حل التمرين الأول (الموضوع الأول – علوم تجريبية - بكالوريا 2015 –)MEBARKI2016

✓ نعتبر النقط : $A(2;1;0)$ ، $B(1;2;2)$ ، $C(3;3;1)$ و $D(1;1;4)$

1) التحقق من أن : A ، B و C تعين مستوي و أن $x-y+z-1=0$ معادلة ديكارتية له :

✓ نثبت أن: A ، B و C ليست في استقامية وذلك بعدم الارتباط الخطي لشعاعين مؤلفين من A ، B و C

وليكن: $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ لدينا: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-2\\2-1\\2-0\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3-2\\3-1\\1-0\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

نلاحظ أن : $\frac{1}{2}\neq\frac{-1}{1}$ منه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

ومنه A ، B و C ليست في استقامية أي A ، B و C تعين مستوي .

هل A ، B و C تنتمي للمستوي الذي معادلته الديكارتية $x-y+z-1=0$ ؟

لدينا : $(2)-(1)+(0)-1=0$ ، $(1)-(2)+(2)-1=0$ ، $(3)-(3)+(1)-1=0$

ومنه A ، B و C تنتمي للمستوي الذي معادلته الديكارتية $x-y+z-1=0$

إذن : **معادلة** (ABC) هي $x-y+z-1=0$

2) إثبات أن المثلث ABC متقايس الأضلاع : نقوم بحساب أطوال أضلاعه AB و AC و BC :

لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ ومنه : $AB=\sqrt{(-1)^2+(1)^2+(2)^2}=\sqrt{6}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ ومنه $AC=\sqrt{(1)^2+(2)^2+(1)^2}=\sqrt{6}$

و $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}1-3\\2-3\\2-1\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ منه : $CB=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(1)^2}=\sqrt{6}$ ومنه $AB=AC=CB=\sqrt{6}$

إذن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

التحقق من أن مساحته هي $\frac{3\sqrt{3}}{2}$:

بما أن المثلث ABC متقايس الأضلاع فإن أقياس زواياه هي $\frac{\pi}{3}$ إذن :

$$S_{ABC}=\frac{AB\times AC\times\sin B\hat{A}C}{2}=\frac{\sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\sin\frac{\pi}{3}}{2}=\frac{6\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}ua$$

أي : $S_{ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}ua$

3) تعين تمثيل وسيطي لـ (Δ) العمودي على المستوى (ABC) و الذي يشمل النقطة D :

بما أن (Δ) عمودي على المستوي (ABC) فإن الشعاع $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ الناظمي لـ(ABC) هو شعاع توجيه لـ (Δ)

إذن (Δ) هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث : $\overrightarrow{DM}=t\vec{n}$ حيث $t\in\Re$ أي $(\Delta);\begin{cases}x=t+1\\y=-t+1\\z=t+4\end{cases}$ حيث $t\in\Re$

4) E هي المسقط العمودي لـ D على (ABC) :

أ) تعيين إحداثيات E ثم إيجاد $d(D;(ABC))$:

بما أن (Δ) عمودي على المستوي (ABC) و يشمل النقطة D فإن E هي نقطة تقاطع (ABC) و (Δ) .

إيجاد إحداثيات نقطة تقاطع (Δ) و (ABC) : لدينا $(\Delta);\begin{cases}x=t+1\\y=-t+1\\z=t+4\end{cases}$ و $(ABC): x-y+z-1=0$

ومنه : $(t+1)-(-t+1)+(t+4)-1=0$ أي : $3t+3=0$ إذن $t=-1$ إذن إحداثيات E هي $(\Delta);\begin{cases}x=(-1)+1=0\\y=-(-1)+1=2\\z=(-1)+4=3\end{cases}$

أي : $E(0;2;3)$ و $d(D;(ABC))=DE=\sqrt{(0-1)^2+(2-1)^2+(3-4)^2}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$ أي $d(D;(ABC))=\sqrt{3}$

ب) تعيين مركزي سطحي الكرتين اللذين يمسان (ABC) في النقطة E . ونصف قطر كل منهما $\sqrt{3}$:

نفرض $\Omega(\alpha.\beta.\delta)$ هو مركز سطح الكرة الذي يمس (ABC) في النقطة E ونصف قطرها $\sqrt{3}$:

ومنه : $d(\Omega;(ABC))=\sqrt{3}$ و $\overrightarrow{\Omega E}=k\vec{n}$ حيث $k\in\Re$

$\overrightarrow{\Omega E}=k\vec{n}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=k\\\beta=-k+2\\\delta=k+3\end{cases}$ و $d(\Omega;(ABC))=\sqrt{3}$ معناه $\dfrac{|\alpha-\beta+\delta-1|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(1)^2}}=\sqrt{3}$ وعليه $\dfrac{|\alpha-\beta+\delta-1|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

ومنه : $|\alpha-\beta+\delta-1|=3$ وعليه $|(k)-(-k+2)+(k+3)-1|=3$ ومنه $|3k|=3\Leftarrow 3|k|=3\Leftarrow|k|=1\Leftarrow\begin{cases}k=1\\k=-1\end{cases}$

لما $k=1$ فإن $\begin{cases}\alpha=(1)=1\\\beta=-(1)+2=1\\\delta=(1)+3=4\end{cases}$ أي إحداثيات Ω هي $(1;1;4)$ و لما $k=-1$ فإن $\begin{cases}\alpha=(-1)=-1\\\beta=-(-1)+2=3\\\delta=(-1)+3=2\end{cases}$ أي إحداثيات Ω هي $(-13;2)$

إحداثيات مركزي سطحي الكرتين اللذين يمسان (ABC) في النقطة E ونصف قطر كل منهما $\sqrt{3}$: $(1;1;4)$ و $(-13;2)$.

5) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$:

$V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\times S_{ABC}\times d(D;(ABC))=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=\dfrac{3\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{3\times 2}=\dfrac{3\times 3}{3\times 2}=\dfrac{3}{2}uv$ ومنه : $V_{ABCD}=\dfrac{3}{2}uv$

حل التمرين الأول (الموضوع الثاني – علوم تجريبية - بكالوريا 2015 –) MEBAKI2016

✓ نعتبر النقط : $A(2;4;1)$ ، $B(0;4;-3)$ ، $C(3;1;-3)$ و $D(1;0;-2)$.

الإجابة بصحيح أو خطأ لما يلي :

1) A ، B و C ليست في استقامية : (صحيح)

لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-2\\4-4\\-3-1\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3-2\\1-4\\-3-1\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix}$.

نلاحظ أن : $\frac{0}{-3}\neq\frac{-2}{1}$ منه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه A ، B و C ليست في استقامية

2) $2x+2y-z-11=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) : (صحيح)

بما أن A ، B و C ليست في استقامية عن A ، B و C تشكل مستوي .

لدينا : $2(2)+2(4)-(1)-11=4+8-1-11=0$ و $2(0)+2(4)-(-3)-11=0+8+3-11=0$

و $2(3)+2(1)-(-3)-11=6+2+3-11=0$ ومنه A ، B و C نقط من المستوي الذي معادلته $2x+2y-z-11=0$

إذن $2x+2y-z-11=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

3) النقطة $E(3;2;-1)$ هي المسقط العمودي لـ D على (ABC) : (خاطئة)

أ) هل $E(3;2;-1)\in(ABC)$ ؟ لدينا $2(3)+2(2)-(-1)-11=6+4+1-11=0$ أي $E(3;2;-1)\in(ABC)$.

ب) هل $\overrightarrow{DE}$ مرتبط خطيا مع الشعاع $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ الناظمي لـ(ABC) ؟

لدينا $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}3-1\\2-0\\-1+2\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$. لدينا $\frac{-1}{1}\neq\frac{2}{2}=\frac{2}{2}$ ومنه $\overrightarrow{DE}$ غير مرتبط خطيا مع $\vec{n}$ الناظمي لـ(ABC)

إذن النقطة $E(3;2;-1)$ ليست هي المسقط العمودي لـ D على (ABC) .

4) المستقيمان (AB) و (CD) من نفس المستوى : (خاطئة)

إذا كانت $D\in(ABC)$ فإن (AB) و (CD) من نفس المستوي

و إذا كانت $D\notin(ABC)$ فإن (AB) و (CD) ليسا من نفس المستوي .

لدينا : $(ABC):2x+2y-z-11=0$ و $2(1)+2(0)-(-2)-11=2+2-11=-7\neq0$ ومنه $D\notin(ABC)$

وعليه (AB) و (CD) ليسا من نفس المستوي .

5) $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t-1 \;;t\in\Re \\ z=-t-1 \end{cases}$ **تمثيل وسيطي لـ (CD) : (صحيح)**

نتأكد من انتماء C و D للمستقيم الذي تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t-1 \;;t\in\Re \\ z=-t-1 \end{cases}$.

لدينا : $\begin{cases} 3=2t-1 \\ 1=t-1 \\ -3=-t-1 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} 2t=4 \\ t=2 \\ -t=-2 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} t=2 \\ t=2 \\ t=2 \end{cases}$ و $\begin{cases} 1=2t-1 \\ 0=t-1 \\ -2=-t-1 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} 2t=2 \\ t=1 \\ -t=-1 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} t=1 \\ t=1 \\ t=1 \end{cases}$

ومنه C و D ينتميان للمستقيم الذي تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t-1 \;;t\in\Re \\ z=-t-1 \end{cases}$. إذن $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t-1 \;;t\in\Re \\ z=-t-1 \end{cases}$ تمثيل وسيطي لـ (CD)

6) يوجد عددان حقيقيان α و β حيث النقطة $I\left(\frac{3}{5};4;-\frac{9}{5}\right)$ مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$.

بما أن I مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$ فإن : $x_I=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}$ ، $y_I=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}$ ، $z_I=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}$

أي $\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}=\dfrac{3}{5}$ ، $\dfrac{4\alpha+4\beta}{\alpha+\beta}=4$ ، $\dfrac{\alpha-3\beta}{\alpha+\beta}=-\dfrac{9}{5}$ ومنه $\begin{cases} 10\alpha=3\alpha+3\beta \\ 4\alpha+4\beta=4\alpha+4\beta \\ -5\alpha+15\beta=9\alpha+9\beta \end{cases}$ أي $\begin{cases} 7\alpha-3\beta=0............(1) \\ -14\alpha+6\beta=0.......(2) \end{cases}$

بضرب المعادلة (1) في العدد -2 نتحصل على المعادلة (2)

ومنه حلول الجملة $\begin{cases} 7\alpha-3\beta=0 \\ -14\alpha+6\beta=0 \end{cases}$ هي حلول المعادلة $7\alpha-3\beta=0$ أي $\alpha=\frac{3}{7}\beta$.

ومنه توجد عدة أعداد حقيقية α و β حيث النقطة $I\left(\frac{3}{5};4;-\frac{9}{5}\right)$ مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$ حيث $\alpha=\frac{3}{7}\beta$ $(\beta\neq 0)$

توجد طريقة ثانية : هي إثبات أن A ، B و I في استقامية. لأنه توجد خاصية :

G مرجح الجملة : $\{(A,\alpha),(B,\beta)\} \Leftrightarrow G\in(AB)$ (استقامة مرجح نقطتين مع النقطتين)

حل التمرين الثاني (الموضوع الأول – بكالوريا 2015 – تقني رياضي) MEBARKI2016

✓ نعتبر النقط : $A(1;2;2)$ ، $B(2;0;2)$ ، $C(-2;3;7)$

و (P) المستوي المعرف بالتمثيل : $\begin{cases} x=2+\beta \\ y=-1-3\alpha-\beta;(\alpha\in\Re;\beta\in\Re) \\ z=-\alpha \end{cases}$

1) أ) تبيين أن A ، B و C تعين مستوي

لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-1\\0-2\\2-2\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2-1\\3-2\\7-2\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\1\\5\end{pmatrix}$.

نلاحظ أن : $\frac{-2}{1}\neq\frac{1}{-3}$ منه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

ومنه A ، B و C ليست في استقامية أي A ، B و C تعين مستوي.

ب) التحقق من أن $\vec{n}(2;1;1)$ ناظمي للمستوى (ABC) : هل $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$ ؟

لدينا $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=(2)(1)+(1)(-2)+(1)(0)=2-2+0=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=(2)(-3)+(1)(1)+(1)(5)=-6+1+5=0$

و عليه $\vec{n}(2;1;1)$ ناظمي للمستوي (ABC) .

كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

لدينا $\vec{n}(2;1;1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ومنه $(ABC);2x+y+z+d=0$

وبما أن $B\in(ABC)$ فإن $2(2)+(0)+(2)+d=0$ أي $6+d=0$ إذن $d=-6$ وعليه $(ABC);2x+y+z-6=0$

2) أ) تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (P) :

بما أن $\begin{cases} x=2+\beta \\ y=-1-3\alpha-\beta \\ z=-\alpha \end{cases}$ فإن : $\begin{cases} \beta=x-2 \\ y=-1-3\alpha-\beta \\ \alpha=-z \end{cases}$

لدينا $y=-1-3\alpha-\beta=-1-3(-z)-(x-2)=-1+3z-x+2=-x+3z+1$ ومنه $(P);x+y-3z-1=0$

التحقق من أن (ABC) و (P) متعامدان :

لدينا : $\vec{n}(2;1;1)$ و $\vec{n}'(1;1;-3)$ الأشعة الناظمية لـ (ABC) و (P) على الترتيب

هل $\vec{n}.\vec{n}'=0$ ؟ لدينا $\vec{n}.\vec{n}'=(2)(1)+(1)(1)+(1)(-3)=2+1-3=0$ وعليه (ABC) و (P) متعامدان .

ب) تبيين أن تقاطع المستويين (ABC) و (P) هو المستقيم (Δ) حيث $(\Delta);\begin{cases}x=5+4t\\y=-4-7t\\z=-t\end{cases}$:

بما أن (ABC) و (P) متعامدان فإنهما متقاطعان وفق مستقيم . هل $(\Delta)\subset(ABC)$ و $(\Delta)\subset(P)$ ؟

لدينا $2(5+4t)+(-4-7t)+(-t)-6=10+8t-4-7t-t-6=0$ ومنه $(\Delta)\subset(ABC)$.

و لدينا $(5+4t)+(-4-7t)-3(-t)-1=5+4t-4-7t+3t-1=0$ و منه $(\Delta)\subset(P)$

إذن أن تقاطع المستويين (ABC) و (P) هو المستقيم (Δ) حيث $(\Delta);\begin{cases}x=5+4t\\y=-4-7t\\z=-t\end{cases}$.

3) **أ) تعيين إحداثيات H مرجح الجملة : $\{(A;1);(B;1);(C;-1)\}$**

لدينا إحداثيات H هي $H(5;-1;-3)$ لأن :

$$x_H=\frac{x_A+x_B-x_C}{1+1-1}=\frac{1+2+2}{1}=5 \text{ ، } y_H=\frac{y_A+y_B-y_C}{1+1-1}=\frac{2+0-3}{1}=-1 \text{ ، } z_H=\frac{z_A+z_B-z_C}{1+1-1}=\frac{2+2-7}{1}=-3$$

ب) إيجاد المسافة بين H و (Δ) :

نفرض $d=d(H;(\Delta))$ و $d_1=d(H;(P))$ و $d_2=d(H;(ABC))$

بما أن (ABC) و (P) متعامدان و فإنهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ) فإنه حسب نظرية فيثاغورس : $d^2=d_1^2+d_2^2$.

لدينا $d_1=d(H;(P))=\frac{|5+(-1)-3(-3)-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-3)^2}}=\frac{12}{\sqrt{11}}$ و $d_2=d(H;(ABC))=\frac{|2(5)+(-1)+(-3)-6|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{0}{\sqrt{6}}=0$

$d^2=d_1^2+d_2^2=\left(\frac{12}{\sqrt{11}}\right)^2+(0)^2=\frac{144}{11}+0=\frac{144}{11}$ وعليه $d=\sqrt{\frac{144}{11}}=\frac{12}{\sqrt{11}}=\frac{12\sqrt{11}}{11}$

4) (P') مجموعة النقط M من الفضاء حيث : $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}).\vec{u}=0$ / $\vec{u}$ شعاع توجيه (Δ) .

أ) تبيين أن (P') مستوى يطلب تعيين عناصره المميزة و إيجاد معادلة ديكارتية له :

نعلم أن H مرجح الجملة : $\{(A;1);(B;1);(C;-1)\}$ ومنه $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=(1+1-1)\overrightarrow{MH}=2\overrightarrow{MH}$

ومنه $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}).\vec{u}=0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MH}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{u}=0$

إذن (P') مجموعة النقط M من الفضاء التي تشمل النقطة H و $\vec{u}$ شعاع ناظمي له .

بما أن $\vec{u}(4;-7;-1)$ شعاع ناظمي لـ (P') فإن : $(P');4x-7y-z+d=0$

$H\in(P')$ ومنه $4(5)-7(-1)-(-3)+d=0$ أي $20+7+3+d=0$ ومنه $d=-30$ أي $(P');4x-7y-z-30=0$

ب) تبيين أن المستويات (P') و (ABC) و (P) تتقاطع في نقطة وحيدة E .

نعلم أن تقاطع المستويين (ABC) و (P) هو المستقيم (Δ) وعليه تقاطع أن المستويات (P') و (ABC) و (P) هو تقاطع (Δ) و (P') .

إيجاد نقطة تقاطع (Δ) و (P') :

لدينا $4(5+4t)-7(-4-7t)-(-t)-30=0$

ومنه $20+16t+28+49t+t-30=0$ أي $66t=-18$ ومنه $t=-\frac{18}{66}=-\frac{3}{11}$

أي إحداثيات نقطة تقاطع (Δ) و (P') هي
$$\begin{cases} x=5+4\left(-\frac{3}{11}\right)=\frac{43}{11} \\ y=-4-7\left(-\frac{3}{11}\right)=-\frac{23}{22} \\ z=-\left(-\frac{3}{11}\right)=\frac{3}{11} \end{cases}$$

ج) إيجاد المسافة بين H و (Δ) بطريقة أخرى :

$$d=d(H;(\Delta))=HE=\sqrt{\left(\frac{43}{11}-5\right)^2+\left(-\frac{23}{11}+1\right)^2+\left(\frac{3}{11}+3\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{12}{11}\right)^2+\left(-\frac{12}{11}\right)^2+\left(\frac{36}{11}\right)^2}=\sqrt{\frac{144}{121}+\frac{144}{121}+\frac{1296}{121}}$$

ومنه : $d=d(H;(\Delta))=\sqrt{\frac{1584}{121}}=\frac{\sqrt{1584}}{\sqrt{121}}=\frac{12\sqrt{11}}{11}$

حل التمرين الأول : (الموضوع الثاني – بكالوريا 2015 - تقني رياضي) MEBAKI2016

✓ نعتبر النقط : $A(2;3;1)$ ، $B(1;2;-1)$ و (D) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي : $(t\in\Re)$; $\begin{cases} x=1 \\ y=1-t \\ z=3+2t \end{cases}$.

1) أ) كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}(1;2;-1)$ توجيه له.

بما أن (Δ) مستقيم يشمل النقطة A و $\vec{u}(1;2;-2)$ توجيه له فإن : $(\Delta);\begin{cases} x=2+k \\ y=3+2k;(k\in\Re) \\ z=1-2k \end{cases}$.

ب) تعيين إحداثيات النقطة C نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D) :

لدينا : $\vec{v}(0;-1;2)$ و $\vec{u}(1;2;-2)$ شعاعي توجيه كل من (D) و (Δ) على الترتيب

لدينا $\frac{-1}{2}\neq\frac{0}{1}$ ومنه (D) و (Δ) غير متوازيين أي متقاطعين أو ليسا من نفس المستوي

الآن نقوم بحل الجملة : $\begin{cases}1=2+k\\1-t=3+2k\\3+2t=1-2k\end{cases}$ أي $\begin{cases}k=-1..........(1)\\-2k-t=2....(2)\\2k+2t=-2.........(3)\end{cases}$

بتعويض k بـ -1 في المعادلتين (2) و (3) نجد $\begin{cases}-2(-1)-t=2....(2)\\2(-1)+2t=-2.........(3)\end{cases}$ وعليه $\begin{cases}t=0\\t=0\end{cases}$

وعليه (D) و (Δ) يتقاطعان في نقطة C إحداثياتها $\begin{cases}x=1\\y=1-t=1-0=1\\z=3+2t=3+2(0)=3\end{cases}$ أي $C(1;1;3)$

2) (P) المستوي المعين بالمستقيمين (D) و (Δ).

تبين أن : $\vec{n}(2;-2;-1)$ شعاع ناظمي لـ (P) :

بما أن (P) المستوي المعين بالمستقيمين (D) و (Δ) فإن $\vec{n}(2;-2;-1)$ شعاع ناظمي لـ (P) لما $\vec{u}.\vec{n}=0$ و $\vec{v}.\vec{n}=0$

لدينا $\vec{u}.\vec{n}=(1)(2)+(2)(-2)+(-2)(-1)=2-4+2=0$ و $\vec{v}.\vec{n}=(0)(2)+(-1)(-2)+(2)(-1)=0+2-2=0$

منه $\vec{n}(2;-2;-1)$ شعاع ناظمي لـ (P)

المعادلة الديكارتية لـ (P)

(P) المستوي المعين بالمستقيمين (D) و (Δ) معناه يشمل النقطة C و $\vec{n}(2;-2;-1)$ ناظمي له

بما أن $\vec{n}(2;-2;-1)$ ناظمي لـ (P) فإن : $(P);2x-2y-z+d=0$

لدينا $C\in(P)$ معناه $2(1)-2(1)-(3)+d=0$ أي $d=3$ و منه $(P);2x-2y-z+3=0$

3) **أ) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل النقطة B و يعامد المستقيم (Δ) :**

بما أن المستوي (Q) يعامد المستقيم (Δ) فإن $\vec{u}(1;2;-2)$ ناظمي لـ (Q) معناه $(Q);x+2y-2z+d=0$

لدينا $B\in(Q)$ معناه $(1)+2(2)-2(-2)+d=0$ أي $d=-9$ ومنه $(Q);x+2y-2z-9=0$

ب) تعيين إحداثيات النقطة E المسقط العمودي لـ B على المستقيم (Δ) :

بما أن المستوي (Q) يشمل النقطة B و يعامد المستقيم (Δ) فإن E هي نقطة تقاطع (Δ) و (Q)

لدينا : $(2+k)+2(3+2k)-2(1-2k)-9=0$ أي $2+k+6+4k-2+4k-9=0$ ومنه $9k-3=0$ أي $k=\frac{1}{3}$

ومنه إحداثيات النقطة E هي : $\begin{cases}x=2+\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{3}\\y=3+2\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{3}\\z=1-2\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\end{cases}$ أي $E\left(\frac{7}{3};\frac{11}{3};\frac{1}{3}\right)$

جـ) **حساب $d(B;(\Delta))$:**

$$d(B;(\Delta))=BE=\sqrt{\left(\frac{7}{3}-1\right)^2+\left(\frac{11}{3}-2\right)^2+\left(\frac{1}{3}+2\right)^2}=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{25}{9}+\frac{49}{9}}=\sqrt{\frac{90}{9}}=\sqrt{10}$$

د) **حساب مساحة المثلث BEC :**

لدينا E و C نقطتان من (Δ) وعليه (القاعدة هي CE و الارتفاع هو $d(B;(\Delta))$)

أي $S_{BEC}=\frac{1}{2}\times CE\times BE$. لدينا $CE=\sqrt{\left(\frac{7}{3}-1\right)^2+\left(\frac{11}{3}-1\right)^2+\left(\frac{1}{3}-3\right)^2}=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{64}{9}+\frac{64}{9}}=\sqrt{\frac{144}{9}}=\sqrt{16}=4$

ومنه $S_{BEC}=\frac{1}{2}\times CE\times BE=\frac{1}{2}\times 4\times\sqrt{10}=2\sqrt{10}ua$

حل التمرين الأول (الموضوع الأول – بكالوريا 2015 – رياضيات) MEBARKI2016

✓ نعتبر النقط : $A(1;5;4)$ ، $B(10;4;3)$ ، $C(4;3;5)$ و $D(0;4;5)$.

1) أ) تبيين أن A ، B و C ليست في استقامية :

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}10-1\\4-5\\3-4\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}9\\-1\\-1\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4-1\\3-5\\5-4\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$.

نلاحظ أن : $\frac{-1}{-1}\neq\frac{9}{3}$ منه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه A ، B و C ليست في استقامية .

ب) **تبيين أن A ، B ، C و D من نفس المستوى :**

لإثبات أن A ، B ، C و D من نفس المستوي يكفي عددين حقيقيين α و β حيث : $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$

لدينا: $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0-1\\4-5\\5-4\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}\Leftarrow\begin{cases}9\alpha+3\beta=-1........(1)\\-\alpha-2\beta=-1.......(2)\\-\alpha+\beta=1...........(3)\end{cases}$ نقوم بحل الجملة $\begin{cases}-\alpha-2\beta=-1...(2)\\-\alpha+\beta=1........(3)\end{cases}$

لدينا : $\begin{cases}-\alpha-2\beta=-1...(\times-1)\\-\alpha+\beta=1........(\times1)\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\alpha+2\beta=1\\-\alpha+\beta=1\end{cases}$ بالجمع نجد $3\beta=2$ أي $3\beta=2$ بالتعويض في (3) نجد $-\alpha+\frac{2}{3}=1$

أي $-3\alpha+2=3$ ومنه $-3\alpha=1$ وعليه $\alpha=-\frac{1}{3}$

نقوم الآن بتعويض قيمتي كل من α و β في المعادلة (1) : $9\alpha+3\beta=9\left(-\frac{1}{3}\right)+3\left(\frac{2}{3}\right)=-3+2=-1$

أي المعادلة (1) محققة ومنه A ، B ، C و D من نفس المستوي لأن $\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

جـ) استنتاج أن D مرجح لـ A ، B و C بمعاملات يطلب إيجادها :

بما أن : A ، B ، C و D من نفس المستوي فإن D مرجح لـ A ، B و C.
لإيجاد معاملات A ، B و C يكفي ايجاد كتابة من الشكل : $\alpha\overrightarrow{DA}+\beta\overrightarrow{DB}+\delta\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ مع $\alpha+\beta+\delta\neq 0$
لدينا $\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ ومنه $-3\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ أي $-3\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ و منه
$-3\overrightarrow{AD}-\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right)+2\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)=\vec{0}$ أي $-3\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ إذن $-2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$
و عليه $2\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ ولدينا $(2)+(-1)+(2)=3\neq 0$ ومنه D مرجح الجملة : $\{(A;2),(B;-1),(C;2)\}$

د) تعيين إحداثيات النقطة E نظيرة A بالنسبة إلى D :

بما أن E نظيرة A بالنسبة إلى D فإن D منتصف $[AE]$
و عليه : $x_D=\frac{x_A+x_E}{2}$ و $y_D=\frac{y_A+y_E}{2}$ و $z_D=\frac{z_A+z_E}{2}$ أي $0=\frac{1+x_E}{2}$ و $4=\frac{5+y_E}{2}$ و $5=\frac{4+z_E}{2}$
إذن $1+x_E=0$ و $5+y_E=8$ و $4+z_E=10$ وعليه $x_E=-1$ و $y_E=3$ و $z_E=6$ أي $E(-1;3;6)$

هـ) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P) المحوري لـ $[AE]$:

(P) المستوي المحوري لـ $[AE]$ يشمل D منتصف $[AE]$ و $\overrightarrow{AD}$ (أو $\overrightarrow{AE}$ أو $\overrightarrow{ED}$) ناظمي له
(P) المستوي المحوري لـ $[AE]$ هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث : $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{AD}=0$ أي $\begin{pmatrix}x-0\\y-4\\z-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=0$
ومنه : $-x-y+4+z-5=0$ أي $-x-y+z-1=0$. معادلة المستوي المحوري لـ $[AE]$ هي $(P);x+y-z+1=0$

2) تعيين (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء حيث : $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MD}-3\overrightarrow{MA}\right\|$

بما أن D مرجح الجملة : $\{(A;2),(B;-1),(C;2)\}$ فإن $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=(2-1+2)\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MD}$
$3\overrightarrow{MD}-3\overrightarrow{MA}$ مستقل عن M (لأن $3-3=0$) إذن $3\overrightarrow{MD}-3\overrightarrow{MA}=3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}\right)-3\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{AD}$
$\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MD}-3\overrightarrow{MA}\right\|$ تكافئ $\left\|3\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|3\overrightarrow{AD}\right\|$ أي $3MD=3AD$ منه $MD=AD$
وعليه (Γ) هي سطح الكرة التي مركزها D ونصف قطرها AD. ($AD=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$)

3) **أ) التحقق من أن : $F(1;8;10)$ نقطة من (P) :** لدينا $1+8-10+1=0$ ومنه $F\in(P)$.
ب) المستقيم (FD) يقطع (Γ) في النقطتين H و G . طبيعة الرباعي $AGEH$:
لدينا D منتصف $[AE]$. وبما أن (FD) يقطع (Γ) في النقطتين H و G فإن $[GH]$ قطر لـ (Γ)
وعليه D منتصف $[GH]$ إذن $[AE]$ و $[GH]$ متناصفان في النقطة D ومنه $AGEH$ متوازي أضلاع .
لدينا(Γ) سطح الكرة التي مركزها D ونصف قطرها AD و D منتصف $[AE]$ إذن $[AE]$ قطر لـ (Γ)
بما أن $[AE]$ و $[GH]$ قطران لـ (Γ) فهما متقايسان وعليه $AGEH$ مستطيل .
زيادة على ذلك (FD) من المستوي (P) المحوري لـ $[AE]$ وعليه $(FD)\perp(AE)$ أي $(HG)\perp(AE)$

بما أن $[AE]$ و $[GH]$ قطران متعامدان فإن $AGEH$ مربع .

مساحته : $S_{AGEH}=AH^2=DA^2+DH^2=DA^2+DA^2=2DA^2=2\left(\sqrt{3}\right)^2=2\times3=6ua$

4) (Δ) المستقيم الذي يشمل D ويعامد (AEH) .

أ) إثبات أن $\overrightarrow{AC}$ ناظمي لـ (AEH) :

لدينا $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{DF}$ شعاعي توجيه لـ (AEH) غير مرتبطين خطيا . ((DF) محتوى في (P) المحوري لـ $[AE]$)

هل $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE}=0$ و $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DF}=0$ ؟ لدينا : $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1-1\\3-5\\6-4\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1-0\\8-4\\10-5\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}=-6+4+2=0$ و $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DF}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}=3-8+5=0$

أي $\overrightarrow{AC}$ عمودي على $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{DF}$ شعاعي توجيه لـ (AEH) ومنه $\overrightarrow{AC}$ ناظمي لـ (AEH).

ب) إثبات أن $N(3t;4-2t;5+t)$ حيث $t\in\Re$ نقطة من (Δ) :

بما أن (Δ) المستقيم الذي يشمل D ويعامد (AEH) و $\overrightarrow{AC}$ ناظمي لـ (AEH) فإن (Δ) يشمل D و $\overrightarrow{AC}$ شعاع توجيه له
إذن : لإثبات أن $N(3t;4-2t;5+t)$ نقطة من (Δ) يكفي إثبات أن $\overrightarrow{DN}$ مرتبط خطيا مع $\overrightarrow{AC}$.

لدينا : $\overrightarrow{DN}\begin{pmatrix}3t-0\\4-2t-4\\5+t-5\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{DN}\begin{pmatrix}3t\\-2t\\t\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$. لدينا : $\frac{3t}{3}=\frac{-2t}{-2}=\frac{t}{1}=t$ ومنه $\overrightarrow{DN}$ مرتبط خطيا مع $\overrightarrow{AC}$.

وعليه $N(3t;4-2t;5+t)$ حيث $t\in\Re$ نقطة من (Δ).

ج) التحقق من أن : حجم المجسم $NAGEH$ يعطى بالعلاقة : $v(t)=2|t|\sqrt{14}uv$

لدينا $v(t)=\frac{1}{3}\times S_{AGEH}\times d(N;(AEH))$ بما أن (Δ) المستقيم الذي يشمل D ويعامد (AEH) و $N\in(\Delta)$

فإن : $d(N;(AEH))=DN=\sqrt{(3t)^2+(-2t)^2+(t)^2}=\sqrt{9t^2+4t^2+t^2}=\sqrt{14t^2}=\sqrt{14}\times|t|$

وعليه $v(t)=\frac{1}{3}\times S_{AGEH}\times d(N;(AEH))=\frac{1}{3}\times6\times\sqrt{14}\times|t|$ أي $v(t)=2\times\sqrt{14}\times|t|uv$

د) إيجاد N_1 و N_2 من (Δ) حيث $v(t)=2\sqrt{3}uv$:

$v(t)=2\sqrt{3}uv$ معناه $2|t|\sqrt{14}=2\sqrt{3}$ أي $|t|=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{3}{14}}$ أي $t=\sqrt{\frac{3}{14}}$ أو $t=-\sqrt{\frac{3}{14}}$

ومنه : $N_1\left(3\sqrt{\frac{3}{14}};4-2\sqrt{\frac{3}{14}};5+\sqrt{\frac{3}{14}}\right)$ و $N_2\left(-3\sqrt{\frac{3}{14}};4+2\sqrt{\frac{3}{14}};5-\sqrt{\frac{3}{14}}\right)$

حل التمرين الثالث (الموضوع الثاني – بكالوريا 2015 – رياضيات) MEBARKI2016

✓ لدينا : $A(2;0;0)$ و $B(-1;-5;-1)$ ، (Δ_1) المستقيم الذي يشمل A و $\vec{u}(-1;2;-1)$ توجيه له.

$(\Delta_2);\begin{cases} x=-3-3t \\ y=2+2t \\ z=7+3t \end{cases};(t\in\Re)$ ، (d) المستقيم الذي يشمل B و $\vec{v}(2;5;3)$ شعاع توجيه له .

1) تبيين أن (Δ_1) و (Δ_2) يتقاطعان في نقطة C يطلب تعيين إحداثياتها :

لدينا : $\vec{u}(-1;2;-1)$ و $\vec{u'}(-3;2;3)$ شعاعي توجيه كل من (Δ_1) و (Δ_2) على الترتيب

لدينا $\frac{2}{2}\neq\frac{-1}{-3}$ ومنه (Δ_1) و (Δ_2) غير متوازيين أي متقاطعين أو ليسا من نفس المستوي

التمثيل الوسيطي لـ (Δ_1) : بما أن (Δ_1) المستقيم الذي يشمل A و $\vec{u}(-1;2;-1)$ توجيه له فإن : $(\Delta_1);\begin{cases} x=2-k \\ y=2k \\ z=-k \end{cases};(k\in\Re)$

الآن نقوم بحل الجملة : $\begin{cases} -3-3t=2-k \\ 2+2t=2k \\ 7+3t=-k \end{cases}$ أي $\begin{cases} k-3t=5..........(1) \\ -2k+2t=-2....(2) \\ k+3t=-7.........(3) \end{cases}$ نختار حل الجملة $\begin{cases} k-3t=5..........(1) \\ k+3t=-7.........(3) \end{cases}$

بالجمع نجد : $2k=-2$ وعليه $k=-1$ بالتعويض في (3) نجد $-1+3t=-7$ ومنه $3t=-6$ أي $t=-2$

نعوض بـ $k=-1$ و $t=-2$ في المعادلة (2) نجد : $-2k+2t=-2(-1)+2(-2)=2-4=-2$ أي المعادلة (2) محققة

وعليه (Δ_1) و (Δ_2) يتقاطعان في نقطة C إحداثياتها : $\begin{cases} x=-3-3(-2)=-3+6=3 \\ y=2+2(-2)=2-4=-2 \\ z=7+3(-2)=7-6=1 \end{cases}$ أي $C(3;-2;1)$

2) تبيين أن (Δ_1) و (d) ليسا من نفس المستوى :

بما أن (d) المستقيم الذي يشمل B و $\vec{v}(2;5;3)$ شعاع توجيه له فإن : $(d);\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=-5+5\lambda;(\lambda\in\Re) \\ z=-1+3\lambda \end{cases}$

لدينا $\vec{u}(-1;2;-1)$ و $\vec{v}(2;5;3)$ شعاعي توجيه كل من (Δ_1) و (d) على الترتيب

لدينا $\frac{2}{5}\neq\frac{-1}{2}$ ومنه (Δ_1) و (d) غير متوازيين أي متقاطعين أو ليسا من نفس المستوي

الآن نقوم بحل الجملة : $\begin{cases} 2-k=-1+2\lambda \\ 2k=-5+5\lambda \\ -k=-1+3\lambda \end{cases}$ أي $\begin{cases} -2\lambda-k=-3.........(1) \\ -5\lambda+2k=-5....(2) \\ -3\lambda-k=-1.........(3) \end{cases}$ نختار حل الجملة $\begin{cases} -2\lambda-k=-3..........(1) \\ -3\lambda-k=-1.........(3) \end{cases}$

بالطرح نجد : $-2\lambda+3\lambda=-3+1$ أي : $\lambda=-2$ بالتعويض في (3) نجد $-3(-2)-k=-1$ ومنه $6-k=-1$ أي $k=7$

نعوض بـ $k=7$ و $\lambda=-2$ في المعادلة (2) نجد : $-5\lambda+2k=-5(-2)+2(7)=10+14=24\neq-5$ أي المعادلة (2) غير محققة وعليه المستقيمان (Δ_1) و (d) ليسا من نفس المستوي .

3) أ) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستوى (P) الذي يشمل المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .

بما أن (Δ_1) و (Δ_2) يتقاطعان في نقطة C فإن (P) المستوي الذي يشمل C و $\vec{u}(-1;2;-1)$ و $\vec{u'}(-3;2;3)$ شعاعي توجيه له

أي $(P);\begin{cases} x=-3t-k+3 \\ y=2t+2k-2.(t\in\Re;k\in\Re) \\ z=3t-k+1 \end{cases}$

ب) استنتاج أن : $4x+3y+2z-8=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (P) :

لدينا $\vec{n}(4;3;2)$ الشعاع الناظمي للمستوي الذي معادلته $4x+3y+2z-8=0$. هل $\vec{u}.\vec{n}=0$ و $\vec{u'}.\vec{n}=0$ ؟
لدينا : $\vec{u}.\vec{n}=(-1)(4)+(2)(3)+(-1)(2)=-4+6-2=0$ و $\vec{u'}.\vec{n}=(-3)(4)+(2)(3)+(3)(2)=-12+6+6=0$.
هل C نقطة من المستوي الذي معادلته $4x+3y+2z-8=0$ ؟ لدينا $4(3)+3(-2)+2(1)-8=12-6+2-8=0$
ومنه $\vec{u}.\vec{n}=0$ و $\vec{u'}.\vec{n}=0$ و C نقطة من المستوي الذي معادلته $4x+3y+2z-8=0$ وعليه : $(P);4x+3y+2z-8=0$

جـ) التحقق من أن C هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P) :

هل $C\in(P)$ و $\overrightarrow{BC}$ مرتبط خطيا مع $\vec{n}(4;3;2)$ ؟ لدينا مما سبق $C\in(P)$. و $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3+1\\-2+5\\1+1\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$

لدينا $\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}$ ومنه $\overrightarrow{BC}$ مرتبط خطيا مع $\vec{n}(4;3;2)$ وعليه C هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P) .

4) أ) تبيين أنه توجد نقطة وحيدة I من المستقيم (d) ونقطة وحيدة D من المستقيم (Δ_2) بحيث تكون A ، I و D في استقامية .يطلب إيجاد إحداثيات I و D.

بما أن A ، I و D في استقامية فإن A ، I و D من نفس المستوي و لدينا $A\in(\Delta_1)\subset(P)$ و $D\in(\Delta_2)\subset(P)$ إذن $I\in(P)$. لدينا $I\in(d)$ إذن $I(-1+2\lambda;-5+5\lambda;-1+3\lambda)$ وبما أن $I\in(P)$ فإن :
$4(-1+2\lambda)+3(-5+5\lambda)+2(-1+3\lambda)-8=0$ أي $-4+8\lambda-15+15\lambda-2+6\lambda-8=0$ ومنه $29\lambda=29$ أي $\lambda=1$
ومنه $I(-1+2(1);-5+5(1);-1+3(1))$ وعليه $I(1;0;2)$
بما أن A ، I و D في استقامية فإن $D\in(IA)$ و $D\in(\Delta_2)$ فإن $D\in(IA)\cap(\Delta_2)$.

إيجاد التمثيل الوسيطي لـ (IA) :

(IA) هو المستقيم الذي يشمل A و $\overrightarrow{IA}$ شعاع توجيه له . $\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}2-1\\0-0\\0-2\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ ومنه : $(IA);\begin{cases}x=m+2\\y=0 \quad ;(m\in\Re)\\z=-2m\end{cases}$.

إيجاد تقاطع المستقيمين (IA) و (Δ_2) : نقوم بحل الجملة : $\begin{cases}-3-3t=m+2\\2+2t=0\\7+3t=-2m\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}-3t-m=5......(1)\\t=-1..............(2)\\3t+2m=-7....(3)\end{cases}$

نختار $\begin{cases} t=-1..............(2) \\ 3t+2m=-7......(3) \end{cases}$ نعوض t بـ -1 في المعادلة (3) نجد : $-3+2m=-7$ أي $m=-2$

نتحقق من أن $t=-1$ و $m=-2$ حلول المعادلة (1) : لدينا $-3t-m=-3(-1)-(-2)=3+2=5$

وعليه (IA) و (Δ_2) يتقاطعان في النقطة D التي إحداثياتها هي $\begin{cases} x=(-2)+2=0 \\ y=0 \\ z=-2(-2)=4 \end{cases}$ ومنه $D(0;0;4)$

ب) تبيين أن I هي منتصف $[AD]$:

لدينا : $x_I=1=\frac{2+0}{2}=\frac{x_A+x_D}{2}$ ، $y_I=0=\frac{0+0}{2}=\frac{y_A+y_D}{2}$ ، $z_I=2=\frac{0+4}{2}=\frac{z_A+z_D}{2}$ ومنه I منتصف $[AD]$.

5) K مرجح الجملة : $\{(I;1);(B;2)\}$. G المسقط العمودي للنقطة K على المستوى (P) .

أ) إثبات أن G مرجح لـ A ، C و D بمعاملات يطلب تعيينها :

لدينا G المسقط العمودي للنقطة K و C المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P) ومنه $(KG)//(DC)$.

في المثلث ICD : I ، K ، D في استقامية بهذا الترتيب (لأن K مرجح الجملة : $\{(I;1);(B;2)\}$ والمعاملات موجبة)

و I ، G ، C في استقامية بهذا الترتيب و $(KG)//(DC)$ إذن حسب نظرية طاليس نجد : $\frac{IG}{IC}=\frac{IK}{IB}$

لدينا K مرجح الجملة : $\{(I;1);(B;2)\}$ ومنه $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$ ومنه $\frac{IK}{IB}=\frac{1}{3}$ إذن $\frac{IG}{IC}=\frac{1}{3}$ ومنه $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$ أي $3\overrightarrow{IG}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

أي $3\overrightarrow{IG}-\overrightarrow{IG}-\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ أي $2\overrightarrow{IG}-\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ إذن : $2\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ وعليه G مرجح الجملة : $\{(I;2);(C;1)\}$

نعلم أن I هي منتصف $[AD]$ أي I مرجح الجملة : $\{(D;1);(A;1)\}$.

بما أن G مرجح الجملة : $\{(I;2);(C;1)\}$ و I مرجح الجملة : $\{(D;1);(A;1)\}$ فإنه حسب خاصية التجميع

G مرجح الجملة : $\{(D;1);(A;1);(C;1)\}$ أي G مركز ثقل المثلث ADC.

ب) استنتاج إحداثيات النقطة G:

ج) بما أن G مرجح الجملة : $\{(D;1);(A;1);(C;1)\}$ فإن :

$x_G=\frac{x_D+x_A+x_C}{3}=\frac{0+2+3}{3}=\frac{5}{3}$ ، $y_G=\frac{y_D+y_A+y_C}{3}=\frac{0+0-2}{3}=-\frac{2}{3}$ ، $z_G=\frac{z_D+z_A+z_C}{3}=\frac{4+0+1}{3}=\frac{5}{3}$

أي $G\left(\frac{5}{3};\frac{-2}{3};\frac{5}{3}\right)$

حل التمرين الأول: الجزء الرابع (الموضوع الثاني – رياضيات) MEBARKI2016

مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق : $(t\in\Re;k\in\Re)$; $\begin{cases} x=1+\frac{2}{3}t-k \\ y=2-t+\frac{3}{2}k \\ z=-3+4t-6k \end{cases}$:

لدينا لما : $k=t=0$: $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=-3 \end{cases}$ إذن مجموعة النقط تشمل النقطة $A(1;2;-3)$.

لدينا $\vec{w}\left(\frac{2}{3};-1;4\right)$ و $\vec{v}\left(-1;\frac{3}{2};-6\right)$ أشعة توجيه هذه المجموعة . نلاحظ أن $\frac{\frac{2}{3}}{-1}=\frac{-1}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{-6}=-\frac{2}{3}$ أي $\vec{w}$ و $\vec{v}$ مرتبطان

خطيا وعليه مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق : $(t\in\Re;k\in\Re)$; $\begin{cases} x=1+\frac{2}{3}t-k \\ y=2-t+\frac{3}{2}k \\ z=-3+4t-6k \end{cases}$ هي المستقيم الذي يشمل النقطة

$A(1;2;-3)$ و $\vec{u}\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{2};-2\right)$ شعاع توجيه له لأن $\frac{\frac{2}{3}}{-\frac{1}{3}}=\frac{-1}{\frac{1}{2}}=\frac{4}{-2}=-2$ أي $\vec{w}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا.