## التمرين الأول :

**1)** أ - ادرس تبعا لقيـم العــدد الطبيعي $n$ بواقي القسمــة الإقليديــة للعدد $3^n$ على 13 .

ب – بين أن العـدد $5\times 2024^{1445}+10\times 1962^{1954}+2025^{1446}$ مضاعــف للعـدد 13 .

ج – ماهو باقي قسمــة العـدد $2024^{2026^{2027}}$ على 13 ؟

**2)** نعتبــر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلــة : $5x-2y=13$ .

أ - بين أن المعادلــة $(E)$ تقبل حلــولا في $\mathbb{Z}^2$ .

ب – بين أنــه إذا كانت الثنائيــة $(x,y)$ حلا للمعادلــة $(E)$ فإن $x\equiv 1[2]$ ثم حـل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلــة $(E)$ .

**3)** ليكن $d$ القاسـم المشترك الأكبر للعـددين $x$ و $y$ حلــول المعادلــة $(E)$ .

أ – ماهي القيـم الممكنــة لـ $d$ ؟

ب – عين الثنائيات $(x,y)$ حلــول المعادلــة $(E)$ بحيث : $d=13$ .

**4)** عين مجموعــة قيــم العـدد الطبيعي $n$ التي تحقق : $\begin{cases} n+3^n+2\equiv 2025[4] \\ n\equiv 1445[3] \end{cases}$

## التمرين الثاني :

- نعتبر المتتاليــة $(u_n)$ المعرفــة بـــ $u_0=\dfrac{1}{2}$ ومن أجــل كل عــدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=\dfrac{9u_n+2}{u_n+8}$ .

**1)** برهن بالتراجــع أنه من أجـل كل $n\in\mathbb{N}$ : $0\le u_n\le 2$ .

**2)** أ - بين أنــه من أجـل كل $n\in\mathbb{N}$ : $2-u_{n+1}\le\dfrac{7}{8}(2-u_n)$ .

ب – استنتــج أنــه من أجـل كل $n\in\mathbb{N}$ : $0\le 2-u_n\le\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{7}{8}\right)^n$ .

ج – نضــع : $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$ .

- بين أنــه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ : $S_n\ge 2n-10+\dfrac{3\times 7^{n+1}}{2\times 8^n}$ .

**3)** نعتبر المتتاليــة $(v_n)$ المعرفــة على $\mathbb{N}$ بـــ : $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+1}$ .

أ – أثبــت أن المتتاليــة $(v_n)$ هندسيــة معينا أساسها وحــدها الأول . ثــم اكتــب عبارة $v_n$ بدلالــة $n$ .

ب – احســب بدلالــة $n$ المجمــوع : $S_n'=\left(v_0-\dfrac{3}{20^0}\right)+10\left(v_1-\dfrac{3}{20^1}\right)+...+10^n\left(v_n-\dfrac{3}{20^n}\right)$ .



www.ency-education.com

## التمرين الثالث :

**I)** جـدول التغيرات المقابل هو للدالــة $g$ المعرفــة على $\Re$ بـــ : $g(x)=1+(1-x)e^{1-x}$ .

**1)** حـــدد إشارة $g(x)$ على $\Re$ .

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $\frac{e-1}{e}$ | ↗ | $1$ |

**II)** $f$ الدالــة المعرفــة على $\Re$ بـــ : $f(x)=x+1+xe^{1-x}$ .

ليكن $(C_f)$ منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ . $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1$

**1)** احســب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثــم بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ .

**2)** أ - بين أنــه من أجـل كل $x\in\Re$ : $f'(x)=g(x)$ .

ب – استنتــج اتجاه تغير الدالــة $f$ ثم شكل جـدول تغيراتــها .

**3)** بين أن المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلتــه $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$ ثم ادرس وضعيــة $(C_f)$ بالنسبــة إلى $(\Delta)$ .

**4)** أ - بين أن $(C_f)$ يقبل مماسا وحيدا $(T)$ موازيا للمستقيم $(\Delta)$ ثــم اكتــب معادلــة لــه .

ب – بين أن $(C_f)$ يقبل نقطــة إنعطاف $\omega$ يطلــب تعييــن إحداثييــها .

**5)** أ – احســب $f(0)$ ثــم أنشيء $(\Delta)$ ؛ $(T)$ و $(C_f)$ . ( نأخـذ $f(-0,25)=0$ )

ب - عين قيــم الوسيــط الحقيقي $m$ التي من أجلها المعادلــة $e^x\left(f(e^m)-1\right)=ex$ تقبــل حليـن موجـبين تمامــا .

**6)** أ - باستعمال التكامل بالتجزئــة ؛ جــد دالــة أصليــة للدالــة $x\mapsto xe^{1-x}$ والتي تنعـدم من أجـل 0 .

ب - ليكــن $\lambda$ عــددا حقيقـيا موجـبا تماما .

- احســب بدلالــة $\lambda$ المساحــة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحــدد بـ $(C_f)$ و $(\Delta)$ والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$ ؛ $x=\lambda$ ؛ $y=0$ . احســب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} S(\lambda)$ .

**7)** برهن بالتراجــع أنــه من أجـل كل عــدد طبيعي $n\geq 2$ : $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-x)e^{-x+1}$

حيث : $f'$ ؛ $f''$ ؛ $f^{(3)}$ ؛ $f^{(4)}$ ..... $f^{(n)}$ المشتقات المتتابعــة للدالــة $f$ .



www.ency-education.com

# الإجابة النموذجية لاختبار الثلاثي الثاني في الرياضيات — القسم: ورسيا

## التمرين الأول

**1) A**

لدينا: $3^0 \equiv 1[13]$ ; $3^1 \equiv 3[13]$ ; $3^2 \equiv 9[13]$ ; $3^3 \equiv 1[13]$

| $n=$ | $3k$ | $3k+1$ | $3k+2$ | |
|---|---|---|---|---|
| $3^n \equiv$ | 1 | 3 | 9 | $[13]$ |

$k \in \mathbb{N}$

**ب) بيان أن:** $2025^{1446} + 2024^{1445} + 10 \times 1962^{1954}$ مضاعف لـ 13:

لدينا: $2024 \equiv 9[13]$ ومنه: $2024^{1445} \equiv 3^{3(963)+1}[13]$

ومنه: $2024^{1445} \equiv 3[13]$

ولدينا: $1962 \equiv 12[13]$ ومنه $1962 \equiv -1[13]$

ومنه: $1962^{1954} \equiv 1[13]$

ولدينا: $2025 \equiv 10[13]$ ومنه $2025 \equiv -3[13]$

ومنه: $2025^{1446} \equiv 3^{3\times482}[13]$ ومنه: $2025^{1446} \equiv 1[13]$

ومنه: $5 \times 2024^{1445} + 10 \times 1962^{1954} + 2025^{1446} \equiv 26[13]$

ومنه $5 \times 2024^{1445} + 10 \times 1962^{1954} + 2025^{1446} \equiv 0[13]$

ومنه العدد $5 \times 2024^{1445} + 10 \times 1962^{1954} + 2025^{1446}$ مضاعف لـ 13

**ج/** لدينا: $2026 \equiv 1[3]$ ومنه $2026^{2027} \equiv 1[3]$

ولدينا: $2024 \equiv 9[13]$ ومنه $2024^{2026^{2027}} \equiv 3^{3k+2}[13]$

ومنه: $2024^{2026^{2027}} \equiv 9[13]$

**P/2** لدينا: $PGCD(5,2) = 1$ و $13/1$ ومنه المعادلة E تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

**ب/** لدينا: $5x - 2y = 13$ ومنه: $5x = 2y + 13$

ومنه $5x \equiv 13[2]$ ومنه $5x \equiv 15[2]$ ومنه $x \equiv 1[2]$

حل المعادلة (E):

لدينا: $x \equiv 1[2]$ ومنه $x = 2k+1$ مع $k \in \mathbb{Z}$

بالتعويض في (E) نجد: $y = 5k - 4$

$S = \{(2k+1, 5k-4) / k \in \mathbb{Z}\}$

**P/3** لدينا: $d/x$ و $d/y$ ومنه $d/5x-2y$ ومنه $d/13$

ومنه $d=1$ أو $d=13$.

**ب/** حسب خوارزمية أقليدس لدينا:

$2k+1 = 2(k-6) + 13$ و $5k-4 = 2(2k+1) + k - 6$

$k - 6 = 13q + r$ $0 \leq r < 13$

ولدينا: $PGCD(x,y) = PGCD(13,r) = 13$

ومنه $r = 0$ ومنه $k - 6 = 13q$ ومنه $k = 13q + 6$

بالتعويض نجد: $(x,y) = \{(26q+13, 65q+30)\}$

لدينا: $\begin{cases} n + 3^n + 2 \equiv 2025[4] \\ n \equiv 1445[3] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} n + 3^n \equiv 3[4] \\ n \equiv 2[3] \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} n+9 \equiv 3[4] \\ n \equiv 2[3] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} n-2 \equiv 0[4] \\ n-2 \equiv 0[3] \end{cases}$

ومنه $n-2$ مضاعف لكل من 4 و 3 وبما أن 4 و 3 أوليان فيما بينهما فإن $n-2$ مضاعف لـ $3\times4$ ومنه:

$n - 2 \equiv 0[12]$ ومنه $n = 12p + 2$ مع $p \in \mathbb{N}$

## التمرين الثاني:

لدينا: $u_0 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = \frac{9u_n + 2}{u_n + 8} = 9 - \frac{70}{u_n + 8}$

**1)** البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $P(n) .. 0 \leq u_n \leq 2$

من أجل $n = 0$ لدينا: $0 \leq u_0 = \frac{1}{2} \leq 2$ محققة.

نفرض صحة $P(n)$ ونبرهن صحة $P(n+1)$

لدينا: $0 \leq u_n \leq 2$ ومنه $\frac{1}{10} \leq \frac{1}{u_n + 8} \leq \frac{1}{8}$

ومنه $-7 \leq -\frac{70}{u_n+8} \leq -\frac{70}{8}$ ومنه $0 \leq 9 - \frac{70}{u_n+8} \leq 2$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $0 \leq u_n \leq 2$.

**2/ P/2/** لبيان أن $2 - u_{n+1} \leq \frac{7}{8}(2 - u_n)$

$2 - u_{n+1} = 2 - \frac{9u_n + 2}{u_n + 8} = \frac{-7u_n + 14}{u_n + 8} = \frac{7(2-u_n)}{u_n+8}$

لدينا: $0 \leq u_n \leq 2$ ومنه $\frac{1}{10} \leq \frac{1}{u_n+8} \leq \frac{1}{8}$ ومنه:

$\frac{7}{8} \leq \frac{7}{u_n+8} \leq \frac{7}{10}$ ومنه: $\frac{7}{8}(2-u_n) \leq \frac{7(2-u_n)}{u_n+8} \leq \frac{7}{10}(2-u_n)$

ومنه $2 - u_{n+1} \leq \frac{7}{8}(2 - u_n)$ و $0 \leq u_n$

**ب/** استنتاج أن: $0 \leq 2 - u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{7}{8}\right)^n$

مما سبق لدينا: $2 - u_{n+1} \leq \frac{7}{8}(2 - u_n)$

ومنه $\frac{7}{8}(2-u_n) \leq \frac{7}{8}\left(\frac{7}{8}\right)(2-u_{n-1})$

و $\frac{7}{8}(2-u_{n-1}) \leq \frac{7}{8}\left(\frac{7}{8}\right)(2-u_{n-2})$

$\vdots$

$\frac{7}{8}(2-u_1) \leq \frac{7}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^n (2-u_0)$

بالجمع طرفا لطرف نجد: $0 \leq 2 - u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{7}{8}\right)^n$

**ج)** لدينا: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n - 2n$

لدينا: $0 \leq 2 - u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{7}{8}\right)^n$

$0 \leq 2 - u_1 \leq \frac{3}{2}\left(\frac{7}{8}\right)^1$

$\vdots$

$0 \leq 2 - u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{7}{8}\right)^n$

بالجمع نجد: $S_n \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{n+1}}{1 - \frac{7}{8}} - 2 + 2 + \cdots + 2 - 2n$

www.ency-education.com

ومنه: $2n+2-S_n \leq \frac{3}{2}\times 8\left(1-\left(\frac{7}{8}\right)^{n+1}\right)$

$-S_n \leq -2n-2+12-\frac{3\times 7^{n+1}}{2\times 8^n}$

ومنه: $S_n \geq 2n-10+\frac{3\times 7^{n+1}}{2\times 8^n}$

3/ $V_n=\frac{U_n-2}{U_n+1}$

أ/ بيان أن $(V_n)$ هندسية:

$V_{n+1}=\frac{U_{n+1}-2}{U_{n+1}+1}=\frac{\frac{9U_n+2}{U_n+7}-2}{\frac{9U_n+2}{U_n+7}+1}=\frac{7U_n-14}{10U_n+10}=\frac{7}{10}V_n$

ومنه $(V_n)$ هندسية أساسها $\frac{7}{10}$ وحدها الأول $V_0=-1$

ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$:

$V_n=-\left(\frac{7}{10}\right)^n$

ب/ $S'_n=\left(V_0-\frac{3}{20^0}\right)+10\left(V_1-\frac{3}{20^1}\right)+\cdots+10^n\left(V_n-\frac{3}{20^n}\right)$

لدينا: $10^n\left(V_n-\frac{3}{20^n}\right)=10^n\left(\frac{-7^n}{10^n}-\frac{3}{20^n}\right)=-7^n-3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

بوضع $t_n=-7^n$ و $u_n=-3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

تجد: $S'_n=t_0+t_1+\cdots+t_n+u_0+u_1+\cdots+u_n$

$=\frac{1-7^{n+1}}{1-7}-3\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-7^{n+1}}{6}-6\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

## التمرين الثالث:

I) إشارة $g(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g(x)$ | $+$ | |

II) ① $g(x)=x+1+xe^{1-x}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x+1+\frac{x^2}{e^x}e\right]=+\infty$

② $f'(x)=g(x)$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$:

أ/ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ إشارة $f'(x)$ نفس إشارة $g(x)$ ومنه $f$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

③ لدينا: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim_{x\to+\infty} xe^{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}e=0$

ومنه المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ عند $+\infty$

دراسة الوضع النسبي: $f(x)-(x+1)=xe^{1-x}$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)-(x+1)$ | | $-$ ∮ $+$ | |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ في $A(0,1)$ | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ |

④ أ/ نثبت $f'(x)=1$ ومنه $1+(1-x)e^{1-x}=1$

ومنه: $(1-x)e^{1-x}=0$ ومنه $1-x=0$ أي $x=1$

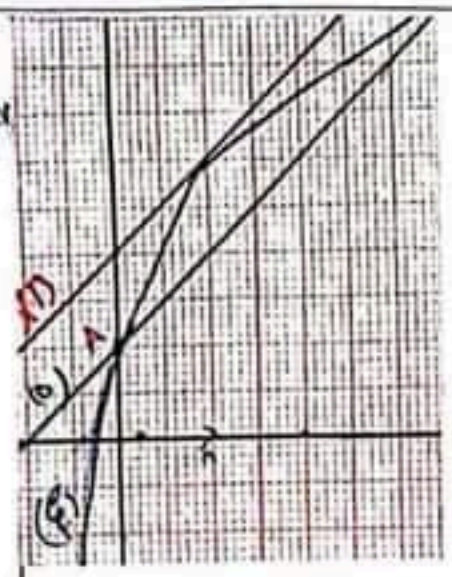
ومنه $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ موازيا لـ $(\Delta)$ في النقطة ذات الفاصلة 1 معادلته: $(T): y=x+2$

ب/ بيان أن $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيتها:

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f''(x)=-(2-x)e^{1-x}$

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ ∮ $+$ | | |

ومنه $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف وحيدة احداثيتها $(2;3+2e)$




ك/P/ الإنشاء

ب/ تعيين قيم $m$ التي من أجلها تقبل المعادلة حلان موجبان تماما

لدينا $e^x(f(e^x)-1)=e^x$

ومنه $f(e^x)-1=e.xe^{-x}$

$f(e^x)=1+xe^{1-x}$

ومنه $f(x)=x+f(e^x)$

حلول المعادلة هي تواصل نقط تقاطع $(C_f)$ مع المستقيم ذو المعادلة $y=x+f(e^x)$ (الموازي لـ $(\Delta)$ و $(T)$)

من أجل $1<f(e^x)<2$ المعادلة تقبل حلان موجبان

ومنه $m\in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ أي: $m\in]0;1[\cup]1;+\infty[$

أ/ حساب $\int_0^x te^{1-t}dt$:

نضع $u(t)=t$ ومنه $u'(t)=1$

$v'(t)=e^{1-t}$ $v(t)=-e^{1-t}$

$\int_0^x te^{1-t}dt=[-te^{1-t}]_0^x-\int_0^x -e^{1-t}dt$

$=(-x-1)e^{1-x}+e$

ب/ حساب $S(\lambda)$

$S(\lambda)=\int_0^\lambda f(x)-(x+1)dx=\int_0^\lambda xe^{1-x}dx=$

$=(-\lambda-1)e^{1-\lambda}+e$

$\lim_{\lambda\to+\infty} S(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}\left[-\frac{\lambda}{e^\lambda}e-e^{1-\lambda}+e\right]=e$

⑦ البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n\geq 2$

$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-x)e^{-x+1}$

لدينا من أجل $n=2$ $f''(x)=-(2-x)e^{1-x}$ محققة.

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل $n$ ونبين صحتها من أجل $n+1$.

لدينا: $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-x)e^{-x+1}$

ومنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$:

$f^{(n+1)}(x)=-(-1)^{n-1}e^{1-x}-(-1)^{n-1}(n-x)e^{-x+1}$

$=-(-1)^{n-1}(1+n-x)e^{-x+1}$

$=(-1)^n(n+1-x)e^{-x+1}$

وهذه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ ... ②

ومنه نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n\geq 2$ أن:

$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-x)e^{-x+1}$

www.ency-education.com