ثانوية المجاهد عبد القادر علام — السنة الدراسية 2024/ 2025

المستوى : 3 رياضي — المدة : 90 دقيقة

الفرض الأول للفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين

I) نعتبر الدالتين العدديتين g و h المعرفتين على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=e^{-x}+x-1$ و $h(x)=g(x)-\frac{x^2}{2}$

1) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $0\le g(x)$

2) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة h على المجال $]0;+\infty[$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $h(x)\le 0$

3) استنتج مما سبق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $1-x\le e^{-x}\le \frac{x^2}{2}-x+1$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $\begin{cases} f(x)=(x+2)e^{\frac{-2}{x}} & ,x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستو ي المنسوب إلى المعلم التعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) بين أن الدالة مستمر في من اليمين

2) أ) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)}{x}$

ب) ماذا تستنتج ؟ فسر النتيجة بيانيا.

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4) أ) بالإستعانة بالجزء I) السؤال 3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $\frac{-4}{x}\le f(x)-x\le \frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}$.

ب) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$

جـ) عين معادلة المستقيم المقارب المائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

5) مثل المستقيم المقارب المائل و المنحنى (C_f)

www.ency-education.com

تصحيح الفرض الأول للفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين

I) نعتبر الدالتين العدديتين g و h المعرفتين على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=e^{-x}+x-1$ و $h(x)=g(x)-\frac{x^2}{2}$

أ) دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$:

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ومن أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x)=-e^{-x}+1$

$-e^{-x}+1\geq 0$ يكافئ $-e^{-x}\geq -1$ يكافئ $e^{-x}\leq 1$ يكافئ $-x\leq 0$ يكافئ $x\geq 0$ ومنه $x\in]0;+\infty[$

ومنه

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	

وعليه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $0\leq g(x)$

بما أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فإن $g(0)=0$ قيمة حدية صغرى للدالة g على المجال $]0;+\infty[$ ومنه

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $0\leq g(x)$.

1) أ) دراسة اتجاه تغير الدالة h على المجال $]0;+\infty[$:

الدالة h قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ومن أجل كل x من $]0;+\infty[$:

$$h'(x)=g'(x)-x=-e^{-x}+1-x=-\left(e^{-x}+x-1\right)=-g(x)$$

ومنه

x	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	

وعليه الدالة h متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $h(x)\leq 0$:

بما أن الدالة h متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فإن $h(0)=0$ قيمة حدية صغرى للدالة h على المجال $]0;+\infty[$ ومنه

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $h(x)\leq 0$.

2) استنتاج مما سبق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $1-x\leq e^{-x}\leq \frac{x^2}{2}-x+1$

www.ency-education.com

لدينا مما سبق من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $g(x)\geq 0$ يكافئ $e^{-x}+x-1\geq 0$

يكافئ $1-x\leq e^{-x}$ ..... (1)

لدينا مما سبق من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $h(x)\leq 0$ يكافئ

$g(x)-\frac{x^2}{2}\leq 0$ يكافئ $e^{-x}+x-1-\frac{x^2}{2}\leq 0$ يكافئ $e^{-x}-\leq \frac{x^2}{2}-x+1$ ..... (2)

من (1) و (2) نستنتج أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $1-x\leq e^{-x}\leq \frac{x^2}{2}-x+1$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $\begin{cases} f(x)=(x+2)e^{\frac{-2}{x}} & ,x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستو ي المنسوب إلى

المعلم التعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) تبين أن الدالة f مستمر في 0 من اليمين:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)e^{\frac{-2}{x}}=0$ لأن $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{-2}{x}}=0 \end{cases}$ ومنه $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$ ومنه الدالة f مستمر في 0 من اليمين.

2) أ) حساب $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x+2)e^{\frac{-2}{x}}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x+2)}{x}e^{\frac{-2}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{2}{x}\right)e^{\frac{-2}{x}}=\lim_{t\to -\infty}(1-t)e^{t}=\lim_{t\to -\infty}e^{t}-te^{t}=0$$

ب) الإستنتاج : الدالة f قابلة للإشتقاق في 0 من اليمين

✓ فسر النتيجة بيانيا: (C_f) يقبل في النقطة ذات الفاصلة 0 نصف مماس معامل توجيهه 0 (موازي إلى محور الفواصل)

3) دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها :

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ومن أجل كل x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=(1)\left(e^{\frac{-2}{x}}\right)+\left(\frac{2}{x^2}e^{\frac{-2}{x}}\right)(x+2)=e^{\frac{-2}{x}}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)=e^{\frac{-2}{x}}\left(\frac{x^2+2x+4}{x^2}\right)$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $\left[x^2+2x+4\right]$ لأن $\frac{e^{\frac{-2}{x}}}{x^2}>0$ ، نحل المعادلة $x^2+2x+4=0$ نجد $\Delta<0$ ومنه إشارة العبارة

$\left[x^2+2x+4\right]$ من إشارة $a=1$ ومنه $x^2+2x+2>0$ وعليه ومن أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)>0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 ↗ $+\infty$

www.ency-education.com

4) أ) بالإستعانة بالجزء I) السؤال 3) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $\frac{-4}{x} \le f(x)-x \le \frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}$:

من أجل $x>0$ فإن $\frac{2}{x}>0$ ولدينا من بالجزء I) السؤال 3) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ،

$1-x \le e^{-x} \le \frac{x^2}{2}-x+1$ منه نستبدل $\frac{2}{x}$ بـ x في العلاقة نجد $1-\frac{2}{x} \le e^{-\frac{2}{x}} \le \frac{\left(\frac{2}{x}\right)^2}{2}-\frac{2}{x}+1$ يكافئ $\frac{x-2}{x} \le e^{-\frac{2}{x}} \le \frac{x^2-2x+2}{x^2}$

بالضرب في العدد $(x+2)$ نجد $(x+2)\left(\frac{x-2}{x}\right) \le (x+2)e^{-\frac{2}{x}} \le (x+2)\left(\frac{x^2-2x+2}{x^2}\right)$ بإضافة العدد $-x$ نجد

$(x+2)\left(\frac{x-2}{x}\right)-x \le (x+2)e^{-\frac{2}{x}}-x \le (x+2)\left(\frac{x^2-2x+2}{x^2}\right)-x$ بعد النشر و التبسيط نجد $\frac{-4}{x} \le f(x)-x \le \frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}$

ب) استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$:

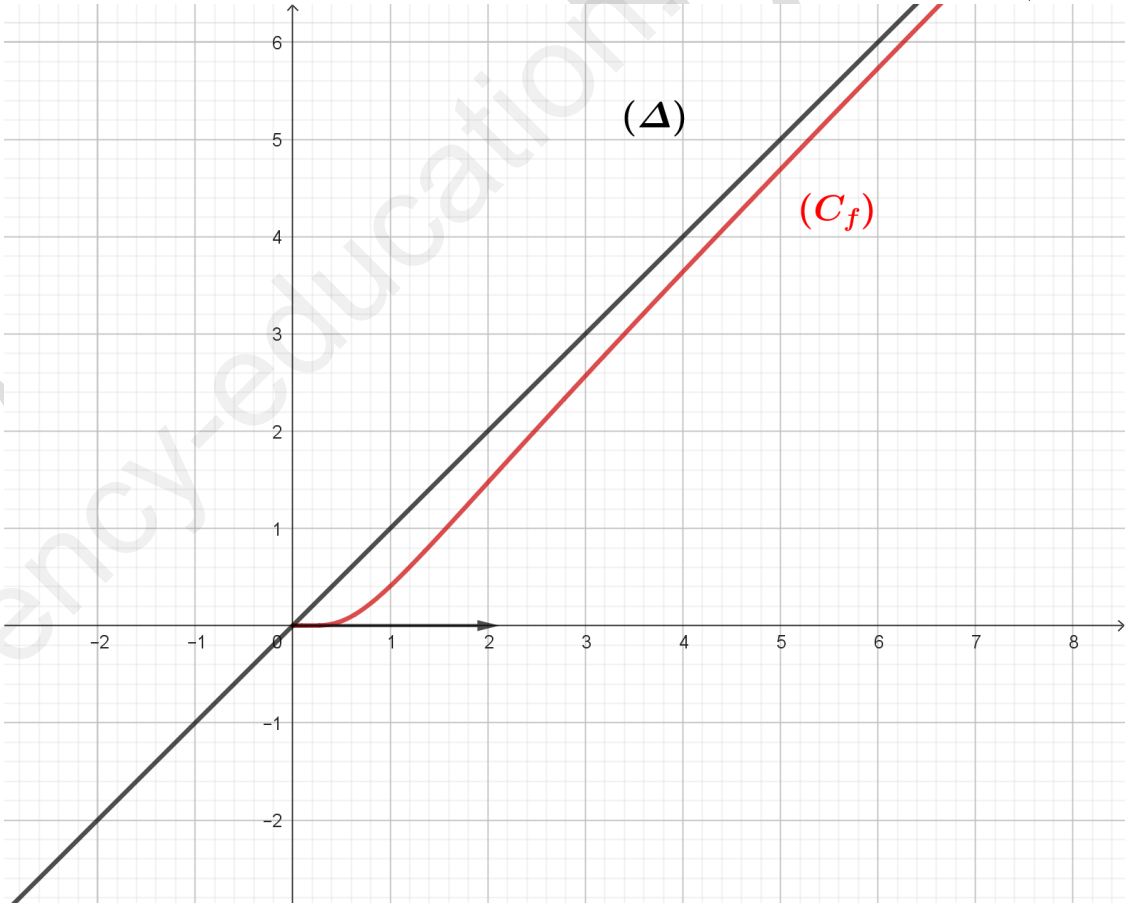
لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $\frac{-4}{x} \le f(x)-x \le \frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}=0$

إذن بإستعمال النهاية بالحصر نجد $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$

جـ) عين معادلة المستقيم المقارب المائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$:

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$ ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

5) مثل المستقيم المقارب المائل و المنحنى (C_f)



إنتهى.....

www.ency-education.com