3) أـ تعيين زاوية الدوران r الذي مركزه O ويحول C إلى A .

$$\text{لدينا : } \begin{cases} r(O) = O \\ r(C) = A \end{cases} \text{ ومنه } z_A - z_O = e^{i\theta}(z_C - z_O) \text{ ومنه زاوية الدوران } r \text{ هي } \theta = \arg\left(\frac{z_A}{z_C}\right)$$

$$\theta = \arg\left(\frac{z_A}{z_C}\right) = \frac{2\pi}{3} \text{ ومنه } \frac{z_A}{z_C} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

بـ إثبات أن صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$:

$$\text{لدينا : } r(O) = O \text{ و } r(A) = B \text{ لأن : } z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$ ، كون الدوران يحافظ على المنتصفات وعلى التعامد .

(I) الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{4x+1}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني.

(1) تعيين إتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; +\infty[$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $[0; +\infty[$ و $f'(x) = \frac{4(x+1) - (4x+1)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$

لدينا: من أجل كل $x \in [0; +\infty[$ ، $f'(x) > 0$ ، وبالتالي الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$.

(2) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) ذي المعادلة: $y = x$.

لدينا: $f(x) - x = \frac{4x+1}{x+1} - x = \frac{-x^2 + 3x + 1}{x+1}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $-x^2 + 3x + 1$ على المجال $[0; +\infty[$.

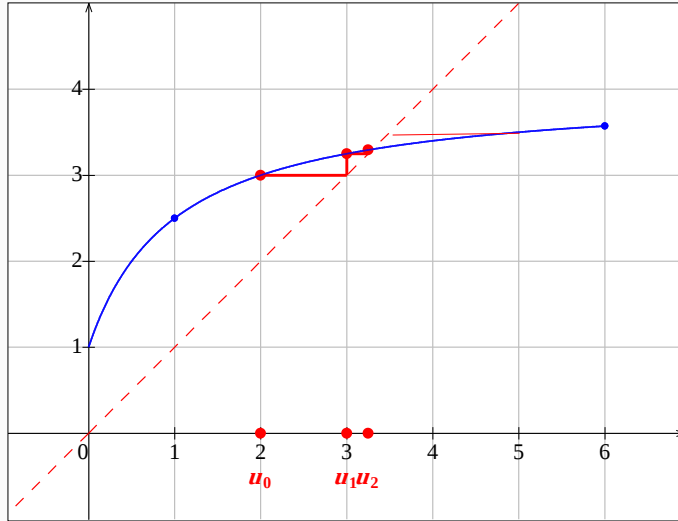
المعادلة $-x^2 + 3x + 1 = 0$ تقبل في المجال $[0; +\infty[$ حلاً $\alpha = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ بحيث:

x	0	α	$+\infty$
$f(x) - x$		+	-

على المجال $[0; \alpha[$: (C_f) يقع فوق (D) .

على المجال $]\alpha; +\infty[$: (C_f) يقع تحت (D) .

(3) الرسم:



(II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

(1) أ- الرسم: أنظر الشكل.

ب- التخمين: المتتالية (u_n) متزايدة والمتتالية (v_n) متناقصة وكلاهما تتقارب نحو العدد $\alpha = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$.

(2) أ- إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leq u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \leq 5$ حيث: $\alpha = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$.

نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 \leq u_n < \alpha$ ،

نسمي $P(n)$ الخاصية: من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leq u_n < \alpha$.

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = 2$ ومنه $2 \leq u_0 < \alpha$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $2 \leq u_n < \alpha$ ، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $2 \leq u_{n+1} < \alpha$.

لدينا حسب الفرض $2 \leq u_n < \alpha$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ فإن $f(2) \leq f(u_n) < f(\alpha)$ أي $2 \leq 3 \leq u_{n+1} < \alpha$ وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

• الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 \leq u_n < \alpha$.

لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\alpha < v_n \leq 5$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $\alpha < v_n \leq 5$ ".

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $v_0=5$ ومنه $\alpha < v_0 \leq 5$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $\alpha < v_n \leq 5$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $\alpha < v_{n+1} \leq 5$.

لدينا حسب الفرض $\alpha < v_n \leq 5$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ فإن $f(\alpha) < f(v_n) \leq f(5)$

أي $5 \leq \frac{7}{2} \leq \alpha < v_{n+1}$ وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

• الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، $\alpha < v_n \leq 5$.

ب- استنتاج اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \in [2; \alpha[$ ومن أجل $x \in]0; \alpha[$: $f(x) - x > 0$ ومنه : $u_{n+1} - u_n > 0$.

وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

ولدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n \in]\alpha; 5]$ ومن أجل $x \in]\alpha; +\infty[$: $f(x) - x < 0$ ومنه : $v_{n+1} - v_n < 0$.

وبالتالي المتتالية (v_n) متناقصة تماما.

(3) أ- إثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} - u_{n+1} = f(v_n) - f(u_n) = \frac{1+4v_n}{1+v_n} - \frac{1+4u_n}{1+u_n} = \frac{3(v_n - u_n)}{(1+v_n)(1+u_n)}$.

ومن جهة أخرى : $\begin{cases} u_n \geq 2 \\ v_n \geq 2 \end{cases}$ يكافئ $\frac{3}{(1+v_n)(1+u_n)} \leq \frac{1}{3}$ ومنه $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$.

ب- تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$ ، وهذا يعني :

$$\begin{cases} v_1 - u_1 \leq \frac{1}{3}(v_0 - u_0) \\ v_2 - u_2 \leq \frac{1}{3}(v_1 - u_1) \\ \dots \\ \dots \\ v_n - u_n \leq \frac{1}{3}(v_{n-1} - u_{n-1}) \end{cases}$$

بالضرب طرف لطرف نجد $(v_1 - u_1)(v_2 - u_2) \dots (v_n - u_n) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n (v_0 - u_0)(v_1 - u_1) \dots (v_{n-1} - u_{n-1})$

ومنه : من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ (يمكن استخدام البرهان بالتراجع)

ومن جهة أخرى لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < \alpha$ ومنه $v_n - u_n > 0$.

وبالتالي : من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

جـ- لدينا ، $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$ ومنه نستنتج أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$

النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) هي العدد الحقيقي l الذي يحقق : $f(l) = l$

إذن : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \alpha$

حل مقترح التمرين الرابع

(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}$

(1) دراسة اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$:

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) = -2 - 2e^{2x-2} = -2(1 + 2e^{2x-2})$

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) < 0$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

(2) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 2) \left(\frac{1 - 2x}{2x - 2} - \frac{e^{2x-2}}{2x - 2} \right) = -\infty \end{cases}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$

التحقق أن : $0,36 < \alpha < 0,37$

لدينا : أي : $\begin{cases} g(0,36) \approx 0,002 \\ g(0,37) \approx -0,02 \end{cases}$ ومنه $0,36 < \alpha < 0,37$

(3) إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$		+	-

(II) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$

(1) أتبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^{2x+2}g(-x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = e^{2x+2} + 2xe^{2x+2} - 1 = e^{2x+2}(1 + 2x - e^{-2x-2}) = e^{2x+2}(1 - 2(-x) - e^{2(-x)-2}) = e^{2x+2}g(-x)$$

بـ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+

نستنتج أن الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty; -\alpha]$ و متزايدة على $[-\alpha; +\infty[$

(2) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{2x+2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}e^2 \times 2xe^{2x} \right) = 0 \text{ ، لأن : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{2x+2} - x + 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{2x+2} - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{2x+2} - 1 + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(-\alpha)$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{2x+2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} e^2 \times 2xe^{2x} \right) = 0 \quad (3)$$

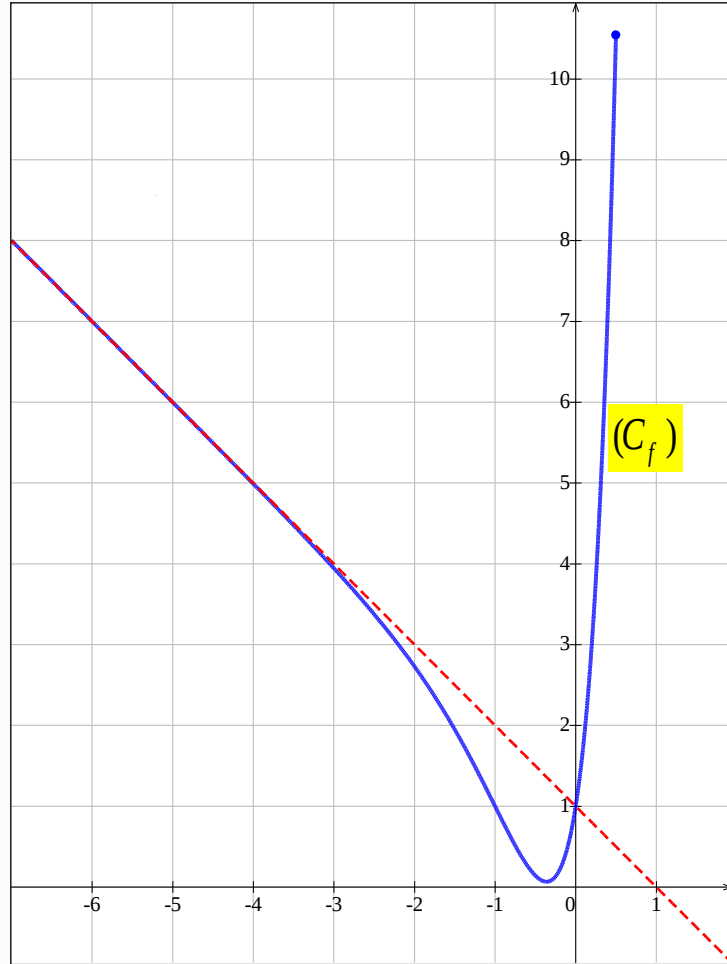
التفسير الهندسي: المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

(4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا: $f(x) - (-x + 1) = xe^{2x+2}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة x .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)

(5) الرسم:



(6) أ. التحقق: من أجل كل عدد حقيقي x :

$$2f(x) + f'(x) - f''(x) = 2xe^{2x+2} - 2x + 2 + e^{2x+2} + 2xe^{2x+2} - 1 - (4x + 4)e^{2x+2} = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$$

ب. إستنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

لدينا: من أجل كل $x \in \mathbb{R}$, $2f(x) + f'(x) - f''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$.

$$\text{ومنهم } f(x) = -\frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2}f''(x) + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}e^{2x+2}.$$

وبالتالي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ من الشكل: $F(x) = \frac{1}{2} \left[-f(x) + f'(x) + x - x^2 - \frac{3}{2}e^{2x+2} \right] + c$

$$\text{أي: } F(x) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right) e^{2x+2} - \frac{1}{2}x^2 + x - 1 + c$$

الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر المستويين (P) و (P') معادلتيهما على الترتيب :
 $2x + y - z + 1 = 0$ و $x - 2y + z - 2 = 0$.

- (1) بين أن المستويين (P) و (P') متقاطعان .
- (2) عين (Γ) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق : $d(M, (P)) = d(M, (P'))$.
- حيث $d(M, (P))$ المسافة بين النقطة M والمستوي (P) و $d(M, (P'))$ المسافة بين النقطة M والمستوي (P') .
- (3) تحقق أن النقطة $A(1; 2; 0)$ تنتمي إلى المجموعة (Γ) .
- (4) H و H' المسقطان العموديان للنقطة A على المستويين (P) و (P') على الترتيب .
 أ- جد تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين (AH) و (AH') .
 ب- استنتج إحداثيات كل من النقطتين H و H' .
- (5) عين إحداثيات النقطة I منتصف القطعة $[HH']$ ثم أحسب مساحة المثلث AHH' .

التمرين الثاني (5ن)

- (I) الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \sqrt{2x + 8}$.
 و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 (1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .
- (2) عين إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) الذي : $y = x$ معادلة له .
- (3) أرسم (C) و (Δ) .
- (II) المتتالية (u_n) معرفة بـ : $u_0 = 0$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.
 (1) مثل في الشكل السابق على محور الفواصل ، الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 (دون حسابها) موضعا خطوط الإنشاء .
- (2) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .
- (3) أ- برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n < 4$.
 ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
 ج- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$.
 ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_n \leq \frac{1}{2^n}(4 - u_0)$.
 د- استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثالث (4,5 ن)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. من أجل كل نقطة M من المستوى لاحقها العدد المركب z

حيث $(z \neq 1)$ نرفق النقطة M' لاحقها العدد المركب z' حيث: $z' = \frac{z-2}{z-1}$.

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z' = z$.

(2) النقطتان A و B لاحقتهما z_1 و z_2 على الترتيب حيث: $z_1 = 1 - i$, $z_2 = \overline{z_1}$.

أ- أكتب $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسّي.

ب- بين أن النقطة B صورة النقطة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ O ، يطلب تعيين زاوية له. نضع: $z' \neq z$. نعتبر النقطتين C و D لاحقتهما 2 و 1 على الترتيب.

(4) عين (Γ) مجموعة النقط M حيث M' تنتمي إلى محور الترتيب ثم أنشئ (Γ) . عين h التحاكي الذي مركزه المبدأ O ونسبته 2.

أ- عين طبيعة التحويل النقطي $S = h \circ R$ وعناصره المميزة.

ب- أكتب العبارة المركبة للتحويل S .

ج- عين ثم أنشئ المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S .

التمرين الرابع (5,6 ن)

(I) الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة g .

(2) أحسب $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ثم بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

(II) الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x - 1$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 1.

(4) بين أن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) حيث: $y = x - 1$ معادلة له.

ب- أدرس الوضع النسبي لـ (C) و (Δ) .

(5) أرسم المستقيمين (T) و (Δ) ثم المنحنى (C) .

(6) m عدد حقيقي. (Δ_m) المستقيم حيث: $y = mx - m$ معادلة له.

أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي، النقطة $A(1; 0)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m) .

ب- ناقش بيانها وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx - m$.

(7) أ- جد دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0; +\infty[$.

ب- أحسب I_n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1$ والمستقيمين اللذين

معادلتيهما $x = 1$ و $x = n$ حيث n عدد طبيعي $(n > 1)$.

ج- عين أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان $n > n_0$ فإن: $I_n > 2$.

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقطتين $A(5; -1; -2)$ و $B(3; 12; -7)$.

$$\begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 1 + 2k \\ z = 4k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \quad (\Delta) \text{ المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطى التالي :}$$

1- أ- عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ') الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}(-2; 1; 1)$ شعاع توجيه له .

ب- بين أن المستقيمين (Δ) و (Δ') متعامدان وأن النقطة $C(1; 1; 0)$ نقطة تقاطعهما .

2- (P) المستوي المعين بالمستقيمين (Δ) و (Δ') .

أ- بين أن الشعاع $\vec{n}(2; 11; -7)$ ناظمي للمستوي (P) ، ثم جد معادلة ديكارتية له .

ب- بين أن النقطة C هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P) .

$$\begin{cases} x = 3 - \beta \\ y = 12 + 12\alpha + 9\beta \\ z = -7 - 6\alpha - 11\beta \end{cases} \quad (3) \quad \alpha \text{ و } \beta \text{ عددا حقيقيان و } (P') \text{ مجموعة النقط } M(x; y; z) \text{ من الفضاء المعرفة بـ :}$$

أ- أثبت أن المجموعة (P') هي مستو ثم تحقق أن $13x - y - 2z - 41 = 0$ هي معادلة ديكارتية له .

ب- عين إحداثيات D و E نقطتي تقاطع المستوي (P') مع المستقيمين (Δ) و (Δ') على الترتيب .

ج- أحسب حجم رباعي الوجوه $BCDE$.

$$(I) \quad f(x) = \frac{5x}{x+2} \quad \text{الدالة العددية المعرفة على المجال } [0; +\infty[\text{ بـ :}$$

$$1) \quad \text{أ- أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) .$$

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$: $f(x) \geq 0$.

$$(II) \quad \text{المتتالية } (u_n) \text{ معرفة بـ : } u_0 = 1, \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \frac{5u_n}{u_n + 2}$$

1) أ- برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 3$.

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

$$2) \quad (v_n) \text{ المتتالية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ كما يلي : } v_n = 1 - \frac{3}{u_n} .$$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ يطلب تعيين حدّها الأول .

ب- أكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n .

$$\text{ج- أحسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n .$$

$$(3) \quad \text{أحسب بدلالة } n \text{ المجموع } S_n \text{ حيث : } S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} .$$

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)(z^2 + \sqrt{3}z + 1) = 0$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A, B و C ثلاث نقط من المستوي لواحقتها على الترتيب: $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ، $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ و $z_C = \overline{z_B}$

أكتب z_A, z_B و z_C على الشكل الأسّي.

بـ بين أنه يوجد تشابه مباشر S مركزه B و يحول النقطة C إلى النقطة A يطلب تعيين عناصره المميزة.

(3) أـ عين لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع، ثم حدد بدقة طبيعته.

بـ عين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق: $|z - z_A| = |\overline{z} - z_B|$

جـ عين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق: $z = z_B + \sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما θ يتغير على $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن $A \in (\Gamma)$

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}$.

(1) أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

بـ أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) أـ بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-1.52 < \alpha < -1.51$.

بـ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

بـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = -g(x)$.

جـ شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$. (نأخذ $f(\alpha) \approx 0.38$)

دـ عين دون حساب: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

(2) أـ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

جـ بين أن المنحنى يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثيهما.

دـ أرسم (Δ) و (C_f) على المجال $[-2; +\infty[$.

هـ ناقش بياناً وحسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m - x)e^x + (x^2 + 3x + 2) = 0$ على المجال $[-2; +\infty[$.

(III) h و H الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = x + f(x)$ و $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

(1) عين الأعداد الحقيقية a, b و c بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

(2) أـ أحسب التكامل التالي: $A(\lambda) = \int_0^\lambda h(x) dx$ ، حيث λ عدد حقيقي موجب تماماً وفسر النتيجة هندسياً.

بـ أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.

حل مقترح التمرين الأول

المستويان (P) و (P') معادلتهما على الترتيب: $2x + y - z + 1 = 0$ و $x - 2y + z - 2 = 0$.
(1) تبيان أن المستويين (P) و (P') متقاطعان:

لدينا: $\vec{n}(2;1;-1)$ شعاع ناظمي لـ (P) و $\vec{n}'(1;-2;1)$ شعاع ناظمي لـ (P') .

لدينا: $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-2}$ ومنه الشعاعان $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ ليسا مرتبطين خطيا وبالتالي المستويان (P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم.

(2) تعيين (Γ) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق: $d(M, (P)) = d(M, (P'))$.

$$d(M, (P)) = d(M, (P')) \text{ معناه } \frac{|2x + y - z + 1|}{\sqrt{6}} = \frac{|x - 2y + z - 2|}{\sqrt{6}} \text{ أي}$$

$$|2x + y - z + 1| = |x - 2y + z - 2|$$

$$\text{أي: } \begin{cases} 2x + y - z + 1 = x - 2y + z - 2 \\ 2x + y - z + 1 = -(x - 2y + z - 2) \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x + 3y - 2z + 3 = 0 \\ 3x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

ومنه مجموعة النقط (Γ) هي اتحاد مستويين معادلتيهما: $x + 3y - 2z + 3 = 0$ و $3x - y - 1 = 0$.

(3) التحقق أن النقطة $A(1; 2; 0)$ تنتمي إلى المجموعة (Γ) :

$$\text{لدينا: } d(A, (P)) = \frac{|2x_A + y_A - z_A + 1|}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}} \text{ و } d(A, (P')) = \frac{|x_A - 2y_A + z_A - 2|}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}} \text{ ومنه } A \in (\Gamma).$$

(4) H' و H المسقطان العموديان للنقطة A على المستويين (P) و (P') على الترتيب.

أ- إيجاد تمثيل وسيطي لكل من المستقيمين (AH) و (AH') .

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ من الشكل: لدينا } \vec{n}(2;1;-1) \text{ شعاع توجيه لـ } (AH) \text{ و } A \in (AH) \text{ ومنه تمثيل وسيطي لـ } (AH) \text{ من الشكل:}$$

و $\vec{n}'(1;-2;1)$ شعاع توجيه لـ (AH') و $A \in (AH')$ ومنه تمثيل وسيطي لـ (AH') من الشكل:

$$\begin{cases} x = t' + 1 \\ y = -2t' + 2 \\ z = t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$$

ب- استنتاج إحداثيات كل من النقطتين H و H' :

النقطة H هي نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (AH) .

$$\text{لدينا } \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = -t \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases} \text{ يكافئ } 2(2t + 1) + (t + 2) - (-t) + 1 = 0 \text{ أي } t = -\frac{5}{6}$$

وبتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطي لـ (AH) نجد $(-\frac{2}{3}; \frac{7}{6}; \frac{5}{6})$ وهي إحداثيات النقطة H .

النقطة H' هي نقطة تقاطع المستوي (P') والمستقيم (AH') .

$$\text{لدينا } \begin{cases} x = t' + 1 \\ y = -2t' + 2 \\ z = t' \\ x - 2y + z - 2 = 0 \end{cases} \text{ يكافئ } t' + 1 - 2 - 2t' + 2 + t' - 2 = 0 \text{ أي } t' = \frac{5}{6}$$

وبتعويض قيمة t' في التمثيل الوسيط لـ (AH') نجد $(\frac{11}{6}; \frac{1}{3}; \frac{5}{6})$ وهي إحداثيات النقطة H' .
جـ- تعيين إحداثيات النقطة I منتصف القطعة $[HH']$:

$$\text{لدينا: } I\left(\frac{x_H + x_{H'}}{2}; \frac{y_H + y_{H'}}{2}; \frac{z_H + z_{H'}}{2}\right) = I\left(\frac{7}{12}; \frac{3}{4}; \frac{5}{6}\right) \text{ ومنه } \text{حساب مساحة المثلث } AHH'$$

لدينا: $AH = AH'$ وبالتالي المثلث AHH' متساوي الساقين ومنه $S_{AHH'} = \frac{1}{2} HH' \times AI$

$$\text{ولدينا: } \overrightarrow{HH'} = \left(\frac{15}{6}; -\frac{5}{6}; 0\right) \text{ أي } HH' = \frac{5\sqrt{10}}{6}, \text{ و } \overrightarrow{AI} = \left(-\frac{5}{12}; -\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right) \text{ أي } AI = \frac{5\sqrt{14}}{12}$$

$$\text{ومنه } S_{AHH'} = \frac{25}{72} \sqrt{35} (u.a)$$

حل مقترح التمرين الثاني

(I) الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \sqrt{2x+8}$

$$(1) \text{ أـ } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+8} = +\infty$$

بـ- دراسة اتجاه تغير الدالة:

$$\text{الدالة } f \text{ قابلة للإشتقاق على المجال } [0; +\infty[\text{ و } f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+8}} = \frac{1}{\sqrt{2x+8}}$$

ولدينا: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ ، $f'(x) > 0$ ، ومنه الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$\sqrt{8}$	$+\infty$

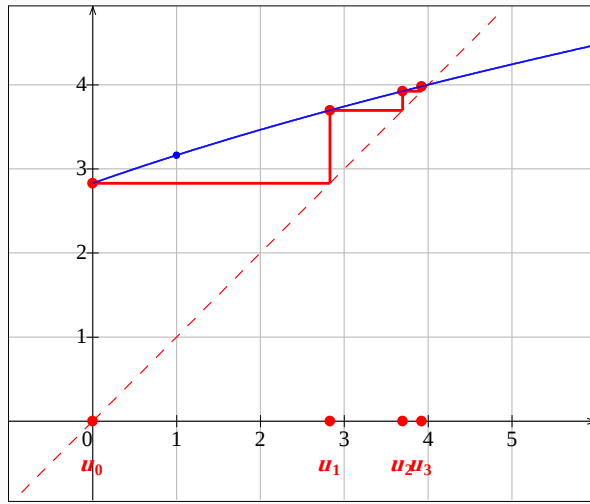
(2) تعيين إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) الذي: $y = x$ معادلة له.

نحل في المجال $[0; +\infty[$ المعادلة: $f(x) = x$

$$f(x) = x \text{ تكافئ } \sqrt{2x+8} = x \text{ تكافئ } \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x+8 = x^2 \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases} \text{ أي } (x+2)(x-8) = 0$$

ومنه $x = 4$. إذن نقطة تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) هي: $A(4; 4)$.

(3) الرسم:



(II) المتتالية (u_n) معرفة بـ : $u_0 = 0$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) الرسم : أنظر الشكل .

(2) التخمين : المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة نحو العدد 4 .

(3) أ- البرهان بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n < 4$ ،

نسوي $P(n)$ الخاصية : من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < 4$.

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = 0$ ومنه $0 \leq u_0 < 4$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة .

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $0 \leq u_n < 4$ ، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0 \leq u_{n+1} < 4$.

لدينا حسب الفرض $0 \leq u_n < 4$ وبما أن الدالة f متزايدة تماماً فإن $f(0) \leq f(u_n) < f(4)$

أي $0 \leq 2\sqrt{2} \leq u_{n+1} < 4$ وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n < 4$.

ب- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n + 8} - u_n = \frac{(\sqrt{2u_n + 8} - u_n)(\sqrt{2u_n + 8} + u_n)}{\sqrt{2u_n + 8} + u_n} = \frac{2u_n + 8 - u_n^2}{\sqrt{2u_n + 8} + u_n} = \frac{(4 - u_n)(2 + u_n)}{\sqrt{2u_n + 8} + u_n}$$

وبما أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 - u_n > 0$ و $2 + u_n > 0$ فإن $u_{n+1} - u_n > 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة .

ج- تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n :

$$4 - u_{n+1} = 4 - \sqrt{2u_n + 8} = \frac{(4 - \sqrt{2u_n + 8})(4 + \sqrt{2u_n + 8})}{4 + \sqrt{2u_n + 8}} = \frac{8 - 2u_n}{4 + \sqrt{2u_n + 8}} = \frac{2(4 - u_n)}{4 + \sqrt{2u_n + 8}}$$

ومن جهة أخرى : $0 \leq u_n < 4$ يكافئ $\frac{1}{4 + \sqrt{2u_n + 8}} \leq \frac{1}{4}$ ومنه $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_n \leq \frac{1}{2^n}(4 - u_0)$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$ ، وهذا يعني :

$$\begin{cases} 4-u_1 \leq \frac{1}{2}(4-u_0) \\ 4-u_2 \leq \frac{1}{2}(4-u_1) \\ 4-u_3 \leq \frac{1}{2}(4-u_2) \\ \dots \\ \dots \\ 4-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4-u_n) \end{cases}$$

بالضرب طرف لطرف نجد $(4-u_1)(4-u_2)\dots(4-u_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4-u_0)(4-u_1)\dots(4-u_{n-1})$

ومنه : من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_n \leq \frac{1}{2^n}(4-u_0)$. (يمكن إستخدام البرهان بالتراجع)

د- استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $4-u_n \leq \frac{1}{2^n}(4-u_0)$ ، ولدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4-u_n) = 0$

أي : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$

حل مقترح التمرين الثالث

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z' = z$:

$z' = z$ تكافئ $\frac{z-2}{z-1} = z$ تكافئ $z-2 = z(z-1)$ تكافئ $z^2 - 2z + 2 = 0$ ، حيث $(z \neq 1)$

لنحل $\mathbb{C}$ في المعادلة $z^2 - 2z + 2 = 0$:

لدينا : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 = 4i^2 = (2i)^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_2 = \frac{2+2i}{2} = 1+i \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{2-2i}{2} = 1-i$$

(2) لدينا : $z_2 = \overline{z_1}$ ، $z_1 = 1-i$

أ- كتابة $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسّي :

$$\frac{z_2}{z_1} = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{ومنه} \quad \frac{z_2}{z_1} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)^2}{2} = i$$

ب- تبين أن النقطة B صورة النقطة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ O ، مع تعيين زاوية له .

لدينا : $\frac{z_2}{z_1} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ يكافئ $z_2 - z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_1 - z_0)$ ومنه النقطة B صورة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ O

وزاوية له $\frac{\pi}{2}$.

(3) نضع : $z' \neq z$. نعتبر النقطتين C و D لاحقتيهما 2 و 1 على الترتيب .

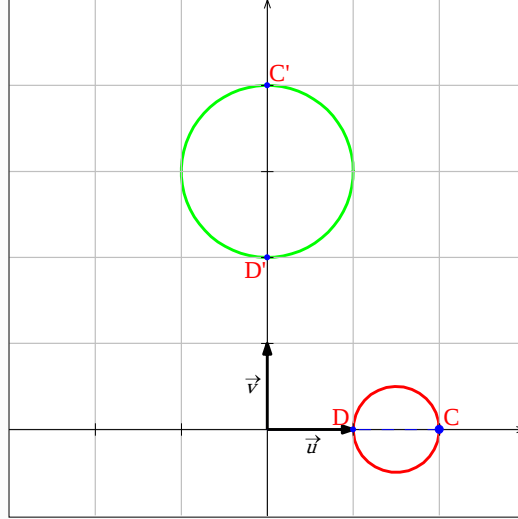
تعيين (Γ) مجموعة النقط M حيث M' تنتمي إلى محور الترتيب :

$$\text{لدينا : } \arg(z') = \arg\left(\frac{z-2}{z-1}\right) = \arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_D}\right) \quad (z' \neq 0)$$

$$\arg\left(\frac{z - z_C}{z - z_D}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad / \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{أي} \quad \arg(z') = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad / \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(\overrightarrow{DM}; \overrightarrow{CM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad / \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{أي}$$

(إذا كان $z' = 0$ فإن $z = 2$ وهذا يعني أن M منطبقة على C)
 إذن المجموعة (Γ) هي الدائرة التي قطرها $[CD]$ باستثناء النقطة D .
 إنشاء (Γ) :



4 أ- تعيين طبيعة التحويل النقطي $S = h \circ R$ وعناصره المميزة :

لدينا : h التماكي الذي مركزه المبدأ O ونسبته 2 و R الدوران الذي مركزه المبدأ O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ومنه S هو التشابه

الذي مركزه O ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

ب- كتابة العبارة المركبة للتحويل S :

$$z' - z_O = 2e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_O) \quad \text{ومنه} \quad z' = 2iz$$

ج- تعيين المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S :

المجموعة (Γ') هي الدائرة التي قطرها $[CD']$ باستثناء النقطة D' ، بحيث : $S(D) = D'$ و $S(C) = C'$.

$$z_{D'} = 2iz_D = 2i, \quad z_{C'} = 2iz_C = 2 \times 2i = 4i$$

الإنشاء : أنظر الشكل .

حل مقترح التمرين الرابع

(I) الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

(1) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ومن أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$.

إشارة $g'(x)$ من إشارة $2x^2 - 1$:

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		-	0 +

الدالة g متناقصة على المجال $\left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ ومتزايدة على المجال $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right]$.

$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 \quad (2)$$

الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $]0; +\infty[$ هي $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ وبالتالي من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

(II) f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x - 1$

(1) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{x} + x - 1 \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ ، لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} + x - 1 \right) = +\infty$$

(2) أ- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ،

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ومن أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} + 1 = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$ ،

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$ ، إذن من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $f'(x) > 0$ ، وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

ب- جدول تغيرات الدالة f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(3) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 1 :

لدينا : $(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ و منه $(T) : y = 2x - 2$.

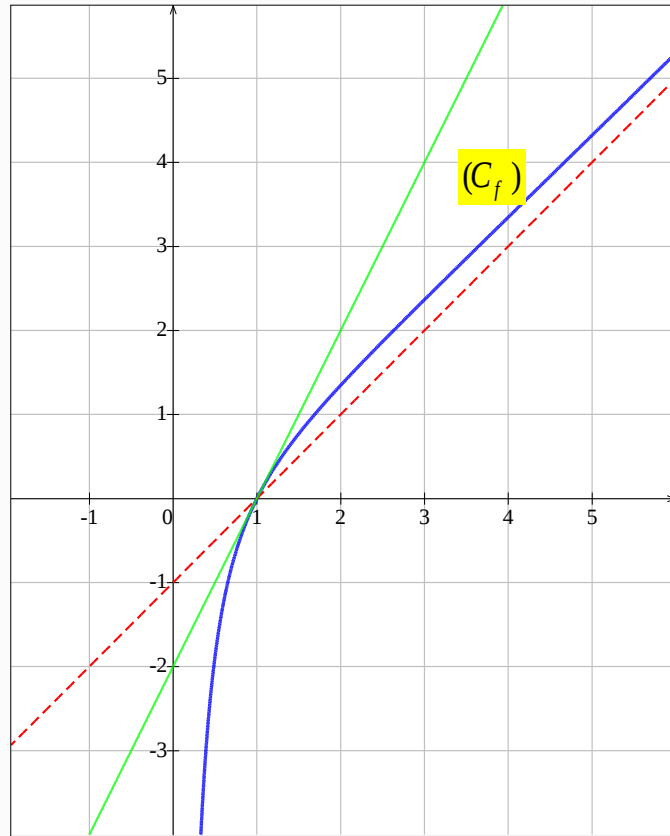
(4) أ- لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و منه المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائل (Δ)

حيث : $y = x - 1$ معادلته.

ب- دراسة الوضع النسبي لـ (C) و (Δ) :

لدينا $f(x) - y = \frac{\ln x}{x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $\ln x$:

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ) (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1; 0)$ (C_f) فوق (Δ)		



(6) m عدد حقيقي . (Δ_m) المستقيم حيث : $y = mx - m$ معادلة له .

أ- التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي m ، النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m) .

لدينا $y_A = mx_A - m$ أي $0 = m - m$ وبالتالي من أجل كل عدد حقيقي m ، $A \in (\Delta_m)$ ،

ب- المناقشة البيانية :

لدينا : (Δ_m) معامل توجيهه m ويشمل النقطة $A(1;0)$.

إذا كان $m \in]-\infty; 1]$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا .

إذا كان $m \in]1; 2]$ فإن المعادلة تقبل حلين .

إذا كان $m = 2$ فإن المعادلة تقبل حل (مضاعف) وهو 1.

إذا كان $m \in]2; +\infty[$ فإن المعادلة تقبل حلين .

(7) أ- إيجاد دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0; +\infty[$.

دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على $]0; +\infty[$ من الشكل : $x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$. (لاحظ أن $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ من الشكل $u' \times u$)

ب- حساب I_n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1$ والمستقيمين اللذين

معادلتيهما $x = 1$ و $x = n$ حيث n عدد طبيعي ($n > 1$) .

$$I_n = \int_1^n [f(x) - (x - 1)] dx = \int_1^n \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2 \right]_1^n = \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

ج- تعيين أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان $n > n_0$ فإن $I_n > 2$.

$I_n > 2$ معناه $(\ln n)^2 > 4$ أي $\ln n > 2$ أو $\ln n < -2$ (مرفوض) ومنه $n > e^2$ وعليه : أصغر قيمة لـ n_0 هي $n_0 = 8$.

حل مقترح التمرين الأول

A و B نقطتان من الفضاء بحيث : $A(5; -1; -2)$ و $B(3; 12; -7)$.

$$\begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 1 + 2k \\ z = 4k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \quad (\Delta) \text{ المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطى التالي :}$$

(1) أ- تمثيل وسيطى للمستقيم (Δ') الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}(-2; 1; 1)$ شعاع توجيه له من الشكل :

$$\begin{cases} x = -2t + 5 \\ y = t - 1 \\ z = t - 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

ب- تبيان أن المستقيمين (Δ) و (Δ') متعامدان :

لدينا : $\vec{v}(3; 2; 4)$ شعاع توجيه لـ (Δ) و $\vec{u}(-2; 1; 1)$ شعاع توجيه لـ (Δ') و $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \times 3 + 2 + 4 = 0$ ومنه $(\Delta) \perp (\Delta')$.

تبيان أن $C(1; 1; 0)$ هي نقطة تقاطع (Δ) و (Δ') :

يكفي إثبات أن $C \in (\Delta)$ و $C \in (\Delta')$.

$$\begin{cases} 1 = 1 + 3k \\ 1 = 1 + 2k \\ 0 = 4k \end{cases} \quad \text{لأن } C \in (\Delta) \quad \text{أي } k = 0 \text{ (قيمة ثابتة ووحيدة لـ } k \text{).}$$

$$\begin{cases} 1 = -2t + 5 \\ 1 = t - 1 \\ 0 = t - 2 \end{cases} \quad \text{لأن } C \in (\Delta') \quad \text{أي } t = 2 \text{ (قيمة ثابتة ووحيدة لـ } t \text{).}$$

(2) (P) المستوي المعين بالمستقيمين (Δ) و (Δ') .

أ- تبيان أن الشعاع $\vec{n}(2; 11; -7)$ ناظمى للمستوي (P) :

يكفي إثبات أن $\vec{n} \perp \vec{u}$ و $\vec{n} \perp \vec{v}$.

لدينا : $\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 \times (-2) + 11 - 7 = 0$ و $\vec{n} \perp \vec{u}$ ، و $\vec{n} \cdot \vec{v} = 2 \times 3 + 11 \times 2 - 7 \times 4 = 0$ ومنه $\vec{n} \perp \vec{v}$.

• إيجاد معادلة ديكارتية للمستوي (P) .

(P) يشمل النقطة C و $\vec{n}(2; 11; -7)$ شعاع ناظمى له ومنه لـ (P) معادلة من الشكل : $2x + 11y - 7z + 13 = 0$.

ب- تبيان أن النقطة C هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P) :

يكفي إثبات أن $\vec{n}$ و $\vec{CB}$ مرتبطان خطيا.

لدينا : $\vec{CB}(2; 11; -7)$ و $\vec{CB} = \vec{n}$.

(يمكن كذلك إثبات أن $CB = d(B; (P))$)

$$\begin{cases} x = 3 - \beta \\ y = 12 + 12\alpha + 9\beta \\ z = -7 - 6\alpha - 11\beta \end{cases} \quad (3) \quad \alpha \text{ و } \beta \text{ عدنان حقيقيان و } (P') \text{ مجموعة النقط } M(x; y; z) \text{ من الفضاء المعرفة بـ :}$$

أ- إثبات أن المجموعة (P') هي مستو :

المجموعة (P') معرفة بالثلاثية $(B, \vec{w}; \vec{k})$ بحيث $B(3; 12; -7)$ ، $\vec{w}(0; 12; -6)$ و $\vec{k}(-1; 9; -11)$ وكون $\vec{w}$ و $\vec{k}$ غير

مرتبطتين خطيا فإن (P') هي مستو.

التحقق أن $13x - y - 2z - 41 = 0$ هي معادلة ديكارتية لـ (P') :

يكفي إثبات أن $\vec{n}' \perp \vec{w}$ و $\vec{n}' \perp \vec{k}$ بحيث $\vec{n}'(13; -1; -2)$ شعاع ناظمي لـ (P') .

لدينا : $\vec{n}' \cdot \vec{w} = -1 \times 12 + (-6) \times (-2) = 0$ ومنه $\vec{n}' \perp \vec{w}$ ، و $\vec{n}' \cdot \vec{k} = 13 \times (-1) - 1 \times 9 - 2 \times (-11) = 0$ ومنه $\vec{n}' \perp \vec{k}$.

بـ تعيين إحداثيات D و E نقطتي تقاطع المستوي (P') مع المستقيمين (Δ) و (Δ') على الترتيب :

$$\begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 1 + 2k \\ z = 4k \\ 13x - y - 2z - 41 = 0 \end{cases} \quad \text{لدينا}$$

يكافئ $13(1 + 3k) - (1 + 2k) - 2(4k) - 41 = 0$ أي $k = 1$.

وبتعويض قيمة k في التمثيل الوسيط لـ (Δ) نجد $(4; 3; 4)$ وهي إحداثيات النقطة D .

$$\begin{cases} x = -2t + 5 \\ y = t - 1 \\ z = t - 2 \\ 13x - y - 2z - 41 = 0 \end{cases} \quad \text{لدينا}$$

يكافئ $13(-2t + 5) - (t - 1) - 2(t - 2) - 41 = 0$ أي $t = 1$.

وبتعويض قيمة t في التمثيل الوسيط لـ (Δ') نجد $(3; 0; -1)$ وهي إحداثيات النقطة E .

جـ حساب حجم رباعي الوجوه $BCDE$:

$$V_{BCDE} = \frac{1}{3} S_{CDE} \times CB = \frac{1}{6} \times CB \times CD \times CE \quad \text{إذن } S_{CDE} = \frac{1}{2} \times CD \times CE \quad \text{ومنه } C \text{ المثلث } CDE \text{ قائم في } C$$

لدينا : $\vec{CB} (2; 11; -7)$ ومنه $CB = \sqrt{174}$ ، و $\vec{CD} (3; 2; 4)$ ومنه $CD = \sqrt{29}$ ، و $\vec{CE} (2; -1; -1)$ ومنه $CE = \sqrt{6}$.

$$V_{BCDE} = \frac{1}{6} \times CB \times CD \times CE = 29 \quad \text{إذن :}$$

حل مقترح التمرين الثاني

(I) الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{5x}{x+2}$.

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x}{x+2} \right) = 5.$$

بـ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

$$\text{الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على المجال } [0; +\infty[\text{ و } f'(x) = \frac{5(x+2) - 5x}{(x+2)^2} = \frac{10}{(x+2)^2}$$

ولدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ ، $f'(x) > 0$ ، ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	5

(2) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$: $f(x) \geq 0$.

من جدول التغيرات : من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$: $0 \leq f(x) \leq 5$ أي : $f(x) \geq 0$.

(II) المتتالية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = 1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{5u_n}{u_n + 2}$

(1) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 3$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 3$ " .

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = 1$ ومنه $1 \leq u_0 \leq 3$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $1 \leq u_n \leq 3$ ، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $1 \leq u_{n+1} \leq 3$.

لدينا حسب الفرض $1 \leq u_n \leq 3$ وبما أن الدالة متزايدة تماماً فإن $f(1) \leq f(u_n) \leq f(3)$ أي $1 \leq \frac{5}{3} \leq u_{n+1} \leq 3$

وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

• الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 3$.

ب- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5u_n}{u_n + 2} - u_n = \frac{5u_n - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{-u_n^2 + 3u_n}{u_n + 2} = \frac{u_n(3 - u_n)}{u_n + 2}$$

وبما أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $3 - u_n \geq 0$ و $2 + u_n > 0$ فإن $u_{n+1} - u_n \geq 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة

المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 3، إذن فهي متقاربة.

(2) (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$.

أ- تبيان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$:

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1} = 1 - \frac{3}{u_{n+1}} = 1 - \frac{3}{\frac{5u_n}{u_n + 2}} = 1 - \frac{3(u_n + 2)}{5u_n} = \frac{5u_n - 3u_n - 6}{5u_n} = \frac{2u_n - 6}{5u_n} = \frac{2(u_n - 3)}{5u_n} = \frac{2}{5} \left(1 - \frac{3}{u_n} \right) = \frac{2}{5} v_n$$

ومن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$ وحدها الأول $v_0 = 1 - \frac{3}{u_0} = -2$.

ب- كتابة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه $v_n = -2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

كتابة u_n بدلالة n :

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$ ومنه $\frac{3}{u_n} = 1 - v_n$ أي $u_n = \frac{3}{1 - v_n}$ إذن: $u_n = \frac{3}{1 + 2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n}$.

ج- حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{1 + 2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n} \right) = 3$ لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$.

(3) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$.

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$ ومنه $\frac{3}{u_n} = 1 - v_n$ أي: $\frac{1}{u_n} = \frac{1 - v_n}{3} = \frac{1}{3}(1 - v_n)$.

$$S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} = \frac{1}{3} \left[(1+1+1+\dots+1) - (v_0 + v_1 + \dots + v_n) \right] = \frac{1}{3} \left[(n+1) - \left(v_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) \right] : \text{إذن}$$

$$. S_n = \frac{1}{3} \left[(n+1) + \frac{10}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1} \right) \right] : \text{أي}$$

حل مقترح التمرين الثالث

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) (z^2 + \sqrt{3}z + 1) = 0$ (1)

. $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$ أو $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ تكافئ : $\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) (z^2 + \sqrt{3}z + 1) = 0$

لنحل $\mathbb{C}$ في المعادلة $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$

لدينا : $\Delta = (\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 1 = -1 = i^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

. $z_2 = \frac{-\sqrt{3}+i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ و $z_1 = \frac{-\sqrt{3}-i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

. $S = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i ; -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i ; \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right\}$ إذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي :

(2) $z_C = \overline{z_B}$ و $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ، $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

أكتب z_A, z_B, z_C على الشكل الأسّي :

. لدينا : $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ومنه : $|z_A| = 1$

وبفرض θ_A عمدة للعدد المركب z_A ، يكون : $\begin{cases} \cos \theta_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_A = \frac{1}{2} \end{cases}$ ومنه $\arg(z_A) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$

إذن : $z_A = e^{i\frac{\pi}{6}}$

لدينا : $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ومنه : $|z_B| = 1$

وبفرض θ_B عمدة للعدد المركب z_B ، يكون : $\begin{cases} \cos \theta_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_B = \frac{1}{2} \end{cases}$ ومنه $\arg(z_B) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$

إذن : $z_B = e^{i\frac{5\pi}{6}}$

لدينا : $z_C = \overline{z_B} = e^{-i\frac{5\pi}{6}} = e^{i\frac{7\pi}{6}}$ ومنه :

ب- تبين أنه يوجد تشابه مباشر S مركزه B ويحول النقطة C إلى النقطة A مع تعيين عناصره المميزة :

لدينا : $z_A - z_B = i\sqrt{3}(z_C - z_B)$ أي $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)}{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)} = \frac{\sqrt{3}}{-i} = i\sqrt{3}$

ومنه يوجد تشابه مباشر S مركزه B و يحول النقطة C إلى النقطة A بنسبة $\sqrt{3}$ وزاوية له $\theta = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$.
(3) أـ تعيين لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع:

$$ABCD \text{ متوازي أضلاع معناه: } z_D - z_C = z_A - z_B \text{ ومنه } z_D = z_A - z_B + z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

طبيعة الرباعي $ABCD$:

$$\text{لدينا: } \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = i\sqrt{3} \text{ يعني: } \begin{cases} \left| \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \right| = \sqrt{3} \\ \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ ومنه } \left(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA} \right) = \frac{\pi}{2} \text{ وبالتالي } ABCD \text{ مستطيل}$$

بـ تعيين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق: $|z - z_A| = |\bar{z} - z_B|$.

$$|z - z_A| = |\bar{z} - z_B| \text{ تكافئ } |z - z_A| = |z - \bar{z}_B| \text{ تكافئ } |z - z_A| = |z - z_C| \text{ تكافئ } AM = CM$$

وبالتالي مجموعة النقط (E) هي محور القطعة $[AC]$.

جـ تعيين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق: $z = z_B + \sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما θ يتغير على $\mathbb{R}$:

$$z = z_B + \sqrt{3}e^{i\theta} \text{ تكافئ } z - z_B = \sqrt{3}e^{i\theta} \text{ وهذا يعني: } |z - z_B| = |\sqrt{3}e^{i\theta}| \text{ أي } BM = \sqrt{3}$$

وبالتالي مجموعة النقط (Γ) هي الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها $\sqrt{3}$.

التحقق أن $A \in (\Gamma)$:

$$\text{لدينا: } |z_A - z_B| = \sqrt{3} \text{ أي } AB = \sqrt{3} \text{ وبالتالي } A \in (\Gamma)$$

حل مقترح التمرين الرابع

I الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}$.

(1) حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}] = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}] = +\infty$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x :

$$g'(x) = (2x + 1)e^{-x} - (x^2 + x - 1)e^{-x} = (-x^2 + x + 2)e^{-x} = (2 - x)(x + 1)e^{-x}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(2 - x)(x + 1)$:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

الدالة g متزايدة على المجال $[-1; 2]$ ومتناقصة على كل من المجالين $]-\infty; -1]$ و $[2; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$	$1-e$	$1+5e^{-2}$	1	

(3) أ- تبين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم والآخر α حيث : $-1.52 < \alpha < -1.51$.

لدينا : $g(0) = 1 + (0^2 + 0 - 1)e^0 = 1 - 1 = 0$

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; -1[$ و $]-1; -1.51[\subset]-1.52; -1.51[$ و $g(-1.52) \approx 0,041$
 $g(-1.51) \approx -0,040$

أي $g(-1.52) \times g(-1.51) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $]-\infty; -1[$ حلا وحيدا α حيث : $-1.52 < \alpha < -1.51$.

ب- إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$	
$g(x)$	+	0	-	0	+

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$.

(1) أ- حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}] = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}] = +\infty$$

ب- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = -1 + (2x + 3)e^{-x} - (x^2 + 3x + 2)e^{-x} = -1 - (x^2 + x - 1)e^{-x} = -g(x)$$

ج- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	2	$-\infty$

$$\text{د- } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} = f'(\alpha) = -g(\alpha) = 0$$

التفسير الهندسي : المنحنى (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة α معامل توجيهه معدوم .

(يوازي حامل محور الفواصل)

$$(2) \text{ أ- } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3x + 2)e^{-x} = 0 \text{ ومنه المستقيم } (\Delta) \text{ ذو المعادلة } y = -x \text{ مقارب مائل}$$

للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

$$\text{لدينا : } f(x) - (-x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x} = (x+1)(x+2)e^{-x} \text{ ومنه إشارة الفرق من إشارة } (x+1)(x+2)$$

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$	
$f(x)-y$	$+$	0	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(Δ) فوق (C_f)		(Δ) تحت (C_f)		(Δ) فوق (C_f)
	(Δ) يقطع (C_f)		(Δ) يقطع (C_f)		
	في النقطة $B(-2;2)$		في النقطة $A(-1;1)$		

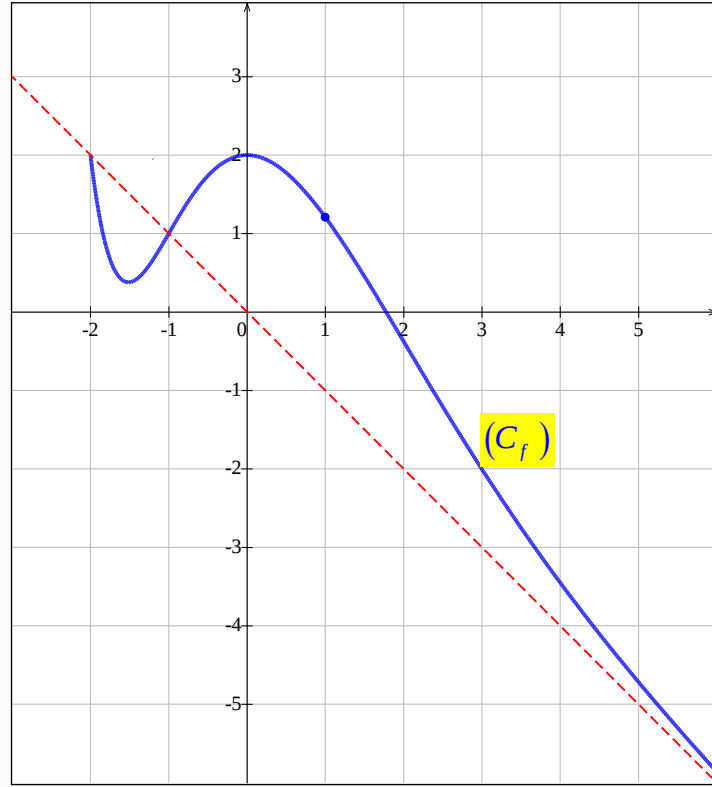
ج- تبين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف :

$$\text{لدينا : الدالة } f' \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R} \text{ ومن أجل كل عدد حقيقي } x, f''(x) = -g'(x) = (x-2)(x+1)e^{-x}$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0

إشارة $f''(x)$:

ومن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف هما : $A(-1; 1)$ و $C(2; -2 + 12e^{-2})$.



هـ- المناقشة البيانية :

المعادلة $(m-x)e^x + (x^2 + 3x + 2) = 0$ تكافئ $f(x) = -m$.

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = -m$.

لما $m \in]-f(\alpha); +\infty[$ يكون $m \in]-\infty; f(\alpha)[$ و المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا .

لما $m = -f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين أحدهما موجب والآخر سالب .

لما $m \in]-2; -f(\alpha)[$ يكون $m \in]f(\alpha); 2[$ و المعادلة تقبل ثلاثة حلول ، إثنان سالبان والآخر موجب .

لما $m = -2$ المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب والآخر معدوم .

(III) h و H الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = x + f(x) = (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$ و $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

(1) تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$:

H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$ يعني : من أجل كل عدد حقيقي x ، $H'(x) = h(x)$.

الدالة H قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x ،

$$H'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x}$$

ومنه بالمطابقة نجد : $a = -1$ ، $b = -5$ ، و $c = -7$ أي $H(x) = (-x^2 - 5x - 7)e^{-x}$.

(2) أ- حساب التكامل : $A(\lambda) = \int_0^\lambda h(x) dx$ ، حيث $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

$$A(\lambda) = \int_0^\lambda h(x) dx = [H(x)]_0^\lambda = (-\lambda^2 - 5\lambda - 7)e^{-\lambda} + 7$$

التفسير الهندسي :

$A(\lambda)$ يمثل مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x$ والمستقيمين اللذين

معادلتيهما $x = 0$ و $x = \lambda$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

ب- $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} [(-\lambda^2 - 5\lambda - 7)e^{-\lambda} + 7] = 7$.

الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن)

- 1) نضع من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = z^3 - 24\sqrt{3}$.
 أ- تحقق أن: $P(2\sqrt{3}) = 0$.
 ب- جد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z - 2\sqrt{3})(z^2 + az + b)$.
 ج- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z) = 0$.
 2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A ، B و C نقط من المستوي لواحقتها على الترتيب :
 $z_C = 2\sqrt{3}$ و $z_B = -\sqrt{3} - 3i$ ، $z_A = -\sqrt{3} + 3i$
 أ- أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
 ب- بين أنه يوجد دوران R مركزه A و يحول النقطة B إلى النقطة C ، يطلب تعيين زاويته .
 ج- استنتج طبيعة المثلث ABC .
 د- عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ ، ثم حدد بدقة طبيعة الرباعي $ABDC$.
 3) عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة غير المعدومة z بحيث : $\arg\left(\frac{z}{z}\right) = 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

التمرين الثاني (4ن)

- الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1; 0; 2)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(2; 1; -1)$ وليكن (Δ') المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيط التالي : $(\lambda \in \mathbb{R})$:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

 1) أ- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) .
 ب- بين أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي .
 2) أ- بين أن النقطة $B(-1; 3; 1)$ هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ') .
 ب- تحقق أن المستقيم (AB) عمودي على كل من المستقيمين (Δ) و (Δ') .
 ج- استنتج المسافة بين المستقيمين (Δ) و (Δ') .
 3) لتكن N نقطة إحداثياتها $(-2+t; 2+t; t)$ حيث $(t \in \mathbb{R})$ ولتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(t) = AN^2$.
 أ- بين أن النقطة N تنتمي إلى المستقيم (Δ') ، ثم أكتب عبارة $h(t)$ بدلالة t .
 ب- استنتج قيمة العدد الحقيقي t التي تكون من أجلها المسافة AN أصغرا يمكن . ثم قارن بين القيمة الصغرى للدالة h والمسافة AB .

التمرين الثالث (5ن)

- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [0; 4]$ بـ : $f(x) = \frac{13x}{9x + 13}$.
 1) أ- بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I .

- بـ. بين أنه من أجل كل من المجال I ، $f(x)$ ينتمي الى المجال I .
- (2) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بعدها الأول $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.
 أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 4$.
 بـ. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .
- (3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \neq 0$.
- (4) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = 2 + \frac{13}{u_n}$.
 أـ برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 .
 بـ. أكتب v_n بدلالة n .
- جـ. استنتج أن : $u_n = \frac{52}{36n + 13}$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الرابع (7ن)

- (I) الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $g(x) = -1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)$. (العدد e هو أساس اللوغاريتم النيبيري)
- (1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .
- (2) بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلا وحيدا α حيث $-0,33 < \alpha < -0,34$.
- (3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x على المجال $]-1; +\infty[$.
- (II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) أـ بين أن $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ وأحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، فسّر النتيجة هندسيا .
- بـ. بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$.
- جـ. أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .
- دـ. أرسم المنحنى (C_f) . (نقبل أن : $f(\alpha) = 3,16$)
- (2) أـ. بين أن الدالة $\left[1 + \ln(x+1)\right] \frac{-1}{x+1}$ هي دالة أصلية للدالة $\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1; +\infty[$.
- بـ. أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بحامل محور الفواصل والمنحنى (C_f) والمستقيمين اللذين معادلتيهما : $x=0$ و $x=1$.
- (3) نعتبر الدالة العددية k المعرفة على $]-1; 1[$ بـ : $k(x) = f(-|x|)$ ، (C_k) تمثيلها لبياني في المعلم السابق .
 أـ. بين أن الدالة k زوجية .
- بـ. بين كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) ثم أرسمه . (دون دراسة تغيرات الدالة k)
- جـ. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $k(x) = m$.

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(2; 1; -3)$ ، $B(0; -1; 2)$ و $C(-3; -1; -1)$.
 1) أ- بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا.

ب- بين أن المعادلة: $2x - 7y - 2z - 3 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A ويعامد المستقيم (BC) .

3) أ- جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) تقاطع المستويين (ABC) و (P) .

ب- بين أن المستقيم (D) عمود في المثلث ABC .

4) ليكن (Δ) المتوسط المتعلق بالضلع $[AC]$ في المثلث ABC .

$$\text{أ- بين أن الجملة } (k \in \mathbb{R}) \text{، } \begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k \\ y = k \\ z = -2 - 4k \end{cases} \text{ تمثيل وسيطي للمستقيم } (\Delta).$$

ب- بين أن المستقيمين (Δ) و (D) يتقاطعان في نقطة G يطلب تعيين إحداثياتها.

ج- بين أن المثلث ABC متساوي الساقين.

د- ماذا تمثل النقطة G بالنسبة للمثلث ABC ؟

5) عين طبيعة وعناصر المجموعة (E) للنقط M من الفضاء والتي تحقق: $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 3$.

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $(E) \dots\dots\dots 2\bar{z}^3 + 3\bar{z}^2 - 3\bar{z} + 5 = 0$

يشير الرمز $\bar{z}$ إلى مرافق العدد المركب z .

1) أ- أثبت أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة: $(2\bar{z} + 5)(\bar{z}^2 - \bar{z} + 1) = 0$.

ب- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقتها على الترتيب:

$$z_D = -\frac{5}{2} \quad , \quad z_C = -1 \quad , \quad z_B = \bar{z}_A \quad , \quad z_A = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

أ- أكتب كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسّي.

ب- أنشئ النقط A ، B ، C و D .

ج- أثبت أن: $z_B - z_C = z_B(z_A - z_C)$.

د- استنتج طبيعة المثلث ABC .

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ولتكن F صورة A بالتحويل S .

أنشئ النقطة F ثم حدد طبيعة المثلث AFC .

4) عين طبيعة المجموعة (γ) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z + 1 = kz_B$. لما يتغير k في المجموعة $\mathbb{R}_+$.

التمرين الثالث (4,5)

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3}$

ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$

(1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

(2) أـ عبر بدلالة n عن الحد العام v_n .

بـ استنتج عبارة الحد u_n العام بدلالة n .

جـ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) أـ أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

بـ تحقق أن : $\frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_n)$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n .

جـ أحسب بدلالة n المجموع : $S'_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2}$.

التمرين الرابع (6)

(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 2e^x - x^2 - x$.

(1) أـ أحسب ($g'(x)$) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، ثم أدرس اتجاه تغير الدالة (g' حيث g' هي مشتقة الدالة g)

بـ بين أنه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) > 0$.

جـ أحسب نهايتي الدالة g عند كل من $+\infty$ وعند $-\infty$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1,38 < \alpha < -1,37$.

(3) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - x}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$) .

(1) أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

بـ بين أنه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = \frac{x e^x g(x)}{(e^x - x)^2}$ (حيث f' هي مشتق الدالة f) .

جـ أدرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) أـ بين أن : $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

بـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

جـ أنشئ المنحنى (C_f) . (تعطى $f(\alpha) \approx 0,29$)

حل مقترح التمرين الأول

(1) نضع من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = z^3 - 24\sqrt{3}$

أ- التحقق : $P(2\sqrt{3}) = (2\sqrt{3})^3 - 24\sqrt{3} = 24\sqrt{3} - 24\sqrt{3} = 0$

ب- إيجاد العددين a و b :

$$P(z) = (z - 2\sqrt{3})(z^2 + az + b) = z^3 + (a - 2\sqrt{3})z^2 + (b - 2\sqrt{3}a)z - 2\sqrt{3}b$$

والمطابقة نجد : $b = 12$ ، $a = 2\sqrt{3}$

ج- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z) = 0$

$$P(z) = 0 \text{ تكافئ } (z - 2\sqrt{3})(z^2 + 2\sqrt{3}z + 12) = 0 \text{ تكافئ } z = 2\sqrt{3} \text{ أو } z^2 + 2\sqrt{3}z + 12 = 0$$

لنحل $\mathbb{C}$ في المعادلة : $z^2 + 2\sqrt{3}z + 12 = 0$

لدينا : $\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 12 = -36 = 36i^2 = (6i)^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_2 = \frac{-2\sqrt{3} + 6i}{2} = -\sqrt{3} + 3i \text{ و } z_1 = \frac{-2\sqrt{3} - 6i}{2} = -\sqrt{3} - 3i$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $P(z) = 0$ هي : $S = \{2\sqrt{3}; -\sqrt{3} - 3i; -\sqrt{3} + 3i\}$

$$z_C = 2\sqrt{3} \text{ و } z_B = -\sqrt{3} - 3i \text{ ، } z_A = -\sqrt{3} + 3i \quad (2)$$

أ- كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2\sqrt{3} - (-\sqrt{3} + 3i)}{-\sqrt{3} - 3i - (-\sqrt{3} + 3i)} = \frac{3\sqrt{3} - 3i}{-6i} = \frac{3\sqrt{3}i + 3}{6} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ب- تبين أنه يوجد دوران R مركزه A و يحول النقطة B إلى النقطة C :

لدينا : $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ أي $z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$ وبالتالي النقطة C هي صورة

النقطة B بالدوران R الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

ج- استنتاج طبيعة المثلث ABC :

$$\left\{ \begin{array}{l} AC = AB \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} \end{array} \right. \text{ ومنه } \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ يعني } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ لدينا :}$$

د- تعيين z_D :

z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ معناه : $z_D = z_C + z_{\overrightarrow{AB}}$

$$\text{أي : } z_D = z_C + z_B - z_A = 2\sqrt{3} - 6i$$

طبيعة الرباعي $ABDC$:

لدينا $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ لأن النقطة D صورة النقطة C بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ وبما أن المثلث ABC متقايس الأضلاع فإن الرباعي $ABDC$ معين.

(3) تعيين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة غير المعدومة z بحيث : $\arg\left(\frac{z}{z}\right) = 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

$$\arg\left(\frac{z}{z}\right) = 2k\pi \text{ تكافئ } (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) = 2k\pi \text{ (نظيرة } M \text{ بالنسبة لحامل محور الفواصل)}$$

ومنه المجموعة (Γ) هي حامل محور الفواصل باستثناء النقطة O .

حل مقترح التمرين الثاني

(Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1;0;2)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(2;1;-1)$

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \text{ ، } (\Delta') \text{ المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيط التالي :}$$

(1) أ- كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) :

(Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1;0;2)$ و $\vec{u}(2;1;-1)$ شعاع توجيهه ومنه تمثيل وسيطي لـ (Δ) من الشكل :

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t \\ z = -t + 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

ب- تبيان أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي :

لنثبت أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا متوازيين وليسا متقاطعين.

لندرس التوازي :

لدينا $\vec{v}(1;1;1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ') و $\vec{u}(2;1;-1)$ شعاع توجيه لـ (Δ) ومنه $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ليسا مرتبطين خطيا

لأن $x_u \neq x_v$ و $y_u = y_v$ وبالتالي المستقيمان (Δ) و (Δ') ليسا متوازيين.

لندرس التقاطع :

$$\begin{cases} t = -5 \\ \lambda = -9 \\ 7 \neq -7 \end{cases} \text{ ، الجملة لا تقبل حل وبالتالي المستقيمان } (\Delta) \text{ و } (\Delta') \text{ ليسا متقاطعين.}$$

(2) أ- تبيان أن النقطة $B(-1;3;1)$ هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ') :

يكفي إثبات أن $B \in (\Delta')$ و $\overrightarrow{AB} \perp \vec{v}$.

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \text{ نجد } \lambda = -1 \text{ ومنه } B \in (\Delta').$$

لدينا $\overrightarrow{AB}(-2;3;-1)$ و $\vec{v}(1;1;1)$ ومنه $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = -2 \times 1 + 3 \times 1 - 1 \times 1 = 0$ إذن $\overrightarrow{AB} \perp \vec{v}$.

ب- التحقق أن المستقيم (AB) عمودي على كل من المستقيمين (Δ) و (Δ') :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \vec{v} \\ \overrightarrow{AB} \perp \vec{u} \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = -2 \times 1 + 3 \times 1 - 1 \times 1 = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = -2 \times 2 + 3 \times 1 - 1 \times (-1) = 0 \end{cases} \text{ لدينا :}$$

ج- استنتاج المسافة بين المستقيمين (Δ) و (Δ') :

لدينا : $B \in (\Delta')$ و $A \in (\Delta)$ و (AB) عمودي على كل من (Δ) و (Δ') ومنه : $d((\Delta), (\Delta')) = AB = \sqrt{14}$.

(3) نقطة إحداثياتها $(-2+t; 2+t; t)$ حيث $t \in \mathbb{R}$ و h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$: $h(t) = AN^2$.

أ- تبيان أن النقطة N تنتمي إلى المستقيم (Δ') :

$$\text{بوضع } \lambda = -2 + t \text{ نجد : } \begin{cases} x = \lambda = -2 + t \\ y = 4 + \lambda = 4 - 2 + t = 2 + t \\ z = 2 + \lambda = 2 - 2 + t = t \end{cases} \text{ ومنه } N \in (\Delta') .$$

• كتابة عبارة $h(t)$ بدلالة t :

$$h(t) = AN^2 = (t-3)^2 + (t+2)^2 + (t-2)^2 = 3t^2 - 6t + 17$$

بـ استنتاج قيمة العدد الحقيقي t التي تكون من أجلها المسافة AN أصغر ما يمكن :

الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي t ، $h'(t) = 6t - 6$ ،

جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h'(x)$		0	+
$h(x)$		14	

تكون المسافة AN أصغر ما يمكن من أجل $t = 1$ و $AN = \sqrt{h(1)} = \sqrt{14}$.

المقارنة بين القيمة الصغرى للدالة h والمسافة AB :

القيمة الحدية الصغرى للدالة h تساوي AB^2 ، أو $AB = \sqrt{h(1)} = \sqrt{14}$.

حل مقترح التمرين الثالث

الف الدالة المعرفة على المجال $I = [0; 4]$ بـ : $f(x) = \frac{13x}{9x + 13}$.

(1) أـ تبين أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال I :

$$\text{الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على المجال } [0; 4] \text{ و } f'(x) = \frac{13(9x + 13) - 9 \times 13x}{(9x + 13)^2} = \frac{169}{(9x + 13)^2}$$

ولدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; 4]$ ، $f'(x) > 0$ ، ومنه الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0; 4]$.

بـ تبين أنه من أجل كل من المجال I ، $f(x)$ ينتمي الى المجال I :

لدينا : الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0; 4]$ ومنه من أجل كل $x \in [0; 4]$ ، $f(x) \in [f(0); f(4)]$ ،

أي : $f(x) \in [0; \frac{52}{49}]$ ولدينا $[0; \frac{52}{49}] \subset [0; 4]$ إذن : من أجل كل $x \in [0; 4]$ ، $f(x) \in [0; 4]$ ،

(2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

أـ البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 4$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 4$ " .

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = 4$ ومنه $0 \leq u_0 \leq 4$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة .

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $0 \leq u_n \leq 4$ ، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0 \leq u_{n+1} \leq 4$.

لدينا حسب الفرض $0 \leq u_n \leq 4$ ومنه $0 \leq f(u_n) \leq 4$ (حسب نتيجة السؤال 1 بـ) أي $0 \leq u_{n+1} \leq 4$

وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 4$.

بـ دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} - u_n = \frac{13u_n}{9u_n + 13} - u_n = \frac{13u_n - u_n(9u_n + 13)}{9u_n + 13} = \frac{-9u_n^2}{9u_n + 13}$$

وبما أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $-9u_n^2 \leq 0$ فإن $u_{n+1} - u_n \leq 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

■ المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 ، إذن فهي متقاربة .

(3) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \neq 0$

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \neq 0$ "

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = 4$ ومنه $u_0 \neq 0$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة .

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $u_n \neq 0$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1} \neq 0$.

لدينا حسب الفرض $u_n \neq 0$ ومنه $f(u_n) \neq 0$ (لأن الدالة f متزايدة تماما على I و $f(0) = 0$) أي $u_{n+1} \neq 0$

وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \neq 0$.

$$(4) (v_n) \text{ المتتالية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ : } v_n = 2 + \frac{13}{u_n}$$

أد تبيان أن المتتالية (v_n) حسابية :

لدينا : من من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1} = 2 + \frac{13}{u_{n+1}} = 2 + \frac{13}{\frac{13u_n}{9u_n + 13}} = 2 + \frac{13(9u_n + 13)}{13u_n} = 2 + \frac{9u_n + 13}{u_n} = 2 + 9 + \frac{13}{u_n} = 9 + v_n$$

$$\text{ومنّه المتتالية } (v_n) \text{ حسابية أساسها } r = 9 \text{ وحدها الأول } v_0 = 2 + \frac{13}{u_0} = \frac{21}{4} .$$

بـ كتابة v_n بدلالة n :

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ ، } v_n = v_0 + nr \text{ ، ومنّه } v_n = \frac{21}{4} + 9n = \frac{21 + 36n}{4} .$$

$$\text{جــ إستنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ ، } u_n = \frac{52}{36n + 13} :$$

$$\text{لدينا : من من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ ، } v_n = 2 + \frac{13}{u_n} \text{ ، ومنّه } \frac{13}{u_n} = v_n - 2 \text{ أي } u_n = \frac{13}{v_n - 2}$$

$$\text{إذن } u_n = \frac{13}{v_n - 2} = \frac{13}{\frac{21 + 36n}{4} - 2} = \frac{13}{\frac{21 + 36n - 8}{4}} = \frac{13 \times 4}{21 + 36n - 8} = \frac{52}{36n + 13}$$

■ حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{52}{36n + 13} \right) = 0$$

حل مقترح التمرين الرابع

(I) الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $g(x) = -1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)$.

(1) دراسة تغيرات الدالة g :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} [-1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)] = -\infty$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$: $g'(x) = e + \frac{2}{x+1}$

من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$ ، $g'(x) > 0$ وبالتالي الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$.

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(2) تبين أنه للمعادلة $g(x) = 0$ حلا وحيدا α حيث $-0,34 < \alpha < -0,33$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $]-1; +\infty[$ و $\begin{cases} g(-0,34) \approx -0,03 \\ g(-0,33) \approx 0,02 \end{cases}$ أي $g(-0,34) \times g(-0,33) < 0$ ومنه

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-0,34 < \alpha < -0,33$.

(3) إشارة $g(x)$:

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$

(1) أ- تبين أن $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{e}{x+1} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{1}{(x+1)^2} \times \ln(x+1) \right] = -\infty \end{cases} \quad \text{لأن : } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} \right] = -\infty$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \quad \text{لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x+1} \right) \left[e + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = 0$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ (حامل محور الفواصل) مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب- تبين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$ ،

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$:

$$f'(x) = -\frac{e}{(x+1)^2} + \frac{\frac{1}{x+1} \times (x+1)^2 - 2(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-e(x+1) + 1 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^3} = \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$$

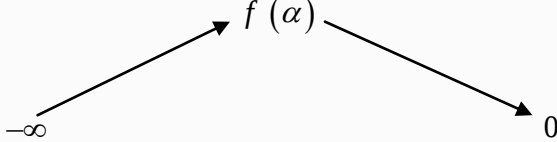
ج- دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$:

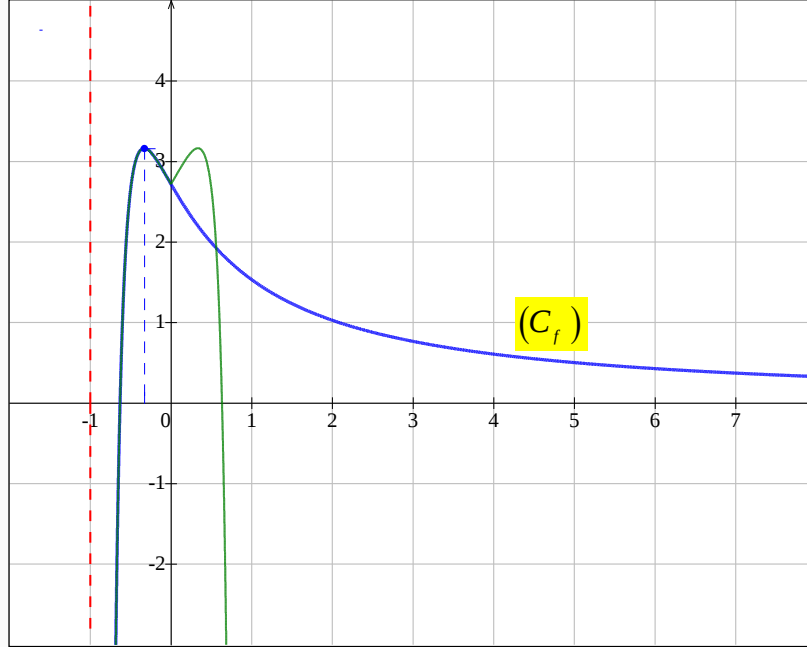
x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-

الدالة f متناقصة على المجال $[\alpha; +\infty[$ و متزايدة على المجال $]-1; \alpha]$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$		$f(\alpha)$ 	

د- الرسم :



(2) أ- تبين أن الدالة $x \mapsto \frac{-1}{x+1} [1 + \ln(x+1)]$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1; +\infty[$

نضع : $h(x) = \frac{-1}{x+1} [1 + \ln(x+1)]$ ، الدالة h قابلة للإشتقاق على $]-1; +\infty[$ ومن أجل كل $x \in]-1; +\infty[$:

$$h'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} [1 + \ln(x+1)] + \left(\frac{1}{x+1} \right) \times \left(\frac{-1}{x+1} \right) = \frac{1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

ب- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بمحور الفواصل والمنحنى (C_f) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 0$ و $x = 1$:

$$S = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left[\frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} \right] dx = \left[e \ln(x+1) - \frac{1}{x+1} [1 + \ln(x+1)] \right]_0^1 = \frac{1 + (2e - 1) \ln 2}{2}$$

(3) k الدالة العددية المعرفة على $]-1; 1[$ ب : $k(x) = f(-|x|)$

أ- تبين أن الدالة k زوجية :

المجال $]-1; 1[$ متناظر بالنسبة للصفر ومن أجل كل $x \in]-1; 1[$: $k(-x) = f(-|-x|) = f(-|x|) = k(x)$ وبالتالي الدالة k زوجية .

ب- شرح كيفية إنشاء المنحنى (C_k) انطلاقاً من المنحنى (C_f) :

$$k(x) = f(-|x|) = \begin{cases} f(x); x \in]-1; 0] \\ f(-x); x \in [0; 1[\end{cases}$$

إذن : من أجل $x \in]-1; 0]$ ، (C_k) ينطبق على (C_f) ونتم الرسم باستخدام التناظر بالنسبة لحامل محور الترتيب لكون k زوجية .

الرسم : أنظر الشكل .

- حلول المعادلة $(x) = m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_k) مع المستقيم ذو المعادلة $y = m$.
- إذا كان $m > f(\alpha)$ فإن المعادلة لا تقبل حولا .
- إذا كان $m = f(\alpha)$ فإن المعادلة تقبل حلين (مضاعفين) مختلفين في الإشارة .
- إذا كان $e < m < f(\alpha)$ فإن المعادلة تقبل 4 حلول ، حلان سالبان و حلان موجبان .
- إذا كان $m = e$ فإن المعادلة تقبل 3 حلول ، حل سالب وآخر موجب والثالث معدوم .
- إذا كان $m < e$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

تصحيح مقترح للموضوع الثاني

حل مقترح التمرين الأول

$A(2;1;-3)$ ، $B(0;-1;2)$ و $C(-3;-1;-1)$.

(1) أدتبيان أن النقط A ، B و C تعين مستويا .

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-2;-2;5)$ و $\overrightarrow{AC}(-5;-2;2)$.

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا لأن $y_{\overrightarrow{AB}} = y_{\overrightarrow{AC}}$ لكن $x_{\overrightarrow{AB}} \neq x_{\overrightarrow{AC}}$ ومنه النقط A ، B و C ليست في استقامية وبالتالي فهي تعين مستويا .

ب- تبيان أن المعادلة : $2x - 7y - 2z - 3 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :
يكفي إثبات أن إحداثيات النقط A ، B و C تحقق المعادلة .

$$2x_A - 7y_A - 2z_A - 3 = 2 \times 2 - 7 \times 1 - 2 \times (-3) - 3 = 0 \text{ لأن } A \in (ABC)$$

$$2x_B - 7y_B - 2z_B - 3 = 2 \times 0 - 7 \times (-1) - 2 \times 2 - 3 = 0 \text{ لأن } B \in (ABC)$$

$$2x_C - 7y_C - 2z_C - 3 = 2 \times (-3) - 7 \times (-1) - 2 \times (-1) - 3 = 0 \text{ لأن } C \in (ABC)$$

(2) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A ويعامد المستقيم (BC) :

المستوي (P) يشمل النقطة $A(-3;0;-3)$ شعاع $\overrightarrow{BC}$ ناظمي له ومنه معادلة (P) من الشكل : $-3x - 3z + d = 0$

وبما أن $A \in (P)$ فإن $-3x_A - 3z_A + d = 0$ ومنه $d = -3$ وبالتالي $-3x - 3z - 3 = 0$ هي معادلة للمستوي (P) .

(3) أكتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (D) تقاطع المستويين (ABC) و (P) :

$$\begin{cases} x = -t - 1 \\ y = -\frac{4}{7}t - \frac{5}{7} \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{ومنه بوضع } z = t \text{ نجد : } \begin{cases} 2x - 7y - 2z - 3 = 0 \\ -3x - 3z - 3 = 0 \end{cases}$$

ب- تبيان أن المستقيم (D) عمود في المثلث ABC :

لدينا $A \in (D)$ لأن $A \in (P) \cap (ABC)$ ولدينا $\vec{u}(-1;-\frac{4}{7};1)$ شعاع توجيه للمستقيم (D) .

وبما أن $\vec{u} \cdot \overrightarrow{BC} = -1 \times (-3) + 0 \times \left(-\frac{4}{7}\right) + 1 \times (-3) = 0$ فإن $\vec{u} \perp \overrightarrow{BC}$ وبالتالي (D) عمود في المثلث ABC .

(4) (Δ) المتوسط المتعلق بالضلع $[AC]$ في المثلث ABC .

$$\text{أ- تبيان أن الجملة } (k \in \mathbb{R}) \text{ ، } \begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k \\ y = k \\ z = -2 - 4k \end{cases} \text{ تمثيل وسيطي للمستقيم } (\Delta).$$

(Δ) هو المستقيم الذي يشمل النقطة B والنقطة $I\left(-\frac{1}{2}; 0; -2\right)$ منتصف الضلع $[AC]$ ، ومنه $\vec{BI}\left(-\frac{1}{2}; 1; -4\right)$ شعاع

$$\text{توجيه لـ } (\Delta) \text{ وبالتالي تمثيل وسيطي لـ } (\Delta) \text{ من الشكل : } (k \in \mathbb{R}) \text{ ، } \begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k \\ y = k \\ z = -2 - 4k \end{cases}$$

ب- تبيان أن المستقيمين (Δ) و (D) يتقاطعان في نقطة G مع تعيين إحداثياتها :

لدينا $\vec{u}\left(-1; -\frac{4}{7}; 1\right)$ شعاع توجيه للمستقيم (D) و $\vec{BI}\left(-\frac{1}{2}; 1; -4\right)$ شعاع توجيه لـ (Δ) و $\vec{u}$ و $\vec{BI}$ ليسا مرتبطين خطيا .

وبالتالي المستقيمان (Δ) و (D) إما ليسا من نفس المستوي أو متقاطعان .

$$\text{نحل الجملة } \begin{cases} -t - 1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k \\ -\frac{4}{7}t - \frac{5}{7} = k \\ t = -2 - 4k \end{cases} \text{ فنجد } k = -\frac{1}{3}$$

وبتعويض قيمة k في الجملة نجد $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ وهي إحداثيات النقطة G نقطة تقاطع المستقيمين

ج- تبيان أن المثلث ABC متساوي الساقين :

لدينا : $\vec{AB}(-2; -2; 5)$ و $\vec{AC}(-5; -2; 2)$ ومنه $AC = AB = \sqrt{33}$ وبالتالي المثلث ABC متساوي الساقين .

د- ماذا تمثل النقطة G بالنسبة للمثلث ABC ؟

النقطة G هي مركز ثقل المثلث ABC ، لأنها نقطة تقاطع المتوسطات .

(Δ) المتوسط المتعلق بالضلع $[AC]$ و (D) العمود والمتوسط المتعلق بالضلع $[BC]$ و ($G \in (D) \cap (\Delta)$)

(5) تعيين طبيعة وعناصر المجموعة (E) للنقط M من الفضاء والتي تحقق : $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 3$

$\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 3$ تكافئ $\|3\vec{MG}\| = 3$ تكافئ $MG = 1$ ومنه المجموعة (E) هي سطح كرة مركزها G

ونصف قطرها 1.

حل مقترح التمرين الثاني

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : (E) $2\bar{z}^3 + 3\bar{z}^2 - 3\bar{z} + 5 = 0$

(1) لـ إثبات أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة : $(2\bar{z} + 5)(\bar{z}^2 - \bar{z} + 1) = 0$

لدينا : $(2\bar{z} + 5)(\bar{z}^2 - \bar{z} + 1) = 2\bar{z}^3 - 2\bar{z}^2 + 2\bar{z} + 5\bar{z}^2 - 5\bar{z} + 5 = 2\bar{z}^3 + 3\bar{z}^2 - 3\bar{z} + 5$

ومنه المعادلة (E) تكافئ المعادلة : $(2\bar{z} + 5)(\bar{z}^2 - \bar{z} + 1) = 0$

ب- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

$$2\bar{z}^3 + 3\bar{z}^2 - 3\bar{z} + 5 = 0 \text{ تكافئ } (2\bar{z} + 5)(\bar{z}^2 - \bar{z} + 1) = 0 \text{ تكافئ } \bar{z} = -\frac{5}{2} \text{ أو } \bar{z}^2 - \bar{z} + 1 = 0.$$

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $\bar{z}^2 - \bar{z} + 1 = 0$.

لدينا: $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 = 3i^2 = (\sqrt{3}i)^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما:

$$\bar{z}_2 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{و} \quad \bar{z}_1 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ومنه } z_2 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة (E) هي: $S = \left\{ -\frac{5}{2}; \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$

$$(2) \text{ لدينا: } z_D = -\frac{5}{2}, \quad z_C = -1, \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z_A = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

أ- كتابة كلا من العددين z_B و z_A على الشكل الأسّي:

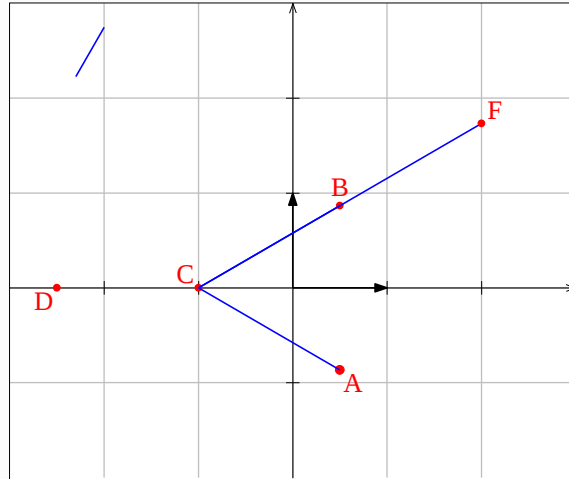
$$\text{لدينا: } z_A = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ومنه: } |z_A| = 1.$$

$$\text{وبفرض } \theta_A \text{ عمدة للعدد المركب } z_A, \text{ يكون: } \begin{cases} \cos \theta_A = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_A = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ ومنه } \arg(z_A) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{إذن: } z_A = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{لدينا: } z_B = \overline{z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ومنه } z_B = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ب- الرسم:



ج- إثبات أن: $z_B - z_C = z_B(z_A - z_C)$

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} + 1} = \frac{\frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\left(\frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{2} + i \frac{3\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = z_B$$

د- إستنتاج طبيعة المثلث ABC :

لدينا : $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ يعني : $\begin{cases} \left| \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$ وبالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع $CB = CA$ ومنه $\left(\overline{CA}; \overline{CB}\right) = \frac{\pi}{3}$ (3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

النقطة F صورة النقطة A بالتشابه المباشر S يعني : $CF = 2CA$ و $\left(\overline{CA}; \overline{CF}\right) = \frac{\pi}{3}$.
 طبيعة المثلث AFC :
 المثلث AFC قائم في A .

(4) تعيين طبيعة المجموعة (γ) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $z + 1 = kz_B$. لما يتغير k في المجموعة $\mathbb{R}_+$.

$$z + 1 = kz_B \text{ يكافئ } z - z_C = kz_B - z_C = ke^{i\frac{\pi}{3}} \text{ يكافئ } z - z_C = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ يكافئ } \arg(z - z_C) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

يكافئ $\left(\vec{u}; \overline{CM}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ومنه المجموعة (γ) هي نصف مستقيم مبدؤه C وشعاع توجيهه $\vec{w}$ بحيث $\left(\vec{u}; \vec{w}\right) = \frac{\pi}{3}$.

حل مقترح التمرين الثالث

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحددها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3}$

ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$

(1) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا : من من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\frac{2u_n + 2}{u_n + 3} - 1}{\frac{2u_n + 2}{u_n + 3} + 2} = \frac{\frac{2u_n + 2 - (u_n + 3)}{u_n + 3}}{\frac{2u_n + 2 + 2(u_n + 3)}{u_n + 3}} = \frac{u_n - 1}{4u_n + 8} = \frac{u_n - 1}{4(u_n + 2)} = \frac{1}{4}v_n$$

ومن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = -\frac{1}{2}$.

(2) أ- كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه $v_n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

ب- استنتاج عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

لدينا : من من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$ ومنه $v_n(u_n + 2) = u_n - 1$ ومنه $v_n u_n + 2v_n - u_n = -1$

أي $u_n(v_n - 1) = -1 - 2v_n$ وبالتالي $u_n = \frac{-1 - 2v_n}{v_n - 1} = \frac{1 + 2v_n}{1 - v_n}$.

$$u_n = \frac{1 + 2v_n}{1 - v_n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n} \text{ إذن :}$$

ج- حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n} \right] = 1$$

(3) أ- حساب المجموع S_n :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \times \left[\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right] = -\frac{1}{2} \times \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} \right] = -\frac{2}{3} \times \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right]$$

$$\frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_n) \text{ ب- التحقق أن :}$$

$$u_n + 2 = \frac{3}{1 - v_n} \text{ ومنه } u_n + 2 = \frac{1 + 2v_n}{1 - v_n} + 2 \text{ ومنه } u_n = \frac{1 + 2v_n}{1 - v_n}, n \text{ لدينا : من أجل كل عدد طبيعي } n$$

$$\frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_n) \text{ أي}$$

ج- حساب المجموع S'_n :

$$S'_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_0) + \frac{1}{3}(1 - v_1) + \dots + \frac{1}{3}(1 - v_n)$$

$$S'_n = \frac{1}{3}[(1 + 1 + \dots + 1) - (v_0 + v_1 + \dots + v_n)] = \frac{1}{3}[n + 1 - S_n] \text{ ومنه}$$

$$S'_n = \frac{1}{3} \left[n + 1 + \frac{2}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right) \right] = \frac{1}{9} \left[3n + 5 - 2 \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right] \text{ أي}$$

حل مقترح التمرين الرابع

(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 2e^x - x^2 - x$.

1) أ- الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) = 2e^x - 2x - 1$ ، دراسة اتجاه تغير الدالة g' :

الدالة g' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $g''(x) = 2e^x - 2 = 2(e^x - 1)$ ، إشارة $g''(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$	-	0	+

الدالة g' متناقصة على المجال $]-\infty; 0]$ و متزايدة على المجال $[0; +\infty[$.

ب- تبين أنه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) > 0$

الدالة g' تقبل قيمة حدية صغرى على $\mathbb{R}$ هي $g'(0) = 1$ ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) > 0$

ج- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{2e^x}{x^2} - 1 - \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - x^2 - x) = -\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

جدول تغيرات الدالة g :

(2) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1,38 < \alpha < -1,37$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\begin{cases} g(-1,38) \approx -0,02 \\ g(-1,37) \approx 0,001 \end{cases}$ أي $g(-1,38) \times g(-1,37) < 0$ ومنه حسب

مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1,38 < \alpha < -1,37$.

(3) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$		0	+

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - x}$.

(1) أ- حساب النهايات:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x) = +\infty \end{cases} \quad \text{لأن: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 e^x}{e^x - x} \right) = 0$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 e^x}{e^x - x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{1 - x e^{-x}} \right) = +\infty$$

ب- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = \frac{(2x e^x + x^2 e^x)(e^x - x) - (e^x - 1)x^2 e^x}{(e^x - x)^2} = \frac{x e^x [(2+x)(e^x - x) - x(e^x - 1)]}{(e^x - x)^2} = \frac{x e^x g(x)}{(e^x - x)^2}$$

ج- دراسة اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x \cdot g(x)$:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

الدالة f متناقصة على المجال $[\alpha; 0]$ و متزايدة على كل من المجالين $]-\infty; \alpha]$ و $[0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$ $f(\alpha)$ 0 $\nearrow$ $\searrow$ $+\infty$				

(2) أ- تبيان أن: $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^2 e^\alpha}{e^\alpha - \alpha} = \frac{\alpha^2 \left(\frac{\alpha^2 + \alpha}{2} \right)}{\frac{\alpha^2 + \alpha}{2} - \alpha} = \frac{\alpha^2 (\alpha^2 + \alpha)}{\alpha^2 - \alpha} = \frac{\alpha^3 + \alpha^2}{\alpha - 1} \quad \text{ومنه } e^\alpha = \frac{\alpha^2 - \alpha}{2} \quad \text{أي } g(\alpha) = 0 \quad \text{لدينا:}$$

$$\cdot f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$$

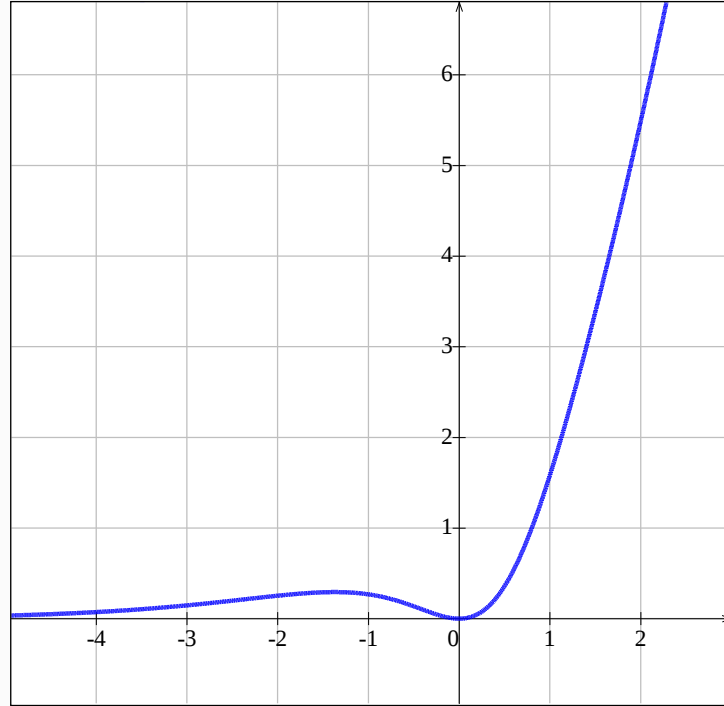
إستنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} -0,76 < 2\alpha + 2 < -0,74 \\ (-1,37)^2 < \alpha^2 < (-1,38)^2 \\ -2,38 < \alpha - 1 < -2,37 \end{array} \right. \text{ لدينا : } -1,38 < \alpha < -1,37 \text{ يكافئ } 0,27 < f(\alpha) < 0,32 \text{ ومنه } -\frac{2}{2,37} < \frac{2}{\alpha - 1} < -\frac{2}{2,38}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 e^x}{e^x - x} - x^2 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{e^x - x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^x}{x^3} - \frac{1}{x^2}} \right) = 0 \text{ بـ.}$$

التفسير البياني : المنحنى (C_f) والمنحنى الممثل للدالة "مربع" $(x \mapsto x^2)$ متقاربان عند $+\infty$.

جـ. الرسم :



الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن)

- الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقطة $A(1; -1; 2)$ والمستوي (P) ذا المعادلة $x - y + z + 2 = 0$.
- والمستقيم (D) المعرف بـ :
$$\begin{cases} x + y - 9 = 0 \\ y + z - 4 = 0 \end{cases}$$
- (1) عيّن تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (D) .
- (2) جد معادلة ديكارتية للمستوي (P') الذي يشمل A ويوازي (P) .
- (3) أثبت أن (D) يقطع (P') في النقطة $A'(6; 3; 1)$.
- (4) عيّن تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) الذي يشمل A ويوازي (P) ويقطع (D) .

التمرين الثاني (4ن)

- (u_n) و (v_n) متاليتان معرفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي :
- $u_0 = \frac{1}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n + 4}$ و $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$.
- (1) أ- برهن بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$.
ب- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً ثم استنتج أنها متقاربة .
- (2) أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ ثم عبّر عن حدها العام v_n بدلالة n .
ب- أثبت أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 - \frac{3}{v_n + 1}$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثالث (5ن)

- (I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z + 2)(z^2 - 4z + 8) = 0$.
- (II) المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
- نعتبر النقط A ، B و C التي لاحتقاتها : $z_A = 2 - 2i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -2$.
- (1) أكتب كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسّي .
- (2) عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة B مركز ثقل المثلث ACD .
- (3) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A و B) بحيث : $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \frac{\pi}{2}$.
- تحقق أن مبدأ المعلم O هو نقطة من (Γ) ثم عيّن طبيعة المجموعة (Γ) وأنشئها .
- (4) ليكن h التحاكي الذي مركزه النقطة C ونسبته 2 ، (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h .
عيّن طبيعة المجموعة (Γ') مع تحديد عناصرها المميزة .

التمرين الرابع (7)

نعتبر الدالة f المعرفة على D حيث $D =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$:

(1) (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(2) بين أن الدالة f فردية ثم فسّر ذلك بيانياً.

(3) أحسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور الترتيب.

(4) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D ، $f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)$.

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(5) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$

(6) أ- بين المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = \frac{2}{3}x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(7) m وسيط حقيقي ، ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $(2-3|m|)x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(3; 0; 0)$ ، $B(0; 2; 0)$ و $C(0; 0; 1)$.

(1) بين أن النقط A ، B و C تعين مستويًا ، ثم تحقق أن: $2x + 3y + 6z - 6 = 0$ معادلة للمستوي (ABC) .

(2) أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) العمودي على المستوي (ABC) والذي يشمل المبدأ O .

(3) جد إحداثيات H نقطة تقاطع (Δ) و (ABC) .

(4) بين أن (BH) عمودي على (AC) ، ثم استنتج أن H هي نقطة تلاقي أعمدة المثلث ABC .

التمرين الثاني (4)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و

f الدالة المعرفة على المجال $[-4; 1]$ كما يلي: $f(x) = \frac{3x-16}{x+11}$.

و (C_f) المنحنى الممثل لها ، (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y = x$.

(I) تحقق أن الدالة متزايدة تماماً على المجال $[-4; 1]$. ثم بين أن:

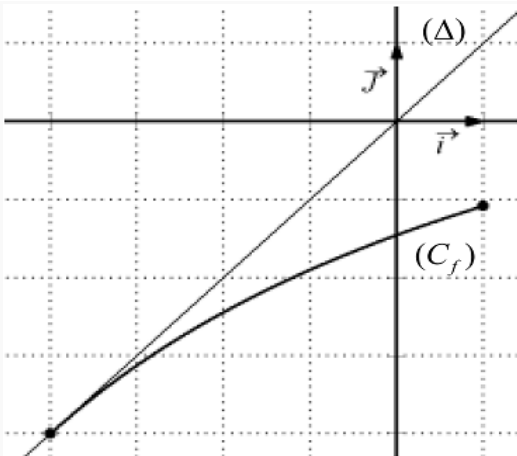
من أجل $x \in [-4; 1]$ فإن $f(x) \in [-4; 1]$.

(II) (u_n) متتالية عددية معرفة بعدها الأول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد

طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) أ- أنقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 دون حسابها.

ثم ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها



(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-4 \leq u_n \leq 0$ ،

ثم بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

(3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$

أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{7}$ ، ثم أحسب المجموع S حيث : $S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \dots + v_{2016} \times u_{2016}$.

التمرين الثالث(5ن)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة مما يلي :

(1) مجموعة حلول المعادلة $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2 = 1$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي : $S = \left\{-\frac{1}{2} + i\right\}$.

(2) من أجل كل عدد مركب z ، $(z+2)(\bar{z}+2) = |z+2|^2$.

(3) من أجل كل عدد طبيعي n ، $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} = 1$.

(4) S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة 1 ونسبته 3 وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

صورة الدائرة (C) ذات المركز $\omega(0;1)$ ونصف القطر 3 بالتشابه S هي الدائرة (C') ذات المركز $\omega'(-2;-3)$ ونصف القطر 9

(5) من أجل كل عدد حقيقي : إذا كان $z = (\sin \alpha + i \cos \alpha) \times (\cos \alpha - i \sin \alpha)$ فإن $\arg(z) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2k\pi$ حيث k عدد صحيح .

التمرين الرابع(7ن)

(I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = 2 - x^2 e^{1-x}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ وأعط تفسيراً هندسياً للنتيجة ، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) أـ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = x(x-2)e^{1-x}$ ،

بـ أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) أكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

(II) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $h(x) = 1 - x e^{1-x}$.

(1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x) \geq 0$ ، ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) .

(2) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-0,7 < \alpha < -0,6$.

(3) أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[-1; +\infty[$.

(4) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $F(x) = 2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$.

- تحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، حامل محور الفواصل

و المستقيمين اللذين معادليهما : $x = 0$ و $x = 1$.

حل مقترح التمرين الأول

الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقطة $A(1; -1; 2)$ والمستوي (P) ذا المعادلة $x - y + z + 2 = 0$ (1) تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (D) :

$$\begin{cases} x = -t + 9 \\ y = t \\ z = -t + 4 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{نجد } y = t \quad \text{ومنه بوضع } y = t \quad \begin{cases} x + y - 9 = 0 \\ y + z - 4 = 0 \end{cases} \quad (D) \text{ المستقيم المعرف بـ:}$$

تمثيل وسيطي للمستقيم (D) .

(2) إيجاد معادلة ديكارتية للمستوي (P') الذي يشمل A ويوازي (P) :

(P) يوازي (P') معناه $\vec{n}(1; -1; 1)$ شعاع ناظمي لـ (P') ، ومنه لـ (P') معادلة من الشكل: $x - y + z + d = 0$.

ولدينا: $A \in (P')$ يعني $x_A - y_A + z_A + d = 1 - (-1) + 2 + d = 0$ أي $d = -4$.

إذن معادلة ديكارتية للمستوي (P') من الشكل: $x - y + z - 4 = 0$.

(3) إثبات أن (D) يقطع (P') في النقطة $A'(6; 3; 1)$:

$$\begin{cases} x = -t + 9 \\ y = t \\ z = -t + 4 \\ x - y + z - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{لدينا} \quad \text{يكافئ} \quad (-t + 9) - t + (-t + 4) - 4 = 0 \quad \text{أي } t = 3$$

وبتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطي لـ (D) نجد $(6; 3; 1)$ وهي إحداثيات النقطة A' تقاطع (D) و (P') .

(4) تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) الذي يشمل A ويوازي (P) ويقطع (D) :

$$\begin{cases} (D) \cap (P') \cap (\Delta) = \{A'\} \\ A \in (\Delta) \end{cases} \quad \text{لدينا:} \quad \text{ومنه } (\Delta) \text{ هو نفسه المستقيم } (AA')$$

$$\begin{cases} x = 5t' + 1 \\ y = 4t' - 1 \\ z = -t' + 2 \end{cases} \quad \text{ولدينا } \overrightarrow{AA'}(5; 4; -1) \text{ ومنه تمثيل وسيطي للمستقيم } (AA') \text{ من الشكل: } (t' \in \mathbb{R})$$

حل مقترح التمرين الثاني

(u_n) و (v_n) متتايتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n + 4}$ و $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$.

(1) أ- البرهان بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$ ".

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = \frac{1}{4}$ ومنه $0 < u_0 < 1$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $0 < u_n < 1$ ، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0 < u_{n+1} < 1$.

لدينا حسب الفرض $0 < u_n < 1$ ومنه $4 < u_n + 4 < 5$ ومنه $\frac{1}{5} < \frac{1}{u_n + 4} < \frac{1}{4}$ ومنه $\frac{-10}{5} < \frac{-10}{u_n + 4} < \frac{-10}{4}$.

ومنه $3 - \frac{10}{u_n + 4} < 3 - \frac{10}{4}$ أي: $0 < u_{n+1} < 1$. وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

• الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$.

ب- تبيان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{10}{u_n + 4} - u_n = \frac{3(u_n + 4) - 10 - u_n(u_n + 4)}{u_n + 4} = \frac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 4}$$

$$\text{ومنه : } u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(u_n + 2)}{u_n + 4}$$

ولدينا : $0 < u_n < 1$ ومنه $1 - u_n > 0$ أي $u_{n+1} - u_n > 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

- المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 ، إذن فهي متقاربة .

(2) أ- تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2}{1 - u_{n+1}} = \frac{3 - \frac{10}{u_n + 4} + 2}{1 - 3 + \frac{10}{u_n + 4}} = \frac{5 - \frac{10}{u_n + 4}}{-2 + \frac{10}{u_n + 4}} = \frac{5(u_n + 4) - 10}{-2(u_n + 4) + 10} = \frac{5u_n + 10}{-2u_n + 2} = \frac{5(u_n + 2)}{2(1 - u_n)} = \frac{5}{2} v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{5}{2}$.

$$\text{الحد الأول : } v_0 = \frac{u_0 + 2}{1 - u_0} = 3$$

• كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n : v_n = v_0 \times q^n \text{ ومنه } v_n = 3 \times \left(\frac{5}{2}\right)^n$$

ب- إثبات أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 - \frac{3}{v_n + 1}$

$$\text{لدينا : من أجل كل عدد طبيعي } n , v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n} \text{ ومنه } v_n = -1 + \frac{3}{1 - u_n} \text{ ومنه } v_n + 1 = \frac{3}{1 - u_n}$$

$$\text{أي } u_n = 1 - \frac{3}{v_n + 1} \text{ وبالتالي : } 1 - u_n = \frac{3}{v_n + 1}$$

$$\text{لدينا : } 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{3\left(\frac{5}{2}\right)^n + 1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{v_n + 1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \text{ ، لأن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n = +\infty$$

حل مقترح التمرين الثالث

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z + 2)(z^2 - 4z + 8) = 0$ (1)

$$(z + 2)(z^2 - 4z + 8) = 0 \text{ تكافئ } z = -2 \text{ أو } z^2 - 4z + 8 = 0$$

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 4z + 8 = 0$:

لدينا : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 8 = -16 = 16i^2 = (4i)^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_2 = \frac{4 - 4i}{2} = 2 - 2i \text{ و } z_1 = \frac{4 + 4i}{2} = 2 + 2i$$

إذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي : $S = \{-2; 2 + 2i; 2 - 2i\}$

(II) المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحتقاتها: $z_A = 2 - 2i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -2$

(1) كتابة كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسّي:

لدينا: $z_A = 2 - 2i$ ومنه: $|z_A| = 2\sqrt{2}$.

$$k \in \mathbb{Z} \text{، حيث } \arg(z_A) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{، ومنه } \begin{cases} \cos \theta_A = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_A = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{، يكون:}$$

$$\text{إذن: } z_A = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{لدينا: } z_B = \overline{z_A} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ ومنه } z_B = \overline{z_A}$$

(2) تعيين z_D لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة B مركز ثقل المثلث ACD .

B مركز ثقل المثلث ACD معناه B مرجح الجملة $\{(A,1);(C,1);(D,1)\}$.

$$\text{ومنه: } z_B = \frac{z_D + z_C + z_A}{3} \text{ وبالتالي: } z_D = 3z_B - z_C - z_A$$

$$\text{أي: } z_D = 3(2 + 2i) - (-2) - (2 - 2i) = 6 + 8i$$

$$(3) \text{ مجموعة النقط } M \text{ من المستوي ذات اللاحقة } z \text{ (تختلف عن } A \text{ و } B \text{) بحيث: } \arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \frac{\pi}{2}$$

التحقق أن مبدأ المعلم O هو نقطة من (Γ) :

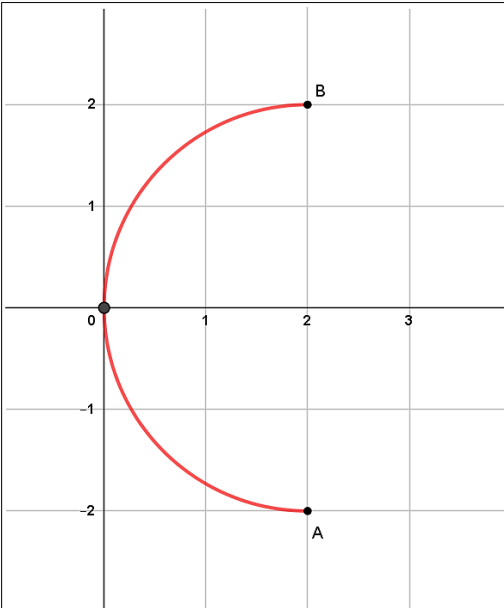
$$\text{لدينا: } \arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \arg(z_B) - \arg(z_A) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ ومنه } O \in (\Gamma)$$

• تعيين طبيعة المجموعة (Γ) :

$$\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ معناه } (MA; MB) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ / } k \in \mathbb{Z} \text{ ومنه } (\Gamma) \text{ هي نصف الدائرة المفتوحة التي}$$

حداها A و B وقطرها $[AB]$ وتشمل النقطة O .

إنشاء (Γ) :



(4) العبارة المركبة للتحاكي h الذي مركزه النقطة C ونسبته 2 هي:

$$z' = 2z + 2$$

تعيين طبيعة المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h مع تحديد عناصرها

المجموعة (Γ') هي نصف الدائرة المفتوحة التي حداها $A' = h(A)$ و $B' = h(B)$ ، وتشمل النقطة التي

لاحقتها 2.

$$(z_{B'} = 2z_B + 2 = 6 + 4i \text{ و } z_{A'} = 2z_A + 2 = 6 - 4i)$$

f الدالة المعرفة على D حيث $D =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$
(1) تبيان أن الدالة f فردية :

المجموعة D متناظرة بالنسبة إلى الصفر (من أجل كل $x \in D$ ، $-x \in D$)
ومن أجل كل $x \in D$ ،

$$f(-x) = -\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right) = -\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -\frac{2}{3}x - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -f(x)$$

التفسير البياني : مبدأ المعلم O مركز تناظر بالنسبة للمنحنى (C_f) .

(2) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left[\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \right] = +\infty , \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \right] = -\infty$$

التفسير البياني : المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور الترتيب معادلتيهما : $x = 1$ و $x = -1$.

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0 : \text{لأن} , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \right] = -\infty$$

(3) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D ، $f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)$ ،

الدالة f قابلة للاشتقاق على D ، من أجل كل عدد حقيقي x من D :

$$f'(x) = \frac{2}{3} + \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)} = \frac{2}{3} + \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{3} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{2(x^2-1)+6}{3(x^2-1)} = \frac{2x^2+4}{3(x^2-1)} = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)$$

إتجاه تغير الدالة f :

لدينا : من أجل كل x من D ، $x^2-1 > 0$ ومنه $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على D .

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

(4) تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$:

$$\begin{cases} f(1,9) \approx 0,10 \\ f(1,8) \approx -0,05 \end{cases} \text{ و }]1,8; 1,9[\subset]1; +\infty[\text{ و }]1; +\infty[\text{ المجال } f \text{ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال }]1; +\infty[$$

أي $f(1,8) \times f(1,9) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]1; +\infty[$ حلا وحيدا α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$.

$$(5) \text{ لدينا : } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{2}{3}x \right] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0 , \text{ لأن : } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = 1$$

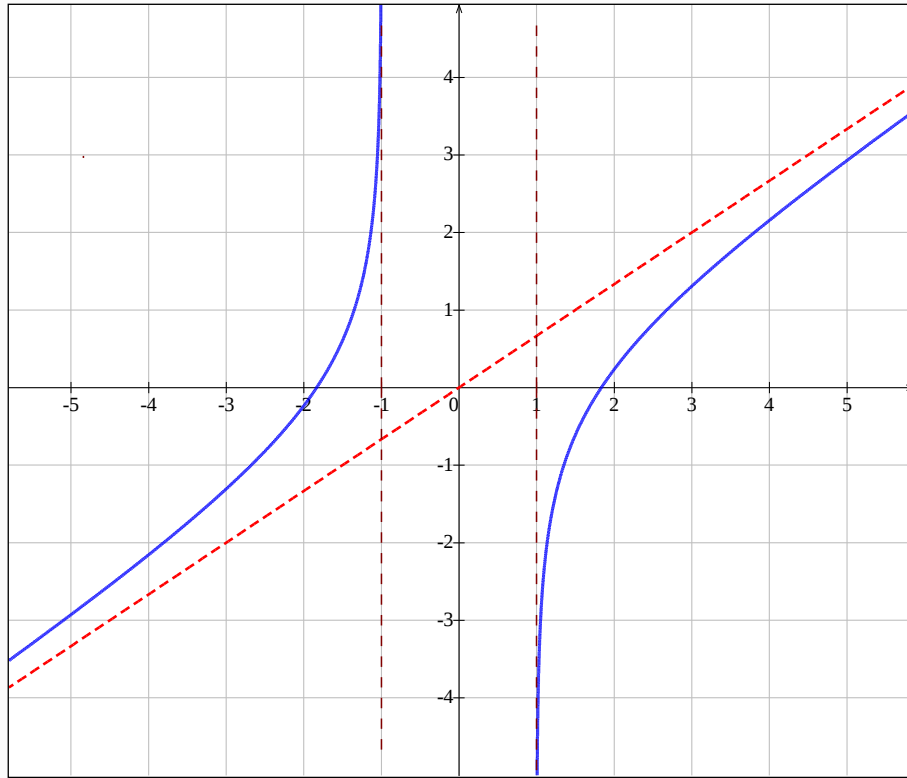
ومن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y = \frac{2}{3}x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا : $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $f(x) - y = f(x) - \frac{2}{3}x = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x) - y$	+		-	
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)	

(6) الرسم :



(7) المناقشة البيانية :

$\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = |m|x$ تكافئ $2x - 3|m|x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$ تكافئ $(2 - 3|m|)x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$ أي $f(x) = |m|x$ ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = |m|x$.

(مناقشة دورانية)

إذا كان $|m| \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$ أي $m \in \left[-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right]$ فإن المعادلة تقبل حلين متميزين .

إذا كان $|m| \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right]$ أي $m \in \left[-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right]$ فإن المعادلة لا تقبل حلول .

حل مقترح التمرين الأول

A ، B و C النقط من بحيث : $A(3;0;0)$ ، $B(0;2;0)$ و $C(0;0;1)$

(1) تبيان أن النقط A ، B و C تعين مستويا :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-3;2;0)$ و $\overrightarrow{AC}(-3;0;1)$

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا لأن $x_{\overrightarrow{AB}} = x_{\overrightarrow{AC}}$ لكن $y_{\overrightarrow{AB}} \neq y_{\overrightarrow{AC}}$ ومنه النقط A ، B و C ليست في استقامية وبالتالي فهي تعين مستويا .

• التحقق أن : $2x + 3y + 6z - 6 = 0$ معادلة للمستوي (ABC) :

يكفي إثبات أن إحداثيات النقط A ، B و C تحقق المعادلة .

$$2x_A + 3y_A + 6z_A - 6 = 2 \times 3 + 3 \times 0 + 6 \times 0 - 6 = 0 \text{ لأن } A \in (ABC)$$

$$2x_B + 3y_B + 6z_B - 6 = 2 \times 0 + 3 \times 2 + 6 \times 0 - 6 = 0 \text{ لأن } B \in (ABC)$$

$$2x_C + 3y_C + 6z_C - 6 = 2 \times 0 + 3 \times 0 + 6 \times 1 - 6 = 0 \text{ لأن } C \in (ABC)$$

(2) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) العمودي على المستوي (ABC) والذي يشمل المبدأ O .

(Δ) يعامد المستوي (ABC) يعني أن $\vec{n}(2;3;6)$ شعاع توجيه لـ (Δ) .

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 6t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{من الشكل :}$$

(3) إيجاد إحداثيات H نقطة تقاطع (Δ) و (ABC) :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 6t \\ 2x + 3y + 6z - 6 = 0 \end{cases} \quad \text{نحل الجملة}$$

$$. t = \frac{6}{49}$$

وبتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد $(\frac{12}{49}; \frac{18}{49}; \frac{36}{49})$ وهي إحداثيات النقطة H .

(4) تبيان أن (BH) عمودي على (AC) :

$$\overrightarrow{BH}(\frac{12}{49}; -\frac{86}{49}; \frac{36}{49}) \text{ و } \overrightarrow{AC}(-3;0;1) \text{ لدينا :}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH} = -3 \times \frac{12}{49} + 0 \times \left(-\frac{86}{49}\right) + 1 \times \frac{36}{49} = 0 \text{ ومنه } (BH) \perp (AC) \text{ وبالتالي}$$

• استنتاج أن H هي نقطة تلاقي أعمدة المثلث ABC .

$$\overrightarrow{AH}(-\frac{147}{49}; \frac{18}{49}; \frac{36}{49}) \text{ و } \overrightarrow{BC}(0;-2;1) \text{ لدينا :}$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \times \left(-\frac{147}{49}\right) - 2 \times \left(\frac{18}{49}\right) + 1 \times \frac{36}{49} = 0 \text{ ومنه } (AH) \perp (BC) \text{ وبالتالي}$$

إذن H هي نقطة تلاقي أعمدة المثلث ABC .

الدالة المعرفة على المجال $[-4;1]$ كما يلي : $f(x) = \frac{3x-16}{x+11}$.
(I) التحقق أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$.

$$f'(x) = \frac{3(x+11) - (3x-16)}{(x+11)^2} = \frac{49}{(x+11)^2} \text{ و } [-4;1] \text{ على المجال}$$

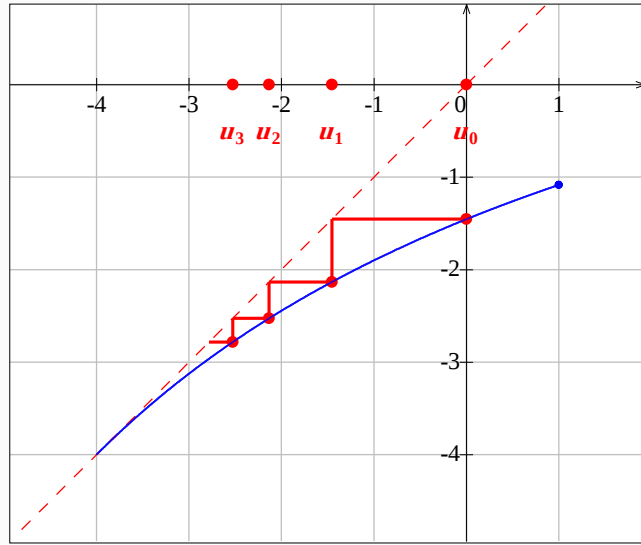
لدينا : من أجل كل $x \in [-4;1]$ ، $f'(x) > 0$ ، وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$.
تبيان أنه من أجل $x \in [-4;1]$ فإن $f(x) \in [-4;1]$:

لدينا : الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$ وبالتالي من أجل $x \in [-4;1]$ فإن $f(x) \in [f(-4); f(1)]$

أي : $f(x) \in [-4; -\frac{13}{12}]$ و لدينا $[-4; -\frac{13}{12}] \subset [-4;1]$ ومنه : من أجل كل $x \in [-4;1]$ فإن $f(x) \in [-4;1]$.

(II) (u_n) متتالية عددية معرفة بعدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) أتمثيل الحدود :



التخمين : المتتالية (u_n) متناقصة و متقاربة نحو العدد -4 .

(2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-4 \leq u_n \leq 0$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $-4 \leq u_n \leq 0$ " .

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0 = 0$ ومنه $-4 \leq u_0 \leq 0$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة .

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $-4 \leq u_n \leq 0$ ، و نبهن صحة $P(n+1)$ أي $-4 \leq u_{n+1} \leq 0$.

لدينا حسب الفرض $-4 \leq u_n \leq 0$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما فإن $f(-4) \leq f(u_n) \leq f(0)$

$$\text{أي } -4 \leq u_{n+1} \leq -\frac{16}{11} \leq 1 \text{ وبالتالي } P(n+1) \text{ صحيحة .}$$

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $-4 \leq u_n \leq 0$.

- تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n - 16}{u_n + 11} - u_n = \frac{3u_n - 16 - u_n(u_n + 11)}{u_n + 11} = \frac{-u_n^2 - 8u_n - 16}{u_n + 11} = \frac{-(u_n + 4)^2}{u_n + 11}$$

ومنه : $u_{n+1} - u_n < 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

(3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$ أي $v_n = \frac{1}{u_n + 4}$.

إثبات أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{7}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} + 4} = \frac{1}{\frac{3u_n - 16}{u_n + 11} + 4} = \frac{1}{\frac{3u_n - 16 + 4(u_n + 11)}{u_n + 11}} = \frac{u_n + 11}{7u_n + 28} = \frac{u_n + 4 + 7}{7(u_n + 4)} = \frac{1}{7} + \frac{1}{u_n + 4} = \frac{1}{7} + v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = \frac{1}{7}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{1}{u_0 + 4} = \frac{1}{4}$.

• حساب المجموع S حيث : $S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \dots + v_{2016} \times u_{2016}$

لدينا : $S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \dots + v_{2016} \times u_{2016} = (1 - 4v_0) + (1 - 4v_1) + \dots + (1 - 4v_{2016})$

ومنه : $S = 2017 \times 1 - 4(v_0 + v_1 + \dots + v_{2016}) = 2017 - 4 \left[\frac{2017}{2} (v_0 + v_{2016}) \right]$

$$S = 2017 - 4 \left[\frac{2017}{2} \left(\frac{1}{4} + 288 \right) \right] = -1161792 \text{ أي :}$$

حل مقترح التمرين الثالث

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة :

(1) مجموعة حلول المعادلة $\left(\frac{z+1-i}{z-i} \right)^2 = 1$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي : $S = \left\{ -\frac{1}{2} + i \right\}$ ← صحيح .
التبرير :

$$\left(\frac{z+1-i}{z-i} \right)^2 = 1 \text{ تكافئ } (z+1-i)^2 = (z-i)^2 \text{ أو } \begin{cases} z+1-i = z-i \\ z+1-i = -(z-i) \end{cases} \text{ أي } z = -\frac{1}{2} + i$$

(2) من أجل كل عدد مركب z ، $(z+2)(\bar{z}+2) = |z+2|^2$ ← صحيح .
التبرير :

$$(z+2)(\bar{z}+2) = (z+2)(\overline{z+2}) = |z+2|^2$$

(3) من أجل كل عدد طبيعي n ، $\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{3n} = 1$ ← خطأ .

التبرير :

$$\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{3n} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^{3n} = \left[\left(e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^3 \right]^n = (e^{i\pi})^n = (-1)^n$$

(4) S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة 1 ونسبته 3 وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

صورة الدائرة (C) ذات المركز $\omega(0;1)$ ونصف القطر 3 بالتشابه S هي الدائرة (C') ذات المركز $\omega'(-2;-3)$ ونصف القطر 9
صحيح
التبرير :

$$z' = 3e^{i\frac{\pi}{2}}(z-1) + 1 = 3iz - 3i + 1 \text{ هي :}$$

$$z_{\omega'} = 3iz_{\omega} + 1 - 3i = -2 - 3i \text{ ومنه } z_{\omega} = i$$

$$\text{ولدينا : } r' = |k| \times r = 3 \times 3 = 9$$

(5) من أجل كل عدد حقيقي α : إذا كان $z = (\sin \alpha + i \cos \alpha) \times (\cos \alpha - i \sin \alpha)$ فإن $\arg(z) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2k\pi$.

حيث k عدد صحيح . ← صحيح .
التبرير :

من أجل كل عدد حقيقي α :

$$z = (\sin \alpha + i \cos \alpha) \times (\cos \alpha - i \sin \alpha) = i (\cos \alpha - i \sin \alpha)^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} \times (e^{-i\alpha})^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{-2i\alpha} = e^{i(\frac{\pi}{2} - 2\alpha)}$$

$$\text{ومنه } \arg(z) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2k\pi$$

حل مقترح التمرين الرابع

(I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2 - x^2 e^{1-x}$.

$$(1) \text{ تبين أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e \times x^2 e^{-x}) = 0 : \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x^2 e^{1-x}) = 2$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

$$\cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x^2 e^{1-x}) = -\infty$$

(2) أـ الدالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f'(x) = -2xe^{1-x} + x^2 e^{1-x} = (x^2 - 2x)e^{1-x} = x(x-2)e^{1-x}$$

بـ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(x-2)$:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

الدالة f متناقصة على المجال $[0; 2]$ ومتزايدة على كل من المجالين $]-\infty; 0]$ و $[2; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
$f'(x)$	+	0	-	0	+	
$f(x)$			2		$2-4e^{-1}$	2

(3) كتابة معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

لدينا : $(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$ ومنه $(T) : y = -x + 2$.

(II) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = 1 - xe^{1-x}$.

(1) تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x) \geq 0$:

الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $h'(x) = -e^{1-x} + xe^{1-x} = (x-1)e^{1-x}$ ،

إشارة $h'(x)$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+

الدالة h متناقصة على المجال $]-\infty; 1]$ ومتزايدة على المجال $[1; +\infty[$.

الدالة h تقبل قيمة حدية صغرى على $\mathbb{R}$ هي $h(1) = 0$ ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x) \geq 0$.

• دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) :

لدينا : $f(x) - y = 2 - x^2 e^{1-x} + x - 2 = x(1-x)e^{1-x} = xh(x)$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+	+
الوضع النسبي	(C _f) تحت (T)		(C _f) فوق (T)	
	(C _f) يقطع (T)		(C _f) يقطع (T)	

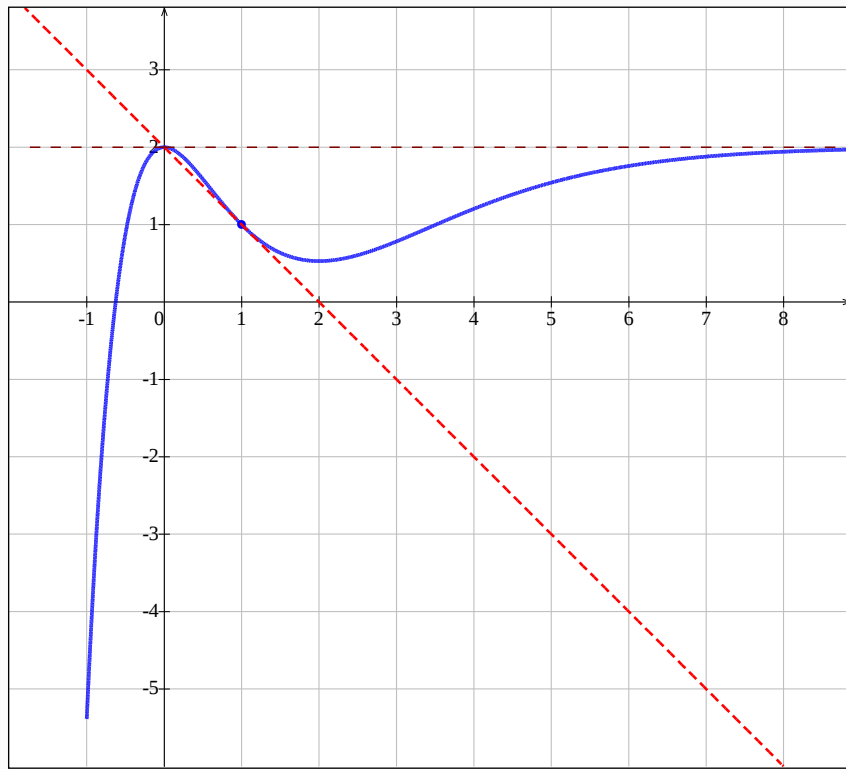
(2) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7 < \alpha < -0,6$.

$$\begin{cases} f(-0,7) \approx -0,7 \\ f(-0,6) \approx 0,2 \end{cases}$$

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty; 0[$ و $]-\infty; 0[\subset]-0,7; -0,6[$ و

أي $f(-0,7) \times f(-0,6) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7 < \alpha < -0,6$.

(3) الرسم :



(4) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x) = 2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$

- التحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$F'(x) = 2 + (2x + 2)e^{1-x} - (x^2 + 2x + 2)e^{1-x} = 2 - x^2 e^{1-x} = f(x)$$

- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما : $x = 1$ و $x = 0$

$$S = \int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = (7 - 2e) u.a$$

الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن)

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$$

- (1) أحسب الحدين u_1 و v_1 .
- (2) أكتب $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$.
- ب- باستعمال البرهان بالتراجع بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما والمتتالية (v_n) متناقصة تماما.
- (3) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n = u_n - v_n$
- برهن أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول w_0 ثم عبر عن w_n بدلالة n .
- (4) بين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

التمرين الثاني (4ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(1;1;-1)$ ، $B(2;-1;-1)$ و $C(4;-4;-2)$.

و المستوي (P) ذا المعادلة الديكارسية $x - 2y + 2z - 3 = 0$.

- (1) بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا.
- (2) بين المستويين (P) و (ABC) غير متوازيين.
- (3) تحقق أن الجملة : $(\beta \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R})$ ، $\begin{cases} x = -2 + \alpha - 3\beta \\ y = 6 - 2\alpha + 5\beta \\ z = \beta \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستوي (ABC) .
- (4) جد تمثيلا وسيطيا لـ (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (ABC) .

التمرين الثالث (5ن)

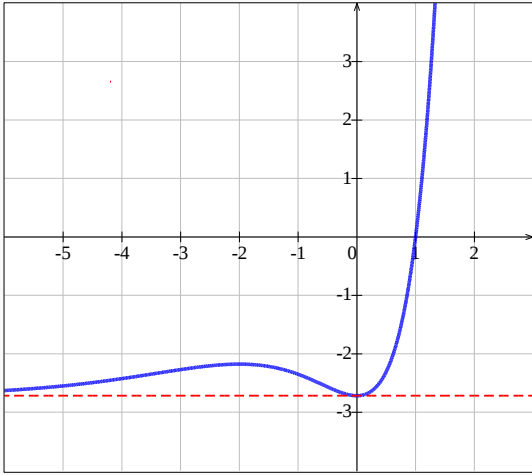
(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة : $(z - 2)(z^2 + 2z + 4) = 0$.

(II) المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ حيث : $\|\vec{u}\| = 2\text{cm}$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها : $z_A = 2$ ، $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = \overline{z_B}$

- (1) أ- أكتب z_B على الشكل الأسّي ، ثم استنتج الشكل الأسّي للعدد المركب z_C .
- ب- عين مركز و نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ، ثم أنشئ النقط A ، B و C .
- (2) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة O ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ ولتكن F صورة A بالتحويل S .
- أ- أكتب العبارة المركبة للتشابه S ثم عين لاحقة كل A' ، B' و C' من صور النقط A ، B و C على الترتيب بالتشابه S .
- ثم أنشئ في المعلم السابق النقط A' ، B' و C' .
- ب- أحسب بالسنتيمتر المربع مساحة المثلث $A'B'C'$.

التمرين الرابع (7ن)



(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^2 e^x - e$

(C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد

و المتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$). (الشكل)

- أحسب $g(1)$.

- بقراءة بيانية عيّن إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(-x)$

- حسب قيم العدد الحقيقي x .

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$).

(1) أحسب النهايات الآتية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(2) بين أن المنحنى (γ) الذي معادلته $y = e^{-x} - 2$ والمنحنى (C_f) متقاربان بجوار $-\infty$ ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (γ).

(3) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$.

(4) استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $[-1; 0]$ و $[0; +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; -1]$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(5) بين كيف يمكن إنشاء المنحنى (γ) انطلاقا من منحنى الدالة $x \mapsto e^x$ ، ثم أرسم بعناية كلا من (γ) و (C_f) في نفس المعلم السابق.

(6) ليكن n عددا طبيعيا و ($A(n)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (γ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما:

$$x = -e^{n+1} \text{ و } x = -e^n$$

أحسب العدد الحقيقي l حيث: $l = A(0) + A(1) + \dots + A(2016)$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$)، نعتبر النقط $A(-8; 0; -2)$ ، $B(1; 2; 1)$ ، $C(2; 3; -1)$ و $E(1; 1; 4)$.

والمستوي (P) ذا المعادلة $2x + y - 3 = 0$.

(1) أ- بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا.

ب- عيّن قيمة العدد الحقيقي α حتى يكون $\vec{n}(1; \alpha; -1)$ شعاعا ناظما للمستوي (ABC) ثم عيّن معادلة ديكارتية له.

(2) بين أن المستويين (P) و (ABC) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ)، ثم تحقق أن E تنتمي إلى (Δ) و $\vec{u}(1; -2; 7)$ شعاع توجيه له.

(3) لتكن G مرجح الجملة $\{(A; 1), (B; -2), (C; 3)\}$ ، نرمز بـ (Γ) إلى مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق:

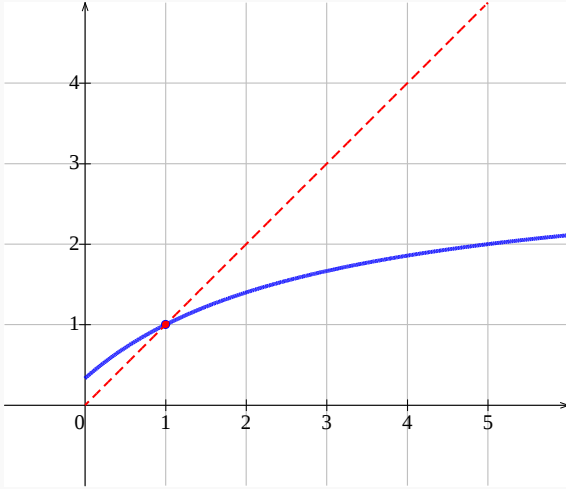
$$(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$$

عيّن إحداثيات النقطة G ثم حدد طبيعة المجموعة (Γ) وأكتب معادلة ديكارتية لها.

(4) عيّن إحداثيات نقط تقاطع (P)، (ABC) و (Γ).

التمرين الثاني (4ن)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم



متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y = x$

α عدد حقيقي موجب ، (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها

الأول $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(I) عين قيم α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة .

(II) نضع في كل مايلي : $\alpha = 5$

(1) أ- أنقل الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل الحدود

u_0, u_1, u_2, u_3 دون حسابها .

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول .

ب- عبر بدلالة n عن u_n و v_n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{n+2016}$.

ثم استنتج بدلالة n المجموع : $S'_n = \frac{1}{u_n + 1} + \frac{1}{u_{n+1} + 1} + \dots + \frac{1}{u_{n+2016} + 1}$.

التمرين الثالث (5ن)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A = -3 - 2i$ ، $z_B = 1 + i$ و $z_C = 4 - 3i$

(1) عين النسبة وزاوية التشابه S المباشري المركز A والذي يحول النقطة B إلى النقطة C .

(2) أكتب على الشكل الأسّي العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(3) نرمز بـ G إلى مركز ثقل المثلث ABC وبـ I إلى منتصف القطعة $[AC]$.

عين كلا من z_I و z_G لاحقتي النقطتين I و G ، ثم بين أن النقط B ، G و I في إستقامية .

(4) نعتبر النقطة D نظيرة النقطة B بالنسب إلى I . حدد بدقة طبيعة الرباعي $ABCD$.

(5) نعتبر (Γ) مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق : $\|\vec{MA} + \vec{MC}\| = 5\sqrt{2}$.

أ- تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ) .

ب- عين طبيعة المجموعة (Γ) ثم أنشئها .

(I) نعتبر f الدالة العددية المعرفة على المجال $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$ كما يلي : $f(x) = \frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$.
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب النهايتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x)$ ثم فسر النتيجةين بيانيا .

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$ ، $f'(x) = \frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$ ،
ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) حل في المجال $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$ المعادلة $f(x) = 0$ ، ثم استنتج إشارة $f(x)$.

(4) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثيها ، ثم أنشئ (C_f) .

(II) لتكن الدالة g المعرفة على $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$ كما يلي : $g(x) = 2[-x + \ln(2x+1)]$.
(1) أ- أدرس اتجاه تغير الدالة g .

ب- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث : $1,2 < \alpha < 1,3$.
ج- استنتج إشارة $g(x)$.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من : $I_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$.

أثبت أن : من أجل كل $x \geq \frac{3}{2}$ ، $0 < f(x) < \frac{1}{2x+1}$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

تصحيح مقترح للموضوع الأول

حل مقترح التمرين الأول

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$$

(1) حساب الحدين u_1 و v_1 :

$$v_1 = \frac{3}{4}v_0 + 1 = \frac{3}{4} \times 6 + 1 = \frac{22}{4} = \frac{11}{2} \quad , \quad u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$$

(2) أ- كتابة $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{4}u_{n+1} + 1 - u_{n+1} = \frac{3}{4}u_{n+1} + 1 - \left(\frac{3}{4}u_n + 1\right) = \frac{3}{4}(u_{n+1} - u_n) \quad , \quad n \text{ من أجل كل عدد طبيعي}$$

ب- البرهان بالتراجع أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما :

لنثبت أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} \geq u_n$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} \geq u_n$ ".
• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 1$ و $u_1 = \frac{7}{4}$ و منه $u_1 > u_0$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $u_{n+1} \geq u_n$ ، و نبهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+2} \geq u_{n+1}$.

لدينا حسب الفرض $u_{n+1} \geq u_n$ و منه $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ولدينا مما سبق $u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{4}(u_{n+1} - u_n)$

ومنه $u_{n+2} \geq u_{n+1}$ وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} \geq u_n$ أي أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

- البرهان بالتراجع بين أن المتتالية (v_n) متناقصة تماما :

لنثبت أنه : من من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} \leq v_n$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي $n : v_{n+1} \leq v_n$ ".

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ لدينا $v_0 = 6$ و $v_1 = \frac{11}{2} = 5.5$ و منه $v_1 < v_0$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $v_{n+1} \leq v_n$ ، و نبهن صحة $P(n+1)$ أي $v_{n+2} \leq v_{n+1}$.

لدينا حسب الفرض $v_{n+1} \leq v_n$ و منه $v_{n+1} - v_n \leq 0$ ولدينا $v_{n+2} - v_{n+1} = \frac{3}{4}(v_{n+1} - v_n)$ و منه $v_{n+2} \leq v_{n+1}$

وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} \leq v_n$ وبالتالي المتتالية (v_n) متناقصة تماما.

(3) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n = u_n - v_n$

تبيان أن المتتالية (w_n) هندسية :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n : w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 - \left(\frac{3}{4}v_n + 1\right) = \frac{3}{4}(u_n - v_n) = \frac{3}{4}w_n$

ومنه المتتالية (w_n) هندسية أساسها $q = \frac{3}{4}$ وحدها الأول $w_0 = u_0 - v_0 = 1 - 6 = -5$

• كتابة عبارة الحد العام w_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي $n : w_n = w_0 \times q^n$ و منه $w_n = -5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

(4) تبيان أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان :

لدينا : المتتالية (u_n) متزايدة تماما و المتتالية (v_n) متناقصة تماما.

و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-5 \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 0$ و منه المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان.

حل مقترح التمرين الثاني

A ، B و C النقط من الفضاء بحيث : $A(1;1;-1)$ ، $B(2;-1;-1)$ و $C(4;-4;-2)$.

و المستوي (P) ذا المعادلة الديكارسية $0 = x - 2y + 2z - 3$.

(1) تبيان أن النقط A ، B و C تعين مستويا :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(1;-2;0)$ و $\overrightarrow{AC}(3;-5;-1)$ و $\frac{-5}{-2} \neq \frac{3}{1}$ و منه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي

النقط A ، B و C تعين مستويا.

(2) تبين أن المستويين (P) و (ABC) غير متوازيين :

يكفي إثبات أن الشعاع الناطمي لـ (P) لا يعامد $\overrightarrow{AB}$ ولا $\overrightarrow{AC}$.

لدينا : $\vec{n}(1; -2; 2)$ شعاع ناظمي لـ (P) و $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 1 + 4 + 0 = 5$ و $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 3 + 10 - 2 = 11$ ومنه المستويان (P) و (ABC) غير متوازيين .

(3) التحقق أن الجملة : $(\beta \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R})$: $\begin{cases} x = -2 + \alpha - 3\beta \\ y = 6 - 2\alpha + 5\beta \\ z = \beta \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستوي (ABC) .

النقط A, B, C تعين مستويا وبالتالي يكفي التحقق أن إحداثيات النقط A, B, C تحقق الجملة .

$$A \in (ABC) \text{ ومنه } \begin{cases} 1 = -2 + \alpha - 3\beta \\ \alpha = 0 \\ \beta = -1 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} 1 = -2 + \alpha - 3\beta \\ 1 = 6 - 2\alpha + 5\beta \\ -1 = \beta \end{cases}$$

$$B \in (ABC) \text{ ومنه } \begin{cases} 2 = -2 + \alpha - 3\beta \\ \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} 2 = -2 + \alpha - 3\beta \\ -1 = 6 - 2\alpha + 5\beta \\ -1 = \beta \end{cases}$$

$$C \in (ABC) \text{ ومنه } \begin{cases} 4 = -2 + \alpha - 3\beta \\ \alpha = 0 \\ \beta = -2 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} 4 = -2 + \alpha - 3\beta \\ -4 = 6 - 2\alpha + 5\beta \\ -2 = \beta \end{cases}$$

(4) إيجاد تمثيل وسيطي لـ (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (ABC) :

$$\begin{cases} x = -2 + \alpha - 3\beta \\ y = 6 - 2\alpha + 5\beta \\ z = \beta \\ -2 + \alpha - 3\beta - 2(6 - 2\alpha + 5\beta) + 2\beta - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} x = -2 + \alpha - 3\beta \\ y = 6 - 2\alpha + 5\beta \\ z = \beta \\ x - 2y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{7}{5} - \frac{4}{5}\beta \\ y = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\beta \\ z = \beta \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} x = -2 + \alpha - 3\beta \\ y = 6 - 2\alpha + 5\beta \\ z = \beta \\ \alpha = \frac{11}{5}\beta + \frac{17}{5} \end{cases} \quad \text{تكافئ}$$

$$\begin{cases} x = \frac{7}{5} - \frac{4}{5}\beta \\ y = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\beta \\ z = \beta \end{cases} \quad (\beta \in \mathbb{R}) \quad \text{ومنه تمثيل وسيطي لـ } (\Delta) \text{ من الشكل :}$$

حل مقترح التمرين الثالث

(I) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z - 2)(z^2 + 2z + 4) = 0$.

$(z + 2)(z^2 + 2z + 4) = 0$ تكافئ $z = 2$ أو $z^2 + 2z + 4 = 0$.

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 + 2z + 4 = 0$:

لدينا : $\Delta = (2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12 = 12i^2 = (2\sqrt{3}i)^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_2 = \frac{-2-2\sqrt{3}i}{2} = -1-i\sqrt{3} \text{ و } z_1 = \frac{-2+2\sqrt{3}i}{2} = -1+i\sqrt{3}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة هي: $S = \{2; -1+i\sqrt{3}; -1-i\sqrt{3}\}$

(II) المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ حيث: $\|\vec{u}\| = 2\text{cm}$

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها: $z_A = 2$ ، $z_B = -1+i\sqrt{3}$ و $z_C = \overline{z_B}$

(1) أ- كتابة z_B على الشكل الأسّي:

لدينا: $z_B = -1+i\sqrt{3}$ ومنه: $|z_B| = 2$

$$\text{وبفرض } \theta_B \text{ عمدة للعدد المركب } z_B \text{، يكون: } \begin{cases} \cos \theta_B = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta_B = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{، ومنه } \arg(z_B) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

إذن: $z_B = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

لدينا: $z_C = \overline{z_B} = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ ومنه $z_C = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

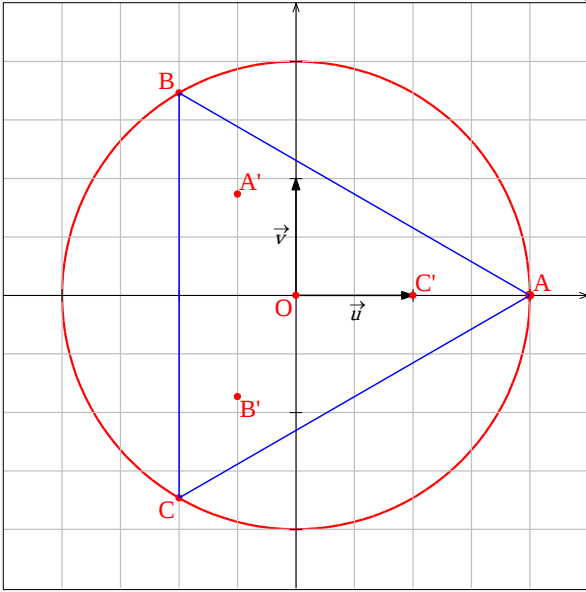
ب- تعيين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

لدينا: $OA = OB = OC = 2$ أي: $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$

ومنه مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC هي النقطة O

مبدأ المعلم ونصف قطرها 2.

إنشاء النقط A ، B و C :



(2) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة O ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ ولتكن F صورة A بالتحويل S .

أ- العبارة المركبة للتشابه S : $z' - z_O = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - z_O)$ أي: $z' = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}z$

تعيين لاحقات كل من A' ، B' و C' من صور النقط A ، B و C بالتشابه S :

$$z_{A'} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ أي: } z_{A'} = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}z_A = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}} \times 2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z_{B'} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ أي: } z_{B'} = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}z_B = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$z_{C'} = 1 \text{ أي: } z_{C'} = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}z_C = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(2e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right) = 1$$

إنشاء النقط A' ، B' و C' : أنظر الشكل السابق.

ب- حساب مساحة المثلث $A'B'C'$:

لدينا: $S_{A'B'C'} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 S_{ABC} = \frac{1}{4}S_{ABC}$ لكون المثلثين $A'B'C'$ و ABC متشابهان ونسبة التشابه هي $\frac{1}{2}$.

$$\text{ولدينا: } S_{A'B'C'} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ ومنه } S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}BC^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{3})^2 = 3\sqrt{3}$$

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x^2 e^x - e$.

- $g(1) = e^1 - e = 0$.

- إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$		-	+

- إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(-x)$		+	-

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$.

(1) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{-x} - 2 - \frac{e}{x} \right) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{-x} - 2 - \frac{e}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{-x} - 2 - \frac{e}{x} \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^{-x} - 2 - \frac{e}{x} \right) = +\infty$$

(2) لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{e}{x} \right) = 0$ ومنه (C_f) والمنحنى (γ) ذي المعادلة $y = e^{-x} - 2$ متقاربان عند $-\infty$

دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (γ) :

لدينا : $f(x) - y = -\frac{e}{x}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $-x$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$		+	-
الوضع النسبي		(C_f) فوق (γ)	(C_f) تحت (γ)

(3) تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ومن أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم :

$$f'(x) = -e^{-x} + \frac{e}{x^2} = \frac{-x^2 e^{-x} + e}{x^2} = \frac{-(x^2 e^{-x} - e)}{x^2} = \frac{-g(-x)}{x^2}$$

إتجاه تغير f الدالة : إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(-x)$:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	+

ومن الدالة f متزايدة على كل من المجالين $[-1; 0]$ و $[0; +\infty[$ متناقصة على المجال $]-\infty; -1]$.

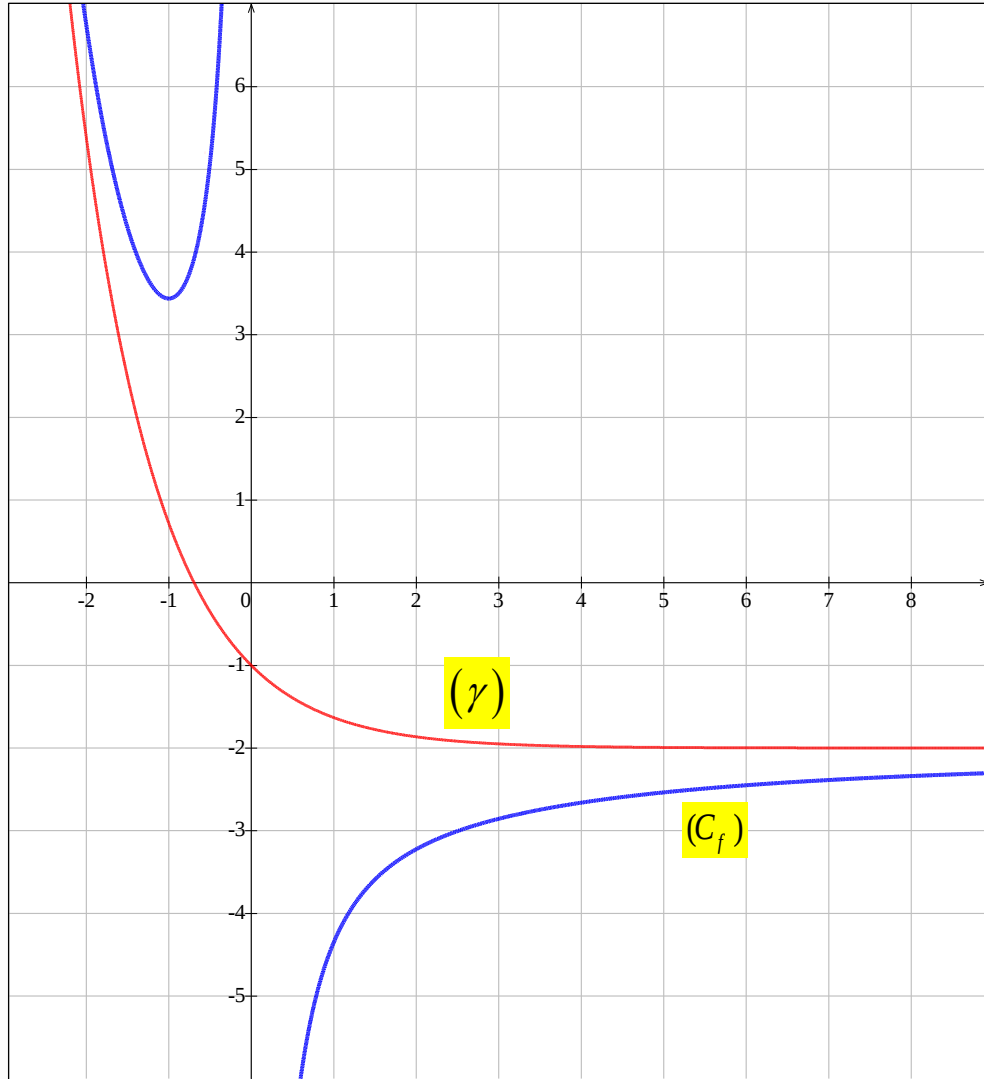
جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$		-	+	+
$g(x)$	$+\infty$	$2e - 2$	$+\infty$	-2

(4) شرح كيفية إنشاء المنحنى (γ) انطلاقاً من منحنى الدالة $x \mapsto e^x$:

لدينا: (γ) المنحنى ذي المعادلة $y = e^{-x} - 2$ ومنه (γ) هو صورة (Γ) منحنى الدالة $x \mapsto e^{-x}$ بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(0; -2)$ ، علماً أن (Γ) هو نظير منحنى الدالة $x \mapsto e^x$ بالنسبة لحامل محور الترتيب.

الرسم:



(5) n عدد طبيعي و $A(n)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (γ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما:

$$x = -e^{n+1} \text{ و } x = -e^n.$$

$$A(n) = \int_{-e^{n+1}}^{-e^n} [f(x) - e^{-x} + 2] dx = \int_{-e^{n+1}}^{-e^n} \left(-\frac{e}{x} \right) dx = -e \int_{-e^{n+1}}^{-e^n} \left(\frac{1}{x} \right) dx = -e [\ln|x|]_{-e^{n+1}}^{-e^n} = e$$

حساب العدد الحقيقي $l : l = A(0) + A(1) + \dots + A(2016) = 2017e$.

حل مقترح التمرين الأول

A, B, C و E النقط من الفضاء بحيث : $A(-8;0;-2)$ ، $B(1;2;1)$ ، $C(2;3;-1)$ و $E(1;1;4)$.

و المستوي (P) ذا المعادلة $2x + y - 3 = 0$.

1) أ- تبيان أن النقط A, B, C تعين مستويا :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(9;2;3)$ و $\overrightarrow{AC}(10;3;1)$

الشعاان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا لأن $\frac{9}{10} \neq \frac{3}{2}$ ومنه النقط A, B, C ليست في استقامية وبالتالي فهي تعين مستويا .

ب- تعيين قيمة العدد الحقيقي α حتى يكون $\vec{n}(1;\alpha;-1)$ شعاعا ناظما للمستوي (ABC) :

الشعاع $\vec{n}(1;\alpha;-1)$ ناظمي للمستوي (ABC) معناه : $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$ و $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} 9 + 2\alpha - 3 = 0 \\ 10 + 3\alpha - 1 = 0 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} 6 + 2\alpha = 0 \\ 9 + 3\alpha = 0 \end{cases} \text{ ومنه } \alpha = -3$$

تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

لدينا $\vec{n}(1;-3;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ومنه لـ (ABC) معادلة من الشكل : $x - 3y - z + d = 0$.

ولدينا $A \in (ABC)$ ومنه $0 = d - 8 - 3 \times 0 - (-2)$ أي $d = 6$.

إذن : $x - 3y - z + 6 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2) تبيان أن المستويين (P) و (ABC) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) :

لدينا : $\vec{n}(1;-3;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) و $\vec{n}_P(2;1;0)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) .

الشعاان $\vec{n}$ و $\vec{n}_P$ ليسا مرتبطين خطيا وبالتالي المستويان (P) و (ABC) يتقاطعان وفق مستقيم.

• التحقق أن E تنتمي إلى (Δ) :

لدينا : $E \in (P)$ لأن $2 \times 1 + 1 - 3 = 0$ ، و $E \in (ABC)$ لأن $1 - 3 \times 1 - 4 + 6 = 0$.

ومنه $E \in (P) \cap (ABC)$ أي : $E \in (\Delta)$.

• التحقق أن $\vec{u}(1;-2;7)$ شعاع توجيه لـ (Δ) :

يكفي إثبات أن : $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ و $\vec{n}_P \cdot \vec{u} = 0$.

لدينا : $\vec{n} \cdot \vec{u} = 1 \times 1 - 3 \times (-2) - 1 \times 7 = 0$ و $\vec{n}_P \cdot \vec{u} = 2 \times 1 + 1 \times (-2) + 0 \times 7 = 0$ ومنه $\vec{u}(1;-2;7)$ شعاع

توجيه لـ (Δ) .

3) لتكن G مرجح الجملة $\{(A;1), (B;-2), (C;3)\}$ ، نرمز بـ (Γ) إلى مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :

$$(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$$

• تعيين إحداثيات النقطة G :

$$G\left(-2; \frac{5}{2}; -\frac{7}{2}\right) \text{ أي : } \begin{cases} x_G = -2 \\ y_G = \frac{5}{2} \\ z_G = -\frac{7}{2} \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} x_G = \frac{1 \times (-8) - 2 \times 1 + 2 \times 3}{1 - 2 + 3} \\ y_G = \frac{1 \times 0 - 2 \times 2 + 3 \times 3}{1 - 2 + 3} \\ z_G = \frac{1 \times (-2) - 2 \times 1 + 3 \times (-1)}{1 - 2 + 3} \end{cases}$$

• تحديد طبيعة المجموعة (Γ) :

$$\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \text{ تكافئ } 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \text{ تكافئ } (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$$

ومنه المجموعة (Γ) هي المستوي الذي يشمل النقطة G و $\overrightarrow{CB}$ شعاع ناظمي له .

• كتابة معادلة ديكارتية للمجموعة (Γ) :

بما أن (Γ) يشمل النقطة G و $(-1; -1; 2)$ شعاع ناظمي له فإن للمستوي (Γ) معادلة

$$\text{من الشكل : } -x - y + 2z + \frac{15}{2} = 0$$

(4) تعيين إحداثيات نقط تقاطع (P) ، (ABC) و (Γ) :

$$\text{لدينا : } (ABC) \cap (P) \cap (\Gamma) = [(ABC) \cap (P)] \cap (\Gamma) = (\Delta) \cap (\Gamma)$$

لندرس تقاطع (Δ) و (Γ) :

$$\text{لدينا تمثيل وسيطي لـ } (\Delta) \text{ من الشكل : } \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t + 1 \\ z = 7t + 4 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ (تذكر أن } (\Delta) \text{ يشمل } E \text{ و } \vec{u} \text{ شعاع توجيه له)}$$

$$\text{نحل الجملة } \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t + 1 \\ z = 7t + 4 \\ -x - y + 2z + \frac{15}{2} = 0 \end{cases} \text{ وهذا يكافئ } -(t+1) - (-2t+1) + 2(7t+4) + \frac{15}{2} = 0 \text{ أي } t = -\frac{9}{10}$$

وبتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد $(\frac{1}{10}; \frac{14}{5}; -\frac{23}{10})$ وهي إحداثيات نقطة تقاطع (P) ، (ABC) و (Γ) .

حل مقترح التمرين الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$

α عدد حقيقي موجب ، (u_n) المتتالية العددية المعرفة على بعدها الأول $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

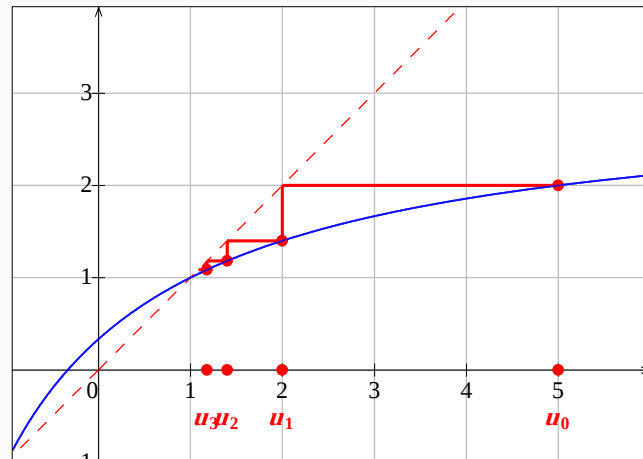
(1) تعيين قيم α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة .

(u_n) متتالية ثابتة يعني : من أجل كل عدد طبيعي ، $u_{n+1} = u_n = u_0$

$$\text{أي نحل المعادلة } f(\alpha) = \alpha \text{ وهذا يكافئ } \frac{3\alpha+1}{\alpha+3} = \alpha \text{ يكافئ } \alpha^2 = 1$$

وبما أن α عدد حقيقي موجب فإنه من أجل $\alpha = 1$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

(2) أتمثيل الحدود :



ب- التخمين : المتتالية (u_n) متناقصة ومتقاربة نحو العدد 1.

$$(3) \text{ نعتبر المتتالية } (v_n) \text{ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي } n : v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$$

أثبتان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{3u_n + 1}{u_n + 3} - 1}{\frac{3u_n + 1}{u_n + 3} + 1} = \frac{\frac{3u_n + 1 - (u_n + 3)}{u_n + 3}}{\frac{3u_n + 1 + (u_n + 3)}{u_n + 3}} = \frac{2u_n - 2}{4u_n + 4} = \frac{2(u_n - 1)}{4(u_n + 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_n - 1}{u_n + 1} \right) = \frac{1}{2} v_n$$

$$\text{ومنه المتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } q = \frac{1}{2} \text{ وحدها الأول } v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

ب- كتابة v_n بدلالة n :

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n : v_n = v_0 \times q^n : \text{ أي } v_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

كتابة u_n بدلالة n :

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n : v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \text{ ومنه } v_n(u_n + 1) = u_n - 1 \text{ ومنه } v_n u_n - u_n = -v_n - 1$$

$$\text{أي } u_n = \frac{v_n + 1}{1 - v_n} \text{ إذن : } u_n = \frac{\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2} \right)^n + 1}{1 - \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2} \right)^n} = \frac{3 + 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n}{3 - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n}$$

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0 : \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3 + 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n}{3 - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n} \right) = 1$$

(4) حساب المجموع : $S_n = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{n+2016}$:

$$S_n = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{n+2016} = v_n \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{2017}}{1 - \frac{1}{2}} \right] = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^n \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{2017} \right)$$

$$\text{استنتاج المجموع : } S'_n = \frac{1}{u_n + 1} + \frac{1}{u_{n+1} + 1} + \dots + \frac{1}{u_{n+2016} + 1}$$

$$\text{لدينا : من أجل كل عدد طبيعي } n , v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \text{ ومنه } v_n = \frac{u_n + 1 - 2}{u_n + 1} \text{ ومنه } v_n = 1 - \frac{2}{u_n + 1} \text{ أي } \frac{1}{u_n + 1} = \frac{1 - v_n}{2}$$

$$S'_n = \frac{1}{u_n + 1} + \frac{1}{u_{n+1} + 1} + \dots + \frac{1}{u_{n+2016} + 1} = \frac{1 - v_n}{2} + \frac{1 - v_{n+1}}{2} + \dots + \frac{1 - v_{n+2016}}{2} = \frac{1}{2} (2017) - \frac{1}{2} S_n$$

النقط A ، B و C التي لاحتقاتها على الترتيب: $z_A = -3 - 2i$ ، $z_B = 1 + i$ و $z_C = 4 - 3i$.
 (1) تعيين النسبة وزاوية التشابه S المباشر ذي المركز A والذي يحول النقطة B إلى النقطة C :

$$k = \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| : \text{لدينا: } \begin{cases} S(A) = A \\ S(B) = C \end{cases} \text{ ومنه } z_C - z_A = k e^{i\theta} (z_B - z_A) \text{ ومنه نسبة التشابه } S \text{ هي:}$$

$$\theta = \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) \text{ وزاوية التشابه } S \text{ هي}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4 - 3i - (-3 - 2i)}{1 + i - (-3 - 2i)} = \frac{7 - i}{4 + 3i} = \frac{(7 - i)(4 - 3i)}{(4 + 3i)(4 - 3i)} = 1 - i \text{ ولدينا:}$$

$$\theta = \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) = \arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4} \text{ و } k = \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = |1 - i| = \sqrt{2} \text{ ومنه}$$

(2) كتابة العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ على الشكل الأسّي :

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \text{ ومنه } \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-3 - 2i - (1 + i)}{4 - 3i - (1 + i)} = \frac{-4 - 3i}{3 - 4i} = \frac{-i(-4i + 3)}{3 - 4i} = -i \text{ لدينا:}$$

طبيعة المثلث ABC :

$$\left\{ \begin{array}{l} BA = BC \\ (\overline{BC}; \overline{BA}) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \text{ يكافئ } \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \right| = 1 \\ \arg \left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \right) = -\frac{\pi}{2} \end{array} \right. \text{ لدينا: } \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \text{ يكافئ}$$

ومن المثلث ABC قائم في B ومتساوي الساقين .

(3) نرمزب G إلى مركز ثقل المثلث ABC وب I إلى منتصف القطعة $[AC]$.

تعيين كلا من z_I و z_G لاحقتي النقطتين G و I :

$$z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{-3 - 2i + 4 - 3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i \text{ و } z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{-3 - 2i + 1 + i + 4 - 3i}{3} = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}i$$

تبيان أن النقط B ، G و I في إستقامة :

$$\text{لدينا: } \frac{z_G - z_I}{z_B - z_I} = \frac{\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3}i \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i \right)}{(1 + i) - \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i \right)} = \frac{1}{3} \text{ وهذا يعني أن } \overrightarrow{GI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BI} \text{ ومنه النقط } B \text{ ، } G \text{ و } I \text{ في إستقامة.}$$

(4) النقطة D نظيرة النقطة B بالنسبة إلى I .

طبيعة الرباعي $ABCD$:

الرباعي مربع لأن المثلث ABC قائم متساوي الساقين .

$$(5) \quad \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\| = 5\sqrt{2} \text{ مجموعة النقط } M \text{ من المستوي التي تحقق:}$$

أ- التحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ) :

$$\text{لدينا: } \|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CC}\| = \|\overrightarrow{CA}\| = AC = |z_C - z_A| = 5\sqrt{2} \text{ ومنه } C \in (\Gamma) .$$

ب- تعيين طبيعة المجموعة (Γ) ثم إنشائها :

$$\text{لدينا: } \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\| = 5\sqrt{2} \text{ تكافئ } \|2\overrightarrow{MI}\| = 5\sqrt{2} \text{ تكافئ } MI = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ ومنه المجموعة هي الدائرة التي مركزها } I$$

$$\text{ونصف قطرها } \frac{5\sqrt{2}}{2} .$$

$$(I) \quad f \text{ الدالة العددية المعرفة على المجال } \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[\text{ كما يلي : } f(x) = \frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$$

(1) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \left[\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \left[\left(\frac{1}{(2x+1)^2} \right) [1+2\ln(2x+1)] \right] = -\infty$$

التفسير : المستقيم ذو المعادلة $x = -\frac{1}{2}$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2} \right] = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{(2x+1)^2} + 2 \frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2} \right] = 0$$

التفسير : المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

$$(2) \text{ أ- الدالة } f \text{ قابلة للإشتقاق على المجال } \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[\text{ و من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من المجال } \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[:$$

$$f'(x) = \frac{4}{(2x+1)^4} \times (2x+1)^2 - 4(2x+1)[1+2\ln(2x+1)] = \frac{(2x+1)[-8\ln(2x+1)]}{(2x+1)^4} = \frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f :

$$\text{إشارة } f'(x) \text{ من إشارة } -8\ln(2x+1) \text{ لأن : } (2x+1)^3 > 0 \text{ من أجل } x \text{ من } \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[:$$

x	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	-

الدالة f متزايدة على المجال $\left] -\frac{1}{2}; 0 \right]$ ومتناقصة على المجال $[0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		1	0

$$(3) \text{ حل في المجال } \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[\text{ المعادلة } f(x) = 0 :$$

$$f(x) = 0 \text{ تكافئ } 1+2\ln(2x+1) = 0 \text{ تكافئ } \ln(2x+1) = -\frac{1}{2} \text{ تكافئ } 2x+1 = e^{-\frac{1}{2}} \text{ أي : } x = \frac{1}{2\sqrt{e}} - \frac{1}{2}$$

إشارة $f(x)$:

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{e}} - 1\right)$	$+\infty$
$f(x)$		-	+

(4) تبين المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثيها :

الدالة f' قابلة للإشتقاق على المجال $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال :

$$f''(x) = \frac{\frac{-8 \times 2}{2x+1} \times (2x+1)^3 - 3 \times 2(2x+1)^2 \times [-8 \ln(2x+1)]}{(2x+1)^6} = \frac{16(-1+3 \ln(2x+1))}{(2x+1)^4}$$

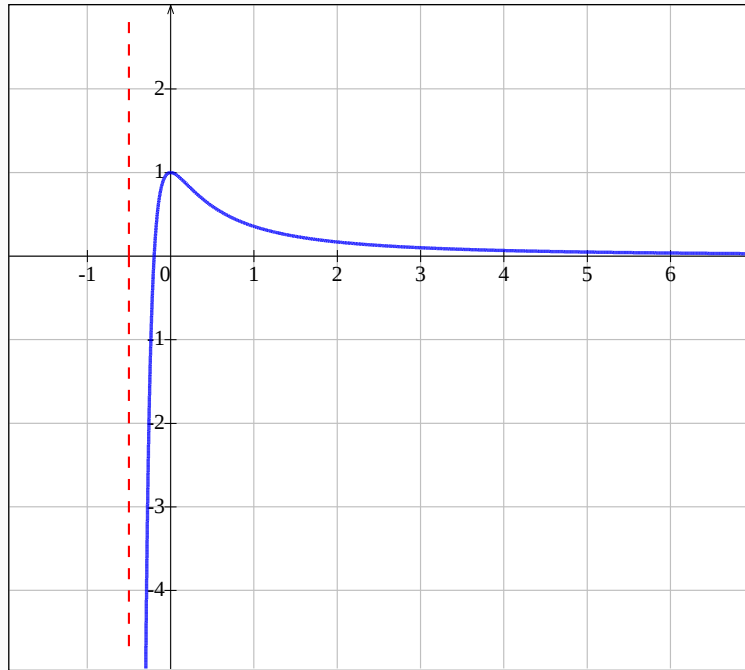
$$f''(x) = 0 \text{ تكافئ } -1+3 \ln(2x+1) = 0 \text{ تكافئ } \ln(2x+1) = \frac{1}{3} \text{ تكافئ } 2x+1 = e^{\frac{1}{3}} \text{ أي } x = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{1}{3}} - 1 \right)$$

إشارة $f''(x)$:

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \left(e^{\frac{1}{3}} - 1 \right)$	$+\infty$
$f''(x)$		- 0 +	

إذن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω إحداثيها : $\left(\frac{e^{\frac{1}{3}} - 1}{2}; \frac{5}{3} e^{-\frac{2}{3}} \right)$.

الرسم :



(II) لتكن الدالة g المعرفة على $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = 2[-x + \ln(2x+1)]$.

(1) أ- دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال :

$$g'(x) = 2 \left[-1 + \frac{2}{2x+1} \right] = 2 \left[\frac{-2x+1}{2x+1} \right]$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $-2x+1$:

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		+ 0 -	

الدالة g متزايدة على المجال $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ ومتناقصة على المجال $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$.

بـ تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث $1,2 < \alpha < 1,3$.
لدينا: $g(0) = 0$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$ و $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right] \subset]1,2; 1,3[$ و $\begin{cases} g(1,2) \approx 0,05 \\ g(1,3) \approx -0,04 \end{cases}$
أي $g(1,2) \times g(1,3) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$ حلا
وحيدا α حيث $1,2 < \alpha < 1,3$.
جـ إشارة $g(x)$:

x	$-\frac{1}{2}$	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+	-

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 : $I_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$.

إثبات أن: من أجل كل $x \geq \frac{3}{2}$, $0 < f(x) < \frac{1}{2x+1}$.

لدينا: من أجل كل $x \geq \frac{3}{2}$, $f(x) - \frac{1}{2x+1} = \frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2} - \frac{2x+1}{(2x+1)^2} = \frac{g(x)}{(2x+1)^2}$.

ولدينا: من أجل كل $x \geq \frac{3}{2}$, $g(x) < 0$ وبالتالي $f(x) < \frac{1}{2x+1}$.

ومن جهة أخرى لدينا: من أجل كل $x \geq \frac{3}{2}$, $f(x) > 0$.

إذن: من أجل كل $x \geq \frac{3}{2}$, $0 < f(x) < \frac{1}{2x+1}$.

استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$:

لدينا: $0 < I_n < \int_n^{n+1} \frac{1}{2x+1} dx$ ومنه $0 < \int_n^{n+1} f(x) dx < \int_n^{n+1} \frac{1}{2x+1} dx$.

ولدينا $0 < I_n < \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$ ومنه $\int_n^{n+1} \frac{1}{2x+1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(2x+1)\right]_n^{n+1} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$.

وبالتالي: $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ حيث $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$.

(1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$.
ب- بين أن (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ واستنتج أنها متقاربة.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$

- أثبت أن (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حددها الأول.

(3) عبر بدلالة n عن u_n و v_n ، وأحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \frac{1}{3}(1 - n^2)$

التمرين الثاني (4ن)

يحتوي صندوق 10 كريات متماثلة لانفرق بينها باللمس، منها 4 كرات بيضاء مرقمة بـ: 1، 2، 2، 3 وثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 2، 2، 3 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 2، 3، 3.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من هذا الصندوق.

نعتبر الحادثتين A : "الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني".

و B : "الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم".

(1) أ- أحسب: $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B على الترتيب.

ب- بين أن: $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$ ثم استنتج $P_A(B)$ و $P(A \cup B)$.

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا.

عزف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين الثالث (5ن)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب: $z_A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ و $z_C = \overline{z_B}$.

أكتب z_A و z_B على الشكل الأسّي ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

(3) أ- تحقق أن: $\frac{z_B}{z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ وحدد طبيعة المثلث OBC .

ب- استنتج أن: B هي صورة C بدوران r يطلب تعيين عناصره المميزة.

$$(4) \text{ نسمي } (\gamma) \text{ مجموعة النقط } M \text{ ذات اللاحقة } Z \text{ التي تحقق: } |z| = \left| \frac{-}{z} - \frac{\sqrt{3}+i}{2} \right| .$$

عين طبيعة المجموعة (γ) ثم عين صورتها بالدوران r .

التمرين الرابع (7ن)

(I) $g(x) = 2 + (x-1)e^{-x}$ كما يلي:

$$(1) \text{ أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$$

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في حلا وحيدا α حيث $-0.38 < \alpha < -0.37$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$$(1) \text{ أـ أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

بـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

جـ أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) حيث: $y = 2x + 1$.

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $f'(x) = g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

(3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

(4) أنشئ (Δ) ، (T) والمنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha) \approx 0,8$).

(5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $x = (1-m)e^x$.

(6) أـ باستعمال المكاملة بالتجزئة عين دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل $x = 1$.

بـ أحسب العدد A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيميات التي معادلاتها:

$$y = 2x + 1 \text{ و } x = 3, \quad x = 1$$

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4ن)

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$.

$$(1) \text{ أحسب كلا من } u_1, u_2, \text{ و } u_3$$

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

(3) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = 2n + 1$.

أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $e^{u_n} = v_n$.

بـ استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

$$(4) \text{ أحسب المجموعين } S_n \text{ و } T \text{ حيث: } S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right) \text{ و } T = e^{u_{1439}} + e^{u_{1440}} + \dots + e^{u_{2018}}$$

التمرين الثاني (4ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقطة $A(1; -2; 1)$ والمستويين (P_1) و (P_2) اللذين معادليهما على الترتيب : $-x + y + 2z + 1 = 0$ و $-3x + y + z + 4 = 0$.

- (1) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}(1; 5; -2)$ شعاع توجيه له .
- (2) بين أن المستويين (P_1) و (P_2) متقاطعان ثم تحقق أن تقاطعهما هو المستقيم (Δ) .
- (3) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل $B(-1; 4; 0)$ ويعامد كلا من (P_1) و (P_2) ثم استنتج تقاطع المستويات الثلاثة (P_1) ، (P_2) و (Q) .
- (4) لتكن $E(2; 3; -1)$ و $H(0; 3; -2)$ نقطتان من الفضاء .
أتحقق أن H هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P_1) .
بـ حدد طبيعة المثلث EBH ثم أحسب حجم رباعي الوجوه $AEBH$.

التمرين الثالث (5ن)

- (I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(\bar{z} - 4 + i)(z^2 - 4z + 5) = 0$ (يرمز $\bar{z}$ لمرافق العدد z)
- (II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C لواحقتها على الترتيب :

$$z_A = 2 + i, \quad z_B = 4 + i, \quad \text{و} \quad z_C = \bar{z}_A$$

- (1) تحقق أن : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$ ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا .

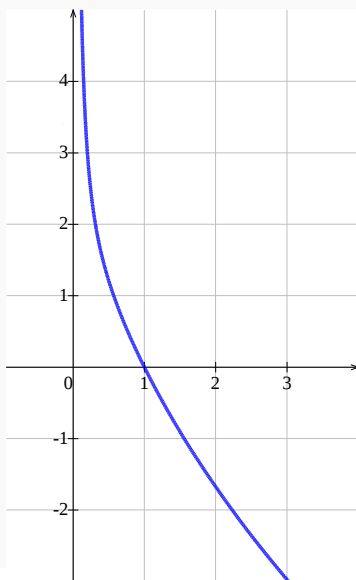
$$(2) \quad \begin{cases} |z_D - z_A| = |z_B - z_A| \\ \arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

بين أن المثلث ABD متقايس الأضلاع وأحسب z_D .

- (3) أحسب z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABD ، ثم عين نسبة وزاوية التشابه المباشر الذي مركزه A ويحول G إلى D .

- (4) عين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z (M تختلف عن C) بحيث : $\arg\left(\frac{z_G - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

التمرين الرابع (7ن)



(I) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1$

(C_g) المنحنى البياني الممثل لها كما هو مبين في الشكل المقابل :

ـ أحسب $g(1)$ ثم استنتج بيانيا إشارة $g(x)$.

(II) الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$.

- (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

- (2) أـ بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(1 + x \ln x)^2}$.

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

(3) بين أن $y = \left(\frac{e^2}{e-1} \right)x - \frac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل ، ثم أرسـم المماس (T) والمنحنى (C_f) .

(4) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x) = e^2x - me$ حلين متميزين .

(III) n عدد طبيعي حيث $n > 1$ ، مساحة الحيز من المستوى المحدد بحامل محور الفواصل والمنحنى (C_f) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = n$ و $x = 1$.

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n > 1$: $I_n = \ln(1+n \ln n)$.

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (I_n) .

✎ تصحيح مقترح للموضوع الأول ✎

حل مقترح التمرين الأول

المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n يكون $u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$.

(1) أ- البرهان بالتراجع أن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$ " .

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = 1$ ومنه $u_0 > -2$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة .

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $u_n > -2$ ، و نبهرن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1} > -2$.

لدينا حسب الفرض $u_n > -2$ ومنه $u_n + 5 > -2 + 5$ ومنه $\frac{1}{u_n + 5} < \frac{1}{3}$ ومنه $-\frac{9}{u_n + 5} > -\frac{9}{3}$.

أي $1 - \frac{9}{u_n + 5} > 1 - 3$ أي : $u_{n+1} > -2$. وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > -2$.

ب- تبين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{9}{u_n + 5} - u_n = \frac{u_n + 5 - 9 - u_n^2 - 5u_n}{u_n + 5} = \frac{-u_n^2 - 4u_n - 4}{u_n + 5} = -\frac{(u_n + 2)^2}{u_n + 5}$$

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n < 0$.

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

- المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد -2 ، إذن فهي متقاربة .

(2) المتتالية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$.

- إثبات أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{3}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} + 2} = \frac{1}{1 - \frac{9}{u_n + 5} + 2} = \frac{1}{3 - \frac{9}{u_n + 5}} = \frac{1}{\frac{3u_n + 6}{u_n + 5}} = \frac{u_n + 5}{3u_n + 6} = \frac{u_n + 2 + 3}{3(u_n + 2)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3} + v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = \frac{1}{3}$ وحدها الأول v_0 حيث: $v_0 = \frac{1}{u_0 + 2} = \frac{1}{3}$

(3) كتابة عبارة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = v_0 + nr$ ومنه $v_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}n = \frac{1}{3}(1+n)$

كتابة u_n بدلالة n : $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$ ومنه $\frac{1}{v_n} = u_n + 2$ أي: $u_n = \frac{1}{v_n} - 2$

ومنه: $u_n = \frac{1}{\frac{1}{3}(1+n)} - 2 = \frac{3}{1+n} - 2$

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{1+n} \right) = 0 \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{1+n} - 2 \right) = -2$$

(4) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \frac{1}{3}(1 - n^2)$

لدينا: $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$ ومنه: $u_n v_n + 2v_n = 1$ أي: $u_n v_n = 1 - 2v_n$

لدينا:

$$\begin{aligned} u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n &= (1 - 2v_0) + (1 - 2v_1) + \dots + (1 - 2v_n) \\ &= 1 \times (n+1) - 2(v_0 + v_1 + \dots + v_n) \\ &= n+1 - 2 \left[\frac{n+1}{2} (v_0 + v_n) \right] \\ &= n+1 - \left[(n+1) \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}n \right) \right] \end{aligned}$$

$$u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = (n+1) \left[1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}n \right) \right] = (n+1) \left(\frac{1-n}{3} \right) = \frac{1}{3}(1 - n^2) \text{ ومنه:}$$

حل مقترح التمرين الثاني

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \times 7!} = 120 \text{ عدد السحوبات الممكنة هو:}$$

(1) أ- حساب الإحتمالات:

A: "الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني". أي الحصول على ثلاثة ألوان الأبيض والأحمر والأخضر.

$$P(A) = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_3^1}{120} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

B: "الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم".

$$P(B) = \frac{C_5^3 + C_4^3}{120} = \frac{14}{120} = \frac{7}{60}$$

$$\text{ب- تبين أن: } P(A \cap B) = \frac{1}{20}$$

A ∩ B: "الكريات الثلاث المسحوبة تحمل نفس الرقم ومن ألوان مختلفة".

$$P(A \cap B) = \frac{C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1 + C_1^1 \times C_1^1 \times C_2^1}{120} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

حساب الإحتمال الشرطي $P_A(B)$:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{6}$$

حساب $P(A \cup B)$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{36}{120} + \frac{14}{120} - \frac{6}{120} = \frac{44}{120} = \frac{11}{30}$$

(2) المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا .
لدينا : $X \in \{0;1;2;3\}$

$$P(X=1) = \frac{C_5^1 \times C_5^2}{126} = \frac{50}{120}, \quad P(X=0) = \frac{C_5^3}{120} = \frac{10}{120}$$

$$P(X=3) = \frac{C_5^3}{126} = \frac{10}{120}, \quad P(X=2) = \frac{C_5^2 \times C_5^1}{126} = \frac{50}{120}$$

قانون الإحتمال:

X_i	0	1	2	3
$P(X = X_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

بـ حساب الأمل الرياضي $E(X)$:

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{12} + 1 \times \frac{5}{12} + 2 \times \frac{5}{12} + 3 \times \frac{1}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

حل مقترح التمرين الثالث

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$.

لدينا : $\Delta = (-\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 1 = -1 = i^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_2 = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{\sqrt{3}-i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

(2) كتابة z_B و z_A على الشكل الأسّي :

$$\text{لدينا : } |z_A| = 1 \text{ ومنه : } z_A = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{وبفرض } \theta_A \text{ عمدة للعدد المركب } z_A, \text{ يكون : } \begin{cases} \cos \theta_A = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ ومنه } \arg(z_A) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{إذن : } z_A = e^{i \frac{\pi}{3}}$$

$$\text{لدينا : } |z_B| = 1 \text{ ومنه : } z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

وبفرض θ_B عمدة للعدد المركب z_B ، يكون :
$$\begin{cases} \cos \theta_B = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_B = \frac{1}{2} \end{cases}$$
 ، ومنه $\arg(z_B) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$.
إذن : $z_B = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

• تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون
$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

لدينا : $\frac{z_A}{z_B} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{6}}$ ومنه

$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ يكافئ $e^{i\frac{n\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ يكافئ $\frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ، مع $k \in \mathbb{N}$ ، $n = 12k + 2$ يكافئ

(3) أ. التحقق : $\frac{z_B}{z_C} = \frac{z_B}{z_B} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

لدينا : $\frac{z_B}{z_C} = \frac{z_B - z_O}{z_C - z_O} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ معناه : $\frac{z_B}{z_C} = \frac{z_B - z_O}{z_C - z_O} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه المثلث OBC متقايس الأضلاع .
ب- إستنتاج أن : B هي صورة C بدوران r مع تعيين عناصره المميزة .

لدينا : $\frac{z_B - z_O}{z_C - z_O} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $z_B - z_O = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_C - z_O)$ ومنه B هي صورة C بالدوران r الذي مركزه O

وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

(4) تعيين طبيعة المجموعة (γ) :

$|z| = \left| z - \frac{\sqrt{3} + i}{2} \right|$ تكافئ $|z| = |\bar{z} - z_B|$ تكافئ $|z| = |\bar{z} - z_B|$ تكافئ $|z| = |z - z_C|$

ومعناها : $OM = CM$ وبالتالي (γ) هي محور القطعة $[OC]$.

• تعيين صورة (γ) بالدوران r :

بما أن : $r(O) = O$ و $r(C) = B$ فإن صورة (γ) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

حل مقترح التمرين الرابع

(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 2 + (x-1)e^{-x}$

(1) حساب النهايات :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1) = -\infty$: لأن ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + (x-1)e^{-x}) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$: لأن ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + (x-1)e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + xe^{-x} - e^{-x}) = 2$

(2) دراسة إتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = e^{-x} + (-e^{-x})(x-1) = (2-x)e^{-x}$

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{-x} > 0$ وبالتالي إشارة $g'(x)$ من إشارة $2-x$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$		+	-

الدالة g متناقصة على المجال $[2; +\infty[$ ومتزايدة على المجال $]-\infty; 2]$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$		0	
$g(x)$	$-\infty$	$2 + e^{-2}$	2

جدول تغيرات الدالة g :

(3) أ- تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في حلا وحيدا α حيث $-0.38 < \alpha < -0.37$.

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty; 2[$ و $]-\infty; 2[\subset]-0.38; -0.37[$ و $g(-0.38) \approx -0.017$
 $g(-0.37) \approx 0.016$

أي $g(-0.38) \times g(-0.37) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.38 < \alpha < -0.37$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$		0	

ب- إشارة $g(x)$:

(II) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$
 1) حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = 0 \text{ ، لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1 - xe^{-x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1 - xe^{-x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(2 + \frac{1}{x} - e^{-x} \right) \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^{-x}) = 0$$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ج- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) بحيث: $y = 2x + 1$: (Δ) .

لدينا: $f(x) - y = f(x) - (2x + 1) = -xe^{-x}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $-x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$		0	
الوضع النسبي		في النقطة $A(0;1)$	

(2) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $f'(x) = g(x)$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = 2 + (-1)e^{-x} + (-e^{-x})(-x) = 2 + (x - 1)e^{-x} = g(x)$$

- إتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ، ومنه نستنتج أن: الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty; \alpha]$ ومتزايدة على المجال $[\alpha; +\infty[$.

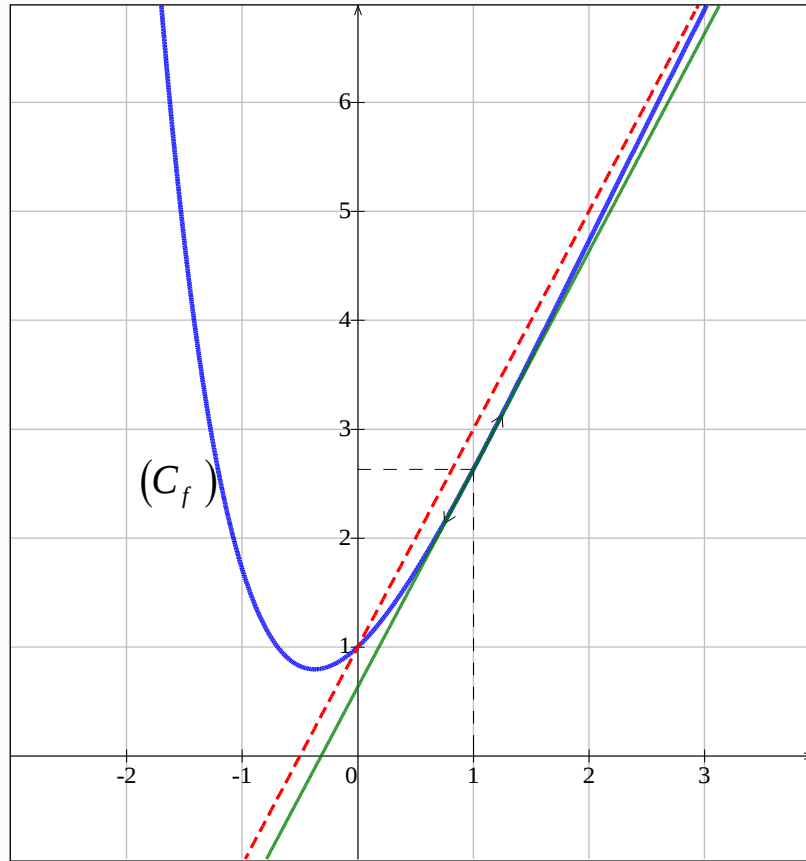
x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

جدول تغيرات الدالة f :

(3) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

لدينا : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ و $y = 2x + 1 - \frac{1}{e}$ هي معادلة (T) .

(4) الرسم :



(5) المناقشة البيانية :

$$x = (1-m)e^x \text{ تكافئ } xe^{-x} = (1-m) \text{ تكافئ } -xe^{-x} = m-1 \text{ تكافئ } 2x+1-xe^{-x} = 2x+1+m-1$$

أي $2x+1-xe^{-x} = 2x+m$ أي : $f(x) = 2x+m \leftarrow$ مناقشة مائلة.

إذا كان $m \in \left] -\infty; 1 - \frac{1}{e} \right[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول.

إذا كان $m = 1 - \frac{1}{e}$ المعادلة تقبل حل مضاعف.

إذا كان $m \in \left] 1 - \frac{1}{e}; 1 \right[$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين تماما.

إذا كان $m = 1$ فإن المعادلة تقبل حل واحد معدوم.

إذا كان $m \in]1; +\infty[$ فإن المعادلة تقبل حل واحد سالب تماما.

(6) أ- تعيين دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل $x = 1$.

الدالة $x \mapsto xe^{-x}$ مستمرة على $\mathbb{R}$ وبالتالي فالدالة الأصلية التي تنعدم عند 1 هي الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$

$$\text{كما يلي : } F(x) = \int_1^x te^{-t} dt$$

نضع $u(t) = t$ ، $v'(t) = e^{-t}$ ومنه $u'(t) = 1$ ، $v(t) = -e^{-t}$ ، وبتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا :

$$F(x) = \left[-te^{-t} \right]_1^x - \int_1^x -e^{-t} dt = -xe^{-x} + e^{-1} - \int_1^x -e^{-t} dt = -xe^{-x} + e^{-1} - e^{-x} + e^{-1} = (-x-1)e^{-x} + 2e^{-1}$$

ومنه الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل $x = 1$ هي : $F(x) = (-x-1)e^{-x} + 2e^{-1}$.

$$\text{ب- حساب العدد } A \text{ مساحة الحيز : } A = \int_1^3 ((2x+1) - f(x)) dx = \int_1^3 xe^{-x} dx = F(3) - F(1) = 2e^{-1} - 4e^{-3} (u.a)$$

حل مقترح التمرين الأول

المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$.

(1) حساب الحدود u_1, u_2, u_3 :

$$u_2 = u_1 + \ln\left(\frac{5}{3}\right) = \ln 3 + \ln 5 - \ln 3 = \ln 5 \quad , \quad u_1 = u_0 + \ln(3) = \ln 3$$

$$u_3 = u_2 + \ln\left(\frac{7}{5}\right) = \ln 5 + \ln 7 - \ln 5 = \ln 7$$

(2) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$:

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n ، $2n+3 > 2n+1$ ، ومنه $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$ (كذلك لاحظ أن: $\frac{2n+3}{2n+1} - 1 = \frac{2}{2n+1}$).

• اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$\text{لدينا: } u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right).$$

ونعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$ ، ومنه $\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) > 0$ أي $\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) > \ln 1$.

إذن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n > 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

(3) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = 2n+1$

أ- البرهان بالتراجع أن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $e^{u_n} = v_n$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $e^{u_n} = v_n$ ".

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0 = 1$ ومنه $v_0 = e^{u_0} = 1$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $e^{u_n} = v_n$ ، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $e^{u_{n+1}} = v_{n+1}$.

$$\text{لدينا } e^{u_{n+1}} = v_{n+1} \text{ ومنه } e^{u_{n+1}} = e^{u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)} = v_n \times \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) = (2n+1) \times \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) = 2n+3$$

وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

• الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، $e^{u_n} = v_n$.

ب- كتابة عبارة u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $e^{u_n} = v_n$ ومنه $u_n = \ln(v_n) = \ln(2n+1)$.

$$\text{حساب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(2n+1) = +\infty$$

(4) حساب المجموعين:

$$\text{لدينا: } S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right) = \ln v_1 - \ln v_0 + \ln v_2 - \ln v_1 + \dots + \ln v_n - \ln v_{n-1}$$

ومنه: $S_n = -\ln v_0 + \ln v_n = u_n$.

$$T = e^{u_{1439}} + e^{u_{1440}} + \dots + e^{u_{2018}} = v_{1439} + v_{1440} + \dots + v_{2018} = \frac{2018-1439+1}{2} (2(1439+2018)+2) = 2005640$$

(1) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) :

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 5t - 2 \\ z = -2t + 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (\Delta) \text{ من الشكل: } \vec{u}(1; 5; -2) \text{ شعاع توجيه له ومنه فتمثيل وسيطي لـ } (\Delta) \text{ من الشكل:}$$

(2) تبين أن المستويين (P_1) و (P_2) متقاطعان:

$$\text{لدينا: } (P_1): -x + y + 2z + 1 = 0 \text{ و } (P_2): -3x + y + z + 4 = 0.$$

$$\text{ومن: } \vec{n}_1(-1; 1; 2) \text{ شعاع ناظمي لـ } (P_1) \text{ و } \vec{n}_2(-3; 1; 1) \text{ شعاع ناظمي لـ } (P_2).$$

$$\vec{n}_1 \text{ و } \vec{n}_2 \text{ ليسا مرتبطين خطيا لأن } y_{\vec{n}_1} = y_{\vec{n}_2} \text{ لكن } x_{\vec{n}_1} \neq x_{\vec{n}_2}, \text{ وبالتالي المستويان } (P_1) \text{ و } (P_2) \text{ متقاطعان وفق مستقيم.}$$

• التحقق أن تقاطع (P_1) و (P_2) هو المستقيم (Δ) :

يكفي إثبات أن $(\Delta) \subset (P_1)$ و $(\Delta) \subset (P_2)$.

$$\text{بتعويض التمثيل الوسيطي لـ } (\Delta) \text{ في معادلة } (P_1) \text{ نجد: } -(t+1) + 5t - 2 + 2(-2t+1) + 1 = 0 \text{ (محقة)}$$

$$\text{ومن: } (\Delta) \subset (P_1).$$

$$\text{بتعويض التمثيل الوسيطي لـ } (\Delta) \text{ في معادلة } (P_2) \text{ نجد: } -3(t+1) + 5t - 2 + (-2t+1) + 4 = 0 \text{ (محقة)}$$

$$\text{ومن: } (\Delta) \subset (P_2).$$

(3) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل $B(-1; 4; 0)$ ويعامد كلا من (P_1) و (P_2) :

$$(Q) \perp (P_1) \text{ و } (Q) \perp (P_2) \text{ معناه: } (Q) \perp (\Delta) \text{ ومنه } \vec{u}(1; 5; -2) \text{ شعاع ناظمي لـ } (Q).$$

$$\text{وبالتالي معادلة لـ } (Q) \text{ من الشكل: } x + 5y - 2z + d = 0.$$

$$B \in (Q) \text{ يعني أن: } (-1) + 5 \times 4 - 2 \times 0 + d = 0 \text{ أي } d = -19 \text{ ومنه ينتج: } (Q): x + 5y - 2z - 19 = 0.$$

• تقاطع المستويات الثلاثة (P_1) ، (P_2) و (Q) .

$$\text{لدينا: } (P_1) \cap (P_2) = (\Delta) \text{ ومنه يكفي دراسة تقاطع } (\Delta) \text{ و } (Q).$$

$$\text{نحل الجملة: } \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 5t - 2 \\ z = -2t + 1 \\ x + 5y - 2z - 19 = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{نجد: } (t+1) + 5(5t-2) - 2(-2t+1) - 19 = 0 \text{ أي: } t = 1.$$

$$\text{إذن } E(2; 3; -1) \text{ هي نقطة تقاطع المستويات الثلاثة } (P_1)، (P_2) \text{ و } (Q).$$

$$(4) \text{ لتكن } E(2; 3; -1) \text{ و } H(0; 3; -2) \text{ نقطتان من الفضاء.}$$

أ- التحقق أن H هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P_1) .

$$\text{يكفي إثبات أن } H \in (P_1) \text{ وأن } \vec{BH} \text{ و } \vec{n}_1 \text{ مرتبطين خطيا.}$$

$$\text{لدينا: } H \in (P_1) \text{ لأن: } 0 + 3 - 4 + 1 = 0. \text{ ولدينا: } \vec{BH}(1; -1; -2) \text{ ومنه } \vec{BH} = -\vec{n}_1$$

$$\text{إذن: } H \in (P_1) \text{ و } \vec{BH} \text{ و } \vec{n}_1 \text{ مرتبطين خطيا وبالتالي } H \text{ هي المسقط العمودي للنقطة } B \text{ على المستوي } (P_1).$$

ب- طبيعة المثلث EBH :

$$\text{لدينا: } H \in (P_1) \text{ و } E \in (P_1) \text{ و } B \notin (P_1) \text{ هي المسقط العمودي للنقطة } B \text{ على المستوي } (P_1) \text{ وبالتالي}$$

المثلث EBH قائم في H .

• حساب V حجم رباعي الوجوه $AEBH$.

$$V = \frac{1}{3} \times S_{EBH} \times h \text{ حيث: } h = d(A; (Q)). \text{ (يمكن التحقق أن } (Q) \text{ هو نفسه } (EBH)).$$

$$h = d(A; Q) = \frac{|1 + 5(-2) - 2 - 19|}{\sqrt{1^2 + 5^2 + (-2)^2}} = \frac{30}{\sqrt{30}} = \sqrt{30} \quad \text{و} \quad S_{EBH} = \frac{1}{2} EH \times HB = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

$$\text{ومنه: } V = \frac{1}{3} \times S_{EBH} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{30}}{2} \times \sqrt{30} = 5. uv$$

حل مقترح التمرين الثالث

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(\bar{z} - 4 + i)(z^2 - 4z + 5) = 0$

$(\bar{z} - 4 + i)(z^2 - 4z + 5) = 0$ تكافئ $\bar{z} - 4 + i = 0$ أو $z^2 - 4z + 5 = 0$

$\bar{z} - 4 + i = 0$ معناه: $\bar{z} = 4 - i$ ، أي: $z = 4 + i$

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 4z + 5 = 0$:

لدينا: $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4 = 4i^2 = (2i)^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما:

$z_2 = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i$ و $z_1 = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i$

إذن مجموعة حلول المعادلة $(\bar{z} - 4 + i)(z^2 - 4z + 5) = 0$ هي: $S = \{4 + i; 2 + i; 2 - i\}$

(II) 1) التحقق أن: $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$

لدينا: $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{4 + i - (2 + i)}{2 - i - (2 + i)} = \frac{2}{-2i} = \frac{1}{-i} = i$ وهو المطلوب.

• تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا.

لدينا: $\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)^n = i^n = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{2}}$

$\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)^n$ تخيلي صرف معناه: $\arg\left(e^{i\frac{n\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أي: $\frac{n\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أي: $n = 2k + 1$ مع $k \in \mathbb{N}$

(2) تبيان أن المثلث ABD متقايس الأضلاع:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{array} \right\} \text{ تكافئ } \left\{ \begin{array}{l} |z_D - z_A| = |z_B - z_A| \\ \arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{array} \right.$$

تكافئ $\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه المثلث ABD متقايس الأضلاع.

• حساب z_D

لدينا: $\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $z_D = 3 + (1 + \sqrt{3})i$ أي: $z_D = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A) + z_A$

(3) حساب z_G :

G مركز ثقل المثلث ABD معناه G مرجح الجملة $\{(A, 1); (B, 1); (D, 1)\}$ ومنه $z_G = \frac{z_A + z_B + z_D}{3}$

ومنه: $z_G = 3 + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)i$

• S التشابه المباشر الذي مركزه A ويحول G إلى D ، يعني : $a = \frac{z_D - z_A}{z_G - z_A}$ أي $z_D - z_A = a(z_G - z_A)$

ومنه : $a = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ومنه نسبة التشابه هي : $|a| = \sqrt{3}$ ، وزاوية التشابه هي : $\arg(a) = \frac{\pi}{6}$.

(4) تعيين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z (M تختلف عن C) بحيث : $(k \in \mathbb{Z})$: $\arg\left(\frac{z_G - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi$.

لدينا : $(k \in \mathbb{Z})$: $\arg\left(\frac{z_G - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi$ يعني : $(\overline{MC}; \overline{MG}) = \pi + 2k\pi$.

ومنه المجموعة (Γ) هي قطعة المستقيم المفتوحة $]CG[$.

حل مقترح التمرين الرابع

(I) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1$.

• حساب $g(1)$: $g(1) = 1 - (\ln 1)^2 - \ln 1 - 1 = 0$.

• إشارة $g(x)$:

x	0	1	$+\infty$
g(x)		+	0 -

(II) الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x}$.

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$:

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 : \text{تذكر أن} : \right) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \ln x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x \ln x) = 1 \end{cases} \text{ لأن } , \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x} \right) = -\infty$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

• تبيان أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$:

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 : \text{تذكر أن} : \right) , \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x} + \ln x} \right) = 0$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

(2) أ- تبيان أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(1 + x \ln x)^2}$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1 + x \ln x) - (\ln x + 1)(1 + x \ln x)}{(1 + x \ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x} + \ln x - (1 + \ln x)^2}{(1 + x \ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1}{(1 + x \ln x)^2}$$

ومنه : من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(1 + x \ln x)^2}$.

ب- اتجاه تغير الدالة f : إشارة من إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

x	0	1	$+\infty$
f'(x)		+	0 -

الدالة f متزايدة على المجال $]0;1[$ ومتناقصة على المجال $[1;+\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	-
$f(x)$	$-\infty$	1	0

جدول تغيرات الدالة f :

(3) تبين أن $y = \left(\frac{e^2}{e-1}\right)x - \frac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل:

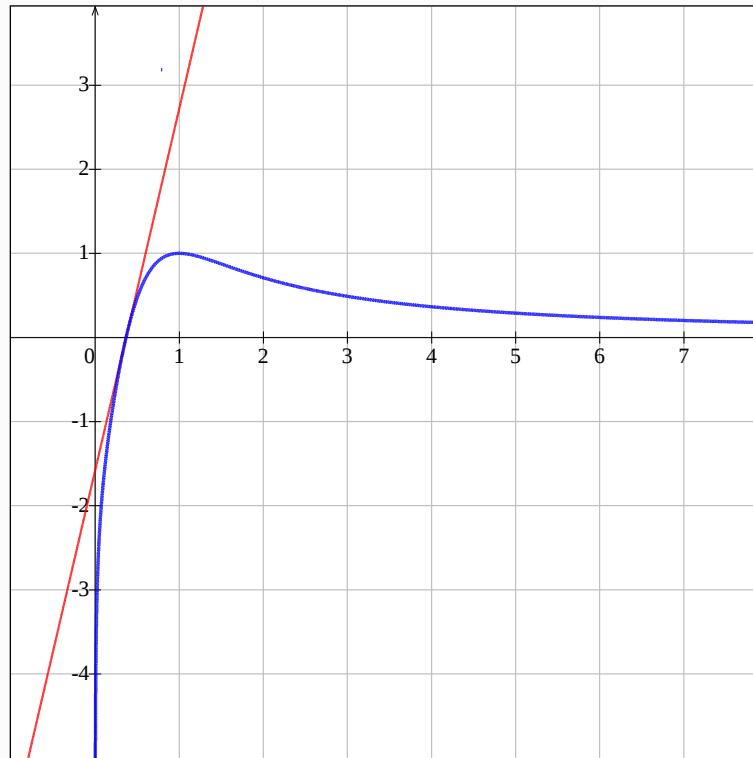
لتعيين نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل، نحل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة: $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \text{ تكافئ } \frac{1+\ln x}{1+x \ln x} = 0 \text{ تكافئ } 1+\ln x = 0 \text{ تكافئ } \ln x = -1 \text{ أي } x = \frac{1}{e}.$$

معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{e}$:

$$\text{لدينا: } (T): y = f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x - \frac{1}{e}\right) + f\left(\frac{1}{e}\right) \text{ و منه } (T): y = \left(\frac{e^2}{e-1}\right)x - \frac{e}{e-1}.$$

الرسم:



(4) تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x) = e^2x - me$ حلين متمايزين.

$$(e-1)f(x) = e^2x - me \text{ تكافئ } f(x) = \frac{e^2}{e-1}x - \frac{e}{e-1}m$$

حلول المعادلة $(e-1)f(x) = e^2x - me$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (T_m) ذي

$$\text{المعادلة } y = \frac{e^2}{e-1}x - \frac{e}{e-1}m.$$

من البيان: المعادلة تقبل حلين متمايزين لما $-\frac{e}{e-1}m < -\frac{e}{e-1}$ أي $m > 1$.

(III) n عدد طبيعي حيث $n > 1$ ، I_n مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل والمنحنى (C_f) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = n$.

(1) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n > 1$: $I_n = \ln(1 + n \ln n)$.

$$. I_n = \int_1^n f(x) dx = \int_1^n \left(\frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x} \right) dx = \left[\ln(1 + x \ln x) \right]_1^n = \ln(1 + n \ln n) \text{ لدينا :}$$

(لاحظ أن f من الشكل : $\frac{u'}{u}$)

(2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (I_n) :

ندرس إشارة الفرق : $I_{n+1} - I_n$

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^{n+1} f(x) dx - \int_1^n f(x) dx = \int_1^n f(x) dx + \int_n^{n+1} f(x) dx - \int_1^n f(x) dx = \int_n^{n+1} f(x) dx$$

ولدينا : $\int_n^{n+1} f(x) dx > 0$: $n > 1$ ومن أجل وبالتالي المتتالية (I_n) متزايدة تماما .

الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن)

- (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 13$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.
- (1) أ- برهن بالبرهان بالتراجع أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$.
ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة .
 - (2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln(u_n - 1)$.
- أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .
 - (3) أكتب v_n بدلالة n ، ثم بين أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$ ، وأحسب عندئذ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
 - (4) بين أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $(u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1) = \left(\frac{12}{5^2}\right)^{n+1}$.

التمرين الثاني (4ن)

- يحتوي كيس على خمس كريات حمراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 و كرية واحدة تحمل الرقم 2 و سبع كريات خضراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 و ثلاث كريات تحمل الرقم 2 . (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس)
نسحب عشوائيا كرتين من الكيس في آن واحد و نعتبر الحادثتين A و B حيث :
- A : " سحب كرتين من نفس اللون " ، B : " سحب كرتين تحملان نفس الرقم "
- (1) بين أن احتمال الحادثة A هو $P(A) = \frac{31}{66}$ و احسب احتمال الحادثة B .
 - (2) علما أن الكرتين المسحوبتين من نفس اللون ، ما احتمال أن تحملان نفس الرقم ؟
 - (3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس .
عزف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي و أحسب أمله الرياضي .

التمرين الثالث (5ن)

- (I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z - i)(z^2 - 4z + 5) = 0$.
- (II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A ، B و C التي لاحتقاتها :
- i ، $2 - i$ و $2 + i$ على الترتيب .
- (1) أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$ على الشكل الأسّي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .
 - (2) من أجل كل عدد مركب z يختلف عن $2 + i$ نضع : $f(z) = \frac{iz - 1 - 2i}{2z - 4 - 2i}$.
أ- عين المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق $|f(z)| = \frac{1}{2}$.
ب- بين أن العدد $[f(i)]^{1440}$ حقيقي موجب .
 - (3) نعتبر الدوران r الذي مركزه النقطة C وزاويته $\frac{\pi}{2}$.
أ- عين لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران r وبين أن النقط A ، D و C في إستقامة .
ب- استنتج أن النقطة D هي صورة النقطة A بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيين عناصره المميزة .

التمرين الرابع (7ن)

1. الدالة العددية المعرفة على $]0; 2[\cup]2; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x$.
 (تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$)
 أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ثم فسر النتائج بيانياً .
 ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 2. أدرس اتجاه تغير الدالة f على $]0; 2[\cup]2; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .
 3. نسمي (Γ) المنحنى البياني للدالة اللوغاريتمية النيبيرية " $\ln$ " في المعلم السابق .
 أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$ ثم فسر النتيجة بيانياً .
 ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (Γ) .
 4. أرسم بعناية المنحنى (Γ) ثم المنحنى (C_f) .
 5. الدالة المعرفة على المجال $]3; +\infty[$ بـ : $H(x) = \int_3^x \ln(t) dt$ حيث t متغير حقيقي موجب تماماً .
 أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة ، عين عبارة $H(x)$ بدلالة x .
 ب- أحسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل والمستقيمين ذوي المعادلتين :
 $x = 4$ و $x = 3$.
 6. الدالة المعرفة على $]0; 1[\cup]1; -\infty[$ بـ : $g(x) = f(-2x)$.
 دون حساب عبارة $g(x)$ حدد اتجاه تغير الدالة g على مجموعة تعريفها .

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4ن)

- يحتوي صندوق على 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس منها كريتان تحملان الرقم 0 و ثلاث تحمل الرقم 1 و الكريات الأخرى تحمل الرقم 2 . نسحب عشوائياً وفي آن واحد ثلاث كريات من الصندوق .
 ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب جداء الأرقام المسجلة على الكريات المسحوبة .
 1. عزف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.
 2. بين أن إحتمال الحصول على ثلاث كريات كل منها تحمل رقماً زوجياً هو $\frac{7}{24}$.
 3. نسحب الآن من الصندوق كريتتين على التوالي دون إرجاع .
 ما إحتمال الحصول على كريتتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علماً أن جداؤهما زوجي ؟

التمرين الثاني (4ن)

- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]4; 7[$ بـ : $f(x) = \sqrt{x+2} + 4$.
 1. أ- بين أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]4; 7[$.
 ب- استنتج أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]4; 7[$ فإن $f(x) \in]4; 7[$.
 2. برهن أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]4; 7[$ فإن $f(x) - x = \frac{-x^2 + 9x - 14}{x - 4 + \sqrt{x+2}}$.
 ثم استنتج أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]4; 7[$ فإن $f(x) - x > 0$.

(3) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$ ،

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 \leq u_n < 7$.

ب- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم بين أنها متقاربة .

(4) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $7 - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(7 - u_n)$.

ب- استنتج أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < 7 - u_n \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ، ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الثالث (5ن)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحتقاتها z_A ، z_B و z_C على الترتيب حيث : $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -2z_A$.

(1) أ- أكتب العدد المركب z_A على الشكل الأسّي .

ب- أحسب العدد $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$.

(2) أ- T الإنسحاب الذي يحول A إلى C ، عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالإنسحاب T .

ب- استنتج طبيعة الرباعي $ABDC$.

(3) أكتب العدد المركب $z_C - z_A$ على الشكل الأسّي .

(4) جد قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا .

(5) لتكن M نقطة كيفية من المستوي لاحتقتها z حيث تختلف عن A وتختلف عن C .

عين (E) مجموعة النقط M التي يكون من أجلها $\frac{z_A - z}{z_C - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما .

التمرين الرابع (7ن)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$. تؤخذ وحدة الطول $2cm$.

(C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 \quad \text{و} \quad g(x) = e^x - ex$$

(1) أ- أدرس اتجاه تغير الدالة g .

ب- استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة f .

(3) أحسب كلا من $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(4) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$.

(5) أرسم على المجال $[0; 2]$ المنحنيين (C_f) و (C_g) في نفس المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (يعطى $e^2 - 2e \approx 2$) .

(6) أحسب بالسنتمتر مربع مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) .

(7) الدالة المعرفة على المجال $[-2; 2]$ كما يلي : $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|}$ وليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ- بين أن الدالة h زوجية .

ب- من أجل $x \in [0; 2]$ أحسب $h(x) + f(x)$ ثم استنتج كيفية رسم (Γ) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه .

حل مقترح التمرين الأول

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 13$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.

(1) أ- البرهان بالتراجع أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$ " .

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = 13$ ومنه $u_0 > 1$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة .

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $u_n > 1$ ، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1} > 1$.

لدينا حسب الفرض $u_n > 1$ ومنه $\frac{1}{5}u_n > \frac{1}{5} \times 1$ ومنه $\frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} > \frac{1}{5} + \frac{4}{5}$ أي $u_{n+1} > 1$. وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$.

ب- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - u_n = -\frac{4}{5}u_n + \frac{4}{5} = \frac{4}{5}(1 - u_n)$ ،

ولدينا : $u_n > 1$ من أجل كل عدد طبيعي n ، ومنه $1 - u_n < 0$ أي $u_{n+1} - u_n < 0$

وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

- إستنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة :

المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل إذن فهي متقاربة .

(2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln(u_n - 1)$.

- إثبات أن المتتالية (v_n) حسابية :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln\left(\frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - 1\right) = \ln\left(\frac{1}{5}u_n - \frac{1}{5}\right) = \ln\left(\frac{1}{5}(u_n - 1)\right) = \ln\left(\frac{1}{5}\right) + \ln(u_n - 1) = \ln\left(\frac{1}{5}\right) + v_n$$

ومن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = \ln\left(\frac{1}{5}\right)$ وحدها الأول : $v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln 12$.

(3) كتابة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = v_0 + nr$ ، ومنه $v_n = \ln 12 + n \ln\left(\frac{1}{5}\right)$ أي : $v_n = \ln 12 + \ln\left[\left(\frac{1}{5}\right)^n\right] = \ln\left(\frac{12}{5^n}\right)$.

• تبيان أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \ln(u_n - 1)$ ومنه $e^{v_n} = u_n - 1$ ومنه $u_n = 1 + e^{v_n}$.

$$u_n = 1 + e^{\ln\left(\frac{12}{5^n}\right)} = 1 + \frac{12}{5^n} \text{ أي } u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$$

• حساب $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{12}{5^n}\right) = 0 \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{12}{5^n}\right) = 1$$

$$(4) \text{ تبيان أنه : من أجل كل عدد طبيعي } n, (u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1) = \left(\frac{12}{5^2} \right)^{n+1}$$

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n , $e^{v_n} = u_n - 1$ ومنه

$$(u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1) = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \dots \times e^{v_n} = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_n}$$

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = \left(\frac{n+1}{2} \right) (v_0 + v_n) = \left(\frac{n+1}{2} \right) \left(\ln 12 + \ln \frac{12}{5^n} \right) = \left(\frac{n+1}{2} \right) \ln \left(\frac{12^2}{5^n} \right) = (n+1) \ln \left(\frac{12^2}{5^n} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1) = e^{S_n} = e^{\ln \left(\frac{12}{5^2} \right)^{n+1}} = \left(\frac{12}{5^2} \right)^{n+1} \text{ إذن : } S_n = \ln \left(\frac{12}{5^2} \right)^{n+1} \text{ أي :}$$

حل مقترح التمرين الثاني

$$C_{12}^2 = \frac{12!}{2!(12-2)!} = 66 \text{ عدد السحبات الممكنة :}$$

$$(1) \text{ تبيان أن احتمال الحادثة } A \text{ هو } P(A) = \frac{31}{66}$$

A : " سحب كرتين من نفس اللون "

$$P(A) = \frac{C_5^2 + C_7^2}{66} = \frac{10 + 21}{66} = \frac{31}{66}$$

• حساب احتمال الحادثة B :

B : " سحب كرتين تحملان نفس الرقم "

$$P(B) = \frac{C_8^2 + C_4^2}{66} = \frac{28 + 6}{66} = \frac{34}{66} = \frac{17}{33}$$

(2) علما أن الكرتين المسحوبتين من نفس اللون ، ما احتمال أن تحملان نفس الرقم ؟

$$\text{لدينا : } P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ و } P(A \cap B) = \frac{C_4^2 + C_3^2 + C_4^2}{66} = \frac{15}{66} \text{ ومنه } P_A(B) = \frac{\frac{15}{66}}{\frac{31}{66}} = \frac{15}{31}$$

(3) المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس .

لدينا : $X \in \{3; 4; 5\}$

$$P(X = 5) = \frac{C_7^2}{66} = \frac{21}{66}, \quad P(X = 4) = \frac{C_5^1 \times C_7^1}{66} = \frac{35}{66}, \quad P(X = 3) = \frac{C_5^2}{66} = \frac{10}{66}$$

قانون الاحتمال:

X_i	3	4	5
$P(X = X_i)$	$\frac{10}{66}$	$\frac{35}{66}$	$\frac{21}{66}$

بـ حساب الأمل الرياضي $E(X)$:

$$E(X) = 3 \times \frac{10}{66} + 4 \times \frac{35}{66} + 5 \times \frac{21}{66} = \frac{275}{66}$$

(I) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z - i)(z^2 - 4z + 5) = 0$

$$(z - i)(z^2 - 4z + 5) = 0 \text{ تكافئ } z = i \text{ أو } z^2 - 4z + 5 = 0$$

لنحل $\mathbb{C}$ في المعادلة $z^2 - 4z + 5 = 0$:

لدينا: $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4 = 4i^2 = (2i)^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما:

$$z_2 = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i \text{ و } z_1 = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $(z - i)(z^2 - 4z + 5) = 0$ هي: $S = \{2 - i; 2 + i; i\}$.

(II) لدينا: $z_C = 2 + i$ و $z_B = 2 - i$ ، $z_A = i$

(1) كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$ على الشكل الأسّي:

$$\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \text{ ومنه } \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = \frac{2 + i - i}{2 + i - (2 - i)} = \frac{2}{2i} = \frac{1}{i} = -i$$

• استنتاج طبيعة المثلث ABC :

$$\left\{ \begin{array}{l} AC = BC \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \text{ يكافئ } \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \text{ يكافئ } \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

ومن المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين.

(2) من أجل كل عدد مركب z يختلف عن $2 + i$ نضع: $f(z) = \frac{iz - 1 - 2i}{2z - 4 - 2i}$

أ- تعيين المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق $|f(z)| = \frac{1}{2}$:

$$|z - z_B| = |z - z_C| \text{ يكافئ } \left| \frac{z - (2 - i)}{z - (2 + i)} \right| = 1 \text{ يكافئ } \frac{1}{2} \left| \frac{i(z + i - 2)}{z - 2 - i} \right| = \frac{1}{2} \text{ يكافئ } \left| \frac{iz - 1 - 2i}{2z - 4 - 2i} \right| = \frac{1}{2}$$

ومن المجموعة (E) هي محور القطعة $[BC]$.

ب- تبيان أن العدد $[f(i)]^{1440}$ حقيقي موجب:

$$f(i) = \frac{i^2 - 1 - 2i}{2i - 4 - 2i} = \frac{-2 - 2i}{-4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1 + i) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$[f(i)]^{1440} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^{1440} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1440} e^{i360\pi} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1440} e^{i(0+180 \times 2\pi)} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1440} \text{ ومنه}$$

(3) الدوران الذي مركزه النقطة C وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ- تعيين لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران r :

$$z' - z_C = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_C) : \text{ الكتابة المختصرة للدوران } r$$

$$\text{ومنه } z_D - z_C = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_C) \text{ ومنه } z_D = i(z_B - z_C) + z_C \text{ أي } z_D = i(-2i) + 2 + i = 4 + i$$

• تبيان أن النقط A ، D و C في إستقامة:

$$\text{لدينا: } \frac{z_D - z_C}{z_A - z_C} = \frac{(4 + i) - (2 + i)}{i - (2 + i)} = \frac{2}{-2} = -1 \text{ وهذا يعني أن } \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CA} \text{ ومنه النقط } D \text{ ، } A \text{ و } C \text{ في إستقامة.}$$

ب- استنتاج أن النقطة D هي صورة النقطة A بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيين عناصره المميزة :

لدينا : $\frac{z_D - z_C}{z_A - z_C} = -1$ ومنه $z_D - z_C = -(z_A - z_C)$ وبالتالي النقطة D هي صورة A بتحاك مركزه C

ونسبته -1 .

(أوبدوران مركزه C وزاويته π أو بتناظر مركزي بالنسبة لـ C أو بتشابه مباشر مركزه C ونسبته 1 وزاويته π)

حل مقترح التمرين الرابع

f الدالة العددية المعرفة على $]0; 2[\cup]2; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x$

(1) أ- حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x-2} + \ln x \right] = -\infty$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (حامل محور الترتيب) مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\frac{1}{x-2} + \ln x \right] = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{1}{x-2} + \ln x \right] = -\infty$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x-2} + \ln x \right] = +\infty \quad \text{بـ}$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; 2[\cup]2; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; 2[\cup]2; +\infty[$:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x} = \frac{-x + (x-2)^2}{x(x-2)^2} = \frac{-x + x^2 - 4x + 4}{x(x-2)^2} = \frac{x^2 - 5x + 4}{x(x-2)^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x^2 - 5x + 4$ لكون $x(x-2)^2 > 0$ من أجل كل x من $]0; 2[\cup]2; +\infty[$.
• إشارة $f'(x)$:

x	0	1	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+

ومنه : الدالة f متزايدة على المجالين $]4; +\infty[$ و $]0; 1[$ ومتناقصة على المجالين $]1; 2[$ و $]2; 4[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	-1	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{1}{2} + \ln 4$	$+\infty$

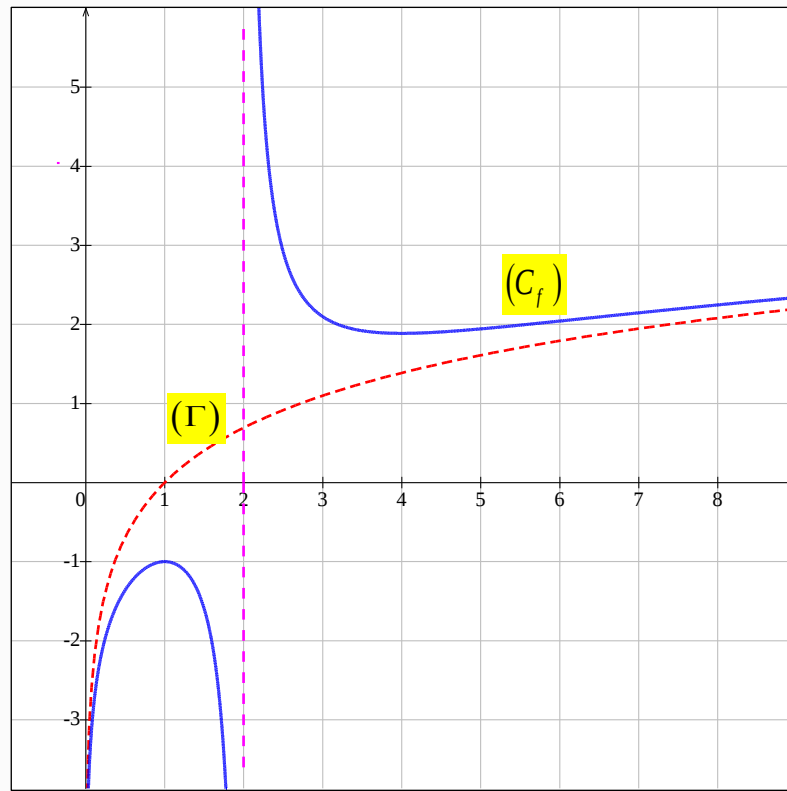
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x-2} \right) = 0 \quad \text{أ- (3)}$$

التفسير : المنحنى (Γ) مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (Γ) :

لدينا : $f(x) - \ln x = \frac{1}{x-2}$ ومنه إشارة الفرق $f(x) - \ln x$ من إشارة $x-2$.

على المجال $]0; 2[$: (C_f) يقع تحت (Γ) وعلى المجال $]2; +\infty[$: (C_f) يقع فوق (Γ) .



(5) الدالة المعرفة على المجال $]3; +\infty[$ بـ: $H(x) = \int_3^x \ln(t) dt$ حيث t متغير حقيقي موجب تماما .

أ- تعيين عبارة $H(x)$ بدلالة x .

$$\text{نضع } u(t) = \ln(t) , v'(t) = 1 \text{ و منه } u'(t) = \frac{1}{t} , v(t) = t$$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا :

$$H(x) = [t \ln t]_3^x - \int_3^x \frac{1}{t} \times t dt = x \ln x - 3 \ln 3 - \int_3^x dt = x \ln x - 3 \ln 3 - [t]_3^x$$

$$\text{ومنه } H(x) = x \ln x - 3 \ln 3 - (x - 3) \text{ أي : } H(x) = -x + 3 + x \ln x - 3 \ln 3$$

ب- حساب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين ذوي

المعادلتين : $x=3$ و $x=4$.

$$A = \int_3^4 f(x) dx = \int_3^4 \left(\frac{1}{x-2} + \ln x \right) dx = \int_3^4 \left(\frac{1}{x-2} \right) dx + \int_3^4 \ln x dx = \int_3^4 \left(\frac{1}{x-2} \right) dx + H(4) = [\ln|x-2|]_3^4 + H(4)$$

$$\text{ومنه } A = \ln 2 + 4 \ln 4 - 4 - 3 \ln 3 + 3 \text{ أي : } A = (-1 + 9 \ln 2 - 3 \ln 3)(u.a)$$

$$(6) \text{ الدالة المعرفة على }]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\text{ بـ : } g(x) = f(-2x)$$

الدالة g قابلة للإشتقاق على $]0; -1[\cup]-\infty; -1[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق ، و $g'(x) = -2f'(-2x)$.

إتجاه تغير الدالة g :

$$g'(x) > 0 \text{ تكافئ } f'(-2x) < 0 \text{ تكافئ : } \begin{cases} 1 < -2x < 2 \\ 2 < -2x < 4 \end{cases} \text{ تكافئ : } \begin{cases} -1 < x < -\frac{1}{2} \\ -2 < x < -1 \end{cases}$$

$$\text{ومنه الدالة } g \text{ متزايدة على } \left[-\frac{1}{2}; -1\right] \cup]-2; -1[\text{ و متناقصة على } \left[-\frac{1}{2}; 0\right] \cup]-\infty; -2[.$$

حل مقترح التمرين الأول

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$$

(1) المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب جداء الأرقام المسجلة على الكريات المسحوبة .

$$X \in \{0; 1; 2; 4; 8\}$$

$$P(X=1) = \frac{C_3^3}{120} = \frac{1}{120}, \quad P(X=0) = \frac{C_2^1 \times C_8^2 + C_2^2 \times C_8^1}{120} = \frac{64}{120}$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 \times C_5^1}{120} = \frac{15}{120}$$

$$P(X=8) = \frac{C_5^3}{120} = \frac{10}{120}, \quad P(X=4) = \frac{C_5^2 \times C_3^1}{120} = \frac{30}{120}$$

قانون الإحتمال:

X_i	0	1	2	4	8
$P(X = X_i)$	$\frac{64}{120}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{15}{120}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{10}{120}$

- حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$$E(X) = 0 \times \frac{64}{120} + 1 \times \frac{1}{120} + 2 \times \frac{15}{120} + 4 \times \frac{30}{120} + 8 \times \frac{10}{120} = \frac{231}{120}$$

(2) تبيان أن إحتمال الحصول على ثلاث كريات كل منها تحمل رقما زوجيا هو $\frac{7}{24}$.

A : " سحب ثلاث كريات كل منها تحمل رقما زوجيا "

$$P(A) = \frac{C_7^3}{120} = \frac{35}{120} = \frac{7}{24}$$

(3) عدد السحبات الممكنة $A_{10}^2 = 90$.

B : " سحب كريتين تحملان رقمين مجموعهما فردي "

C : " سحب كريتين تحملان رقمين جداؤهما زوجي "

$$P(B \cap C) = \frac{A_7^2}{90} = \frac{42}{90}, \quad P(C) = \frac{2A_3^1 \times A_7^1 + A_7^2}{90} = \frac{84}{90}, \quad P(B) = \frac{2A_2^1 \times A_3^1 + 2A_3^1 \times A_5^1}{90} = \frac{42}{90}$$

إحتمال الحصول على كريتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علما أن جداؤهما زوجي :

$$P_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{42}{90}}{\frac{84}{90}} = \frac{42}{84} = \frac{1}{2}$$

حل مقترح التمرين الثاني

f الدالة المعرفة على المجال $[4; 7]$ بـ : $f(x) = \sqrt{x+2} + 4$:

(1) أ تبيان أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4; 7]$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \text{ و } [4; 7]$$

ولدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7]$ ، $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4; 7]$.

بـ استنتاج أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7]$ فإن $f(x) \in [4; 7]$.

لدينا : الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4; 7]$ ومنه من أجل كل $x \in [4; 7]$ ، $f(x) \in [f(4); f(7)]$ ،

أي : $f(x) \in [4 + \sqrt{6}; 7] \subset [4; 7]$ ولدينا $f(x) \in [4 + \sqrt{6}; 7] \subset [4; 7]$ ، ومنه : من أجل كل $x \in [4; 7]$ ، $f(x) \in [4; 7]$ ،

(2) لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7]$:

$$f(x) - x = \sqrt{x+2} + 4 - x = \frac{[\sqrt{x+2} + (4-x)][\sqrt{x+2} - (4-x)]}{\sqrt{x+2} - (4-x)} = \frac{x+2 - (4-x)^2}{x-4+\sqrt{x+2}} = \frac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}}$$

الاستنتاج :

$$f(x) - x = \frac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}} = \frac{(7-x)(x-2)}{x-4+\sqrt{x+2}} \quad : \text{ لدينا : من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من المجال } [4; 7]$$

ومن أجل كل $x \in [4; 7]$ ، $x-4+\sqrt{x+2} > 0$ ، و $(7-x)(x-2) > 0$ ومنه $f(x) - x > 0$.

(3) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$ ،

أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 \leq u_n < 7$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $4 \leq u_n < 7$ " .

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = 4$ ومنه $4 \leq u_0 < 7$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة .

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $4 \leq u_n < 7$ ، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $4 \leq u_{n+1} < 7$.

لدينا حسب الفرض $4 \leq u_n < 7$ ومنه $4 \leq f(u_n) < 7$ (حسب نتيجة السؤال 1 ب) أي $4 \leq u_{n+1} < 7$.

وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 \leq u_n < 7$.

بـ استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 \leq u_n < 7$ و $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ ومنه $u_{n+1} - u_n > 0$.

وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

■ تبرير تقارب المتتالية (u_n) :

المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 7 ، إذن فهي متقاربة .

$$(4) \text{ أدتبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, 7 - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(7 - u_n) .$$

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n :

$$7 - u_{n+1} = 7 - \sqrt{u_n + 2} - 4 = 3 - \sqrt{u_n + 2} = \frac{(3 - \sqrt{u_n + 2})(3 + \sqrt{u_n + 2})}{3 + \sqrt{u_n + 2}} = \frac{7 - u_n}{3 + \sqrt{u_n + 2}}$$

$$\text{ ومن جهة أخرى : } 4 \leq u_n < 7 \text{ يكافئ } \frac{1}{3 + \sqrt{u_n + 2}} < \frac{1}{4} \text{ ومنه } 7 - u_{n+1} < \frac{1}{4}(7 - u_n) .$$

$$\text{ بـ استنتاج أنه : من أجل كل عدد طبيعي } n, 0 < 7 - u_n \leq 3 \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

$$\text{ نسمي } P(n) \text{ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي } n : 0 < 7 - u_n \leq 3 \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

• نتحقق من صحة $P(0)$.

$$\text{ من أجل } n = 0, \text{ لدينا } u_0 = 4 \text{ و } 7 - u_0 = 3 \text{ ومنه } 0 < 7 - u_0 \leq 3 \left(\frac{1}{4} \right)^0 \text{ وبالتالي } P(0) \text{ صحيحة .}$$

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $0 < 7 - u_n \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ونبرهن صحة $P(n+1)$

$$\text{أي } 0 < 7 - u_{n+1} \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

لدينا حسب الفرض $0 < 7 - u_n \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ولدينا $7 - u_{n+1} < \frac{1}{4}(7 - u_n)$ منه $0 < 7 - u_{n+1} \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$
بالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

• الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < 7 - u_n \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$

(يمكن استخدام طريقة أخرى غير البرهان بالتراجع)

- حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < 7 - u_n \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ولدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} (7 - u_n) = 0$

أي: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 7$

حل مقترح التمرين الثالث

$$z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6} \quad , \quad z_B = \overline{z_A} \quad \text{و} \quad z_C = -2z_A$$

(1) أ- كتابة العدد المركب z_A على الشكل الأسّي:

لدينا: $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ ومنه: $|z_A| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\text{وبفرض } \theta_A \text{ عمدة للعدد المركب } z_A \text{ ، يكون: } \begin{cases} \cos \theta_A = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_A = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ ومنه } \arg(z_A) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{إذن: } z_A = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{ب- حساب العدد } \left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$$

$$\text{لدينا: } z_B = \overline{z_A} = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ ومنه}$$

$$\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2019} + \left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{2019} = e^{i673\pi} + e^{-i673\pi} = e^{i\pi} + e^{-i\pi} = -2$$

(2) أ- الإنسحاب الذي يحول A إلى C

تعيين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالإنسحاب T .

الكتابة المختصرة للإنسحاب T : $z' = z + z_C - z_A$ أي: $z' = z - 3z_A$

$$\text{ومنه } z_D = z_B - 3z_A \text{ ومنه } z_D = \overline{z_A} - 3z_A \text{ أي: } z_D = \sqrt{2} - i\sqrt{6} - 3(\sqrt{2} + i\sqrt{6}) = -2\sqrt{2} - 4i\sqrt{6}$$

ب- استنتاج طبيعة الرباعي $ABDC$:

لدينا: النقطة D صورة النقطة B بالإنسحاب T الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ أي: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$ ومنه الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع.

(3) كتابة العدد المركب $z_C - z_A$ على الشكل الأسّي:

$$\text{لدينا } z_C - z_A = -3z_A = 6\sqrt{2}e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)} \text{ أي: } z_C - z_A = 6\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

(4) إيجاد قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا :

$$\text{لدينا : } \left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n = \left(\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{3}}}\right)^n = e^{-i\frac{n\pi}{3}}$$

$$\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n \in \mathbb{R} \text{ يكافئ } \frac{-n\pi}{3} = k\pi \text{ يكافئ } n = -3k, \text{ مع } k \in \mathbb{Z}_-$$

(5) لتكن M نقطة كيفية من المستوي لاحقتها z حيث تختلف عن A وتختلف عن C .

تعيين (E) مجموعة النقط M التي يكون من أجلها $\frac{z_A - z}{z_C - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما .

$$\left(\frac{z_A - z}{z_C - z}\right) \in \mathbb{R}^+ \text{ يكافئ } \arg\left(\frac{z_A - z}{z_C - z}\right) = 0 + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \text{ أي } \arg\left(\frac{z_A - z}{z_C - z}\right) = 0 + 2k\pi$$

وبالتالي المجموعة (E) هي : $[AC] - (AC)$ (المستقيم (AC) باستثناء القطعة $[AC]$)

حل مقترح التمرين الرابع

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 \quad \text{و} \quad g(x) = e^x - ex$$

(1) أ-دراسة إتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = e^x - e$

من أجل $x \in]-\infty; 1]$ ، يكون $e^x \leq e$ أي $g'(x) \leq 0$ وبالتالي الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty; 1]$.

من أجل $x \in [1; +\infty[$ ، يكون $e^x \geq e$ أي $g'(x) \geq 0$ وبالتالي الدالة g متزايدة على المجال $[1; +\infty[$.

ب- إستنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

بما أن $g(1) = 0$ و الدالة g متزايدة على المجال $[1; +\infty[$ ومتناقصة على المجال $]-\infty; 1]$ فإن 0 قيمة حدية صغرى للدالة g .

إذن : من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) \geq 0$.

(2) دراسة إتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^x - ex = g(x)$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) \geq 0$ و بالتالي الدالة f متزايدة على $\mathbb{R}$.

(3) حساب النهايات :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x^2}\right) = +\infty \end{cases} \text{ لأن ، } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x - \frac{1}{2}ex^2\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{2}e\right)\right] = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}ex^2\right) = -\infty \end{cases} \text{ لأن ، } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x - \frac{1}{2}ex^2\right) = -\infty$$

جدول تغيرات الدالة f :

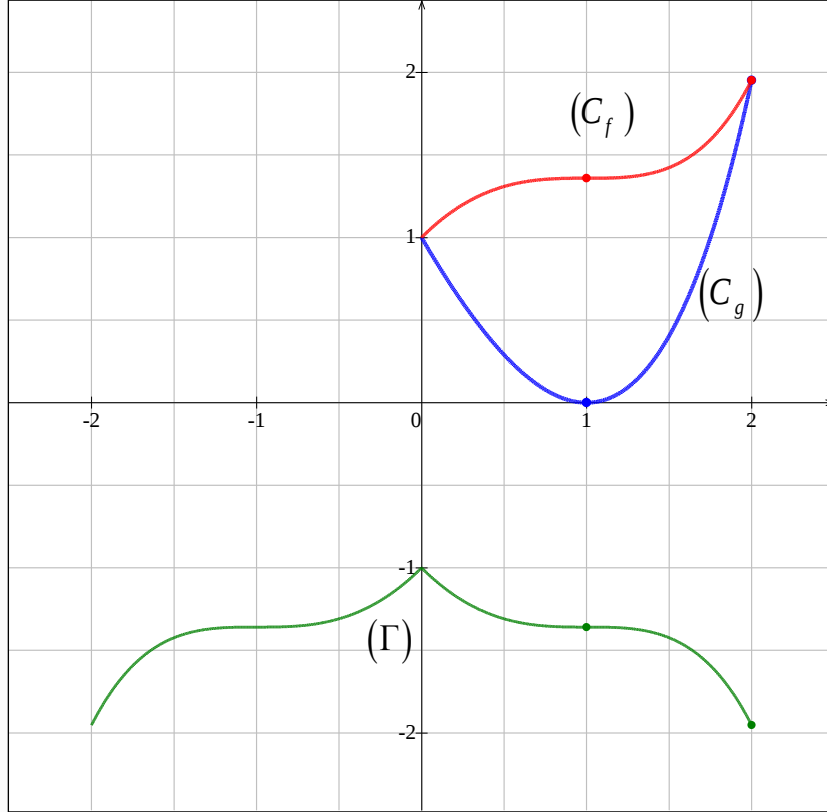
x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$

(4) دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$:

$$f(x) - g(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 - (e^x - ex) = -\frac{1}{2}ex^2 + ex = ex \left(-\frac{1}{2}x + 1 \right) : \text{من أجل كل عدد حقيقي } x$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f(x)-g(x)$	-	0	+	0	-
الوضع النسبي	(C_g) تحت (C_f)		(C_g) فوق (C_f)		(C_g) تحت (C_f)
	(C_g) يقطع (C_f)		(C_g) يقطع (C_f)		
	في النقطة $A(0;1)$		في النقطة $B(2;e^2-2e)$		

(5) الرسم :



(6) حساب مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) :

$$A = \int_0^2 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}ex^2 + ex \right) dx = \left[-\frac{1}{6}ex^3 + \frac{1}{2}ex^2 \right]_0^2 = -\frac{8}{6}e + 2e = \frac{2e}{3} (u.a)$$

$$. A = \frac{2e}{3} \times 4 = \frac{8e}{3} cm^2 \text{ ومنه}$$

(7) h الدالة المعرفة على المجال $[-2; 2]$ كما يلي : $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|}$

$$. h(-x) = \frac{1}{2}e(-x)^2 - e^{|-x|} = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|} = h(x) \text{ و } -x \in [-2; 2], x \in [-2; 2] \text{ من أجل كل}$$

ومنه الدالة h زوجية.

$$. h(x) + f(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^x + e^x - \frac{1}{2}ex^2 = 0, x \in [0; 2] \text{ من أجل}$$

استنتاج كيفية رسم (Γ) انطلاقاً من (C_f) :

من أجل $h(x) = -f(x)$ ، $x \in [0; 2]$ وبالتالي (Γ) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل على المجال $[0; 2]$.

ولرسم (Γ) على المجال $[-2; 0]$ نستخدم كون الدالة h زوجية. الرسم : أنظر الشكل.

لا تترددوا بتقديم ملاحظاتكم و إقتراحاتكم

Bekhakecha.khaled@gmail.com