التمرين الرابع (الدالة الأسية) ـ بكالوريا 2018 ـ شعبة رياضيات ـ الموضوع الثاني

دالة أسية نموذجية

I. g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ :

$$g(x)=(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1$$

1) تبيان أنه من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$:

$$g'(x)=\frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0\,;+\infty[$ ودالتها المشتقة $g'(x)$ حيث:

$$\begin{aligned}
g'(x)&=(1+2x)e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}\\
&=\frac{x^2(1+2x)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}\\
&=\frac{x^2(2x+1)+(x^2+x+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\\
&=\frac{2x^3+x^2+x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\\
&=\frac{2x^3+2x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\\
&=\frac{2x^2(x+1)+(x+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\\
&=\frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

ومنه:

من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$:

$$g'(x)=\frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0\,;+\infty[$:

ندرس أولا إشارة $g'(x)$ على المجال $]0\,;+\infty[$.

من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$ لدينا:

$$\begin{cases}x+1>0\\2x^2+1>0\\x^2>0\\e^{-\frac{1}{x}}>0\end{cases}$$

ومنه:

من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$:

$$g'(x) > 0$$

نستنتج أن:

الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0\,;+\infty[$.

2) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0{,}9 < \alpha < 1$:

لدينا:

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0\,;+\infty[$. فهي أيضا مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0{,}9\,;1]$.

ولدينا:

$$\begin{cases} g(0{,}9) = -0.107\ldots \\ g(1) = +0.103\ldots \end{cases}$$

أي:

$$g(0{,}9) \times g(1) < 0$$

وأيضا:

$$g(0{,}9) < 0 < g(1)$$

ومنه:

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0{,}9\,;1]$ بحيث:

$$g(\alpha) = 0$$

استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0\,;+\infty[$:

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0\,;+\infty[$ وتنعدم من أجل القيمة α $(g(\alpha) = 0)$ حيث:

$$-0{,}107 < g(\alpha) < +0{,}103$$

ومنه:

- من أجل x من المجال $]0\,;\alpha]$: $g(x) \leq 0$.
- من أجل x من المجال $]\alpha\,;+\infty[$: $g(x) > 0$.

نلخص إشارة $g(x)$ في الجدول التالي:

x	0 α $+\infty$
$g(x)$	$-$ 0 $+$

II. f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ :

$$f(x) = \frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}}$$

و (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) أ) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)$:

- حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)$:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}}\right) = +\infty$$

لأن:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} e^{-\frac{1}{x}} = 0 \end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$$

ملاحظة:

المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل بجوار $+\infty$ حامل محور التراتيب كمستقيم مقارب عمودي و $x = 0$ معادلة له.

- حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}}\right) = +\infty$$

لأن:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1 \end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

1) ب) تبيان أنه من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0\,;+\infty[$ ودالتها المشتقة $f'(x)$ حيث:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2} + e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}(x+1)e^{-\frac{1}{x}} \\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}x^2 e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}(x+1)e^{-\frac{1}{x}} \\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}(x^2+x+1)e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{-1 + (x^2+x+1)e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \\ &= \frac{(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}} - 1}{x^2} \\ &= \frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

ومنه:

من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0\,;+\infty[$:

إشارة $f'(x)$ على المجال $]0\,;+\infty[$ من إشارة $g(x)$.

لأن:

من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$:

$$x^2>0$$

نلخص إشارة $f'(x)$ في الجدول التالي:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	

ومنه:

- من أجل x من المجال $]0\,;\alpha]$: $f'(x)\leq 0$.
- من أجل x من المجال $]\alpha\,;+\infty[$: $f'(x)>0$.

نستنتج أن:

- الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0\,;\alpha[$.
- الدالة f متزايدة تماما على المجال $]\alpha\,;+\infty[$.

تشكيل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0\,;+\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

2) تبيان أن:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)=-1$$

نضع:

$$t=-\frac{1}{x}$$

أي:

$$x=-\frac{1}{t}$$

حيث:

عندما يؤول x إلى $+\infty$ $(x \to +\infty)$ فإن t يؤول إلى 0 بقيم أصغر $(t \overset{<}{\to} 0)$.

فنكتب:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right) &= \lim_{t\overset{<}{\to}0}\left(-\frac{1}{t}e^{t}+\frac{1}{t}\right)\\ &= \lim_{t\overset{<}{\to}0}\left(-\frac{1}{t}(e^{t}-1)\right)\\ &= \lim_{t\overset{<}{\to}0}\left(-\frac{e^{t}-1}{t}\right)\\ &= -1\end{aligned}$$

لأن:

$$\lim_{t\overset{<}{\to}0}\left(\frac{e^{t}-1}{t}\right)=1$$

ملاحظة:

يمكن البرهان على هذه النهاية باستعمال العدد المشتق حيث:

$$\begin{cases} u(t)=e^{t} \text{ و } u'(t)=e^{t} \\ u(0)=1 \text{ و } u'(0)=1 \end{cases}$$

الدالة $t \longmapsto e^{t}$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ونكتب:

$$\lim_{t\overset{<}{\to}0}\left(\frac{e^{t}-1}{t}\right)=\lim_{t\overset{<}{\to}0}\frac{u(t)-u(0)}{t-0}=u'(0)=e^{0}=1$$

ومنه:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)=-1$$

استنتاج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$:

يكون المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ إذا كانت:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$$

لدينا:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}-x\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+e^{-\frac{1}{x}}+xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

لأن:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{1}{x}}=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)=-1 \end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$$

نستنتج أن:

المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

3) h الدالة العددية المعرفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ :

$$h(x)=\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}$$

أ) حساب $\lim_{x\to+\infty}h(x)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}h(x)&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}\right)\\&=0\end{aligned}$$

لأن:

$$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\\ \lim_{x\to+\infty}e^{-\frac{1}{x}}=1\end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة h على المجال $]0\,;+\infty[$:

الدالة h قابلة للاشتقاق على المجال $]0\,;+\infty[$ ودالتها المشتقة $h'(x)$ حيث:

$$\begin{aligned}h'(x)&=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\\&=-\frac{1}{x^2}\left(1-e^{-\frac{1}{x}}\right)\\&=\frac{1}{x^2}\left(e^{-\frac{1}{x}}-1\right)\\&=\frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{x^2}\end{aligned}$$

ومنه:

من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$:

$$h'(x)=\frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{x^2}$$

إشارة $h'(x)$ على المجال $]0\,;+\infty[$ من إشارة البسط: $e^{-\frac{1}{x}}-1$.

لأن:

من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$:

$$x^2>0$$

لاحظ أن العبارة $e^{-\frac{1}{x}}-1$ لا تنعدم على المجال $]0\,;+\infty[$.

من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$:

$$e^{-\frac{1}{x}}-1<0$$

أي:

من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$:

$$h'(x)<0$$

نلخص إشارة $h'(x)$ في الجدول التالي:

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$-$

ومنه:

الدالة h متناقصة تماما على المجال $]0\,;+\infty[$.

استنتاج إشارة $h(x)$ على المجال $]0\,;+\infty[$:

لدينا:

الدالة h معرفة ومستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0\,;+\infty[$.

ولدينا أيضا:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=0$$

فنستنتج أن:

من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$:

$$h(x)>0$$

نلخص إشارة $h(x)$ في الجدول التالي:

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$h(x)$	$+$

ب) التحقق أن:

$$f(x)-x=(1+x)h(x)$$

من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$ لدينا:

$$\begin{aligned} f(x)-x&=\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}-x\\ &=\frac{1-x^2}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}-x\\ &=\frac{(1-x)(1+x)}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}\\ &=(1+x)\left(\frac{1-x}{x}+e^{-\frac{1}{x}}\right)\\ &=(1+x)\left(\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}\right)\\ &=(1+x)h(x)\end{aligned}$$

ومنه:

من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$:

$$f(x)-x=(1+x)h(x)$$

استنتاج الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ):

لدينا:

من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$:

$$\begin{cases} 1+x>0 \\ h(x)>0 \end{cases}$$

ومنه:

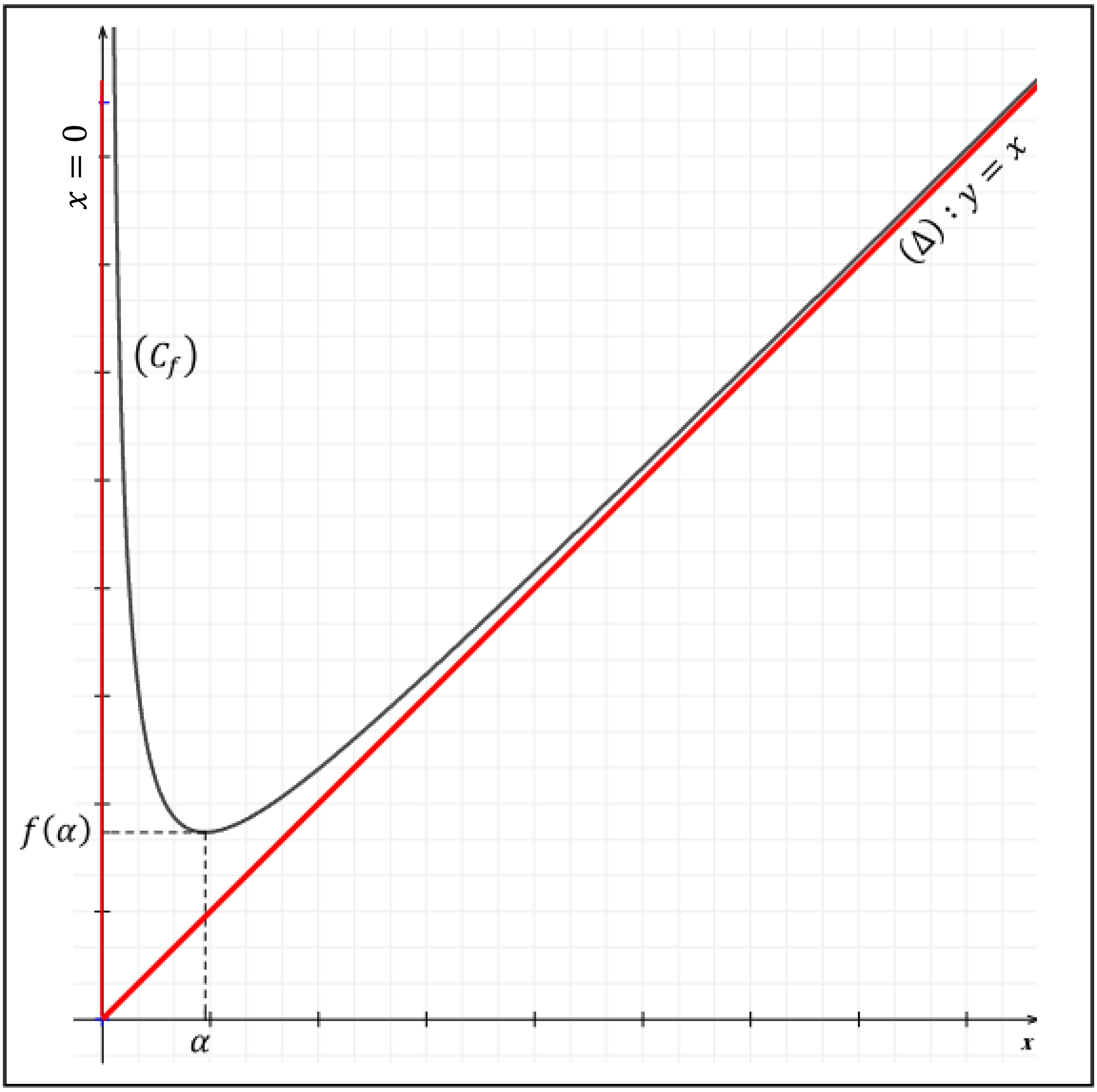
من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$:

$$f(x)-x=(1+x)h(x)>0$$

فنستنتج أن:

المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقع أعلى المستقيم المقارب المائل (Δ).

4) رسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f):



5) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها العام u_n حيث:

$$u_n = \frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n^2}{n+1}$$

أ) كتابة u_n بدلالة n:

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا:

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n^2}{n+1} \\
&= \frac{n}{n+1}\left[\frac{1}{\frac{1}{n}} + \left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{\frac{1}{n}}}\right] - \frac{n^2}{n+1} \\
&= \frac{n}{n+1}\left[n + \left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-n}\right] - \frac{n^2}{n+1} \\
n &= \frac{n}{n+1}\left[n + \frac{n+1}{n}e^{-n}\right] - \frac{n^2}{n+1} \\
&= \frac{n^2}{n+1} + e^{-n} - \frac{n^2}{n+1} \\
&= e^{-n}
\end{aligned}$$

ومنه:

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$$u_n = e^{-n}$$

تبيان أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول u_1:

تكون المتتالية (u_n) هندسية أساسها q وحدها الأول u_1 إذا كان:

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= e^{-(n+1)} \\
u_{n+1} &= e^{-n-1} \\
u_{n+1} &= e^{-1} \times e^{-n} \\
u_{n+1} &= \frac{1}{e} \times e^{-n} \\
u_{n+1} &= \frac{1}{e} \times u_n
\end{aligned}$$

ومنه:

المتتالية (u_n) هندسية وأساسها $q = \frac{1}{e}$ وحدها الأول u_1 حيث:

$$u_1 = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

ب) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = \left(\frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{4}f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\right)$$

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا:

$$S_n = \left(\frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{4}f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n$$

حيث:

$$v_n = \frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}$$
$$= \frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} - \frac{n^2}{n+1} + \frac{n^2}{n+1}$$
$$= \left[\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n^2}{n+1}\right] + \frac{n^2}{n+1} - \frac{1}{n+1}$$
$$= u_n + \frac{n^2-1}{n+1}$$
$$= u_n + \frac{(n+1)(n-1)}{n+1}$$
$$= u_n + (n-1)$$

ومنه:

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$$v_n = u_n + (n-1)$$

فنكتب:

$$S_n = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n$$
$$= (u_1 + 0) + (u_2 + 1) + (u_3 + 2) + \cdots + (u_n + n - 1)$$
$$= (u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n) + \big(0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1)\big)$$
$$= S_1 + S_2$$

حيث:

S_1 هو مجموع n حدا من حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{e}$ وحدها الأول $u_1 = \frac{1}{e}$.

S_2 هو مجموع n حدا من حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها 1 وحدها الأول 0.

لدينا:

$$S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$
$$= u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$
$$= \frac{1}{e} \times \frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n}{1-\frac{1}{e}}$$
$$= \frac{1}{e} \times \frac{1-e^{-n}}{\frac{e-1}{e}}$$
$$= \frac{1-e^{-n}}{e-1}$$

ومنه:

$$S_1 = \frac{1-e^{-n}}{e-1}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} S_2 &= 0+1+2+\cdots+(n-1) \\ &= \frac{n}{2}\times(0+n-1) \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

ومنه:

$$S_2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

نجد:

$$S_n = \frac{1-e^{-n}}{e-1} + \frac{n(n-1)}{2}$$

جميع الحقوق محفوظة
BAC