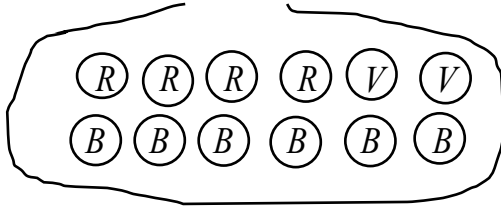


**التمرين الأول: ( 6 نقاط )**



كيس يحتوي على 12 كرة متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس منها 4 كرات حمراء، 6 بيضاء و كرتين خضراوين (انظر الشكل)  
نسحب من الكيس 3 كرات في آن واحد و نعتبر الحادثتين التاليتين:  
A " الكرات الثلاثة المسحوبة من نفس اللون "  
B " من بين الكرات الثلاثة المسحوبة توجد فقط كرتين بيضاوين "

(1) اذكر لماذا لدينا تساوي الإحتمال؟ ثم بين أن:  $P(A) = \frac{6}{55}$

(2) احسب  $P(B)$  ثم استنتج  $P(A \cup B)$

(3) ليكن المتغير العشوائي  $X$  الذي يتمثل في اللعبة التالية:

- نربح ثلاث نقط (3) إذا كانت الكرات الثلاثة المسحوب من نفس اللون.
- نخسر ثلاث نقط (-3) إذا كانت الكرات الثلاثة المسحوب مختلفة الألوان مثني مثني.
- لا نربح أية نقطة (0) إذا كانت كرتين فقط من الكرات الثلاثة المسحوبة من نفس اللون .

|              |     |     |                |
|--------------|-----|-----|----------------|
| $x_i$        | -3  | 0   | 3              |
| $P(X = x_i)$ | ... | ... | $\frac{6}{55}$ |

أ - اكمل الجدول المقابل:

ب - احسب  $P(X^2 - 9 = 0)$

ج - احسب الأمل الرياضي  $E(X)$  . - ماذا تستنتج بالنسبة للعبة؟ علل

**التمرين الثاني: ( 6 نقاط )**

$(u_n)$  متتالية معرفة على  $\mathbb{R}$  ب:  $u_0 = 0$  و من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$ :  $u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 3}$

(1) أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$ :  $0 \leq u_n \leq 1$

ب - بين أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

(2)  $(v_n)$  متتالية معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $v_n = u_n^2 + \alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ )

أ - اكتب عبارة الحد العام  $u_n$  بدلالة  $v_n$  و  $\alpha$  .

ب - عين العدد الحقيقي  $\alpha$  حتى تكون المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{4}$

ج - نضع  $\alpha = -1$  - اكتب بدلالة  $n$  كل من عبارة  $v_n$  و  $u_n$  .

- استنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$  .

- اوجد بدلالة  $n$  المجموع  $s_n$  حيث:  $s_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$

### التمرين الثالث: ( 8 نقاط )

(I)  $g(x) = 1 - ex - 2 \ln x$  دالة معرفة على  $]0; +\infty[$  ب:  $g(x) = 1 - ex - 2 \ln x$

(1) بين أن الدالة  $g$  متناقصة تماما على  $]0; +\infty[$  .

(2) أ - بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $[0,5; 1]$  .

ب - اوجد حصرا للعدد  $\alpha$  سعته  $0,1$

ج - استنتج حسب قيم  $x$  إشارة  $g(x)$  .

(II) لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $]0; +\infty[$  ب:  $f(x) = \frac{ex + \ln x}{x^2}$

(1) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  ثم فسر النتيجةين بيانيا.

(2) أ - بين أنه من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

ب - استنتج اتجاه تغير  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن:  $f(\alpha) = \frac{e\alpha + 1}{2\alpha^2}$  ثم جد حصرا للعدد  $f(\alpha)$  .

(4) أنشئ المنحنى  $(C_f)$  في معلم متعامد و متجانس حيث طول الوحدة هي  $2cm$  .

(5) عين قيم الوسيط الحقيقي  $m$  حتى تقبل المعادلة  $f(x) = |m|$  حولا في  $\square$  .

بالتوفيق

## التمرين الأول :

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  

$$\begin{cases} u_0 = 11 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n - 2} + 2 \end{cases}$$

- (1) أ- بإستعمال المنحنى  $(C_f)$  الممثل للدالة  $f$  المرفقة بالمتتالية  $(u_n)$  والمعرفة بالعلاقة  
 $f(x) = \sqrt{x - 2} + 2$  والمنصف الأول ذي المعادلة  $y = x$  مثل الحدود  $u_0, u_1, u_2, u_3$   
على محور الفواصل ( دون حساب الحدود موضحا خطوط الإنشاء ) ، تعاد الوثيقة الرسم  
ب- ماهو تخمينك حول إتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ ؟؟؟
- (2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $3 \leq u_n \leq 11$
- (3) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 2}(1 - \sqrt{u_n - 2})$
- (4) بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة
- (5) إستنتج مما سبق أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة وعين نهايتها .

## التمرين الثاني :

**I** نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  ب :  $g(x) = x^2 - 1 - 2 \ln x$

(1) أدرس تغيرات الدالة  $g$

(2) إستنتج إشارة  $g(x)$  على المجال  $]0; +\infty[$

**II** نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  ب :  $f(x) = x + \frac{1 - (\ln x)^2}{x}$  ، وليكن  $(C_f)$

المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  .

(1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  ثم فسر النتيجة هندسيا .

(2) برهن أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$  ( إرشاد : ضع  $t = \sqrt{x}$  ) ، ثم أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(3) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$  ،  $f'(x) = \frac{g(x) + (\ln x)^2}{x^2}$

ب- إستنتج إتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$  ، ثم شكل جدول تغيراتها .

ج- بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث :  $0,3 < \alpha < 0,4$

(4) أ- بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x$  مقارب مائل ل  $(C_f)$  عند  $+\infty$

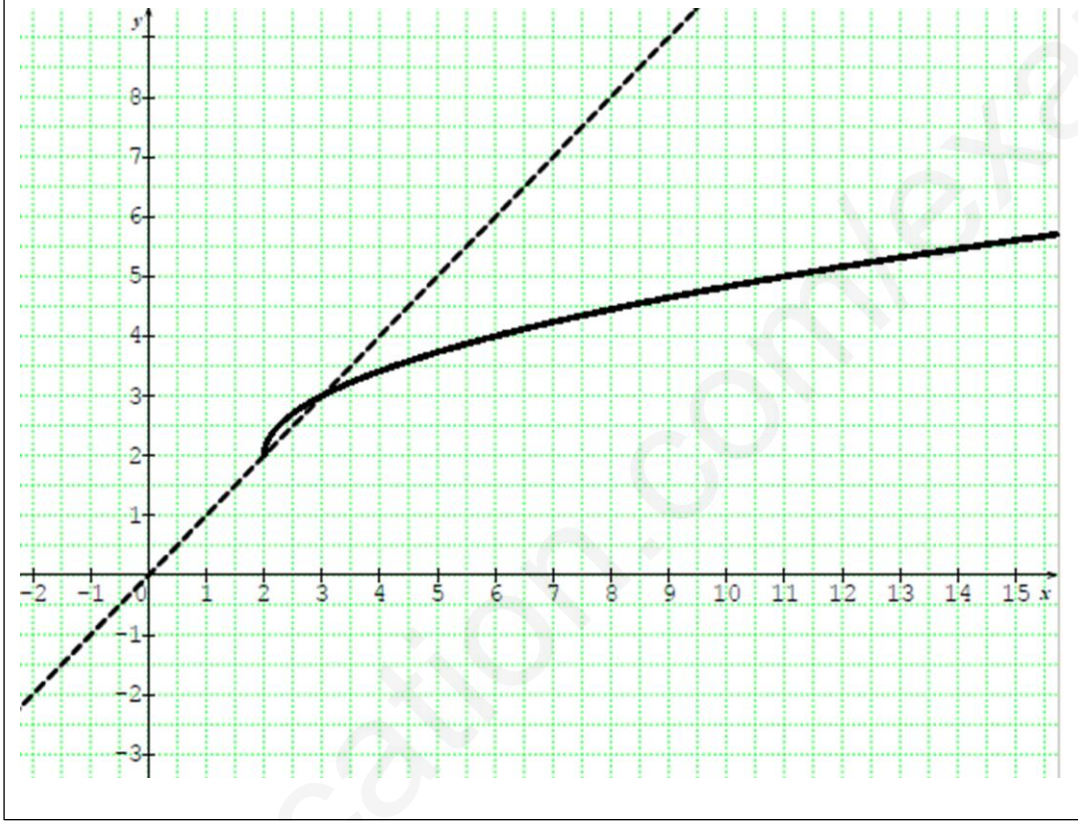
ب- أدرس الوضع النسبي ل  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$  .

(5) أرسم  $(\Delta)$  والمنحنى  $(C_f)$  .

الإسم : .....

اللقب : .....

ملاحظة : تعاد مع ورقة الإجابة



التمرين الاول :

يحتوي صندوق  $U_1$  على 4 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء ، و يحتوي صندوق  $U_2$  على كرتين حمراوتين و 5 كرات بيضاء و يحتوي صندوق  $U_3$  على 3 كرات تحمل الرقم 1 و كرتان تحملان الرقم 2 ، كل الكرات متماثلة.

(I) نسحب من الصندوق  $U_1$  ثلاث كرات دفعة واحدة (ولا نهتم بالصندوقين  $U_2$  و  $U_3$ ).

احسب احتمال مايلي :

1. سحب 3 كرات من نفس اللون .
  2. سحب كرة بيضاء على الأقل .
  3. نعتبر المتغير العشوائي  $X$  الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات البيضاء المسحوبة .  
- حدد قانون احتمال المتغير  $X$  و احسب امله الرياضي.
- (II) نسحب الان كرة من الصندوق  $U_3$  اذا كانت تحمل الرقم 1 نسحب من الصندوق  $U_1$  كرة واحدة .  
أما اذا كانت تحمل الرقم 2 فنسحب من الصندوق  $U_2$  كرة واحدة .

1. شكل شجرة الاحتمال التي تعبر عن التجربة.
2. احسب احتمال سحب كرة حمراء.
3. احسب احتمال ان نسحب كرة من الصندوق  $U_1$  علما ان الكرة المسحوبة حمراء.

التمرين الثاني:

(I)  $(U_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  كمايلي :  $U_n = e^{\frac{1}{3}+2n}$

1. برهن أن  $(U_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول
2. احسب بدلالة  $n$  المجاميع  $S_1 = U_0 + U_1 + \dots + U_n$  و  $S_2 = U_0^2 + U_1^2 + \dots + U_n^2$

3. عين قيمة  $n$  حتي يكون :  $S_1 = \frac{e^{\frac{1}{3}}}{1-e^2} (1-e^{10})$

(II) نعتبر  $(V_n)$  المتتالية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كمايلي :  $V_n = \ln(U_n)$

1. حدد طبيعة المتتالية  $(V_n)$
2. احسب بدلالة  $n$  المجموع :  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

⚠ تجنب الشطب واستعمال الصمغ.

### التمرين الأول:

- 1) لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $[0, 1]$  بـ:  $f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$ .
- أدرس تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $[0, 1]$ .
  - إستنتج أنه إذا كان  $x \in [0, 1]$  فإن  $f(x) \in [0, 1]$ .
  - مثل بيانيا الدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  وحدته: (10cm).

- 2) نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بـ:  $u_0 = 0$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $u_{n+1} = f(u_n)$ .
- باستعمال المنحنى (C) للدالة  $f$  عين على محور الفواصل الحدود:  $u_3, u_2, u_1, u_0$ . أعط تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية  $u_n$ .
  - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $0 \leq u_n \leq 1$ .
  - بين أنه:  $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ , ثم إستنتج اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ .
  - هل المتتالية  $(u_n)$  متقاربة؟ برر إجابته.

- 3) نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $N$  كما يلي:  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$ .
- برهن أنه المتتالية  $(v_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها وحدتها الأولى  $v_0$ .
  - أكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$ , ثم عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$ .
  - إستنتج نهاية المتتالية  $(u_n)$ .

### التمرين الثاني:

يلعب طفل بـ 20 كرت، منها 13 كرت حمراء و 7 كرات خضراء. يضع 10 كرات حمراء و 3 كرات خضراء في العلبة A, ويضع الباقي في العلبة B.

- 1) في أول لعبة يختار 3 كرات عشوائيا وفي آن واحد من العلبة A ويظهر كم كرت حمراء ظهرته.

ليكن المتغير العشوائي X المتعلق بعدد الكرات الحمراء المسحوبة.

- عين قانون احتمال المتغير العشوائي X, ثم أحسب أمله الرياضي  $E(X)$ .

- 2) وفي اللعبة الثانية يختار الطفل إحدى اللعبتين ويسحب منها كرة واحدة.

(1) مثل هذه الوضعية بشجرة الاحتمالات.

(2) أحسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء.

(3) علما أن الطفل سحب كرة حمراء, ما احتمال أن تكون من العلبة A.

ثانوية : طالب ساعد

السنة الدراسية : 2019/2018

المستوى : السنة الثالثة علوم تجريبية

المدة : ساعة

-----فرض محروس-----لفصل الثاني في الرياضيات-----

## التمرين الأول:

### الجزء الأول:

$g$  دالة معرفة على

المجال  $[1; +\infty[$  بـ :  $g(x) = \ln(2x) + 1 - x$

1. احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

2. بين أن الدالة  $g$  متناقصة تماما على المجال  $[1; +\infty[$

3. احسب  $g(1)$  ثم بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا

وحيدا نرسم له  $\alpha$  حيث  $2.67 < \alpha < 2.68$

4. استنتج أن  $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$

### الجزء الثاني:

بـحدها الأول :  $u_0 = 1$  ،

و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

(C) التمثيل البياني لمجموعة النقاط المعرفة

بالمعادلة :  $y = \ln(2x) + 1$

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; i, j)$

كما هو موضح

في الشكل المقابل.

1. أعد رسم هذا الشكل على ورقة الإجابة ثم مثل على

محور الفواصل

الحدود  $u_0, u_1, u_2$  و  $u_3$  (دون حسابها موضحا خطوط الإنشاء)

2. ضع تخميننا حول اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  و تخميننا

حول تقاربها.

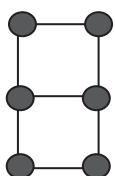
3. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$$

4. استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة نحو  $\alpha$

### التمرين الثاني:

يكتب الحرف بطريقة برايل ( BRAILLE ) بثقب



ورقة في نقطة واحدة على الأقل من النقاط الستة

المبينة في الشكل

### الجزء الأول:

$$(1) \quad \sum_{k=1}^6 C_6^k = 2^6 - 1 \quad : \quad \text{بين باستعمال دستور ثنائي الحد أن}$$

(2) ما عدد كل الحروف التي يمكن الحصول عليها

سواء لها معنى بخت برايل أو ليس لها معنى؟

(3) ما عدد الحروف التي يمكن الحصول عليها سواء

لها معنى بخت برايل أو ليس

## بثلاث ثقوب؟

## الجزء الثانى:

الجدول المقابل يمثل بعض رموز **نابل** **بهر عید**.

## نختار حرفا من حروف الجدول

ونہم بالحادثین:

A: " عدد الثقوب على الرمز المرفق أكبر أو

يساوي 4".

B: " عدد الثقوب على الرمز المرفق فردي".

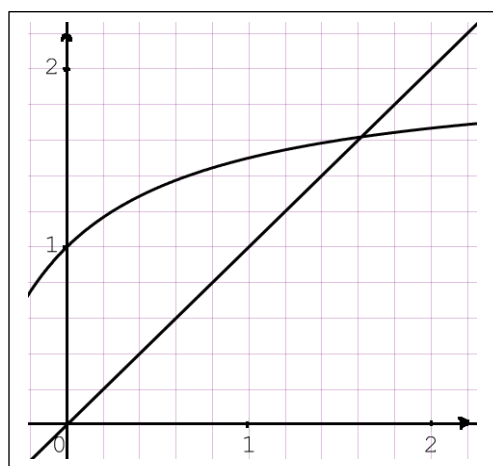
- هل الحادثان A و B مستقلتان؟

## بالتوفيق

الفرض الأول للثلاثي الثاني لمادة الرياضيات المدة: 1 ساعة

نص الفرض :

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[0;2]$  بـ :  $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$  .  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  كما هو موضح في الشكل أدناه :



(1) أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ، ثم

استنتج أنه إذا كان  $x \in [1;2]$  ، فإن  $f(x) \in [1;2]$  .

(2)  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان معرفتان بـ :  $u_0 = 1$  ،  $v_0 = 2$

ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = f(u_n)$  ،  $v_{n+1} = f(v_n)$  .

أ. مثل على حامل محور الفواصل الحدود  $u_0$  ،  $u_1$  ،  $v_0$  ،  $v_1$  .

لكل من المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  . مبرزا خطوط الانشاء.

ب. أعط تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  .

(3) برهن بالتراجع عن الخواص التالية : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$1 \leq u_n \leq 2 \text{ ، } 1 \leq v_n \leq 2 \text{ ، } u_n \leq u_{n+1} \text{ و } v_n \geq v_{n+1} .$$

$$(4) \text{ أ. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)} .$$

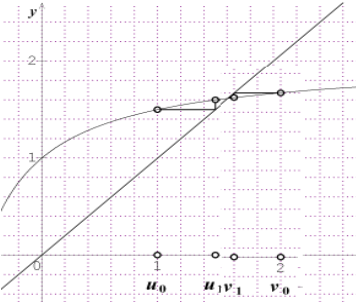
$$\text{ب. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : v_n - u_n \geq 0 \text{ و } v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n) .$$

$$\text{ج. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n .$$

د. استنتج أن للمتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  نفس النهاية  $l$  .

هـ. عين القيمة المضبوطة للعدد  $l$  .

بالتوفيق للجميع

| العلامة |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |
|---------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
|         | <p>1. دراسة اتجاه تغير الدالة <math>f : f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} &gt; 0</math> اذن الدالة <math>f</math> متزايدة تماما على <math>[1; 2]</math> .</p> <p>بما ان <math>f</math> متزايدة تماما على <math>[1; 2]</math> فان <math>x \in [1; 2]</math> يعني <math>f(x) \in [f(1); f(2)]</math> أي <math>f(x) \in [1; 2]</math> .</p> <p>2. تمثيل الحدود على محور الفواصل:</p>  <p>من خلال الرسم يتضح لنا ان <math>(u_n)</math> متزايدة و <math>(v_n)</math> متناقصة ولهما نفس النهاية أي متقاربتان نحو <math>L</math> .</p> <p>3. البرهان بالتراجع:</p> <p>(1) <math>1 \leq u_n \leq 2</math> :</p> <p>* <math>n=0</math> نجد <math>u_0 = 1</math> أي <math>1 \leq u_0 \leq 2</math> اذن الخاصية محققة من اجل <math>n=0</math> .</p> <p>* نفرض ان <math>1 \leq u_n \leq 2</math> محققة ونبرهن ان <math>1 \leq u_{n+1} \leq 2</math> محققة:</p> <p>الدالة <math>f</math> متزايدة معناه <math>1 \leq u_n \leq 2</math> يعطي لنا <math>f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)</math> أي <math>1 \leq u_{n+1} \leq 2</math> .</p> <p>• نستنتج انه من اجل كل عدد طبيعي <math>n</math> ان <math>1 \leq u_n \leq 2</math> .</p> <p>(2) <math>1 \leq v_n \leq 2</math> :</p> <p>* <math>n=0</math> نجد <math>v_0 = 2</math> أي <math>1 \leq v_0 \leq 2</math> اذن الخاصية محققة من اجل <math>n=0</math> .</p> <p>* نفرض ان <math>1 \leq v_n \leq 2</math> محققة ونبرهن ان <math>1 \leq v_{n+1} \leq 2</math> محققة:</p> <p>الدالة <math>f</math> متزايدة معناه <math>1 \leq v_n \leq 2</math> يعطي لنا <math>f(1) \leq f(v_n) \leq f(2)</math> أي <math>1 \leq v_{n+1} \leq 2</math> .</p> <p>• نستنتج انه من اجل كل عدد طبيعي <math>n</math> ان <math>1 \leq v_{n+1} \leq 2</math> .</p> <p>(3) <math>u_n \leq u_{n+1}</math> :</p> <p>* <math>n=0</math> نجد <math>u_0 = 1</math> و <math>u_1 = f(u_0) = \frac{3}{2}</math> ومنه <math>u_0 \leq u_1</math> اذن الخاصية محققة من اجل <math>n=0</math> .</p> <p>* نفرض ان <math>u_n \leq u_{n+1}</math> ونبرهن ان <math>u_{n+1} \leq u_{n+2}</math> :</p> <p>الدالة <math>f</math> متزايدة معناه <math>u_n \leq u_{n+1}</math> يعطي لنا <math>f(u_n) \leq f(u_{n+1})</math> أي <math>u_{n+1} \leq u_{n+2}</math> .</p> <p>• نستنتج انه من اجل كل عدد طبيعي <math>n</math> ان <math>u_n \leq u_{n+1}</math> .</p> <p>(4) <math>v_n \geq v_{n+1}</math> :</p> <p>* <math>n=0</math> نجد <math>v_0 = 2</math> و <math>v_1 = f(v_0) = \frac{5}{3}</math> ومنه <math>v_0 \geq v_1</math> اذن الخاصية محققة من اجل <math>n=0</math> .</p> |  |

\* نفرض ان  $v_n \geq v_{n+1}$  ونبرهن ان  $u_{n+1} \leq u_{n+2}$  :  
 الدالة  $f$  متزايدة معناه  $v_n \geq v_{n+1}$  يعطي لنا  $f(v_n) \geq f(v_{n+1})$  أي  $v_{n+1} \geq v_{n+2}$  .  
 • نستنتج انه من اجل كل عدد طبيعي  $n$  ان  $v_n \geq v_{n+1}$  .

(4) أ) لدينا :

2

$$v_{n+1} - u_{n+1} = f(v_n) - f(u_n) = \frac{2v_n + 1}{v_n + 1} - \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}$$

$$= \frac{(2v_n + 1)(u_n + 1) - (v_n + 1)(2u_n + 1)}{(v_n + 1)(u_n + 1)} = \frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)}$$

(ب) استنتاج انه من اجل كل عدد طبيعي  $n$  فان  $v_n - u_n \geq 0$  و  $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$  :

2

\* من اجل  $n=0$  نجد  $v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1 \geq 0$  اذن الخاصية محققة من اجل  $n=0$  .

\* نفرض ان  $v_n - u_n \geq 0$  ونبرهن ان  $v_{n+1} - u_{n+1} \geq 0$  :

لنا  $v_n - u_n \geq 0$  وبما ان الدالة  $f$  متزايدة نجد  $f(v_n) - f(u_n) \geq 0$  أي  $v_{n+1} - u_{n+1} \geq 0$  .

\* نستنتج انه من اجل كل عدد طبيعي  $n$  فان  $v_n - u_n \geq 0$  .

ولدينا  $1 \leq u_n \leq 2$  ومنه  $2 \leq u_n + 1 \leq 3$  ... (1) وأيضا  $1 \leq v_n \leq 2$  ومنه  $2 \leq v_n + 1 \leq 3$  ... (2)

2

بالجداء (1) في (2) نجد  $4 \leq (u_n + 1)(v_n + 1) \leq 9$  ومنه  $\frac{1}{9} \leq \frac{1}{(u_n + 1)(v_n + 1)} \leq \frac{1}{4}$  أي

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n) \text{ ومنه } \frac{1}{9}(v_n - u_n) \leq \frac{v_n - u_n}{(u_n + 1)(v_n + 1)} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$$

(ج) اثبات انه من اجل كل عدد طبيعي  $n$  فان  $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$  .

وجدنا سابقا ان  $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$  ومنه :

2

$$v_1 - u_1 \leq \frac{1}{4}(v_0 - u_0)$$

$$v_2 - u_2 \leq \frac{1}{4}(v_1 - u_1)$$

$$v_3 - u_3 \leq \frac{1}{4}(v_2 - u_2)$$

⋮  
⋮

$$v_n - u_n \leq \frac{1}{4}(v_{n-1} - u_{n-1})$$

$$v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ ومنه } v_n - u_n \leq \underbrace{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \dots \times \frac{1}{4}}_{n \text{ fois}} (v_0 - u_0) \text{ نجد}$$

(د) مما سبق وجدنا انه من اجل كل عدد طبيعي  $n$  فان  $u_n \leq u_{n+1}$  أي  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  ان المتتالية متزايدة

2

وأيضا  $v_n \geq v_{n+1}$  أي  $v_{n+1} - v_n \leq 0$  أي ان المتتالية  $(v_n)$  متناقصة وأيضا لنا  $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

ومنه  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$  أي  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$  ومنه فانهما متتاليتين متجاورتين أي لهما نفس النهاية  $L$  .

2

(هـ) تعيين القيمة المضبوطة للنهاية  $L$  : النهاية  $L$  تحقق  $\frac{2L+1}{L+1} = L$  ومنه نجد المعادلة  $L^2 - L - 1 = 0$

$$L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ وبحل هذه المعادلة وعلمنا انها موجبة لان جميع الحدود موجبة نجد}$$

الفرض الاول للثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الاول:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n \end{cases} \quad \text{من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n \text{ نعرف المتتالية } (U_n) \text{ كما يلي:}$$

1.

- أ. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  يكون:  $u_n > 0$  .  
ب. برهن أن المتتالية  $(U_n)$  متناقصة. ماذا تستنتج بالنسبة للمتتالية  $(U_n)$  ؟

2. نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$ :  $v_n = \frac{u_n}{n}$

- أ. برهن أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول  $v_1$  .  
ب. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  يكون  $u_n = \frac{n}{2^n}$

3. نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $[1; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = \ln x - x \ln 2$

- أ. عين نهاية الدالة  $f$  عند  $+\infty$  .  
ب. استنتج نهاية المتتالية  $(U_n)$  .

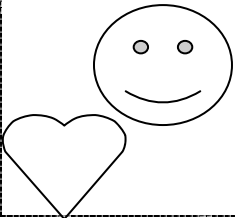
التمرين الثاني:

يحتوي صندوق على كرتين بيضاوين وثلاث كريات سوداء نسحب عشوائيا من هذا الصندوق كرتين على التوالي دون ارجاع الكرية المسحوبة الى الصندوق

✓ أحسب احتمال كل حادثة:

- (1) A: "كرتين من نفس اللون"  
(2) B: "سحب كرية بيضاء ثم كرية سوداء"  
(3) C: "سحب كرتين مختلفتين في اللون"

بالتوفيق - أساتذتكم -



## الفرض الأول للثلاثي الثاني

### التمرين الأول:

- يحتوي كيس على 09 كريات متماثلة لا نفرق بينها في اللمس ، منها 04 كريات بيضاء نرمز لها بالرمز  $B$  تحمل الأرقام 1، 2، 3، 3 و 05 كريات حمراء نرمز لها بالرمز  $R$  تحمل الأرقام 1، 2، 2، 3، 3 .  
نسحب عشوائيا من هذا الكيس كريتين على التوالي مع إرجاع الكرية المسحوبة قبل سحب الكرية الثانية .
- (1) شكل شجرة الاحتمالات التي تتمزج هذه الوضعية .
  - (2) أحسب احتمال كل من الحوادث التالية :  
 أ)  $\alpha$  : " الكريتان المسحوبتان بيضاوان " .  
 ب)  $\beta$  : " إحدى الكريتين المسحوبتين فقط حمراء " .  
 ج)  $\gamma$  : " لا يظهر الرقم 1 " .

### التمرين الثاني:

$$1 - (U_n) \text{ متتالية عددية حدودها موجبة معرفة على } N \text{ بـ } \begin{cases} U_0 = e \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n} \end{cases}$$

- أ) برهن بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي  $n$  أن :  $U_n > 1$  .
- ب) أدرس اتجاه تغير  $(U_n)$  و استنتج انها متقاربة .
- 2- لتكن المتتالية  $(V_n)$  المعرفة على  $N$  بـ :  $V_n = \ln(U_n)$  .

أ) اثبت أن  $(V_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الاول.

ب) أكتب  $V_n$  بدلالة  $n$  ثم  $U_n$  بدلالة  $n$  .

ج) احسب نهاية المتتالية  $(U_n)$  .

3- نضع :  $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$  و  $P_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n$  أحسب بدلالة  $n$   $S_n$  و  $P_n$  .

**التمرين:**

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة بحدها الأول  $u_0 = 2$

و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{2u_n}$

(1) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2u_n}$

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \geq 1$

(3) ادرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  ثم استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة .

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = \frac{2(u_n - 1)}{2u_n - 1}$

أ/ أثبت أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب اعطاء أساسها و حدها الأول  $v_0$  .

ب/ اكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  ، احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(5) احسب بدلالة  $n$  المجموع:  $S = u_0(v_0 - 1) + u_1(v_1 - 1) + \dots + u_n(v_n - 1)$

**واجب منزلي:**

(أ) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[0, 2]$  بـ :  $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$

ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $[0, 2]$  .

(ب)  $(u_n)$  متتالية معرفة بـ :  $u_0 = 2$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) أ/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $1 < u_n \leq 2$

ب/ ادرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  ، ثم استنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها .

(2) أ/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{3}(u_n - 1)$

ب/ استنتج أن من أجل كل  $n$  :  $0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$  ، ثم احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  مرة ثانية.

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  :  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $n < S_n \leq \frac{1}{2} \left[ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right]$  ثم احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$

**التمرين:**

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة بحدها الأول  $u_0 = 2$

و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{2u_n}$

(1) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2u_n}$

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \geq 1$

(3) ادرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  ثم استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة .

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = \frac{2(u_n - 1)}{2u_n - 1}$

أ/ أثبت أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب اعطاء أساسها و حدها الأول  $v_0$  .

ب/ اكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  ، احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(5) احسب بدلالة  $n$  المجموع:  $S = u_0(v_0 - 1) + u_1(v_1 - 1) + \dots + u_n(v_n - 1)$

**واجب منزلي:**

(أ) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[0, 2]$  بـ :  $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$

ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $[0, 2]$  .

(ب)  $(u_n)$  متتالية معرفة بـ :  $u_0 = 2$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) أ/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $1 < u_n \leq 2$

ب/ ادرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  ، ثم استنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها .

(2) أ/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{3}(u_n - 1)$

ب/ استنتج أن من أجل كل  $n$  :  $0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$  ، ثم احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  مرة ثانية.

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  :  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $n < S_n \leq \frac{1}{2} \left[ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right]$  ثم احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$

## فرض الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

تمرين 1 (10 ن):

( $u_n$ ) المتتالية العددية المعرفة بعدها الاول  $u_0 = \frac{1}{2}$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{u_n}{3-2u_n}$

(1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 < u_n < 1$ .

ب- بين أن ( $u_n$ ) متتالية متناقصة تماما .

ج- استنتج أن ( $u_n$ ) متقاربة .

(2) نعتبر المتتالية ( $v_n$ ) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ :  $v_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$ .

أ- بين أن ( $v_n$ ) متتالية هندسية أساسها  $q = \frac{1}{3}$  وأحسب حدها الاول  $v_0$ .

ب- أكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = \frac{1}{1+3^n}$ .

ج- احسب نهاية المتتالية ( $u_n$ ) .

(3) أحسب المجموع  $S_n$  بدلالة  $n$  حيث :  $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$ .

تمرين 2 (10 ن):

نعتبر صندوقين متماثلين  $U_1$  و  $U_2$  بحيث :

$U_1$  يحتوي على خمس كرات حمراء تحمل الارقام 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، 0 وثلاث كرات خضراء تحمل الارقام 1 ، 1 ، 0

$U_2$  يحتوي على ثلاث كرات حمراء تحمل الارقام 1 ، 1 ، 2 وكرتين خضراوين تحملان الرقمين 1 ، 0 .

( كل الكرات لا نفرق بينها عند اللمس ) .

I ( نختار عشوائيا أحد الصندوقين فإذا كان  $U_1$  نسحب منه كرتين على التوالي بدون ارجاع وإذا كان  $U_2$  نسحب منه كرتين على التوالي بالارجاع .

1- أحسب احتمال الحوادث الآتية :

A " سحب كرتين من نفس اللون "

B " سحب كرتين تحملان نفس الرقم "

C " سحب كرة حمراء على الأقل "

2- هل الحادثان A و B مستقلتان ؟ علل .

3- اذا علمت ان الكرتين المسحوبتين من لونين مختلفين ، فما احتمال ان تكون من الصندوق  $U_1$  ؟

II ( نأخذ الكرات الموجودة في الصندوقين  $U_1$  و  $U_2$  ونضعها جميعها في صندوق واحد  $U_3$  . نسحب عشوائيا من الصندوق  $U_3$  كرتين في آن واحد. وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة مجموع الارقام التي تحملها الكرتين المسحوبتين

1- عين قيم المتغير العشوائي X .

2- عرف قانون الاحتمال لـ X .

بالتوفيق .

## الاجابة النموذجية :

**تعريف 1:**

1- البرهان بالتراجع على انه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فان :  $0 < u_n < 1$  :

من أجل  $n=0$  لنا :  $0 < u_0 = \frac{1}{2} < 1$  : محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من اجل  $n$  ونبرهن على صحتها من اجل  $n+1$  ( أي نبرهن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  )  
 $(0 < u_{n+1} < 1)$  .

لنا من اجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 < u_n < 1$  تكافئ :  $-2 < -2u_n < 0$  :  $1 < 3 - 2u_n < 3$  :

ومنه :  $0 < \frac{u_n}{3-2u_n} < 1$  أي :  $0 < u_{n+1} < 1$  .

بما ان الخاصية صحيحة من اجل  $n+1$  فهي صحيحة من اجل  $n$  وذلك حسب البرهان بالتراجع .

( ب ) بيان ان  $(u_n)$  متناقصة تماما على  $\mathbb{Q}$  :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{3-2u_n} - u_n = \frac{u_n - u_n(3-2u_n)}{3-2u_n} = \frac{u_n - 3u_n + 2u_n^2}{3-2u_n} = \frac{2u_n^2 - 2u_n}{3-2u_n} = \frac{2u_n(u_n - 1)}{3-2u_n}$$

لنا :  $0 < u_n < 1$  أي :  $2u_n > 0$  و  $-1 < u_n - 1 < 0$  أي :  $u_n - 1 < 0$  ولنا :  $1 < 3 - 2u_n < 3$  أي :  $3 - 2u_n > 0$  :

ومنه :  $u_{n+1} - u_n < 0$  أي المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما على  $\mathbb{Q}$  .

( ج ) استنتاج ان  $(u_n)$  متقاربة : لنا  $(u_n)$  متناقصة تماما على  $\mathbb{Q}$  ومحدودة من الاسفل بالعدد 1 فهي متقاربة .

2- أ - بيان ان  $(v_n)$  هندسية اساسها  $q = \frac{1}{3}$  وحساب حدها الأول :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{u_n}{3-2u_n}}{\frac{u_n}{3-2u_n} - 1} = \frac{\frac{u_n}{3-2u_n}}{\frac{u_n - (3-2u_n)}{3-2u_n}} = \frac{u_n}{3u_n - 3} = \frac{u_n}{3(u_n - 1)} = \frac{1}{3} \times \frac{u_n}{u_n - 1} = \frac{1}{3} v_n$$

$$\text{حساب الحد الأول : } v_0 = \frac{u_0}{u_0 - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = -1$$

$$\text{ب - كتابة عبارة } v_n \text{ بدلالة } n : v_n = v_0 \times q^n = -1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

لدينا :  $v_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$  تكافئ :  $v_n(u_n - 1) = u_n$  تكافئ :  $v_n u_n - v_n = u_n$  تكافئ :  $v_n u_n - u_n = v_n$  تكافئ :

$$u_n = \frac{-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{-\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1} = \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n} + 1} = \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1+3^n}{3^n}} = \frac{1}{3^n} \times \frac{3^n}{1+3^n} = \frac{1}{1+3^n} \text{ تكافئ : } u_n = \frac{v_n}{v_n - 1} \text{ تكافئ : } u_n(v_n - 1) = v_n$$

ج - حساب نهاية المتتالية  $(u_n)$  :

$$\left( \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty \text{ لان } \right) \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+3^n} = 0$$

3- حساب المجموع  $S_n$  :

$$S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} = \frac{1}{1+3^0} + \frac{1}{1+3^1} + \dots + \frac{1}{1+3^n} = 1+3^0 + 1+3^1 + \dots + 1+3^n = 1+1+\dots+1+3^0+3^1+\dots+3^n$$

$$= 1 \times (n-0+1) + 3^0 \times \frac{3^{n-0+1}-1}{3-1} = n+1 + \frac{3^{n+1}-1}{2} = n+1 + \frac{1}{2} \times (3^{n+1}-1)$$

تمرين 2 :

( I )

(1) حساب احتمال الحوادث :

$$p(A) = p(u_1 \cap A) + p(u_2 \cap A)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{A_5^2 + A_3^2}{A_8^2} + \frac{1}{2} \times \frac{3^2 + 2^2}{5^2} = \frac{689}{1400}$$

$$p(B) = p(u_1 \cap B) + p(u_2 \cap B)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{A_5^2 + A_2^2}{A_8^2} + \frac{1}{2} \times \frac{3^2}{5^2} = \frac{527}{1400}$$

$$p(C) = p(u_1 \cap C) + p(u_2 \cap C)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{A_5^1 \times A_3^1 \times 2 + A_5^2}{A_8^2} + \frac{1}{2} \times \frac{3^2 + 3^1 \times 2^1 \times 2}{5^2} = \frac{1213}{1400}$$

(2) الحدثان A و B غير مستقلان لان :

$$p(A \cap B) = p(u_1 \cap A \cap B) + p(u_2 \cap A \cap B)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{A_3^2 + A_2^2}{A_8^2} + \frac{1}{2} \times \frac{2^2}{5^2} = \frac{53}{350}$$

لنا :  $p(A) \times p(B) = \frac{689}{1400} \times \frac{527}{1400} \approx 0.18$  أي  $p(A) \times p(B) \neq p(A \cap B)$  حساب احتمال ان تكون الكرتين المسحوبتين من  $U_1$  علما انهما مختلفتان في اللون .

$$p_{\bar{A}}(U_1) = \frac{P(U_1 \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{A_5^1 \times A_3^1 \times 2}{A_8^2}}{1 - P(A)} = \frac{\frac{15}{56}}{1 - \frac{689}{1400}} = \frac{\frac{17}{56}}{\frac{711}{1400}} = \frac{425}{711}$$

( II )

1- قيم المتغير العشوائي : 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4

2- قانون الاحتمال للمتغير العشوائي :

$$P(X=0) = \frac{C_3^2}{C_{13}^2} = \frac{1}{26}$$

$$P(X=1) = \frac{C_3^1 \times C_8^1}{C_{13}^2} = \frac{24}{78} = \frac{4}{13}$$

$$P(X=2) = \frac{C_8^2 + C_3^1 \times C_2^1}{C_{13}^2} = \frac{17}{39}$$

$$P(X=3) = \frac{C_8^1 \times C_2^1}{C_{13}^2} = \frac{8}{39}$$

$$P(X=4) = \frac{C_2^2}{C_{13}^2} = \frac{1}{78}$$

|              |                |                |                 |                |                |
|--------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|----------------|
| $X = x_i$    | 0              | 1              | 2               | 3              | 4              |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{26}$ | $\frac{4}{13}$ | $\frac{17}{39}$ | $\frac{8}{39}$ | $\frac{1}{78}$ |

## فرض الفصل الثاني في مادة الرياضيات

### التمرين الأول:

- يحتوي صندوق على 6 كريات لا نفرق بينها باللمس ، و تحمل الأرقام  $-2$  ،  $-1$  ،  $0$  ،  $1$  ،  $1$  و  $2$  .  
نسحب عشوائيا و في آن واحد 3 كريات من هذا الصندوق .  
لتكن الحوادث  $A$  ،  $B$  و  $C$  :  
 $A$  : " من بين الكريات المسحوبة توجد على الأقل كرية تحمل الرقم 1 " .  
 $B$  : " مجموع الأعداد المكتوبة على الكريات المسحوبة معدوم " .  
 $C$  : " جداء الأعداد المكتوبة على الكريات المسحوبة يساوي 2 " .  
(1) - ما هو عدد الحالات الممكنة .  
(2) - أحسب احتمال الحادثة  $A$  .  
(3) - بين أن  $P(B) = \frac{1}{5}$  و  $P(C) = \frac{3}{20}$  .  
(4) - نعتبر المتغير العشوائي  $X$  الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات التي تحمل الرقم 1 .  
أ - عين قيم المتغير العشوائي  $X$  .  
ب - عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي  $X$  .

### التمرين الثاني:

لتكن المتتالية  $(U_n)$  المعرفة بحددها الأول  $U_0$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بالعلاقة التراجعية :

$$U_{n+1} = \frac{7U_n + 2}{U_n + 8}$$

- (1) - عين قيم  $U_0$  التي من أجلها تكون المتتالية  $(U_n)$  ثابتة .  
(2) - نفرض أن :  $U_0 = 0$  .  
أ - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :  $0 \leq U_n < 1$  .  
ب - أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(U_n)$  .  
(3) - لتكن المتتالية العددية  $V_n$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  كمايلي :

$$V_n = \frac{U_n + 2}{U_n - 1}$$

- أ - أثبت أن  $(V_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
- ب - عبر عن  $U_n$  بدلالة  $n$  ، ثم احسب نهاية المتتالية  $(U_n)$  لما يؤول  $n$  إلى  $+\infty$  .
- ج - أحسب كل من  $S_n$  و  $P_n$  حيث :

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$$

$$P_n = V_0 \times V_1 \times \dots \times V_n$$

بالتوفيق

## الغرض الثاني في مادة الرياضيات

الهدف: ساعتان

المستوى: الثالثة علمي

## التمرين الأول : (7 نقاط)

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل :

$$1. f \text{ دالة معرفة بالعلاقة } f(x) = x + 1 + 2 [\ln x - \ln(x - 1)]$$

(أ) مجموعة تعريف الدالة  $f$  هي :  $]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$ 

$$(ب) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

(ج) منحنى الدالة  $f$  يقبل المستقيم ذو المعادلة  $y = x + 1$  كمستقيم مقارب مائل بجوار  $+\infty$ 

$$2. h \text{ دالة معرفة على المجال } ]0; +\infty[ \text{ كيلي : } h(x) = x + \frac{2 \ln x}{x}$$

(أ) الدالة  $h$  قابلة للإشتقاق على  $]0; +\infty[$  وإشارة  $h'(x)$  هي من عكس إشارة  $g(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$ (ب) على المجال  $]0; +\infty[$  إشارة  $g'(x)$  هي من إشارة  $x^2 - 1$ (ج) على المجال  $]0; +\infty[$  الدالة  $g$  تقبل قيمة حدية عظمى تساوي 3(د) الدالة  $h$  متناقصة تماماً على المجال  $]0; +\infty[$ 

## التمرين الثاني : (7 نقاط)

لتكن المتتالية العددية  $(U_n)$  المعرفة بحددها الأول  $U_1 = \frac{1}{2}$  ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $U_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right) U_n$ 1. احسب  $U_2, U_3, U_4$ 2. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم :  $U_n > 0$ 3. ادرس إتجاه تغبر المتتالية  $(U_n)$  واستنتج أنها متقاربة4. احسب نهاية المتتالية  $(U_n)$ من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم, نضع  $V_n = \frac{U_n}{n}$ 5. اثبت أن  $(V_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحددها الأول  $V_1$ 6. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $U_n = \frac{n}{2^n}$ نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $]1; +\infty[$  بـ :  $f(x) = \ln(x) - x \ln 2$ 7. عين نهاية الدالة  $f$  عند  $+\infty$ 8. استنتج نهاية المتتالية  $(U_n)$

### التمرين الثالث : (6 نقاط)

كيس به خمس كريات حمراء تحمل الأرقام 2, 2, 2, 2, 3 وأربع كريات خضراء تحمل الأرقام 3, 3, 3, 3, 2- وكرية زرقاء تحمل الرقم 1- , نسحب بطريقة عشوائية كرتين من الكيس في آن واحد .  
نعتبر الحوادث التالية :

- A "الحصول على كرتين من نفس اللون "
- B "الحصول على كرتين من لونين مختلفين"
- C "الحصول على كرتين تحملان عددين جداءهما سالب "

1. عين عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة

2. احسب  $P(A)$  ,  $P(B)$  و  $P(C)$   
نعرف من أجل كل سحبة من السحبات السابقة المتغير العشوائي  $X$  كمايلي :  
- اذا سحبنا كرتين تحملان نفس العدد نرفق له العدد نفسه  
- اذا سحبنا كرتين تحملان عددين مختلفين نرفق العدد الأكبر

3. عين قيم المتغير العشوائي  $X$

4. عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  , ثم احسب أمله الرياضي