

التمرين الأول * (06 نقاط) *

1. علما أن قياس الزاوية الموجهة $(\vec{u}, \vec{v})$ هو $\frac{\pi}{6}$ ، عيّن قياس الزاوية الموجهة : $(-2\vec{u}, -3\vec{v})$.
2. ليكن $x = \frac{67\pi}{12}$ و $y = -\frac{5\pi}{12}$ ، تحقق أن x و y قياسان لنفس الزاوية .
3. أوجد القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u}, \vec{v})$ التي قياسها $\alpha = \frac{2024\pi}{3}$.
4. عيّن القيمة المضبوطة لـ $\sin\left(\frac{59\pi}{6}\right)$.
5. أ) حل في المجال $I = [0, 2\pi]$ المعادلة ذات المجهول x : $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$.
ب) حل في المجال $I = [0, 2\pi]$ المتراجحة التالية : $2 \sin x - \sqrt{3} < 0$.

❖ خاص بشعبة علوم تجريبية ❖

التمرين الثاني * (06 نقاط) *

- المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. نعتبر النقط $A(-2; 2)$ ، $B(2; 2)$ و $C(-2; 4)$
1. أنشئ النقط A ، B و C ثم بيّن أن المثلث ABC قائم في A .
 2. لتكن (Γ) الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها AC .
أ) أكتب معادلة للدائرة (Γ)
ب) أرسم (Γ') صورة الدائرة (Γ) بالتحاكي h الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$.
ج) أكتب معادلة للدائرة (Γ') صورة الدائرة (Γ) بواسطة h .

❖ خاص بشعبة تقني رياضي ❖

التمرين الثالث * (06 نقاط) *

- (U_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ :
- $$\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = 3U_n + 1 \end{cases}$$
1. أحسب الحدود U_1 ، U_2 و U_3 .
 2. نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = U_n + \frac{1}{2}$
أ) أثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .
ب) عبّر عن V_n بدلالة n ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n .
ج) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$.

نعتبر المتتاليتين العدديتين (U_n) و (V_n) المعرفتين بحديهما الأولين $U_0 = 2$ و $V_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقين التراجعتين :
$$\begin{cases} U_{n+1} = (1 + \alpha)U_n - \alpha V_n \\ V_{n+1} = (1 - \alpha)U_n + \alpha V_n \end{cases}$$
 بحيث α وسيط حقيقي غير معدوم .

1. برهن باستعمال العلاقتين التراجعتين أنه إذا كانت المتتالية (U_n) متقاربة نحو l فإن المتتالية (V_n) متقاربة كذلك نحو النهاية نفسها l .

2. نفرض أن $\alpha = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n نضع : $U_n - V_n = 3$

أ) استنتج أن المتتالية (U_n) حسابية أساسها $r = \frac{3}{2}$.

ب) أحسب بدلالة n المجموع S_n بحيث : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

3. نفرض أن $\alpha \neq \frac{1}{2}$ ونعرف المتتالية (W_n) بـ : $W_n = U_n - V_n$

أ) بيّن باستعمال العلاقتين التراجعتين أن (W_n) متتالية هندسية أساسها 2α

ب) أكتب بدلالة n و α عبارة W_n ثم احسب بدلالة n و α المجموع : $T_n = W_0 + W_1 + \dots + W_n$

ج) بيّن باستعمال العلاقتين التراجعتين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} - U_n = \alpha W_n$

د) استنتج أن الحد العام للمتتالية (U_n) يعطى بـ : $U_n = \frac{3 \times 2^n \times \alpha^{n+1} + \alpha - 2}{2\alpha - 1}$

هـ) عيّن قيم α التي من أجلها تكون المتتالية (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها .

❖❖ بالتوفيق ❖❖

تجميع اختبار الفصل الثالث

التمرين 1: 5

5. أ) حل المعادلة في المجال: $I = [0, 2\pi]$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{معناه: } 2\sin x - \sqrt{3} = 0$$

$$\text{نعلم بأن: } \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ومنه:}$$

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{3} \quad \text{وعليه:}$$

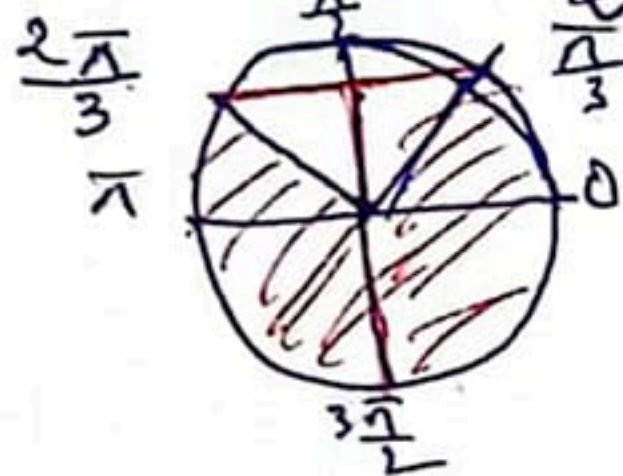
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{ومنه } \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

ب) حلول المتوالية في المجال $I = [0, 2\pi]$

$$\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{معناه:}$$

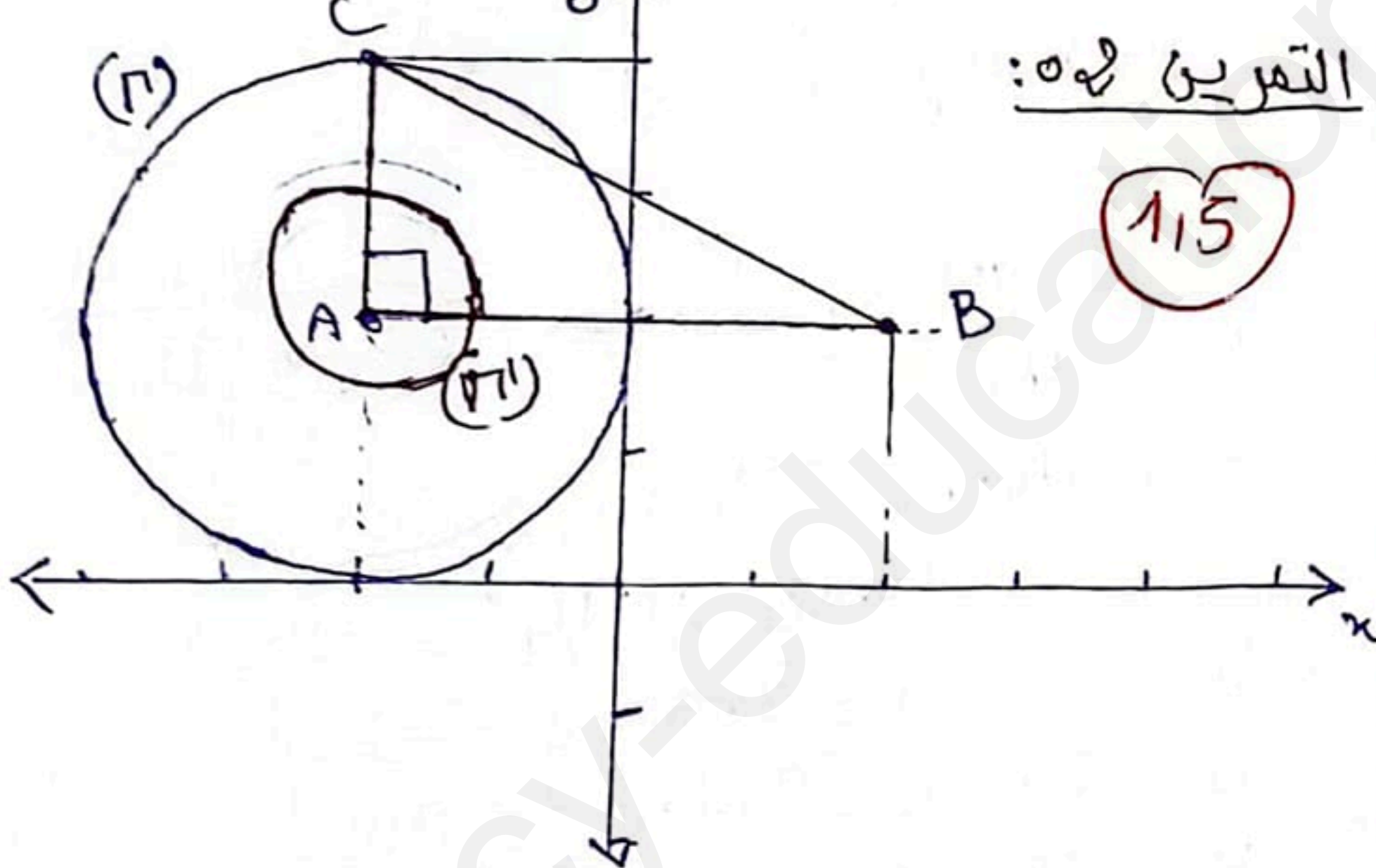
$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{نعلم بأن:}$$



$$\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{معناه:}$$

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, 2\pi\right]$$

التمرين 2: 5



1,5

لدينا:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{16 + 0} = \sqrt{16} = 4$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{0^2 + 4} = \sqrt{4} = 2$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$

$$AB^2 + AC^2 = 4^2 + 2^2 = 20 \quad \text{نجد:}$$

$$BC^2 = (\sqrt{20})^2 = 20$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad \text{أي أن حسب مبرهنة فيثاغورس:}$$

المثلث ABC قائم في A. (ف) كتابة معادلة الدائرة (Gamma) التي مركزها A

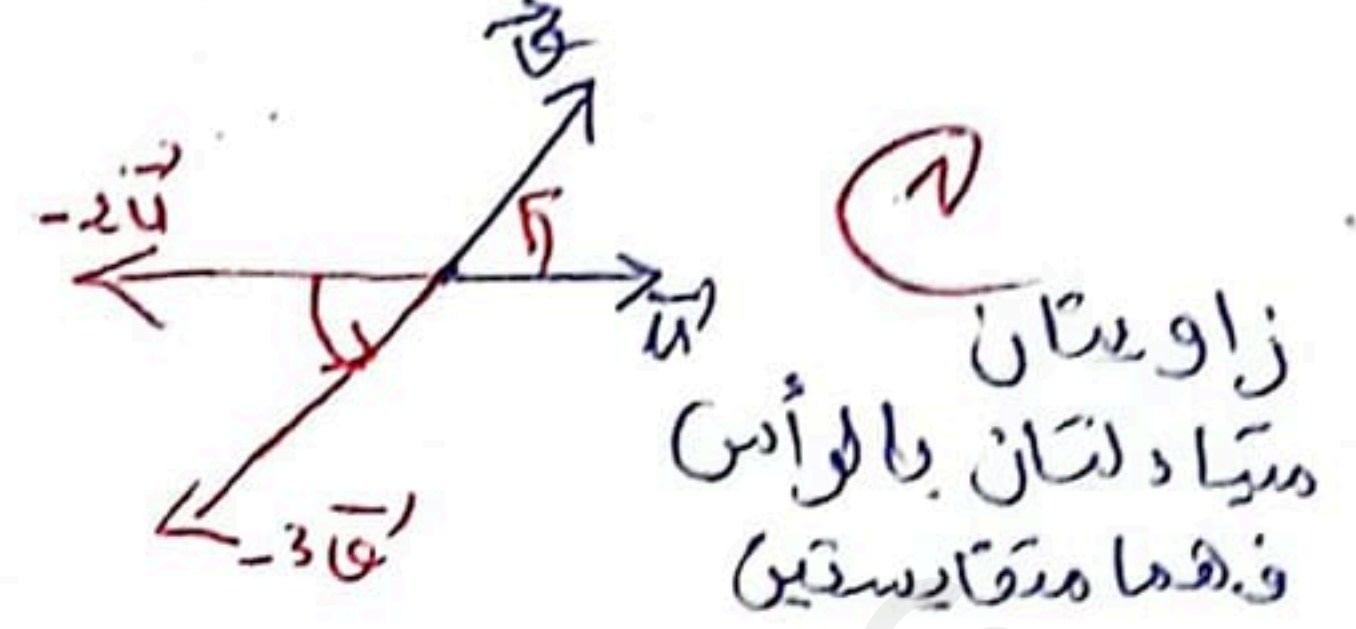
ونعرف قطر Gamma هو عبارة عن مجموعة

نقط من المستوى بحيث: المسافة بين نقطة ثابتة

A ونقطة M متحركة من المستوى تساوي نصف

القطر. (Gamma) معناه: $\Gamma = AC$

1. إيجاد قيس الزاوية الموضوعة $(\vec{u}, \vec{v}) = (-2\vec{u}, -3\vec{v})$.



$$\text{ومنه: } (\vec{u}, \vec{v}) = (-2\vec{u}, -3\vec{v}) = \frac{\pi}{6}$$

2. التحقق أن x و y قياسان لنفس الزاوية:

$$x - y = \frac{67\pi}{12} - \left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{67\pi + 5\pi}{12}$$

$$x - y = \frac{72\pi}{12} = 6\pi = 2(3\pi)$$

أي $x - y$ مضاعف لـ 2π إذن x و y قياسان لنفس الزاوية.

3. إيجاد القيس الرئيس للزاوية التي قيسها:

$$\alpha = \frac{2024\pi}{3}$$

$$-\pi < \alpha + 2k\pi \leq \pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{معناه:}$$

$$-\pi < \frac{2024\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi \quad \text{ومنه:}$$

$$-1 < \frac{2024}{3} + 2k \leq 1 \quad \text{وعليه:}$$

$$-1 - \frac{2024}{3} < 2k \leq 1 - \frac{2024}{3}$$

$$-\frac{2027}{3} < 2k \leq -\frac{2021}{3}$$

$$-\frac{2027}{6} < k \leq -\frac{2021}{6} \quad \text{وبالتالي:}$$

$$-337,83 < k \leq -336,83 \quad \text{إذن:}$$

$$k = -337 \quad \text{ومنه:}$$

إذن القيس الرئيس للزاوية $(\vec{u}, \vec{v})$ هو:

$$\frac{2024\pi}{3} - 337 \times 2\pi = \frac{2024\pi}{3} - 674\pi$$

$$\frac{2024\pi}{3} - 337 \times 2\pi = \frac{2024\pi - 2022\pi}{3}$$

$$\frac{2024\pi}{3} - 337 \times 2\pi = \frac{2\pi}{3}$$

4. تعيين القيمة المطلقة لـ $\sin\left(\frac{59\pi}{6}\right)$

$$\sin\left(\frac{59\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{60\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(10\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin\left(\frac{59\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

لتكن $M(x, y)$ نقطة من المستوى بحيث :

AM = AC معناه :

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = 2$$

$$(x+2)^2 + (y-2)^2 = 2^2 = 4$$

و منه : (ب) نقيس وتر Γ' هوز Γ بالنتيجة Γ'

$h(A, \frac{1}{2})$:

M' نقطة M على AM' معناه $h(A, \frac{1}{2})$

$$\overrightarrow{AM'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AM}$$

وفق العلاقة : نلاحظ أن النقطة A هي عبارة عن نقطة خاصة

وفق التحول h و منه Γ و Γ' لهما المركز نفسه .

ونصف قطر Γ' هو :

$$\Gamma' = \Gamma |K| = AC | \frac{1}{2} | = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

وعليه : $\Gamma' (A, 1)$

(ج) كتابة معادلة Γ' :

لتكن $M(x, y)$ نقطة من المستوى بحيث :

AM = 1 معناه :

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = 1$$

$$(x+2)^2 + (y-2)^2 = 1$$

و منه : التمرين 103

(Un) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$:

$$\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = 3U_n + 1 \end{cases}$$

1. حساب الحدود U_1, U_2, U_3 :

$$U_1 = 3U_0 + 1 = 3 \times 5 + 1 = 16$$

$$U_2 = 3U_1 + 1 = 3 \times 16 + 1 = 49$$

$$U_3 = 3U_2 + 1 = 3 \times 49 + 1 = 148$$

2. (Un) متتالية عددية معرفة بـ : $U_{n+1} = 3U_n + 1$

(أ) إثبات أن (Un) متتالية هندسية :

$$V_{n+1} = 9V_n = 9(U_n + \frac{1}{2})$$

$$V_{n+1} = U_{n+1} + \frac{1}{2} = 3U_n + 1 + \frac{1}{2}$$

$$V_{n+1} = 3U_n + \frac{3}{2} = 3(U_n + \frac{1}{2}) = 3V_n$$

$$V_{n+1} = 3V_n$$

و منه (Un) م. ه أساسا $q = 3$ و $u = \frac{1}{2}$

$$V_0 = U_0 + \frac{1}{2} = 5 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$$

$$V_n = V_0 \times q^n = \frac{11}{2} (3)^n$$

$$U_n = V_n - \frac{1}{2} = \frac{11}{2} (3)^n - \frac{1}{2}$$

و لدينا من العلاقة السابقة :

$$U_n = V_n - \frac{1}{2} = \frac{11}{2} (3)^n - \frac{1}{2}$$

(ج) حساب المجموع S_n :

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$$

لما أن (V_n) م. ه فإن عبارة المجموع تعطينا :

$$S_n = V_0 \left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \right) = \frac{11}{2} \left(\frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} \right)$$

$$S_n = \frac{11}{4} (3^{n+1} - 1)$$

التمرين 04 :

(Un) و (Vn) متتايتين عدديتين معرفتين بـ :

$$U_0 = 2 \text{ و } V_0 = -1 \text{ و من أجل كل } n \in \mathbb{N} :$$

$$\begin{cases} U_{n+1} = (1+\alpha)U_n - \alpha V_n \\ V_{n+1} = (1-\alpha)U_n + \alpha V_n \end{cases} \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \ell$$

1. برهان أن إذا كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \ell$

(Un) متتالية نحو ℓ معناه :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = \ell$$

من العلاقة التراجعية الأولى نجد :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1+\alpha)U_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha V_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = (1+\alpha) \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n - \alpha \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = (1+\alpha) \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n - \alpha \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$$

$$\ell = (1+\alpha) \ell - \alpha \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$$

$$\alpha \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \ell + \alpha \ell - \ell$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \frac{\ell + \alpha \ell - \ell}{\alpha} = \ell$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \ell$$

و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \ell$

2. إثبات أن (Vn) متتالية هندسية :

$$U_n - V_n = 3 \text{ : } n \in \mathbb{N} \text{ و من أجل كل } \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ معناه : } \begin{cases} U_{n+1} = \frac{3}{2} U_n - \frac{1}{2} V_n \dots (1) \\ V_{n+1} = \frac{1}{2} U_n - \frac{1}{2} V_n \dots (2) \end{cases}$$

$$U_{n+1} = \frac{3}{2} U_n - \frac{1}{2} V_n = \frac{3}{2} U_n + \frac{1}{2} U_n - \frac{1}{2} V_n$$

$$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{2} (U_n - V_n)$$

$$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{2} \times 3$$

$$U_{n+1} = U_n + \frac{3}{2}$$

$$U_{n+1} = U_n + \frac{3}{2}$$

$$U_n = U_0 + \frac{3}{2} n = 2 + \frac{3}{2} n$$