



# مجلة الرائد في الرياضيات

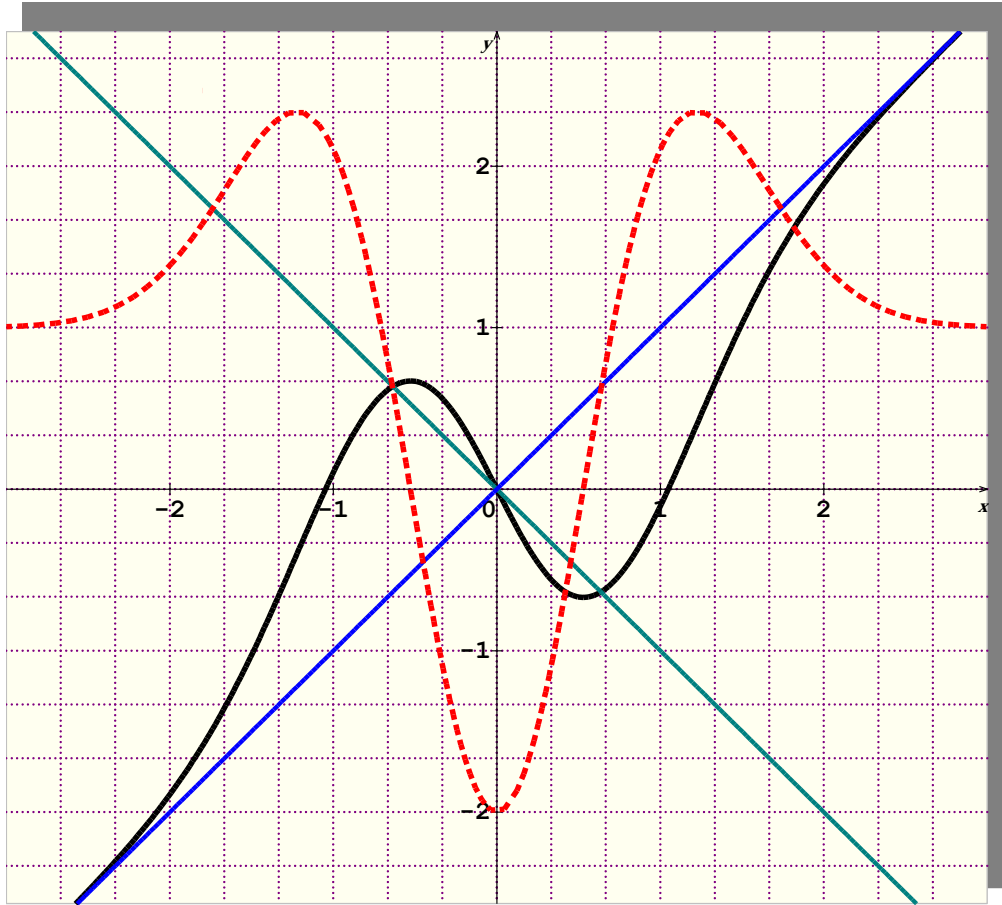
\*\*\*\*\*



تمارين الدوال العددية  
في البكالوريا بين يديك

الشعب

علوم تجريبية+تقني رياضي+رياضيات



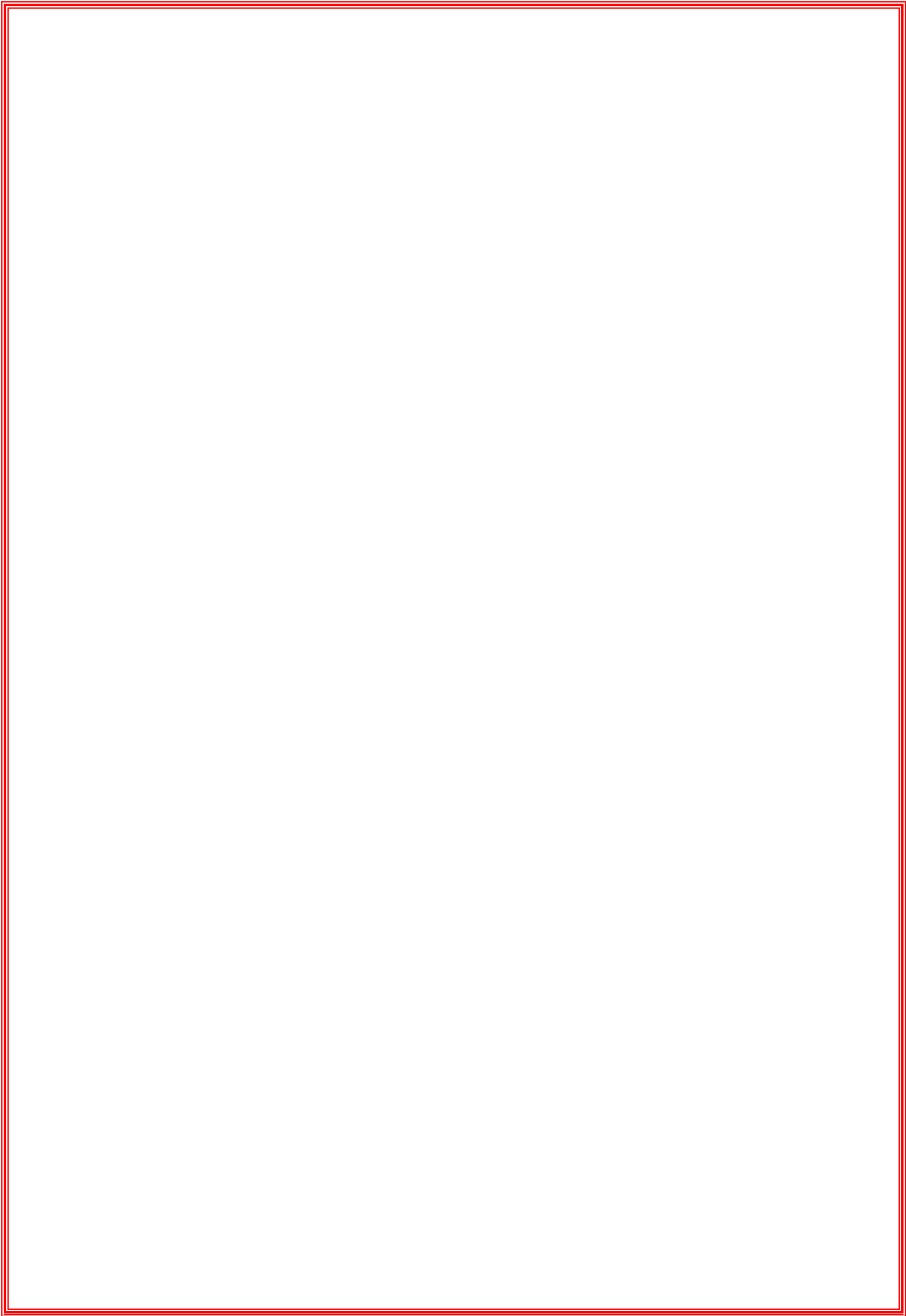
## BAC2020

إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

[larbibelabidi@gmail.com](mailto:larbibelabidi@gmail.com)

العربي الجزائري Facebook





# مجلة الرائد في الرياضيات

تمارين الدوال العددية  
في البكالوريا بين يديك

الشعب: علوم تجريبية+تقني رياضي+رياضيات

\*\*\*\*\*

الجزء الاول

حساب النهايات

الجزء الثاني

الاستمرارية-مبرهنة القيم المتوسطة

الجزء الثالث

الاشتقاقية وتطبيقاتها

الجزء الرابع

تمارين البكالوريات

العلوم التجريبية+تقني رياضي

(1)النصوص (2)الحلول (المجلة المرفقة)

الجزء الخامس

تمارين مقترحة

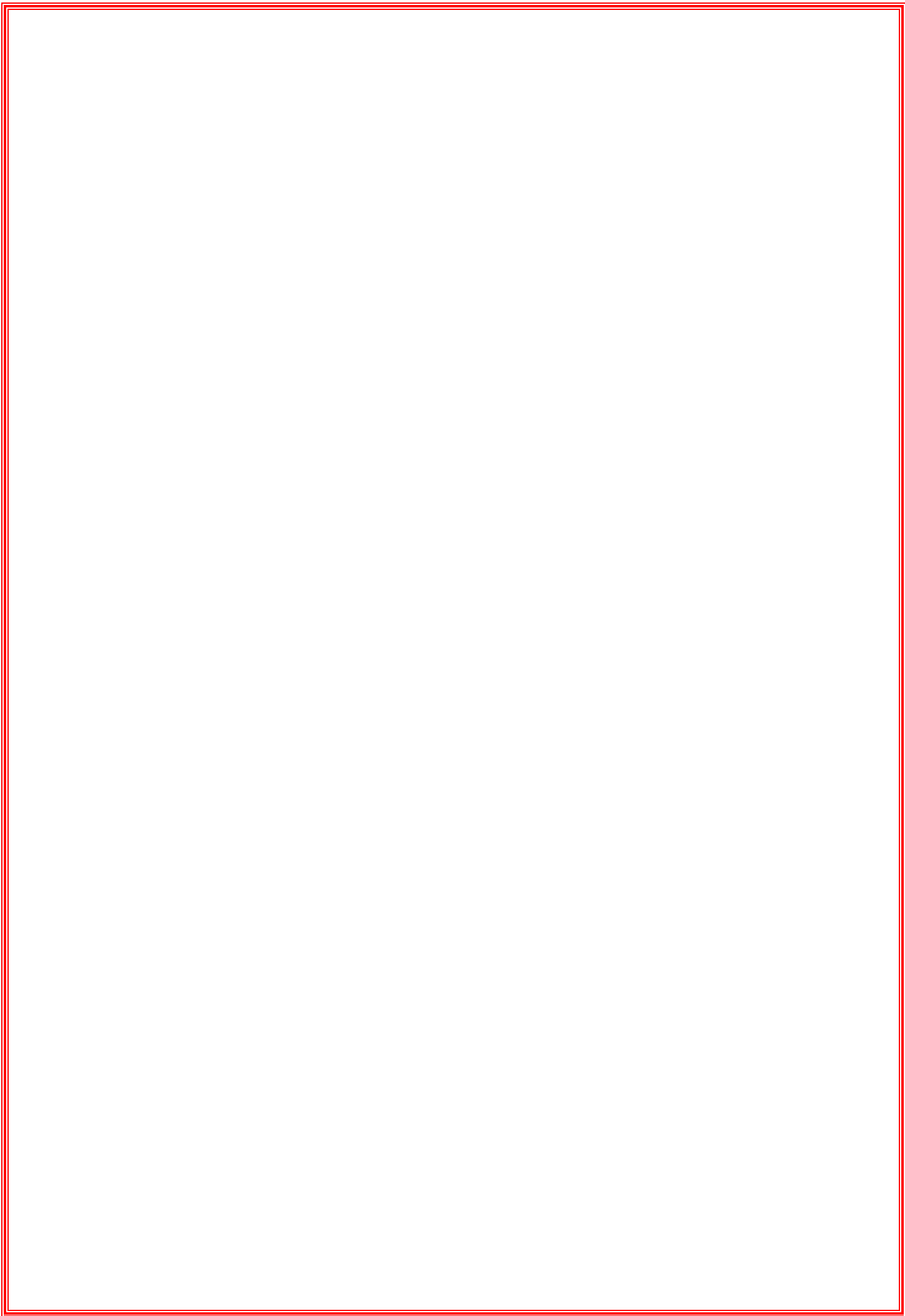
## BAC2020

إعداد الأستاذ: بالعبدي محمد العربي

[larbibelabidi@gmail.com](mailto:larbibelabidi@gmail.com)

العربي الجزائري Facebook







## الجزء الاول: حساب النهايات

### التمرين 01

احسب نهايات الدالة  $f$  عند الأطراف المفتوحة لمجال تعريفها، ثم فسر النتائج هندسيا في كل حالة

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}, f(x) = \frac{-3x^2 - 4x + 5}{(x+2)^2} \quad (2, D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}, f(x) = \frac{x^2 + 5x + 2}{x^2 - 1} \quad (1$$

$$D_f = \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5} \quad (4, D_f = \mathbb{R} - \{1; 3\}, f(x) = \frac{4x - 8}{-x^2 + 4x - 3} \quad (3$$

$$D_f = ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[, f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (6, D_f = ]1; +\infty[, f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1} \quad (5$$

### التمرين 02

I- نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{3\}$  بـ:  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 5}{x - 3}$  وليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني.

$$(1) \text{ عين كل من الأعداد } a \text{ و } b \text{ و } c \text{ بحيث من أجل كل } x \in \mathbb{R} - \{3\} : f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 3}$$

(2) احسب نهايات الدالة  $f$  عند أطراف مجال تعريفها.

(3) بين ان  $(C_f)$  يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلتيهما.

(4) ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.

### التمرين 03

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{2\}$  بـ:  $f(x) = \frac{2x^3 - 11x^2 + 25x - 27}{(x - 2)^2}$  وليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني

(1) احسب نهايات الدالة  $f$  عند أطراف مجال تعريفها.

(3) احسب  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} [f(x) - (2x - 3)]$ ، ثم فسر هندسيا هذه النتيجة

(2) ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم الذي معادلته:  $y = 2x - 3$  ( $\Delta$ )

### التمرين 04

I- احسب النهايات التالية باستعمال طريقة مناسبة.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{x^2 + 4x + 3}) \quad (4, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \quad (3, \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (2, \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 1} \quad (1$$

II- اثبت صحة النهايات التالية بطريقة مناسبة.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3} - x + 2) = 2 \quad (4, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} - 1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{2} \quad (3, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+1} - 1} = 2 \quad (2, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{3} \quad (1$$

## التمرين 05

$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} - 2x + 1$  : دالة عددية معرفة على المجال  $D = ]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$  كما يلي:

- (1) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم تحقق  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .
- (2) جد  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x]$  ، ثم استنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$ .
- (3) بين أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-3x)] = 2$  ، ثم فسر بيانيا هذه النتيجة .

## التمرين 06

$f(x) = \frac{2x + \sin x}{x + 1}$  : دالة عددية معرفة على المجال  $D = ]-1; +\infty[$  كما يلي:

- أ- بين أن  $\frac{2x-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x+1}$  من أجل كل  $x$  من  $D$  .  
- عين  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ، ثم فسر النتيجة بيانيا.
- ب- برهن أن :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  ، ثم استنتج :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$  .
- ج- بين أن :  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$  : ماذا تستنتج بالنسبة لمنحنى الدالة  $f$  ؟

## التمرين 07

- 1- من أجل كل  $x < 0$  ، بين أن :  $\sqrt{x^2 + 3x} < -x$  ، ثم استنتج  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + \sqrt{x^2 + 3x})$
- 2- من أجل كل  $0 < x < 1$  ، بين أن :  $2x < \sqrt{x^2 - x - 4}$  . استنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 4} + 2x)$

## التمرين 08

$f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$  : ب  $\mathbb{R}$  وليكن  $C_f$  منحنىها البياني.

- (1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x \in \mathbb{R} - \{2\}$  :  $\frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3}$
- (2) استنتج  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2}$  ، ماذا تعني النتيجة السابقة بالنسبة للدالة  $f$  ؟ فسر ذلك بيانيا.
- (3) بين أن : (أ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} = 1$  ، (ب)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} = -1$
- (4) بين أن المستقيم ذو المعادلة :  $y = x$  مقارب مائل للمنحنى  $C_f$  عند  $+\infty$
- عين العدد الحقيقي  $a$  الموجب بحيث تكون  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + ax] = 0$  ، ماذا تستنتج بالنسبة لـ  $C_f$





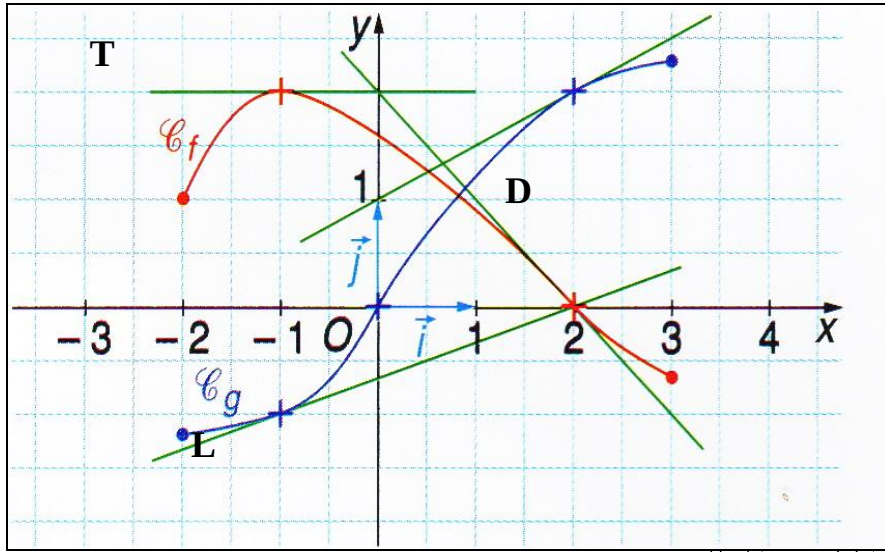
## الجزء الثالث: الاشتقاقية وتطبيقاتها

### التمرين 13

أدرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  عند القيمة  $a$ ، ثم فسر النتيجة بيانياً  
 $a = 2$  و  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$  (3،  $a = 1$  و  $f(x) = x^2|x-1|$  (2،  $a = -1$  و  $f(x) = x^2 - 3x$  (1

### التمرين 14

رسمنا في الشكل الموالي المنحنيين  $(C_f)$  و  $(C_g)$   
 الممثلين لدالتين  $f$  و  $g$  معرفتين وقابلتين للاشتقاق على المجال  $[-2; 3]$  وبعض مماساتهما.



(1) أحسب الأعداد المشتقة التالية:

$$(g)'(2) * , (f)'(2) * , (g)'(-1) * , (f)'(-1) *$$

(2) من أجل كل  $x$  من المجال  $[0; 2]$  نضع:  $h(x) = f(2x-1)$ .

أ) باستعمال مشتق دالة مركبة عين اتجاه تغير الدالة  $h$  على المجال  $[-2; 3]$

ب) أحسب  $h'(0)$  و  $h'\left(\frac{3}{2}\right)$ . ثم أكتب معادلات كل من المستقيمات  $T$  و  $D$  و  $L$

### التمرين 15

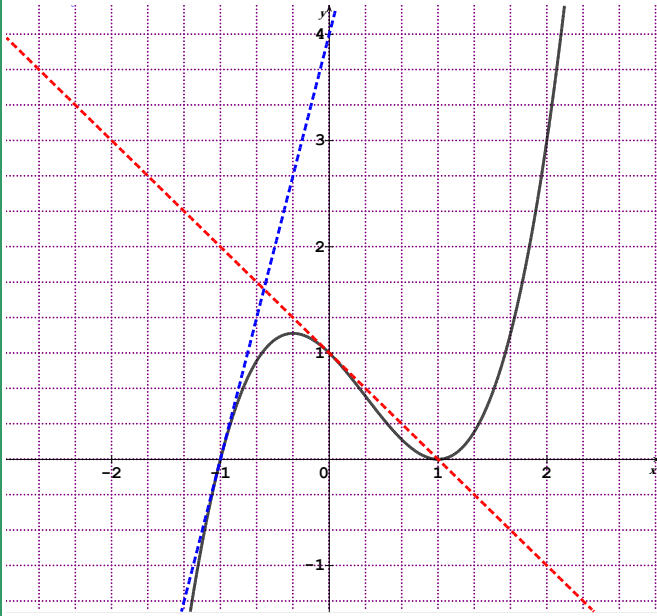
لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $[1; +\infty[$  بـ:  $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$  واليكن  $(C_f)$  هو التمثيل البياني لها.

(1) أحسب  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+1) - f(1)}{h}$  ثم فسر النتيجة هندسياً.

(2) أدرس تغيرات الدالة  $f$ .

(3) باستعمال منحنى دالة "الجذر التربيعي" أنشئ  $(C_f)$ .

## التمرين 16



( $C_g$ ) المنحنى المقابل هو التمثيل البياني لدالة عددية  $g$  معرفة وقابلة للإشتقاق على المجال  $\mathbb{R}$ :  
 المماسان لـ ( $C_g$ ) عند نقطتيه  $A$  و  $B$  فاصلتهما 1 و 0  
 (1- I) بقراءة بيانية عين مايلي:  
 $g(1)$ ،  $g(0)$ ،  $g(-1)$  و  $g'(1)$ ،  $g'(0)$ ،  $g'(-1)$   
 (2) أكتب معادلات المماسات عند النقط التي فواصلها  $-1$ ،  $0$ ،  $1$  لـ ( $C_g$ ).

(3) حل بيانيا في المجال  $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$  : المعادلتين

$g(x) = 0$  و  $g'(x) = -1$  و المتراجحة  $g'(x) \geq 4$

II) نقبل أن :  $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$

عين الأعداد الحقيقية  $a$ ،  $b$  و  $c$  باستعمال نتائج السؤال (1- I) تحقق من النتائج المحصل عليها سابقا.

## التمرين 17

لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بـ :  

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x^2 - \alpha + 3}{x} : x \leq 2 \\ f(x) = x^2 + 2x - \alpha : x > 2 \end{cases}$$
 واليكن ( $C_f$ ) هو تمثيلها البياني

(1) عين قيمة العدد الحقيقي  $\alpha$  بحيث تكون  $f$  قابلة للإشتقاق عند 2.

(2) نفرض في هذا الجزء أن :  $\alpha = 19$ .

(أ) ادرس تغيرات الدالة  $f$  على مجالي تعريفها.

(ب) بيّن أن المنحنى ( $C_f$ ) يقبل مستقيم مقارب مائل ( $\Delta$ ) عند  $(-\infty)$  يطلب تعيين معادلة له.

(ج) اكتب معادلة المماس ( $T$ ) عند نقطة ذات الفاصلة 2

(د) هل توجد مماسات للمنحنى ( $C_f$ ) توازي حامل محور الفواصل ؟ برر اجابتك

## التمرين 18

لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1} : x > 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + 3} : x \leq 1 \end{cases}$$
 واليكن ( $C_f$ ) هو تمثيلها البياني.

(1) تحقق أن الدالة  $f$  غير قابلة للإشتقاق عند 1 ، ثم أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة.

(2) أكتب معادلتين نصف المماسين عند النقطة ذات الفاصلة 1

(3) ادرس تغيرات الدالة  $f$  على مجالي تعريفها

## التمرين 19

لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $D = \mathbb{R} - \{1\}$  بـ:  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ .

(1) ادرس تغيرات الدالة  $f$  ثم عين إشارة كلا من  $f'(x)$  و  $f(x)$  على  $D$ .

(2) لتكن الدوال التالية:  $g(x) = f(x^2)$ ،  $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ ،  $k(x) = f(-2x + 1)$  معرفة بـ:  $k$ ،  $h$ ،  $g$  باستعمال مشتقة دالة مركبة استنتج اتجاه تغير كلا من  $g$ ،  $h$ ،  $k$ .

(3)  $V$ ،  $E$ ،  $R$  دوال عددية معرفة بـ:  $R(x) = [f(x)]^2$ ،  $E(x) = [f(x)]^3$ ،  $V(x) = \frac{1}{f(x)}$

أ) عبر عن كلا من  $R'(x)$  و  $E'(x)$  و  $V'(x)$  بدلالة  $f(x)$  و  $f'(x)$

ب) شكل جدول تغيرات كلا من الدوال  $V$ ،  $E$ ،  $R$ .

## التمرين 20

$f$  دالة معرفة ومستمرة وقابلة للإشتقاق على كلا من  $]-\infty; 2[$  و  $]2; +\infty[$  جدول تغيراتها التالي:

| x    | $-\infty$ | 0 | 2         | 3         | $+\infty$ |
|------|-----------|---|-----------|-----------|-----------|
| f(x) | 4         |   | $+\infty$ | $+\infty$ | 0         |
|      |           | 1 |           |           | -2        |

واليمكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1- أ) فسر بيانيا، كل نهاية لـ  $f$ ، عين نهاية  $f\left(\frac{1}{x}\right)$  عند  $+\infty$ .

ب) بين أن المعادلة  $f(x) = 2$  تقبل حدا وحيدا على  $]0; 2[$ .

2-  $g$  دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{3\}$  بالشكل:  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ ؛  $x \neq 2$  و  $g(2) = 0$

عين نهايات الدالة  $g$  عند  $+\infty$ ،  $-\infty$  و 3. ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $g$ .

## التمرين 21

الك جدول تغيرات الدالة العددية  $f$  والمعرفة على  $\mathbb{R} - \{1\}$  واليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني

| x     | $-\infty$ | $\alpha$ | 1         | 2         | 5  | $+\infty$ |
|-------|-----------|----------|-----------|-----------|----|-----------|
| f'(x) |           | -        |           | -         | 0  | +         |
| f(x)  | 2020      |          |           | $+\infty$ | 0  | -2        |
|       |           | 0        |           |           | -3 |           |
|       |           |          | $-\infty$ |           |    |           |

من خلال قراءتك لجدول التغيرات اجب عن مايلي:

- 1) احسب نهايات الدالة  $f$  على أطراف مجال التعريف، ثم اكتب معادلات المستقيمات المقاربة لـ  $C_f$
- 2) حدد اتجاه تغير الدالة  $f$
- 3) عيّن حلول المعادلة  $f(x) = 0$  ثم استنتج إشارة  $f(x)$  على مجالي تعريفها.
- 4)  $g$  دالة معرفة بـ:  $g(x) = [f(x)]^2$ .  
أ) احسب نهايات الدالة  $g$  على أطراف مجال التعريف  
ب) بين انه من اجل كل  $x$  من  $\mathbb{R} - \{1\}$  فإن:  $g'(x) = 2f(x).f'(x)$ .  
ج) حدد اتجاه تغير الدالة  $g$ ، ثم ارسم جدول تغيراتها.

## التمرين 22

- المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  الوحدة 4cm.
- $f$  دالة معرفة على  $[-1;1]$  بـ:  $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ ، و  $(C_f)$  تمثيلها البياني.
- 1- بين ان الدالة  $f$  فردية
  - 2- احسب  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1}$  ثم استنتج  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$  فسر النتيجةين السابقين هندسيا.
  - 3- ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$ ، ثم شكل جدول تغيراتها
  - 4- أ) اكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند مبدأ الاحداثيات.  
ب) ادرس وضعية المماس  $(T)$  والمنحنى  $(C_f)$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.
  - 5- ارسم كلا من المماس  $(T)$  والمنحنى  $(C_f)$ .

## التمرين 23

$(C_f)$  التمثيل البياني لدالة  $f$  في مستوى منسوب الى المعلم

المتعامد المتجانس (الشكل المقابل)

1. بقراءة بيانية :

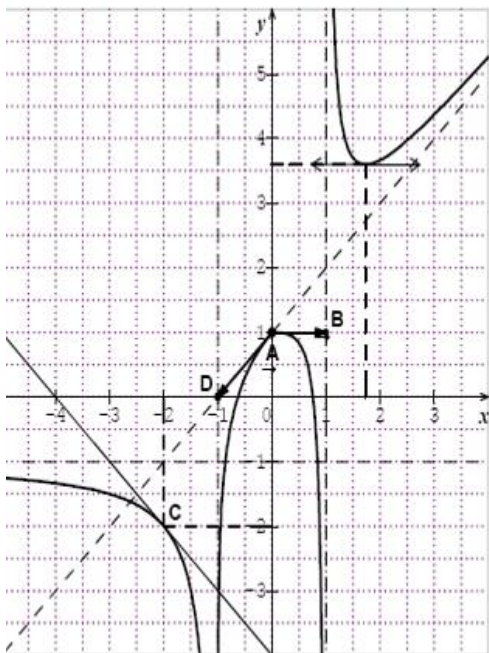
أ- عين  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

ب- شكل جدول تغيرات  $f$

2- بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 1$  ثم فسر بيانيا هذه النهاية.

3- عين  $f(0)$ ،  $f'(-2)$ ،  $f'(0)$  و  $f'_-(0)$ .

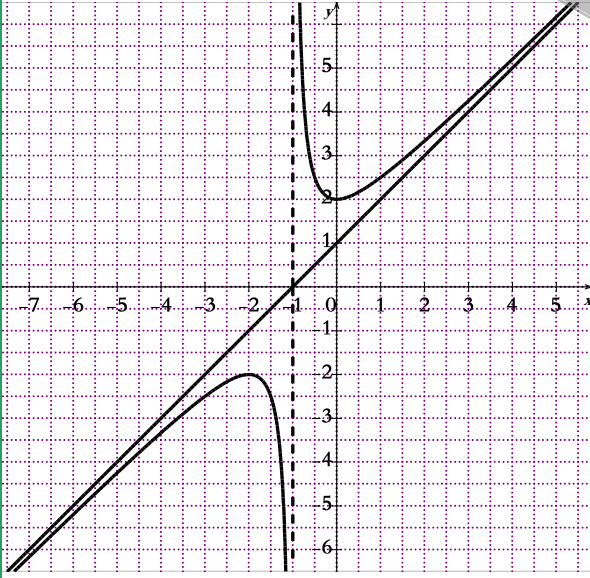
هل الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق عند 0؟ برر اجابتك.



4- حل بيانيا المعادلات والمتراجحات التالية:  $f(x)=0$  و  $f'(x) \geq 0$

5- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد حلول المعادلة:  $f(x) - x = m$

### التمرين 24



في الشكل المقابل  $(C_f)$  هو منحنى لدالة  $f$ .

(1) بقراءة بيانية، عيّن:

(أ) مجموعة التعريف الدالة  $f$ . ثم نهايات  $f$  عند أطراف  $D$

(ب) المستقيمت المقاربة لـ  $(C_f)$  ومعادلاتها.

(ج) الوضع النسبي لـ  $(C_f)$  والمستقيم المقارب المائل

(د) إشارة كلا من  $f(x)$  و  $f'(x)$

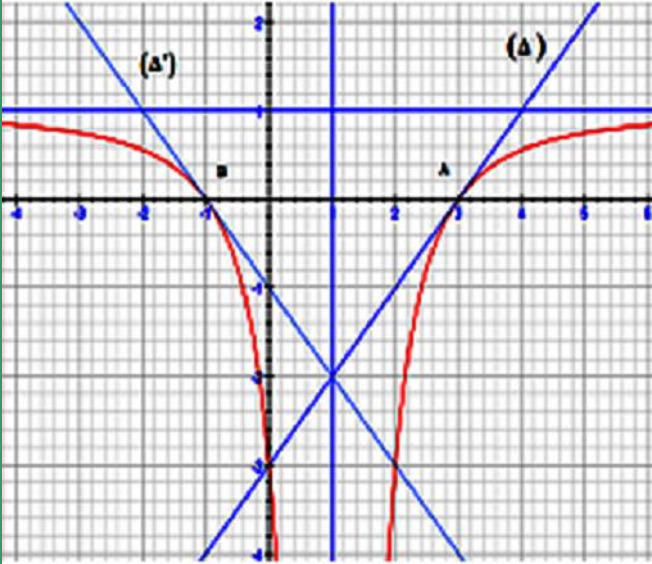
(2) دالة معرفة بـ:  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$  و  $(C_g)$  تمثيلها البياني

(أ) بين أن مجموعة تعريف  $g$  هي:  $]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$

(ب) أوجد نهايات  $g$  عند  $-1$  وعند  $-\infty$  و  $+\infty$  ثم فسر النتائج المحصل عليها بيانيا.

(ج) ادرس اتجاه تغير  $g$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $g$

### التمرين 25



المنحنى  $C_f$  الموالي هو التمثيل البياني

لدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{1\}$  و  $(\Delta)$ ،  $(\Delta')$  المماسين

لـ  $C_f$  في النقطتين  $A(3;0)$  و  $B(-1;0)$

(1) بقراءة بيانية:

أ- جد نهايات  $f$  عند حدود مجموعة تعريفها.

ب- حدّد إشارة  $f(x)$ ، ثم إشارة  $f'(x)$ .

ج- شكل جدول تغيرات  $f$ .

د- جد  $f'(3)$  و  $f'(-1)$ . ثم جد معادلة  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$

(2) نقبل أن:  $f(x) = \frac{x^2 - ax + b}{(x-1)^2}$

استقد من الإجابة عن السؤال (1) ج- لتعيين العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$ .

(3) لتكن الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $h(x) = [f(x)]^2$ .

أ- احسب  $h'(x)$  بدلالة كل من  $f(x)$  و  $f'(x)$ ، ثم استنتج إشارة  $h'(x)$ .

ب- شكل جدول تغيرات  $h$ .

## التمرين 26

لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-2\}$  بـ:  $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x + 2}$  واليكن  $(C_f)$  هومتثيلها البياني.

(1) عين العددين الحقيقيين  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث المنحنى  $(C_f)$  يقبل عند النقطة  $A(1; -3)$  مماسا ميله  $\frac{2}{3}$

(2) نفرض أن  $\alpha = -3$  و  $\beta = -7$

(أ) هل توجد مماسات للمنحنى  $(C_f)$  توازي المستقيم الذي معادلته:  $y = x - 1$ ؟ برر جوابك

(ب) بين المنحنى  $(C_f)$  يقبل مماسين عموديين على المستقيم الذي معادلته:  $4y - x = 0$ .

(ج) بيّن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مماسين يوازيان حامل محور الفواصل.

## التمرين 27

I-  $f$  دالة كثيرة حدود معرفة بـ:  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

(1) برر استمرارية الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

(2) ادرس اتجاه تغيرات  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أثبت أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في  $[1; 2]$  ثم عين حصرا للعدد  $\alpha$  سعته  $10^{-1}$

(4) استنتج حسب قيم  $x$  إشارة  $f(x)$

II-  $g$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كمايلي:  $g(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - x$

(1) بيّن أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $g'(x) = f(x)$  ، ثم شكل جدول تغيرات  $g$ .

(2) بيّن أن  $g(\alpha) = -\frac{1}{4}(\alpha^2 + 3)\alpha$  ثم جد حصرا للعدد  $g(\alpha)$  واستنتج عدد حلول المعادلة  $g(x) = 0$

## التمرين 28

المنحنى  $C_f$  المقابل هو التمثيل البياني للدالة  $f$  المعرفة

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} \text{ على } D = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

(1) بقراءة بيانية:

- احسب النهايات على الأطراف المفتوحة من  $(D)$  ،

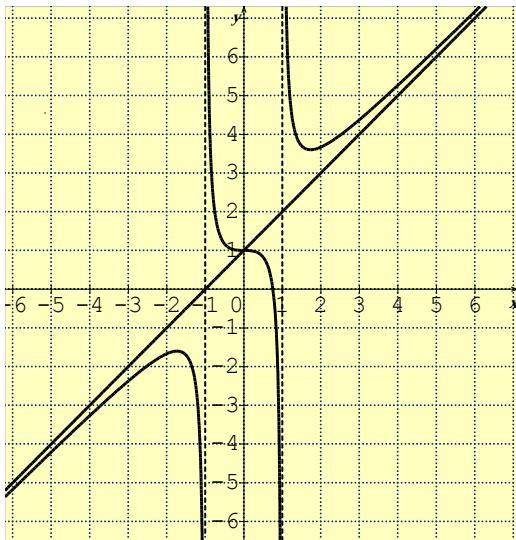
- عين المستقيمات المقاربة.

(2) تحقق حسابيا من نتائج السؤال السابق.

(3) من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $(D)$  ، احسب  $f'(x)$

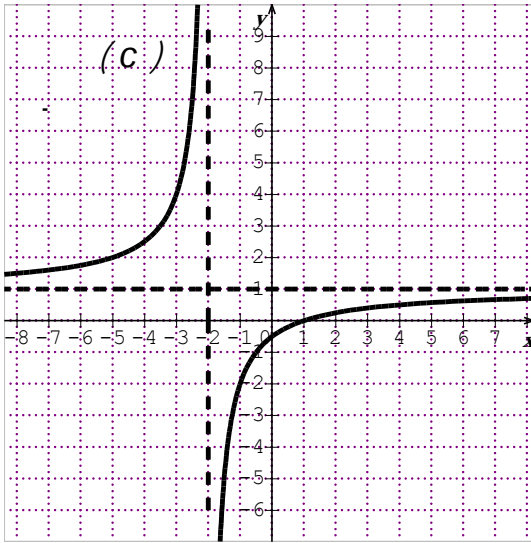
ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

(4) من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $(D)$  احسب  $f(-x) + f(x)$  ، ثم فسّر النتيجة هندسيًا.



## التمرين 29

$g$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-2\}$ ، التمثيل البياني في مستوى منسوب الى المعلم المتعامد



المتجانس (الشكل المقابل)

1. بقراءة بيانية :

أ. شكل جدول تغيرات  $g$

ب. عين قيم  $x$  التي يكون من أجلها  $0 < g(x) < 1$

ج. حدد إشارة  $g(x)$  حسب قيم  $x$

2. دالة المعرفة على  $[-1; 1[ \cup ]1; +\infty[$  ب:  $f(x) = \frac{1}{g(x)}$

أ. احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ،  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

ب. جد عبارة  $f'(x)$  ثم استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$ .

ج. شكل جدول تغيراتها ، ثم ارسم المنحنى  $(c_f)$  الممثل للدالة  $f$

## التمرين 30

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}^*$  ب:  $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x^2}$  و  $(C)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1)  $g$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  ب:  $g(x) = x^3 - x^2 + 1$

أ) أدرس تغيرات الدالة  $g$  ثم أنشئ جدول تغيراتها.

ب) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  من المجال  $]-1; -0.5[$

2) أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة الثانية هندسيا.

ب) استنتج أن  $(C)$  يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار  $-\infty$ .

ج) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي سالب تماما  $x$ ،  $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$  ثم شكل جدول تغيرات  $f$

3) أ) ادرس الوضع النسبي للمنحنى  $(C)$  والمستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = x - 1$ .

ب) عين معادلة المماس  $(d)$  للمنحنى  $(C)$  عند النقطة التي فاصلتها  $-1$ .

4) احسب  $f(\alpha)$  ثم أرسم  $(\Delta)$ ،  $(d)$  و  $(C)$ .



## الجزء الثالث: تمارين البكالوريا

### العلوم التجريبية

#### التمرين 31 دورة 2014

I- لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  كمايلي :  $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$ .

(1) أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ .

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$  ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) أ) بيّن أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $0,7 < \alpha < 0,8$ .

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي  $x$  إشارة  $g(x)$ .

II- نعتبر  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  كمايلي :  $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$ .

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

(2) أ) بيّن أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$ .

ب) استنتج أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا  $(\Delta)$  يطلب تعيين معادلة له.

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  و  $(\Delta)$ .

(3) أ) بيّن أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$  حيث  $f'$  مشتقة الدالة  $f$ .

ب) استنتج إشارة  $f'(x)$  حسب قيم  $x$  ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  (نأخذ  $f(\alpha) \approx -0,1$ ).

(4) احسب  $f(1)$  ثم حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $f(x) = 0$ .

(5) أنشئ المستقيم  $(\Delta)$  والمنحنى  $(C_f)$ .

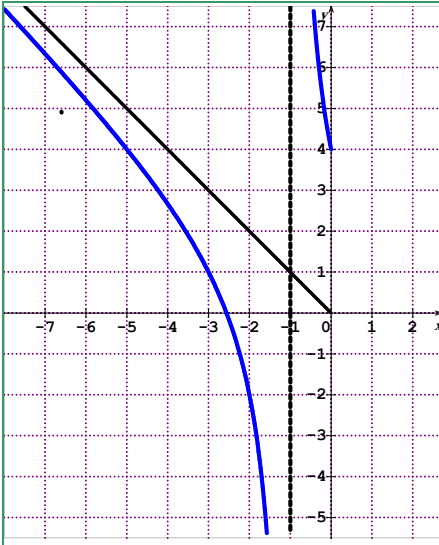
6- لتكن  $h$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  ب:  $h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$  و  $(C_h)$  تمثيلها البياني

أ) تحقق أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $h(x) = f(x) - 2$ .

ب) أستنتج أن  $(C_h)$  هو صورة  $(C_f)$  بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه ، ثم أنشئ  $(C_h)$ .

#### التمرين 32 دورة 2009

I)  $f$  دالة معرفة على المجال  $I = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0[$  ب:  $f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$



و ( $C_f$ ) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد

ومتجانس ( $O; \vec{i}; \vec{j}$ ) كما هو مبين في الشكل المقابل

(1) أ) أحسب نهايات  $f$  عند الحدود المفتوحة لـ  $I$

ب) بقراءة بيانية ودون دراسة اتجاه  $f$  شكل جدول تغيراتها.

(2)  $g$  دالة معرفة على  $[0; +\infty[$  ب:  $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$  و ( $C_g$ ) تمثيلها البياني

أ) أحسب نهاية  $g$  عند  $+\infty$ .

ب) تحقق من أن ( $C_g$ ) يقبل مستقيما مقاربا مائلا ( $\Delta$ ) عند  $+\infty$

يطلب تعيين معادلة له.

ج) أدرس تغيرات  $g$ .

II  $k$  دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  ب:  $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$

(1) أ) أحسب  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$ ،  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$  ماذا تستنتج، ب) أعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة.

(2) أكتب معادلتين نصفين المماسين ( $\Delta_1$ ) و ( $\Delta_2$ ) عند النقطة التي فاصلتها  $x_0 = 0$ .

### التمرين 33 دورة 2008

(3) أرسم ( $\Delta_1$ ) و ( $\Delta_2$ ) و ( $C_k$ )

المنحنى ( $C$ ) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية  $g$

المعرفة على  $I = ]-1; +\infty[$  ب:  $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$

1- أ) بقراءة بيانية :

شكل جدول تغيرات الدالة  $g$  وحدد  $g(0)$  وإشارة  $g(0,5)$

ب) علل وجود عدد حقيقي  $\alpha \in ]0; 0,5[$  يحقق  $g(\alpha) = 0$

ج) استنتج إشارة  $g(x)$  على المجال  $I$

(2)  $f$  دالة معرفة على  $]-1; +\infty[$  ب:  $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$  و ( $\Gamma$ ) تمثيلها

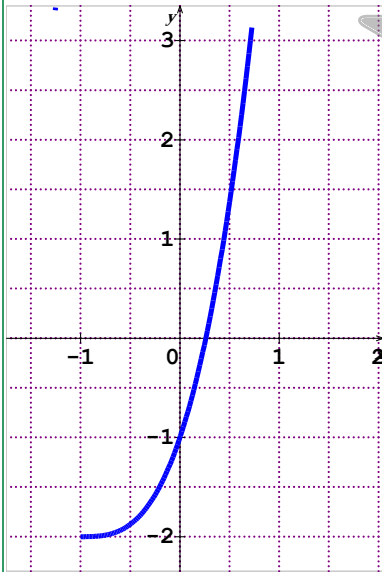
أ) تحقق أنه من أجل كل  $x \in I$   $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$

ب) عين دون حساب  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$  وفسر النتيجة بيانياً.

ج) جد  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)]$  فسر النتيجة بيانياً.

د) شكل جدول تغيرات  $f$

3) نأخذ:  $\alpha = 0,26$  . أ) عين مدور  $f(\alpha)$  إلى  $10^{-2}$  . ب) أرسم المنحنى ( $\Gamma$ ) .



## تقني رياضي

### التمرين 34 دورة 2017

I- نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كمايلي:  $g(x) = x^3 + 6x + 12$

1- أدرس إتجاه تغير الدالة  $g$ .

2- بيّن أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حداً وحيداً  $\alpha$  حيث  $[-1, 47; -1, 48]$ ، ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي  $x$  إشارة  $g(x)$ .

II- نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كمايلي:  $f(x) = \frac{x^3 - 6}{x^2 + 2}$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1- أ- أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :  $f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(x^2 + 2)^2}$

ثم ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  وشكل جدول تغيراتها.

2- أ- بيّن أن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة:  $y = x$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$ .

ب- أدرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta)$ .

3- بيّن أن:  $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ ، ثم استنتج حصراً للعدد  $f(\alpha)$ .

4- ارسم المستقيم  $(\Delta)$  والمنحنى  $(C_f)$ .

### التمرين 35 دورة 2009

$f$  دالة معرفة على  $]-1; +\infty[$ : ب:  $f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$  و  $(C_f)$  منحنى  $f$  في معلم متعامد ومتجانس

1) أدرس تغيرات الدالة  $f$ .

2- أ- بين أن  $(C_f)$  يقبل مقاربين أحدهما  $(D)$ :  $y = x$ .

ب- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى  $(C_f)$  و  $(D)$ .

3- أ- بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $x_0$  حيث  $1,3 < x_0 < 1,4$ .

ب- أكتب معادلة  $(\Delta)$  مماساً للمنحنى  $(C_f)$  في نقطة تقاطع  $(C_f)$  مع حامل محور الترتيب.

ج- أرسم  $(\Delta)$  و  $(C_f)$  في نفس المعلم.

4)  $g$  دالة معرفة على المجال  $]-1; +\infty[$ : ب:  $g(x) = |f(x)|$  واليكن  $(C_g)$  منحنى الدالة  $g$  في نفس المعلم

أ- بين كيف يمكن إنشاء  $(C_g)$  انطلاقاً من  $(C_f)$  ثم أرسمه.

ب- ناقش بياناً وحسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة:  $g(x) = m^2$

f دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = x \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوى إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

(1) بيّن أن f دالة فردية.

(2) اثبت أنه من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$   $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

(3) ادرس تغيرات الدالة f.

(4) اكتب معادلة للماس  $(T)$  لـ  $(C_f)$  في النقطة ذات الفاصلة 0

(5) ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(T)$  واستنتج أن  $(C_f)$  يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

(6) بيّن أن المستقيم  $(D)$  ذو المعادلة  $y=x+1$  مقارب لـ  $(C_f)$  في جوار  $+\infty$

ثم استنتج معادلة  $(D')$  المستقيم المقارب الآخر

(7) أرسم  $(D)$  و  $(D')$  و  $(C_f)$  في المعلم السابق.

(8) g دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $g(x) = |x| \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)$

أبيّن أن الدالة g زوجية.

ب) إنطلاقاً من  $(C_f)$  أرسم  $(C_g)$  في نفس المعلم السابق.



## الجزء الرابع: تمارين مقترحة

### التمرين 37



I- المنحنى  $(C_g)$  الموالي هو التمثيل البياني للدالة  $g$

المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $g(x) = x^3 + ax + b$ .

1. بقراءة بيانية:

(أ) عيّن  $g(-1)$ ،  $g(1)$ ،  $g'(0)$  و  $g''(0)$

(ب) شكّل جدول تغيرات  $g$ .

2. بيّن أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$

في المجال  $]-2, 2[$ ، ثم استنتج إشارة  $g(x)$ .

3. أحسب  $g'(x)$ ، ثم بيّن أن:  $a = -3$  و  $b = 3$

II- الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = (x^4 - 6x^2 + 12x)$

(أ) بيّن أنه، من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = 4g(x)$ .

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$ ، وشكّل جدول تغيراتها.

2. بيّن أن  $f(\alpha) = -3\alpha(\alpha - 3)$ ، ثم احصر  $f(\alpha)$ .

III- الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $k(x) = f(-|x|)$ . وليكن  $(C_k)$  تمثيلها البياني

1. تحقق أن  $k$  زوجية.

2. دون دراسة تغيرات  $k$ ، استنتج جدول تغيراتها.

3. هل  $k$  قابلة للإشتقاق عند 0؟ علّل إجابتك.

### التمرين 38

دالة عددية جدول تغيراتها التالي

| x     | $-\infty$ | -2 | -1        | 2         | $+\infty$ |           |
|-------|-----------|----|-----------|-----------|-----------|-----------|
| f'(x) | +         | 0  | -         | -         | 0         | +         |
| f(x)  | $-\infty$ | -2 | $-\infty$ | $+\infty$ | 2         | $+\infty$ |

نفرض أن  $f(x)$  تكتب على الشكل:  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$  حيث  $a$ ،  $b$ ،  $c$  أعداد حقيقية.

(1) أحسب  $f'(x)$  بدلالة  $a$  و  $c$

(2) اعتماداً على جدول التغيرات للدالة  $f$ :

أ) عين الأعداد الحقيقية  $a, b, c$

ب) عين  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  وفسر النتيجة ببيان.

ج) قارن بين صورتين العددين  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{3}{4}$  بالدالة  $f$  معللا اجابتك.

3) نأخذ فيما يلي أن :  $a = b = c = 1$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

أ) بين أن عندما يؤول  $x$  إلى  $(-\infty)$  و  $(+\infty)$  فإن  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب  $(\Delta)$  معادلته  $y = x + 1$ .  
ب) أدرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta)$ .

ج) أثبت أن النقطة  $\omega(-1; 0)$  مركز تناظر للمنحنى  $(C_f)$ .

د) أرسم المستقيمات المقاربة للمنحنى  $(C_f)$  ثم أرسم المنحنى  $(C_f)$ .

هـ) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد حلول المعادلة :  $f(x) = m + 2$ .

### التمرين 39

I- نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{3\}$  بـ :  $g(x) = ax + b - \frac{1}{x-3}$

حيث  $a$  و  $b$  عددين حقيقيين و ليكن  $(C)$  تمثيلها البياني .

1) عين كل من  $a$  و  $b$  علما أن :

$(C)$  يمر بالنقطة  $A(2; 1)$  ويقبل في هذه النقطة مماسا موازيا لحامل محور الفواصل .

2) بين أن النقطة  $I(3; 3a + b)$  مركز تناظر للمنحنى  $(C)$ .

II- نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{3\}$  بـ :  $f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 7}{x-3}$

$(C_f)$  تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1) بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R} - \{3\}$  ،  $f(x) = g(x)$ .

2) أدرس تغيرات الدالة  $f$ .

3) احسب  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (-x + 2)]$  ماذا تستنتج ؟

4) أدرس الوضع النسبي  $(C_f)$  والمستقيم المقارب المائل  $(\Delta)$

5) بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما 3 يطلب تعيين معادلتيهما

6) أرسم المستقيم  $(\Delta)$  و المنحنى  $(C_f)$ .

7) باستعمال المنحنى  $(C_f)$  حدد حسب قيم الوسيط  $m$  عدد حلول المعادلة :  $f(x) = 3x + m$ .

## التمرين 40

- $f$  دالة عددية معرفة على المجال  $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = |x| + \sqrt{x^2 - 1}$
- واليك (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .
- أدرس شفعية الدالة  $f$  ثم احسب نهاية الدالة  $f$  عند  $+\infty$
  - بين أن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.
  - أدرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  عند 1 من اليمين وفسر النتيجة بيانيا.
  - أدرس إتجاه تغير  $f$  على  $[1; +\infty[$  ثم استنتج إتجاه تغيراتها على  $]-\infty; -1]$  وشكل جدول تغيراتها
  - بين أن (C) يقطع المستقيم ذي المعادلة:  $2y = 5$  في نقطة وحيدة فاصلتها  $\alpha$  حيث:  $1 < \alpha < 2$
  - أرسم المستقيمت المقاربة والمنحنى (C).

## التمرين 41: بكالوريا 1980

- نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1; 3\}$  ب:  $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3}$
- يرمز  $\mathcal{C}$  إلى المنحني الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- أدرس تغيرات الدالة  $f$ . استنتج معادلة لكل من المستقيمين المقاربين للمنحني  $\mathcal{C}$ .
  - أكتب معادلة لمماس المنحني  $\mathcal{C}$  عند نقطته ذات الفاصلة 5.
  - أثبت أن المستقيم ذي المعادلة  $x = 1$  هو محور تناظر للمنحني  $\mathcal{C}$ . أرسم المنحني  $\mathcal{C}$ .
  - نعتبر الدالة  $f_m$  المعرفة ب:  $f_m(x) = \frac{x^2 - mx - 15}{x^2 - mx - 3}$  حيث  $m$  وسيط حقيقي.
- أ- أدرس تغيرات الدالة  $f_m$  واستنتج المستقيمين المقاربين لمنحنى  $\mathcal{C}_m$ .
- ب- بين أنه توجد نقطة وحيدة تنتمي إلى كل المنحنيات  $\mathcal{C}_m$ .
- ج- ما هو المنحني الذي يشمل النقطة ذات الإحداثيتين (4;1) ؟

## التمرين 42: بكالوريا 1997

- لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$  ب:  $f(x) = \frac{4x^2 - 5x}{2x^2 - 5x + 2}$
- نسمي  $\mathcal{C}_f$  المنحني الممثل لها في معلم متعامد ومتجانس.
- 1 عين الأعداد الحقيقية  $a$ ،  $b$  و  $c$ ، بحيث من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$

$$f(x) = a + \frac{b}{2x-1} + \frac{b}{x-2}$$

- 3) أدرس تغيرات الدالة  $f$  ثم أكتب معادلة لكل من المستقيمت المقاربة للمنحني  $\mathcal{C}_f$ .

- (4) أكتب معادلة لمماس المنحني  $C_f$  عند النقطة ذات الفاصلة 0 .  
 (5) عين إحداثيات نقطتي تقاطع المنحني  $C_f$  وحامل محور الفواصل .  
 (6) أرسم المنحني .

### التمرين 43: بكالوريا 1997

(1) لتكن الدالة العددية  $f$  والمعرفة  $\mathbb{R} - \{-1\}$  كمايلي:  $f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2}$

نسمي  $(C)$  المنحني الممثل لها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- بين أن أنه من أجل كل  $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$  ،  $f'(x) = \frac{2(x+2)(x^2+x+1)}{(x+1)^3}$

2- أدرس تغيرات الدالة  $f$ .

3- أكتب معادلة لكل من المستقيمين المقاربين للمنحني  $(C)$

4- بين أن  $(C)$  يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $[-0,37; -0,25]$   $x_0 \in$

5- أكتب معادلة مماس المنحني  $(C)$  عند النقطة التي فاصلتها 0.

6- أرسم المنحني  $(C)$

7- لتكن المعادلة:  $2x^3 + (7-m)x^2 + 2(4-m)x + 2-m = 0 \dots (e)$  حيث  $m$  وسيط حقيقي و  $x$  هو المجهول

أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  فإن  $(e)$  تكافئ المعادلة  $f(x) = m$  .

ب- أستعمل المنحني  $(C)$  لدراسة حسب قيم  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة  $(e)$

### التمرين 44: بكالوريا 1997

لتكن الدالة العددية  $f$  والمعرفة  $\mathbb{R} - \{-1\}$  كمايلي:  $f(x) = \frac{x^2(x+2)}{(x+1)^2}$

نسمي  $(C_f)$  المنحني الممثل لها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) عيّن الأعداد الحقيقية  $\alpha, \beta, \gamma$  بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-1\}$  .

$$f(x) = \alpha x + \frac{\beta}{(x+1)} + \frac{\gamma}{(x+1)^2}$$

2) أدرس تغيرات الدالة  $f$ .

3) عيّن المستقيمين المقاربين للمنحني  $(C_f)$  .

أدرس وضعية المنحني  $(C_f)$  بالنسبة لمستقيمه المقارب المائل .

أحسب إحداثيات نقطتي تقاطع المنحني  $(C_f)$  مع حامل محور الفواصل

4) أكتب معادلة المماس  $(\Delta)$  للمنحني  $(C_f)$  في النقطة التي فاصلتها 1.

5) أنشئ المماس والمنحني  $(C_f)$

## التمرين 45

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = -x + \frac{x-2}{x^2+1}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

(1) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

(2) بين أن  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  وأن  $f'(x) = \frac{-x(x-1)(x^2+x+4)}{(x^2+1)^2}$ .

(3) استنتج اتجاه تغيرات الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) بين أن المستقيم  $(D): y = -x$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  ثم حدد وضعية  $(C_f)$  بالنسبة لـ  $(D)$ .

(5) عين معادلة المماس لـ  $(C_f)$  عن النقطة التي فاصلتها -1، ثم استنتج قيمة تقريبية لـ  $f(-1.25)$ .  
(6) أرسم  $(D)$  و  $(C_f)$ .

(7) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  و  $(C_g)$  تمثيلها البياني. إذا علمت أن  $(C_g)$  هو صورة  $(C_f)$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  عين عبارة  $g(x)$  ثم أرسم  $(C_g)$ .

## التمرين 46

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{2\}$  بـ  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x-2}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني.

I عين الأعداد الحقيقية  $a, b, c$  بحيث يكون لـ  $(C_f)$  مستقيم مقارب معادلته:  $y = x - 3$  ويقبل قيمة حدية عند النقطة التي فاصلتها 3.

II نفرض في كل مايلي: أن  $a = 1$  و  $b = -5$  و  $c = 7$ .

(1) أدرس تغيرات الدالة  $f$ .

(2) أثبت أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مماسين  $(D_1)$  و  $(D_2)$  معامل توجيه كل منهما  $(-3)$ ، يطلب إعطاء معادلتى المماسين  $(D_1)$  و  $(D_2)$ .

(3) أرسم بدقة المماسين  $(D_1)$  و  $(D_2)$  ثم المنحنى  $(C_f)$ .

(4) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة:  $f(x) + 3x - m = 0$ .

(5)  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$  بـ  $g(x) = f(|x|)$ .

(أ) بين أن الدالة زوجية.

(ب) أدرس قابلية اشتقاق  $g$  عند 0.

(ج) بين أنه يمكن إنشاء  $(C_g)$  منحنى  $g$  انطلاقا من  $(C_f)$ ، ثم أرسم  $(C_g)$  في نفس المعلم السابق.

## التمرين 48

I - g دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $g(x) = x^3 - 3x - 3$  يرمز  $(C_g)$  إلى منحنىها البياني  
(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) أثبت أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حداً وحيداً  $\alpha$  من المجال  $]2,1; 2,2[$  ، ثم استنتج إشارة  $g(x)$  .  
(3) x عدد حقيقي كفي من  $\mathbb{R}$ ؛ احسب  $g(-x) + g(x)$  ، ثم فسّر النتيجة بيانياً .

II - f دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{-1; +1\}$  بـ :  $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$  يرمز  $(C_f)$  إلى منحنىها البياني

(1) بيّن - من أجل كل x من  $\mathbb{R} - \{-1; +1\}$  :  $f'(x) = \frac{2x \cdot g(x)}{(x^2 - 1)^2}$

(2) ادرس تغيرات الدالة f .

(3) أثبت أن  $f(\alpha) = 3\alpha$  ، و استنتج حصراً لـ  $f(\alpha)$  .

(4) برهن أن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = 2x$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$

- ادرس وضعيّة  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$

(5) بيّن أنه يوجد مماسان لـ  $(C_f)$  يوازيان  $(\Delta)$  . (يطلب إعطاء فاصلتي نقطتي التماس فقط).

(6) أنشئ المنحني  $(C_f)$  .

(7) ناقش بيانياً ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة :

$$2x^3 - mx^2 + m + 3 = 0$$

III - h دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{-1; +1\}$  بـ :  $h(x) = \frac{2|x|^3 + 3}{x^2 - 1}$

(1) أثبت أن h دالة زوجية .

(2) بيّن أنه يمكن استنتاج  $(C_h)$  من  $(C_f)$  ، ثم أنشئه في نفس المعلم .

## التمرين 49

f دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$  بـ :  $f(x) = |x+1| + \frac{x}{x^2 - 1}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم

متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

1. ا. احسب النهايات عند أطراف مجال التعريف .

ب. اكتب  $f(x)$  دون رمز القيمة المطلقة .

2. ا. احسب  $f'(x)$  و ادرس إشارته .

ب. شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3. ا. بيّن أن المستقيمين  $(\Delta): y = x + 1$  و  $(\Delta'): y = -x - 1$  مقاربان للمنحني  $(C_f)$  .

(ب) ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى كل من  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$ .

(ج) بيّن أن المنحني  $(C_f)$  يقطع محور الفواصل في نقطتين إحداهما فاصلتها  $\alpha$  في المجال  $]0,5;1[$ ، و الثانية فاصلتها  $\beta$  في المجال  $]-2;-1,5[$ .

(د) أنشئ المنحني  $(C_f)$ .

4. يُعطى المستقيم  $(D_m)$  ذو المعادلة  $y = mx + 1$ ، حيث  $m$  وسيط حقيقي.

(أ) بيّن أنه عندما يتغير  $m$  في  $\mathbb{R}$ ، فإن  $(D_m)$  يدور حول نقطة يطلب تعيينها.

(ب) ناقش بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$ ، عدد حلول المعادلة  $|x+1| + \frac{x}{x^2-1} - mx = 1$ .

## التمرين 50

دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  ب:  $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$  و  $(C_f)$  منحنىها في  $M^3(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. (أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

(ب) بيّن أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

1.2 (أ) بيّن أنه، مهما كان  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $f'(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$ .

(ب) برهن أنه، من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $f'(x) < 0$ .

3. شكل جدول تغيرات  $f$ .

بيّن أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = 0$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

4. عيّن إحداثيّ نقطة تقاطع  $(C_f)$  مع محور الترتيب، ثم أنشئ المنحني  $(C_f)$ .

## التمرين 51

I (أ) الدالة المعرفة على المجال  $[-1; +\infty[$  كمايلي:  $g(x) = ax^3 - 3x + b$  و  $(C_g)$  هو تمثيلها البياني  
1 (أ) عين العددين الحقيقيين  $a, b$  علماً أن  $(C_g)$  يقبل مماساً معادلة  $y = -6$  عند النقطة ذات الفاصلة 1

2 (أ) ادرس تغيرات الدالة  $g$ ، ثم شكل جدول تغيرات  $g$

3 (أ) بين أن المعادلة:  $x^3 - 3x - 4 = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha \in ]2; 2,25[$  ثم استنتج إشارة  $g(x)$

II (أ) دالة معرفة على  $]-1; 1[ \cup ]1; +\infty[$  ب:  $f(x) = \frac{x^2(x+2)}{x^2-1}$  واليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني

1 (أ) احسب نهايات  $f$  عند حدود مجال التعريف

2 (أ) بين أن  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]-1; 1[ \cup ]1; +\infty[$ ، ثم احسب  $f'(x)$

(ب) تحقق أن  $f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(x^2-1)^2}$  و استنتج إشارته، ثم ارسم جدول تغيرات  $f$

$$3) \text{ بيّن أن: } f(\alpha) = \frac{3\alpha^2 + 10\alpha + 8}{2\alpha + 4}, \text{ ثم عيّن حصاراً لـ } f(\alpha)$$

5) احسب  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (x+2))$  ، ثم استنتج أن  $(C_f)$  يقبل مقارب مائل  $(\Delta)$  يطلب تعيين معادلة له

6) أدرس الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  والمستقيم  $(\Delta)$  .

7) أنشئ المنحنى  $(\Delta)$  والمستقيم  $(C_f)$  .

## التمرين 52

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = \frac{(x+a)^2}{x^2+b}$  ، حيث :  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان غير معدومين.

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس  $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$

1- عين العددين  $a$  و  $b$  إذا علمت أن معادلة المماس  $(\Delta)$  عند النقطة فاصلتها 0 هي :  $y = 2x + 1$

2- أثبت أن المستقيم معادلته :  $y = 1$  مستقيم مقارب لمنحنى الدالة  $f$ .

3- بوضع :  $a = b = 1$

أ- أثبت من أجل كل عدد حقيقي  $x$  أن :  $f'(x) = \frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

ب- عين اتجاه تغير الدالة  $f$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج- حدد الوضعية النسبية لمنحنى الدالة  $f$  و المماس  $(\Delta)$ ، ماذا يمكن القول عن النقطة  $A(0,1)$  ؟

د- بين أن النقطة  $A(0,1)$  مركز تناظر للمنحنى  $(C_f)$  .

هـ- ارسم المنحنى  $(C_f)$  و المماس  $(\Delta)$  .

4- نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

استنتج جدول تغيرات الدالة  $g$  انطلاقاً من جدول تغيرات الدالة  $f$

# مجلة الرائد في الرياضيات

\*\*\*\*\*

## الحلول

الجزء الاول  
العلوم التجريبية

\*\*\*\*\*

الجزء الثاني  
تقني رياضي

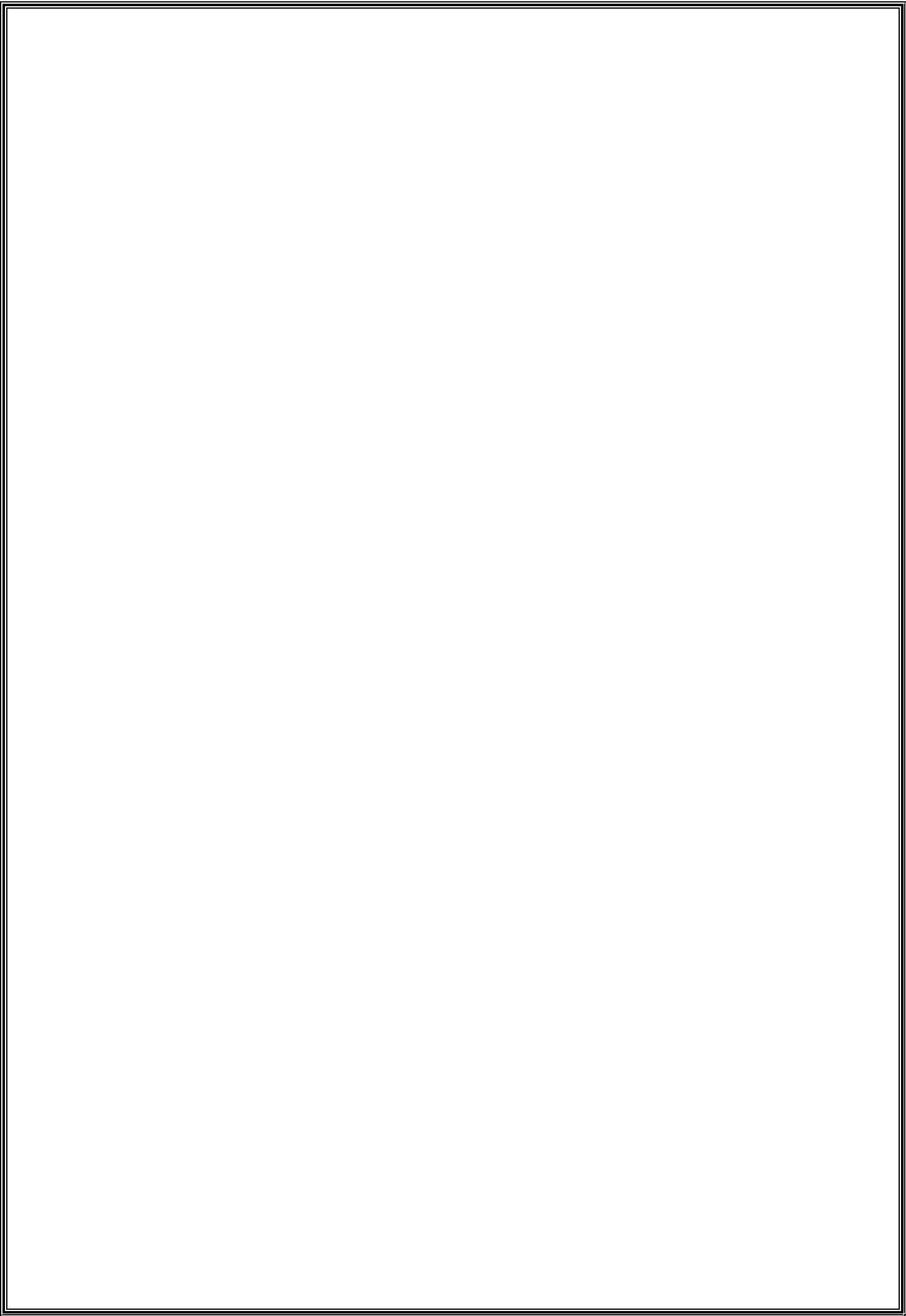
# BAC2020

إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

[larbibelabidi@gmail.com](mailto:larbibelabidi@gmail.com)

العربي الجزائري Facebook





# الجزء الثالث: تمارين البكالوريا

## العلوم التجريبية

التمرين 31 دورة 2014

1-أ) حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

لدينا:  $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$

ومنه:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) = -\infty$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$  وتشكيل جدول تغيراتها.

\* اتجاه التغير الدالة  $g$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  حيث:  $g'(x) = 6x^2 - 8x + 7$

$g'(x) > 0$  لأن  $g'(x)$  يميز العبارة  $6x^2 - 8x + 7$  سالبة ومعامل  $x^2$  موجب ومنه  $g$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$

\* جدول التغيرات

| x       | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|
| $g'(x)$ |           | +         |
| $g(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ |

2-أ) تبين ان المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$

من الجواب السابق الدالة  $g$  مستمرة ومتزايدة تماما

على المجال  $]0,7; 0,8[$  و  $g(0,7) \times g(0,8) < 0$  لأن:

$g(0,7) = -0,37$  و  $g(0,8) = 0,06$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد

وحيد  $\alpha \in ]0,7; 0,8[$  يحقق:  $g(\alpha) = 0$

ب) استنتاج اشارة  $g(x)$  وذلك حسب قيم  $x$

من جدول تغيرات الدالة  $g$  ومن الجواب 2-أ) نستنتج أن:

$x \in ]-\infty; \alpha[$  معناه  $g(x) < 0$  من أجل كل  $x \in ]-\infty; \alpha[$

و  $x \in ]\alpha; +\infty[$  معناه  $g(x) > 0$  من أجل كل  $x \in ]\alpha; +\infty[$

II-1) حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

لدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} = -\infty$

2-أ) تبين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2x^2-2x+1}$

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[ (x+1) + \frac{1-3x}{2x^2-2x+1} \right] = \frac{1}{2} \frac{(x+1)(2x^2-2x+1) + 1-3x}{2x^2-2x+1}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \frac{(x+1)(2x^2-2x+1) + 1-3x}{2x^2-2x+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2(x^3-2x+1)}{2x^2-2x+1} = \frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$$

ب) استنتاج ان المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب مائل  $(\Delta)$  وتعيين معادلة له .

من العبارة:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-3x}{2x^2-2x+1} = 0$  لدينا  $f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2x^2-2x+1}$

وعليه:  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب مائل  $(\Delta)$  معادلته:  $y = \frac{1}{2}(x+1)$ .

**(ج) دراسة الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  و  $(\Delta)$ .**

لدراسة الوضع النسبي لـ  $(C_f)$  و  $(\Delta)$  ندرس إشارة الفرق:  $f(x) - y = \frac{1-3x}{2x^2-2x+1}$  وهي إشارة  $(1-3x)$  لأن المقام موجب تماما و من الجدول المقابل نستنتج مايلي:

| x      | $-\infty$ | $\frac{1}{3}$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|---------------|-----------|
| $1-3x$ | +         | 0             | -         |

\* إذا كان  $x \in ]-\infty; \frac{1}{3}[$  فإن  $(C_f)$  يكون فوق  $(\Delta)$

وإذا كان  $x \in ]\frac{1}{3}; +\infty[$  فإن  $(C_f)$  يكون تحت  $(\Delta)$

\* إذا كان  $x = \frac{1}{3}$  فإن  $(C_f)$  يقطع  $(\Delta)$  في النقطة التي إحداثياتها  $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$

**3-أ) تبين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $f'(x) = \frac{x.g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$ .**

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  حيث:

$$f'(x) = \frac{(3x^2-2)(2x^2-2x+1) - (4x-2)(x^2-2x+1)}{(2x^2-2x+1)^2} = \frac{(2x^4-4x^3+7x^2-4x)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x(2x^3-4x^2+7x-4)}{(2x^2-2x+1)^2} = \frac{x.g(x)}{(2x^2-2x+1)^2} \text{ ومنه:}$$

**(ب) استنتاج إشارة  $f'(x)$  وتشكيل جدول تغيرات الدالة  $f$ .**

\* إشارة  $f'(x)$ : إشارة  $f'(x)$  هي حسب إشارة البسط  $x.g(x)$  لأن المقام دوما موجب. إشارة البسط  $x.g(x)$  هي حسب الجدول التالي:

| x           | $-\infty$ | 0 | $\alpha$ | $+\infty$ |
|-------------|-----------|---|----------|-----------|
| إشارة x     | -         | 0 | +        | +         |
| إشارة g(x)  | -         | - | 0        | +         |
| إشارة f'(x) | +         | 0 | -        | +         |

\* جدول التغيرات

| x     | $-\infty$ | 0 | $\alpha$ | $+\infty$ |
|-------|-----------|---|----------|-----------|
| f'(x) | +         | 0 | -        | +         |
| f(x)  | $-\infty$ | 1 | f(α)     | $+\infty$ |

4) حساب  $f(1)$  وحل المعادلة  $f(x) = 0$  في  $\mathbb{R}$

لدينا:  $f(1) = 0$ .

$f(x) = 0$  معناه  $x^3 - 2x + 1 = 0$  معناه  $x^3 - 2x + 1 = (x-1)(x^2 + x - 1) = 0$  لأن  $f(1) = 0$

معناه  $(x-1) = 0$  أو  $(x^2 + x - 1) = 0$  أي  $x = 1$  أو  $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  أو  $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

ملاحظة: حلول المعادلة  $f(x) = 0$  هي فواصل نقط تقاطع  $(C_f)$  وحامل محور الفواصل.

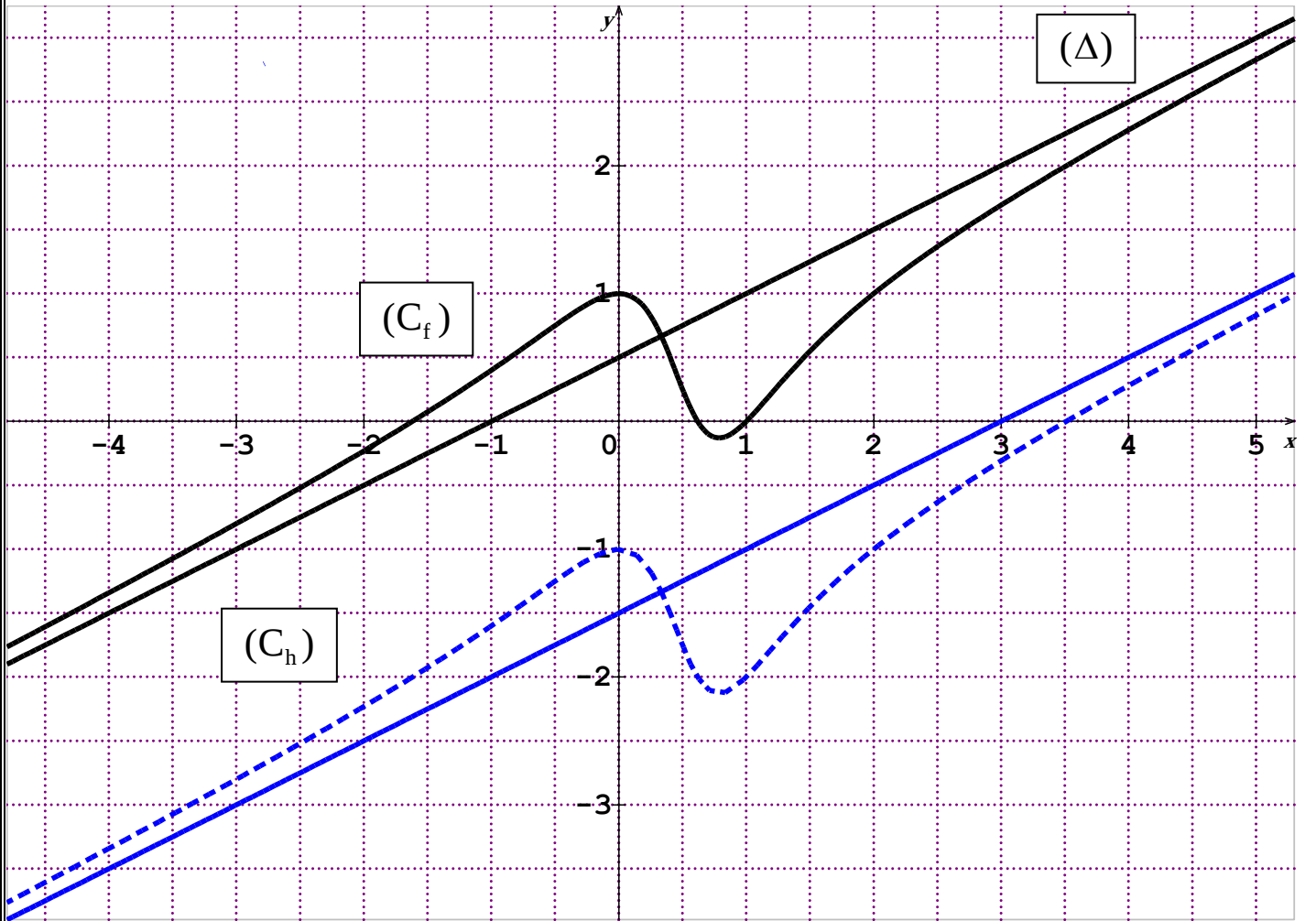
5) إنشاء المستقيم  $(\Delta)$  والمنحنى  $(C_f)$  (يوجد في آخر الحل رفقة المنحنى  $(C_f)$ )

6- أ) التحقق أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $h(x) = f(x) - 2$ .

لدينا:  $h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1} = \frac{(x^3 - 2x + 1) - 2(2x^2 + 2x + 1)}{2x^2 - 2x + 1} = f(x) - 2$

ب) استنتاج أن  $(C_h)$  هو صورة  $(C_f)$  بتحويل نقطي بسيط وتعيينه، ثم رسم  $(C_h)$

من العبارة  $h(x) = f(x) - 2$  نستنتج أن: هو صورة  $(C_f)$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$



## التمرين 32 دورة 2009

I-1 أ) حساب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left( \frac{4}{x+1} \right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left( \frac{4}{x+1} \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -x + \frac{4}{x+1} \right) = +\infty$$

ب) تشكيل جدول التغيرات بقراءة بيانية

| x       | $-\infty$                   | -1 | 0                   |
|---------|-----------------------------|----|---------------------|
| $g'(x)$ | -                           |    | -                   |
| $g(x)$  | $+\infty$<br>↘<br>$-\infty$ |    | $+\infty$<br>↘<br>4 |

2- أ) حساب نهاية f عند  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + \frac{4}{x+1} \right) = +\infty$$

ب) التحقق من أن  $(C_g)$  يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً  $(\Delta)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + \frac{4}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4}{x+1} \right) = 0 \quad \text{لأن } y = x \text{ ذو المعادلة } (\Delta)$$

ج) دراسة تغيرات الدالة g

أتجاه التغير لدينا: g قابلة للإشتقاق على المجال  $[0; +\infty[$  حيث:

$$g'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

$g'(x) = 0$  معناه  $(x-1)(x+3) = 0$  معناه:  $x=1$  أو  $x=-3$  مرفوض  
إشارة المشتق هي حسب إشارة  $x-1$  وعليه جدول تغيرات هو كالتالي:

| x       | 0           | 1 | $+\infty$      |
|---------|-------------|---|----------------|
| $g'(x)$ | -           | + |                |
| $g(x)$  | 4<br>↘<br>3 |   | ↗<br>$+\infty$ |

II-1 أ) حساب  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$  والاستنتاج

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h + \frac{4}{h+1} - 4}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h^2 - 3h}{h(h+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h-3}{h+1} = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-h + \frac{4}{h+1} - 4}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-h^2 - 5h}{h(h+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-h - 5}{h+1} = -5$$

نستنتج أن  $k$  ليست قابلة للإشتقاق عند  $0$  لأن العدد  $(-3)$  لا يساوي  $(-5)$ .

**(ب) اعطاء تفسيراً هندسياً للنتيجة**

$k$  قابلة للإشتقاق من اليمين وقابلة للإشتقاق من اليسار فإن منحنى الدالة  $k$  يقبل نصفين مماسين عند النقطة التي فاصلتها  $0$ . النقطة التي احداثياتها  $(0; 4)$  هي نقطة زاوية لمنحنى الدالة  $k$

**(2) كتابة معادلتين المماسين  $(\Delta_1)$  و  $(\Delta_2)$**

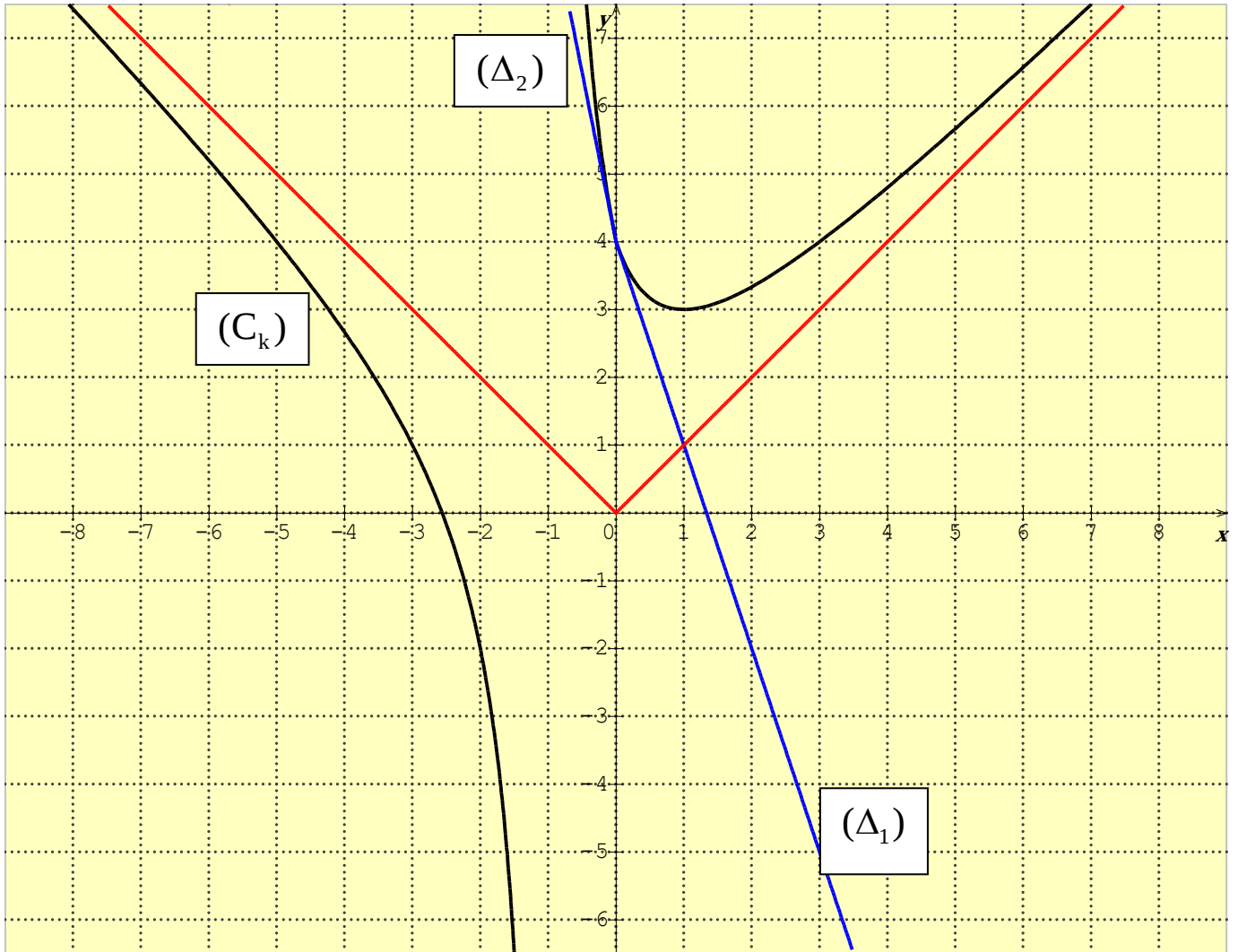
\*  $(\Delta_1)$  هو نصف المماس عند  $x_0 = 0$  حيث  $x_0 \geq 0$  لدينا:  $y = k'(0)(x - 0) + k(0)$  أي  $y = -3x + 4$

\*  $(\Delta_2)$  هو نصف المماس عند  $x_0 = 0$  حيث  $x_0 \leq 0$  لدينا:  $y = k'(0)(x - 0) + k(0)$  أي  $y = -5x + 4$

**(3) رسم كلا من  $(\Delta_1)$  و  $(\Delta_2)$  والمنحنى  $(C_k)$**

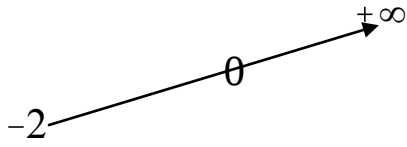
لرسم المنحنى  $(C_k)$  نلاحظ: إذا كانت  $x \leq 0$  فإن:  $k(x) = f(x)$  ومنه:  $(C_f) = (C_k)$

إذا كانت  $x \geq 0$  فإن:  $k(x) = g(x)$  ومنه:  $(C_g) = (C_k)$



## التمرين 33 دورة 2008

| x       | -1 | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---------|----|----------|-----------|
| $g'(x)$ |    |          |           |
| $g(x)$  |    |          |           |



**1-أ) تشكيل جدول تغيرات الدالة g بقراءة بيانية**

من البيان يمكن استنتاج الجدول المقابل

**تحديد  $g(0)$  وإشارة  $g(0.5)$**

من البيان لدينا  $g(0) = -1$  وإشارة  $g(0.5) > 0$

**ب) تعليل وجود عدد حقيقي  $\alpha \in ]0; \frac{1}{2}[$  يحقق  $g(\alpha) = 0$**

g مستمرة ومتزايدة تماما على  $[0, \frac{1}{2}]$  و  $g(0) \times g(\frac{1}{2}) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha \in ]0; \frac{1}{2}[$  يحقق  $g(\alpha) = 0$

**ج) استنتاج إشارة  $g(x)$  على المجال  $]-1, +\infty[$**

إذا كانت  $x \in ]-1; \alpha[$  فإن  $g(x) \in ]-2; 0[$  ومعناه  $g(x) < 0$

و إذا كانت  $x \in ]\alpha; +\infty[$  فإن  $g(x) \in ]0; +\infty[$  ومعناه  $g(x) > 0$

**2-أ) التحقق أن  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$**

f قابلة للإشتقاق على المجال  $]-1, +\infty[$  حيث:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 6x + 3)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^3 + 3x^2 + 3x - 1)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 6x + 3)(x+1) - 2(x^3 + 3x^2 + 3x - 1)}{(x+1)^3} = \frac{g(x)}{(x+1)^3} \text{ ومنه}$$

**ب) تعيين  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$  دون حساب**

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{(\alpha+1)^3} = 0 \text{ لدينا}$$

من النتيجة السابقة نستنتج أن للمنحنى  $(\Gamma)$  مماسا يوازي حامل محور الفواصل معادلته  $y = f(\alpha)$

**ج) حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)]$ ،  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$**

لدينا:  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$  . التفسير البياني لهذه النتيجة أن المنحنى  $(\Gamma)$  مقارب يوازي

حامل محور الترتيب معادلته:  $x = -1$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+1)^2} = 0$  التفسير البياني لهذه النتيجة أن المنحنى  $(\Gamma)$  مقارب

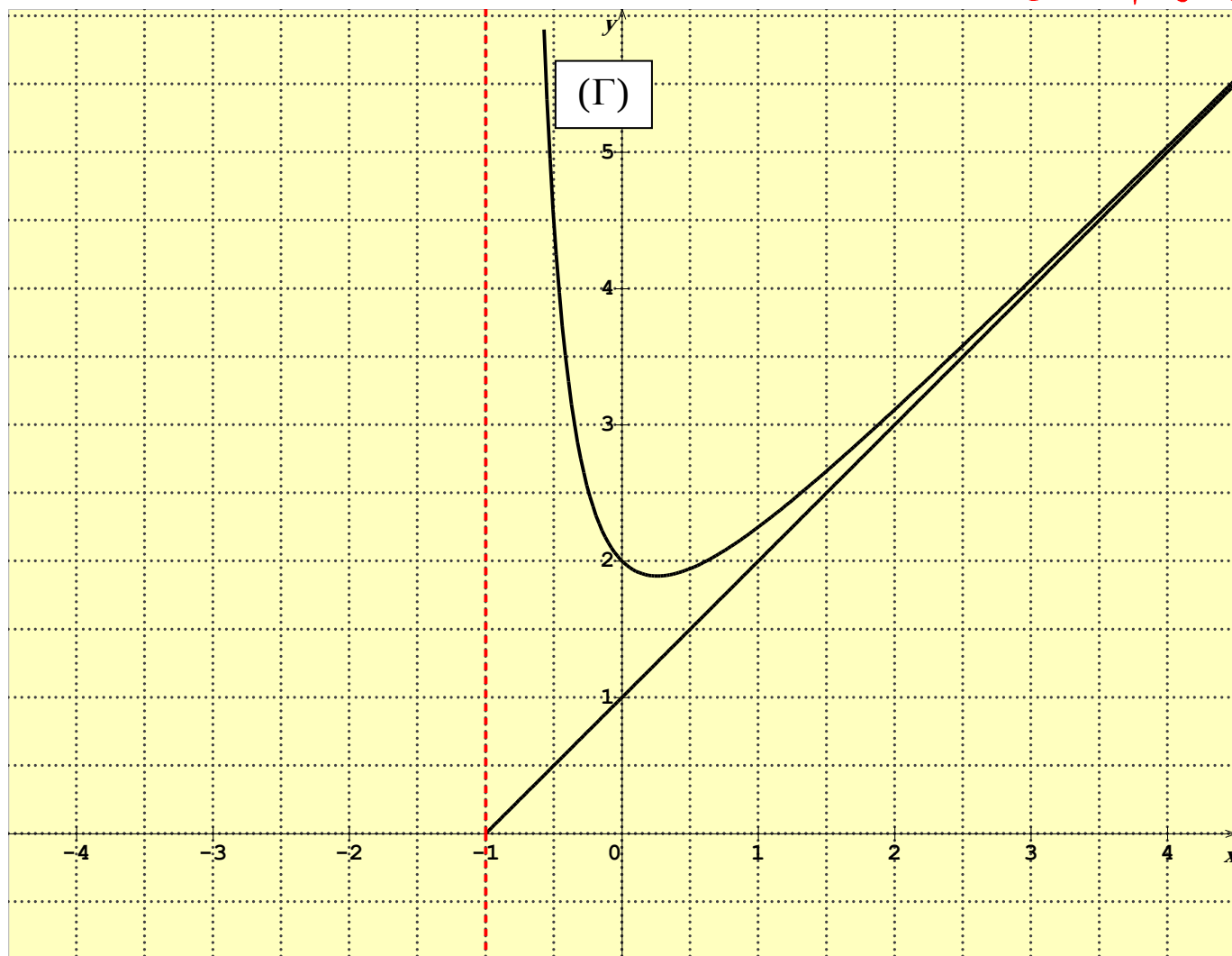
مائل معادلته:  $y = x + 1$  في جوار  $+\infty$

**3-أ) تعيين مدور  $f(\alpha)$  إلى  $10^{-2}$**

لدينا:  $f(0,26) = 1,89$  ومنه مدور  $f(\alpha)$  إلى  $10^{-2}$  هو  $1,89$   
 إشارة  $f'(x)$  هي حسب إشارة  $g(x)$  وعليه جدول تغيرات الدالة  $f$  يكون كالآتي:

| x       | -1        | $\alpha$    | $+\infty$ |
|---------|-----------|-------------|-----------|
| $f'(x)$ | -         | 0           | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $f(\alpha)$ | $+\infty$ |

ب) رسم المنحنى  $(\Gamma)$





I-1) دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $g'(x) = 3x^2 + 6$

لدينا:  $g'(x) > 0$  وعليه تكون الدالة  $g$  متزايدة تماماً على  $\mathbb{R}$ .

2) تبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حداً وحيداً  $\alpha$  حيث  $\alpha \in ]-1,48; -1,47[$

الدالة  $g$  مستمرة ومتزايدة تماماً على  $\mathbb{R}$  و  $g(-1,48) < 0$  و  $g(-1,47) > 0$  وعليه توجد قيمة وحيدة  $\alpha$  تحقق:  $g(\alpha) = 0$  حيث  $-1,48 < \alpha < -1,47$  وذلك حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

استنتاج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ .

من الجواب 1 و 2 السابقين نستنتج أن إشارة  $g(x)$  هي:

من أجل كل  $x \in ]-\infty; \alpha[$  فإن:  $g(x) < 0$  ومن أجل كل  $x \in ]\alpha; +\infty[$  فإن:  $g(x) > 0$

II-1) حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

أ- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 2)^2}$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  لدينا:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 2) - 2x(x^3 - 6)}{(x^2 + 2)^2} = \frac{x[3x(x^2 + 2) - 2(x^3 - 6)]}{(x^2 + 2)^2} = \frac{x[3x^3 + 6x - 2x^3 + 12]}{(x^2 + 2)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2 + 2)^2}$$

دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  وتشكيل جدول تغيراتها

من العبارة  $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 2)^2}$  فنستنتج أن إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $xg(x)$  وحسب الجدول

|         |   |          |   |   |   |
|---------|---|----------|---|---|---|
| $x$     | - | $\alpha$ | + | 0 | + |
| $g(x)$  | - | 0        | + |   | + |
| $x$     | - | 0        | - | 0 | + |
| $xg(x)$ | + | 0        | - | 0 | + |

جدول تغيرات الدالة  $f$  يكون كمايلي:

|       |                                                                                      |          |   |           |   |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------|----------|---|-----------|---|
| x     | $-\infty$                                                                            | $\alpha$ | 0 | $+\infty$ |   |
| f'(x) | +                                                                                    | 0        | - | 0         | + |
| f(x)  |  |          |   |           |   |

## 2-أ) تبيان أن المستقيم $(\Delta)$ إذا المعادلة $y = x$ مقارب مائلا للمنحنى $(C_f)$ .

المستقيم  $(\Delta)$  إذا المعادلة  $y = x$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  معناه:  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = 0$

$$\text{لدينا: } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 6}{x^2 + 2} - x = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{-2x - 6}{x^2 + 2} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x} = 0$$

## ب) دراسة الوضع النسبي لـ $(C_f)$ و $(\Delta)$

لدراسة الوضع النسبي لـ  $(C_f)$  و  $(\Delta)$  ندرس إشارة الفرق:  $f(x) - y = \frac{-2x - 6}{x^2 + 2}$

لدينا:  $f(x) - y = 0$  من أجل  $x = -3$  ويكون  $(C_f)$  يتقطع  $(\Delta)$  في نقطة إحداثياتها  $(-3; -3)$

$f(x) - y > 0$  من أجل كل  $x \in ]-\infty; -3[$  ويكون  $(C_f)$  فوق  $(\Delta)$  في هذا المجال

$f(x) - y < 0$  من أجل كل  $x \in ]-3; +\infty[$  ويكون  $(C_f)$  تحت  $(\Delta)$  في هذا المجال :

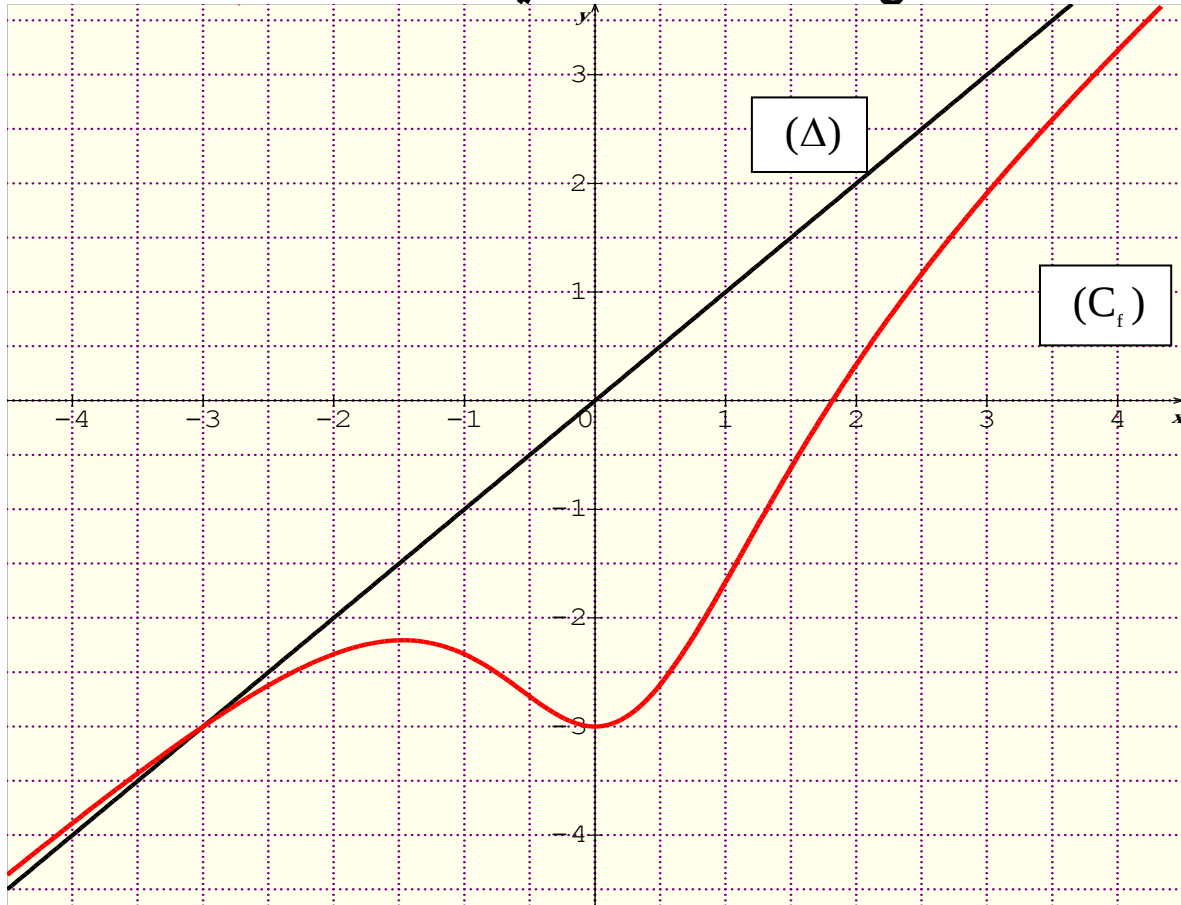
## 3) تبيان أن $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ ثم استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$

لدينا:  $f(\alpha) = \frac{\alpha^3 - 6}{\alpha^2 + 2}$  والمطلوب هو  $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$  وعليه نبين أن  $f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha = 0$

$$f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha = \frac{\alpha^3 - 6}{\alpha^2 + 2} - \frac{3\alpha}{2} = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha - 12}{2(\alpha^2 + 2)} = \frac{-g(\alpha)}{2(\alpha^2 + 2)} = 0 \text{ لأن } g(\alpha) = 0 \text{ من الجواب I-2}$$

## 4) رسم المستقيم $(\Delta)$ والمنحنى $(C_f)$

ملاحظة: المنحنى  $(C_f)$  يتقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها  $x_0 = \sqrt[3]{6} \approx 1,81$



## 1) دراسة تغيرات الدالة f .

$$f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}} \text{ معرفّة على } ]-1; +\infty[ \text{ ب:}$$

\* النهايات

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{2}{\sqrt{x+1}} = +\infty \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{\sqrt{x+1}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{x+1} = 0^+ \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} -1 - \frac{2}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} -\frac{2}{\sqrt{x+1}} = -\infty$$

\* اتجاه التغير

$$f'(x) = 1 + \frac{2(\sqrt{x+1})'}{(\sqrt{x+1})^2} \text{ لدينا: f قابلة للإشتقاق على المجال } ]-1; +\infty[ \text{ حيث:}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(\sqrt{x+1})(x+1)} \text{ وعليه } (\sqrt{x+1})' = \frac{1}{2(\sqrt{x+1})} \text{ لاحظ أن:}$$

$$\text{لدينا } f'(x) = 1 + \frac{1}{(\sqrt{x+1})(x+1)} > 0 \text{ نستنتج أن الدالة f متزايدة تماما على } ]-1; +\infty[$$

وعليه جدول تغيراتها هو:

|       |           |           |
|-------|-----------|-----------|
| x     | -1        | $+\infty$ |
| f'(x) |           | +         |
| f(x)  |           | $+\infty$ |
|       | $-\infty$ |           |

## 2-أ) تبيان أن (C<sub>f</sub>) يقبل مقاربين أحدهما (D) : y = x .

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty \text{ ومنه المنحنى (C}_f\text{) مقارب يوازي حامل محور الترتيب معادلته: } x = -1$$

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{\sqrt{x+1}} = 0 \text{ المنحنى (C}_f\text{) مقارب مائل معادلته: } y = x \text{ في جوار } +\infty$$

ب) دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C<sub>f</sub>) و (D) .

$$\text{لدراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C}_f\text{) و (D) ندرس إشارة الفرق: } [f(x) - x] = -\frac{2}{\sqrt{x+1}}$$

$$\text{نلاحظ أن: } -\frac{2}{\sqrt{x+1}} < 0 \text{ من أجل كل } x \text{ من المجال } ]-1; +\infty[ \text{ وعليه (C}_f\text{) يكون تحت (D) .}$$

## 3-أ) تبيان أن (C<sub>f</sub>) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x<sub>0</sub> حيث 1,3 < x<sub>0</sub> < 1,4

من الجواب 1) الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال [1,3; 1,4].

و  $f(1,3) \times f(1,4) < 0$  لأن:  $f(1,3) = -0,01$  و  $f(0,8) = 0,01$  وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد  $x_0 \in ]1,3; 1,4[$  يحقق:  $f(x_0) = 0$  والتفسير الهندسي هو ان  $(C_f)$  يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $x_0$  حيث  $1,3 < x_0 < 1,4$ .

**ب) كتابة معادلة  $(\Delta)$  مماسا للمنحنى  $(C_f)$  في نقطة تقاطع  $(C_f)$  مع حامل محور الترتيب.**

نقطة تقاطع  $(C_f)$  مع حامل محور الترتيب فاصلتها معدومة وعليه نكتب معادلة المماس  $(\Delta)$  عند النقطة ذات الفاصلة 0. ومنه:  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$  أي  $y = 2x - 2$  لأن:  $f'(0) = 2$  و  $f(0) = -2$

**ج) رسم  $(\Delta)$  و  $(C_f)$  في الجواب القادم**

4-أ) تبيان كيفية إنشاء  $(C_g)$  انطلاقا من  $(C_f)$  ثم أرسمه.

لدينا:  $g$  دالة معرفة على المجال  $]-1; +\infty[$ :  $g(x) = |f(x)|$ :

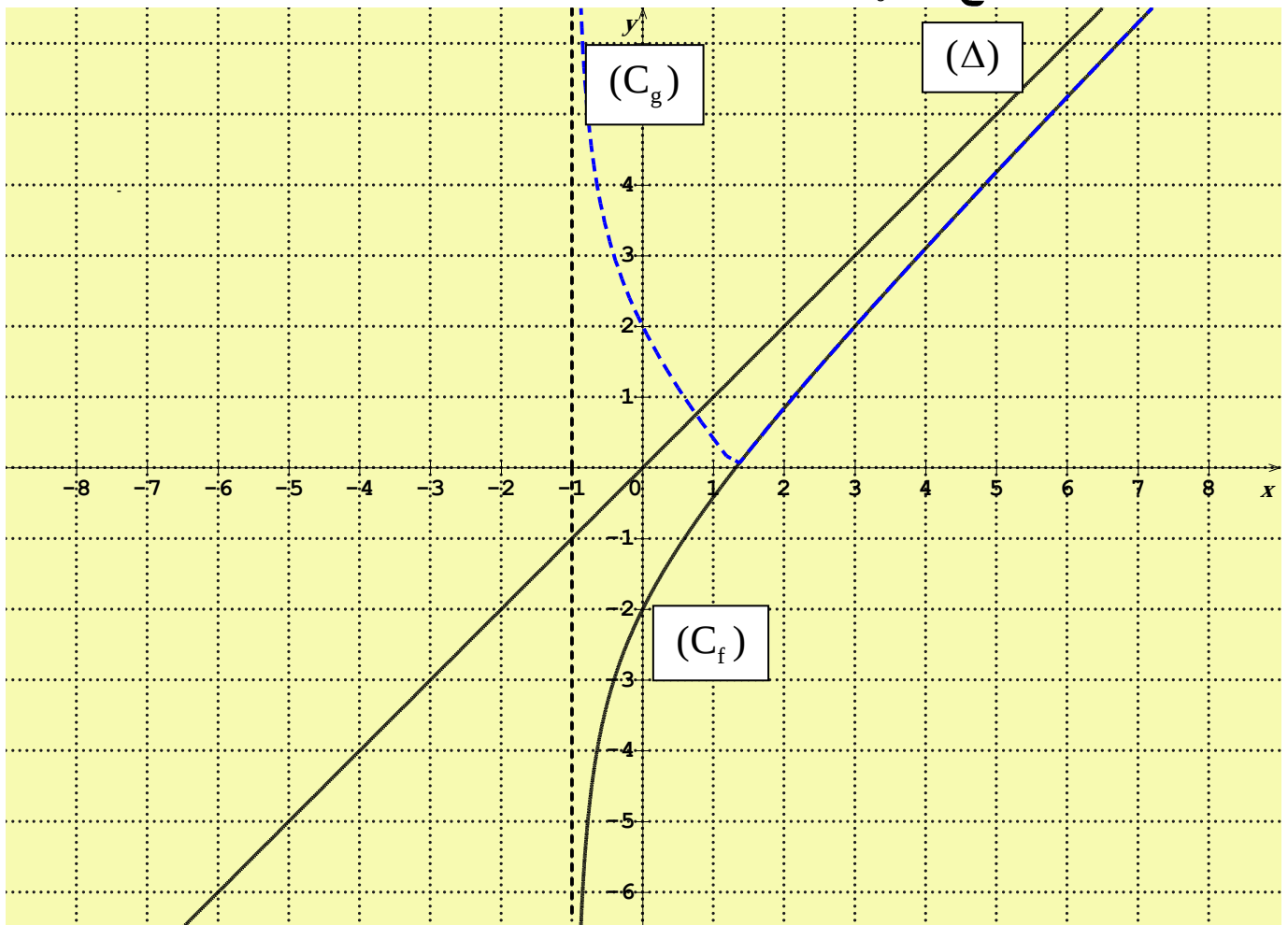
من الجواب 3- أ) نستنتج أن إشارة  $f(x)$  هي:  $f(x) < 0$  معناه  $]-1; x_0[$  و  $f(x) \geq 0$  معناه  $]x_0; +\infty[$

$$g(x) = \begin{cases} -f(x); x \in ]-1; x_0[ \dots\dots(1) \\ f(x); x \in ]x_0; +\infty[ \dots\dots(2) \end{cases}$$

وعليه يمكن كتابة عبارة  $g(x)$  كمايلي:

من العبارة (1) نستنتج أن  $(C_g)$  هو نظير  $(C_f)$  بالنسبة لحامل محور الفواصل على المجال  $]-1; x_0[$

من العبارة (2) نستنتج أن  $(C_g)$  ينطبق على  $(C_f)$  على المجال  $]x_0; +\infty[$ .



**ب) المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة:  $g(x) = m^2$**

لدينا: المعادلة التالية  $g(x) = m^2$  تكافئ الجملة  $\begin{cases} y = m^2 \\ y = g(x) \end{cases}$

من الجملة السابقة نستنتج أن حلول المعادلة  $g(x) = m^2$  هي فواصل نقط تقاطع المنحنى  $(C_g)$  والمستقيم ذو المعادلة  $y = m^2$  (يوازي حامل محور الفواصل) من البيان ( المنحنى  $(C_g)$  ) نميز الحالات التالية :

(1)  $m = 0$  المعادلة تقبل حلا وحيدا موجب تماما.

(2)  $0 < m^2 < 2$  أي  $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$  المعادلة تقبل حلا ن موجان تماما.

(3)  $m^2 = 2$  أي  $m = -\sqrt{2}$  أو  $m = \sqrt{2}$  المعادلة تقبل حلا معدوما وحل آخر موجب تماما.

(4)  $m^2 > 2$  أي  $m < -\sqrt{2}$  أو  $m > \sqrt{2}$  المعادلة تقبل حلا ن مختلفان في الإشارة.

### التمرين 36 دورة 2010

1) تبين أن  $f$  دالة فردية.

$f$  دالة فردية معناه من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$  و  $-x \in \mathbb{R}$  :  $f(-x) + f(x) = 0$ .  
لدينا:  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$ :

$$\text{ومنه: } f(-x) + f(x) = -x \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) + x \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) = 0$$

2) اثبات أنه من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$  :  $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$  لدينا:  $f'(x) = 1 \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) + x \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)'$

$$\text{لكن: } \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)' = -\frac{(\sqrt{x^2+1})'}{(\sqrt{x^2+1})^2} = -\frac{2x}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = -\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$\text{ومنه: } f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \left( \frac{x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \right) = 1 + \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

3) دراسة تغيرات الدالة  $f$ .

\* النهايات

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0 : \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0 : \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) = -\infty$$

\* اتجاه التغير

لدينا:  $f$  قابلة للإشتقاق على المجال  $]-1; +\infty[$  حيث:  $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

لدينا  $f'(x) > 0$  نستنتج أن الدالة  $f$  متزايدة تماماً على  $\mathbb{R}$

وعليه جدول تغيراتها هو:

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         |           |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ |

#### 4) كتابة معادلة للمماس $(T)$ لـ $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 0

لدينا:  $y = f'(0)(x-0) + f(0)$  أي  $y = 2x$  لأن:  $f'(0) = 2$  و  $f(0) = 0$

#### 5) دراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(T)$ واستنتاج أن $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

لدراسة وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(T)$  ندرس إشارة الفرق:  $f(x) - y$  حيث  $y = 2x$

$$\text{لدينا: } f(x) - y = x \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) - 2x = -x \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)$$

إشارة الفرق هي حسب إشارة  $-x$  لأن:  $1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$  لاحظ أن  $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} < 1$

وعليه: من أجل كل  $x \in \mathbb{R}_+^*$  يكون  $f(x) - y > 0$  أي  $(C_f)$  يكون فوق  $(T)$

من أجل كل  $x \in \mathbb{R}_+^*$  يكون  $f(x) - y < 0$  أي  $(C_f)$  يكون تحت  $(T)$

من أجل كل  $x = 0$  يكون  $f(x) - y = 0$  أي  $(C_f)$  يقطع  $(T)$  في نقطة المبدأ.

من الدراسة السابقة نستنتج أن  $(C_f)$  يخترق  $(T)$  في نقطة المبدأ

ومنه المبدأ هي نقطة انعطاف للمنحنى  $(C_f)$ .

#### 7) تبين أن المستقيم $(D)$ ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب لـ $(C_f)$ في جوار $+\infty$

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1 \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 0$$

ومنه المنحنى  $(C_f)$  مقارب مائل معادلته:  $y = x + 1$  في جوار  $+\infty$

#### استنتاج معادلة $(D')$ المستقيم المقارب الآخر

$(D')$  المستقيم المقارب الآخر هو نظير المستقيم  $(D)$  بالنسبة للمبدأ لان  $f$  فردية

$$M(x, y) \rightarrow M'(x', y') : \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \text{ بالتحويل القطبي}$$

وعليه معادلة  $(D')$  هي  $-y' = -x' + 1$  أي  $y' = x' - 1$

ومنه المنحنى يقبل مقارب مائل آخر  $(D')$  له معادلة من الشكل:  $y = x - 1$  في جوار  $-\infty$ .

7) رسم  $(D)$  و  $(D')$  و  $(C_f)$  في آخر الحل.

#### 8 - أ) تبين أن الدالة $g$ زوجية.

الدالة  $g$  زوجية معناه من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$  و  $-x \in \mathbb{R}$  :  $g(-x) - g(x) = 0$ .

ومنه:  $|-x| = |x|$  لأن:  $g(-x) - g(x) = |-x| \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) - |x| \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) = 0$

ب) رسم  $(C_g)$  انطلاقاً من  $(C_f)$  في نفس المعلم السابق.

لدينا:  $g(x) = f(x)$  من أجل كل  $x \in \mathbb{R}_+$  وعليه  $(C_g)$  ينطبق على  $(C_f)$  على  $\mathbb{R}_+$   
 $g(x) = f(-x)$  من أجل كل  $x \in \mathbb{R}_-$  وعليه  $(C_g)$  نظير  $(C_f)$  على  $\mathbb{R}_-$  لأن  $g$  زوجية

