مديرية التربية لولاية المدية | سلسلة تمارين رقم 04 حول الدوال اللوغاريتمية | ثانوية فارس بن مهل بالشهبونية

المستوى: 3 علوم تجريبية | **2016 . 2017** | **إعداد الأستاذ: مالجي**

التمرين 01:

I) g دالة عددية معرفة على المجال $D=]0;+\infty[$ بـ :
$g(x)=x^2+1-\ln(x)$.

1) أوجد نهايتي الدالة g على يمين 0 و عند $+\infty$.
2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
3) استنتج إشارة الدالة g .

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $D=]0;+\infty[$ كالتالي : $f(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{\ln(x)}{x}$.

(C) التمثيل البياني للدالة f في م م م م م $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أ) أوجد نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و على يمين 0. فسر هندسيا النتيجة الثانية.

ب) بين أن المستقيم (Δ)ذو المعادلة : $y=x+\frac{1}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C) .

جـ) ادرس الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة إلى (Δ) .

2) أ)تحقق أنه من أجل كل x ينتمي إلى D : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f على مجموعة تعريفها ، ثم شكل جدول تغيراتها .

جـ) اكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (T) الذي يمس المنحني (C) عند النقطة $A(1;\frac{3}{2})$.

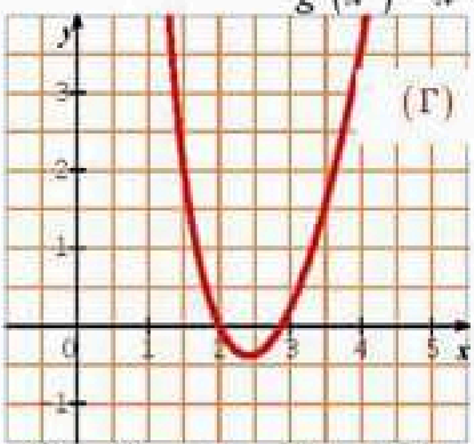
3) أثبت أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]\frac{1}{2};1[$.

4) ارسم المنحني (C) و المستقيمين (Δ) و (T) .

التمرين 02:

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]1,+\infty[$ حيث:

$$g(x)=x^2-2x-4\ln(x-1)$$



(Γ) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل المقابل.

1) **بقراءة بيانية للمنحنى** (Γ) **عيّن عدد حلول المعادلة :** $g(x)=0$

2) احسب $g(2)$ ، ثم بين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α حيث: $2{,}87<\alpha<2{,}88$

3) إستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $]1,+\infty[$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $]1,+\infty[$ حيث:

$$f(x)=x-3+\frac{4\ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) **أحسب** $\lim_{x\to 1} f(x)$ **وفسر النتيجة بيانيا،ثم أحسب** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ)ذي المعادلة $y=x-3$ مقارب مائل للمنحني (C_f)

ب) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $]1,+\infty[$ لدينا: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^2}$

ب) إستنتج إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

4) أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) (نأخذ: $f(\alpha)=3{,}9$)

التمرين 03:

I) نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=\frac{x}{x+1}-2\ln(x+1)$$

1) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف .
2) أحسب $f'(x)$ ، ثم أدرس إشارتها و شكّل جدول تغيرات الدالة f .
3) أحسب $f(0)$ ثم بين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين أحدهما α حيث $\alpha\in[-0{,}72;-0{,}71]$.
4) استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=\frac{\ln(x+1)}{x^2}$$

(C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1) أحسب نهايات الدالة g عند حدود مجموعة التعريف .
2) بين أنّه من أجل $]-1;0[\cup]0;+\infty[$:
$g'(x)=\frac{xf(x)}{x^4}$ ثم استنتج إشارة $g'(x)$.
3) بين أنّ $g(\alpha)=\frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$ ، ثم أعط قيمة مقربة إلى 10^{-2} لـ $g(\alpha)$ لما $\alpha=-0.715$.
4) شكّل جدول تغيرات الدالة g .
5) عين معادلة المماس (T) للمنحني (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة 2 ، ثم أنشئ (C_g) .
6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $mx^2-\ln(x+1)=0$.

التمرين 04 :

1) g دالة معرفة $]-1,+\infty[$ بـ :

$$g(x) = 2x - \ln(x+1)$$

أ) أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

ب) بين ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,8 \prec \alpha \prec -0,7$

ج) أحسب $g(0)$ ثم إستنتج إشارة $g(x)$ على $]-1,+\infty[$

2) f دالة معرفة $]-1,+\infty[$ كمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + x - (x+1)\ln(x+1) \\ f(-1) = 0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم م م $(o,\vec{i},\vec{j})$

أ) بين ان : $f(\alpha) = -(\alpha^2+\alpha)$ ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$ بتقريب $0,01$

ب) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0 = -1$ ثم فسر النتيجة هندسيا

ج) بين انه من اجل $x \in]-1,+\infty[$: $f'(x) = g(x)$.

د) بين انه من اجل $x \in]-1,+\infty[$:

$f(x) = (x+1)^2\left(\frac{x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)$ ثم عين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

هـ) شكل جدول تغيرات الدالة f

3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة التي فاصلتها 1

4) أ) أرسم المماس (T) و المنحني (C_f)

التمرين 05 :

I) f الدالة المعرّفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = -x + 2 + 2\ln(x+1)$$

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) عين $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بين أن المنحنى (C_f) الممثل للدالة f لا يقبل مقاربا مائلا عند $+\infty$.

3) أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

4) أثبت أنّ المنحنى (C_f) يقبل (Δ) مماسا معامل توجيهه 1 ، يطلب كتابة معادلة له .

5) (Δ_λ) مستقيم معادلته $y = \lambda x + 2\lambda$ ، λ وسيط حقيقي

- بين أنّه مهما يكن λ من $\mathbb{R}$ فإن : (Δ_λ) يشمل نقطة واحدة يطلب تعيين إحداثيتيها .

6) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة F ذات الفاصلة α حيث : $5 \langle \alpha \langle 6$

ب) هل (C_f) يقطع محور الفواصل على المجال $]-1;1[$ ؟

7) أنشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

II) نعتبر الدالة g المعرّفة على $]-1;1[$ كما يلي :

$g(x) = |x| + 2 + 2\ln(1-|x|)$.

1) أ) أثبت أن الدالة g زوجية .

ب) بين أن المنحنى (C_g) يقبل مماسين متعامدين يطلب تعيين معادلتيهما .

2) أنشئ المنحنى (C_g) للدالة g باستعمال المنحنى (C_f) .

التمرين 06:

I) الدالة g معرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = x^3 - x + 1 - 2\ln x$$

1) باستعمال: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ برهن أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

2) أحسب: $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x); \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

3) بين أن الدالة الدالة g تقبل الإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ وأن دالتها المشتقة تعطى بالعبارة:

$$g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$$

4) أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم ضع جدول تغيراتها

5) إستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0,+\infty[$ فإن: $g(x) \succ 0$

II) نعرف الدالة f على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي:

$f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$ ،

(c_f) بيانها في المستوي المزود بالمعلم م م $(o,\vec{i};\vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ماذا تستنتج بالنسبة إلى النهاية عند الصفر؟

2) أدرس إتجاه تغيرات الدالة f ثم ضع جدول تغيراتها

(تحقق أن عبارة الدالة المشتقة للدالة f معرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$)

3) بين أن (c_f) يقبل مقاربين أحدهما مائل (Δ) معادلة له : $y = x$

4) نعتبر الدالة h المعرفة $]0,+\infty[$ كما يلي:

$$h(x) = x + \ln x$$

أ) بين أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[0,4;0,9]$

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (c_f) والمستقيم (Δ).

5) أرسم (c_f) و (Δ)

التمرين 07:

f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي :

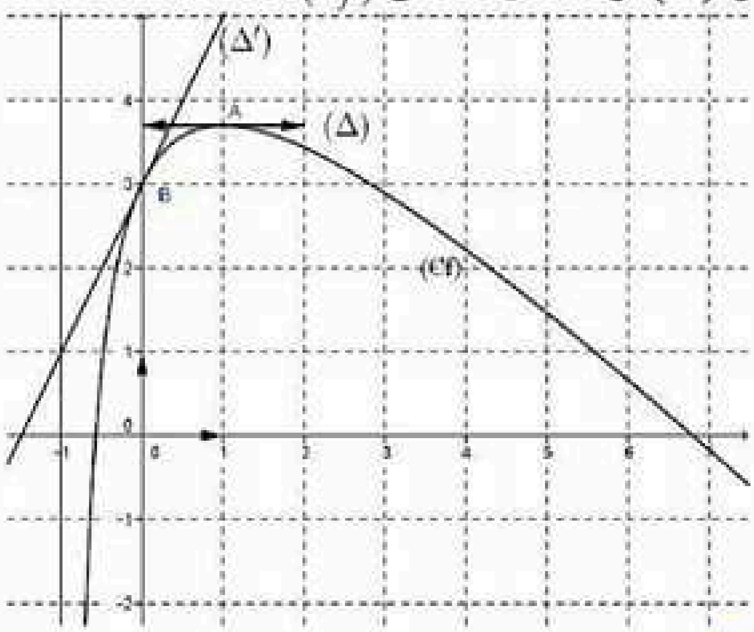
$$f(x)=ax+5+\frac{b}{x+1}+\ln(x+1)$$

حيث a ، b ثابتان حقيقيان و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

$A(1;3+\ln 2)$ ، $B(0;3)$ نقطتان من (C_f) .

(Δ) هو المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة A

و (Δ') هو المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة B .



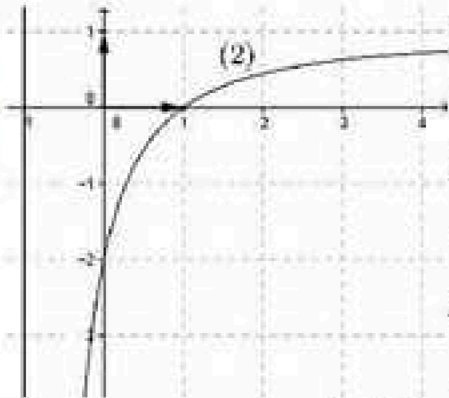
1) بقراءة بيانية :

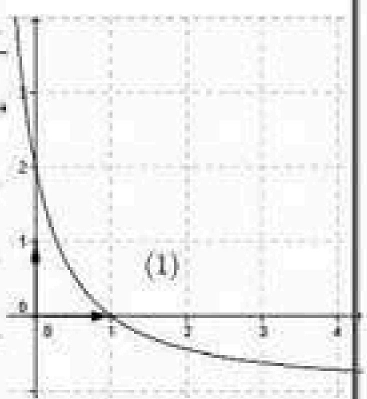
أ) أحسب كلا من $f(0)$ ، $f'(0)$ ، $f(1)$ و $f'(1)$.

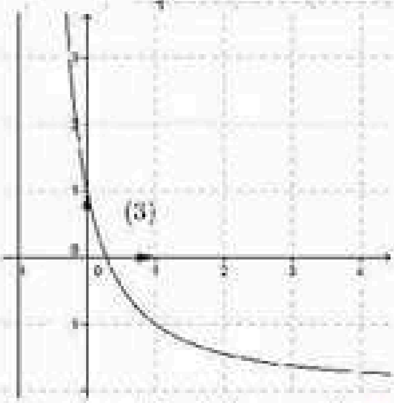
ب) عين ؛ حسب قيم x ؛ إشارة $f'(x)$.

ج) شكل جدول تغيرات الدالة f .

د) من بين المنحنيات (1) ، (2) و (3) عين مع التبرير المنحنى الممثل للدالة f' مشتقة الدالة f .







2) أ) بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$

تكون : $f(x)=-x+5-\frac{2}{x+1}+\ln(x+1)$.

ب) بين أن المستقيم الذي $x=-1$ معادلة له مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) .

ج) بين أنه ؛ من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ؛ يكون : $f'(x)=\frac{-x^2-x+2}{(x+1)^2}$.

د) استنتج ؛ حسب قيم x ؛ إشارة $f'(x)$.

3) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m ؛ عدد حلول المعادلة : $5-\frac{2}{x+1}+\ln(x+1)=3x+m$

4) g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=-x+6-\frac{2}{x}+\ln(x)$ و (C_g) تمثيلها البياني في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

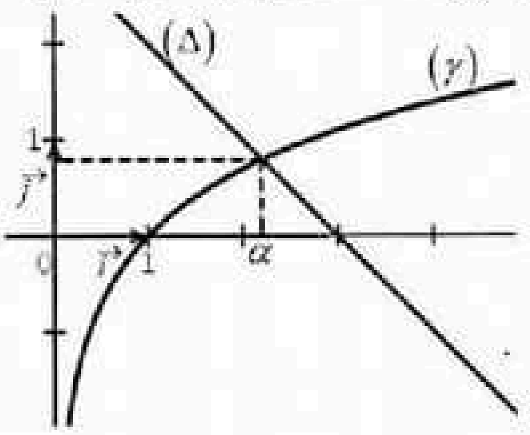
- بين كيفية إنشاء (C_g) اعتمادا على (C_f) ثم أنشئه

التمرين 08: (بكالوريا 2015 ع ت)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I) (γ) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto \ln x$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=-x+3$ ؛ α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ).

بقراءة بيانية حدد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على $]0;+\infty[$.



1) g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ ب: $g(x)=x-3+\ln x$ استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

2) تحقق أن: $2,2<\alpha<2,3$

II) f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ ب: $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$

و (C_f) تمثيلها البياني.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أثبت أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ ؛ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) بيّن أنّ: $f(\alpha)=\frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ؛ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل؛ ثم أنشئ (C_f) على المجال $]0;e^2]$.

التمرين 09: (بكالوريا 2012 ع ت)

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي :

$f(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ و $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

أ) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا .

ب) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

1) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ،
$$f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$$
استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) أ) بيّن المستقيم (Δ) الذي معادلة له : $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل لـ$(\mathscr{C}_f)$ عند $-\infty$

ب) ادرس وضع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم (Δ) .

3) بين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين α و β حيث $-3.5<\alpha<-3.4$ و $-1.1<\beta<-1$.

4) أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم (Δ) .

5) أ) نعتبر النقطتين $A\left(-1;3+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

بيّن أن $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ **معادلة ديكارتية للمستقيم** (AB)

ب) بيّن أنّ المستقيم (AB) يمس المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثيتيها .

التمرين 10: (بكالوريا 2009 ع ت)

I) h دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي :
$h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$.

أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to-1} h(x)$.

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$:
$$h'(x)=\frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$$
و استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم انجز جدول تغيراتها .

2) أحسب $h(0)$ و استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x .

II) لتكن f دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي :

$f(x)=x-1-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$ و نسمي (C_f) منحنيها البياني في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ ثم فسر هذه النتيجة بيانيا

ب) باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty$ برهن أن $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\ln u}{u}=0$

ج) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

د) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ و استنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

هـ) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل .

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\frac{h(x)}{(x+1)^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات f

2) بين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3.3 و 3.4

3) أرسم (C_f) .

التمرين 11: (بكالوريا 2013 ت رياضي)

I) الدالة g معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة :
$g(x)=(x+1)^2-2+\ln(x+1)$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $]-1;+\infty[$.

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,31<\alpha<0,32$ و أن $\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^2$.

3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II) الدالة f معرفة على المجال $]-1;+\infty[$
$$f(x)=(x+1)^2+\left(2-\ln(x+1)\right)^2$$
(C_f) منحنى f في م م م م م $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أثبت أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\frac{2g(x)}{x+1}$

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثمّ شكل جدول تغيراتها .

4) بين أن : $f(\alpha)=(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

5) مثّل المنحنى (C_f) على المجال $]-1;2]$.

III) (Γ) المنحنى الممثل للدالة h المعرفة على $]-1;+\infty[$ بالعبارة : $h(x)=\ln(x+1)$.

A النقطة ذات الإحداثيتين $(-1;2)$ و M نقطة من (Γ) فاصلتها x .

1) أثبت أن المسافة AM تعطى $AM=\sqrt{f(x)}$

2) الدالة k معرفة على المجال بالعبارة $k(x)=\sqrt{f(x)}$.

أ) بين أن للدالتين k و f نفس اتجاه التغير على $]-1;+\infty[$.

ب) عين إحداثيي النقطة B من (Γ) بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن .

ج) بين أن $AB=(\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2+1}$.

الحل مطبوع سيوزع لكم بعد المحاولة بعد العطلة

عطلة سعيدة

حل التمرين 01:

I) $D =]0;+\infty[$ و $g(x)=x^2+1-\ln x$

1) نهايتي الدالة g على يمين 0 و عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to 0} x^2+1-\ln x = \boxed{+\infty}$$

يمكن أن نكتب: $g(x)=x^2(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\times\frac{\ln x}{x})$ إذن فإن:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2+1-\ln x = \lim_{x\to+\infty} x^2(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\times\frac{\ln x}{x}) = \boxed{+\infty}$$

2) اتجاه تغير الدالة g وجدول تغيراتها:

- المشتقة : $g'(x)=\boxed{\frac{2x^2-1}{x}}$

- جدول التغيرات :

x	0		$\frac{\sqrt2}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$g\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)$	↗	$+\infty$

3) استنتاج إشارة الدالة g : $g(\frac{\sqrt2}{2})=\frac32+\frac12\ln 2\approx 1.85$

من جدول التغيرات و بما أن $g\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)>0$

فإن الدالة g موجبة تماما على D

II) $D=]0;+\infty[$ و $f(x)=x+\frac12+\frac{\ln(x)}{x}$

1) أ) نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و على يمين 0:

$$\lim_{x\to+\infty} x+\frac12+\frac{\ln(x)}{x}=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to 0} x+\frac12+\frac{\ln(x)}{x}=\boxed{-\infty}$$

ومنه حامل محور التراتيب هو مستقيم مقارب للمنحني (C) .

ب) المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+\frac12$ مقارب مائل للمنحني (C_f) ، لأن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)-\left(x+\frac12\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$

ج) الوضع النسبي: إشارة $f(x)-(x+\frac12)$ من إشارة $\ln x$.

من أجل $x>1$ فإن: $\ln x>0$ و (C) يقع فوق (Δ) .

من أجل $0<x<1$ فإن: $\ln x<0$ و (C) يقع تحت (Δ) .

2) أ) التحقق أنه من أجل كل x ينتمي إلى D : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

ب) اتجاه تغير الدالة f: بما أن g موجبة تماما على D فإن f' موجبة تماما على D و منه f متزايدة تماما على D

- جدول التغيرات:

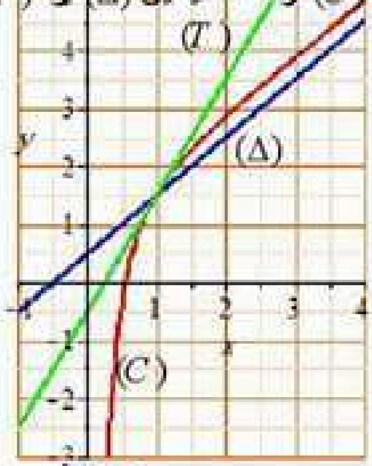
x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

ج) معادلة (T) الذي يمس المنحني (C) عند النقطة $A(1;\frac32)$

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه : $(T): \boxed{y=2x-\frac12}$.

3) إثبات أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]\frac12;1[$

4) رسم المنحني (C) والمستقيمين (Δ) و (T) :



حل التمرين 02:

I) لدينا: $g(x)=x^2-2x-4\ln(x-1)$ مع $x\in]1;+\infty[$

1) بقراءة بيانية: -المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين متمايزين .

2) لدينا: $g(2)=0$ و $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]2.87;2.88[$

3) إشارة $g(x)$ حسب قيم x ملخصة في الجدول التالي:

x	1		2		α		$+\infty$
إشارة $g(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

II) $f(x)=x-3+\frac{4\ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}$

1) $\lim_{x\to1} f(x)=\boxed{-\infty}$ أي: $x=1$ مقارب عمودي لـ (C_f) .

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\boxed{+\infty}$$

2) أ) $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-3)\right]=0$ ، المستقيم (Δ) ذو المعادلة $\boxed{y=x-3}$ هو مستقيم م مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) الوضع النسبي: ندرس إشارة الفرق $f(x)-(x-3)$ أي إشارة $4\ln(x-1)+5$ والملخصة في الجدول :

x	1		$1+e^{-\frac54}$		$+\infty$
إشارة $f(x)-y$	‖	$-$	0	$+$	
وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)	‖	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	

3) أ) مهما كان $x \in]1;+\infty[$ لدينا: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^2}$.

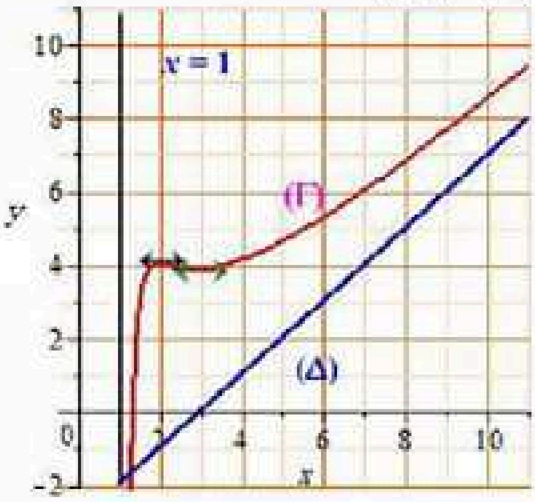
ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

أي أن: f متزايدة تماما على كل من المجالين $]1;2]$ و $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $[2;\alpha]$

- جدول التغيرات:

x	1		2		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	4	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4) رسم (Δ) و (C_f)



حل التمرين 03:

I) $f(x)=\frac{x}{x+1}-2\ln(x+1)$, $D_f=]-1;+\infty[$

1) حساب نهايات الدالة f عند حدود D_f :

$$\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}\left[\frac{x-2(x+1)\ln(x+1)}{x+1}\right]=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\boxed{-\infty}$$

2) $$f'(x)=\boxed{\frac{-1-2x}{(x+1)^2}}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط : $-1-2x$ ومنه : $x=-\frac{1}{2}$

جدول التغيرات:

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$	↘	$-\infty$

3) $f(0)=0$ والمعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $[-0,72;-0,71]$.

4) استنتاج إشارة $f(x)$:

من جدول التغيرات ونتيجة السؤال 3) نستنتج أنّ :

قيم x	-1		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

II) $g(x)=\frac{\ln(x+1)}{x^2}$, $D_g=]-1;0[\cup]0;+\infty[$

1) النهايات :

$$\lim_{x\to-1} g(x)=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)\right]=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)\right]=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{(x+1)}{x}\frac{\ln(x+1)}{(x+1)}\right]=\boxed{0}$$

2) المشتقة : $g'(x)=\frac{xf(x)}{x^4}$.

- إشارة $g'(x)$ من إشارة البسط لأن المقام موجب .

قيم x	-1		α		0		$+\infty$
x	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	

3) لدينا : $f(\alpha)=0$ ومنه : $\ln(\alpha+1)=\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}\cdots\cdots(1)$

وبتعويض (1) في عبارة g نجد : $g(\alpha)=\frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$

- إعطاء قيمة مقربة إلى 10^{-2} لـ $g(\alpha)$: $g(\alpha)\simeq-2,45$

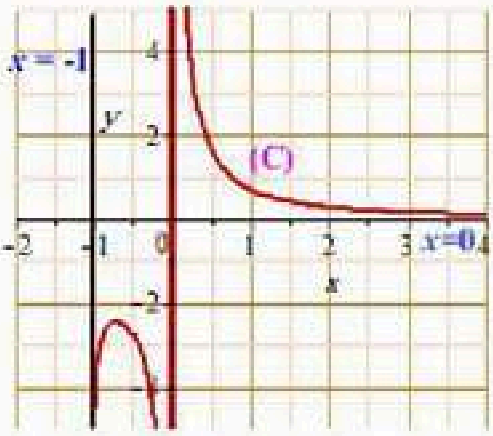
4) جدول تغيرات الدالة g :

x	-1		α		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	‖	$-$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	0

5) معادلة المماس (T) عند الفاصلة 2 :

$$(T): y=\frac{1-\ln 27}{12}x-\left(\frac{2-3\ln 27}{12}\right)$$

- إنشاء المنحنى :



6) المناقشة البيانية حسب قيم m ، عدد حلول المعادلة :

$mx^2-\ln(x+1)=0$ لدينا $m=\frac{\ln(x+1)}{x^2}$ أي: $g(x)=m$ ...(*)

- لما : $m \langle f(\alpha)$ المعادلة (*) تقبل حلين .

- لما : $m=f(\alpha)$ المعادلة (*) تقبل حلا وحيدا .

- لما : $g(\alpha)\langle m\le 0$ المعادلة (*) لا تقبل حلول .

- لما : $0\langle m$ المعادلة (*) تقبل حل وحيد .

حل التمرين 04:

1) $g(x) = 2x - \ln(x+1)$

أ) إتجاه التغير: النهايات: $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = \boxed{+\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(x+1)\left(\frac{2x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) = \boxed{+\infty}$$

المشتقة: $g'(x) = \boxed{\frac{2x+1}{x+1}}$ وإشارتهامن اشارة $(2x+1)$

جدول التغيرات:

x	-1 α -0.5 0 $+\infty$
$g'(x)$	$-$ 0 $+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘ 0 ↘ $-1+\ln 2$ ↗ 0 ↗ $+\infty$

ب) المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $-0,8 \prec \alpha \prec -0,7$

ج) $g(0) = 0$ و استنتاج اشارة $g(x)$

x	-1 α 0 $+\infty$
$g(x)$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

:(2 $D_f = [-1;+\infty[$ ، $\begin{cases} f(x) = x^2 + x - (x+1)\ln(x+1) \\ f(-1) = 0 \end{cases}$

أ)لدينا: $g(\alpha) = 0$ أي: $\ln(\alpha+1) = 2\alpha \cdots (1)$ ثم **نعوض** (1) **في عبارة** f **فنجد:** $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha - (\alpha+1)\times(2\alpha) = \boxed{-(\alpha^2+\alpha)}$

- حصر $f(\alpha)$: $-0,8 \prec \alpha \prec -0,7$ و $0,49 \prec \alpha^2 \prec 0,64$

ومنه : $0,06 \prec f(\alpha) \prec 0,31$

ب)
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h-1) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(h-1)^2 + (h-1) - h\ln(h)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h^2 - h - h\ln(h)}{h} = \lim_{h\to 0}(h - 1 - \ln h) = \boxed{+\infty}$$

ومنه الدالة غير قابلة للاشتقاق عند 1- على اليمين، و (C_f) يقبل نصف مماسا يوازي محور التراتيب عند هذه النقطة

ج) $f'(x) = 2x - \ln(x+1) = g(x)$

- اشارة $f'(x)$ هي نفسها اشارة $g(x)$

د)إثبات أن : $f(x) = (x+1)^2\left(\frac{x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)$

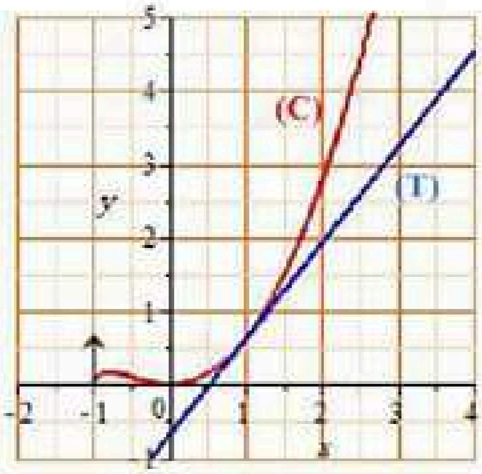
ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

هـ) جدول التغيرات :

x	-1 α 0 $+\infty$
$f'(x)$	$+$ 0 $-$ 0 $+$
$f(x)$	0 ↗ $f(\alpha)$ ↘ 0 ↗ $+\infty$

3) معادلة المماس عند $x = 1$: $y = \boxed{(2-\ln 2)x - \ln 2}$

4) رسم المماس (T) والمنحني (C):



حل التمرين 05:

I) f الدالة المعرّفة بـ: $f(x) = -x + 2 + 2\ln(x+1)$

1) تعيين النهايات عند حدود مجموعة التعريف :

• $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \boxed{-\infty}$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$

2) إثبات أن المنحني (C_f) لايقبل مقاربا مائلا عند $+\infty$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = -1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (-x) = +\infty$

إذن عند $+\infty$ لا يقبل (C_f) مقاربا مائلا وإنما يقبل فرعا من قطع مكافئ بإتجاه المستقيم ذو المعادلة $y = -x$

3) إتجاه التغير و جدول التغيرات :

$f'(x) = \frac{-x+1}{x+1}$ إشارة $f'(x)$ من إشارة $(-x+1)$

جدول التغيرات:

x	-1 1 $+\infty$
$f'(x)$	$+$ 0 $-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $1+\ln 4$ ↘ $-\infty$

4) (C_f) يقبل مماسا معامل توجيهه 1 أي: $f'(x_0) = 1$

ومنه: $\boxed{x_0 = 0}$ ،ومعادلة المماس هي : $\boxed{y = x+2}$

5) (Δ_λ) تشترك في نقطة واحدة معناه: $\lambda(x+2) - y = 0$

فيكون: $(x+2 = 0)$ و $(y = 0)$ ومنه $(x = -2)$ و $(y = 0)$

إذن كل المستقيمات تشترك في النقطة $B(-2;0)$

6)أ)**(ح م ق م)فإن:** $f(x) = 0$ **تقبل حلا وحيدا** α و $\alpha \in]5;6[$

أي أن (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة $F(\alpha, 0)$

ب) (C_f) يقطع محور الفواصل على المجال $]-1;1[$ لأن:

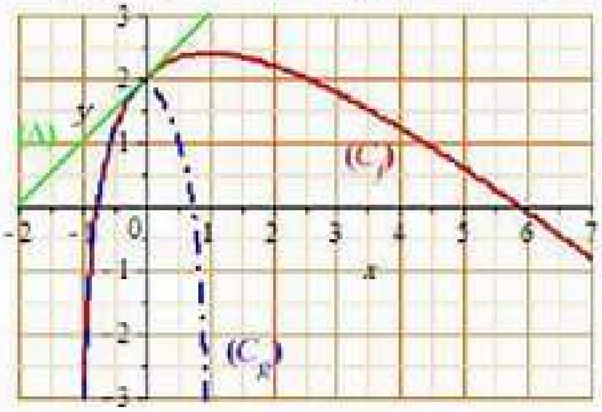
الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما

ولدينا: $\left[\lim\limits_{x\to-1} f(x)\right] \times f(1) < 0$

إذن (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة وحيدة $K(\beta, 0)$

7) إنشاء (C_f) و (Δ):

$f(1)=1+\ln(2)\simeq 2,38$ (نقطة حدية كبرى $((1;1+\ln(2))$)



II) g الدالة المعرّفة بـ: $g(x)=|x|+2+2\ln(1-|x|)$

1) أ) إثبات أن الدالة g زوجية على $]-1;1[$: $D_g=]-1;1[$

أ) إثبات أن (C_g) يقبل مماسين متعامدين:

على المجال $]-1;0[$ (C_g) يقبل مماسا (Δ) معادلته $y=x+2$

لكن الدالة زوجية على المجال $]-1;1[$ إذن الدالة g تقبل مماسا (Δ') على المجال $]0;1[$ معادلته $y=-x+2$ وحيث: $a_{(\Delta)}=1$ و $a_{(\Delta')}=-1$ إذن: $\boxed{aa'+1=0}$ $(\Delta)\perp(\Delta')$

2) رسم المنحني (C_g): لدينا: الدالة عبارة $g(x)$ هي:

$$\begin{cases} g(x)=-x+2+2\ln(x+1)=f(x) & x\in]-1;0[\\ g(x)=x+2+2\ln(-x+1) & x\in]0;1[\end{cases}$$

ومنه على المجال $]-1;0[$: (C_g) ينطبق على (C_f) ثم نناظر الرسم على المجال $]0;1[$ لأن الدالة g زوجية.

حل التمرين 06:

I) 1) $g(x)=x^3-x+1-2\ln x$

باستعمال: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$: نبرهن أن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

نضع $x=e^t$ ومنه:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln e^t}{e^t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^t}{t}}=\boxed{0}$$

2) النهايات: $\lim_{x\to 0} g(x)=\boxed{+\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-2\frac{\ln x}{x^3}\right)=\boxed{+\infty}$$

3) الدالة g تقبل الإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ لإنها مجموع دالتين قابلتين للإشتقاق على $]0,+\infty[$. و

$$g'(x)=3x^2-1-\frac{2}{x}=\frac{3x^3-x-2}{x}=\frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$$

4) دراسة إتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$

بما أنه من أجل كل من $]0,+\infty[$ فإن $(3x^2+3x+2)$ مجموع أعداد موجبة ومنه إشارة المشتقة من إشارة $(x-1)$.

جدول التغيرات:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

5) إشارة $g(x)$ لدينا $g(1)=1$ ومن جدول التغيرات فإنه: من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ فإن $g(x)\succ 0$.

II) 1) $f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x^2}$.

أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\boxed{+\infty}$ باستعمال نتيجة السؤال (I) (1))

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x+\frac{x+\ln x}{x^2}=\boxed{-\infty}$ ، $\boxed{x=1 \text{ م عمودي}}$

2) من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ فإن:

$$f'(x)=\frac{x^3-1+2\ln x}{x^3}=\frac{g(x)}{x^3}$$

أي أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

- جدول التغيرات:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3) لدينا: $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x^2}=0$

ومنه (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C).

4) أ) $h(x)=x+\ln x$ -إثبات أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[0,4;0,9]$ (نستعمل م ق المتوسطة)

ب) وضعية (C) بالنسبة لـ (Δ): إشارة الفرق $f(x)-x$ من إشارة $\frac{x+\ln x}{x^2}$ أي من إشارة $h(x)$ ومنه:

x	0		α		$+\infty$
إشارة $f(x)-y$		$-$	0	+	
وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	

5) إنشاء كل من (C) و (Δ):