

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ النقاط $A(1;0;2)$ ، $B(1;1;4)$ ، $C(-1;1;1)$ ، والشعاع $\vec{n}$ ، حيث : $\vec{n} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$

1) بين أن النقاط A ، B و C ليست على استقامة واحدة .

2) بين أن الشعاع $\vec{n}$ عمودي على $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ ، ثم أكتب معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) .

t عدد حقيقي موجب تماما ، نعتبر النقطتين I و G حيث : I مرجح الجملة $\{(A,1);(B,2)\}$ و G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,2);(C,t)\}$

3) جد إحداثيتي النقطة I ، ثم عبّر عن الشعاع $\overline{IG}$ بدلالة الشعاع $\overline{IC}$.

4) من أجل أي قيمة للوسيط t تنطبق النقطة G على منتصف القطعة $[IC]$.

التمرين الثاني : (05 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^3 + 1 = 0$.

2) نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{u}; \vec{v})$ ، النقاط A ، B و C التي لاحتقاتها

على الترتيب : $Z_A = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $Z_B = \overline{Z_A}$ و $Z_C = aZ_A$ ، حيث a عدد مركب طويلته α وعمدته θ .
- أكتب Z_C بدلالة α و θ على الشكل الأسّي .

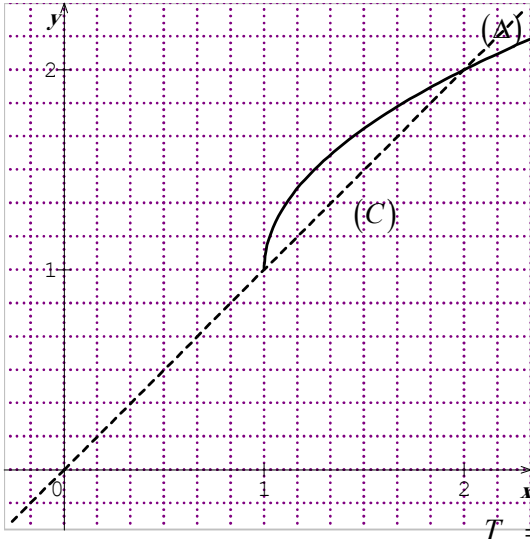
3) أكتب العددين $(Z_A)^{2017}$ و $(Z_B)^{1438}$ على الشكل الجبري ، ثم تحقق أن $(Z_A)^{2017} - (Z_B)^{1438} = 1$.

4) ليكن العدد المركب L حيث : $L = \sqrt{6} - \sqrt{2} - (\sqrt{6} + \sqrt{2})i$ ، تحقق أن العدد المركب $L^2 = -8\sqrt{3} - 8i$ ، ثم أكتبه على الشكل المثلثي والأسّي .

5) استنتج طولية وعمدة العدد المركب L ، ثم عين القيمة المضبوطة لكل من العددين $\sin \frac{19\pi}{12}$ و $\cos \frac{19\pi}{12}$.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $[1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$ ، و (C) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$. أنظر الشكل (وحدة الطول 2 cm)



(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $u_0 = \frac{5}{4}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

1) باستعمال المنحنى (C) والمستقيم (Δ)

- علم على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3

ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 1 < u_n < 2$

ثم أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحددها العام : $v_n = e^{-\frac{1}{3} + 2n}$.

3) بين أن (v_n) متتالية هندسية ، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

4) أحسب المجموعين : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2$

ثم استنتج العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n = \frac{e^{-\frac{1}{3}}}{1-e^2} (1 - e^{4036})$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = ax - (x^2 - b)e^{-x+1}$ ، حيث a و b عدنان حقيقيان . و (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) بين أن $a=1$ و $b=-1$ بحيث المنحنى (C_f) يقبل في النقطة $A(0; -e)$ مماسا معامل توجيهه $e+1$.

2) احسب $\lim_{n \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم بين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

4) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

ثم بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ، حيث $1,8 < \alpha < 1,9$.

5) اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف عند الفاصلتين 1 و 3 .

6) احسب $f(0), f(3)$ ، ثم أرسم (Δ) و (C_f) ، وناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m

عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$.

7) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x+1} dx$.

- بين أن الدالة $x \mapsto -(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto x e^{-x+1}$ على $\mathbb{R}$

- باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$ ، ثم احسب $\int_0^1 (x^2 + 1)e^{-x+1} dx$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

- نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ النقاط $A(3;1;0)$ ، $B(1;2;0)$ ، $C(3;2;1)$ و $D(0;0;m)$ ، حيث m عدد حقيقي موجب .
- 1 احسب القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos \widehat{ABC}$ و $\sin \widehat{ABC}$ باستعمال الجداء السلمي $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ ثم استنتج أن مساحة المثلث ABC هي : $S_{ABC} = \frac{3}{2}$.
 - 2 تحقق أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي $x + 2y - 2z - 5 = 0$.
 - 3 بين أن $ABCD$ رباعي وجوه ، ثم احسب حجمه V_{ABCD} بدلالة m .
 - 4 لتكن (S_m) مجموعة النقاط $M(x; y; z)$ من الفضاء والتي تحقق : $x^2 + y^2 + z^2 - 2mz + m^2 - 9 = 0$.
- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب m فإن : (S_m) سطح كرة ، يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .
ثم عين قيمة m حتى يكون (ABC) مستوي مماس لسطح الكرة (S_m) .

التمرين الثاني : (05 نقاط)

- 1 نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{u}; \vec{v})$ ، النقاط A ، B ، C و D التي لاحتقاتها على الترتيب : $Z_A = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $Z_B = -i\sqrt{3} = \sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ، $Z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$ و $Z_D = \overline{Z_C}$.
- بين أن النقاط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة (C) التي مركزها Ω ذات اللاحقة $Z_\Omega = 3$.
يطلب تعيين نصف قطرها .
- 2 لتكن النقطة E نظيرة النقطة D بالنسبة إلى المبدأ O .
- بين أن : $\frac{Z_C - Z_B}{Z_E - Z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث BEC .
- 3 بين أنه يوجد دوران R يحول النقطة E إلى النقطة C ، يطلب تعيين مركزه وزاويته .
- 4 نعتبر التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :
$$Z' + i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}(z + i\sqrt{3})$$

- عين طبيعة التحويل النقطي S وعناصره المميزة .
- 5 بين أن المجموعة (Γ) للنقط M والتي تحقق $(Z - Z_B)(\overline{Z - Z_B}) = Z_A \cdot \overline{Z_A}$ هي دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها ، ثم عين المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S مع تحديد عناصرها المميزة .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية متزايدة حدودها موجبة وأساسها q معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 100 \\ u_1 \times u_3 = 256 \end{cases}$$

- (1) احسب كل من u_1 ، u_2 ، u_3 والأساس q ، ثم تحقق أن $u_n = 4^n$.
- (2) احسب بدلالة n كلا من المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ والجداء $P_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$.
- (3) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 5 .
- (4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $S'_n = \frac{1}{\ln 2} [\ln 4 + \ln 4^2 + \dots + \ln 4^n]$.
- احسب S'_n بدلالة n ، ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S'_n + 4n^2 + 7^{2017} \equiv 0 [5]$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

(I) f دالة معرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - \ln x^2) + 1 ; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

- و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، (وحدة الطول 2 cm) .
- (1) احسب نهاية f عند $+\infty$ ، ثم ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد 0 وفسر النتيجة هندسيا .
 - (2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .
 - (3) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث : $\alpha \geq 0$ و $f(\alpha) = 0$ ، ثم تحقق أن : $4,6 < \alpha < 4,7$.

(II) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ :

$$g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$$

- (4) احسب $g'(x)$ و $g''(x)$ ، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g' واستنتج إشارتها على المجال $]0; +\infty[$.
- (5) حدد اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها
- ثم استنتج وضعية (C_f) بالنسبة إلى المماس (D) ذو المعادلة : $y = 2x + \frac{1}{2}$ عند الفاصلة 1 .
- (6) انشئ (D) و (C_f) .

(7) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع :

$$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 \ln x \, dx$$

- احسب I_n بدلالة n باستعمال المكاملة بالتجزئة ، ثم استنتج بدلالة n المساحة $A(n)$ بـ cm^2 للحيز المستوي

المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (D) والمستقيمين $x = \frac{1}{n}$; $x = 1$ ، وأحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(n)$.

على الطالب أن يختار أحد الموضوعين التاليين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

- (1) بين أن العدد 2017 أولي.
- (2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$: $14119x - 10085y = 22187$... (E) ...
أ/ أوجد القاسم المشترك الأكبر للأعداد: 22187 ، 10085 و 14119.
ب/ بين أن الثنائية $(2; 3)$ حلا خاصا للمعادلة (E) ثم عين مجموعة حلولها.
ج/ عين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) بحيث يكون $PGCD(x; y) = 11$.
(3) أ/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 5^n و 7^n على 11.
ب/ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $5^n + 7^{2017}$ قسما للقسمة على 11.
(4) ليكن a و b عددا طبيعيا غير معدومين كلا منهما أصغر من 8 ، نعتبر $N = \overline{a01b}$ مكتوب في النظام العشري
أ/ تحقق أن : $10^3 \equiv (-1)[11]$
ب/ عين قيم العدد الطبيعي N حيث باقي قسمته على 11 هو 4.
ج/ أكتب هذا العدد في النظام ذي العد 11.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- (1) عين العددين الحقيقيين x و y بحيث $4 = 0 + 4i$ و $x^2 e^{2iy}$ و $x > 0$ ثم تحقق أن العدد المركب $-2i$ يحقق هذه المساواة.
- (2) نرفق بكل عدد مركب Z يختلف عن $-2i$ العدد المركب Z' حيث: $Z' = \frac{Z-2i}{Z+2i}$.
لتكن النقط A ، B ، M ، M' صور الأعداد $2i$ ، $-2i$ ، Z و Z' على الترتيب في مستوي منسوب إلى معلم متعامد
و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نضع : $Z - 2i = + r e^{i\theta}$ حيث $r \in \mathbb{R}_+^*$ و $\theta \in \mathbb{R}$.
أ/ بين أن : $Z' - 1 = \frac{4}{r} e^{i(-\frac{\pi}{2}-\theta)}$
ب/ عين مجموعة النقط M التي من أجلها يكون Z' عددا حقيقيا.
ج/ بين أنه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها B و نصف قطرها 2 فإن M' تنتمي إلى دائرة (C') يطلب
تحديد عناصرها المميزة.
- (3) نعتبر الدوران R الذي مركزه النقطة I ذات اللاحقة $e^{i\frac{3\sqrt{2}}{2}}$ و زاويته α .
أ/ عين القيس الرئيسي للعدد α إذا علمت أن صورة A بالدوران R هي النقطة ذات اللاحقة 1.
ب/ عين على الرسم النقط : A ; B ; I .
ج/ تحقق أن الدائرة (C') صورة دائرة مركزها A بالدوران R ثم أرسم شكلا في نفس المعلم السابق.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n} \end{cases} \text{ من أجل } n \geq 2 \text{ و } v_n = u_n - \ln n \text{ من أجل } n \geq 1 .$$

(1). أ/ أحسب u_2 ، u_3 ، u_4 .

ب/ بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

$$(2). \text{ أ/ بين من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم : } \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} \cdot dx \leq \frac{1}{k}$$

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$: $u_n - \frac{1}{n} \leq -\ln n \leq u_n$ و $0 \leq v_n \leq 1$.

$$(3). \text{ أ/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n : v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} \cdot dx$$

ب/ استنتج اتجاه تغير المتتالية (v_n) .

(4). أ/ بين أن المتتالية (v_n) متقاربة ، نرمز بـ α إلى نهاية المتتالية (v_n) (لا يطلب حساب α)

ب/ ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

التمرين الرابع: (07 نقاط)

k عدد حقيقي موجب تماما ، نعتبر الدالة f_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_k(x) = e^{kx} - x - 1$

نرمز بـ (C_k) للمنحني الممثل للدالة g_k في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 - نعتبر الدالة g_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g_k(x) = 1 + (1 + kx)e^{kx}$.

1. أدرس $g'_k(x)$ ثم أدرس إشارته .

2. شكل جدول تغيرات الدالة g_k ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g_k(x) > 0$.

1- أ/ بين أن جميع المنحنيات (C_k) تمر بنقطة ثابتة I يطلب تعيين إحداثياتها .

ب/ أحسب نهاية الدالة f_k عند $-\infty$ و $+\infty$.

ج- بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_k) بجوار $-\infty$.

2. أدرس اتجاه تغير الدالة f_k ثم شكل جدول تغيراتها .

3. أ/ عين معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_k) عند النقطة التي فاصلتها 0 .

ب/ بين أن النقطة $F_k \left(-\frac{2}{k}; -\frac{2}{k}(1 + e^{-2}) - 1 \right)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_k) .

4. أ/ بين أن المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0 \leq \alpha \leq 1$.

ب/ بين أن المسافة بين النقطة $N(\alpha; f_1(\alpha))$ و المستقيم (D) تساوي $\alpha e^\alpha / \sqrt{2}$.

5. أ/ بين أنه من أجل عدد حقيقي ، $f_k(x) + f_{-k}(-x) = -2$. ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_k) و (C_{-k}) ؟

ب/ أرسم في نفس المعلم (C_1) و (C_{-1}) .

III - λ عدد حقيقي سالب تماما. نعتبر التكامل التالي: $I_k = \int_{\lambda}^0 -xe^{kx} dx$.

1. هل العدد I_k يمثل مساحة؟

2. باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب I_1 ثم $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} I_1$ ، فسر هذه النتيجة.

3. بين أن : $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} I_k = \frac{1}{k^2}$

الموضوع الثاني:

التمرين الاول : (04 نقط)

I - a, b, c أعداد طبيعية حيث : $1 \leq a \leq b \leq c$

عين الأعداد a, b, c علما أن في النظام ذي الأساس a يكون $b + c = 46$ و $bc = 545$.

II - نعتبر المعادلة $21x - 17y = 8$ (1) ، حيث x و y عددين صحيحين طبيعيين .

1. أ) عين الثنائية $(x_0; x_0)$ حل للمعادلة (1) .

ب) حل في N^2 المعادلة (1) .

2. أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 13 .

ب) بين أنه إذا كان $(\alpha; \beta)$ حل للمعادلة (1) فإن $3^{34\beta+20} - 9^{21\alpha} - 2 \equiv 0 [13]$.

3. أ) بين أنه إذا كان $(x; y)$ حل للمعادلة (1) و $x \equiv 0 [4]$ فإن $y \equiv 0 [4]$.

ب) عين $(x; y)$ حلول للمعادلة (1) التي يكون من أجلها $PGCD(x; y) = 4$

التمرين الثاني : (05 نقط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{u}; \vec{v})$. لتكن النقط H, D, C, B, A التي لواحقها على الترتيب :

$$Z_H = 1 + Z_D, \quad Z_D = -\frac{1}{a}i, \quad Z_C = ia, \quad Z_B = 1 + \frac{a-1}{a}i, \quad Z_A = a$$

حيث a عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1 .

1 أ - تحقق أن : $Z_B - Z_D = \overline{Z_D}(Z_A - Z_C)$

ب- أستنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان .

2 أ - عين الكتابة المركبة للتشابه المباشر S الذي يحول A إلى B ويحول C إلى D .

ب- حدد Z_Ω لاحقة المركز Ω للتحويل S . ثم عين العناصر المميزة الأخرى لهذا التحويل .

ج - بين أن المثلثين OAC و BHD متشابهان ثم جد علاقة بين مساحتهما .

3 أ) لتكن (M_n) متتالية نقط من المستوي معرفة كما يلي : $M_0 = A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $M_{n+1} = S(M_n)$

حيث Z_n لاحقة النقطة M_n ونضع : $U_n = |Z_n - Z_\Omega|$ من أجل كل عدد طبيعي n .

أ- بين أن (U_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب- عين قيم a بحيث تكون (U_n) متتالية متقاربة .

ج - نرسم T_n إلى مجموعة أطوال القطع المستقيمة $[M_n\Omega], [M_{n+1}\Omega], [A\Omega], \dots$. أحسب المجموع T_n بدلالة n .

4 أ) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z التي تحقق : $Z = a(1 + e^{i\theta})$ حيث $\theta \in R$.

* حدد الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة (Γ) لما يسمح العدد θ المجموعة R .

التمرين الثالث : (04 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقط : $A(3;2;1)$, $B(3;5;4)$, $C(0;5;1)$

- 1- بين أن المثلث ABC متقايس الاضلاع .
- 2- تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ، ثم استنتج معادلة ديكرتية له.
- 3- أ) عين إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .
ب) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يمر بالنقطة G ويعامد المستوي (ABC) .
ج) نعتبر النقطة $S(2+t;4+t;2-t)$ حيث t عدد حقيقي . عين العدد t حتى يكون $AS^2 = AB^2$.
- 4- أ) عين طبيعة رباعي الوجوه $FABC$ حيث $F(4;6;0)$ ثم أحسب حجمه V .
ب) بين أن المستقيمين (FA) و (BC) متعامدان .

ج) لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $\|\vec{MG} + \vec{MF}\| = 6$

بين أن المستوي (ABC) يقطع (S) وفق دائرة محيطها بالمثلث ABC يطلب مركزها وطول نصف قطرها .

التمرين الرابع : (07 نقط)

- 1- أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$.
ب) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
1. أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$ ، $f(x) = \ln x + \ln\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)$.
ب) من أجل $x \geq 1$ ، بين أن $x - 1 = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \left(x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$.
ج) بين أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 1. فسر النتيجة بيانيا .
2. أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
ب) بين أنه كل من أجل عدد حقيقي x من المجال $[1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ ، ثم شكل جدول تغير الدالة f .
ج) أرسم المنحى (C_f) .

3. ليكن S مساحة الحيز D المنحى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x=1$ و $x=3$.
أ و B نقطتان من (C_f) فاصلتهما على الترتيب 1 و 3 ، والنقطتان $p(1; 2\ln(1 + \sqrt{2}))$ و $Q(3; 0)$ من المستوي .
أ) أحسب مساحة كل من المستطيل $APBQ$ و المثلث ABQ .

ب) أستنتج أن $2\ln(1 + \sqrt{2}) \leq S \leq 4\ln(1 + \sqrt{2})$. (ملاحظة $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$) .

III- نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}$ و (C_g) تمثيلها البياني .

1. بين أنه كل من أجل عدد حقيقي $x \geq 0$: $g(x) \geq 1$.
2. أ (بين أن $g \circ f(x) = x$ إذا كانت $M(x; y)$ نقطة من (C_f) فان $M'(x; y)$ نقطة من (C_g) .
ب) ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنيين (C_f) و (C_g) ؟ أرسم المنحنى في المعلم السابق (C_g) .
3. ليكن S' مساحة الحيز D' المحدد بالمنحنى (C_g) والمستقيمات التي معادلاتها $x = 0$ ، $x = 2\ln(1 + \sqrt{2})$ و $y = 3$.

أ (بين أن $S' = 6\ln(1 + \sqrt{2}) - \int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x)dx$

ب (أحسب $\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x)dx$ ثم أستنتج قيمة S .

تصحيح الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

$$(1) \sqrt{2017} \approx 44,9$$

العدد 2017 لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية الأصغر

من $\sqrt{2017}$ فإن 2017 عدد أولي. (0,25)

$$(2) \text{PGCD}(2017; 10085; 14119) = 1. (0,25)$$

ب/ فعلا محققة تصبح (E) من الشكل: $7x - 5y = 11$. (0,25)

$$(0,25) \quad S = \{(5k + 3, 7k + 2); k \in \mathbb{Z}\}$$

$$(0,5) \quad S = \{(55k' + 33, 77k' + 44); k' \in \mathbb{Z}\}$$

$$(3) \quad 5^{4k+r} \equiv 5^r [11] \text{ حيث } r \in \{0, 1, 2, 3\}. (0,5)$$

بواقي قسمة 5^n على 11 هي: 1, 5, 4, 9.

$$7^{10k+r} \equiv 7^r [11] \text{ حيث } r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

بواقي قسمة 87^n على 609 هي: 1, 775, 2, 321034.

(0,5)

$$(0,25) \quad k \in \mathbb{N}; n = 4k + 1$$

$$(4) \quad \text{أ/ محققة} (0,25)$$

$$(0,5) \quad 7011, 2017, 1016$$

$$\text{ج/ } 2017 = \overline{1574}^{11}, 1016 = \overline{844}^{11}, 7011 = \overline{52\alpha 4}^{11}$$

$$(0,5) \quad \alpha = 10$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

$$(1) \quad x^2 e^{2iy} = 4e^{i\pi} \text{ تكافئ } x^2 e^{2iy} + 4 = 0$$

$$(0,5) \quad \text{مع } \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x^2 = 4 \\ 2y = \pi + 2\pi k \end{cases}$$

- التحقق:

$$= 2e^{-i\frac{\pi}{2}} - 2i$$

$$(0,25) \quad 2^2 e^{-2i(-\frac{\pi}{2})} = -4 + 4 = 0 + 4$$

$$(0,5) \quad 1 = \frac{4}{r} e^{i(-\frac{\pi}{2}-\theta)} z' - 1 \text{ و } \frac{4}{r} \left(\frac{-i}{e^{i\theta}} \right) z' - 1$$

$$\text{ب/ } z' \in \mathbb{R} \text{ يكافئ } \pi k = \text{Arg}(z') \text{ , } k \in \mathbb{Z}$$

$$z' \in \mathbb{R} \text{ يكافئ } \pi k = (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM})$$

مجموعة النقط M هي مستقيم (AB) أي محور الترتيب ما عدا

النقطة B (0,5)

$$\text{ج/ } M \in (C) \text{ معناه } |z + 2i| = 2$$

$$M \in (C) \text{ معناه } 2e^{i\theta} - 2i = z \text{ , } \theta \in \mathbb{R}$$

$$\text{أ/ } z' - 1 = 2e^{i(-\frac{\pi}{2}-\theta)}$$

$$(0,5) \quad z' - 1 = 2e^{i\alpha} \quad (\alpha = -\frac{\pi}{2} - \theta)$$

$$|z' - 1| = 2 \text{ معناه } M'K = 2$$

M' تنتمي إلى الدائرة (C') التي مركزها K ذات اللاحقة 1 و

طول نصف قطرها 2 (0,25)

$$(3) \quad R(A) = K$$

$$(0,25) \quad z_I \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right) \quad z_K - z_I = a(z_A - z_I)$$

ب/ (0,5)

ج/ $R(A) = K$ مع K مركز الدائرة (C')

(0,25) (C') هي صورة (C) التي مركزها A بـ R

الرسم: (0,5)

التمرين الثالث: (05 نقاط)

$$(0,75) \quad u_4 = \frac{25}{12}, u_3 = \frac{11}{6}, u_2 = \frac{3}{2} \text{ أ/ (1)}$$

ب/ البرهان بالتراجع (0,75)

(2) أ/ لدينا:

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} \text{ منه } k \leq x \leq k+1$$

$$\text{و منه } \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx$$

$$(0,5) \quad \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k} \text{ و بالتالي:}$$

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k} \text{ ب/ لدينا:}$$

$$\frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{1}{x} dx \leq 1 \quad := 1k$$

$$\frac{1}{3} \leq \int_2^3 \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{2} \quad := 2k$$

$$\frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n-1} := n-1k$$

بالجمع و حسب علاقة شال للتكامل

$$u_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{x} dx \leq u_n - \frac{1}{n}$$

$$(0,5) \quad u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n}$$

و نبين أن $0 \leq v_n \leq 1$

$$\text{لدينا: } u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n}$$

$$-1 \leq \ln n - u_n \leq -\frac{1}{n}$$

$$0 < \frac{1}{n} \leq v_n \leq 1$$

$$(0,5) \quad 0 \leq v_n \leq 1 \text{ أي}$$

$$(0,5) \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \text{ أ/ (3)}$$

ب/ بما أن

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n} \text{ لأن } \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$$

$$\frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq 0 \text{ و عليه}$$

$$\text{أي } v_{n+1} - v_n \leq 0$$

$$(0,5) \quad (v_n) \text{ متناقصة على } \mathbb{N}^*$$

تابع التمرين الرابع:

$$(5) \text{ أ } f_k(x) + f_{-k}(-x) = -2 \text{ محققة.}$$

الإستنتاج:

$$(0,5) \quad M(x; f_k(x)) \in (C_k) \text{ فإن } M'(-x; f_k(x) - 2) \text{ من } (C_{-k})$$

$$(0,25) \quad \text{و منتصف } [MM'] \text{ هي } I(0; -1) \text{ فإن } (C_k) \text{ و } (C_{-k})$$

$$(0,25) \quad \text{متناظرين بالنسبة إلى } I$$

$$(0,25) \quad \text{ب/رسم } (C_1) \text{ و } (C_{-1})$$

$$(0,25) \quad (x-1) - f_k(x) = -xe^{kx} \geq 0$$

$$(0,25) \quad \text{إذن } k \text{ هو مساحة الحيز المحدد بـ } (C_k) \text{ و المستقيمات التي معادلاتها: } 0x = \lambda x \text{ و } x - 1y = x$$

$$(0,25) \quad I_1 = 1 + \lambda e^\lambda - e^\lambda$$

$$(0,25) \quad \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} I_1 = 1$$

التفسير:

$$(0,25) \quad \text{هذه النهاية تعني أن مساحة الحيز المحدد بـ } (C_k) \text{ و محور الترتيب و } (D) \text{ تساوي 1.}$$

$$(3) \text{ باستعمال المكاملة بالتجزئة نجد:}$$

$$(0,25) \quad I_k = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} (\lambda k e^{\lambda k} - e^{\lambda k})$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} I_k = \frac{1}{k^2}$$

$$a = i \text{ و منه } \alpha = \frac{\pi}{2}$$

تابع التمرين الثالث:

$$(0,5) \quad (4) \text{ أ } (v_n) \text{ متناقصة و محددة من الأسفل فإنها متقاربة}$$

$$(0,5) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n + \ln n) = +\infty$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

$$(0,25) \quad g'_k(x) = k(2 + kx) e^{kx} \quad (1.I)$$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{k}$	$+\infty$
$g'_k(x)$	-	0	+

(0,25)

x	$-\infty$	$-\frac{2}{k}$	$+\infty$
$g'_k(x)$	-	0	+
$g_k(x)$	1	$1 - e^{-2}$	$+\infty$

(0,5)

حسب جدول تغيرات g_k لدينا:

$$(0,25) \quad g_k(x) \geq 1 - e^{-2} \geq 0 \text{ و عليه من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} : g_k(x) \geq 0.$$

$$(1.II) \quad f_k(0) = 1$$

$$(0,25) \quad \text{جميع المنحنيات } (C_k) \text{ تمر من نقطة ثابتة } I(0; 1)$$

$$(0,25) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = -\infty$$

$$(0,25) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = +\infty$$

$$(0,25) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f_k(x) - y] = 0 \text{ ج/}$$

لدينا:

$$(0,25) \quad f'_k(x) = 1 + (1 + kx)e^{kx}$$

$$f'_k(x) = g_k(x) > 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_k(x)$	+	
$f_k(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(0,5)

$$(0,25) \quad (\Delta): y = 2x - 1 \text{ أ } (3)$$

$$(0,25) \quad f''_k(x) = g'_k(x) \text{ ب/}$$

$$f''_k(x) \text{ يعدم عند } -\frac{2}{k} \text{ و يغير إشارته عندها إذن النقطة } F_k$$

$$(0,25) \quad \text{نقطة انعطاف للمنحني } (C_k)$$

$$(0,25) \quad (4) \text{ أ/ مبرهنة القيم المتوسطة}$$

$$d(N; (D)) = \frac{|\alpha - 1|}{\sqrt{2}}$$

$$(0,25) \quad d(N; (D)) = \frac{1 - \alpha}{\sqrt{2}} \text{ لأن } (\alpha - 1 < 0)$$

$$1 - \alpha = \alpha e^{\alpha} \text{ معناه } f_1(\alpha) = 0$$

(0,25)

$$d(N; (D) = \frac{\alpha e^{\alpha}}{\sqrt{2}} : \text{وعليه}$$

المستوى: 3 رياضي المادة: الرياضيات اداة التقويم: الاختبار الثالث	حل نموذجي و سلم التنقيط الموضوع الثاني	مديرية التربية لولاية عين الدفلى السنة الدراسية: 2017/2016
التنقيط	الأجوبة	الوحدات
	<u>التمرين الأول:</u> 0.25 $x^2 - 2(2a + 3)x + 5a^2 + 4a + 5 = 0$: Δ و b هما حلا المعادلة $\Delta = 4(-a^2 + 8a + 4)$ 0.50 $\Delta \geq 0$ يكافئ $a \in [2 - \sqrt{20}; 2 + \sqrt{20}]$ ، $a = 7$ أو $a = 8$ $a = 7$ فإن $\Delta = 11$ (مرفوض) $a = 8$ الحلان هما 17 و 21. ($c = 21$ ، $b = 17$ ، $a = 8$) 0.25 1/ Π - (أ) $(x_0; y_0) = (2, 2)$ 0.25 (ب) $s = \{(17k + 2, 21k + 2), k \in \mathbb{N}\}$ 0.50 2 - (أ) $9^{3k+r} \equiv 9^r [3]$ حيث $r \in \{0, 1, 2\}$. 0.50 بوقي قسمة 9^n على 13 هي 99 و 1 . 0.50 (ب) $- [13] - 9^{21\alpha} - 2 \equiv 9^{21\alpha+2} - 9^{21\alpha} - 2 [13] \equiv 0 [13]$ 0.50 3- (أ) $\begin{cases} y = 4(21\lambda - 2) \\ x = 4\lambda \end{cases}$ حسب غوص فإن $y \equiv 0 [4]$. 0.50 (ب) $x \equiv 0 [4]$ يعني $k = 4k' + 2$ $x \equiv 0 [8]$ يعني $k = 4l + 6$ $k = 4(2l + 1) + 2$ و $k' \neq 2l$ و عليه $k' = 2l$. $k = 8l + 2$ $x = 136l + 36$ و $y = 168l + 44$ حيث $l \in \mathbb{N}$. 0.25 2×0.25	الموافقة والتعداد

التمرين الثاني:

0.25

1 - أ - محققة .

0.25

ب- $(\vec{CA}, \vec{DB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ (محققة) .

0.50

2 - أ - $z' = \frac{1}{a} iz + 1 - \frac{1}{a} i$

0.75

ب - $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $k = \frac{1}{a}$ ، $z_{\Omega} = 1$

- ج - $S(O) = H$ ، $S(C) = D$ ، $S(A) = B$ صورة المثلث OAC ب S هو المثلث

0.75

S و BHD تشابه مباشر ، المثلثان OAC و BHD متشابهان .

$$S(BHD) = \frac{1}{a^2} S(OAC)$$

0.50

3 - أ - $u_{n+1} = \frac{1}{a} u_n$.

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{a}$ وحدها الاول $u_0 = |a - 1|$.

0.50

ب- $a \in]1; +\infty[$

2 ×

$$T_n = \frac{a|a-1|}{a-1} \left[1 - \left(\frac{1}{a} \right)^{n+2} \right] \quad \text{- ج -}$$

0.25

4 - (Γ) دائرة مركزها A ذات الاحقة a

0.50

وطول نصف قطرها $r = a$

0.50

0.50

التمرين الثالث:

0.75

1- المثلث ABC متقايس الاضلاع الان $AB = AC = BC = 3\sqrt{2}$

0.50

2- $\vec{n}(1,1,-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) لان $\vec{AB} \cdot \vec{n} = 0$ و $\vec{AC} \cdot \vec{n} = 0$.

و $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ معناه $M(x, y, z) \in (ABC)$

معادلة (ABC) : $x + y - z - 4 = 0$

0.25

3- أ - G مركز ثقل المثلث ABC ، و $G(2,4,2)$

0.25

$$\begin{cases} x = 2 + k \\ y = 4 + k \\ z = 2 - k \end{cases} \quad (k \in R) \quad \text{يكافئ} \quad M(x, y, z) \in (\Delta)$$

0.25

ج - لاحظ أن S نقطة من (Δ)

$AS^2 = AB^2$ يكافئ $3t^2 = 12$ حيث $t \in \{-2, 2\}$ ومنه $S(4;6;0)$ أو $S(0;2;4)$

0.25

د - F تنتمي الى (Δ) ومنه المثلثات FGB ، FGA ، FGC قائمة ومتقايسة لان

$GA = GB = GC$ ومنه $FA = FB = FC = AB$

رباعي الوجوه $FABC$ منتظم . $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \times FG$ و

0.25

$$V = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} AB^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times FG$$

لاحظ : $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB^2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و منه $V = 9u.v$

0.25

4- $\vec{FA} \cdot \vec{BC} = 0$ ومنه (FA) و (BC) متعامدان.

5- أ - $\|\vec{MG} + \vec{MF}\| = 6$ تكافئ $MI = 3$ حيث I منتصف $[FG]$.

المجموعة (S) هي سطح الكرة التي مركزها I وطول نصف قطرها 3.

ب - بمأن $I \in (\Delta)$ فإن : $IG = d(AB, I) = \sqrt{3}$

0.25

المجموعة (S) والمستوي (ABC) يتقاطعان في دائرة مركزه G

وطول نصف قطرها $r = \sqrt{6}$.

0.25

متوسط المثلث متقايس الاضلاع ABC يساوي $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ وعليه $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ $AG = \frac{2}{3} \left(\frac{2\sqrt{6}}{2} \right) = \sqrt{6}$

0.25

المجموعة (S) والمستوي (ABC) يتقاطعان في دائرة محيطها بالمثلث ABC .

التمرين الرابع :

0.50

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \text{ وعليه } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = 1 \text{ -I}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln(z+1)}{z} = 1 \text{ بوضع } z = x-1 \text{ فإن}$$

أ-1 Π - محققة من أجل $x \geq 1$

0.25

ب- محققة من أجل $x \geq 1$.

0.25

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\ln x}{x-1} + \frac{\ln \left[1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right]}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} + \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \right] = +\infty \text{ ج}$$

0.25

المنحى (C_f) يقبل نصف مماس موازي لمحور الترتيب عند النقطة التي فاصلتها 1.

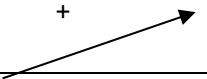
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad / \quad \text{أ-2}$$

0.25

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad / \quad \text{ب}$$

0.25

0.50

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	$+\infty$

0.50

ج/ البيان :

0.50

0.25

ب / المستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}; \vec{j})$ فإن (C_f) و (C_g) متناظران

بالنسبة الى المنصف الاول $(\Delta): y = x$)

01

$$S' = \int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} [3 - g(x)] dx \quad \text{ب 1}$$

$$S' = [3x]_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} - \int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x) dx$$

$$S' = 6\ln(1+\sqrt{2}) - \int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x) dx$$

$$\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x) dx = \int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} \frac{1}{2} [e^x + e^{-x}] dx \quad \text{ب 2}$$

$$= \frac{1}{2} [e^x + e^{-x}]_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

بمأن (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة الى المنصف الاول $\Delta = \Delta'$ ومنه $S = S'$

0.50

$$S = S' = [6\ln(1+\sqrt{2}) - 2\sqrt{2}] \quad u.v$$

0.25

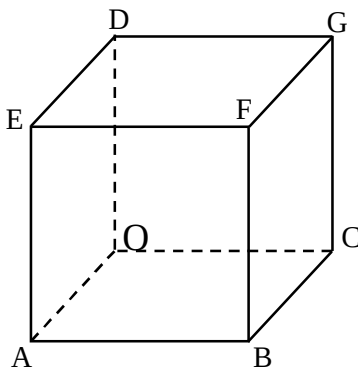
0.50

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقط)

- (1) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n على 10.
ب- ما هو باقي قسمة العدد A_n على 10 حيث: $A_n = 3^{16n+6} - 2 \times 109^{2n+3} - 13$ ؟
- (2) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $(3n+4) \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 3^{2n} (3n+1) [10]$.
ب- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد الطبيعي $(3n+4) \times 9^n + 7^{2n+1}$ مضاعفا للعدد 10.
- (3) A عدد طبيعي يكتب $xx0xx01$ في نظام التعداد ذي الأساس 3 ويكتب $y611$ في نظام التعداد ذي الأساس 7.
- أوجد x و y ثم أكتب A في النظام العشري.
- (4) يحتوي كيس على 4 كرات مرقمة ببواقي قسمة 3^n على 10 نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد.
أ- أحسب احتمال الحصول على رقمين مجموعهما يساوي مجموع أرقام العدد 2017.
ب- X متغير عشوائي يرفق بكل عملية سحب مجموع الرقمين المتحصل عليهما.
- عرف قانون احتمال X ثم احسب أملها الرياضيائي.



التمرين الثاني: (04 نقط)

$OABCDEFG$ مكعب طول حرفه 1

نعتبر المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$.

- (1) أ- بين أن الشعاع $\vec{n}(1,1,1)$ ناظمي للمستوي (ACD)
ب- أكتب معادلة ديكراتية للمستوي (ACD) .
- (2) (Δ) المستقيم الذي يمر بالنقطة O ويعامد المستوي (ACD) .
أ- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) .
ب- عين إحداثيات النقطة H تقاطع المستقيم (Δ) و المستوي (ACD) .

(3) (S_m) مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء التي تحقق:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2my - 2mz - 1 + 3m^2 = 0 \quad (m \in \mathbb{R})$$

أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي m ، (S_m) سطح كرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

ب - عين قيم m التي من أجلها النقطة A تنتمي إلى (S_m) .

(4) أ - تحقق أن المركزين ω_0 و ω_2 للسطحين الكرويين (S_0) و $\left(S_2\right)_3$ ينتميان إلى المستقيم (Δ) .

ب - برر لماذا المستوي (ACD) يقطع السطحين الكرويين (S_0) و $\left(S_2\right)_3$ في نفس الدائرة؟

يطلب تعيين عناصرها المميزة .

التمرين الثالث: (05نقط):

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقط A, B, C, D و E التيلاحقاتها

على الترتيب $z_A = 1, z_B = 4 + i, z_C = 3i, z_D = -1 + i, z_E = -2i$.

(1) بيّن أن $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{z_E - z_A}{z_D - z_A}$. ثم بين أنه يوجد تحويل نقطي T ، يحول D إلى E و B إلى C يطلب تعيين طبيعته وعناصره المميزة.

(2) عين لاحقة النقطة C' صورة النقطة C بالتشابه المباشر S الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ونسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3) لتكن I_1, I_2, I_3, I_4 منتصفات القطع المستقيمة $[BC], [CD], [DE]$ و $[EB]$ على الترتيب.

أ - بين أنه يوجد تحويل نقطي r مركزه I_1 ويحول النقطة I_4 إلى I_2 .

ب - احسب $z_{I_1} + z_{I_3}$ و $z_{I_2} + z_{I_4}$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $I_1 I_2 I_3 I_4$.

(4) لتكن M نقطة من المستوي لاحتقتها z والنقطة M' ذات اللاحقة z' صورتها بالتشابه S .

$$* \text{ بين أن: } z' = \frac{1}{2}[(1+i)z + 1 - i]$$

(5) لتكن (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z التي تحقق $z = (i-1)(1+e^{i\theta})$ حيث $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

أ - عين طبيعة المجموعة (γ) مع تحديد عناصرها المميزة عندما θ يمسح المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

ب - أوجد طبيعة المجموعة (γ') صورة (γ) بالتحويل S .

التمرين الرابع: (07 نقط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (3+x)e^{\frac{-x}{2}}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، (الوحدة: $2cm$).

(1) أ- أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ب- أدرس إتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) أ- بين أن المعادلة $f(x)=3$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ أحدهما معدوم والثاني α حيث: $-\frac{3}{2} < \alpha < -2$.

ب- أرسم (C_f) في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

ج- m عدد حقيقي موجب تماماً. أوجد قيم m التي من أجلها المعادلة $f(x)=m$ لا تقبل حلولاً في $\mathbb{R}$.

(3) باستعمال المكاملة بالتجزئة ، أحسب $I = \int_{-3}^0 x e^{-\frac{x}{2}} dx$ ثم استنتج بوحدة المساحة، مساحة الحيز المستوي المعروف

بمجموعة النقط $M(x; y)$ حيث: $0 \leq y \leq f(x)$ و $-3 \leq x \leq 0$.

(4) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 3e^{\frac{x}{2}} - 3$.

أ- بين أن المعادلة $f(x)=3$ تكافئ $g(x)=x$.

ب- أدرس إتجاه تغير الدالتين g' و g على $\mathbb{R}$. (g' المشتقة الأولى للدالة g).

ج- بين أن: $g'(\alpha) = \frac{\alpha+3}{2}$.

(5) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-2; \alpha]$:

أ- $g(x)$ تنتمي إلى المجال $[-2; \alpha]$.

ب- $\frac{1}{2} \leq g'(x) \leq \frac{3}{4}$.

(6) باستعمال خواص التكامل، بين أنه من أجل كل x من $[-2; \alpha]$: $0 \leq \frac{1}{2}(\alpha - x) \leq g(\alpha) - g(x) \leq \frac{3}{4}(\alpha - x)$.

(7) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = -2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = g(u_n)$.

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2 \leq u_n \leq \alpha$.

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq \alpha - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(\alpha - u_n)$ و $0 \leq \alpha - u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

ج- أستنتج نهاية u_n .

التمرين الأول: (04 نقط) :

ليكن a عدد طبيعي معرف كمايلي: $a = p^4 - 1$ حيث p عدد طبيعي أولي أكبر من أو يساوي 7.

- (1) بين أن p يوافق 1 أو (-1) بترديد 3 ثم أستنتج أن a مضاعف للعدد 3.
- (2) بين أنه يوجد عدد طبيعي k بحيث: $p^2 - 1 = 4k(k+1)$ و أن a مضاعف للعدد 16.
- (3) بأخذ كل بواقي القسمة الإقليدية الممكنة للعدد p على 5، برهن أن $a \equiv 0[5]$.
- (4) ليكن α ، β و δ ثلاثة أعداد طبيعية.
أ- برهن أنه إذا كان α يقسم δ و β يقسم δ علما أن α أولي مع β فإن $\alpha\beta$ يقسم δ .
ب- استنتج مما سبق أن 240 يقسم a .

التمرين الثاني: (04 نقط):

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقط التالية:

$$E(2;3;-1), D(1;3;1), C(4;4;1), B\left(4 - \frac{3\sqrt{2}}{2}; 4 + \frac{3\sqrt{2}}{2}; 4\right), A\left(4 + \frac{3\sqrt{2}}{2}; 4 - \frac{3\sqrt{2}}{2}; 4\right)$$

- (1) بين أن النقط $C; B; A$ تعين مستويا يطلب تعيين معادلة ديكارتية له.
- (2) أ- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة D و العمودي على المستوي (ABC) .
ب- أحسب المسافة بين النقطة E والمستقيم (Δ) .
- (3) لتكن النقطة Ω منتصف القطعة $[AB]$.
بين أن النقط $C; B; A$ تنتمي إلى نفس سطح الكرة (S) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.
- (4) أ- بين أن كل المستويات (P_m) التي معادلة ديكارتية لها $x + y - mz + 4m - 8 = 0$ حيث m وسيط حقيقي، متقاطعة وفق مستقيم (d) يطلب تعيين تمثيلا ديكارتيا له.
ب- هل المستوي (P_0) يعامد المستوي (Q) ذي المعادلة $z = 4$ ؟ علل.
ج- عين المجموعة (S') ، تقاطع (S) مع المستوي (Q) .

التمرين الثالث: (05 نقط):

A_0 و B_0 نقطتان من المستوى بحيث $A_0B_0 = 8$ ، وليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A_0 ، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{3\pi}{4}$.

نعرف متتالية النقط (B_n) بـ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $B_{n+1} = S(B_n)$.

- (1) أنشئ النقط B_1 ، B_2 و B_3 .
- (2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، المثلثان $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان.
- (3) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\left(\overline{A_0B_0}, \overline{A_0B_n}\right) \equiv \frac{3\pi}{4}n[2\pi]$.

(4) نعرف المتتالية العددية (u_n) بـ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = B_n B_{n+1}$.

أ- أثبت أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها q ثم أكتب u_n بدلالة n و u_0 .

ب- نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $T_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$. أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$.

(5) أ- حل في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة: $3x - 4y = 2$.

ب- ليكن (Δ) المستقيم العمودي على المستقيم $(A_0 B_0)$ في النقطة A_0 ، أوجد قيم العدد الطبيعي n

التي من أجلها تكون النقطة B_n تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

التمرين الرابع: (07 نقط):

(1) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة $]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$.

- أدرس تغيرات الدالة g ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجموعة $]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$.

(2) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right); x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

أ- أدرس قابلية اشتقاق f عند 0 ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب- بين أن $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ج- بين أنه من أجل كل x من $]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$ ، $f'(x) = g(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أنشئ (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$ ، (وحدة الطول 2cm).

(4) نعتبر الدالة العددية h المعرفة كما يلي: $h(x) = f(-1-x)$.

أ- بين أن مجموعة تعريف الدالة h هي $]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$.

ب- عين اتجاه تغير الدالة h (دون حساب الدالة المشتقة) ثم شكل جدول تغيراتها.

ج- بين أن (C_h) منحنى الدالة h والمنحنى (C_f) متناظران بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $x = -\frac{1}{2}$.

(5) ارسم (C_h) في نفس المعلم السابق.

(6) أحسب التكامل التالي $\int_{\frac{1}{2}}^1 [1 - f(x)] dx$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

بالتوفيق والنجاح

على المترشح ان يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول (3ن) أجب عن الأسئلة الآتية المستقلة عن بعضها البعض

(1) اوجد العبارة الخطية للدالة $h(x) = \cos^5 x$ ثم استنتج دالتها الأصلية

H التي تحقق $H(\pi) = 16$ (توجيه استعمل نشر $\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^5$)

(2) الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

احسب اصغر بمسافة بين المستقيمين (Γ) و (δ) بحيث

$$(\Gamma) \begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = 3t + 2 \\ z = 2 \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad (\delta) \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = -\alpha \\ z = 1 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

(3) بين صحة المساواة $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{4k}{4k^4+1} = 1 - \frac{1}{2n^2+2n+1}$

(إستعمل $(4a^4 + b^4 = (2a^2 + 2ab + b^2)(2a^2 - 2ab + b^2))$)

التمرين الثاني (5ن)

لتكن المتتالية $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي $w_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$

حيث e يرمز الى اساس اللوغاريتم النبيري

1) احسب w_1

باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن $w_n = e - nw_{n-1}$

2) لتكن المتتالية $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ بحيث $w_n = (-1)^n(e\varphi_n - n!)$

عبر عن φ_{n+1} بدلالة φ_n واستنتج أن حدود المتتالية (φ_n) طبيعية

برهن بالتراجع من اجل $n \in \mathbb{N}^*$ أن $n - 1 \leq \varphi_n$

3) بين ان المتتالية $(\mathcal{L}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة كما يلي $\mathcal{L}_n = \frac{1}{n! \varphi_{n+1}}$ متقاربة

التمرين الثالث (5ن)

(I) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $\frac{\sqrt{2}z}{2} = \sqrt{z-2}$

ا ستنتج حلول المعادلة $(\bar{z} + 2 + 2\sqrt{3}i)^2 - 2\bar{z} = 4\sqrt{3}i$ حيث $\bar{z}$ هو مرافق z

(II) المستوي منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ D,C,B,A نقط ذات اللواحق على

الترتيب $z_D = -1 + 3\sqrt{3}i, z_C = -1 + \sqrt{3}i, z_B = 1 - \sqrt{3}i, z_A = 1 + \sqrt{3}i$

أوجد زاوية و نسبته التشابه المباشر $\mathcal{S}$ الذي مركزه B ويحول C إلى A ثم اعط عبارته المركبة

عين إحداثيات صورة D بالتشابه $\mathcal{S}$ ثم إستنتج أن المثلثين BCD و BAD متشابهين

نعتبر التحويل النقطي Φ الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(Z')$ بحيث

$$2Z' = 2(-i\cos(\pi/6) + \sin(\pi/6))z - 1$$

عين طبيعة التحويل Φ وعناصره المميزة

عين العبارة المركبة للتحويل $\Phi \circ \mathcal{S}$

عين طبيعة مجموعة النقط M من المستوي (Γ) بحيث $(\Gamma): 2(Z + \bar{Z}) + Z\bar{Z} = 0$

عين صورة المجموعة (Γ) بالتحويل $\Phi \circ S$

التمرين الرابع (7ن)

(I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كما يلي $f(x) = (1 - 2x)e^{2x}$

نسمي (C_f) منحناها البياني في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول $2cm$

أدرس تغيرات الدالة f شكل جدول تغيراتها ثم أنشئ (C_f) في المعلم السابق

ناقش حسب قيم m عدد و اشارة حلول المعادلة $f(x) = f(m)$ حيث m و سيط حقيقي

أحسب ب cm^2 و بدلالة λ المساحة $S(\lambda)$ لحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f)

و المستقيمت التي معادلاتها $y = 0$ و $x = \frac{1}{2}$ و $x = \lambda$ بحيث $\lambda < \frac{1}{2}$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} S(\lambda)$

(II)

احسب المشتقات المتتالية $f^{(n)}$ للدالة f حتى الرتبة 4 من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

أوجد تخميناً للعلاقة العامة ل $f^{(n)}$ ثم برهن بالتراجع هذا التخمين

أستنتج حلول المعادلة التفاضلية $y'' = 8(-2 - 2x)e^{2x}$

(III)

من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n المنحني $(C_{f^{(n)}})$ الممثل للدالة $f^{(n)}$ يقبل مماس يوازي

حامل محور الفواصل في النقطة $M_n(x_n, y_n)$ احسب بدلالة n كلا من x_n و y_n

بين أن المتتالية (x_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول
أحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

بين أن المتتالية (y_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول
أحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

الموضوع الثاني

التمرين الأول (3ن) أجب عن الأسئلة الآتية المستقلة عن بعضها البعض

(1) نعتبر المعادلة التفاضلية (E) بحيث $y'' - 2y' + y = 4e^x$ بين ان الدالة ψ

بحيث $\psi(x) = (2x^2 - 3x)e^x$ هي حل ل (E) وأستنتج دالة أصلية لدالة ψ

(2) المستوي منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ولتكن النقطة $M(z)$ ذات

عين مجموعة النقط من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق

$$\arg(\bar{z} - 2i)^2 - \arg(2\bar{z} - 4i)^2 + \arg(i + 1) = \frac{\pi}{7}$$

(3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$

بين انه اذا كان n فرديا فإن A_{n+1} يقبل القسمة على 7

التمرين الثاني (5ن)

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ و α عدد حقيقي من المجال $]0, \pi[$

لتكن (S_α) مجموعة النقط $M(x, y, z)$ التي تحقق

$$(S_\alpha): OM^2 - 2 \cos(\alpha) [\overrightarrow{OM} \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})] + 3 - 4 \sin^2(\alpha) = 0$$

(1) اعط معادلة ديكارتية ل (S_α)

(2) بين ان (S_α) هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها I_α و نصف وقطرها R_α

استنتج مجموعة النقط I_α عندما يسمح α المجال $]0, \pi[$

(3) عين سطوح الكرات (S_α) التي تمر بالمبدأ O

بين أن O منتصف القطعة $[I_{\pi-\alpha}I_{\alpha}]$

استنتج أن (S_{α}) و $(S_{\pi-\alpha})$ متناظران بالنسبة إلى O

4) ليكن المستوي (P) ذو المعادلة $x + y + z = 0$

عين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة I_{α} على (P) ثم ادرس (P) و (S_{α})

التمرين الثالث(4ن)

1- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 2^n على 5

استنتج باقي القسمة الاقليدية ل $(2017^{4n+3} - 2 \times 2016^{8n} + 2014^{2n+1})$ على 5

2- بين ان العدد 131 اولي

3- عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق
$$\begin{cases} 3m + 7d = 2^n - 8 \\ ab = 5m \end{cases}$$

حيث $d = PGCD(a, b)$ و $m = PPCM(a, b)$

4- عين قيم يكون $7 < n < 15$ ثم استنتج الشئيات (a, b)

التمرين الرابع(8ن)

(I) نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $]0, +\infty[$ كما يلي $f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$

نسمي (C_{f_n}) منحنىها البياني في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (n عدد طبيعي غير معدوم)

أدرس تغيرات f_1 ثم عين معادلة المماس (T) للمنحني (C_{f_1}) في النقطة ذات الفاصلة 1

بين ان جميع المنحنيات (C_{f_n}) تشترك في نقطتين ثابتين عينهما

أدرس اتجاه تغيرات الدالة f_n في حالة n فردي ثم في حالة n زوجي ثم شكل جدولين لتغيراتها

أنشئ (C_{f_1}) و (C_{f_2})

$$\varphi_n = \int_1^e f_n(x) dx \quad (\text{II}) \quad \text{متتالية عددية معرفة ب}$$

$$\varphi_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)\varphi_n \quad \text{ثم بين أن}$$

احسب φ_2 استنتج مساحة الحيز من المستوي المحدد ب (C_{f_1}) و (C_{f_2}) والمستقيمن ذي المعادلتين

$$x=e \quad \text{و} \quad x=1$$

(III)

$$\mathcal{W}_n = \int_1^{e^2} f_n(x) dx \quad \text{نعتبر الان} \quad (\mathcal{W}_n) \quad \text{متتالية عددية معرفة ب}$$

$$\mathcal{W}_{n+1} = -\frac{2^{n+1}}{e^2} + (n+1)\mathcal{W}_n \quad \text{ثم بين أن} \quad (1 \leq n)$$

أستنتج $\mathcal{W}_1$ و $\mathcal{W}_2$

$$g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x} \quad \text{على المجال} \quad]0, +\infty[\quad \text{ليكن الدالة } g \quad \text{المعرفة كما يلي}$$

أوجد حجم المجسم المولد عن دوران منحنى الدالة g حول حامل محور الفواصل في المجال

$$x \in [1, e^2]$$

الموضوع الثالث

التمرين الأول(4ن) أجب عن الأسئلة الآتية المستقلة عن بعضها البعض

(1) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية a و b و c بحيث

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

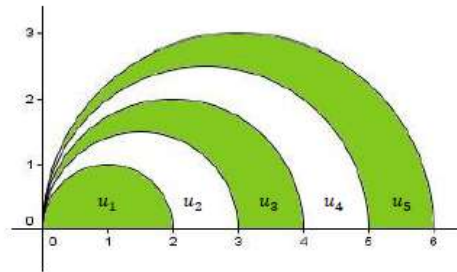
احسب القيمة المتوسطة للدالة $h(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$ في المجال $[0, -3]$

(2) لتكن المتتالية (ϖ_n) المعرفة بمجدها العام كما يلي $\varpi_n = \frac{11}{2} + \frac{-5n}{2}$

برهن بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم صحة المساواة

$$\varpi_1 + 2\varpi_2 + 3\varpi_3 + \dots + n\varpi_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$$

(3) أثبت ان المتتالية (u_n) للمساحات كما في الشكل أدناه هي متتالية حسابية اوجد عبارة حدها العام والحد u_{100}



التمرين الثاني(5ن)

(1) نعتبر الدالة φ المعرفة على $]0, +\infty[$ كما يلي $\varphi(x) = \frac{x^2-1}{4} - 2\ln x$

ادرس تغيرات الدالة φ

برهن أن للمعادلة $\varphi(x) = 0$ حلا وحيدا α حيث $3 < \alpha < 4$ ثم انشئ (C_φ)

(2) نعتبر الدالة μ المعرفة على $[3, +\infty[$ كما يلي $\mu(x) = \sqrt{1 + 8\ln x}$

برهن أن المعادلة $\varphi(x) = 0$ تكافئ المعادلة $\mu(x) = x$

برهن أن $\varphi(x) \geq 3$ و أن $0 < \varphi'(x) \leq \frac{4}{9}$

(3) نعتبر المتتالية (ζ_n) المعرفة كما يلي $\begin{cases} \zeta_0 = 3 \\ \zeta_{n+1} = \mu(\zeta_n) \end{cases}$

برهن بالتراجع أن $\zeta_n \geq 3$

باستعمال التكامل برهن أن $0 < \zeta_{n+1} - \alpha \leq \frac{4}{9}(\zeta_n - \alpha)$

من العبارة الأخيرة اوجد حصرا احد طرفيه $\left(\frac{4}{9}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n$

التمرين الثالث (5ن)

يحتوي كيس على 3 كرات بيضاء ، كرتين صفراوين وكرتين حمراوين. نسحب كرتين على التوالي (بدون إرجاع).

X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة و Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الصفراء المسحوبة.

(1) عين القيم الممكنة لـ X .

(2) عين قانون احتمال المتغير X .

(3) احسب الأمل الرياضي والتباين للمتغير X .

(4) أجب عن نفس الأسئلة السابقة بالنسبة للمتغير Y .

(5) نعتبر المتغير العشوائي Z حيث $Z = X + Y$ ، وليكن N المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

• عبر عن Z بدلالة N . • استنتج قانون احتمال Z .

• احسب $E(Z)$ الأمل الرياضي لـ Z و $\sigma(Z)$ تباين Z .

التمرين الرابع (6ن)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

لتكن الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = e^{-x} \cos(4x)$$

الشكل ادناه هو تمثيلها البياني Γ في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

نعتبر الدالة g المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ $g(x) = e^{-x}$

و نرمز بـ C إلى تمثيلها البياني في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$:

$$-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$$

ب- استنتج نهاية f عند $+\infty$.

2. عين إحداثيات نقط تقاطع المنحنيين Γ و C .

3. نعرف المتتالية (u_n) على N بـ $u_n = f\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

أ- بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها.

ب- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و ادرس تقاربها.

4. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$:

$$f'(x) = e^{-x} [\cos(4x) + 4\sin(4x)]$$

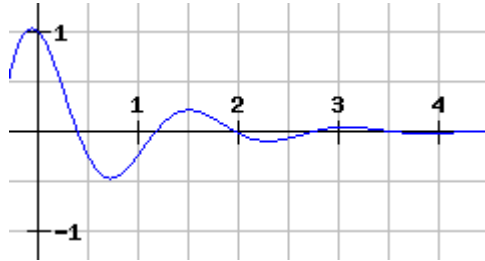
ب- استنتج أن المنحنيين Γ و C لهما نفس المماس عند كل نقطة من نقط تقاطعهما.

5. أعط قيمة مقربة إلى 10^{-1} لمعامل توجيه المماس T

للمنحني Γ عند النقطة التي فاصلتها $\frac{\pi}{2}$

• أتمم الشكل السابق برسم المماس T و المنحني C .

اوجد مساحة الحيز المحدد بـ Γ و C في المجال $[0; 1; 5]$



عن الأستاذ لعلاونة علي

الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن): الفضاء (E) منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

(1) بين أن مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق:

$$(x + 2y - z + 2)^2 + (3x + y + 2z - 1)^2 = 0$$

(2) بين أن مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق:

$$(x + 2y - z + 2)^2 - (3x + y + 2z - 1)^2 = 0$$

إعطاء معادلتين ديكارتيتين لهما.

و تحقق من أن: $(P) \cap (Q) = \{(D)\}$.

(3) نرفق بكل عدد حقيقي m المستوي (P_m) المعرف بالمعادلة الديكارتية:

$$(1 + 3m)x + (2 + m)y + (2m - 1)z + 2 - m = 0$$

بين أن (P_m) يحوي (D) .

(4) هل أن كل مستوي يحوي (D) هو المستوي (P_m) ؟ برر .

التمرين الثاني (4ن): يحتوي كيس على 10 كرات متماثلة لا نستطيع التفرقة بينها عند اللمس منها: 3 حمراء ، 3 خضراء و 4 بيضاء. نسحب من هذا الكيس ثلاث كرات في آن واحد.

(1) ما هو احتمال الحصول على نفس اللون؟ ما هو احتمال الحصول على الألوان الثلاثة؟ ما هو احتمال الحصول على كرة بيضاء على الأقل.

(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب ثلاث كرات "عدد الكرات البيضاء المسحوبة"

ما هو قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ؟ (عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X).

(3) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

(4) أحسب التباين $V(X)$ و الإنحراف المعياري $\sigma(X)$ للمتغير العشوائي X .

التمرين الثالث (5ن):

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(1) \dots \frac{z-2}{z-1} = z$ ثم أكتب الحلول على الشكل المثلثي.

(2) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(2) \dots \frac{z-2}{z-1} = i$ ثم أكتب الحلول على الشكل الجبري.

(3) في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط M ، A و B ذات اللواحق على الترتيب Z ، $Z_A = 1$ و $Z_B = 2$ حيث: M تختلف عن A و B .
فسر هندسياً طويلاً و عمدة للعدد $\frac{Z-2}{Z-1}$ ، جد من جديد حلول المعادلة (2) هندسياً.

(4) n عدد طبيعي غير معدوم، بين باعتبارات هندسية أن كل حل للمعادلة: $\left(\frac{Z-2}{Z-1}\right)^n = i$ ذو جزء حقيقي يساوي $\frac{3}{2}$.

(5) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $\left(\frac{Z-2}{Z-1}\right)^2 = i$ و أكتب الحلول على الشكل الجبري.

التمرين الرابع:

الجزء الأول: لتكن g و h الدالتين المعرفتين على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:
 $h(x) = x + (x - 2) \ln x$ ، $g(x) = x - 1 - \ln x$
(1) أدرس تغيرات الدالة g .

(2) إستنتج أن $g(x) \geq 0$ من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$. بين أن من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$
 $h(x) = 1 + g(x) + (x - 1) \ln x$ ، ثم بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$
 $(x - 1) \ln x \geq 0$ ، ثم إستنتج إشارة $h(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

الجزء الثاني: لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = 1 + x \ln x - (\ln x)^2$.
نسمي (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(3) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً، و أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(4) بين أنه من أجل كل $x > 0$ ، $f'(x) = \frac{h(x)}{x}$ ، ثم إستنتج جدول تغيرات الدالة f .

(5) عيّن معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة A ذات الفاصلة 1، تحقق أنه من أجل كل $x > 0$:
 $f(x) - x = (\ln x - 1)g(x)$ ، أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و المماس (Δ) .

(6) أنشئ (Δ) و (C_f) علماً أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف فاصلتها محصورة بين 1 و 1.5.

الجزء الثالث: (U_n) متتالية معرفة كما يلي: $U_0 = \sqrt{e}$ و من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = f(U_n)$.

(7) برهن بالتراجع أن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $1 < U_n < e$ ، بين أن المتتالية (U_n) متناقصة. إستنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة، ثم أحسب نهايتها.

الأستاذة زعتراً أمال _____ الصفحة 2 من 4 _____ إنتهى الموضوع الأول

بالتوفيق _____ الإثنين 15 ماي 2017

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4ن):

نعتبر المتتاليتين (x_n) و (y_n) حدودهما أعداد طبيعية، معرفتان كما يلي:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

- (1) برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $x_n = 2^{n+1} + 1$.
- (2) أحسب $PGCD(x_8; x_9)$ ، ماذا تلاحظ؟ هل العددين x_n و x_{n+1} أوليان فيما بينهما من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ؟ عيّن $PGCD(x_{2016}; x_{2017})$ ثم $PGCD(x_{1437}; x_{1438})$.
- (3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2x_n - y_n = 5$. عبّر عن y_n بدلالة n ، ثم أدرس حسب قيم p باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^p على 5.

- (4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $d_n = PGCD(x_n; y_n)$ ، برهن أن $d_n = 1$ أو $d_n = 5$ ثم إستنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $PGCD(x_n; y_n) = 1$.

التمرين الثاني (4ن): الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ و α عدد حقيقي حيث:

$$\alpha \in]0; \pi[$$

نعتبر (S_α) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء حيث:

$$OM^2 - 2 \cos(\alpha) [\overrightarrow{OM} \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})] + 3 - 4 \sin^2(\alpha) = 0$$

- (1) عيّن معادلة ديكارتية للمجموعة (S_α) ، بيّن أنها سطح كرة يُطلب تعيين مركزها I_α و نصف قطرها R_α .
- (2) إستنتج مجموعة النقط I_α عندما يسمح العدد الحقيقي α في المجال $]0; \pi[$.
- (3) عيّن سطوح الكرات (S_α) التي تمرّ من المبدأ، و بيّن أن المبدأ هو منتصف القطعة $[I_{\pi-\alpha} I_\alpha]$ ، ماذا تستنتج بالنسبة لسطحي الكرتين (S_α) و $(S_{\pi-\alpha})$ ؟
- (4) ليكن (P) المستوي ذي المعادلة الديكارتية: $x + y + z = 0$. عيّن إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة I_α على المستوي (P) ثم أدرس تقاطع سطح الكرة (S_α) و المستوي (P) .

التمرين الثالث (5ن):

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، (وحدة الطول 5cm).

- نضع: $Z_0 = 2$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n ، $Z_{n+1} = \frac{1+i}{2} Z_n$ ، و نسمي A_n صورة العدد المركب Z_n .
- (1) أحسب الأعداد المركبة: Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 ، ثم تحقق أن Z_4 حقيقي. مثّل عندئذ النقاط: A_1, A_2, A_3 و A_4 .
 - (2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع: $u_n = |Z_n|$. بيّن أن المتتالية (u_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها و حدّها الأول، ثم أكتب u_n بدلالة n .
 - (3) عيّن العدد الطبيعي A_0 بحيث من أجل $n \geq n_0$ ، النقطة A_n تقع داخل قرص مركزه O و نصف قطره 0.1.

(4) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_{n+1}} = i$ ، إستنتج طبيعة المثلث OA_nA_{n+1} .

(5) من أجل كل عدد طبيعي n نسمي l_n طول الخط المنكسر المحدد بالنقاط:

$$A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n.$$

عبر عن l_n بدلالة n و عيّن نهايتها.

التمرين الرابع (7ن):

m وسيط حقيقي، الدالة العددية للمتغير الحقيقي x و المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f_m(x) = e^{-2x} - (1+m)e^{-x} + m.$$

(C_m) التمثيل البياني للدالة f_m في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

الجزء الأول: نضع $m = 1$:

- (1) أدرس تغيّرات الدالة f_1 .
- (2) برهن أن المنحنى (C_1) يقبل نقطة إنعطاف A_0 يُطلب تعيينها و أكتب (T) معادلة المماس لـ (C_1) عندها.
- (3) أرسم المماس (T) و المنحنى (C_1) . (تؤخذ $\|\vec{i}\| = 2cm$).
- (4) أحسب المساحة $\mathcal{A}(\lambda)$ للحيز المحدود بالمنحنى (C_1) و حامل محور الترتيب المستقيمين اللذين معادلتاهما: $y = 1$ و $x = \lambda$. حيث $\lambda > 0$ ، ثم أحسب نهاية $\mathcal{A}(\lambda)$ لما λ يؤول إلى $(+\infty)$.

الجزء الثاني: m وسيط حقيقي كيفي.

- (5) بيّن أن المنحنيات (C_m) تشترك في نقطة ثابتة يطلب تعيينها، ثم ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود نقاط تقاطع (C_m) و حامل محور الفواصل.
 - (6) أدرس تغيّرات الدالة f_m .
 - (7) $m' > m$ عدد حقيقي حيث أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_m) و $(C_{m'})$ ثم أرسم (دون دراسة التغيّرات) المنحنيين (C_{-2}) و (C_3) في نفس المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$. برهن أن ذرى (مجموع ذروة) المنحنيات (C_m) - النقاط التي تقبل عندها f_m قيم حدية - تنتمي إلى منحنى (P) يُطلب إعطاء معادلة له مستقلة عن m .
- الاستاذة زعترا آمال _____ الصفحة 4 من 4 _____ إنتهى الموضوع الثاني

بالتوفيق _____ الإثنين 15 ماي 2017

اختبار في مادة : الرياضيات	معامل المادة : 7	مدة الاختبار : 4 سا
----------------------------	------------------	---------------------

* على المترشح أن يختار احد الموضوعين التاليين *
وفي مايلي نص الموضوعين :

الموضوع الأول : (20 نقطة)

التمرين الأول : (4 نقاط)

- (1) بوضع $1 - x^2 = t$ احسب التكامل التالي : $\int x\sqrt{1-x^2} dx$ (لاحظ أن : $\int \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t\sqrt{t}$)
- (2) لتكن v_n المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $v_0 = \frac{\pi}{4}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$
 - بين انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $0 \leq v_n \leq \frac{1}{n+1}$ ثم استنتج نهاية المتتالية v_n
 - باستعمال التكامل بالتجزئة بين انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $v_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} \times v_n$
- (3) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $\frac{n+1}{n+4} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$, ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n}$
 - بين انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $v_n \times v_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)}$
 - بين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\sqrt{n} \times v_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

التمرين الثاني : (5 نقاط)

ليكن α عدد مركب غير معدوم طويلته r وعمدته θ

- (1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E_α) ذات المجهول Z حيث : $z^3 + \alpha z^2 - \bar{\alpha} z - 1 = 0$
 - بين انه إذا كان z_1, z_2, z_3 و z_3 حلول للمعادلة (E_α) فان : $z_1 \times z_2 \times z_3 = 1$
 - بين انه إذا كان Z حل للمعادلة (E_α) فان $\frac{1}{Z}$ حل لها أيضا
- (2) نضع $|\alpha| = 1$: بين أن : $-\alpha$ حل مضاعف للمعادلة (E_α) ثم استنتج الحل الثالث بدلالة θ
- (3) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $2z^3 - (\sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}i)z^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{2}i)z - 2 = 0$

- نضع z_A حلا مضاعفا للمعادلة السابقة : اكتب z_B الحل الثالث للمعادلة على الشكل الآسي ثم استنتج عمدة لـ z_A
- عين القيمة المضبوطة لـ : $\sin \frac{3\pi}{8}$ و $\cos \frac{3\pi}{8}$
- (4) عين الثنائيات (x, y) من الأعداد الصحيحة حلول المعادلة : $16x - 3y = 4$ (لاحظ أن : (1,4) حل خاص)
- عين قيم العدد الطبيعي n حيث : $i(z_A)^n$ عدد حقيقي موجب

التمرين الثالث : (4 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر (S_λ) مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ من الفضاء ذات الوسيط الحقيقي λ والتي تحقق : $x^2 + y^2 + z^2 - 2(\lambda + 1)x - 2(\lambda + 1)y - (2 + \lambda)z - 6 - \lambda = 0$

- (1) بين انه من اجل كل عدد حقيقي λ فان (S_λ) سطح كرة يطلب تعيين مركزها I_λ ونصف قطرها r_λ بدلالة λ
- (2) عين مجموعة النقاط I_λ لما يتغير λ في مجموعة الأعداد الحقيقية
- (3) عين اصغر نصف قطر للسطوح الكرة (S_λ) من اجل كل عدد حقيقي λ
- (4) بين انه مهما يتغير λ في مجموعة الأعداد الحقيقية فان جميع سطوح الكرة (S_λ) تشمل دائرة ثابتة يطلب تعيين عناصرها المميزة

التمرين الرابع : (7 نقاط)

لتكن الدالة g المعرفة من اجل كل عدد حقيقي x بـ : $g(0) = 0$ و $g(x) = x^2 e^{\frac{-1}{x^2}}$ وليكن (ξ) منحها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

- (1) بين أن الدالة g دالة زوجية
- (2) ادرس استمرارية الدالة g عند 0
- ادرس قابلية الاشتقاق للدالة g عند 0 ثم فسر النتيجة هندسيا
- احسب : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x}$ ثم فسر النتيجة هندسيا
- ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها
- (3) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = x^2 - 1$ وليكن (γ) منحها البياني في المعلم السابق
- بين أن : $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - h(x)] = 0$ ثم فسر النتيجة هندسيا
- بين انه من اجل $t \in \mathbb{R}$ فان : $e^t \geq t + 1$ ثم استنتج الوضع النسبي بين (γ) منحنى الدالة h و (ξ) منحنى الدالة g
- (4) ارسم (ξ) و (γ)

(5) من اجل كل عدد طبيعي n نعتبر u_n المتتالية العددية المعرفة بـ :

$$u_n = \int_{e^{2n}}^{e^{4n+4}} g\left(\frac{1}{\sqrt{\ln x}}\right) dx$$

- أعط تفسير هندسي للعدد : u_0
- اكتب u_n بدلالة n ثم احسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

التمرين الأول : (4 نقاط)

a, b, c أعداد طبيعية حيث : $1 \leq a \leq b \leq c$

- (1) عين الأعداد a, b, c علما أن في النظام ذي الأساس a يكون : $b+c=46$ و $bc=545$
- (2) نعتبر المعادلة $21x-17y=8 \dots (E)$ حيث x و y عددين صحيحين طبيعيين
 - عين الثنائية (x_0, y_0) حل خاص للمعادلة (E)
 - حل في $\mathbb{N}^2$ المعادلة (E)
- (3) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n , بواقي القسمة الاقليدية للعدد 9^n على 13
 - بين انه إذا كان (α, β) حل للمعادلة (E) فان : $3^{34\beta+20} - 9^{21\alpha} - 2 \equiv 0 [13]$
- (4) بين انه إذا كان (x, y) حل للمعادلة (E) و $x \equiv 0 [4]$ فان : $y \equiv 0 [4]$
 - عين (x, y) حلول المعادلة (E) التي يكون من اجلها : $p \gcd(x, y) = 4$

التمرين الثاني : (4 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $C(3, 2, 1), B(1, 2, 0), A(3, 1, 0)$ و $D(0, 0, m)$ حيث m وسيط حقيقي موجب

- (1) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{BABC}$ ثم استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $\sin(\hat{ABC})$ و $\cos(\hat{ABC})$
 - احسب مساحة المثلث ABC
 - بين ان الشعاع $\vec{n}(1, 2, -2)$ ناضمي للمستوي (ABC) ثم عين معاداة ديكارتية له
- (2) بين ان $ABCD$ رباعي وجوه وان حجمه : $v_{ABCD} = \frac{2m+3}{6}$
- (3) لتكن (S_m) مجموعة النقط $M(x, y, z)$ والتي تحقق : $x^2 + y^2 + z^2 - 2mz + m^2 - 9 = 0$
 - بين انه من اجل كل عدد حقيقي m فان (S_m) سطح كرة يطلب تعيين عناصرها المميزة
- (4) عين قيمة m حتى يكون المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S_m)
 - اكتب معادلة المستوي (P) الموازي للمستوي (ABC) ويمس (S_m)

التمرين الثالث : (5 نقاط)

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقطتين A و β_0 ذات اللاحقتين على الترتيب z_A و z_0 حيث : $A\beta_0 = 4$

وليكن (T) التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n نعتبر β_n لاحقة Z_n حيث : $\beta_{n+1} = T(\beta_n)$ ومن اجل كل عدد طبيعي n نعتبر المتتاليتين u_n و v_n المعرفتين بـ :

$$u_n = A\beta_n \quad \text{و} \quad v_n = \arg(z_n - z_A) \quad \text{مع} \quad (z_n \neq z_A)$$

(1) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : u_n متتالية هندسية و v_n متتالية حسابية يطلب تعيين أساس لكل منهما

(2) أنشئ بطريقة هندسية β_1 (موضحا الطريقة المتبعة) ثم بين أن : $\beta_0\beta_1 = 2\sqrt{7}$

(3) اكتب u_n بدلالة n ثم احسب الجداء P_n حيث : $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$

(4) حل في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة ذات المجهول (x, y) حيث : $2x - 3y = 1$ (لاحظ أن : (2,1) حل خاص)

(5) عين قيم العدد الطبيعي n حيث : $\arg\left(\frac{z_n - z_A}{z_0 - z_A}\right)^2 = \frac{2\pi}{3}$ مع $(z_n \neq z_A)$

التمرين الرابع : (7 نقاط)

(1) g الدالة المعرفة بـ $g(1)=1$ ومن اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1, +\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{x-1}{x \ln x}$ وليكن (δ)

منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

• بين أن الدالة g مستمرة على 1

• نقبل أن : $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{g(x)-1}{x-1} \right) = -\frac{1}{2}$ فسر هذه النتيجة هندسيا

• احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

• بين انه من اجل $x \geq 1$ فان : $\ln x \leq x-1$

• ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

• بين أن (δ) يقبل مماسا (Δ) يعامد المستقيم $y = 2x$ يطلب تعيين معادلة ديكرتية له

(2) لتكن الدالة h المعرفة من اجل كل $x > 1$ بـ : $h(x) = \frac{1}{\ln x}$ وليكن (ψ) منحناها البياني في المعلم السابق

• بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - h(x)] = 0$ ثم فسر النتيجة هندسيا

• ادرس الوضع النسبي بين (δ) منحنى الدالة g و (ψ) منحنى الدالة h

• أنشئ كل من (ψ) , (δ) و (Δ)

• m وسيط حقيقي. ناقش بيانها وحسب قيم الوسيط m حلول المعادلة : $\frac{\ln x}{x-1} (mx - \frac{1}{2}x^2) - 1 = 0$

(3) ليكن α عدد حقيقي اكبر تماما من 1 وليكن $A(\alpha)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (δ) والمنحنى (ψ) والمستقيمين

الذين معادلتهم : $x = e$ و $x = e^{1+\frac{1}{\alpha}}$

• احسب $A(\alpha)$ بدلالة α ثم عين $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$

• بين ان : $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} (\alpha A(\alpha)) = 1$

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر المستقيمين (d) و (d') المعرفين كمايلي:

$$(d') : \begin{cases} x = 4 + 3t' \\ y = 3 + t' \\ z = 3 + 2t' \end{cases} ; t' \in \mathbb{R} , \quad (d) : x - 2 = \frac{y - 1}{2} = 1 - z$$

(1) أكتب التمثيل الوسيطى للمستقيم (d) ، ثم بين أن المستقيمين (d) و (d') ليسا من نفس المستوي.

(2) أ* / أوجد المعادلة الديكارتية للمستويين (p_1) و (p_2) اللذين يشملان النقطة $A(4; -7; 5)$.

حيث المستوي (p_1) يحوي المستقيم (d) و المستوي (p_2) يحوي المستقيم (d') .

$$(\Delta) : \begin{cases} x = \frac{-1}{11} + 9\alpha \\ y = 3 - 22\alpha \\ z = 11\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{ب* / تحقق أن المستويين } (p_1) \text{ و } (p_2) \text{ متقاطعان وفق مستقيم } (\Delta) \text{ معرف بـ:}$$

(3) لتكن $B \left(\frac{-1}{11}; 3; 0 \right)$ نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوي (Q) ذو المعادلة: $11x + y - z = 2$.

أ* / أوجد إحداثيات النقطة A' المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (Q) .

ب* / استنتج المسقط العمودي للمستقيم (Δ) على المستوي (Q) .

(4) (Γ) مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء تحقق: $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$

ب* / عين طبيعة المجموعة (Γ) محددا عناصرها المميزة.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

A_0 و B_0 نقطتان من المستوي حيث: $A_0 B_0 = 8$ (الوحدة هي السنتيمتر) ، ليكن S التشابه المباشر الذي

مركزه النقطة A_0 ونسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{3\pi}{4}$.

نعرف متتالية النقط (B_n) كمايلي: $B_{n+1} = S(B_n)$ ، من أجل كل عدد طبيعي n .

- (1) أنشئ النقط B_1, B_2, B_3 و B_4 .
- (2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n المثلثان: $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان.
- (3) نعرف متتالية (u_n) بـ: $u_n = B_nB_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n .
- أ* أثبت أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.
- ب* أكتب عبارة u_n بدلالة n .
- ج* نضع المجموع: $\delta_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ، أحسب δ_n بدلالة n ثم أوجد $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n$.
- (4) أ* حل في $\square \times \square$ المعادلة: $3x - 4y = 2$.
- ب* ليكن (Δ) المستقيم العمودي على المستقيم (A_0B_0) في النقطة A_0 .
- *جد قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون النقطة B_n تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- (1) نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة $\square$ المعادلة ذات المجهول Z :
- $$\bar{Z}^3 - 3\bar{Z}^2 + 3\bar{Z} + 7 = 0 \quad (E) \quad , \quad \bar{Z} \text{ هو مرافق العدد المركب } Z.$$
- أ* بين أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة: $(\bar{Z} + 1)(\bar{Z}^2 - 4\bar{Z} + 7) = 0$.
- ب* حل في $\square$ المعادلة (E) .
- (2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C و D لواحقتها على الترتيب: $z_A = -1$ ، $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = \bar{z}_B$ ، $z_D = 3$.
- أ* عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا.
- ب* عين طبيعة المثلث ABC .
- (3) أ* أكتب العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسّي، ثم استنتج أن النقطة A صورة D بتحويل نقطي يطلب تعيينه.
- ب* أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD .
- (4) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي لاحتقتها Z تحقق: $z + 1 = 2\sqrt{3}k.e^{i\frac{\pi}{6}}$ حيث k يسمح المجال $[0; +\infty[$.
- أ* عين قياسا للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overrightarrow{AB})$ ، ثم استنتج مجموعة النقط (Γ) .
- (5) أ* عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث يكون: $-\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} + \alpha \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.
- ب* عين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|-\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} - 3\overrightarrow{DM}\| \leq 2\|\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\|$.
- ج* استنتج مجموعة نقط تقاطع (E) و (Γ) .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- (1) $g(x) = x^2 e^x$: المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ :
 أ* / أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$.
 ب* / استنتج أنه : إذا كان $0 < x < 1$ فإن $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$ و إذا كان $x > 1$ فإن $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$
 (2) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + e^{\frac{1}{x}} - 3e$$

 (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 h دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $h(x) = e^{\frac{1}{x}} - 3e$. (C_h) تمثيلها البياني (أنظر الملحق)
 أ* / أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
 ب* / بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، ثم احسب $f'(1)$.
 ج* / شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0; +\infty[$.
 (3) أ* / بين أن المعادلة : $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تقبل حلين α و β حيث : $1.5 < \beta < 1.6$ و $0.5 < \alpha < 0.6$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين .
 ب* / أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h) .
 ج* / بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها 1 يطلب كتابته معادلته .
 (4) أ* / أرسم (T) و (C_f) . (الملحق يعاد مع ورقة الإجابة)
 ب* / m عدد حقيقي موجب تماما ، أوجد قيمة m حتى تقبل المعادلة (E) حلين متميزين :

$$(E) \dots f(x) = (m^2 - 2m + 2)e^m + h(m)$$

 (5) أ* / بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $\int_1^x [f(t) - h(t)] dt = (x^2 - 4x + 6)e^x - 3e$.
 ب* / ليكن العدد λ من المجال $]0; 1[$ ،
 $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_h) و (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتهما :
 $x = \lambda$ و $x = 1$.
 * استنتج $A(\lambda)$ (مقدرة بوحدة المساحة) ، ثم احسب $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda)$.

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر النقط $C(3;2;1)$ ، $B(1;2;0)$ ، $A(3;1;0)$

$$\begin{cases} x = 2 - 2\alpha + \beta \\ y = \frac{3}{2} - 4\alpha + 2\beta \\ z = -5\alpha \end{cases} ; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ مستوي معرف بـ: } (Q)$$

و $D(0;0;m)$ حيث m عدد حقيقي موجب،

1) أ* / أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ ثم استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $\sin \angle ABC$ و $\cos \angle ABC$.
ب* / أحسب مساحة المثلث ABC .

ج* / بين أن $\vec{n}(1;2;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكارتية له.

د* / بين أن $ABCD$ رباعي وجوه و أن حجمه : $V = \frac{2m+5}{6} uv$

2) أ* / بين أن: (Q) هو المستوي المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$ معادلته الديكارتية : $-2x + y = \frac{-5}{2}$.

ب* / استنتج ان المستويين (ABC) و (Q) متعامدان و أنهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيله الوسيط.

ج* / أحسب $d(D; (Q))$ ثم استنتج بدلالة m المسافة بين النقطة D و المستقيم (Δ) .

3) لتكن (S_m) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق: $x^2 + y^2 + z^2 - 2mz + m^2 - 9 = 0$

أ* / بين أنه من أجل عدد حقيقي m فان (S_m) سطح كرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

ب* / عين قيمة m حتى يكون المستوي (ABC) مماسا لسطح الكرة (S_m) .

4) أكتب معادلة المستوي (P) الموازي تماما للمستوي (ABC) و يمس سطح الكرة (S_m) .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $11x - 5y = 2$

أ* / أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $y \equiv 4[11]$.

ب* / استنتج حلول المعادلة (E) .

2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم، نضع: $a = 5n + 2$ و $b = 11n + 4$.

أ* / عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

ب* / عين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون: $\text{PGCD}(a; b) = 2$.

ج* / استنتج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون العددين a و b أوليان فيما بينهما.

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع: $A = 5n^2 + 7n + 2$ و $B = 11n^2 + 15n + 4$.

أ* / بين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B .

ب* / استنتج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- (1) عين العددين المركبين Z_1 و Z_2 حيث :

$$\begin{cases} 2Z_1 + iZ_2 = 1 + i\sqrt{3} \\ (\sqrt{3} + 2i)Z_1 - Z_2 = (1 - \sqrt{3})i \end{cases}$$
- (2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين: $Z_A = 1 - i$ و $Z_B = 2 + \sqrt{3} + i$.
 أ/* اكتب Z_A على الشكل الأسّي.
 ب/* بين أن: $\frac{Z_B}{Z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم استنتج الشكل الأسّي للعدد Z_B .
- ج/* هل توجد قيم للعدد الطبيعي n حتى تكون صورة العدد $\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right)^n$ تنتمي إلى المنصف الأول؟
- (3) أ/* أوجد لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{-\pi}{6}$.
 ب/* احسب مساحة الدائرة (γ) التي قطرها $[BB']$. (مقدرة بوحدة المساحة)
 ج/* عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $\arg[(z - Z_B)^2] = \arg(Z_B) - \arg(Z_{B'})$
 د/* عين Z_C لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $AB'BC$ مستطيل، ثم اوجد Z_I لاحقة مركز ثقله.
- (4) نضع: $f = ros$ (يرمز o إلى تركيب التحويلين S و r).
 أ/* عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S حيث يكون f تشابه مباشر مركزه O ونسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{3}$.
 ب/* أوجد مساحة صورة الدائرة (γ) بالتشابه المباشر S (مقدرة بوحدة المساحة).
 (5) أ/* إذا كان $S(M) = M'$ ، ما طبيعة المثلث OMM' ؟
 ب/* عين مجموعة النقط M من المستوي التي يكون من أجلها: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM'} = 0$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - e + \ln(1 + 2e^{-2(x-e)})$
 و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- (1) أ/* تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)})$
 ب/* احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 ج/* أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
- (2) أ/* بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D') معادلتهما:
 $y = x - e$ و $y = -x + \ln 2 + e$ عند $+\infty$ و عند $-\infty$ على الترتيب.
 ب/* ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيمين المقاربين (D) و (D') .

ج/ * بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = \frac{1}{2} \ln 2 + e$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f) .

(3) أرسم (Δ) ، (D) ، (D') و (C_f)

(4) ليكن (D_m) المستقيم الذي معادلته : $y = m x - m \left(e + \frac{\ln 2}{2} \right) + \frac{\ln 2}{2}$ حيث m وسيط حقيقي.

أ/ * بين أن جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A \left(\frac{\ln 2}{2} + e ; \frac{\ln 2}{2} \right)$.

ب/ * ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (D_m) و المنحنى (C_f) .

(5) نضع : $I = \int_{\ln \sqrt{2} + e}^{\ln \sqrt{3} + e} [f(x) - (x - e)] dx$ ، $I_n = \int_0^1 \ln(1 + X^n) dX$ ، n عدد طبيعي غير معدوم

أ/ * فسر هندسيا العدد I و احسب العدد I_1 .

ب/ * بين أن : $0 \leq I_n \leq \ln 2$

ج/ * عين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

(6) باستعمال : $\ln(1 + X) \leq X$ ، من أجل كل $X \in]0; +\infty[$

أ/ * استنتج أن : $0 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln \sqrt{2} + e}^{\ln \sqrt{3} + e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$

ب/ * اعط حصرا للعدد $I + I_1$.

انتهى

الموضوع الثاني

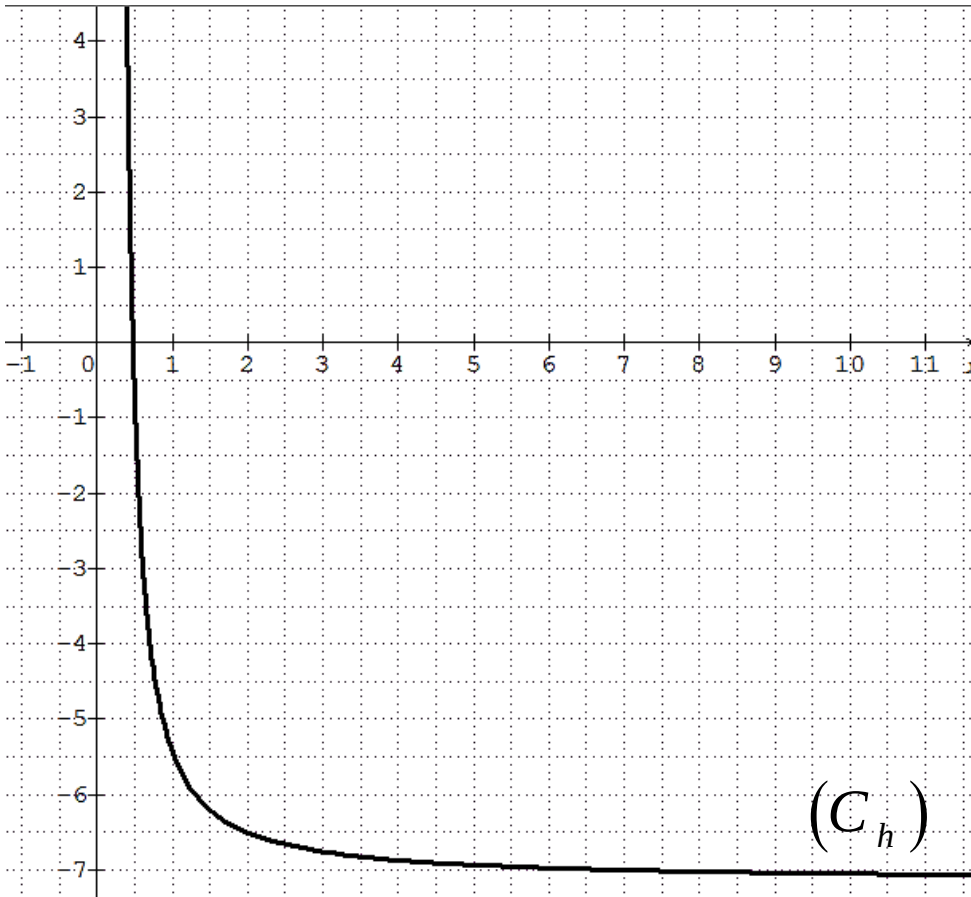
بالتوفيق في امتحان شهادة البكالوريا

الملحق:

الاسم:

اللقب:

القسم:

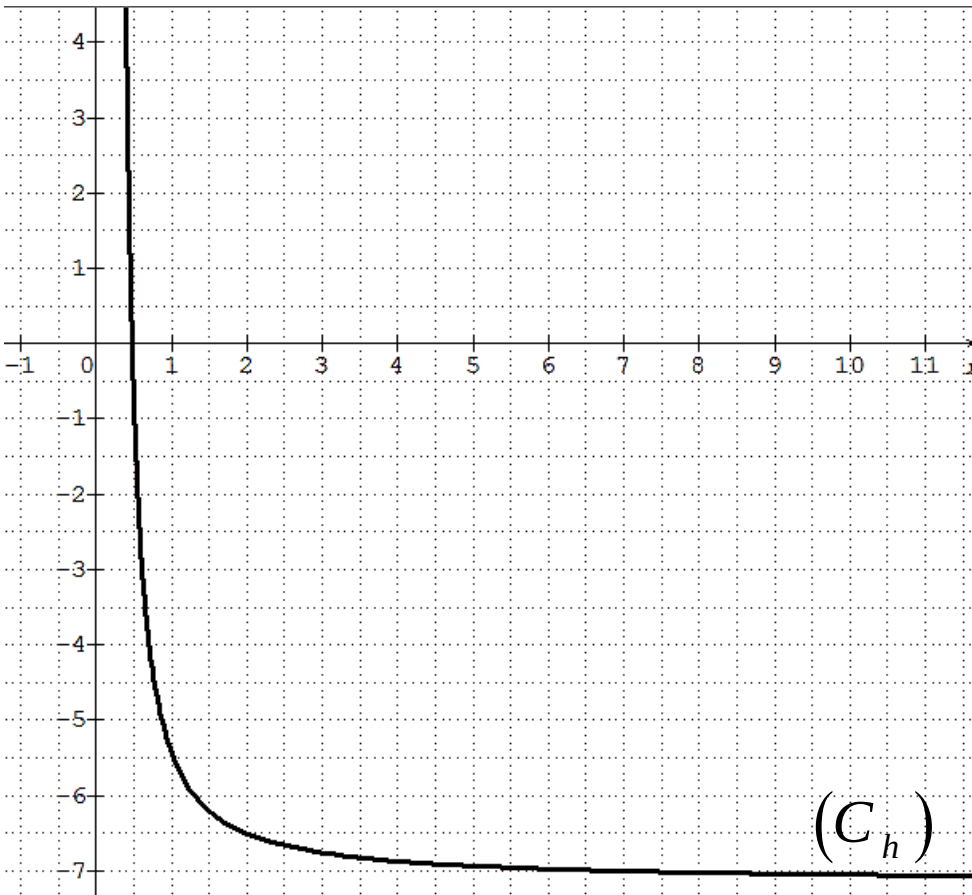


الملحق:

الاسم:

اللقب:

القسم:



الموضوع الاول: التمرين الأول: (04 نقاط)

1) كتابة التمثيل الوسيطى (d): t وسيط حقيقي

$$(d): \begin{cases} x-2=t \\ \frac{y-1}{2}=t; t \in \mathbb{R} \\ 1-z=t \end{cases} \text{ أي أن: } x-2=\frac{y-1}{2}=1-z=t$$

$$\begin{cases} x=t+2 \\ y=2t+1; t \in \mathbb{R} \\ z=-t+1 \end{cases} \text{ إذن: التمثيل الوسيطى للمستقيم (d) هو}$$

*/ تبيان أن (d) و (d') ليسا من نفس المستوى:

$$(d'): \vec{u}(1;2;-1) \text{ شعاع توجيه (d)}, \vec{u}'(3;1;2) \text{ شعاع توجيه (d')}$$

$$\text{بما أن } \frac{1}{3} \neq \frac{1}{1} \text{ فإن الشعاعين } \vec{u}(1;2;-1) \text{ و } \vec{u}'(3;1;2)$$

غير مرتبطين خطيا ، فيكون المستقيمان (d) و (d') إما ليسا من نفس المستوي و إما متقاطعان من نفس المستوي لتكن (x;y;z) نقطة تقاطع (d) و (d') أي :

$$\begin{cases} x=t+2=3t'+4... (1) \\ y=2t+1=t'+3... (2) \\ z=-t+1=2t'+3... (3) \end{cases} \text{ نبحث عن الثنائية (t,t')}$$

$$\text{بجمع (1) و (3): } t' = \frac{-4}{5} \text{ وبتعويضها في (1) أو (3)}$$

$$\text{نجد: } t = \frac{-2}{5}, \text{ الثنائية } \left(\frac{-2}{5}, \frac{-4}{5}\right) \text{ لا تحقق (2)}$$

ومنه: (d) و (d') ليسا من نفس المستوي

2) أ) إيجاد المعادلة الديكارتية للمستويين (p1) و (p2)

ويشملان A(4;-7;5) و (d) و (d') و (p2)

تعيين معادلة المستوى (p1): (p1) يشمل A(4;-7;5)

وموجه بالشعاعين $\vec{u}(1;2;-1)$ شعاع توجيه (d) و

$\vec{AD}(-2;8;-4)$ حيث D(2;1;1) نقطة من (d)

ليكن: $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي للمستوي (p1) غير معدوم

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AD} = 0 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} a+2b-c=0 \dots (1) \\ -2a+8b-4c=0 \dots (2) \end{cases} \text{ بجمع (1) و (2)}$$

$$\text{نجد } 6b-3c=0 \text{ ومنه } c=2b \text{ نأخذ: } b=1 \text{ نجد } c=2$$

و a=0 ومنه: $\vec{n}(0;1;2)$ ناظمي لـ $y+2z+d=0$ (p1):

$$A \in (p1) \text{ معناه } 7+10+d=0 \text{ معناه } d=-3$$

$$\text{ومنه: } (p1): y+2z-3=0$$

تعيين معادلة للمستوي (P2): لدينا (P2) يشمل A(4;-7;5)

وموجه بالشعاعين $\vec{u}(3;1;2)$ شعاع توجيه (d')

$\vec{AC}(0;10;-2)$ حيث C(4;3;3) نقطة من (d')

بنفس الطريقة $11x-3y-15z+10=0$ (P2):

ب) التحقق أن (p1) و (p2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ)

بما أن: $\frac{0}{11} \neq \frac{1}{-3}$ فإن $\vec{n}(0;1;2)$ و $\vec{n}'(11;-3;-15)$ غير

مرتبطين خطيا و عليه يكون المستويان (P1) و (P2) متقاطعين

$$\text{وفق مستقيم (Δ). لدينا: } \begin{cases} x = \frac{-1}{11} + 9\alpha \\ y = 3 - 22\alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 11\alpha \end{cases}$$

$$(P2): 11x-3y-15z+10=0, (P1): y+2z-3=0$$

$$0.\alpha = 0 \text{ يكافئ } (-22\alpha+3)+2(11\alpha)-3=0$$

المعادلة تقبل مالا نهاية من الحلول ومنه: $(\Delta) \subset (P1)$

$$0.\alpha = 0 \text{ يكافئ } 11\left(\frac{-1}{11}+9\alpha\right)-3(3-22\alpha)-15(11\alpha)+10=0$$

المعادلة تقبل مالا نهاية من الحلول ومنه: $(\Delta) \subset (P2)$

$$\text{نستنتج أن } (\Delta) = (P1) \cap (P2)$$

3) أ*) إيجاد إحداثيات A' المسقط العمودي لـ A على

المستوي (Q): $A'(x';y';z')$ ، $\vec{n}_Q(11;1;-1)$ ناظمي لـ (Q)

و $A \in (\Delta)$. بما أن: $11x_A+y_A-z_A \neq 2$ فإن $A \notin (Q)$

وبالتالي $\vec{AA'}$ يوازي $\vec{n}_Q$ يوجد $k \in \mathbb{R}$ حيث $\vec{AA'} = k \cdot \vec{n}_Q$

$$\vec{AA'}(x'-4;y'+7;z'-5)$$

$$\text{معناه } A' \in (Q), \begin{cases} x'-4=11k \\ y'+7=k \\ z'-5=-k \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x'=11k+4 \\ y'=k-7 \\ z'=-k+5 \end{cases}$$

$$k = -\frac{10}{41} \text{ معناه } 11(11k+4)+(k-7)-(-k+5)-2=0$$

$$\text{بالتعويض عن قيمة k نجد: } A'\left(\frac{54}{41}; -\frac{297}{41}; \frac{215}{41}\right)$$

ب) استنتاج المسقط العمودي لـ (Δ) على المستوى (Q):

المسقط العمودي للمستقيم (Δ) على (Q) هو المستقيم (BA')

4) تعيين طبيعة المجموعة (Γ) حيث $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$

$$AB = \sqrt{\frac{17150}{121}} \approx 11.9, [AB] \text{ هي سطح كرة قطرها } [AB]$$

$$\text{ومركزها النقطة } I\left(\frac{43}{22}; -2; \frac{5}{2}\right) \text{ منتصف } [AB]$$

التمرين الثاني: (04 نقاط) $A_0B_0=8$ ، التشابه المباشر S

مركزه A_0 ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$ ، $B_{n+1}=S(B_n)$ ،

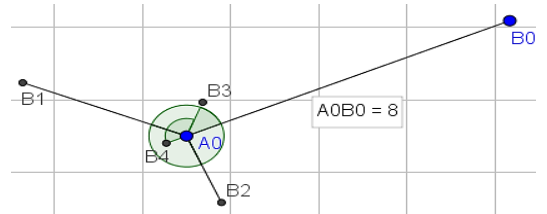
(1) إنشاء النقط B_1, B_2, B_3 و B_4 :

$$k \in \square , \begin{cases} A_0B_1 = \frac{1}{2}A_0B_0 = 4 \\ (\overline{A_0B_0}, \overline{A_0B_1}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{ يكافئ } B_1 = S(B_0)$$

$$k \in \square , \begin{cases} A_0B_2 = \frac{1}{2}A_0B_1 = 2 \\ (\overline{A_0B_1}, \overline{A_0B_2}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{ معناه } B_2 = S(B_1)$$

$$k \in \square , \begin{cases} A_0B_3 = \frac{1}{2}A_0B_2 = 1 \\ (\overline{A_0B_2}, \overline{A_0B_3}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{ معناه } B_3 = S(B_2)$$

$$k \in \square , \begin{cases} A_0B_4 = \frac{1}{2}A_0B_3 = \frac{1}{2} \\ (\overline{A_0B_3}, \overline{A_0B_4}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{ معناه } B_4 = S(B_3)$$



(2) اثبات أن المثلثين $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان من أجل كل عدد طبيعي n :

$$A_0B_{n+1} = \frac{1}{2}A_0B_n \text{ معناه } B_{n+1} = S(B_n)$$

$$\text{و } (\overline{A_0B_n}, \overline{A_0B_{n+1}}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi , k \in \square , \text{ بما أن :}$$

$$\frac{A_0B_{n+2}}{A_0B_{n+1}} = \frac{\frac{1}{2}A_0B_{n+1}}{A_0B_{n+1}} = \frac{1}{2} \text{ و } \frac{A_0B_{n+1}}{A_0B_n} = \frac{\frac{1}{2}A_0B_n}{A_0B_n} = \frac{1}{2}$$

$$(\overline{A_0B_{n+1}}, \overline{A_0B_{n+2}}) = \left(\frac{1}{2}\overline{A_0B_n}, \frac{1}{2}\overline{A_0B_{n+1}} \right) = (\overline{A_0B_n}, \overline{A_0B_{n+1}})$$

فإن المثلثين $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان

$$\frac{B_{n+1}B_{n+2}}{B_nB_{n+1}} = \frac{1}{2} \text{ (ضلعان و زاوية محصورة بينهما) ومنه :}$$

(3) إثبات أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$: نعرف

متتالية (u_n) بـ $u_n = B_nB_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

$$\text{ومنه : } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{B_{n+1}B_{n+2}}{B_nB_{n+1}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \text{ و حدها الأول } u_0 = B_0B_1$$

ب*/ كتابة عبارة u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = u_0 \left(\frac{1}{2} \right)^n = B_0B_1 \left(\frac{1}{2} \right)^n$

ج*/ نضع المجموع : $\delta_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ،

حساب δ_n بدلالة n ثم إيجاد $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n$: م.ح.م. هندسية

$$\delta_n = u_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2B_0B_1 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right)$$

ومنه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 2B_0B_1$

(4) أ*/ نحل في $\square \times \square$ المعادلة : $3x - 4y = 2$ (1)

$$(1) \text{ يكافئ } 3x = 4y + 2 \text{ يكافئ } 3x \equiv 2[4]$$

$$\text{يكافئ } x \equiv 2[4] \text{ يكافئ } 7 \times 3x \equiv 7 \times 2[4]$$

ومنه : $x = 4\lambda + 2$ ، $\lambda \in \square$ ، بالتعويض في المعادلة (1) نجد

$$y = 3\lambda + 1 \text{ إذن : } S = \{ (4\lambda + 2; 3\lambda + 1); \lambda \in \square \}$$

ب*/ تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون

النقطة B_n تنتمي إلى المستقيم (Δ) :

لدينا: (Δ) العمودي على (A_0B_0) في النقطة A_0 وكذلك

$$(\overline{A_0B_0}, \overline{A_0B_n}) = (\overline{A_0B_0}, \overline{A_0B_1}) + (\overline{A_0B_1}, \overline{A_0B_2}) + \dots$$

$$\dots + (\overline{A_0B_{n-1}}, \overline{A_0B_n}) = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \dots + \frac{3\pi}{4} = n \frac{3\pi}{4}$$

$$B_n \text{ تنتمي إلى } (\Delta) \text{ معناه } (\overline{A_0B_0}, \overline{A_0B_n}) = \frac{\pi}{2} + k\pi , k \in \square$$

$$\text{نجد : } \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ يكافئ } n \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{يكافئ } 3n = 2 + 4k \text{ يكافئ } 3n - 4k = 2$$

$$\text{ومن قيم } n \text{ هي } n = 4k' + 2 , k' \in \square$$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) أ*/ نبين أن المعادلة (E) تكافئ : $(\bar{z} + 1) \left(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7 \right) = 0$

$$\text{لدينا : } \bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0 \text{ (E) ...}$$

$$(\bar{z} + 1) \left(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7 \right) = 0 \text{ يكافئ } \bar{z}^3 - 4\bar{z}^2 + 7\bar{z} + \bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7 = 0$$

$$\text{يكافئ } \bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0$$

ب*/ نحل في $\square$ المعادلة (E) :

$$(E) \text{ تكافئ } (\bar{z} + 1)(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7) = 0$$

$$\text{يكافئ } (z + 1)(z^2 - 4z + 7) = 0 \text{ يكافئ } (z + 1)(z^2 - 4z + 7) = 0$$

$$\text{يكافئ } \Delta = -12 = (2\sqrt{3}i)^2 , \begin{cases} z = -1 \\ z^2 - 4z + 7 = 0 \end{cases}$$

$$z_2 = 2 + \sqrt{3}i \text{ و } z_1 = 2 - \sqrt{3}i$$

$$S = \{-1; 2 - \sqrt{3}i; 2 + \sqrt{3}i\}$$

2) * / تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد المركب

$(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا: لدينا

$$(z_B - z_A)^n = (2 + \sqrt{3}i + 1)^n = (3 + \sqrt{3}i)^n$$

$$(z_B - z_A)^n = (2\sqrt{3})^n e^{i \frac{n\pi}{6}}$$

عددا حقيقيا سالبا معناه:

$$\frac{n\pi}{6} = \pi + 2k\pi \text{ ومنه } \arg(z_B - z_A)^n = \pi + 2k\pi$$

$$n = 12k + 6; k \in \mathbb{Z}$$

ب) * / تعيين طبيعة المثلث ABC

$$AC = |z_C - z_A| = |3 - i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$AB = |z_B - z_A| = |3 + i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |z_C - z_B| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

بما ان $AB = AC = BC$: فإن المثلث ABC متقايس الأضلاع

3) * / كتابة العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسى:

$$\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \frac{-1 - 2 + i\sqrt{3}}{3 - 2 + i\sqrt{3}} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \sqrt{3}e^{i \frac{\pi}{2}}$$

***/ استنتاج طبيعة التحويل الذي يحول A إلى D وعناصره**

$$z_A - z_C = \sqrt{3}e^{i \frac{\pi}{2}}(z_D - z_C) \text{ معناه } \frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \sqrt{3}e^{i \frac{\pi}{2}}$$

معناه النقطة A صورة النقطة D بالتشابه المباشر الذي

مركزه النقطة C ونسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ب) تعيين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD

$$\left| \frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} \right| = \sqrt{3} \text{ لدينا: } \frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \sqrt{3}e^{i \frac{\pi}{2}} \text{ معناه } \left(\overline{CD}; \overline{CA} \right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

اذن المثلث ACD قائم في C ومنه مركز الدائرة المحيطة

بالمثلث ACD هو النقطة I منتصف الوتر $[AD]$

$$z_I = \frac{z_A + z_D}{2} = \frac{3}{2} - i \frac{1}{2} \text{ لاحقته}$$

4) * / تعيين قياس للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overline{AB})$:

$$(\vec{u}; \overline{AB}) = \arg(z_B - z_A) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \text{ لدينا:}$$

***/ استنتاج (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ حيث:**

$$z - z_A = k(z_B - z_A) \text{ معناه } z + 1 = 2\sqrt{3}ke^{i \frac{\pi}{6}}$$

$$\overline{AM} = k \cdot \overline{AB} \text{ معناه}$$

ومنه: من أجل k يمسح المجال $[0; +\infty[$ المجموعة (Γ)

هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة A وشعاع توجيهه $\overline{AB}$

$$2\sqrt{3}e^{i \frac{\pi}{6}} = 3 + i\sqrt{3} \text{ لاحقته:}$$

5) * / تعيين قيمة العدد α حيث:

$$-\overline{CA} + 2\overline{CB} + \alpha\overline{CD} = \vec{0}$$

معناه النقطة C هي مرجح الجملة $\{(A; -1), (B; 2), (D; \alpha)\}$

$$\alpha = -3 \text{ ومنه } \begin{cases} 2 = \frac{1+4+3\alpha}{1+\alpha} \\ -\sqrt{3} = \frac{0+2\sqrt{3}+0\cdot\alpha}{1+\alpha} \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x_C = \frac{-x_A + 2x_B + \alpha x_D}{-1+2+\alpha} \\ y_C = \frac{-y_A + 2y_B + \alpha y_D}{-1+2+\alpha} \end{cases}$$

ب) * / تعيين (E) مجموعة النقط M من المستوى حيث:

$$(*) \dots \left\| -\overline{AM} + 2\overline{BM} - 3\overline{DM} \right\| \leq 2 \left\| \overline{BM} - \overline{CM} \right\|$$

$$(*) \text{ تكافئ } \left\| \overline{MA} - 2\overline{MB} + 3\overline{MD} \right\| \leq 2 \left\| \overline{BM} + \overline{MC} \right\|$$

$$(*) \text{ تكافئ } \left\| -(-\overline{MA} + 2\overline{MB} - 3\overline{MD}) \right\| \leq 2 \left\| \overline{BC} \right\|$$

$$(*) \text{ تكافئ } \left\| (-1+2-3)\overline{CM} \right\| \leq 2BC \text{ تكافئ } CM \leq BC$$

ومنه مجموعة النقط (E) هي قرص مركزه النقطة C

ونصف قطره هو: $BC = 2\sqrt{3}$

ج) * / استنتاج مجموعة نقط تقاطع القرص (E) ونصف

المستقيم (AB) : لدينا القرص (E) مركزه C ونصف قطره

$$BC = 2\sqrt{3} \text{ و } AC = 2\sqrt{3} \text{ معناه } A \text{ تنتمي إلى القرص } (E)$$

ومنه تقاطع القرص (E) ونصف المستقيم (AB)

هو القطعة المستقيمة $[AB]$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

$$(1) \text{ معرفة } g \text{ على }]0; +\infty[\text{ بـ: } g(x) = x^2 e^x$$

أ) * / دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$:

$$g'(x) = (x^2 + 2x)e^x :]0; +\infty[$$

بما ان $g'(x) > 0$ فإن الدالة g متزايدة تماما على $]0; +\infty[$

ب) * / استنتاج أنه: إذا كان $0 < x < 1$ فإن $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\text{و إذا كان } x > 1 \text{ فإن } g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$$

إذا كان $0 < x < 1$ فإن $\frac{1}{x} > x$ ولدينا g متزايدة تماما

$$\text{على }]0; +\infty[, \text{ فإن } g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$$

إذا كان $x > 1$ فإن $\frac{1}{x} < x$ ولدينا g متزايدة تماما على

$$]0; +\infty[, \text{ فإن } g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$$

ندرس إشارة الفرق $f(x) - h(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$

$x^2 - 2x + 2 > 0$ من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ لأن $\Delta = -4$

ومنه : (C_f) يقع فوق (C_h) على المجال $]0; +\infty[$

ج/ نبين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي

فاصلتها 1 يطلب كتابة معادلته :

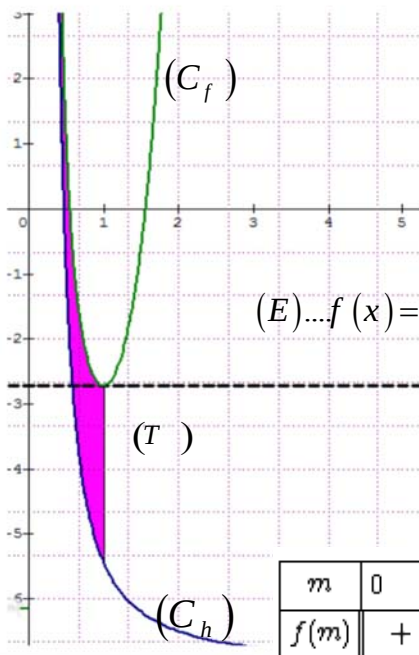
بما ان الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ فإن تمثيلها (C_f)

يقبل عند كل نقطة فاصلتها من $]0; +\infty[$ مماسا

$$f'(1) = 0; f(1) = -e, (T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

ومنه : $(T): y = -e$

(4) / رسم (T) و (C_f) :



ب/ إيجاد قيم m حتى

تقبل المعادلة (E)

حليين متمايزين :

لدينا m وسيط حقيقي حيث $m > 0$

$$(E) \dots f(x) = (m^2 - 2m + 2)e^m + h(m)$$

المعادلة (E) تكافئ

$$f(x) = f(m)$$

إشارة $f(m)$:

m	0	α	1	$E+\infty$
$f(m)$	+	0	-	-

من أجل $m = 1$ المعادلة (E) تقبل حلا مضاعفا .

ومنه : المعادلة (E) تقبل حليين متمايزين لما

$$m \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

(5) / نبين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$\int_1^x [f(t) - h(t)] dt = (x^2 - 4x + 6)e^x - 3e$$

$$\int_1^x [f(t) - h(t)] dt = \int_1^x (t^2 - 2t + 2)e^t dt$$

الدالة : $t \rightarrow (t^2 - 2t + 2)e^t$ مستمرة على $]0; +\infty[$ فهي تقبل

دوالا أصلية على $]0; +\infty[$

$$[(t^2 - 4t + 6)e^t - 3e]' = (t^2 - 2t + 2)e^t$$

$$\int_1^x (t^2 - 2t + 2)e^t dt = \int_1^x [(t^2 - 4t + 6)e^t - 3e]' dt = (x^2 - 4x + 6)e^x - 3e$$

(2) f معرفة على $]0; +\infty[$: $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + e^{\frac{1}{x}} - 3e$

أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

ب/ نبين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right), \text{ ثم حساب } f'(1)$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ دالتها المشتقة f' :

$$f'(x) = x^2 e^x - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{ومنه : } f'(1) = g(1) - g\left(\frac{1}{1}\right) = 0$$

ج/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0; +\infty[$:

x	0	$1 + \infty$
$f'(x)$	-	+

إشارة $f'(x)$:

f متزايدة تماما على $[1; +\infty[$

f متناقصة تماما على $]0; 1]$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$-e = -2.71$	$+\infty$

(3) / نبين أن المعادلة : $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تقبل

حليين α و β حيث : $0.5 < \alpha < 0.6$ و $1.5 < \beta < 1.6$

$$(x^2 - 2x + 2)e^x + h(x) = 0 \text{ تكافئ } (x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$$

تكافئ $f(x) = 0$ ، لدينا : $f(0.5) \approx 1.25$ ، $f(0.6) \approx -0.74$

بما ان الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $[0.5; 0.6]$

$$f(0.6) \times f(0.5) < 0 \text{ فان حسب مبرهنة القيم المتوسطة}$$

فإن المعادلة $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تقبل حل وحيد α

حيث : $f(\alpha) = 0$ ، $0.5 < \alpha < 0.6$

لدينا : $f(1.5) \approx -0.60$ ، $f(1.6) \approx 0.44$

بما ان الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $[1.5; 1.6]$

$$f(1.6) \times f(1.5) < 0 \text{ فان حسب مبرهنة القيم المتوسطة}$$

فإن المعادلة $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تقبل حل وحيد β

حيث : $f(\beta) = 0$ ، $1.5 < \beta < 1.6$

***/** استنتاج أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين :

بما ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حليين α و β فإن (C_f)

يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β

ب/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h) :

ب/ استنتاج $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_h)

و (C_f) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = \lambda$ و $x = 1$
مقدرة بوحدة المساحة حيث $\lambda \in]0; 1]$:

$$A(\lambda) = \int_1^\lambda [f(t) - h(t)] dt = - \int_\lambda^1 [f(t) - h(t)] dt$$

$$A(\lambda) = - \left[(\lambda^2 - 4\lambda + 6)e^\lambda - 3e \right] \\ = (3e - (\lambda^2 - 4\lambda + 6)e^\lambda) u a$$

حساب $A(\lambda)$ $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} [3e - (\lambda^2 - 4\lambda + 6)e^\lambda] = 3e$$

الموضوع الثاني

التمرين الاول : (04 نقاط)

$D(0; 0; m)$ و $C(3; 2; 1)$ ، $B(1; 2; 0)$ ، $A(3; 1; 0)$

1) حساب $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{BA}(2; -1; 0)$ ، $\overrightarrow{BC}(2; 0; 1)$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2(2) + 0(-1) + 1(0) = 4$$

استنتاج القيمتين المضبوطتين لـ $\cos \widehat{ABC}$ و

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\| \cos \widehat{ABC} \quad \text{لدينا} \quad \sin \widehat{ABC}$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

$$\sin^2 \widehat{ABC} = 1 - \cos^2 \widehat{ABC}$$

$$\sin \widehat{ABC} = -\frac{3}{5} \quad \text{أو} \quad \sin \widehat{ABC} = \frac{3}{5}$$

حساب مساحة المثلث ABC ولتكن S_{ABC} :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \times BC \times \sin \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{2} u a$$

ج/ نبين أن $\vec{n}(1; 2; -2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 1(2) + 2(0) - 2(1) = 0$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BA} = 1(2) + 2(-1) - 2(0) = 0$$

فإن $\vec{n}(1; 2; -2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

$$(ABC): x + 2y - 2z + d = 0$$

$$A \in (ABC) \quad \text{تكافئ} \quad 3 + 2 + d = 0 \quad \text{تكافئ} \quad d = -5$$

$$(ABC): x + 2y - 2z - 5 = 0$$

د/ تبين أن $ABCD$ رباعي وجوه:

نبين أن النقطة D لا تنتمي الى المستوي (ABC)

لدينا $0 + 2(0) - 2m - 5 = 0$ أي $m = -\frac{5}{2}$ إذن: $D \notin (ABC)$

لأن m عدد حقيقي موجب ومنه: $ABCD$ رباعي وجوه

نبين أن حجم رباعي الوجوه $ABCD$ هو $V = \frac{2m+5}{6} uv$

لدينا $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \times h$ ، $h = d(D, (ABC))$ هو الارتفاع

$$d(D; (ABC)) = \frac{|-2m - 5|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{2m + 5}{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{2m + 5}{3} = \frac{2m + 5}{6} uv$$

2) نبين أن (Q) هو المستوي المحوري لقطعة المستقيم

$$[AB] \quad \text{معادلته الديكارتية} \quad -2x + y = \frac{-5}{2}$$

إحداثيات $I(2; \frac{3}{2}; 0)$ منتصف $[AB]$ تحقق التمثيل الوسيط لـ

(Q) والشعاع $\overrightarrow{AB}(2; -1; 0)$ عمودي على شعاعي توجيهه

$$\vec{u}(1; 2; 0) \text{ و } \vec{v}(-2; -4; -5) \text{ ومنه } (Q) \text{ مستوي محوري لـ } [AB]$$

تعيين معادلة (Q) : لدينا

$$\begin{cases} x = 2 - 2\alpha + \beta \dots (1) \\ y = \frac{3}{2} - 4\alpha + 2\beta \dots (2) \\ z = -5\alpha \dots (3) \end{cases} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

$$x = 2 - 2\left(\frac{z}{-5}\right) + \beta \quad \text{نجد: } \alpha = \frac{z}{-5}$$

$$\text{ومنه: } \beta = x - 2 - \frac{2z}{5}$$

$$-2x + y = \frac{-5}{2} \quad \text{ومنه: } y = \frac{3}{2} - 4\left(\frac{z}{-5}\right) + 2\left(x - 2 - \frac{2z}{5}\right)$$

$$\text{ومنه معادلة } (Q) \text{ هي: } -4x + 2y + 5 = 0$$

بطريقة أخرى: (Q) يشمل $I(2; \frac{3}{2}; 0)$ منتصف $[AB]$

و $\overrightarrow{AB}(-2; 1; 0)$ شعاع ناظمي له والتمثيل الوسيط يحقق

$$[AB] \quad \text{ومنه المستوي المحوري لقطعة المستقيم} \quad -2x + y = \frac{-5}{2}$$

استنتاج ان المستويين (ABC) و (Q) متعامدان وهما

متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيله الوسيط:

$$\text{بما أن } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (1) + 0 \cdot (-2) = 0 \quad \text{فإن } (Q)$$

و (ABC) متعامدان فهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ) .

تعيين التمثيل الوسيط للمستقيم (Δ) :

$$\begin{cases} x + 2y - 2z - 5 = 0 \dots (1) \\ -4x + 2y + 5 = 0 \dots (2) \end{cases}$$

$$\text{ب طرح (2) من (1) نجد:}$$

$$n \in \mathbb{N}^*, b = 11n + 4 \text{ و } a = 5n + 2$$

$$11a - 5b = 11(5n + 2) - 5(11n + 4) = 55n + 22 - 55n - 20 = 2$$

ومنه: $d \in D_2 = \{1; 2\}$ إذن: $d = 2$.

ب/ تعيين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون:

$$PGCD(a; b) = 2 \text{ لدينا } PGCD(a; b) = 2$$

معناه 2 يقسم a و 2 يقسم b معناه 2 يقسم $b - 2a$
أي 2 يقسم $11n + 4 - 2(5n + 2)$ وبالتالي 2 يقسم n .

ومنه $n = 2\alpha$ / $\alpha \in \mathbb{N}^*$: الشكل:

ج/ استنتاج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون

العددين a و b أوليان فيما بينهما: من السؤال السابق

$$n = 2\alpha \text{ / } \alpha \in \mathbb{N}^* \text{ قيم } PGCD(a; b) = 2$$

ومنه: قيم n حيث $PGCD(a; b) = 1$ هي: $n = 2\alpha + 1$ / $\alpha \in \mathbb{N}$

(3) أ/ نبين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

$$n \in \mathbb{N}, B = 11n^2 + 15n + 4 \text{ و } A = 5n^2 + 7n + 2$$

$$B = (n+1)(11n+4) = b(n+1), A = (n+1)(5n+2) = a(n+1)$$

ومنه: $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

ب/ استنتاج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين

A و B :

$$PGCD(A; B) = PGCD(a(n+1); b(n+1)) = (n+1)PGCD(a; b)$$

ومنه نميز حالتين:

الحالة 1: إذا كان $PGCD(a; b) = 2$ معناه $n = 2\alpha$ / $\alpha \in \mathbb{N}^*$

$$PGCD(A; B) = (2\alpha + 1)2 = 4\alpha + 2$$

الحالة 2: إذا كان $PGCD(a; b) = 1$ معناه $n = 2\alpha + 1$ / $\alpha \in \mathbb{N}$

$$PGCD(A; B) = (2\alpha + 1 + 1)1 = 2\alpha + 2$$

التمرين الثالث (05 نقاط)

(1) تعيين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث:

$$\begin{cases} 2z_1 + iz_2 = 1 + i\sqrt{3} \dots (1) \\ (\sqrt{3} + 2i)z_1 - z_2 = (1 - \sqrt{3})i \dots (2) \end{cases}$$

نضرب طرفي المعادلة

$$\begin{cases} -2iz_1 + z_2 = -i + \sqrt{3} \dots (1') \\ \sqrt{3}z_1 + 2iz_1 - z_2 = i - i\sqrt{3} \dots (2) \end{cases}$$

الأولى في $(-i)$ نجد

$$\sqrt{3}z_1 + 2iz_1 - z_2 = i - i\sqrt{3} \dots (2)$$

بجمع $(1')$ و (2) : $\sqrt{3}z_1 = \sqrt{3}(1 - i)$ ومنه $z_1 = 1 - i$

بالتعويض في (1) نجد: $z_2 = 2 + \sqrt{3} + i$

(2) أ/ كتابة z_A على الشكل الأسّي: $z_A = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$$\text{ب/} \text{نبين أن: } \frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{2 + \sqrt{3} + i}{1 - i} = \frac{(2 + \sqrt{3} + i)(1 + i)}{2} = \frac{(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{3}(1 + \sqrt{3})i}{2}$$

$$\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3}) \frac{(1 + \sqrt{3}i)}{2} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ومنه:}$$

$$5x - 2z - 10 = 0 \text{ نضع } z = t \text{ (وسيط حقيقي) نجد}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{5}t + 2 \\ y = \frac{4}{5}t + \frac{3}{2} \end{cases} \text{ إذن: } \begin{cases} x = \frac{2}{5}t + 2 \\ y = \frac{4}{5}t + \frac{3}{2} \\ z = t \end{cases} \text{ و } t \in \mathbb{R}$$

ج/ حساب $d(D; (Q))$ ثم استنتاج بدلالة m المسافة بين

$$D \text{ و } (\Delta): d(D; (Q)) = \frac{|-4(0) + 2(0) + 5|}{\sqrt{16 + 4}} = \frac{5}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

بمأن (Q) و (ABC) متعامدان فإن حسب مبرهنة فيثاغورس

$$d(D; (\Delta))^2 = d(D; (Q))^2 + d(D; (ABC))^2$$

$$\text{ومنه: } d(D; (\Delta)) = \sqrt{\frac{5}{4} + \left(\frac{2m + 5}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{16m^2 + 80m + 145}}{6}$$

(3) أ/ تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي m - (S_m) سطح كرة

يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها:

$$\text{لدينا: } x^2 + y^2 + z^2 - 2mz + m^2 - 9 = 0$$

ومنه: $x^2 + y^2 + (z - m)^2 = 9$ إذن: (S_m) سطح

كرة مركزها النقطة $D(0; 0; m)$ ونصف قطرها $r = 3$.

ب/ تعيين m حتى يكون المستوي (ABC) مماساً لسطح

الكرة (S_m) : (ABC) مماس لسطح الكرة (S_m) يعني

$$d(D; (ABC)) = 3 \text{ أي أن: } \frac{2m + 5}{3} = 3 \text{ ومنه: } m = 2$$

(4) معادلة المستوي (P) الموازي تماماً للمستوي (ABC)

$$\text{ویمس } (S_m): \text{ لدينا: } x + 2y - 2z + d = 0 \text{ (P)}$$

المستوي (P) مماس لـ (S_m) يعني:

$$|-4 + d| = 9 \text{ أي } d(D; (P)) = \frac{|-4 + d|}{3} = 3$$

ومنه: $d = -5$ أو $d = 13$ هو المستوي (ABC)

$$\text{إذن: } (p): x + 2y - 2z + 13 = 0$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

$$\text{أ/} \text{إثبات أن: } y \equiv 4[11] \text{ ، } 11x - 5y = 2 \dots (E)$$

$$11x - 5y = 2 \text{ يكافئ } 5y = 11x + 2 \text{ ومنه } 5y \equiv -2[11] \text{ أي}$$

$$\text{أي } 5y \equiv 20[11] \text{ ومنه: } y \equiv 4[11]$$

ب/ استنتاج حلول المعادلة (E) :

$$y \equiv 4[11] \text{ معناه } y = 11k + 4 \text{ مع } k \in \mathbb{Z} \text{، نعوض قيمة}$$

$$y \text{ في المعادلة } (E) \text{ نجد: } x = 5k + 2$$

$$\text{ومنه: } S = \{(11k + 4; 5k + 2) / k \in \mathbb{Z}\}$$

(2) أ/ تعيين القيم الممكنة لـ $d = PGCD(a; b)$:

***/استنتاج الشكل الأسى للعدد** : z_B

$$z_B = z_A (1 + \sqrt{3}) e^{i \frac{\pi}{3}} = \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}} (1 + \sqrt{3}) e^{i \frac{\pi}{3}}$$

$$\text{ومنه } z_B = \sqrt{2} (1 + \sqrt{3}) e^{i \frac{\pi}{12}}$$

ج/تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى تكون صورة العدد

تتنمى إلى المنصف الأول إن وجدت : $\left(\frac{z_B}{z_A} \right)^n$

$$\left(\frac{z_B}{z_A} \right)^n = (1 + \sqrt{3})^n e^{i \frac{n\pi}{3}} : \text{ لدينا } \arg \left(\frac{z_B}{z_A} \right)^n = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\text{أي : } \arg \left(\frac{z_B}{z_A} \right)^n = \frac{n\pi}{3} [2\pi] : \text{ ومنه } \arg \left(\frac{z_B}{z_A} \right)^n = \frac{n\pi}{3} + k\pi$$

أي $4n - 12k = 3$ ، $PGCD(12; 4) = 4$ لا تقسم 3 ومنه المعادلة لا تقبل حلول إذن لا يوجد قيم لـ n تحقق المطلوب .

(3) */إيجاد لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران

r الذي مركزه النقطة O وزاويته $-\frac{\pi}{6}$

عبارة الدوران r من الشكل : $z' = e^{-i \frac{\pi}{6}} z$

$$z_{B'} = e^{-i \frac{\pi}{6}} z_B = e^{-i \frac{\pi}{6}} \sqrt{2} (1 + \sqrt{3}) e^{i \frac{\pi}{12}} = \sqrt{2} (1 + \sqrt{3}) e^{-i \frac{\pi}{12}}$$

$$z_{B'} = \sqrt{2} (1 + \sqrt{3}) e^{-i \frac{\pi}{12}} = \overline{z_B} = 2 + \sqrt{3} - i$$

ب/حساب مساحة الدائرة (r) التي قطرها [BB'] : لدينا

$$R = \frac{BB'}{2} = \frac{|z_{B'} - z_B|}{2} = \frac{|-2i|}{2} = \frac{2}{2} = 1, S = \pi R^2$$

$$\text{ومنه } s = \pi u.a$$

ج/تعيين مجموعة النقط (z) M من المستوى حيث :

$$\arg \left[(z - z_B)^2 \right] = \arg(z_B) - \arg(z_{B'})$$

$$\arg(z - z_B) = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ومنه } 2\arg(z - z_B) = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} + 2k\pi$$

$$\text{تفسيرها : } (\vec{u}; \overline{BM}) = \frac{\pi}{12} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

ومنه مجموعة النقط هي المستقيم (OB) ماعدا النقطة B .

د/تعيين ZC لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي AB'BC مستطيل :

$$(\overline{B'B}; \overline{B'A}) = \arg \left(\frac{z_A - z_{B'}}{z_B - z_{B'}} \right) = \arg(z_A - z_{B'}) - \arg(z_B - z_{B'})$$

$$(\overline{B'B}; \overline{B'A}) = \arg(1 - i - 2 - \sqrt{3} + i) - \arg(2i) = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{ومنه نجد : } (\overline{B'B}; \overline{B'A}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{يكفي أن نبين : } \overline{B'B} = \overline{AC} \text{ معناه } \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = 1 \end{cases} \text{ ومنه } z_C = 1 + i$$

بطريقة أخرى : لدينا $z_{B'} = \overline{z_B}$ معناه B و B' متناظرتان

بالنسبة لمحور الفواصل ولدنيا : $A(1; -1)$ و $B'(2 + \sqrt{3}; -1)$ أي : A و B' لهما نفس الترتيب معناه ينتميان إلى المستقيم $y = -1$ موازي لمحور الفواصل ومنه نجد : $z_C = \overline{z_A} = 1 + i$

***/إيجاد ZI لاحقة مركز ثقل المستطيل AB'BC**

$$z_I = \frac{1 - i + 4 + 2\sqrt{3} + 1 + i}{4} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \text{ ومنه } z_I = \frac{z_A + z_B + z_{B'} + z_C}{4}$$

(4) */تعيين العبارة المركبة للتشابه المباشر S حيث يكون

f تشابه مباشر مركزه O ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$: $f = ros$

S تشابه مباشر مركزه O ونسبته k وزاويته θ أي ros

تشابه مباشر مركزه O ونسبته k وزاويته $\theta - \frac{\pi}{6}$

$$\text{ومنه : } k = 2 \text{ و } \theta - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ أي } \theta = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

ومنه عبارة التشابه S هي : $z' = 2e^{i \frac{\pi}{2}} z$ ونكتب $z' = 2iz$

ب/إيجاد مساحة صورة الدائرة (r) بالتشابه المباشر S :

مساحة صورة الدائرة (r) هي S' حيث : $s' = k^2 s = 4\pi u.a$

(5) */إذا كان S(M) = M'، إيجاد طبيعة المثلث OMM'

$$z' = 2e^{i \frac{\pi}{2}} z \text{ ومنه : } \frac{z'}{z} = 2e^{i \frac{\pi}{2}} \text{ معناه } \arg \frac{z'}{z} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{معناه } \left(\overline{OM}; \overline{OM'} \right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ و } \left| \frac{z'}{z} \right| = 2 \text{ أي } |z'| = 2|z|$$

معناه $\| \overline{OM'} \| = 2 \| \overline{OM} \|$ ومنه : المثلث OMM' قائم في O

ب/تعيين مجموعة النقط M من المستوى التي يكون من

$$\text{أجلها : } \overline{AM}(x-1; y+1), \overline{AM}(z-z_A) : \overline{AM} \cdot \overline{AM'} = 0$$

$$\text{و } \overline{AM'}(z' - z_A) \text{ أي } \overline{AM'}(2iz - z_A) \text{ ومنه } \overline{AM'}(-2y-1; 2x+1)$$

$$\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = 0 \text{ معناه } (x-1)(-2y-1) + (y+1)(2x+1) = 0$$

$$\text{معناه } x + 3y + 2 = 0$$

مجموعة النقط المطلوبة هي مستقيم معادلته $x + 3y + 2 = 0$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

(1) */التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) = -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)})$$

$$f(x) = x - e + \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) = x - e + \ln \left(\frac{e^{2(x-e)} + 2}{e^{2(x-e)}} \right)$$

$$= x - e + \ln(e^{2(x-e)} + 2) - \ln(e^{2(x-e)}) = -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)})$$

ب */حساب النهايات : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ج/دراسة اتجاه تغير الدالة f :

$$f'(x) = \frac{1 - 2e^{-2(x-e)}}{1 + 2e^{-2(x-e)}} : \square \text{ الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على } \square$$

حيث m وسيط حقيقي.

$$\text{معناه } y = mx - m \left(e + \frac{\ln 2}{2} \right) + \frac{\ln 2}{2}$$

$$\text{معناه } m \left(x - e - \frac{\ln 2}{2} \right) + \frac{\ln 2}{2} - y = 0$$

$$\frac{\ln 2}{2} - y = 0 \text{ و } x - e - \frac{\ln 2}{2} = 0 \text{ ومنه: جميع المستقيمات}$$

$$(D_m) \text{ تشمل النقطة الثابتة } A \left(\frac{\ln 2}{2} + e; \frac{\ln 2}{2} \right)$$

ب/ مناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط

تقاطع المستقيم (D_m) والمنحنى (C_f) :

$$\text{المستقيم } (D_m) \text{ يدور حول النقطة الثابتة } A \left(\frac{\ln 2}{2} + e; \frac{\ln 2}{2} \right)$$

إذا كان $m = 1$ فإن (D_m) هو (D) لا توجد نقط تقاطع

إذا كان $m = -1$ فإن (D_m) هو (D') لا توجد نقط تقاطع

إذا كان $m = 0$ فإن (D_m) هو $y = \ln \sqrt{2}$ لا توجد نقط تقاطع

إذا كان $m \in]-1; 1[$ فإنه لا توجد نقط تقاطع

إذا كان $m \in]-\infty; -1[$ فإنه توجد نقطة تقاطع واحدة

إذا كان $m \in]1; +\infty[$ فإنه توجد نقطة تقاطع واحدة

(5) / التفسير الهندسي العدد I : هو مساحة الحيز المستوي

المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم المقارب (D) والمستقيمين

$$\text{الذيهم معادلتيهما } x = \ln \sqrt{2} + e, \quad x = \ln \sqrt{3} + e$$

$$\text{حساب العدد } I_1 : I_1 = \int_0^1 \ln(1+X) dX \text{ بالمكاملة بالتجزئة}$$

$$\text{بوضع: } u(X) = \ln(1+X), \quad u'(X) = \frac{1}{1+X}$$

$$v(X) = X, \quad v'(X) = 1$$

$$I_1 = \left[X \ln(1+X) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{X+1-1}{X+1} dX$$

$$= \left[X \ln(1+X) \right]_0^1 - \int_0^1 1 dX + \int_0^1 \frac{1}{X+1} dX$$

$$= \left[X \ln(1+X) - X + \ln(1+X) \right]_0^1 = \ln 4 - 1$$

$$\text{ب/ نبي أن } 0 \leq I_n \leq \ln 2 : \text{ لدينا } I_n = \int_0^1 \ln(1+X^n) dX$$

$$0 \leq \ln(X^n + 1) \leq \ln 2 \text{ معناه } 1 \leq X^n + 1 \leq 2 \text{ معناه } 0 \leq X \leq 1$$

$$\text{ومنه: } 0 \leq I_n \leq \ln 2 \text{ إذن } 0 \leq \int_0^1 \ln(X^n + 1) dX \leq \int_0^1 \ln 2 dX$$

ج/ تعيين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتاج أنها متقاربة:

$$\text{بضرب أطراف المتباينة (1) في } X^n \text{ نجد } \begin{cases} 0 \leq X \leq 1 \dots (1) \\ 0 \leq X^n \leq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \text{ معناه } 1 - 2e^{-2(x-e)} = 0 \text{ معناه } x = e + \ln \sqrt{2}$$

x	$-\infty$	$e + \ln \sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	—	○	+

الدالة f متزايدة تماماً على $[e + \ln \sqrt{2}; +\infty[$

الدالة f متناقصة تماماً على $] -\infty; e + \ln \sqrt{2}]$

تشكيل جدول تغيراتها:

x	$-\infty$	$\ln 2/2 + e$	$+\infty$
$f'(x)$	—	○	+
$f(x)$	$+\infty$	$3\ln 2/2 + e$	$+\infty$

(2) / نبي أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D')

معادلتاهما: $y = -x + \ln 2 + e$ و $y = x - e$ عند $+\infty$

وعند $-\infty$ على الترتيب: بما أن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - e)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x + e + \ln 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(2 + e^{2(x-e)}) - \ln 2] = 0$$

فإن: (D) مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

و (D') مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$

ب/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (D) و (D')

$$\text{لدينا: } f(x) - (x - e) = \ln(1 + 2e^{-2(x-e)})$$

$$\ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) > \ln 1 = 0 \text{ معناه } 1 + 2e^{-2(x-e)} > 1$$

ومنه: $f(x) - (x - e) > 0$ إذن (C_f) يقع فوق م.م (D)

$$\text{لدينا: } f(x) - (-x + e + \ln 2) = \ln(2 + e^{2(x-e)}) - \ln 2$$

$$\ln(2 + e^{2(x-e)}) > \ln 2 \text{ معناه } 2 + e^{2(x-e)} > 2$$

$$f(x) - (-x + e + \ln 2) > 0 \text{ إذن } (C_f) \text{ يقع فوق م.م } (D')$$

من أجل كل عدد حقيقي x

$$\text{ج/ نبي أن المستقيم } (\Delta) \text{ ذو المعادلة } x = \frac{1}{2} \ln 2 + e$$

هو محور تناظر للمنحنى (C_f) :

$$\text{من أجل كل } x \text{ من } \left(2 \left(\frac{\ln 2}{2} + e \right) - x \right) : \square, \text{ لدينا}$$

$$f \left(2 \left(\frac{\ln 2}{2} + e \right) - x \right) = f(\ln 2 + 2e - x)$$

$$= -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)}) = f(x)$$

$$\text{ومنه: } x = \frac{1}{2} \ln 2 + e : (\Delta) \text{ محور تناظر للمنحنى } (C_f)$$

(3) رسم (Δ) ، (D) ، (D') و (C_f) :

(4) / نبي أن جميع المستقيمت (D_m) تشمل النقطة الثابتة

$$A \left(\frac{\ln 2}{2} + e; \frac{\ln 2}{2} \right) : (D_m) : y = mx - m \left(e + \frac{\ln 2}{2} \right) + \frac{\ln 2}{2}$$

(6) باستعمال: $\ln(1+X) \leq X$ من اجل كل $X \in]0; +\infty[$

أ) / استنتاج أن: $0 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$

$\ln(1+X) \leq X$ من اجل كل $X \in]0; +\infty[$

لدينا: $1 + 2e^{-2(x-e)} > 0$ بوضع: $X = 1 + 2e^{-2(x-e)}$ نجد:
وبالتالي $0 \leq \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) \leq 2e^{-2(x-e)}$

$$0 \leq \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) dx \leq \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx$$

ومنه: $0 \leq -1 + \ln 4 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$

اذن: $0 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$

ب) / اعطاء حصر العدد $I + I_1$:

$$0 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$$

$$\int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx = - \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} -2e^{-2(x-e)} dx = - \left[e^{-2(x-e)} \right]_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} = \frac{1}{6}$$

ومنه: $0 \leq I + I_1 \leq \frac{1}{6} - 1 + \ln 4$

$$0 \leq X^{n+1} + 1 \leq X^n + 1 \text{ أي } 0 \leq X^{n+1} \leq X^n$$

$$0 \leq \ln(X^{n+1} + 1) \leq \ln(X^n + 1) \text{ لأي } n \in \mathbb{N}^*$$

$$0 \leq \int_0^1 \ln(X^{n+1} + 1) dX \leq \int_0^1 \ln(X^n + 1) dX$$

ومنه: المتتالية (I_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$

بما ان (I_n) محدودة من الاسفل بالصفر $(0 \leq I_n \leq \ln 2)$

ومتناقصة تماما فإنها متقاربة نحو الصفر

ج) / تعيين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتاج أنها متقاربة:

$$\begin{cases} 0 \leq X \leq 1 \dots (1) \\ 0 \leq X^n \leq 1 \end{cases} \text{ بضرب أطراف المتباينة (1) في } X^n \text{ نجد}$$

$$0 \leq X^{n+1} + 1 \leq X^n + 1 \text{ أي } 0 \leq X^{n+1} \leq X^n$$

$$0 \leq \ln(X^{n+1} + 1) \leq \ln(X^n + 1) \text{ لأي } n \in \mathbb{N}^*$$

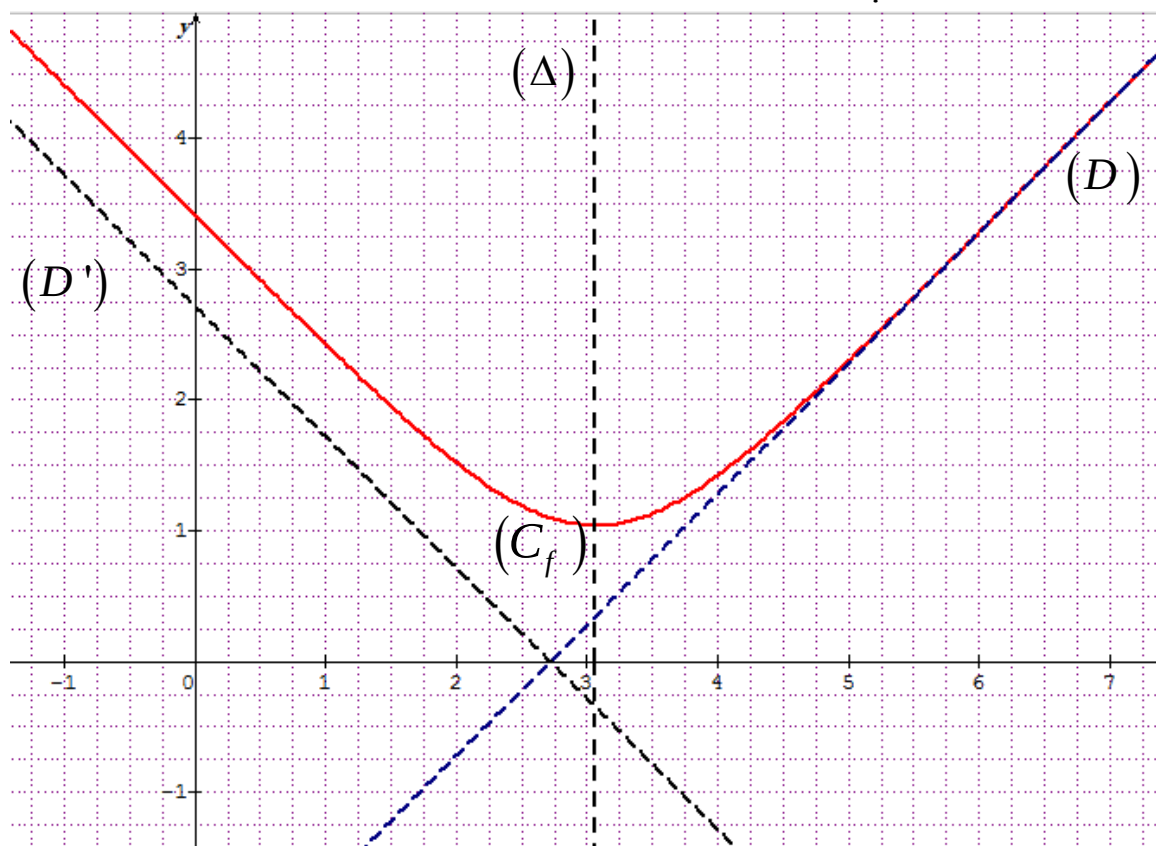
$$0 \leq \int_0^1 \ln(X^{n+1} + 1) dX \leq \int_0^1 \ln(X^n + 1) dX$$

ومنه: المتتالية (I_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$

بما ان (I_n) محدودة من الاسفل بالصفر $(0 \leq I_n \leq \ln 2)$

ومتناقصة تماما فإنها متقاربة نحو الصفر

(3) رسم (Δ) ، (D) ، (D') و (C_f) :



ثانوية : 1 نوفمبر + حدادي

الشعبة : رياضيات

اليوم : 2017.05.15

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

المستوى : الثالثة ثانوي

المدة : 4 ساعات و نصف

البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع 01

التمرين الأول : (04 نقاط)

ليكن N عدد طبيعي غير معدوم يكتب في نظام التعداد ذي الأساس 5 على الشكل $\overline{abcca}^5$ و يكتب في نظام

التعداد ذي الأساس 8 على الشكل $\overline{bbab}^8$

(1) بين أن N يحقق : $309a + 15c = 226b$

(2) بين أن العدد 3 قاسم للعدد b

(3) فيما يلي نفرض أن : $b = 3$

(أ) بين أن : $309(a - 2) = 60 - 15c$

(ب) استنتج أن 5 قاسم للعدد $(a - 2)$ ثم استنتج كلا من a و c

(ت) أكتب العدد N في نظام التعداد ذي الأساس 10

التمرين الثاني : (04,5 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

(1) بين أن (S) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ بحيث : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 1 = 0$ هي سطح كرة

يطلب تعيين مركزها A و نصف قطرها R

(2) m عدد حقيقي. نعتبر المستويات (P_m) التي معادلتها من الشكل : $mx + 2y - z + 1 = 0$

(أ) عين m_0 حتى يكون (P_m) مماساً لـ (S)

(ب) عين تمثيلاً و سيطياً للمستقيم (D) الذي يشمل A و يعامد (P_{m_0})

(ت) استنتج إحداثيات نقطة التماس بين (P_{m_0}) و (S)

(3) (أ) بين أن المستويين (P_0) و (P_1) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل و سيطي له

(ب) تحقق أن (Δ) محتوي في جميع المستويات (P_m)

التمرين الثالث : (04,5 نقاط)

• بين أنه من أجل كل عدد مركب Z فإن : $Z \times \bar{Z} = |Z|^2$

• ليكن Z_1 و Z_2 عدنان مركبان حيث : $Z_1 = \frac{1}{\tan \alpha} + i$ و $Z_2 = \frac{1}{Z_1 \sin \alpha}$ مع $\alpha \in]0; \pi[$

(1) أحسب بدلالة α كلا من طويلة و عمدة العددين المركبين Z_1 و Z_2

(2) بين أن : $Z_2 = \overline{Z_1} \sin \alpha$ ثم استنتج قيم α التي تحقق : $Z_1 \times Z_2 = 2$ و أكتب كلا من

Z_1 و Z_2 على الشكل الآسي

(3) نضع $\alpha = \frac{\pi}{4}$

(أ) عين العدد الطبيعي n حتى يكون : $\left(\frac{Z_1}{\sqrt{2}}\right)^n - 2(Z_2)^{-n}$ عددا حقيقيا سالبا

(4) المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$, نعتبر النقط $C; B; A$ ذات اللواحق على

الترتيب : $Z_A = 1 + i$; $Z_B = \frac{\sqrt{2}}{2} \overline{Z_A}$; $Z_C = 1 - i$

(أ) بين أن : $Z_A = i\sqrt{2} \times Z_B$ ثم استنتج طبيعة التحويل S الذي يحول النقطة B إلى النقطة A و حدد عناصره المميزة

(ب) عين (γ) مجموعة النقط $M(Z)$ التي تحقق : $\arg\left(\frac{iZ}{Z_C}\right) = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ مع $k \in \mathbb{Z}$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

• لتكن (U_n) متتالية معرفة أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة : $\begin{cases} U_0 = U_1 = 1 \\ U_{n+2} = -\frac{2}{3}U_{n+1} + \frac{\alpha}{9}U_n \end{cases}$

(1) نضع $\alpha = -1$

(أ-) بين أن (V_n) حيث : $V_n = U_{n+1} + \frac{1}{3}U_n$ هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول V_0

(ب-) عبر عن V_n بدلالة n ثم أحسب بدلالة n الجداء : $P_n = V_0 \times V_1 \times \dots \times V_{n-1}$ ثم أحسب المجموع : $S_n = \sum_{k=0}^n V_{2k}$

(ج-) بين أن (W_n) حيث : $W_n = (-3)^n U_n$ متتالية حسابية أساسها $r = -4$ ثم استنتج أن :

$$U_n = \left(\frac{-1}{3}\right)^n (1 - 4n)$$

(2) نضع $\alpha = -\frac{3}{4}$

(أ) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $T_n = U_{n+1} + \beta U_n$

1-أ) تحقق أن : $T_{n+1} = \frac{(-8+12\beta)U_{n+1}-U_n}{12}$

2-أ) عين قيم كل من β و q بحيث : $T_{n+1} = q \times T_n$

(ب) استنتج أنه يوجد قيمتان للعدد الحقيقي β بحيث تكون المتتالية (T_n) هندسية يطلب تعيين أساسها حسب قيم β

• لتكن f دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = -\frac{2}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{9}\ln(x)$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(1) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجال تعريفها ثم فسر النتائج بيانيا

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0, 24; 0, 26]$

(4) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم فسر النتيجة بيانيا

(5) أرسم (C_f) في المعلم السابق

(6) أ-) أحسب المساحة $A(\alpha)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى f و حامل محور الفواصل

و المستقيمين $x = \alpha$ و $x = 6$

ب-) استنتج حصرا للعدد $A(\alpha)$ (عدم استعمال المدور)

الموضوع 02

التمرين الأول : (04 نقاط)

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل و تصحيح الخطأ - إن وجد- في كل حالة من الحالات التالية :

(1) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

نعتبر المستقيمان (Δ_1) و (Δ_2) الممثلان وسيطيا على الترتيب ب :

$$(\Delta_2): \begin{cases} x = 6 + k \\ y = 1 - 2k \\ z = 5 + k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R} \quad (\Delta_1): \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + \frac{1}{2}t \\ z = -2 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

(أ) المستقيمان (Δ_1) و (Δ_2) ليسا من نفس المستوي

(ب) لتكن M نقطة كيفية من (Δ_1) و لتكن N نقطة كيفية من (Δ_2)

- يكون (MN) عموديا على (Δ_1) و (Δ_2) إذا و فقط إذا كانت إحداثيات النقطتين M و N هي $M(1; 2; 0)$ و $N(-3; 1; 1)$

(ت) نعتبر المستويين (P_1) و (P_2) اللذان معادلتيهما على الترتيب :

$$(P_2): 3x - y + 5z = 0 \quad (P_1): x + 2y - z + 2 = 0$$

- المستويان (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) تمثله الديكارتي هو :

$$\begin{cases} 2x - 3 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

(2) كيس به 15 كرية منها 6 كريات حمراء , 4 كريات سوداء , 3 كريات صفراء و كرتين بيضيتين.

نسحب على التوالي دون إرجاع ثلاث كريات من هذا الكيس

(أ) عدد كل السحبات الممكنة هو 15^3 سحبة

(ب) عدد الإمكانيات لسحب كرتين على الأقل من نفس اللون هو : $C_6^2 C_4^1 + C_2^2 C_3^2$

التمرين الثاني : (04,5 نقاط)

(1) بين أن الأعداد المركبة : -2 ; $-2 - 2i$; $-4i$ بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة من متتالية هندسية

يطلب تعيين أساسها q_1

(2) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المتتالية الهندسية (Z_n) المعرفة بحددها الأول

$$Z_0 = -1 - i \text{ و أساسها } q = 1 + i$$

(أ) أحسب الحدود Z_1 ; Z_2 ; Z_3

(ب) أكتب بدلالة n عبارة الحد العام Z_n

(ت) جد قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد Z_n حقيقيا

(3) نعتبر التحويل النقطي f الذي يرفق بكل نقطة $M(Z)$ النقطة $M'(Z')$ بحيث :

$$Z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) Z + 4 + 2i$$

(أ) عين طبيعة التحويل f محددا عناصره المميزة

(ب) عين طبيعة التحويل h حيث : $h = f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f$ و حدد عناصره المميزة

التمرين الثالث : (04,5 نقاط)

- نعتبر في $\mathbb{R}$ الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = (2x + 3)e^x$
- (1) أحسب f' و f'' ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$:
- $f^{(n)}(x) = (2x + 2n + 3)e^x$ حيث : $f', f'', \dots, f^{(n)}$ المشتقات المتتالية للدالة f
- (2) نضع : $U_n = f^{(n)}(-n)$ مع $n \in \mathbb{N}^*$
- (أ) أثبت أن المتتالية (U_n) هندسية ثم عيّن بدلالة n : $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$
- (ب) نعتبر المتتالية (W_n) حيث : $W_n = \frac{3}{e-1} + \left(\frac{1}{e}\right)^n$ مع $n \in \mathbb{N}^*$
- أثبت أن (S_n) و (W_n) هما متتاويتان متجاورتان
- (3) (أ-) إستنتج من السؤال (1) حل المعادلة : (1) $y'' = (2x + 11)e^x$
- (ب-) بين أن f حل للمعادلتين التفاضليتين : (2) $y'' - y = 4e^x$
- (3) $y' - y = 2e^x$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

- لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_m(x) = \frac{e^{mx}-1}{2e^x}$ وليكن (C_{f_m}) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ و m وسيط حقيقي
- (1) أحسب حسب قيم m نهايات الدالة f_m عند $-\infty$
- (2) عيّن حسب قيم m الدالة المشتقة للدالة f_m و أدرس إشارتها
- (3) أثبت أن كل المنحنيات (C_{f_m}) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثياتها
- نضع $m = 2$
- (1) إستنتج إشارة $f'_2(x)$
- (2) شكل جدول تغيرات الدالة f_2
- (3) أدرس الفروع اللانهائية
- (4) أثبت أن للمنحنى (C_{f_2}) نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتها
- (5) أكتب معادلة المماس (Δ) لـ (C_{f_2}) عند النقطة التي فاصلتها 0
- (6) لتكن h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = f_2(x) - x$
- (أ) أدرس تغيرات الدالة h
- (ب) أحسب $h(0)$ ثم إستنتج الوضع النسبي بين (C_{f_2}) و (Δ)
- (7) أرسم (Δ) و (C_{f_2}) في المعلم السابق
- (8) حدد بيانيا عدد و إشارة تقاطع المنحنى (C_{f_2}) مع المستقيم ذو المعادلة $y = mx$
- (9) أحسب مساحة الجزء المعين بالمنحنى (C_{f_2}) و المستقيم $y = x$ و المستقيمين $x = 0$ و $x = -\ln 2$

- بالتوفيق في بكالوريا 2017 -

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية تواتي حمد لخضر
متقن ميلودي العروسي
ثانوية بحري بكار

دورة : ماي 2017

المدة : 04 سا

وزارة التربية الوطنية
مديرية التربية ولاية الوادي
امتحان بكالوريا تجريبي التعليم الثانوي
الشعبة : رياضيات.

اختبار في مادة : الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (4 نقاط)

(1) حل في Z^2 المعادلة التالية ذات المجهول $(x; y)$: $6x - 5y = 7$

(2) عين الأعداد الصحيحة النسبية a بحيث: $\begin{cases} a \equiv 3[5] \\ a \equiv -4[6] \end{cases}$

(3) أ- عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5

ب- أثبت من أجل كل عدد طبيعي n أن : $x^n \equiv 2^n [5]$

ج - عين قيم العدد الطبيعي n حيث : $x + x^2 + x^3 + \dots + x^n \equiv 2 [5]$

(4) العدد الطبيعي $\overline{1438}$ مكتوب في نظام التعداد ذي الأساس α

جد أصغر قيمة للعدد الطبيعي α بحيث يكون :

$$2017^{2018} + 8^{2016} + \overline{1438} \equiv 0 [5]$$

التمرين الثاني: (5 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C ذات اللواحق على الترتيب

$$Z_C = Z_A + Z_B, \quad Z_B = 2 + 2\sqrt{3}i, \quad Z_A = 2\sqrt{3} - 2i$$

(1) أكتب على الشكل الجبري العدد المركب Z_C

(2) أ- ليكن θ عمدة للعدد المركب Z_C

باستعمال العلاقتين التاليتين: $\cos(2\theta) = 2(\cos \theta)^2 - 1$ و $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \times \cos \theta$

أ- أثبت أن : $\arg(Z_C) = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$

ب - أكتب Z_C على الشكل المثلثي ثم الأسى

ج - عين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون $(Z_C)^n$ حقيقي ، ثم استنتج أن $(Z_C)^{2028}$ عدد حقيقي

(3) (E) مجموعة النقط M صورة Z في المستوي المركب حيث :

$$(Z - 2\sqrt{3} + 2i)(\bar{Z} - 2\sqrt{3} - 2i) = Z_B \times \bar{Z}_B$$

أ- برهن من أجل كل عدد مركب Z أن : $Z \times \bar{Z} = |Z|^2$

ب) تحقق أن النقطة C من (E) ثم حدد مجموعة النقط (E) .

(4) $(\tilde{E})$ مجموعة النقط M صورة Z في المستوي المركب حيث :

$$Z = 2 + 2\sqrt{3}i + 4e^{i\theta} \quad , \quad (\theta \text{ حدد حقيقي})$$

عين المجموعة $(\tilde{E})$ ثم تحقق أن النقطة C من $(\tilde{E})$

(5) أ- حدد طبيعة التحويل النقطي R مع ذكر عناصره المميزة الذي يرفق بكل نقطة $M(Z)$ من المستوي النقطة

$$M(\tilde{Z}) \text{ والمعرف بـ : } (\tilde{Z} - Z_C) = e^{-i\frac{\pi}{2}} (Z - Z_C)$$

ب- تحقق أن $(\tilde{E})$ هي صورة (E) بالتحويل R .

التمرين الثالث: (4 نقاط)

- في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $A(1, 1, -1)$, $B(1, 1, 0)$, $I(1, 0, 0)$ و $J(0, 1, 0)$ و $K(0, 0, 1)$
- المطلوب : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات التالية مع التعليل :
- النقط A, I, J و K تنتمي إلى : (أ) مستقيم واحد (ب) مستو واحد (ج) لا تنتمي إلى مستو واحد
 - معادلة المستوي (IAB) هي: (أ) $x = 1$ (ب) $y = 1$ (ج) $z = -1$
 - (S) سطح كرة مركزها O و نصف قطرها $\frac{1}{2}$, المستقيم (IJ) : (أ) يقطع السطح (S) (ب) لا يقطع السطح (S) (ج) يمس السطح (S)
 - مجموعة النقط M من الفضاء التي إحداثياتها (x, y, z) تحقق: $(x + y - z + 1)^2 + (y + x)^2 = 0$ هي تمثل : (أ) مستقيم (ب) مستوي (ج) مجموعة خالية

التمرين الرابع: (7 نقاط)

- I- g الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ كمايلي : $g(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$
- أدرس تغيرات الدالة g ، ثم استنتج إشارتها .
- II- f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = e^x \times \ln(1 + e^{-x})$
- وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- بوضع: $t = e^{-x}$ بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x)f = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ثم فسر النتائج هندسيا .
 - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\hat{f}(x) = e^x \times g(e^{-x})$
 - استنتج اتجاه تغيرات الدالة f . ثم شكل جدول تغيراتها .
 - أرسم المنحنى (C_f) (تعطى -0.7 فاصلة نقطة انعطاف للمنحنى (C_f))
 - أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x أن : $\hat{f}(x) - f(x) = \frac{-e^x}{e^{x+1}}$ ثم استنتج دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$
 - ب- أحسب مساحة الحيز في المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمت $x = 0$ ، $x = 1$ و $y = 0$
 - ناقش بيانها وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $\ln(1 + e^x) - m e^{-x} - x = 0$
 - بين من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-1; 0]$ لدينا : $0 \leq \hat{f}(x) \leq g(e)$
 - بين أن المعادلة $f(x) + x = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]-1; 0[$
- III- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n حيث $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = -f(u_n)$
- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \in [-1; 0]$
 - أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_{n+1} - \alpha| \leq g(e) |u_n - \alpha|$
 - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_n - \alpha| \leq [g(e)]^n$
 - احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ، (تعطى : $g(e) \simeq 0.6$)

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 2$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n + \frac{1}{3} n + 1$

- 1 - أ) أحسب الحدود u_1, u_2, u_3
 ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير (u_n)
- 2 - أ) برهن بالتراجع ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < n + 3$
 ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)
- 3 - لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - n$
 أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول v_0
 ب) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n
 ج) هل المتتالية (u_n) متقاربة.
- 4 - نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n + 2v_n$
 بين أن : $S_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 6$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}; 0)$ ، نعتبر النقط $A(-7; 0; 4)$ ، $B(2; 1; 3)$

$C(3; 2; 4)$ و $D(-3; -6; 6)$ والمستوي (p) معادلته $2x - 3y + z - 4 = 0$

- 1- تحقق أن النقطتين B و C من المستوي (p)
- 2- بين (p) هو المستوي المحوري للقطعة $[AD]$
- 3- أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AD)
- 4- تحقق أن النقطة $H(-5; -3; 5)$ هي نقطة تقاطع المستقيم (AD) والمستوي (p)
- 5- علماً أن حجم الرباعي $ABCH$ هو 10 (وحدة حجم). استنتج مساحة المثلث BCH
- 6- أ) بين أن التمثيل الوسيطى للمستوي (p) معرف بـ : $\begin{cases} x = \alpha + 7\lambda + 2 \\ y = \alpha + 4\lambda \\ z = \alpha - 2\lambda \end{cases}$ و α و λ عددين حقيقيين
 ب) لتكن M نقطة كيفية من المستوي (p) ، أثبت أن الجداء $\vec{AM} \cdot \vec{AD}$ مستقل عن الوسيطين α و λ
 ج) عين قيمتي α و λ بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن ثم استنتج هذه المسافة

التمرين الثالث : (05 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلتين ذات المجهول Z حيث:

$$(1) \quad Z^3 - 2Z^2 + 5Z = 0 \quad , \quad (2) \quad Z^3 + Z^2 + 4Z + 4 = 0$$

- I - 1 - بين إذا كان Z_0 حلاً للمعادلة (1) فإن $(Z_0 - 1)$ حلاً للمعادلة (2).
- 2 - حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (1) ثم استنتج حلول المعادلة (2)
- II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(\vec{u}; \vec{v}; 0)$ نعتبر النقط A, B, C ذات اللواحق على الترتيب : $Z_A = -1$ ، $Z_B = 1 + 2i$ ، $Z_C = 1 - 2i$

- 1 - أكتب على الشكل الأسى العدد المركب $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC
- 2 - استنتج تحويلًا T في المستوي المركب يحول النقطة C إلى النقطة B والنقطة A إلى نفسها مع ذكر عناصره المميزة
- 3 - عين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC
- 4 - h التحويل النقطي في المستوي الذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $\acute{M}(\acute{z})$
المعرف بالعلاقة : $\overrightarrow{MM} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$
(أ) أثبت أن : $\overrightarrow{GM} = 4 \overrightarrow{GM}$
(ب) أكتب الصيغة المركبة للتحويل h وحدد طبيعته مع ذكر عناصره المميزة
- 5 - (أ) التحويل S المعرف بـ : $S = T \circ h$ هو تشابه مباشر يطلب نسبته وزاويته .
(ب) أحسب مساحة المثلث $\acute{A}\acute{B}\acute{C}$ صورة المثلث ABC بالتحويل S
- 6 - عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $\underbrace{SOSO \dots OS}_{(n \text{ مرة})}$ تحاكيا نسبته موجبة.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- I - لتكن g دالة معرفة على المجال $]0, +\infty[$ بالشكل : $g(x) = 1 - e^{1-x} + \ln x$
 - 1- أدرس تغيرات الدالة g و شكل جدول تغيراتها .
 - 2- أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .
- f - II دالة معرفة على المجال $[0, +\infty[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x) = e^{1-x} + x \ln x & : x > 0 \\ f(0) = e \end{cases}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

 - 1- (أ) بيّن أن f مستمرة على يمين الصفر .
(ب) أدرس قابلية اشتقاق f على يمين الصفر .
 - 2- (أ) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.
(ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .
 - 3- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ وفسر النتيجة هندسيا ثم أنشئ (C_f) .
 - 4 - (أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب : $\int_1^e x \ln x \, dx$
(ب) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و المستقيمت التي معادلاتها : $x = 1$, $x = e$ و $y = 0$
 - 5 - (أ) عين قيم العدد الحقيقي الموجب تماما m التي من اجلها تقبل المعادلة $f(x) = f(m)$ حلين في المجال $[0, +\infty[$ (تعطى $f(2.66) \simeq e$)
(ب) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $e \left(\frac{1}{e^x} - 1 \right) = m + x \ln \left(\frac{1}{x} \right)$
- III - h الدالة المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بـ : $h(x) = \ln [f(x)]$
 - 1- أحسب $h'(x)$ بدلالة $g(x)$ و $f(x)$ ثم استنتج إشارة $h'(x)$
 - 2- شكّل جدول تغيرات الدالة h .

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

نعتبر النقط $A(1;1;0)$ ، $B(1;-1;2)$ ، $C(0;1;1)$ و $D(1;1;4)$.

1. أ. بَيِّنْ أَنَّ النقط A ، B و C تَعَيِّنْ مَسْتَوِيَّ نَرْمِزْ لَهُ بِـ (P) .

ب. بَرِّرْ أَنَّ (P) ذُو الْمَعَادِلَةِ: $x + y + z - 2 = 0$.

ج. تَحَقَّقْ أَنَّ النِّقْطَةَ D لَا تَنْتَمِي إِلَى الْمَسْتَوِي (P) .

2. لَتَكُنْ (Γ) الدَّائِرَةُ الْمُحِيطَةُ بِالمثلث ABC و H مُنْتَصَفِ الْقِطْعَةِ $[AB]$.

أ. بَيِّنْ أَنَّ المثلث ABC قَائِمٌ فِي C .

ب. اسْتَنْتِجْ أَنَّ H مَرْكَزُ الدَّائِرَةِ (Γ) .

3. لِيَكُنْ (Δ) الْمَسْتَقِيمُ الْعَمُودِيُّ عَلَى الْمَسْتَوِي (P) وَالَّذِي يَشْمَلُ النِّقْطَةَ H .

بَيِّنْ أَنَّ التَّمْثِيلَ الْوَسِيطِيَّ لِلْمَسْتَقِيمِ (Δ) يَعْطِي بـ: $\alpha \in \mathbb{R}$ ، $\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$

4. لَتَكُنْ M نِقْطَةً مِنَ الْمَسْتَقِيمِ (Δ) .

أ. بَيِّنْ أَنَّ $MA = MB = MC$.

ب. بَيِّنْ أَنَّهُ تَوْجَدُ نِقْطَةٌ وَحِيدَةٌ I مِنَ الْمَسْتَقِيمِ (Δ) بِحَيْثُ $IA = ID$ ، يَطْلُبُ تَعْيِينَ إِحْدَاثِيَّهَا.

ج. اسْتَنْتِجْ أَنَّ النِّقْطَ A ، B ، C و D تَنْتَمِي إِلَى نَفْسِ سَطْحِ الْكَرَةِ (S) ،

يَطْلُبُ تَعْيِينَ مَرْكَزِهَا وَنِصْفِ قَطْرِهَا.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

المستوي المركب المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

نعتبر النقطتين A و B لواحقتها على الترتيب: $z_A = \sqrt{3} - i$ و $z_B = \sqrt{3} + 3i$.

1. اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه O ويحول A إلى B ، ثم عَيِّنْ نِسْبَتَهُ وَزَاوِيَتَهُ.

2. نعرّف متتالية النقط من المستوي المركب كما يلي: $A_0 = A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $A_{n+1} = S(A_n)$.

نرمز بلاحقة A_n بالرمز z_n .

أ. أحسب لاحقة النقطة A_1 .

ب. برهن أن: $z_n = 2(\sqrt{3})^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}$.

ج. عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية والتي تكون من أجلها النقطة A_n تنتمي إلى المستقيم (OA_1) .

3. نعتبر المتتالية (d_n) والمعرفة كما يلي بـ : $d_0 = A_0 A_1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $d_n = A_{n+1} A_n$.

أ. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن (d_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

ب. استنتج عبارة d_n بدلالة n .

ج. برهن أنه من أجل $n \geq 13$ ، فإنّ النقطة A_n تكون خارج القرص الذي مركزه O ونصف قطره $r = 2017$.

4. أحسب بدلالة n المجموع L_n حيث: $L_n = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_n A_{n+1}$ ، ثمّ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n$.

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

أ - (u_n) متتالية حسابية حدّها الأول $u_0 = 5$ و أساسها 4 .

(1) أكتب الحد العام u_n بدلالة n .

(2) أحسب قيمة المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ بدلالة n .

(3) إذا كان مجموع سبعة حدود متعاقبة من (u_n) هو 1995 فما هو الحد الأول من هذه الحدود

ب - (v_n) متتالية عددية معرفة على IN كما يلي : $v_n = (2n+1) \times 2^{(4n+5)}$

(1) أ. عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 .

ب. ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد 1438^{2017} على 7 ؟

(2) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون باقي قسمة v_n على 7 هو 3 .

(3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}$

(2) أستنتج قيمة الجداء $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$ بدلالة n .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر المعادلة التفاضلية (E) حيث : $y' - y = e^x - x$.

1. بيّن أنّ الدالة u حل للمعادلة (E) حيث u معرفة على IR بـ : $u(x) = xe^x + x + 1$.

2. v دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على IR . بيّن أنّ الدالة $v + u$ حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت الدالة v حل للمعادلة التفاضلية (E') حيث : $y' - y = 0$.

3. حل المعادلة التفاضلية (E') ، ثمّ استنتج الحل العام للمعادلة التفاضلية (E) .

4. عيّن الحل الخاص k للمعادلة التفاضلية (E) والذي يحقق $k(0) = 0$.

II) g دالة عددية معرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي: $g(x) = (x-1)e^x + x + 1$.

1. احسب $g'(x)$ لكل x من $[0, +\infty[$ ثم استنتج أن الدالة g متزايدة تماما على $[0, +\infty[$.

2. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ، بين أن: $g(x) \geq 0$ لكل x من $[0, +\infty[$.

III) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $IR - \{0\}$ كما يلي: $f(x) = \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2}$

وليكن (C_f) التمثيل البياني f للدالة في المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. بين أن f دالة فردية.

2. أ. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا.

ب. برهن أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، ماذا تستنتج بالنسبة إلى المنحنى (C_f) ؟

3. أ. بين أن: $f'(x) = \frac{-e^x g(x)}{(e^x - 1)^3}$ من أجل كل x من $[0, +\infty[$ ، ثم استنتج إشارة $f'(x)$ على $[0, +\infty[$.

ب. شكّل جدول تغيرات الدالة f على $[0, +\infty[$.

4. أنشئ المنحنى (C_f) على $IR - \{0\}$ في المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

لتكن الدالة h المعرفة على $[\ln 2, +\infty[$ كما يلي: $h(x) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x - 1}\right) - \frac{x}{e^x - 1}$

5. أ. بين أن الدالة h هي دالة أصلية للدالة f على المجال $[\ln 2, +\infty[$.

ب. احسب العدد A حيث: $A = \int_{\ln(2)}^{\ln(2017)} f(x) dx$ ، ماذا يمثل هندسيا العدد A ؟

n عدد طبيعي أكبر تماماً من 1، نعتبر العددين a و b حيث: $a = 37n + 32$ و $b = 26n - 32$.

1. أ. برهن أنه إذا كان d قاسم للعددين a و b فإن d قاسم للعدد 2016.

ب. حلل العدد 2016 إلى جداء عوامل أولية، ثم عيّن مجموعة قواسمه.

ج. ماهي القيم الممكنة لـ $PGCD(a, b)$ ؟

* نريد البحث عن الأعداد الطبيعية n والتي تحقق: $PGCD(a, b) = 2016$.

د. باعتبار أن: $PGCD(a, b) = 2016$ ، برّر وجود عدد صحيح m حيث: $2016m = 37n + 32$.

2. نعتبر المعادلة (E) حيث: $2016m - 37n = 32$.

أ. باستعمال خوارزمية إقليدس عيّن العددين الصحيحين x و y حيث: $2016x - 37y = 1$.

ب. استنتج أن الثنائية $(m_0, n_0) = (-64, -3488)$ حل خاص للمعادلة (E).

ج. برهن أنه مهما يكن n فإنه يكتب على الشكل: $n = 2016k - 3348$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

3. أ. تأكد من أن a و b يكتبان على الشكل: $a = 2016(37k - 64)$ و $b = 2016(26k - 45)$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

ب. برهن أنه مهما يكن العدد الصحيح k فإن العددين a و b يحققان: $PGCD(a, b) = 2016$.

ج. ما هو أصغر عددين طبيعيين a و b حيث: $PGCD(a, b) = 2016$ ؟

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

1. أ. حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (E): $z^2 - 2z + 4 = 0$.

ب. عيّن الكتابة الأسية لحلول المعادلة (E).

المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

نعتبر الدائرة (Γ) ذات المركز O ونصف قطرها 2، ولتكن النقطة A ذات اللاحقة $z_A = 2$.

2. أنشئ الدائرة (Γ) والنقطة A ، ثم النقطتين B و C التي لاحقتاهما: $z_B = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $z_C = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

3. ليكن $\theta \in]-\pi, \pi]$ والنقطة M من الدائرة (Γ) ذات اللاحقة: $z = 2e^{i\theta}$. نرمز بـ N للنقطة من الدائرة (Γ) والتي

تحقق: $z_N = 2e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)}$ ، بيّن أن لاحقة N هي $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ، $k \in \mathbb{Z}$.

4. ليكن r الدوران الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

أ. تحقق من أن الدوران r ذو العبارة المركبة: $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ب. لتكن F و K منتصفا القطعتين $[BM]$ و $[CN]$ على الترتيب، بيّن أن: $r(F) = K$.

ج. استنتج طبيعة المثلث AFK .

5. أ. بيّن أن: $AF^2 = 4 - 2\sqrt{3} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$.

ب. استنتج لاحقة النقط M بحيث يكون الطول AF أكبر ما يمكن، ثم انشئ المثلث AFK .

الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ،

نعتبر سطح الكرة (S) ذو المعادلة: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 23 = 0$.

1. بيّن أن سطح الكرة (S) ذو المركز $I(1, -1, 0)$ ونصف القطر 5.

2. ليكن $J(-1, 1, 1)$ و (P) مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ حيث $\vec{JI} \cdot \vec{JM} = 0$.

أ. بيّن أن (P) هو مستو ذو المعادلة: $2x - 2y - z + 5 = 0$.

ب. بيّن أن تقاطع سطح الكرة (S) والمستوي (P) هو دائرة (C) مركزها J ونصف قطرها 4.

3. لتكن النقطة $A(-5, 5, 3)$ و (S') سطح الكرة التي مركزها A ونصف قطرها $2\sqrt{13}$.

أ. بيّن أن A تنتمي إلى المستقيم (IJ) .

ب. بيّن أن: $AJ = 6$.

4. لتكن M نقطة من الدائرة (C) .

أ. بيّن أن المثلث AJM قائم في J .

ب. استنتج أن $AM = 2\sqrt{13}$.

5. عيّن تقاطع سطح الكرة (S') والمستوي (P) .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ: $f(x) = 2\ln(x) - x + \frac{1}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. بيّن أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ وأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

2. أ. تأكد أنه من أجل كل $x \in]0, +\infty[$ ، فإن: $f'(x) = -\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$.

ب. أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

ج. أحسب $f(1)$ ثم استنتج إشارة $f(x)$ من أجل كل $x \in]0, +\infty[$.

د. بيّن أن النقطة $I(1, 0)$ نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) .

3. أ. ارسم المنحنى (C_f) ، ثم ارسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f| + 1$.

ب. باستعمال المنحنى (C') ، ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $|f(x)| + 1 = m^2$.

ج. احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين $x = e$ و $x = 1$.

4. أ. ليكن $x > 0$. تأكد من أن $f\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

ب. بملاحظة أن $\sqrt{1 + \frac{1}{x}} > 1$ ، بيّن أن $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

(II) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على IN^* بـ: $u_n = \ln^2\left(1+\frac{1}{1}\right) + \ln^2\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln^2\left(1+\frac{1}{3}\right) + \dots + \ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right)$

1. اعط قيمة مقربة إلى 10^{-3} للحد u_3 .

2. أ. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة.

ب. بيّن أنّه من أجل كل $k \in IN^*$ فإنّ: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

ج. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_n \leq 1 - \frac{1}{n+1}$.

3. استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد الحقيقي l حيث $0,7 < l \leq 1$.

تصحيح الامتحان الأول

التمرين الثاني :

1. العبارة المركبة للتشابه ك هي $z' = \sqrt{3}z$. مركزه O ونسبته $\sqrt{3}$ وزاوية $\theta = \pi/2$.

2. أ. حساب z_1 :

$$A_1 = S(A) \Rightarrow z_1 = \sqrt{3}z_A = \sqrt{3}(\sqrt{3}+i)$$

ب. البرهان أن $z_n = 2(\sqrt{3})^n e^{i(n\pi/2 - \pi/6)}$:

نستعمل البرهان بالتراجع: من أجل $n=0$ $z_0 = z_A$ صحيحة. نفرض أن $z_n = 2(\sqrt{3})^n e^{i(n\pi/2 - \pi/6)}$ ونبرهن أن :

$$z_{n+1} = 2(\sqrt{3})^{n+1} e^{i((n+1)\pi/2 - \pi/6)}$$

$$A_{n+1} = S(A_n) \Rightarrow z_{n+1} = \sqrt{3}z_n e^{i\pi/2}$$

$$= 2(\sqrt{3})^{n+1} e^{i((n+1)\pi/2 - \pi/6)}$$

ج. تعيين قيم n حتى تكون $A_n \in (OA_1)$:

$$A_n \in (OA_1) \Rightarrow \arg(z_n) = \arg(z_1)$$

$$\Rightarrow n\pi/2 - \pi/6 = \pi/6 + 2\pi k'; k' \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow n = 2k+1; k \in \mathbb{N} \quad (n \text{ عدد فردي})$$

3. أ. باستخدام التناظرية (المتشابهة) :

$$A_{n+2}A_{n+1} = \sqrt{3}A_{n+1}A_n \Rightarrow d_{n+1} = \sqrt{3}d_n$$

ومنه (d_n) متتالية أسية $q = \sqrt{3}$ و $d_0 = 4$

$$d_n = 4(\sqrt{3})^n$$

ج. حتى تكون النقطة A_n خارج الدائرة Γ مركزه O

ونصف قطرها $r = 2\sqrt{17}$ يجب أن يكون $A_n \notin \Gamma$

$$OA_n = |z_n| = 2(\sqrt{3})^n > 2\sqrt{17}$$

$$2(\sqrt{3})^n > 2\sqrt{17} \Rightarrow (\sqrt{3})^n > \frac{2\sqrt{17}}{2} \Rightarrow n \ln \sqrt{3} > \ln \left(\frac{2\sqrt{17}}{2} \right)$$

$$\Rightarrow n > \frac{\ln \left(\frac{2\sqrt{17}}{2} \right)}{\ln(\sqrt{3})} \approx 12.59 \Rightarrow \boxed{n \geq 13}$$

$$L_n = d_0 + d_1 + d_2 + \dots + d_n$$

4. حساب L_n :

$$= d \left[\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \right]$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3} - 1} \left[(\sqrt{3})^{n+1} - 1 \right] \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = +\infty$$

التمرين الأول :

$$\vec{AB}(1, -2, 2); \vec{AC}(-2, 1, -2) \Rightarrow \vec{AB} + 2\vec{AC} = \vec{0} \quad (1)$$

ومنه النقطة A, B, C تقع على مستوي.

$$1+2+0-2=0 \Rightarrow A \in (P)$$

$$1-1+2-2=0 \Rightarrow B \in (P)$$

$$0+1+1-2=0 \Rightarrow C \in (P)$$

$$\text{ومنه } (P) \text{ ذو المعادلة: } x+y+z-2=0$$

$$1+1+1-2=1 \neq 0 \Rightarrow D \notin (P)$$

$$\vec{CB}(1, -2, 1) \text{ و } \vec{CA}(1, 0, -1)$$

$$\Rightarrow \vec{CB} \cdot \vec{CA} = 1-1=0 \Rightarrow \vec{CB} \perp \vec{CA}$$

ومنه المثلث ABC قائم في C .

ب. المثلث ABC قائم في C و H منتصف $[AB]$

ومنه H مركز الدائرة (P) .

3. السطح $(1,1,1)$ فائق في (P) و $A(1,0,1)$

ومنه التمثيل الوسيط لـ (P) :

$$\begin{cases} x = 1+d \\ y = d \\ z = 1+d; d \in \mathbb{R} \end{cases}$$

4. أ. لدينا $M \in (A)$ ومنه $M(1+d, d, 1+d)$

$$MA^2 = d^2 + (d-1)^2 + (d+1)^2 \quad MA=MB$$

$$MB^2 = d^2 + (d+1)^2 + (d-1)^2 \Rightarrow MC$$

$$MC^2 = (d+1)^2 + (d-1)^2 + d^2$$

$$I(d+1, d, 1+d) \text{ ومنه } I \in (A)$$

$$IA = ID \Leftrightarrow IA^2 = ID^2 \Leftrightarrow (d+1)^2 = (d-3)^2$$

$$\Leftrightarrow (1+d)^2 = (d-3)^2 \Leftrightarrow d = 1$$

ومنه توجد نقطة واحدة $I(2,1,2) \in (A) \cap (P)$

$$ID = IA$$

ج. النقطة $I \in (A)$ من نتيجة السؤالين 4.أ و 4.ب

نتج لدينا $IA=IB=IC=ID$ ومنه النقطة

A, B, C, D تنتمي إلى نفس سطح الكرة (S)

مركزها I ونصف قطرها $r=IA=\sqrt{5}$

$$\begin{aligned}
 (-2)^{2017} &= (-2^2)^{2017} \quad [7] \Rightarrow \\
 &= -2^{2 \times 2017} \quad [7] \Rightarrow \equiv -2^{4034} \quad [7] \\
 &= -2^{3(1344)+2} \equiv -4 \equiv 3 \quad [7]
 \end{aligned}$$

ومنت باني 1438^{2017} على 7 هو $[3]$

2. آجيين قيس n بحيث يكون V_n على 7 هو 3
معنا $V_n \equiv 3 \quad [7] \Leftrightarrow (2n+1)2^{4n+5} \equiv 3 \quad [7]$

$$(2n+1)2^{4n+5} \equiv 3 \quad [7] \Leftrightarrow (2n+1)2^{3n+3} \cdot 2^{n+2} \equiv 3 \quad [7]$$

$$\Leftrightarrow (2n+1)2^{n+2} \equiv 3 \quad [7] \quad \text{من أجل } n=3k$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow (6k+1)2^{3k+2} &\equiv 3 \quad [7] \\
 \Leftrightarrow (6k+1) \cdot 4 &\equiv 3 \quad [7] \Leftrightarrow 24k+28 \equiv 3 \quad [7] \\
 \Leftrightarrow 8k &\equiv 1 \quad [7] \Rightarrow k \equiv 4 \quad [7]
 \end{aligned}$$

ومنت $k=7d+1$ و $d \in \mathbb{N}$

$$n = 3(7d+1) = 21d+3; d \in \mathbb{N}$$

$$(2n+1)2^{n+2} \equiv 3 \quad [7] \quad \text{من أجل } n=3k+1$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow (6k+3) &\equiv 3 \quad [7] \Rightarrow \\
 \Rightarrow 2k+1 &\equiv 1 \quad [7] \Leftrightarrow 2k \equiv 0 \quad [7] \\
 \Rightarrow k &\equiv 0 \quad [7] \Rightarrow k=7d, d \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

$$n = 3(7d)+1 = 21d+1; d \in \mathbb{N}$$

$$(2n+1)2^{n+2} \equiv 3 \quad [7] \quad \text{من أجل } n=3k+2$$

$$\Rightarrow (6k+5) \cdot 2^{3(k+1)+1} \equiv 3 \quad [7]$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow (6k+5) \cdot 2 &\equiv 3 \quad [7] \dots + (7) \\
 (6k+5) \cdot 2 &\equiv 10 \quad [7] \Rightarrow
 \end{aligned}$$

النتيجة 2

التمرين الثالث

U_n متتالية حسابية $r=4$, $U_0=5$, ومنت عبارة $U_n = 4nr + U_0 = 4n+5$

حساب $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n = \frac{(n+1)}{2} [U_n + U_0]$$

$$= \frac{(n+1)}{2} (5 + 4n+5) = \frac{(n+1)(4n+10)}{2}$$

$$S_n = (n+1)(2n+5)$$

إذا كان مجموع 7 حدود متتالية من U_n هو 1995

آجيين الحد: $U_p + U_{p+1} + U_{p+2} + U_{p+3} + U_{p+4} + U_{p+5} + U_{p+6}$

$$= 1995 \quad \text{أو الحد}$$

$$= \frac{(p+7-p)}{2} (U_p + U_{p+6})$$

$$= \frac{7}{2} (4p+5 + 4(p+6)+5)$$

$$= \frac{7}{2} [8p+34] = 7(4p+17) = 1995$$

$$\Rightarrow 7(4p+17) = 1995 \Rightarrow p = 67$$

ومنت الحد الأول هو 67 بحيث يكون 7 حدود

متتالية ابتداء منهم مجموعها هو 1995

$$V_n = (2n+1) \cdot 2^{4n+5} \quad \text{ب لكن } V_n$$

1) بواني قسمة 2^n على 7:

$$2^0 \equiv 1 \quad [7], \quad 2^1 \equiv 2 \quad [7], \quad 2^2 \equiv 4 \quad [7], \quad 2^3 \equiv 1 \quad [7] \Rightarrow 2^{3k+d} \equiv 2^d \quad [7]$$

$$\Rightarrow 2^{3k+d} \equiv 2^d \quad [7] \quad d \in \{0, 1, 2\}$$

ومنت البواني دورية ودورها 3

ب) باني 1438^{2017} على 7:

$$1438 \equiv 3 \quad [7] \Rightarrow 1438 \equiv -4 \quad [7]$$

$$\Rightarrow 1438^{2017} \equiv (-4)^{2017} \quad [7]$$

$$P_n = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1) \times 2^{u_0} \times 2^{u_1} \times \dots \times 2^{u_n}$$

$$= 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1) \cdot 2^{u_0 + u_1 + \dots + u_n}$$

$$= \frac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!} \times 2^{S_n} = \frac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!} \cdot 2^{(n+1)(2n+5)}$$

$$= \frac{(2n+1)!}{n!} \cdot 2^{(2n^2+6n+5)}$$

التمين المربع

$$U(x) = x e^x + x + 1 \Rightarrow U'(x) = (x+1)e^x + 1 \quad [I] \quad 1$$

$$\Rightarrow U'(x) - U(x) = e^x - x \quad (E) \quad \text{ومن لا تتحقق}$$

$$2 \quad U + V \text{ حيث } U \in \mathcal{L} \text{ و } V \in \mathcal{L}$$

$$(U+V)' - (U+V) = e^x - x$$

$$\Rightarrow U' + V' - U - V = e^x - x \Rightarrow \underbrace{U' - U}_{= e^x - x} + V' - V = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{V' - V = 0} \quad \text{ومن لا تتحقق (E)'} \quad \text{حيث } V \in \mathcal{L}$$

$$V' = V \Rightarrow V = C e^x \quad \text{حل (E)'} \quad 3$$

$$\Rightarrow V(x) = C e^x, C \in \mathbb{R}.$$

$$U(x) + V(x) = x e^x + x + C e^x + 1 \quad \text{حيث } U + V \text{ لا تتحقق (E)}$$

$$= (x+C)e^x + x + 1, C \in \mathbb{R}.$$

$$\text{حيث } U + V \text{ لا تتحقق (E)}$$

$$k(0) = 0 \quad \text{حيث } k(0) = 0$$

$$\begin{cases} k(x) = (x+C)e^x + x + 1 \\ k(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{C = -1}$$

$$\text{ومن لا تتحقق (E)'} \quad \text{حيث } k(x)$$

$$\boxed{k(x) = (x-1)e^x + x + 1} = g(x)$$

التمين 03

$$\Rightarrow (6k+5) \equiv 3 [7] \Rightarrow (6k+5) \cdot 2 \equiv 10 [7]$$

$$\Rightarrow (6k+5) \equiv 5 [7] \Rightarrow 6k \equiv 0 [7]$$

$$\Rightarrow k \equiv 0 [7] \Rightarrow k = 7d, d \in \mathbb{N}$$

$$\boxed{n = 3(7d) + 2 = 21d + 2, d \in \mathbb{N}} \quad \text{حيث}$$

3 الهمهان بالتمين اجمع

$$1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!}$$

$$\begin{cases} n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n \\ 0! = 1 \end{cases} \quad \text{من أجل } n=0$$

$$1 = \frac{(2(0)+1)!}{2^0 \cdot 0!} = 1 \quad \text{محققة}$$

$$1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!}$$

و لنبرهن ان:

$$1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1) \times (2n+3) = \frac{(2n+3)!}{2^{n+1} \cdot (n+1)!}$$

لينا

$$1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!}$$

$$\Rightarrow 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1) \cdot (2n+3) = \frac{(2n+1)! \cdot (2n+3)}{2^n \cdot n!}$$

$$= \frac{(2n+1)! \cdot (2n+2) \cdot (2n+3)}{2^n \cdot n! \cdot (2n+2)}$$

$$= \frac{(2n+3)!}{2^n \cdot n! \cdot 2(n+1)} = \frac{(2n+3)!}{2^{n+1} \cdot (n+1)!}$$

$$= \frac{(2n+3)!}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} \quad \text{ومن هنا اجل كل n صحيح}$$

التمين اجمع

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$$

$$= (1 \times 2^{u_0}) \times (2+1) 2^{u_1} \times \dots \times (2n+1) 2^{u_n}$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	0	$+\infty$

(I) g معرفة على $[0, +\infty[$: $g(x) = (x-1)e^x + x + 1$

1. حساب $g'(x)$: $g'(x) = xe^x + 1$

$g'(x) > 0 \Rightarrow g$ متزايدة تماماً على $[0, +\infty[$

$$g(0)=0 \text{ ولدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \quad .2$$

ومنه، من أجل كل x من $[0, +\infty[$ لدينا: $g(x) \geq 0$

$$f(x) = \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2} : \neg]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\text{ على } f \text{ معرفة (II)}$$

1. تبين أن f دالة فردية:

من أجل كل $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ فَإِنَّ $-x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ ، يكفي إثبات أنه من أجل x من $]0, +\infty[$ من $]0, +\infty[\cup]-\infty, 0[$: $f(-x) = -f(x)$

$$f(-x) = \frac{-xe^{-x}}{(e^{-x}-1)^2} = \frac{-x}{e^x\left(\frac{1}{e^x}-1\right)^2} = \frac{-x}{\frac{e^x(1-e^x)^2}{e^{2x}}} = \frac{-x}{e^{-x}(e^x-1)^2} = \frac{-xe^x}{(e^x-1)^2} = -f(x) \quad \text{نذكر أن } \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}, e^{-x} = \frac{1}{e^x} \text{ و } (e^x-1)^2 = (1-e^x)^2$$

ومنه من أجل x من $]0, +\infty[\cup]-\infty, 0[$ الدالة f دالة فردية.

2. أ. حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$: حالة عدم تعيين $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{0}$ إزالتها:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{\frac{x^2(e^x - 1)^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

نذكر أن $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = 1$

التفسير البياني: ومنه المستقيم $x = 0$ مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

ب. البرهان أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$: حالة عدم تعيين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{+\infty}{+\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x(e^x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\frac{e^x}{(e^x)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\frac{e^x}{e^{2x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x \left(\frac{e^x - 1}{e^x} \right)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x (1 - e^{-x})^2} \quad \text{إذ النها}$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \frac{1}{(1 - e^{-x})^2} = 0$$

نذكر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ ومنه

نستنتج أن المنحنى (C_f) يقبل المستقيم $y=0$ كمستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$

3. أ. تبين أن: $f'(x) = \frac{-e^x g(x)}{(e^x - 1)^3}$ من أجل كل x من $]0, +\infty[$:
 نذكر أن $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(e^x - 1)^2 - 2xe^{2x}(e^x - 1)}{(e^x - 1)^4} = \frac{(e^x - 1)[(e^x - 1)(e^x + xe^x) - 2xe^{2x}]}{(e^x - 1)^4} = \frac{e^{2x} + xe^{2x} - e^x - xe^x - 2xe^{2x}}{(e^x - 1)^3}$$
$$= e^x \frac{e^x - xe^x - x - 1}{(e^x - 1)^3} = \frac{-e^x((x-1)e^x + x + 1)}{(e^x - 1)^3} = \frac{-e^x g(x)}{(e^x - 1)^3}$$

ومنه من أجل كل x من $]0, +\infty[$ فإن

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	-
$f(x)$	0 $\rightarrow +\infty$

لدينا من أجل كل x من $0, +\infty[$ فإن $e^x - 1 > 0$ و $e^x > 0$ (حسب خواص الدالة الأسية e^x)

وأيضاً من جدول تغيرات الدالة g فإن: $g(x) > 0$ من أجل كل x من $]0, +\infty[$

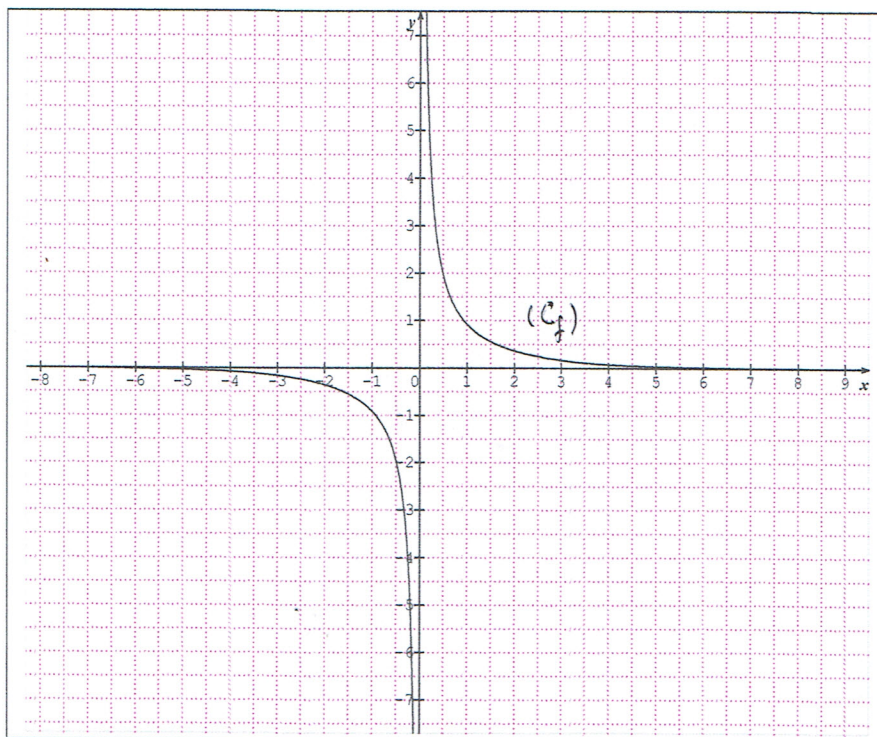
ومنہ نستنتج أنه من أجل كل x من $]0, +\infty[$ فإن $f'(x) < 0$

ب. جدول تغيرات الدالة f على $]0, +\infty[$:

4. إنشاء المنحنى (C_f) على $]0, +\infty[\cup]-\infty, 0]$:

من جدول تغيرات الدالة f على $[0, +\infty[$ نرسم جزء المنحنى (C_f) على $[0, +\infty[$

أما جزء المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty, 0[$ فهو نظير جزء المنحنى (C_f) على المجال $]0, +\infty[$ لأن الدالة f دالة فردية.



نبيذ أن h دالة f على $[m_1, +\infty[$

و $h'(u) = f(u)$: وسمي

و h دالة f على $[m_1, +\infty[$

$$A = \int_{m(2)}^{m(2017)} f(u) du = \left[h(u) \right]_{m(2)}^{m(2017)}$$

$$= h(m(2017)) - h(m(2))$$

$$h(m(2017)) = \ln \left[\frac{e^{m(2017)}}{e^{m(2017)} - 1} \right] - \frac{m(2017)}{e^{m(2017)} - 1}$$

$$= \ln \left(\frac{2017}{2017 - 1} \right) - \frac{m(2017)}{2017 - 1}$$

$$= \ln \left(\frac{2017}{2016} \right) - \frac{m(2017)}{2016}$$

$$h(m(2)) = \ln \left(\frac{e^{m(2)}}{e^{m(2)} - 1} \right) - \frac{m(2)}{e^{m(2)} - 1}$$

$$h(m(2)) = \ln \left(\frac{2}{1} \right) - m(2) = 0$$

$$\Rightarrow A = h(m(2017)) - h(m(2))$$

$$A = \ln \left(\frac{2017}{2016} \right) - \frac{m(2017)}{2016}$$

النتيجة

يتمثل A مساهمة الجذر المستوي (C_f)

ومحور الفواصل والمستقيمتان $x = m(2)$ و $x = m(2017)$

الموضوع الثاني

$$\Rightarrow 2016(m - m_0) - 37(n - n_0) = 0$$

$$\Rightarrow 2016(m - m_0) = 37(n - n_0) \quad (\text{PGCD}(2016, 37) = 1)$$

$$\Rightarrow 2016 \mid n - n_0 \Rightarrow n - n_0 = 2016k, k \in \mathbb{Z}$$

$$n = 2016k + n_0 = 2016k + 3488, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} a = 2016(37k - 64) \\ b = 2016(26k - 45) \end{cases}$$

$$\text{تتوافق قيم } n \text{ في } a \text{ و } b \text{ نجد}$$

$$\text{ب. اليمين } a \text{ و } b \text{ يكون } k \text{ حُرًا: } \text{PGCD}(a, b) = 2016$$

$$\text{من أجل } \text{PGCD}(a, b) = 1 \text{ نضع } a = da', b = db'$$

$$\begin{cases} a = da' \\ b = db' \end{cases} \quad \text{و } \text{PGCD}(a', b') = 1$$

$$\text{ومن هنا يمكن كتابة } a' \text{ و } b' \text{ على شكل } a' = 37k - 64 \text{ و } b' = 26k - 45$$

فيما يلي:

$$\begin{cases} a' = 37k - 64 \\ b' = 26k - 45 \end{cases}$$

$$+ 26a' - 37b' = 1$$

$$\text{نتج لدينا } a' \text{ و } b' \text{ أو } a \text{ و } b \text{ فيما يلي.}$$

$$\text{ومن هنا } \text{PGCD}(a, b) = 2016$$

$$\text{ج. أوجد عددين أوليين } a \text{ و } b \text{ هما:}$$

$$\begin{cases} a = 2016(37(2) - 64) \\ b = 2016(26(2) - 45) \end{cases} \quad : k = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2016(74 - 64) = 20160 \\ b = 2016(52 - 45) = 14112 \end{cases}$$

النتيجة 01

التمرين الأول :

$$b = 26n - 32, a = 37n + 32, n \geq 2$$

$$1. \text{ أ. اليمين } a \text{ و } b \text{ : } d \mid 2016$$

$$\begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases} \Rightarrow d \mid a + b \Rightarrow d \mid 63n \Rightarrow d \mid 63 \Rightarrow d \mid 63 \times 32$$

$$2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$$

$$D_{2016} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, 65536, 131072, 262144, 524288, 1048576, 2097152, 4194304, 8388608, 16777216, 33554432, 67108864, 134217728, 268435456, 536870912, 1073741824, 2147483648, 4294967296, 8589934592, 17179869184, 34359738368, 68719476736, 137438953472, 274877906944, 549755813888, 1099511627776, 2199023255552, 4398046511104, 8796093022208, 17592186044416, 35184372088832, 70368744177664, 140737488355328, 281474976710656, 562949953421312, 1125899906842624, 2251799813685248, 4503599627370496, 9007199254740992, 18014398509481984, 36028797018963968, 72057594037927936, 144115188075855872, 288230376151711744, 576460752303423488, 1152921504606846976, 2305843009213693952, 4611686018427387904, 9223372036854775808, 18446744073709551616, 36893488147419103232, 73786976294838206464, 147573952589676412928, 295147905179352825856, 590295810358705651712, 1180591620717411303424, 2361183241434822606848, 4722366482869645213696, 9444732965739290427392, 18889465931478580854784, 37778931862957161709568, 75557863725914323419136, 151115727451828646838272, 302231454903657293676544, 604462909807314587353088, 1208925819614629174706176, 2417851639229258349412352, 4835703278458516698824704, 9671406556917033397649408, 19342813113834066795298816, 38685626227668133590597632, 77371252455336267181195264, 154742504910672534362390528, 309485009821345068724781056, 618970019642690137449562112, 1237940039285380274899124224, 2475880078570760549798248448, 4951760157141521099596496896, 9903520314283042199192993792, 19807040628566084398385987584, 39614081257132168796771975168, 79228162514264337593543950336, 158456325028528675187087900672, 316912650057057350374175801344, 633825300114114700748351602688, 1267650600228229401496703205376, 2535301200456458802993406410752, 5070602400912917605986812821504, 10141204801825835211973625643008, 20282409603651670423947251286016, 40564819207303340847894502572032, 81129638414606681695789005144064, 162259276829213363391578010288128, 324518553658426726783156020576256, 649037107316853453566312041152512, 1298074214633706907132624082305024, 2596148429267413814265248164610048, 5192296858534827628530496329220096, 10384593717069655257060992658440192, 20769187434139310514121985316880384, 41538374868278621028243970633760768, 83076749736557242056487941267521536, 166153499473114484112975882535043072, 332306998946228968225951765070086144, 664613997892457936451903530140172288, 1329227995784915872903807060280344576, 2658455991569831745807614120560689152, 5316911983139663491615228241121378304, 10633823966279326983230456482242756608, 21267647932558653966460912964485513216, 42535295865117307932921825928971026432, 85070591730234615865843651857942052864, 170141183460469231731687303715884105728, 340282366920938463463374607431768211456, 680564733841876926926749214863536422912, 1361129467683753853853498429727072845824, 2722258935367507707706996859454145691648, 5444517870735015415413993718908291383296, 10889035741470030830827987437816582766592, 21778071482940061661655974875633165533184, 43556142965880123323311949751266331066368, 87112285931760246646623899502532662132736, 174224571863520493293247799005065324265472, 348449143727040986586495598010130648530944, 696898287454081973172991196020261297061888, 1393796574908163946345982392040522594123776, 2787593149816327892691964784081045188247552, 5575186299632655785383929568162090376495104, 11150372599265311570767859136324180752990208, 22300745198530623141535718272648361505980416, 44601490397061246283071436545296723011960832, 89202980794122492566142873090593446023921664, 178405961588244985132285746181186892047843328, 356811923176489970264571492362373784095686656, 713623846352979940529142984724747568191373312, 1427247692705959881058285969449495136382746624, 2854495385411919762116571938898990272765493248, 5708990770823839524233143877797980545530986496, 11417981541647679048466287755595961091061972992, 22835963083295358096932575511191922182123945984, 45671926166590716193865151022383844364247891968, 91343852333181432387730302044767688728495783936, 182687704666362864775460604089535377456991567872, 365375409332725729550921208179070754913983135744, 730750818665451459101842416358141509827966271488, 1461501637330902918203684832716283019655932542976, 2923003274661805836407369665432566039311865085952, 5846006549323611672814739330865132078623730171904, 11692013098647223345629478661730264157247460343808, 23384026197294446691258957323460528314494920687616, 46768052394588893382517914646921056628989841375232, 93536104789177786765035829293842113257979682750464, 187072209578355573530071658587684226515959365500928, 374144419156711147060143317175368453031918731001856, 748288838313422294120286634350736906063837462003712, 1496577676626844588240573268701473812127674924007424, 2993155353253689176481146537402947624255349848014848, 5986310706507378352962293074805895248510699696029696, 11972621413014756705924586149611790497021399392059392, 23945242826029513411849172299223580994042798784118784, 47890485652059026823698344598447161988085597568237568, 95780971304118053647396689196894323976171195136475136, 191561942608236107294793378393788647952342390272950272, 383123885216472214589586756787577295904684780545900544, 766247770432944429179173513575154591809369561091801088, 1532495540865888858358347027150309183618739122183602176, 3064991081731777716716694054300618367237478244367204352, 6129982163463555433433388108601236734474956488734408704, 12259964326927110866866776217202473468949912977468817408, 24519928653854221733733552434404946937899825954937634816, 49039857307708443467467104868809893875799651909875269632, 98079714615416886934934209737619787751599303819750539264, 196159429230833773869868419475239575503198607639501078528, 392318858461667547739736838950479151006397215279002157056, 784637716923335095479473677900958302012794430558004314112, 1569275433846670190958947355801916604025588861116008628224, 3138550867693340381917894711603833208051177722232017256448, 6277101735386680763835789423207666416102355444464034512896, 12554203470773361527671578846415332832204710888928069025792, 25108406941546723055343157692830665664409421777856138051584, 50216813883093446110686315385661331328818843555712276103168, 100433627766186892221372630771322662657637687111424552206336, 200867255532373784442745261542645325315275374222849104412672, 401734511064747568885490523085290650630550748445698208825344, 803469022129495137770981046170581301261101496891396417650688, 1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301376, 3213876088517980551083924184682325205044405987565585670602752, 6427752177035961102167848369364650410088811975131171341205504, 12855504354071922204335696738729300820177623950262342682411008, 25711008708143844408671393477458601640355247900524685364822016, 51422017416287688817342786954917203280710495801049370729644032, 102844034832575377634685573909834406561420991602098741459288064, 205688069665150755269371147819668813122841983204197482918576128, 411376139330301510538742295639337626245683966408394965837152256, 822752278660603021077484591278675252491367932816789931674304512, 1645504557321206042154969182557350504982735865633579863348609024, 3291009114642412084309938365114701009965471731267159726697218048, 6582018229284824168619876730229402019930943462534319453394436096, 13164036458569648337239753460458804039861886925068638906788872192, 26328072917139296674479506920917608079723773850137277813577744384, 52656145834278593348959013841835216159447547700274555627155488768, 105312291668557186697918027683670432318895095400549111254310977536, 210624583337114373395836055367340864637790190801098222508621955072, 421249166674228746791672110734681729275580381602196445017243910144, 842498333348457493583344221469363458551160763204392890034487820288, 1684996666696914987166688442938726917102321526408785780068975640576, 3369993333393829974333376885877453834204643052817571560137951281152, 6739986666787659948666753771754907668409286105635143120275902562304, 13479973333575319897333507543509815336818572211270286240551805124608, 26959946667150639794667015087019630673637144422540572481103610249216, 53919893334301279589334030174039261347274288845081144962207220498432, 107839786668602559178668060348078522694548577690162289924414440996864, 215679573337205118357336120696157045389097155380324579848828881993728, 431359146674410236714672241392314090778194310760649159697657763987456, 862718293348820473429344482784628181556388621521298319395315527974912, 1725436586697640946858688965569256363112777243042596638790631055949824, 3450873173395281893717377931138512726225554486085193277581262111899648, 6901746346790563787434755862277025452451108972170386555162524223799296, 13803492693581127574869511724554050904902217944340773110325048447598592, 27606985387162255149739023449108101809804435888681546220650096895197184, 55213970774324510299478046898216203619608871777363092441300193790394368, 110427941548649020598956093796432407239217743554726184882600387580788736, 220855883097298041197912187592864814478435487109452369765200775161577472, 441711766194596082395824375185729628956870974218904739530401550323154944, 883423532389192164791648750371459257913741948437809479060803100646309888, 1766847064778384329583297500742918515827483896875618958121606201292619776, 3533694129556768659166595001485837031654967793751237916243212402585239552, 7067388259113537318333190002971674063309935587502475832486424805170479104, 14134776518227074636666380005943348126619871175004951664972849610340958208, 28269553036454149273332760011886696253239742350009903329945699220681916416, 56539106072908298546665520023773392506479484700019806659891398441363832832, 113078212145816597093331040047546785012958969400039613319782796882727665664, 226156424291633194186662080095093570025917938800079226639565593765455331328, 452312848583266388373324160190187140051835877600158453279131187530910662656, 904625697166532776746648320380374280103671755200316906558262375061821325312, 1809251394333065553493296640760748560207343510400633813116524750123642650624, 3618502788666131106986593281521497120414687020801267626233049500247285301248, 7237005577332262213973186563042994240829374041602535252466099000494570602496, 14474011154664524427946373126085988481658748083205070504932198000989141204992, 28948022309329048855892746252171976963317496166410141009864396001978282409984, 57896044618658097711785492504343953926634992332820282019728792003956564819968, 11579208923731619542357098500868790785326998466564056403945758400$$

ج. استنتاج صيغة المثلث:

$$v(F) = K \Rightarrow \begin{cases} AF = AK \\ (\vec{AF}, \vec{AK}) = \frac{\pi}{3} + 2p\pi, p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

وهذا AFK مثلث متساوي الأضلاع.

١. 5. تبين أن $AF^2 = 4 - 2\sqrt{3} \cos(\theta + \pi/6)$

$$AF^2 = \left| e^{i\theta} + e^{i\pi/3} - 2 \right|^2 = \left(e^{i\theta} + e^{i\pi/3} - 2 \right) \overline{\left(e^{i\theta} + e^{i\pi/3} - 2 \right)}$$

$$= 4 - 2\sqrt{3} \left| \cos\theta + i\sin\theta + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 2 \right|^2$$

$$= \left| \left(\cos\theta - \frac{3}{2} \right) + i \left(\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right|^2$$

$$= \left(\cos\theta - \frac{3}{2} \right)^2 + \left(\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2$$

$$= \cos^2\theta + \frac{9}{4} - 3\cos\theta + \sin^2\theta + \frac{3}{4} + \sqrt{3}\sin\theta$$

$$= 4 - 3\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$$

لذا نذكر أن (درس 2 ثانوي في الزوايا المثلثية والبرهان)

$$\begin{cases} a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \alpha) \end{cases} \quad (*)$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos(\alpha) = \frac{a}{r} \\ \sin(\alpha) = \frac{b}{r} \end{cases}$$

$$= 4 - (3\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = -\pi/6}$$

وهو المطلوب

$$\Rightarrow AF^2 = 4 - 2\sqrt{3} \cos(\theta + \pi/6)$$

ب. يكون AF^2 أقل قيمة إذا وفقط إذا كان:

$$\begin{cases} \cos(\theta + \pi/6) = -1 \\ \theta \in]-\pi, \pi] \end{cases} \Rightarrow \boxed{\theta = 5\pi/6}$$

$$\Rightarrow z_H = z = 2e^{i\theta} = 2e^{i5\pi/6}$$

ولا نكتب فقط: * استعملنا هذه الطريقة لعدم هافط
ممكن أيضا استعمال دسائير التحويل!

السرين الثاني:

$$z^2 - 2z + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (2\sqrt{3}i)^2$$

$$\Rightarrow z_1 = 1 - i\sqrt{3}; z_2 = \overline{z_1}$$

ب. كتابة الأضلاع:

$$z_1 = 2e^{-i\pi/3}; z_2 = 2e^{i\pi/3}$$

3. نعلم أن $NE(\Gamma) = 2\pi$

من جهة أخرى:

$$\arg(z_n) = (\vec{r}, \vec{ON}) + 2k\pi$$

$$= (\vec{OM}, \vec{ON}) + (\vec{r}, \vec{OM}) + 2k\pi$$

$$= \pi/3 + \theta + 2k\pi = (\theta + \pi/3) + 2k\pi$$

$$z_n = |z_n| e^{i\arg(z_n)} = 2e^{i(\theta + \pi/3)}$$

4. أ. العلاقة المركبة (r):

$$z' - z_A = e^{i\pi/3} (z - z_A)$$

$$\Rightarrow z' = e^{i\pi/3} (z - z_A) + z_A = e^{i\pi/3} (z - 2) + 2$$

$$\boxed{z' = e^{i\pi/3} z - 2e^{i\pi/3} + 2}$$

ب. K_F متساوية $[BM]$ و $[CN]$:

$$z_F = \frac{z_B + z_M}{2} = e^{i\theta} + e^{i\pi/3}$$

$$z_K = \frac{z_C + z_N}{2} = \frac{e^{i(\theta + \pi/3)} - e^{-i\pi/3}}{2}$$

نحو أن z_F و z_K في عبارة (ن.ج):

$$z' = e^{i\pi/3} \left(e^{i\theta} + e^{i\pi/3} \right) - 2e^{i\pi/3} + 2 = \frac{e^{i(\theta + \pi/3)} + e^{i2\pi/3} - 2e^{i\pi/3} + 2}{2}$$

$$= \frac{e^{i(\theta + \pi/3)} - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) + 2}{2}$$

$$= \frac{e^{i(\theta + \pi/3)} + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{e^{i(\theta + \pi/3)} - e^{-i\pi/3}}{2} = \boxed{z_K}$$

$$\Rightarrow v(F) = K$$

السرين الثالث: بالاوريا تونسي 2045

$$AM = [A^2 + M^2]^{1/2} = \sqrt{36 + 16} = 2\sqrt{13}$$

5. من أجل كل نقطة $M \in (C)$ لدينا $2\sqrt{13} = AM$

ومنه $M \in (S')$ ، ومنه $(C) \subset (S')$ ولدينا $A \notin (S')$
ومنه $(C) \subset (P)$ ، ومنه نستنتج أن تقاطع (S) و (P)
هو الدائرة (C) نفسها.

السرين الرابع:

$$f(x) = 2 \ln(x) - x + \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty + \infty : \text{عز}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \ln(x) - x + \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [2x \ln(x) - x^2 + 1] = \frac{1}{0^+} [0 - 0 + 1]$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - \infty : \text{عز}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln(x) - x + \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{2 \ln(x)}{x} - 1 + \frac{1}{x^2} \right]$$

$$= +\infty [-1] = -\infty$$

$$f'(x) = \left(2 \ln(x) - x + \frac{1}{x} \right)'$$

$$= \frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{2x - x^2 - 1}{x^2} = -\frac{(1+x^2-2x)}{x^2}$$

$$= -\left(\frac{x-1}{x} \right)^2 \leq 0$$

x	0	1	+
f'(x)	-	0	-
f(x)	+	0	+

السرين الثاني: بالاوريا تونسي 2045

1. تبين أن I سطح الكرة ذو المركز $I(4,4,0)$ و $r=5$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2 = 5^2$$

2. ليكن $J(4,4,4)$

أ. تبين أن (P) هو مستوي

$$\vec{JI} \left(\frac{2}{2} \right), \vec{JM} \left(\frac{x+1}{y-1} \right);$$

$$ME(P) \Leftrightarrow \vec{JI} \cdot \vec{IM} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2y - z + 5 = 0$$

ومنه (P) هو المستوى ذو المعادلة (P) .

ب. تقاطع (S) و (P) :

$$d(I, (P)) = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 5|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{12}{3} = 4 \Rightarrow (S) \cap (P) = (C)$$

وهذا يتفق مع أن I مركز دائرة (C) نصف قطرها

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$$

ومركزها المسقط العمودي ل I على المستوى (P)

من جهة أخرى: $J \in (P)$ و $\vec{JI} \perp (P)$.

ومنه نستنتج أن J المسقط العمودي ل I

ومنه J مركز (C) .

3. أ. $A(-5, 5, 3)$: تبين أن $A \in (IJ)$

$$\vec{AI} (6, -6, -3) \text{ و } \vec{JI} (2, -2, -1)$$

$$\Rightarrow \vec{AI} = 3\vec{JI} \Rightarrow \vec{AI} \parallel \vec{JI} \Rightarrow A \in (IJ)$$

$$AJ = \sqrt{16+16+4} = 6$$

ب. $\{ A \in (IJ) \mid AJ = 6 \}$
ومنه المطلوب AJM قائم في J .
 $\{ (IJ) \perp (P) \mid ME(C) \subset (P) \}$

المسألة الأولى:

نريد إيجاد قيمة $\int_1^e (2 \ln x - x + \frac{1}{x}) dx$

$$\Rightarrow F(x) = 2(x \ln x - x) - \frac{x^2}{2} + \ln x$$

نلاحظ أن $f(x)$ مستمرة على $[1, e]$ لأن $x > 0$

$$S = |F(e) - F(1)| = \int_1^e f(x) dx$$

$$= |2(e \ln e - e) - \frac{e^2}{2} + \ln e - F(1)|$$

$$= 2 - \frac{e^2}{2} + 1 - \frac{5}{2}$$

$$S = 2 - \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}$$

المسألة الثانية:

$$f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 2 \ln \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right) - \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}$$

$$= 2 \ln \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right] - \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{1}{n+1}}$$

$$= \frac{2}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \sqrt{\frac{n+1}{n}} + \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

$$= \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$$

$$= \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{\sqrt{n+1} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \sqrt{n+1}}{\sqrt{n} \sqrt{n+1}} + \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{n} \sqrt{n+1}}$$

$$= \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{-(n+1) + n}{\sqrt{n} \sqrt{n+1}} =$$

$$= \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{n+1}}$$

وهو المطلوب

المسألة الثالثة:

$$f(1) = 2 \ln 1 - 1 + \frac{1}{1} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} n & 0 & 1 & +\infty \\ \hline f(n) & 0 & 1 & +\infty \end{array}$$

نلاحظ أن $f(x)$ مستمرة على $[1, e]$

لأن $f(x)$ مستمرة على $[1, e]$ لأن $x > 0$

المسألة الرابعة:

نريد إيجاد قيمة $\int_1^e (2 \ln x - x + \frac{1}{x}) dx$

$$f(x) + 1 = h(x)$$

ونلاحظ أن $h(x)$ مستمرة على $[1, e]$

$$d \in [0, 1] \Leftrightarrow m \in]-1, 1[$$

$$d = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

$$d \in]1, +\infty[\Leftrightarrow m \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

$$\begin{aligned}
 0 < \left\{ \begin{aligned} n^2 \left(1 + \frac{1}{1}\right) &\leq \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1+1} \\ n^2 \left(1 + \frac{1}{2}\right) &\leq \frac{1}{2(2+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2+1} \\ n^2 \left(1 + \frac{1}{3}\right) &\leq \frac{1}{3(3+1)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3+1} \\ \vdots \\ n^2 \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) &\leq \frac{1}{(n-1)(n)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)+1} \\ n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) &\leq \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

بالمجموع طرفي كل في

$$n^2 \left(1 + \frac{1}{1}\right) + \dots + n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$U_n \leq 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{حيث } n \in \mathbb{N}^*$$

$$U_n \leq 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{لـ } n \geq 1$$

$\Rightarrow U_n \leq 1$: U_n متوحد من الأعلى (محدود من الأعلى)
وأيضا متزايدة ومنه U_n متقاربة لـ l

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \gg U_3 = 0,727 \dots$$

$$0,7 < l < 1 \quad \text{ومنه}$$

انتهى وبالكيفية في المثالين

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n}} > 1 \quad \text{حيث } n \in \mathbb{N}^*$$

$$f\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right) < 0 \quad \text{حيث}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1 + f\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right)\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$U_n = n^2 \left(1 + \frac{1}{1}\right) + n^2 \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots + n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \text{لـ } n \in \mathbb{N}^*$$

أو قيمة متزايدة U_3 : (تأكد من أن U_3 متزايدة)

$$\begin{aligned}
 U_3 &= n^2 \left(1 + \frac{1}{1}\right) + n^2 \left(1 + \frac{1}{2}\right) + n^2 \left(1 + \frac{1}{3}\right) \\
 &= n^2(2) + n^2(3/2) + n^2(4/3)
 \end{aligned}$$

$$U_3 \approx 0,727$$

$$2. \text{ أ. تبين أن } U_n \text{ متزايدة}$$

$$U_{n+1} - U_n = n^2 \left(1 + \frac{1}{1}\right) + \dots + n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) + n^2 \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - \left(n^2 \left(1 + \frac{1}{1}\right) + \dots + n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= n^2 \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > 0 \quad \left(1 + \frac{1}{n+1} > 1\right)$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - U_n > 0 \Rightarrow U_n \text{ متزايدة}$$

ب. تبين أنه لكل $k \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad \text{مفككة}$$

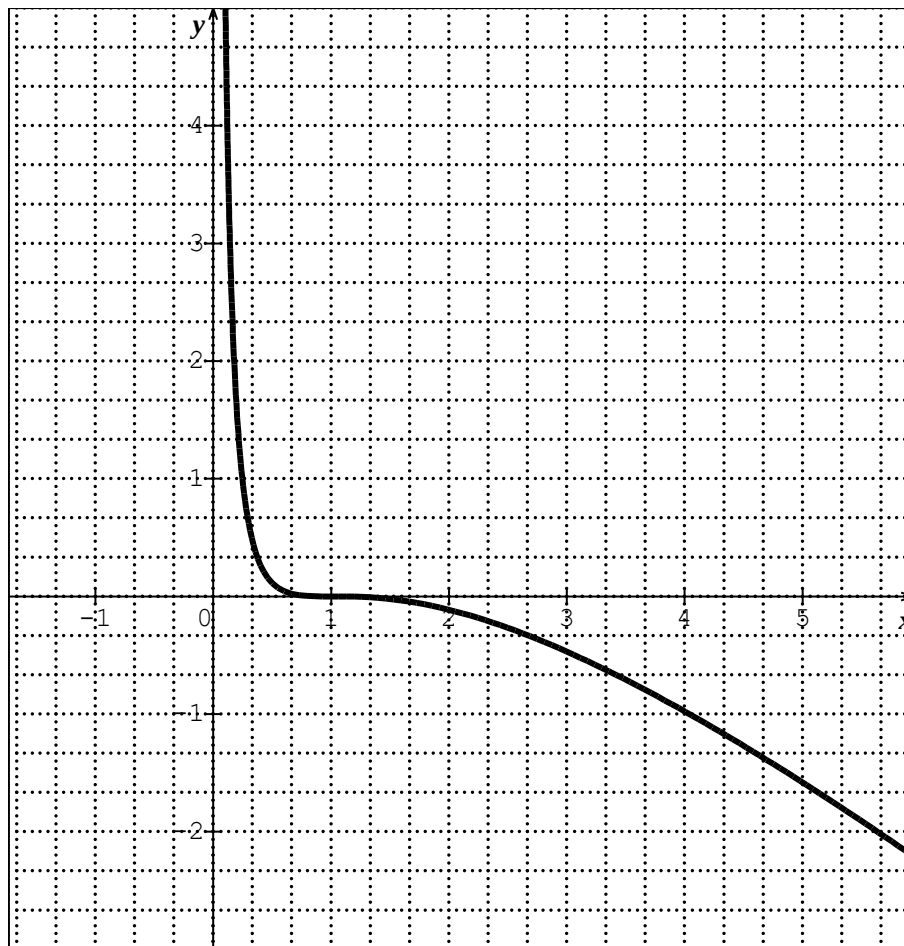
$$U_n \leq 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{تبين أن}$$

$$0 < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \quad \text{لـ } n \geq 1$$

$$\Rightarrow n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \left(\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^2 = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{حيث } n > 0$$

منحنى الدالة f (C_f)



المنحنى (C') الممثل للدالة $|f| + 1$.

