(1) دورة جوان 2008 - الموضوع الأول

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 3n + 1$.

1) **حساب:** u_0، u_1 و u_2.

لحساب الحدود u_0، u_1 و u_2 نعوض في عبارة الحد العام أعلاه قيم n بـ 0، 1 و 2 على الترتيب، فنجد:

$u_0 = 1$، $u_1 = 4$، $u_2 = 7$.

2) **- نبين أن (u_n) متتالية حسابية مع تعيين أساسها r:**

تكون المتتالية (u_n) حسابية إذا كان:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

لدينا: .... $u_{n+1} = 3(n+1) + 1$

$u_{n+1} = 3n + 3 + 1$

$u_{n+1} = (3n+1) + 3$

ومنه: .... $u_{n+1} = u_n + 3$

إذن: (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 3$.

- نعين اتجاه تغير (u_n):

لتعيين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ندرس إشارة الفرق:

$$u_{n+1} - u_n$$

من السؤال السابق: .... $u_{n+1} - u_n = 3$

إذن: .... $u_{n+1} - u_n > 0$

ومنه: (u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ملاحظة:

- كل متتالية حسابية أساسها موجب هي متتالية متزايدة تماما.
- كل متتالية حسابية أساسها سالب هي متتالية متناقصة تماما.

3) **نتحقق أن العدد 2008 حد من حدود المتتالية (u_n)، ونحدد رتبته:**

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: .... $u_n = 2008$

أي: .... $3n + 1 = 2008$

فنجد: .... $n = 669$

بما أن 669 عدد طبيعي، فإن العدد 2008 حد من حدود المتتالية (u_n).

حيث: .... $u_{669} = 2008$

فيكون الحد الذي قيمته 2008 هو: .... u_{669}

ورتبته: 670

(لأن الحد الأول للمتتالية (u_n) هو u_0)

4) **حساب المجموع:** $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{669}$.

تعطى عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأول في المجموع} + \text{الحد الأخير في المجموع})$$

$$S = \frac{669 - 0 + 1}{2}(u_0 + u_{669})$$

$$S = \frac{670}{2}(1 + 2008)$$

ومنه نجد: .... $S = 673015$

(2) دورة جوان 2008 - الموضوع الثاني

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_1 = 7$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1) **حساب:** u_2، u_3 و u_4.

- من أجل: $n = 1$ لدينا: $u_2 = 2u_1 + 1$ نجد: ...... $u_2 = 15$
- من أجل: $n = 2$ لدينا: $u_3 = 2u_2 + 1$ نجد: ...... $u_3 = 31$
- من أجل: $n = 3$ لدينا: $u_4 = 2u_3 + 1$ نجد: ...... $u_4 = 63$

2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، نعرف المتتالية (v_n) كما يأتي: $v_n = u_n + 1$.

أ- نثبت أن (v_n) هندسية ونعين أساسها q وحدها الأول v_1:

تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا كان:

$$v_{n+1} = q \times v_n$$

لدينا: .... $v_{n+1} = u_{n+1} + 1$

$v_{n+1} = 2u_n + 1 + 1$

$v_{n+1} = 2u_n + 2$

$v_{n+1} = 2(u_n + 1)$

ومنه: .... $v_{n+1} = 2 \times v_n$

إذن: (v_v) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول v_1:

حيث: .... $v_1 = u_1 + 1$

بالتعويض نجد: .... $v_1 = 8$

ب- نكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم نستنتج عبارة u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول v_1 بالعلاقة:

$$v_n = v_1 \times q^{n-1}$$

ومنه: .... $v_n = 8 \times 2^{n-1}$

لدينا: $v_n = u_n + 1$ أي: $u_n = v_n - 1$.

ومنه: .... $u_n = 8 \times 2^{n-1} - 1$

جـ- نضع: $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$،

حساب S_n بدلالة n:

تعطى عبارة المجموع S_n بالعلاقة التالية:

$$S_n = (\text{الحد الأول في المجموع}) \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

$$S_n = v_1 \times \frac{1 - q^{n-1+1}}{1 - q}$$

حيث: $q = 2$ و $v_1 = 8$

$$S_n = 8 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2}$$

ومنه: .... $S_n = 8(2^n - 1)$

د- نعين n علما أن $S_n = 1016$:

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: .... $S_n = 1016$

أي: .... $8(2^n - 1) = 1016$

$2^n - 1 = 127$

$2^n = 128$

$2^n = 2^7$

لأن: $128 = 2^7$.

بالمطابقة نجد: .... $n = 7$

(3) دورة جوان 2009 - الموضوع الأول

(u_n) متتالية **حسابية** معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $u_1 = 2$ وبالعلاقة: $u_2 - 2u_5 = 19$.

1) أ- حساب الأساس r للمتتالية (u_n):

لحساب الأساس r نكتب كلا من u_2 و u_5 بدلالة r.

حيث: $u_2 = u_1 + r$ أي: $u_2 = 2 + r$.

و $u_5 = u_1 + 4r$ أي: $u_5 = 2 + 4r$.

لدينا: .... $u_2 - 2u_5 = 19$

$(2 + r) - 2(2 + 4r) = 19$

$2 + r - 4 - 8r = 19$

$-2 - 7r = 19$

$-7r = 21$

ومنه نجد: .... $r = -3$

ب- حساب الحد العاشر:

الحد العاشر هو u_{10} حيث: $u_{10} = u_1 + 9r$.

ومنه: .... $u_{10} = -25$

2) نكتب عبارة u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية **حسابية** حدها الأول u_1 بالعلاقة:

$$u_n = u_1 + (n - 1)r$$

$u_n = 2 + (-3)(n - 1)$

$u_n = 2 - 3n + 3$

ومنه نجد: .... $u_n = 5 - 3n$

3) نبين أن العدد (-2008) هو حد من حدود (u_n)، ونحدد رتبته:

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: .... $u_n = -2008$

أي: .... $5 - 3n = -2008$

$3n = 2013$

ومنه نجد: .... $n = 671$

بما أن 671 عدد طبيعي، فإن العدد -2008 حد من حدود المتتالية (u_n).

ومنه: .... $u_{671} = -2008$

فيكون الحد الذي قيمته -2008 هو: .... u_{671}

ورتبته: 671

(لأن الحد الأول للمتتالية (u_n) هو u_1)

4) حساب المجموع: $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{671}$.

تعطى عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})$$

$$S = \frac{671 - 1 + 1}{2} \times (u_1 + u_{671})$$

$$S = \frac{671}{2} \times (2 - 2008)$$

$$S = -671 \times 1003$$

ومنه نجد: .... $S = -673013$

(4) دورة جوان 2009 - الموضوع الثاني

(u_n) متتالية **هندسية** معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها موجب.

1) نعين q أساس هذه المتتالية وحدها الأول u_0 علما أن:

$u_3 = 144$ و $u_5 = 576$.

نكتب كلا من الحدين u_3 و u_5 بدلالة q و u_0.

حيث: $u_3 = u_0 \times q^3$ و $u_5 = u_0 \times q^5$.

فتصبح لدينا جملة معادلتين بمجهولين q و u_0 هي:

$$\begin{cases} u_0 \times q^3 = 144 \ldots\ldots 1 \\ u_0 \times q^5 = 576 \ldots\ldots 2 \end{cases}$$

بقسمة 2 على 1: .... $\dfrac{u_0 \times q^5}{u_0 \times q^3} = \dfrac{576}{144}$

أي: .... $q^2 = 4$

وبما أن الأساس **موجب** فإن: .... $q = 2$

نعوض قيمة q في المعادلة 1 مثلا فينتج: .... $8u_0 = 144$

ومنه نجد: .... $u_0 = 18$

2) نتحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 18 \times 2^n$:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية **هندسية** حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

بعد التعويض نجد: .... $u_n = 18 \times 2^n$

3) حساب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots u_n$.

تعطى عبارة المجموع S_n بالعلاقة التالية:

$$S_n = (\text{الحد الأول في المجموع}) \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

حيث: $q = 2$ و $u_0 = 18$.

$$S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n-0+1}}{1 - q}$$

$$S_n = 18 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}$$

ومنه نجد: .... $S_n = 18(2^{n+1} - 1)$

استنتاج قيمة العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 1134$.

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: .... $S_n = 1134$

أي: .... $18(2^{n+1} - 1) = 1134$

$2^{n+1} - 1 = 63$

$2^{n+1} = 64$

$2^{n+1} = 2^6$

بالمطابقة نجد: .... $n + 1 = 6$

ومنه: .... $n = 5$

ملاحظة:

قمنا بتحليل العدد 64 إلى جداء عوامل أولية فنتج:

$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$.

أي: $64 = 2^6$.

ومنه يمكن حل المعادلة: $2^{n+1} = 2^6$ بالمطابقة.

64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

(5) دورة جوان 2010 - الموضوع الأول

I- (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بالحدين:
$u_{10} = 31$ و $u_{15} = 46$.

1) نعين الأساس r والحد الأول u_0:

نكتب كلا من الحدين u_{10} و u_{15} بدلالة r و u_0.

حيث: $u_{10} = u_0 + 10r$ و $u_{15} = u_0 + 15r$.

فتصبح لدينا جملة معادلتين بمجهولين r و u_0 هي:

$$\begin{cases} u_0 + 10r = 31 \ldots 1 \\ u_0 + 15r = 46 \ldots 2 \end{cases}$$

بطرح 1 من 2: .... $(u_0 + 15r) - (u_0 + 10r) = 46 - 31$

$u_0 + 15r - u_0 - 10r = 15$

$5r = 15$

ومنه نجد: .... $r = 3$

نعوض قيمة r في المعادلة 1 مثلا فينتج: .... $u_0 + 30 = 31$

ومنه نجد: .... $u_0 = 1$

2) نكتب u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$$u_n = u_0 + n \times r$$

بالتعويض نجد: .... $u_n = 1 + 3n$

3) نبين أن 6028 حد من حدود المتتالية (u_n):

نحل المعادلة: .... $u_n = 6028$

أي: .... $1 + 3n = 6028$

$3n = 6027$

ومنه نجد: .... $n = 2009$

بما أن 2009 عدد طبيعي، فإن العدد 6028 حد من حدود المتتالية (u_n).

ومنه: .... $u_{2009} = 6028$

4) حساب المجموع S: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2009}$.

تعطى عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})$$

$$S = \frac{2009 - 0 + 1}{2} \times (u_0 + u_{2009})$$

$$S = \frac{2010}{2} \times (1 + 6028)$$

ومنه نجد: .... $S = 6059145$

II- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 2 \times 8^n$.

1) نبين أن (v_n) متتالية هندسية ونعين أساسها وحدها الأول v_0:

تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا كان:

$$v_{n+1} = v_n \times q$$

لدينا: .... $v_{n+1} = 2 \times 8^{n+1}$

$v_{n+1} = 2 \times 8^n \times 8$

ومنه: .... $v_{n+1} = v_n \times 8$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها: $q = 8$ وحدها الأول: $v_0 = 2$.

2) حساب بدلالة n المجموع S': $S' = v_0 + v_1 \ldots + v_n$.

تعطى عبارة المجموع S' بالعلاقة التالية:

$$S' = (\text{الحد الأول في المجموع}) \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

$$S' = v_0 \times \frac{1 - q^{n-0+1}}{1 - q}$$

$$S' = 2 \times \frac{1 - 8^{n+1}}{1 - 8}$$

ومنه نجد: .... $S' = \frac{2}{7}(8^{n+1} - 1)$

(6) دورة جوان 2010 - الموضوع الثاني

(u_n) متتالية هندسية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$، أساسها q وحدها الأول u_0 حيث: $u_1 = 6$ و $u_4 = 48$.

1) أ- حساب الأساس q والحد الأول u_0 للمتتالية (u_n):

نكتب كلا من الحدين u_1 و u_4 بدلالة q و u_0.

حيث: $u_1 = u_0 \times q$ و $u_4 = u_0 \times q^4$.

فتصبح لدينا جملة معادلتين بمجهولين q و u_0 هي:

$$\begin{cases} u_0 \times q = 6 \quad \ldots 1 \\ u_0 \times q^4 = 48 \ \ldots 2 \end{cases}$$

بقسمة 2 على 1: .... $\frac{u_0 \times q^4}{u_0 \times q} = \frac{48}{6}$

أي: .... $q^3 = 8$

ومنه نجد: .... $q = 2$

نعوض قيمة q في المعادلة 1 مثلا فينتج: .... $2u_0 = 6$

ومنه نجد: .... $u_0 = 3$

ب- استنتاج أن عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) هي:

$$u_n = 3 \times 2^n$$

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

حيث: $q = 2$ و $u_0 = 3$.

بعد التعويض نجد: .... $u_n = 3 \times 2^n$

2) أ- علما أن: $2^8 = 256$،

نبين أن العدد 768 هو حد من حدود المتتالية (u_n):

نحل المعادلة: .... $u_n = 768$

أي: .... $3 \times 2^n = 768$

$2^n = 256$

علما أن: .... $2^8 = 256$

فإن: .... $2^n = 2^8$

ومنه نجد: .... $n = 8$

بما أن 8 عدد طبيعي، فإن العدد 768 حد من حدود المتتالية (u_n).

ومنه: .... $u_8 = 768$

ب- حساب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + \cdots u_7$.

تعطى عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

$S = (\text{الحد الأول في المجموع}) \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$

حيث $q = 2$ و $u_0 = 3$

$S = u_0 \times \frac{1-q^{7-0+1}}{1-q}$

$S = 3 \times \frac{1-2^8}{1-2}$

$S = 3(2^8 - 1)$

ومنه نجد: .... $S = 765$

3) (v_n) متتالية عددية معرفة بـ: $v_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1} = 2v_n - 1$.

أ- حساب: v_1، v_2، v_3.

- من أجل: $n = 0$ لدينا: $v_1 = 2v_0 - 1$ نجد: .... $v_1 = 7$
- من أجل: $n = 1$ لدينا: $v_2 = 2v_1 - 1$ نجد: ...... $v_2 = 13$
- من أجل: $n = 2$ لدينا: $v_3 = 2v_2 - 1$ نجد: ...... $v_3 = 25$

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$v_n = 3 \times 2^n + 1$

نضع: .... $P(n):\ v_n = 3 \times 2^n + 1$

- من أجل $n = 0$ لدينا: $v_0 = 4$ و $3 \times 2^0 + 1 = 4$.

ومنه $P(0)$ صحيحة.

- نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

أي: .... $v_n = 3 \times 2^n + 1$

- ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

أي: .... $v_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + 1$

لدينا فرضا: .... $v_n = 3 \times 2^n + 1$

نضرب طرفي المساواة في العدد $(+2)$:

$2v_n = 2(3 \times 2^n + 1)$

$2v_n = 3 \times 2^n \times 2 + 2$

$2v_n = 3 \times 2^{n+1} + 2$

نضيف إلى طرفي المساواة العدد (-1):

$2v_n - 1 = 3 \times 2^{n+1} + 2 - 1$

$2v_n - 1 = 3 \times 2^{n+1} + 1$

ولدينا: .... $v_{n+1} = 2v_n - 1$

ومنه: .... $v_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + 1$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = 3 \times 2^n + 1$.

جـ- حساب المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 ... + v_7$.

لدينا: .... $v_n = 3 \times 2^n + 1$

وأيضا: .... $u_n = 3 \times 2^n$

ومنه: .... $v_n = u_n + 1$

لدينا: .... $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_7$

$S' = (u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \cdots + (u_7 + 1)$

$S' = (u_0 + u_1 + \cdots + u_7) + (1 + 1 + \cdots + 1)$

$S' = S + 8 \times 1$

أي: .... $S' = S + 8$

ومنه نجد: .... $S' = 773$

ملاحظة:

ورد مني سهوا في تمرين المتتاليات دورة جوان 2010 الموضوع الثاني الخطأ التالي:

3) ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$v_n = 3 \times 2^n - 1$.

والصحيح: $v_n = 3 \times 2^n + 1$.

(7) دورة جوان 2011 - الموضوع الأول

1) (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول u_0 بحيث:

$u_0 + u_3 = 28$

أ- حساب u_0:

نكتب u_3 بدلالة u_0 و q كما يلي:

$u_3 = u_0 \times q^3$ أي: $u_3 = 27u_0$. (لأن: $q = 3$)

لدينا: .... $u_0 + u_3 = 28$

$u_0 + 27u_0 = 28$

$28u_0 = 28$

ومنه: .... $u_0 = 1$

نكتب الحد العام u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$u_n = u_0 \times q^n$

حيث: $q = 3$ و $u_0 = 1$.

بعد التعويض نجد: .... $u_n = 3^n$

ب- حساب المجموع: $S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$.

تعطى عبارة المجموع S_1 بالعلاقة التالية:

$S_1 = (\text{الحد الأول في المجموع}) \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$

حيث $q = 3$ و $u_0 = 1$

$S_1 = u_0 \times \frac{1-q^{9-0+1}}{1-q}$

$S_1 = 1 \times \frac{1-3^{10}}{1-3}$

$S_1 = \frac{1}{2}(3^{10} - 1)$

ومنه نجد: .... $S_1 = 29524$

2) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام:

$v_n = 1 - 5n$

أ- نبين أن (v_n) متتالية حسابية مع تعيين أساسها:

تكون (v_n) متتالية حسابية إذا كان:

$v_{n+1} = v_n + r$.

لدينا: .... $v_{n+1} = 1 - 5(n+1)$

أي: .... $v_{n+1} = 1 - 5n - 5$

$v_{n+1} = (1 - 5n) - 5$

ومنه: .... $v_{n+1} = v_n - 5$

أو: .... $v_{n+1} - v_n = -5$

إذن: (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -5$ وحدها الأول: $v_0 = 1$.

استنتاج اتجاه تغير (v_n):

بما أن أساس المتتالية (v_n) سالب $(r<0)$ فإن (v_n) متتالية حسابية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

ب- حساب المجموع: $S_2 = v_0 + v_1 + \cdots + v_9$.

تعطى عبارة المجموع S_2 بالعلاقة التالية:

$$S_2 = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأول في المجموع} + \text{الحد الأخير في المجموع})$$

حيث: $v_0 = 1$ **و** $v_9 = -44$ $\qquad S_2 = \frac{9-0+1}{2} \times (v_0 + v_9)$

$S_2 = \frac{10}{2} \times (1 - 44)$

ومنه نجد: .... $S_2 = -215$

3) **نعتبر المتتالية (k_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام:**

$k_n = 1 + 3^n - 5n$

- نتحقق أن: $k_n = u_n + v_n$:

لدينا: .... $k_n = 1 + 3^n - 5n$

$k_n = (3^n) + (1 - 5n)$

ومنه: .... $k_n = u_n + v_n$

حساب المجموع: $S = k_0 + k_1 + \cdots + k_9$.

لدينا: .... $S = k_0 + k_1 + \cdots k_n$

$S = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \cdots + (u_9 + v_9)$

$S = (u_0 + u_1 + \cdots + u_9) + (v_0 + v_1 + \cdots + v_9)$

ومنه: .... $S = S_1 + S_2$

بالتعويض: .... $S = 29524 - 215$

ومنه نجد: .... $S = 29309$

(8) دورة جوان 2011 - الموضوع الثاني

(u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرفتان على $\mathbb{N}$ بحديهما العام: $u_n = -2n$ **و** $v_n = 3^{-2n}$.

نعين في كل حالة من الحالات الخمس الاقتراح الصحيح من بين الاقتراحات الثلاث مع التعليل.

1) **نبحث عن طبيعة المتتالية (u_n):**

لدينا: .... $u_n = -3n$

فيكون: .... $u_{n+1} = -3(n+1)$

أي: .... $u_{n+1} = -3n - 3$

نجد: .... $u_{n+1} = u_n - 3$

من الشكل: .... $u_{n+1} = u_n + r$

إذن: (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -3$.

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح $\boxed{2}$.

2) **نبحث عن الحد الخامس والأربعون للمتتالية (u_n):**

الحد الخامس والأربعون للمتتالية (u_n) هو: .... u_{44}

أي: .... $u_{44} = -2 \times 44$

نجد: .... $u_{44} = -88$

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح $\boxed{3}$.

3) **نحسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$**

تعطى عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأول في المجموع} + \text{الحد الأخير في المجموع})$$

حيث: $u_0 = 0$ **و** $u_n = -2n$ $\qquad S = \frac{n-0+1}{2} \times (u_0 + u_9)$

$S = \frac{n+1}{2} \times (0 - 2n)$

$S = -n(n+1)$

نجد: .... $S = -n^2 - n$

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح $\boxed{2}$.

4) **نبحث عن طبيعة المتتالية (v_n) ونعين أساسها:**

لدينا: .... $v_n = 3^{-2n}$

فيكون: .... $v_{n+1} = 3^{-2(n+1)}$

أي: .... $v_{n+1} = 3^{-2n-2}$

$v_{n+1} = 3^{-2n} \times 3^{-2}$

$v_{n+1} = 3^{-2n} \times \frac{1}{3^2}$

$v_{n+1} = 3^{-2n} \times \frac{1}{9}$

نجد: .... $v_{n+1} = v_n \times \frac{1}{9}$

من الشكل: .... $v_{n+1} = v_n \times q$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{9}$.

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح $\boxed{1}$.

5) **نعين اتجاه تغير المتتالية (v_n):**

لتعيين اتجاه تغير المتتالية (v_n) ندرس إشارة الفرق: $v_{n+1} - v_n$.

$v_{n+1} - v_n = 3^{-2(n+1)} - 3^{-2n}$

$v_{n+1} - v_n = 3^{-2n-2} - 3^{-2n}$

$v_{n+1} - v_n = 3^{-2n} \times 3^{-2} - 3^{-2n}$

$v_{n+1} - v_n = 3^{-2n}(3^{-2} - 1)$

$v_{n+1} - v_n = 3^{-2n}\left(\frac{1}{3^2} - 1\right)$

$v_{n+1} - v_n = 3^{-2n}\left(\frac{1}{9} - 1\right)$

$v_{n+1} - v_n = -\frac{8}{9} \times 3^{-2n}$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: .... $v_{n+1} - v_n < 0$

لأن: .... $-\frac{8}{9} < 0$

ومن أجل كل عدد طبيعي n: .... $3^{-2n} > 0$

إذن: (v_n) متناقصة من أجل كل عدد طبيعي n.

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح $\boxed{2}$.

(9) دورة جوان 2012 - الموضوع الأول

a، b، c ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية متزايدة تماما أساسها r حيث: $a+b+c=9$.

1) أ- حساب b:

بما أن a، b، c ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية فإن:

الوسط الحسابي هو: .... $a+c=2b$

لدينا: .... $a+b+c=9$

$(a+c)+b=9$

$2b+b=9$

أي: .... $3b=9$

ومنه نجد: .... $b=3$

نكتب a و c بدلالة r:

لدينا: .... $b=a+r$

ومنه: .... $a=b-r$

بالتعويض: .... $a=3-r$

ولدينا: .... $c=b+r$

بالتعويض: .... $c=3+r$

ب- علما أن: $a\times c=-16$، نعين الأساس r:

لدينا: .... $a\times c=-16$

بالتعويض: .... $(3-r)\times(3+r)=-16$

بالنشر: .... $9-r^2=-16$

أي: .... $r^2=25$

بما أن الأساس موجب فإن: .... $r=5$

استنتاج a و c:

لدينا: .... $a=3-r$

بالتعويض نجد: .... $a=-2$

ولدينا: .... $c=3+r$

بالتعويض نجد: .... $c=8$

2) (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0=-2$ وأساسها 5.

أ- نعبر عن الحد العام u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$$u_n=u_0+n\times r'$$

بالتعويض نجد: .... $u_n=-2+5n$

ب- حساب u_{15}:

من أجل $n=15$ في عبارة الحد العام:

لدينا: .... $u_{15}=-2+5\times 15$

نجد: .... $u_{15}=73$

استنتاج المجموع: $S=u_0+u_1+\cdots+u_{15}$.

تعطى عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

$$S=\frac{\text{عدد الحدود}}{2}\times(\text{الحد الأول في المجموع}+\text{الحد الأخير في المجموع})$$

حيث: $u_0=-2$ و $u_{15}=73$: $S=\frac{15-0+1}{2}\times(u_0+u_{15})$

$$S=\frac{16}{2}\times(-2+73)$$

ومنه نجد: .... $S=568$

3) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة:

$$8v_n-u_n=0$$

- حساب المجموع: $S'=v_0+v_1\ldots+v_{15}$.

لدينا: .... $8v_n-u_n=0$

ومنه: .... $v_n=\frac{1}{8}u_n$

ولدينا: .... $S'=v_0+v_1+\cdots+v_{15}$

$$S'=\left(\frac{1}{8}u_0\right)+\left(\frac{1}{8}u_1\right)+\cdots+\left(\frac{1}{8}u_{15}\right)$$

$$S'=\frac{1}{8}(u_0+u_1+\cdots+u_{15})$$

ومنه: .... $S'=\frac{1}{8}S$

بالتعويض نجد: .... $S'=71$

(10) دورة جوان 2012 - الموضوع الثاني

(u_n) متتالية حسابية متزايدة، أساسها r، حدها الأول u_1 و $u_3=7$.

1) أ- حساب بدلالة n الجدائين:

$T_1=u_1\times u_5$ و $T_2=u_2\times u_4$.

- نكتب u_1 و u_5 بدلالة r و u_3 (لأن u_3 معلوم)

لدينا: .... $u_3=u_1+2r$

ومنه: .... $u_1=u_3-2r$

بالتعويض: .... $u_1=7-2r$

ولدينا: .... $u_5=u_3+2r$

بالتعويض: .... $u_5=7+2r$

وعليه: .... $T_1=u_1\times u_5$

بالتعويض: .... $T_1=(7-2r)\times(7+2r)$

بالنشر نجد: .... $T_1=49-4r^2$

- نكتب u_2 و u_4 بدلالة r و u_3 (لأن u_3 معلوم)

لدينا: .... $u_3=u_2+r$

ومنه: .... $u_2=u_3-r$

بالتعويض: .... $u_2=7-r$

ولدينا: .... $u_4=u_3+r$

بالتعويض: .... $u_4=7+r$

وعليه: .... $T_2=u_2\times u_4$

بالتعويض: .... $T_2=(7-r)\times(7+r)$

بالنشر نجد: .... $T_2=49-r^2$

ب- نعين الأساس r بحيث: $T_2-T_1=27$.

لدينا من السؤال السابق:

$$\begin{cases}T_1=49-4r^2 \ldots 1\\ T_2=49-r^2 \quad \ldots 2\end{cases}$$

بطرح 2 من 1: .... $T_2 - T_1 = (49 - r^2) - (49 - 4r^2)$

أي: .... $T_2 - T_1 = 49 - r^2 - 49 + 4r^2$

فنجد: .... $T_2 - T_1 = 3r^2$

ولدينا: .... $T_2 - T_1 = 27$

ومنه: .... $3r^2 = 27$

أي: .... $r^2 = 9$

بما أن (u_n) متتالية حسابية متزايدة فإن: .... $r = 3$

2) نضع: $r = 3$.

أ- نكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الأول u_1 بالعلاقة:

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

لدينا: .... $u_1 = 7 - 2r$

أي: .... $u_1 = 1$

بالتعويض في عبارة الحد العام: .... $u_n = 1 + 3(n-1)$

ومنه نجد: .... $u_n = 3n - 2$

ب- نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

- نبين أن: $S_n = \frac{3n^2-n}{2}$

تعطى عبارة المجموع S_n بالعلاقة التالية:

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأول في المجموع} + \text{الحد الأخير في المجموع})$$

$$S_n = \frac{n-1+1}{2} \times (u_1 + u_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2} \times (1 + 3n - 2)$$

$$S_n = \frac{n(3n-1)}{2}$$

بالنشر نجد: .... $S_n = \frac{3n^2-n}{2}$

جـ- نجد العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 145$

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: .... $S_n = 145$

أي: .... $3n^2 - n - 290 = 0$

نجد: .... $\Delta = 3481 = (59)^2$

للمعادلة حلين متمايزين هما: .... $n_1 = 10$ و $n_2 = -\frac{29}{3}$

وبما أن n عدد طبيعي فإن: .... $n = 10$

3) أ- نكتب الحد u_{n+5} بدلالة العدد الطبيعي n:

لدينا: .... $u_n = 3n - 2$

فيكون: .... $u_{n+5} = 3(n+5) - 2$

أي: .... $u_{n+5} = 3n + 15 - 2$

ومنه: .... $u_{n+5} = 3n + 13$

ب- نتحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$$\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$$

لدينا: .... $u_{n+5} = 3n + 13$

فيكون: .... $\frac{u_{n+5}}{n} = \frac{3n+13}{n}$

أي: .... $\frac{u_{n+5}}{n} = \frac{3n}{n} + \frac{13}{n}$

ومنه: .... $\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$

جـ- استنتاج الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعيا:

يكون العدد: $\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعيا إذا كان العدد: $\frac{13}{n}$ طبيعيا.

ويكون العدد: $\frac{13}{n}$ طبيعيا إذا كان n من قواسم العدد 13.

وقواسم العدد 13 هي: .... $D_{13} = \{1, 13\}$

ومنه قيم n هي: .... $n = 1$ و $n = 13$

(11) دورة جوان 2013 - الموضوع الأول

(v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0 = 2$ وأساسها 3.

1) أ- نعبر عن v_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول v_0 بالعلاقة:

$$v_n = v_0 \times q^n$$

حيث: $q = 3$ و $v_0 = 2$.

بعد التعويض نجد: .... $v_n = 2 \times 3^n$

ب- حساب بدلالة n الفرق: $v_{n+1} - v_n$،

$$v_{n+1} - v_n = 2 \times 3^{n+1} - 2 \times 3^n$$

$$v_{n+1} - v_n = 2 \times 3 \times 3^n - 2 \times 3^n$$

$$v_{n+1} - v_n = (3-1)2 \times 3^n$$

$$v_{n+1} - v_n = 2 \times 2 \times 3^n$$

ومنه: .... $v_{n+1} - v_n = 4 \times 3^n$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (v_n):

بما أن: .... $4 > 0$

ومن أجل كل عدد طبيعي n: .... $3^n > 0$

فإن: .... $4 \times 3^n > 0$

ومنه: .... $v_{n+1} - v_n > 0$

إذن: (v_n) متتالية هندسية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.

أ- حساب بدلالة n المجموع S_n:

تعطى عبارة المجموع S_n بالعلاقة التالية:

$$S_n = (\text{الحد الأول في المجموع}) \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$$

حيث $q = 3$ و $v_0 = 2$

$$S_n = v_0 \times \frac{1-q^{n-1-0+1}}{1-q}$$

$$S_n = 2 \times \frac{1-3^n}{1-3}$$

ومنه نجد: .... $S_n = 3^n - 1$

ب- نعين قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 80$.

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: .... $S_n = 80$

أي: .... $3^n - 1 = 80$

أو: .... $3^n = 81$

حيث: .... $81 = 3^4$

ومنه: .... $3^n = 3^4$

بالمطابقة نجد: .... $n = 4$

جـ- أثبت بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2.

لاحظ أن: .... $S_n = 3^n - 1$

العدد S_n يقبل القسمة على 2 يعني: .... $S_n \equiv 0\ [2]$

نضع: .... $P(n):\ S_n \equiv 0\ [2]$

- من أجل $n = 0$ لدينا: $S_0 = 0$ و $0 \equiv 0\ [2]$.

ومنه $P(0)$ صحيحة.

- نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

أي: .... $S_n \equiv 0\ [2]$

- ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

أي: .... $S_{n+1} \equiv 0\ [2]$

لدينا فرضا: .... $S_n \equiv 0\ [2]$

$3^n - 1 \equiv 0\ [2]$

$3^n \equiv 1\ [2]$

نضرب طرفي الموافقة في العدد $(+3)$:

$3 \times 3^n \equiv 3 \times 1\ [2]$

$3 \times 3^n \equiv 3\ [2]$

ولدينا: .... $3 \equiv 1\ [2]$

وحسب خاصية التعدي يكون: .... $3^{n+1} \equiv 1\ [2]$

نضيف العدد (-1) إلى طرفي الموافقة:

$(3^{n+1} - 1) \equiv (1 - 1)\ [2]$

$3^{n+1} - 1 \equiv 0\ [2]$

ومنه: .... $S_{n+1} \equiv 0\ [2]$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n \equiv 0\ [2]$.

أي من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2.

(12) دورة جوان 2013 - الموضوع الثاني

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها 5 بحيث:

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$$

1) حساب u_0:

نكتب: u_1، u_2 و u_3 بدلالة r و u_0.

لدينا: .... $u_1 = u_0 + r$

ومنه: .... $u_1 = u_0 + 5$

لدينا: .... $u_2 = u_0 + 2r$

ومنه: .... $u_2 = u_0 + 10$

لدينا: .... $u_3 = u_0 + 3r$

ومنه: .... $u_3 = u_0 + 15$

لدينا: .... $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$

$(u_0) + (u_0 + 5) + (u_0 + 10) + (u_0 + 15) = 34$

$4u_0 + 30 = 34$

$4u_0 = 4$

فنجد: .... $u_0 = 1$

2) نبين أنه، من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 5n + 1$.

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$$u_n = u_0 + n \times r$$

ومنه نجد: .... $u_n = 5n + 1$

3) نعين العدد الطبيعي n بحيث: $u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$.

$u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$

$[5(n+1) + 1] + [5n + 1] - 8n = 4033$

$5n + 6 + 5n + 1 - 8n = 4033$

$2n + 7 = 4033$

$2n = 4026$

ومنه: .... $n = 2013$

4) حساب المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2013}$.

تعطى عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأول في المجموع} + \text{الحد الأخير في المجموع})$$

$$S = \frac{2013 - 0 + 1}{2} \times (u_0 + u_{2013})$$

حيث: $u_0 = 1$ و $u_{2013} = 10066$.

$$S = \frac{2014}{2} \times (1 + 10066)$$

نجد: .... $S = 10137469$

5) المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة:

$$v_n = 2u_n + 1$$

أ- ندرس اتجاه تغير المتتالية (v_n):

لدراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n) ندرس إشارة الفرق:

$$v_{n+1} - v_n$$

$v_{n+1} - v_n = (2u_{n+1} + 1) - (2u_n + 1)$

$v_{n+1} - v_n = 2u_{n+1} + 1 - 2u_n - 1$

$v_{n+1} - v_n = 2u_{n+1} - 2u_n$

$v_{n+1} - v_n = 2[5(n+1) + 1] - 2[5n + 1]$

$v_{n+1} - v_n = 2(5n + 6) - 2(5n + 1)$

$v_{n+1} - v_n = 10n + 12 - 10n - 2$

ومنه: .... $v_{n+1} - v_n = 10$

إذن: .... $v_{n+1} - v_n > 0$

ومنه: (v_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب- حساب المجموع: $S' = v_0 + v_1 + v_2 \ldots + v_{2013}$.

$S' = v_0 + v_1 + v_2 \ldots + v_{2013}$

$S' = (2u_0 + 1) + (2u_1 + 1) + \cdots + (2u_{2013} + 1)$

$S' = (2u_0 + 2u_1 + \cdots + 2u_{2013}) + (1 + 1 + \cdots 1)$

$S' = 2(u_0 + u_1 + \cdots + u_{2013}) + (1 + 1 + \cdots + 1)$

$S' = 2S + 2014 \times 1$

ومنه: .... $S' = 2S + 2014$

نجد: .... $S' = 20276952$

(13) دورة جوان 2014 - الموضوع الأول

نعين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاث، في كل حالة من الحالات الأربع الآتية، مع التعليل.

1) (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 وحدها $u_2 = 1$.

الحد العام للمتتالية (u_n):

نفرض أن الحد الأول هو u_0.

فيكون: .... $u_2 = u_0 + 2r$

أي: .... $u_0 = u_2 - 2r$

نجد: .... $u_0 = -5$

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$$u_n = u_0 + n \times r$$

ومنه نجد: .... $u_n = -5 + 3n$

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح $\boxed{3}$.

ملاحظة:

يمكن اعتبار u_2 هو الحد الأول للمتتالية (u_n)، فتصبح عبارة الحد العام كالتالي: $u_n = u_2 + (n-2)r$.

بالتعويض نتحصل على نفس النتيجة: .... $u_n = -5 + 3n$

2) n عدد طبيعي،

حساب المجموع: $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$.

• لاحظ أن S هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها 1.

تعطى عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأول في المجموع} + \text{الحد الأخير في المجموع})$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

نجد: .... $S = \frac{n^2+n}{2}$

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح $\boxed{1}$.

3) x عدد حقيقي، تكون الأعداد $x-2$، x، $x+1$ بهذا الترتيب حدودا متعاقبة لمتتالية هندسية إذا كان:

الوسط الهندسي: .... $x^2 = (x-2)(x+1)$

بالنشر: .... $x^2 = x^2 + x - 2x - 2$

بعد حل المعادلة نجد: .... $x = -2$

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح $\boxed{3}$.

4) (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$.

حدها العام: $v_n = 2 \times 3^{n+1}$.

حساب أساس المتتالية:

$$v_{n+1} = 2 \times 3^{(n+1)+1}$$

$$v_{n+1} = 2 \times 3^{n+1} \times 3$$

نجد: .... $v_{n+1} = v_n \times 3$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 3$.

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح $\boxed{2}$.

(14) دورة جوان 2014 - الموضوع الثاني

(v_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $v_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1} = 5v_n + 4$.

1) **حساب: v_1، v_2 و v_3.**

- من أجل: $n = 0$ لدينا: $v_1 = 5v_0 + 4$ نجد: .... $v_1 = 9$
- من أجل: $n = 1$ لدينا: $v_2 = 5v_1 + 4$ نجد: ...... $v_2 = 49$
- من أجل: $n = 2$ لدينا: $v_3 = 5v_2 + 4$ نجد: ..... $v_3 = 249$

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = v_n + 1$.

أ- نبين أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$ وحدها الأول $u_0 = 2$:

تكون المتتالية (u_n) هندسية إذا كان:

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

لديناً: .... $u_{n+1} = v_{n+1} + 1$

$$u_{n+1} = (5v_n + 4) + 1$$
$$u_{n+1} = 5v_n + 5$$
$$u_{n+1} = 5(v_n + 1)$$

ومنه: .... $u_{n+1} = 5 \times u_n$

إذن: (u_v) متتالية هندسية أساسها: $q = 5$ وحدها الأول u_0:

حيث: .... $u_0 = v_0 + 1$

ومنه نجد: .... $u_0 = 2$

ب- نكتب u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

حيث: $q = 5$ و $u_0 = 2$.

بعد التعويض نجد: .... $u_n = 2 \times 5^n$

استنتاج v_n بدلالة n:

لدينا: .... $u_n = v_n + 1$

أي: .... $v_n = u_n - 1$

ومنه: .... $v_n = 2 \times 5^n - 1$

جـ- نحلل العدد 1250 إلى جداء عوامل أولية:

1250	2
625	5
125	5
25	5
5	5
1	

$$1250 = 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$$
$$1250 = 2 \times 5^4$$

استنتاج أن 1250 حد من حدود المتتالية (u_n):

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: .... $u_n = 1250$

أي: .... $2 \times 5^n = 1250$

ولدينا: .... $1250 = 2 \times 5^4$

فيكون: .... $2 \times 5^n = 2 \times 5^4$

بالمطابقة نجد: .... $n = 4$

بما أن 4 عدد طبيعي، فإن العدد 1250 حد من حدود المتتالية (u_n).

حيث: .... $u_4 = 1250$

3) أ- حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.

تعطى عبارة المجموع S_n بالعلاقة التالية:

$$S_n = (\text{الحد الأول في المجموع}) \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

$S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n-1-0+1}}{1-q}$ حيث $q = 5$ و $u_0 = 2$

$$S_n = 2 \times \frac{1 - 5^n}{1 - 5}$$

ومنه نجد: ...... $S_n = \frac{1}{2}(5^n - 1)$

ب- حساب بدلالة n المجموع S'_n حيث: $S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.

$S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$

$S'_n = (u_0 - 1) + (u_1 - 1) + \cdots + (u_{n-1} - 1)$

$S'_n = (u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}) - (1 + 1 + \cdots + 1)$

$S'_n = S_n - n \times 1$

ومنه: ...... $S'_n = S_n - n$

بالتعويض: ...... $S'_n = \frac{1}{2}(5^n - 1) - n$

(15) دورة جوان 2015 - الموضوع الأول

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها q حيث: $u_0 = 2$ و $q = 3$.

1) حساب u_1 و u_2:

لدينا: ...... $u_1 = u_0 \times q$

ومنه: ...... $u_1 = 6$

ولدينا: ...... $u_2 = u_0 \times q^2$

ومنه: ...... $u_2 = 18$

2) نكتب u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

حيث: $q = 3$ و $u_0 = 2$.

بعد التعويض نجد: ...... $u_n = 2 \times 3^n$

استنتاج u_5:

لدينا: ...... $u_5 = 2 \times 3^5$

ومنه: ...... $u_5 = 486$

3) نعين اتجاه تغير المتتالية (u_n):

لدراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) ندرس إشارة الفرق:

$$u_{n+1} - u_n$$

$u_{n+1} - u_n = 2 \times 3^{n+1} - 2 \times 3^n$

$u_{n+1} - u_n = 2 \times 3 \times 3^n - 2 \times 3^n$

$u_{n+1} - u_n = 2 \times 3^n(3 - 1)$

$u_{n+1} - u_n = 2 \times 2 \times 3^n$

$u_{n+1} - u_n = 4 \times 3^n$

بما أن: ...... $4 > 0$

ومن أجل كل عدد طبيعي n: ...... $3^n > 0$

فإن: ...... $4 \times 3^n > 0$

ومنه: ...... $u_{n+1} - u_n > 0$

إذن: (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

4) أ- حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$.

تعطى عبارة المجموع S_n بالعلاقة التالية:

$$S_n = (\text{الحد الأول في المجموع}) \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

$S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n-1-0+1}}{1-q}$ حيث $q = 3$ و $u_0 = 2$

$$S_n = 2 \times \frac{1 - 3^n}{1 - 3}$$

ومنه نجد: ...... $S_n = (3^n - 1)$

ب- استنتاج قيمة المجموع: $2 + 6 + 18 + \cdots + 486$.

لاحظ أن:

$2 + 6 + 18 + \cdots + 486 = u_0 + u_1 + u_2 \ldots + u_5$

$2 + 6 + 18 + \cdots + 486 = u_0 \times \frac{1 - q^{5-0+1}}{1 - q}$

$2 + 6 + 18 + \cdots + 486 = 2\frac{1 - 3^6}{1 - 3}$

$2 + 6 + 18 + \cdots + 486 = 3^6 - 1$

ومنه: ...... $2 + 6 + 18 + \cdots + 486 = 728$

ملاحظة:

يمكن تعويض n مباشرة في علاقة S_n بالعدد 6 (لدينا 6 حدود في المجموع: $2 + 6 + 18 + 54 + 162 + 486$).

5) أ- نعين باقي القسمة الإقليدية على 5 لكل من الأعداد: 3، 3^2، 3^3 و 3^4.

باقي قسمة 3 على 5 هو: 3

باقي قسمة 3^2 على 5 هو: 4

باقي قسمة 3^3 على 5 هو: 2

باقي قسمة 3^4 على 5 هو: 1

العدد	3	3^2	3^3	3^4
الباقي على 5	3	4	2	1

ب- استنتاج أنه لكل k من $\mathbb{N}$: $3^{4k} \equiv 1\,[5]$.

لدينا من السؤال السابق: ...... $3^4 \equiv 1\,[5]$

وحسب خواص الموافقات فإن: ...... $(3^4)^k \equiv 1^k\,[5]$

ومنه من أجل كل k من $\mathbb{N}$: ...... $3^{4k} \equiv 1\,[5]$

6) نعين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $3^n - 1$ قابلا للقسمة على 5.

$3^n - 1$ يقبل القسمة على 5 يعني: ...... $3^n - 1 \equiv 0\,[5]$

أي: ...... $3^n \equiv 1\,[5]$

ومنه: ...... $n = 4k \quad (k \in \mathbb{N})$

(16) دورة جوان 2015 - الموضوع الثاني

(u_n) متتالية **حسابية** حدها الأول u_1 وأساسها r حيث:

$u_1 - u_3 = 5$ و $u_2 = \frac{1}{2}$.

1) أ- نبين أن: $u_1 + u_3 = 1$.

الوسط الحسابي: .... $u_1 + u_3 = 2u_2$

بالتعويض: .... $u_1 + u_3 = 2 \times \frac{1}{2}$

ومنه: .... $u_1 + u_3 = 1$

ب- نعين الحد الأول u_1:

لدينا: .... $\begin{cases} u_1 - u_3 = 5 \dots 1 \\ u_1 + u_3 = 1 \dots 2 \end{cases}$

بجمع 1 و 2 طرف لطرف: .... $u_1 - u_3 + u_1 + u_3 = 6$

نجد: .... $2u_1 = 6$

ومنه: .... $u_1 = 3$

استنتاج أن: $r = -\frac{5}{2}$.

لدينا: .... $u_2 = u_1 + r$

ومنه: .... $r = u_2 - u_1$

نجد: .... $r = -\frac{5}{2}$

2) نكتب u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية **حسابية** حدها الأول u_1 بالعلاقة:

$$u_n = u_1 + (n-1) \times r$$

ومنه: .... $u_n = 3 - \frac{5}{2}(n-1)$

نجد: .... $u_n = -\frac{5}{2}n + \frac{11}{2}$

3) أ- حساب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

تعطى عبارة المجموع S_n بالعلاقة التالية:

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})$$

$$S_n = \frac{n - 1 + 1}{2} \times (u_1 + u_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2} \times \left(3 - \frac{5}{2}n + \frac{11}{2}\right)$$

نجد: .... $S_n = \frac{n(17-5n)}{4}$

ب- نعين قيمة العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها: $S_n = -\frac{657}{2}$.

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: .... $S_n = -\frac{657}{2}$

أي: .... $5n^2 - 17n - 1314 = 0$

نجد: .... $\Delta = 26569 = (163)^2$

للمعادلة حلين متمايزين هما: .... $n_1 = 18$ و $n_2 = -\frac{73}{5}$

وبما أن n عدد طبيعي فإن: .... $n = 18$

نرفض القيمة n_2 لأن $\left(-\frac{73}{5}\right)$ ليس عددا طبيعيا.

4) n عدد طبيعي غير معدوم، نضع:

$T_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + nu_n$.

أ- نتحقق أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$:

$(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$.

بالنشر: ..... $(n+2)(9-5n) = 9n - 5n^2 + 18 - 10n$

أي: ..... $(n+2)(9-5n) = -5n^2 + (9n - 10n) + 18$

ومنه: .... $(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$

ب- باستعمال الاستدلال بالتراجع، نثبت أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$:

$T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$.

نضع: .... $P(n) : T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$

- من أجل $n = 1$

لدينا: .... $T_1 = 1 \times u_1 = 3$

و: .... $T_1 = \frac{1}{6} \times 1 \times (1+1)(14 - 5 \times 1) = 3$

ومنه $P(0)$ صحيحة.

- نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

أي: .... $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$

- ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

أي: .... $T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(9-5n)$

لدينا فرضا: .... $T_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + nu_n$

$$T_{n+1} = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + nu_n + (n+1)u_{n+1}$$

$$T_{n+1} = T_n + (n+1)u_{n+1}$$

حيث: .... $u_{n+1} = -\frac{5}{2}(n+1) + \frac{11}{2}$

$$u_{n+1} = -\frac{5}{2}n - \frac{5}{2} + \frac{11}{2}$$

$$u_{n+1} = -\frac{5}{2}n + \frac{6}{2}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(6-5n)$$

ومنه: .... $T_{n+1} = T_n + \frac{1}{2}(n+1)(6-5n)$

$$T_{n+1} = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n) + \frac{1}{2}(n+1)(6-5n)$$

$$T_{n+1} = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n) + \frac{3}{6}(n+1)(6-5n)$$

$$T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)[n(14-5n) + 3(6-5n)]$$

$$T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(14n - 5n^2 + 18 - 15n)$$

$$T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(-5n^2 - n + 18)$$

لدينا: .... $-5n^2 - n + 18 = (n+2)(9-5n)$

ومنه: .... $T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(9-5n)$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$:

$T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$.

bouguetof.hamid@yahoo.fr