مفاتيح الرياضيات

المتتاليات العددية
الاحتمالات

السنة الثالثة ثانوي
جميع الشعب

قواعد أساسية
تمارين نموذجية

مواضيع بكالوريا
للدورات السابقة
مع حلولها المفصلة

﴿ فَلَمَّا رَءَاهُ مُسْتَقِرًّا عِندَهُۥ قَالَ هَٰذَا مِن فَضْلِ رَبِّى لِيَبْلُوَنِىٓ ءَأَشْكُرُ أَمْ أَكْفُرُ ۖ
وَمَن شَكَرَ فَإِنَّمَا يَشْكُرُ لِنَفْسِهِۦ ۖ وَمَن كَفَرَ فَإِنَّ رَبِّى غَنِىٌّ كَرِيمٌ ﴿٤٠﴾ ﴾

﴿ رَبِّ أَوْزِعْنِىٓ أَنْ أَشْكُرَ نِعْمَتَكَ ٱلَّتِىٓ أَنْعَمْتَ عَلَىَّ وَعَلَىٰ وَٰلِدَىَّ وَأَنْ أَعْمَلَ صَٰلِحًا
تَرْضَىٰهُ وَأَصْلِحْ لِى فِى ذُرِّيَّتِىٓ ۖ إِنِّى تُبْتُ إِلَيْكَ وَإِنِّى مِنَ ٱلْمُسْلِمِينَ ﴿١٥﴾ ﴾

إلى روح والدي رحمه الله الذي ضحّى بالنفس و النفيس من أجل وطنه أولا ثمّ من أجل أبنائه ثانيا و مضى إلى ربه دون أن يقطف أيّ من الثمرتين رحمه الله رحمة واسعة وأسكنه فسيح جنته.

إلى الحضن الدافئ و اللمسة الحانية أمي الحبيبة حفظها الله ورعاها وجزاها عني خير ما جزى والدة عن ولدها وألبسها لباس الصحة والعافية.

إلى حبيبة العمر ورفيقة الدرب ومهجة الفؤاد زوجتي وأم أبنائي أكرمها الله وأحسن مثوبتها.

إلى رياحين الدنيا أبنائي وأحبابي وقرة عيني أسامة، محسن ووائل، وإلى كنتي ريمة وحفيدي سامي حفظهم الله جميعا ورزقهم الهُدى والتُقى والعفاف والغِنى والعلم النافع والعمل الصالح وجعلهم ذخرا لأمتهم ووطنهم.

إلى كل حرّ أبيّ يسعى لرفع الغبن والجهل والتخلف عن أمته حتى يعود لهذه الأمة مجدها وعزها التي كانت ترفل فيه يوم كانت خير أمة أُخرجت للناس.

إلى هؤلاء جميعا أهدي هذا العمل المتواضع، سائلا المولى ﷻ أن ينفع به كاتبه وناشره وقارئه.

عبد الكريم واضحي

مُقَدِّمَة

الحمد لله وسلام على عباده الذين اصطفى، أما بعد:

فإنه من دواعي الغبطة والسرور أن أقدم لإخواني الأساتذة وأبنائي الطلبة العنقود الأخير من سلسلة مفاتيح الرياضيات ، ويتضمن هذا الإصدار محورين أساسيين من محاور الرياضيات لطلبة الأقسام النهائية (جميع الشعب) ألا وهما المتتاليات العددية والاحتمالات.

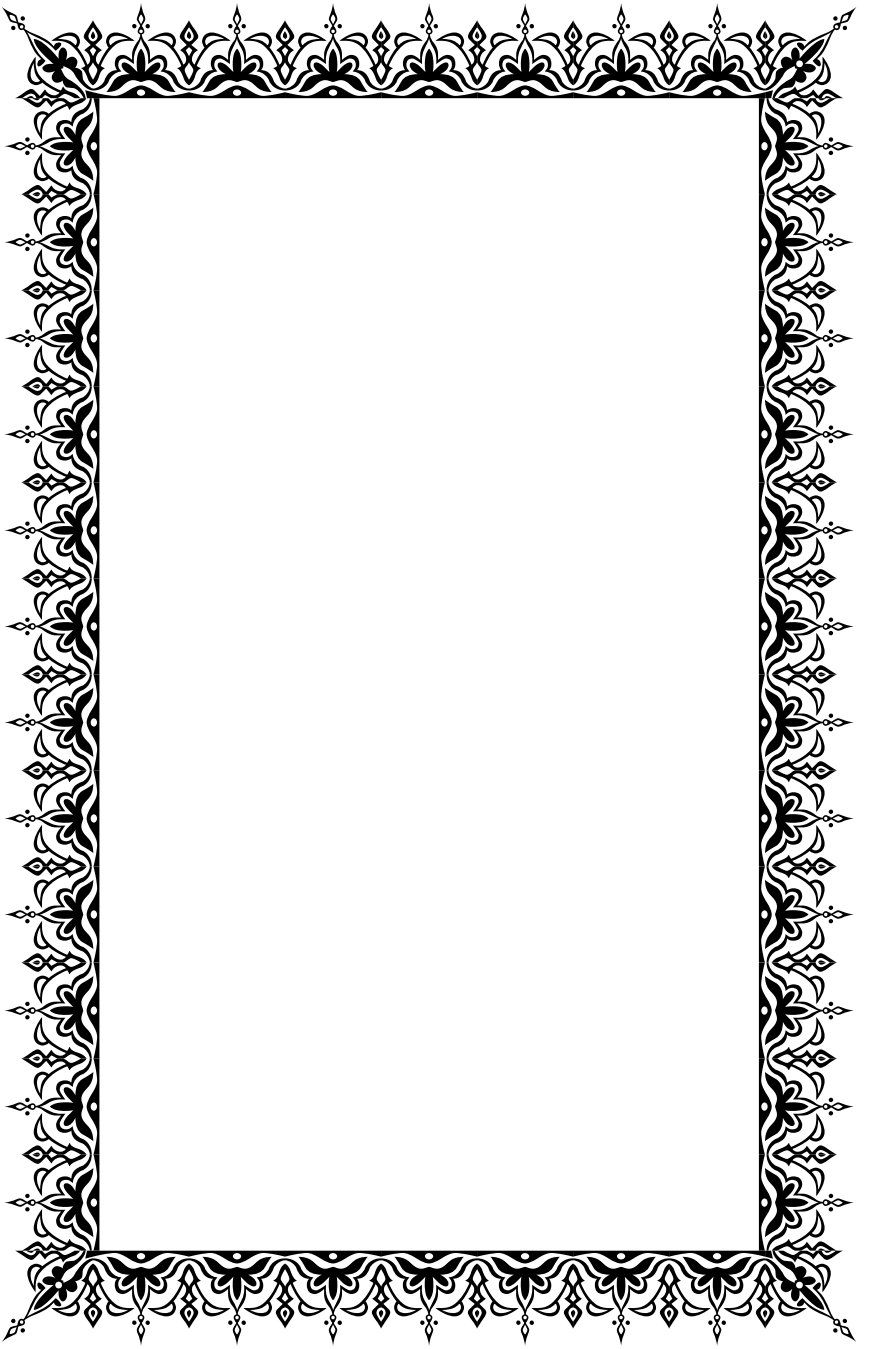
ويشمل هذا الكتاب 140 تمرين في المتتاليات من بينها 100 موضوع بكالوريا للدورات السابقة (من 2008 لغاية 2018) بالإضافة إلى 82 تمرين في الاحتمالات من بينها 13 موضوع بكالوريا ، وقد مهدت لهذه المسائل بقواعد أساسية مرفقة بأمثلة توضيحية تسمح للطالب بأخذ نظرة شاملة على كافة القواعد الواجب معرفتها لدراسة هذين المحورين وكذا الطرق المختلفة لتطبيقها.

وبهذا الإصدار تكتمل هذه السلسلة المباركة التي أرجو من الله الكريم المنان أن تساهم في إزالة كثير من العقبات التي تواجه أبناءنا الطلبة أثناء دراستهم هذه المادة الأساسية وتكون سببا في حصولهم على أعلى المعدلات خلال امتحان شهادة البكالوريا.

وبما أنّ هذا الكتاب يتناول موضوع الاحتمالات، فإنّ حادثة ورود خطأ أو سهو أو نقص فيه هي حادثة أكيدة و احتمالها يساوي واحد ، لذلك أهيب بإخواني الأساتذة وأبنائي الطلبة أن يتكرموا علي بتصويباتهم واقتراحاتهم حتى يؤول هذا الاحتمال إلى الصفر ولهم مني جزيل الشكر والامتنان.

عبد الكريم واضحي

قواعد أساسية في المتتاليات العددية



I- المتتالية الحسابية :

1. العلاقة التراجعية :

$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$

2. عبارة الحد العام :

$\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$; $u_n = u_0 + nr$; $u_n = u_1 + (n-1)r$

3. الوسط الحسابي :

إذا كانت الأعداد a, b, c حدود متتابعة لمتتالية حسابية فإنّ: $\boxed{a + c = 2b}$ ، أي:

$$\boxed{a + b + c = 3b}$$

تنبيه: لحل مسائل الوسط الحسابي ننطلق دائما من معادلة المجموع $a + b + c = \cdots$ وتعويضها بالمعادلة $3b = \cdots$ لتعيين قيمة b ، ثمّ نعوّض b في معادلة الجداء $(a \times b \times c = \cdots)$ فنحصل على معادلة من الشكل $(a \times c = \cdots)$ ، ثمّ نكتب a و c بدلالة b و r ، فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول r من الشكل $[(b-r)(b+r) = \cdots]$ التي تكافئ $(b^2 - r^2 = \cdots)$ ، ونعيّن قيمتي r (الموجبة والسالبة) مع التركيز جيّدا على اتجاه تغيّر المتتالية المعطاة في السؤال (متزايدة أم متناقصة) لمعرفة أي القيمتين نأخذ، ثمّ نحسب الحدّين a و c.

مثال 1 :

عيّن الحدود الثلاثة الأولى u_0 ، u_1 ، u_2 لمتتالية حسابية حيث :

$$\begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 = 3 \\ u_0 \times u_1 \times u_2 = -24 \end{cases}$$

$u_0 + u_1 + u_2 = 3 \Rightarrow 3u_1 = 3 \Rightarrow \boxed{u_1 = 1}$

$u_0 \times \underbrace{u_1}_{=1} \times u_2 = -24 \Rightarrow \underbrace{u_0}_{u_1 - r} \times \underbrace{u_2}_{u_1 + r} = -24 \Rightarrow (1-r)(1+r) = -24$

$$\Rightarrow 1 - r^2 = -24 \Rightarrow r^2 = 25$$

بما أنّ السؤال لم يحدّد اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، فإنّ $r = -5$ أو $r = 5$

- $r = -5 \Rightarrow u_0 = 1 - (-5) = 6 \,;\, u_2 = 1 + (-5) = -4$

$$\boxed{(u_0, u_1, u_2) = (6, 1, -4)}$$

- $r = 5 \Rightarrow u_0 = 1 - 5 = -4 \,;\, u_2 = 1 + 5 = 6$

$$\boxed{(u_0, u_1, u_2) = (-4, 1, 6)}$$

التحقيق :

$u_0 + u_1 + u_2 = 6 + 1 - 4 = \boxed{3}$

$u_0 \times u_1 \times u_2 = 6 \times 1 \times (-4) = \boxed{-24}$

مثال 2 :

عيّن الحدود u_1، u_2، u_3 لمتتالية حسابية **متناقصة** حيث: $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 24 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 210 \end{cases}$

$u_1 + u_2 + u_3 = 24 \Rightarrow 3u_2 = 24 \Rightarrow \boxed{u_2 = 8}$

$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 210 \Rightarrow u_1^2 + u_3^2 = 210 - 64$

$\Rightarrow (8-r)^2 + (8+r)^2 = 146 \Rightarrow r^2 = 9$

بما أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ، فإنّ $r = -3$ ، منه : $\boxed{u_1 = u_2 - r = 11}$

و $\boxed{u_3 = u_2 + r = 5}$

التحقيق :

$u_1 + u_2 + u_3 = 11 + 8 + 5 = \boxed{24}$

$11^2 + 8^2 + 5^2 = 121 + 64 + 25 = \boxed{210}$

4. حساب المجاميع :

$$\boxed{S_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)}$$

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$$

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$

مثال :

$u_0 = 1 \; ; r = 3 \; ; S = u_0 + \cdots + u_9$

$$S = \frac{10}{2}\left(u_0 + \underbrace{u_9}_{u_0+9r}\right) = 5(1+28) = 5 \times 29 = 145$$

II- المتتالية الهندسية :

1. العلاقة التراجعية :

$\boxed{v_{n+1} = v_n \times q}$

2. عبارة الحد العام :

$\boxed{v_n = v_p \times q^{n-p}}$; $v_n = v_0 \times q^n$; $v_n = v_1 \times q^{n-1}$

3. الوسط الهندسي :

إذا كانت الأعداد c, b, a حدود متتابعة لمتتالية هندسية فإنّ : $\boxed{a \times c = b^2}$ ، أي:

$$\boxed{a \times b \times c = b^3}$$

تنبيه : لحل مسائل الوسط الهندسي، ننطلق دائما من معادلة الجداء $a \times b \times c = \cdots$ وتعويضها بالمعادلة $(b^3 = \cdots)$ لتعيين قيمة b ، ثمّ نعوّض b في معادلة المجموع $(a + b + c = \cdots)$ فنحصل على معادلة من الشكل $(a + c = \cdots)$ ، ثمّ نكتب a و c بدلالة b و q ، فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول q ونعيّن قيمتي q مع التركيز جيّدا على اتجاه تغيّر المتتالية المعطاة في وإشارة حدودها لمعرفة أي القيمتين نأخذ، ثمّ نحسب الحدّين a و c.

مثال 1 :

عيّن الحدود v_1 ، v_2 ، v_3 لمتتالية هندسية **متزايدة ، حدودها موجبة** حيث :

$$\begin{cases} v_1 \times v_3 = 256 \\ v_1 + v_2 + v_3 = 56 \end{cases}$$

$v_1 \times v_3 = 256 \Rightarrow v_2^2 = 256 \Rightarrow \boxed{v_2 = 16}$ (لأنّ حدود المتتالية (v_n) موجبة)

$v_1 + \underbrace{v_2}_{16} + v_3 = 56 \Rightarrow \underbrace{v_1}_{\frac{v_2}{q}} + \underbrace{v_3}_{v_2.q} = 40 \Rightarrow \frac{16}{q} + 16q = 40$

$\Rightarrow 16q^2 - 40q + 16 = 0 \Rightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{q = 2}$ ((v_n) متزايدة)

$\Rightarrow \boxed{v_1 = \frac{v_2}{q} = 8 \; ; v_3 = v_2.q = 32}$

التحقيق :

$v_1 \times v_3 = 8 \times 32 = \boxed{256}$; $v_1 + v_2 + v_3 = 8 + 16 + 32 = \boxed{56}$

مثال 2 :

(v_n) متتالية هندسية حيث : $\begin{cases} v_1 \times v_5 = 16 \\ v_2 + v_3 + v_4 = 6 \end{cases}$

اثبت أنّ $v_1 \times v_5 = v_3^2$ ، ثمّ احسب الحدود $v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , v_5$

$v_1 \times v_5 = \frac{v_3}{q^2} \times v_3.q^2 = v_3^2$

$v_1 \times v_5 = 16 \Rightarrow v_3^2 = 16 \Rightarrow v_3 = 4$ أو $v_3 = -4$

- $v_3 = 4 : \; v_2 + v_3 + v_4 = 6 \Rightarrow v_2 + v_4 = 2 \Rightarrow \frac{v_3}{q} + v_3.q = 2$

  $\Rightarrow \frac{4}{q} + 4q - 2 = 0 \Rightarrow 4q^2 - 2q + 4 = 0 \Rightarrow 2q^2 - q + 2 = 0$

  $\Delta = -15$ (حالة مرفوضة)

- $v_3 = -4 : \; v_2 + v_3 + v_4 = 6 \Rightarrow v_2 + v_4 = 10 \Rightarrow \frac{v_3}{q} + v_3.q = 10$

$\Rightarrow -\frac{4}{q} - 4q - 10 = 0 \Rightarrow 4q^2 + 10q + 4 = 0 \Rightarrow 2q^2 + 5q + 2 = 0$

$\Rightarrow q = -\frac{1}{2}$ أو $q = -2$

- ✓ $q = -\frac{1}{2} : v_1 = \frac{v_3}{q^2} = -16 \; ; \; v_2 = \frac{v_3}{q} = 8 \; ; \; v_3 = -4 \; ;$

  $v_4 = v_3.q = 2 \; ; \; v_5 = v_3.q^2 = -1$

- ✓ $q = -2 : v_1 = \frac{v_3}{q^2} = -1 \; ; \; v_2 = \frac{v_3}{q} = 2 \; ; \; v_3 = -4$

  $v_4 = v_3.q = 8 \; ; \; v_5 = v_3.q^2 = -16$

4. حساب المجاميع :

$$\boxed{S_n = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n = v_p\left(\frac{q^{n-p+1}-1}{q-1}\right) = v_p\left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)}$$

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right) = v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

$$v_1 + \cdots + v_n = v_1\left(\frac{q^{n}-1}{q-1}\right) = v_1\left(\frac{1-q^{n}}{1-q}\right)$$

5. حساب الجداءات :

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n = v_0 \times v_0.q \times v_0.q^2 \times \ldots \times v_0.q^n$$

$$P_n = v_0^{n+1}.q^{1+2+\cdots+n} = v_0^{n+1}.q^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

III- المتتالية المشتملة على الدالة الأسّية أو اللوغاريتمية :

تنبيه : دراسة هذا النوع من المتتاليات يتطلب معرفة جيّدة بخواص الدالتين الأسّية واللوغاريتمية ، فراجعها.

مثال 1 :

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث :

$$ln\,u_3 + lnu_4 = 5 \;;\; lnu_3 - ln\,u_4 = -1$$

1. عيّن أساس المتتالية (u_n) و حدها الأول u_1.
2. أكتب u_n بدلالة n ، ثم احسب الجداء : $P_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$.

(v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = ln\,u_{n+1} - 2ln\,u_n$

3. أثبت أن (v_n) متتالية حسابية ، يُطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
4. احسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

الحل:

1. تعيين أساس المتتالية (u_n) و حدها الأول u_1

$$lnu_3 - ln\,u_4 = -1 \Rightarrow \ln\left(\frac{u_3}{u_4}\right) = -1 \Rightarrow \frac{u_3}{u_4} = e^{-1} \Rightarrow \frac{u_4}{u_3} = e \Rightarrow \boxed{q = e}$$

$$lnu_3 + \ln u_4 = 5 \Rightarrow ln(u_1.e^2) + ln(u_1.e^3) = 5$$

$$\Rightarrow \ln u_1 + \ln e^2 + \ln u_1 + \ln e^3 = 5$$

$$\Rightarrow 2\ln u_1 + 5 = 5 \Rightarrow 2\ln u_1 = 0 \Rightarrow \boxed{u_1 = 1}$$

2. كتابة u_n بدلالة n ، ثم حساب الجداء : $P_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$

$$u_n = u_1.q^{n-1} \Rightarrow \boxed{u_n = e^{n-1}}$$

$$P_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = 1 \times e \times \ldots \times e^{n-1} = e^{1+2+\cdots+n-1}$$

$$\boxed{P_n = e^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

3. اثبات أنّ (v_n) متتالية حسابية ، يُطلب تعيين أساسها و حدها الأول

$v_n = \ln u_{n+1} - 2\ln u_n = \ln e^n - 2\ln e^{n-1} = n - 2(n-1) = -n + 2$

$v_{n+1} - v_n = -(n+1) + 2 + n - 2 = \boxed{-1}$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = -1$ وحدّها الأول $v_1 = 1$

4. حساب بدلالة n المجموع : $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \frac{n}{2}(v_1 + v_n) = \frac{n}{2}(1 + 2 - n) = \boxed{\frac{n}{2}(3-n)}$

مثال 2 :

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث : $\begin{cases} u_1 + u_3 = 30e \\ \ln(u_2) - \ln(u_4) + 2\ln 3 = 0 \end{cases}$

1. عيّن u_1 و q أساس المتتالية (u_n)
2. عبّر عن u_n بدلالة n
3. احسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$
4. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \ln(u_{n+2}) + \ln(u_{n+1})$
   أ. اكتب v_n بدلالة n ، ثمّ بيّن أنّ المتتالية (v_n) حسابية يُطلب تعيين حدها الأول وأساسها r
   ب. عيّن العدد الطبيعي n حيث : $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = 12 + 48\ln 3$.

1. تعيين u_1 وq أساس المتتالية (u_n)

$\ln(u_2) - \ln(u_4) + 2\ln 3 = 0 \Rightarrow \ln(u_4) - \ln(u_2) = 2\ln 3$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{u_4}{u_2}\right) = 2\ln 3 \Rightarrow \ln\left(\frac{u_2 . q^2}{u_2}\right) = 2\ln 3 \Rightarrow \ln q^2 = 2\ln 3$

$\Rightarrow 2\ln q = 2\ln 3 \Rightarrow \boxed{q = 3}$

$u_1 + u_3 = 30e \Rightarrow u_1 + u_1 . q^2 = 30e \Rightarrow 10u_1 = 30e \Rightarrow \boxed{u_1 = 3e}$

2. عبارة u_n بدلالة n

$u_n = u_1 . q^{n-1} \Rightarrow u_n = 3e . 3^{n-1} \Rightarrow \boxed{u_n = 3^n . e}$

3. حساب بدلالة n المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{3e}{2}(3^n - 1)}$

4. $v_n = \ln(u_{n+2}) + \ln(u_{n+1})$

أ. كتابة v_n بدلالة n

$v_n = \ln(u_{n+2}) + \ln(u_{n+1}) = \ln(3^{n+2} . e) + \ln(3^{n+1} . e)$

$= \ln(3^{n+2}) + \ln(e) + \ln(3^{n+1}) + \ln(e)$

$v_n = (n+2)\ln 3 + (n+1)\ln 3 + 2 \Rightarrow \boxed{v_n = (2n+3)\ln 3 + 2}$

بيان أنّ المتتالية (v_n) حسابية يُطلب تعيين حدها الأول وأساسها r

$v_{n+1} = (2n+5)\ln 3 + 2 = (2n+3)\ln 3 + 2 + 2\ln 3 = v_n + 2\ln 3$

منه ، نستنتج أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\boxed{r = 2\ln 3}$ وحدها الأول

$$\boxed{v_0 = 3\ln 3 + 2}$$

ب. تعيين العدد n حيث : $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = 12 + 48\ln 3$

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = 12 + 48\ln 3 \Rightarrow \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n) = 12 + 48\ln 3$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{2}[3\ln 3 + 2 + (2n+3)\ln 3 + 2] = 12 + 48\ln 3$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{2}[2(n+3)\ln 3 + 4] = 12 + 48\ln 3$$

$$\Rightarrow (n+1)[(n+3)\ln 3 + 2] = 12 + 48\ln 3 \Rightarrow \begin{cases} 2(n+1) = 12 \\ (n+1)(n+3) = 48 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 5}$$

IV- دراسة تغيّرات متتالية وتقاربها :

لدراسة تغيّرات متتالية عددية ، نتبع إحدى الطرق التالية :

1. ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ ونستنتج ما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n > 0 \Rightarrow \text{المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة} \\ u_{n+1} - u_n < 0 \Rightarrow \text{المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة} \\ u_{n+1} - u_n = 0 \Rightarrow \text{المتتالية } (u_n) \text{ ثابتة} \end{cases}$$

2. نقارن النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع 1 (لمّا $u_n > 0$) ونستنتج ما يلي :

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Rightarrow \text{المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة} \\ 0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Rightarrow \text{المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة} \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \Rightarrow \text{المتتالية } (u_n) \text{ ثابتة} \end{cases}$$

3. ندرس تغيّرات الدالة $f(n) = u_n$ على المجال $[0;+\infty[$ ونستنتج تغيّرات المتتالية (u_n) (نفس التغيّرات)

لبيان أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ، نتبع إحدى الطرق التالية :

1. نبيّن أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$
2. نبيّن أنّ المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى $(u_n < M)$ ومتزايدة
3. نبيّن أنّ المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل $(u_n > m)$ ومتناقصة

جدول توضيحي يبيّن العلاقة بين أساس المتتالية واتجاه تغيّراتها

المتتالية الحسابية		المتتالية الهندسية		
الأساس r	المتتالية (u_n)	الحد الأول u_0	الأساس q	المتتالية (v_n)
$r > 0$	متزايدة	$u_0 > 0$	$q > 1$	متزايدة
$r < 0$	متناقصة		$0 < q < 1$	متناقصة
$r = 0$	ثابتة	$u_0 < 0$	$q > 1$	متناقصة
			$0 < q < 1$	متزايدة
			$q = 1$	ثابتة
			$q < 0$	غير رتيبة

V- الاستدلال بالتراجع :

لبيان أنّ خاصية $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$ ، نستعمل الاستدلال بالتراجع باتباع الخطوات التالية :

1. **تحقيق التراجع :** نتحقق أنّ الخاصية $P(n)$ محققة من أجل $n = n_0$
2. **فرض التراجع :** نفرض أنّ الخاصية $P(n)$ محققة من أجل n
3. **برهان التراجع :** نبرهن أنّ الخاصية $P(n)$ محققة من أجل $n + 1$

مثال :

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = \alpha$ والعلاقة التراجعية :

$u_{n+1} = \frac{5}{6}u_n + 335$ ، حيث α عدد حقيقي

1. عيّن العدد الحقيقي α حيث تكون المتتالية (u_n) ثابتة
2. نضع : $\alpha = 2009$
   أ. برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 2010$
   ب. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$. ماذا تستنتج ؟

الحل:

1. تعيين العدد الحقيقي α حيث تكون المتتالية (u_n) ثابتة

المتتالية (u_n) ثابتة يعني $u_{n+1} = u_n = u_0 = \alpha$ ، منه $\alpha = \frac{5}{6}\alpha + 335$ أي :

$\alpha = 335 \times 6 = 2010$

2. $\alpha = 2009$

أ. برهان بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 2010$

تحقيق التراجع : $u_0 \leq 2010$ (محقّقة لأنّ $u_0 = 2009$)

فرض التراجع : نفرض أنّ : $u_n \leq 2010$

برهان التراجع : نبرهن أنّ : $u_{n+1} \leq 2010$

$$u_n \leq 2010 \Rightarrow \frac{5}{6}u_n \leq \frac{5}{6}(2010) \Rightarrow \frac{5}{6}u_n + 335 \leq 2010 \Rightarrow u_{n+1} \leq 2010$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 2010$

ب. بيان أنّ المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5}{6}u_n + 335 - u_n = 335 - \frac{1}{6}u_n = \frac{2010 - u_n}{6}$$

بما أنّ $u_n \leq 2010$ ، فإنّ $2010 - u_n \geq 0$ ، منه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

الاستنتاج : المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى ومتزايدة ، فهي إذن متقاربة.

VI- تمثيل الحدود الأولى لمتتالية عددية بيانيا:

غالبا ما يرد في مواضيع المتتاليات مسألة التمثيل البياني للحدود الأولى لمتتالية عددية على محور الفواصل بالاستعانة بمنحنى الدالة المعرّفة بالعلاقة التراجعية للمتتالية والمستقيم ذي المعادلة $y = x$ (المنصّف الأوّل). لذلك نعيّن على محور الفواصل الحدّ u_0 ونسقطه على منحنى الدالة ثمّ نسقطه على المنصف الأول وأخيرا على محور الفواصل لنحصل على الحدّ u_1 ، ونكرر هذه الإسقاطات المتتالية حتى نمثل جميع الحدود المطلوبة.

مثال : (بكالوريا 2008 ع ت)

(u_n) متتالية عددية معرّفة بـ: $u_0 = \frac{5}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$

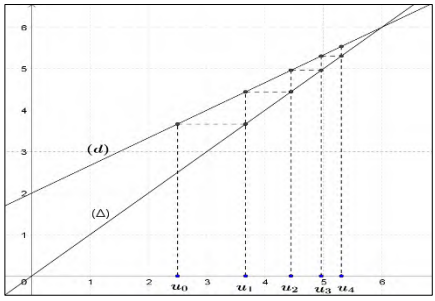
1. أ. ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ والمنحنى (d) الممثل للدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$

ب. باستعمال الرسم السابق، مثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4

جـ. ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

الحل:

بما أنّ ترتيب الحدود تصاعدي $(u_0 < u_1 < \cdots < u_4)$ والمسافة بين كل حدّين متتابعين تتقلص ، نخمّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة.



مواضيع المتتاليات العددية في البكالوريا

التمرين 1. (بكالوريا 2008 آداب)

(u_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 3n + 1$

1. احسب u_0 ، u_1 ، u_2
2. بيّن أنّ (u_n) حسابية يُطلب تعيين أساسها. عيّن اتجاه تغيّر (u_n)
3. تحقّق أنّ العدد 2008 حدّ من حدود المتتالية (u_n). ما رتبته؟
4. احسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{669}$.

التمرين 2. (بكالوريا 2008 آداب)

(u_n) متتالية عددية معرّفة بحدّها الأول $u_1 = 7$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = 2u_n + 1$

1. احسب u_2 ، u_3 ، u_4
2. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، نعرّف المتتالية (v_n) كما يأتي: $v_n = u_n + 1$
   أ. أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_1
   ب. اكتب عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n ثمّ استنتج u_n بدلالة n
   ج. نضع: $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ ، احسب S_n بدلالة n
   د. عيّن n علما أنّ $S_n = 1016$.

التمرين 3. (بكالوريا 2009 آداب)

(u_n) متتالية حسابية معرّفة على $\mathbb{N}^*$ بحدّها الأول $u_1 = 2$ وبالعلاقة : $u_2 - 2u_5 = 19$

1. أ. احسب الأساس r للمتتالية (u_n)
   ب. احسب الحدّ العاشر
2. اكتب عبارة u_n بدلالة n
3. بيّن أنّ العدد (-2008) هو حدّا من حدود (u_n) محددا رتبته
4. احسب المجموع: $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{671}$.

التمرين 4. (بكالوريا 2009 آداب)

(u_n) متتالية هندسية معرّفة على $\mathbb{N}$ وأساسها موجب

1. عيّن أساس هذه المتتالية وحدّها الأول u_0 إذا علمت أنّ: $u_3 = 144$ و $u_5 = 576$
2. تحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 18 \times 2^n$
3. احسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ ، ثمّ استنتج قيمة العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 1134$.

التمرين 5. (بكالوريا 2010 آداب)

I- (u_n) متتالية حسابية معرّفة على $\mathbb{N}$ بالحدّين $u_{10} = 31$ و $u_{15} = 46$

1. عيّن أساسها r وحدّها الأول u_0
2. اكتب u_n بدلالة n
3. بيّن أنّ 6028 حدّ من حدود المتتالية (u_n)
4. احسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2009}$.

II- نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 2 \times 8^n$

1. بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0
2. احسب بدلالة n المجموع: $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

التمرين 6. (بكالوريا 2010 آداب)

(u_n) متتالية هندسيّة معرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ، أساسها q وحدّها الأول u_0 حيث : $u_1 = 6$ و $u_4 = 48$

1. أ. احسب الأساس والحدّ الأول للمتتالية (u_n)

   ب. استنتج أنّ عبارة الحدّ العام للمتتالية (u_n) هي : $u_n = 3 \times 2^n$
2. أ. علما أنّ $256 = 2^8$ ، بيّن أنّ العدد 768 هو حدّ من حدود المتتالية (u_n)

   ب. احسب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_7$
3. (v_n) متتالية عددية معرّفة بـ: $v_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

   $v_{n+1} = 2v_n - 1$

   1. احسب v_1 ، v_2 ، v_3
   2. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3 \times 2^n + 1$
   3. احسب المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_7$.

التمرين 7. (بكالوريا 2011 آداب)

أ) (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 وحدّها الأول u_0 بحيث: $u_0 + u_3 = 28$

1. احسب u_0 ، ثمّ اكتب الحدّ العام u_n بدلالة n
2. احسب المجموع: $S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$

ب) (v_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام $v_n = 1 - 5n$

1. بيّن أنّ (v_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين أساسها ، ثمّ استنتج اتجاه تغيّرها
2. احسب المجموع: $S_2 = v_0 + v_1 + \cdots + v_9$

ج) نعتبر المتتالية (k_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام $k_n = 1 + 3^n - 5n$

تحقق أنّ $k_n = u_n + v_n$ ، ثمّ احسب المجموع: $S = k_0 + k_1 + \cdots + k_9$

التمرين 8. (بكالوريا 2011 آداب)

(u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{N}$ بحدّيهما العام: $u_n = -2n$ و $v_n = 3^{-2n}$
عيّن في كل حالة من الحالات الخمس في الجدول أدناه الاقتراح الصحيح من بين الاقتراحات الثلاث مع التعليل.

		اقتراح 1	اقتراح 2	اقتراح 3
1	(u_n) هي متتالية	هندسية	حسابية	لا حسابية ولا هندسية
2	الحدّ الخامس والأربعون للمتتالية (u_n) يساوي	-90	-92	-88
3	المجموع $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ يساوي	$n^2 + 1$	$-n^2 - n$	$-n^2 - 1$
4	(v_n) هي متتالية هندسية أساسها	$\frac{1}{9}$	9	-9
5	المتتالية (v_n)	متزايدة	متناقصة	ليست رتيبة

التمرين 9. (بكالوريا 2012 آداب)

a ، b ، c ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية متزايدة أساسها r حيث : $a + b + c = 9$

1. أ. احسب b ، ثمّ اكتب a و c بدلالة r
   ب. علما أنّ : $a \times c = -16$ ، عيّن الأساس r ، ثمّ استنتج a و c
2. (u_n) متتالية حسابية حدّها الأول $u_0 = -2$ وأساسها 5
   أ. عبّر عن الحدّ العام u_n بدلالة n
   ب. احسب u_{15} ، ثمّ استنتج المجموع : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{15}$
3. (v_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $8v_n - u_n = 0$
   احسب المجموع : $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{15}$.

التمرين 10. (بكالوريا 2012 آداب)

I- (u_n) متتالية حسابية متزايدة ، أساسها r ، بحدّها الأول u_1 و $u_3 = 7$

1. احسب بدلالة r الجداءين : $T_1 = u_1 \times u_5$ و $T_2 = u_2 \times u_4$
2. عيّن الأساس r بحيث : $T_2 - T_1 = 27$

II- نضع $r = 3$

1. أ. اكتب عبارة u_n بدلالة n
   ب. نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$
   بيّن أنّ العدد $S_n = \frac{3n^2 - n}{2}$
   ج. جد العدد الطبيعي n بحيث : $s_n = 145$
2. أ. اكتب الحدّ u_{n+5} بدلالة العدد الطبيعي n

ب. تحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$

ج. استنتج الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعيا.

التمرين 11. (بكالوريا 2013 آداب)

(v_n) متتالية هندسية حدّها الأول $v_0 = 2$ وأساسها 3

1. أ. عبّر عن v_n بدلالة n

ب. احسب بدلالة n الفرق $v_{n+1} - v_n$ ، ثمّ استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (v_n)

2. نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$

أ. احسب بدلالة n المجموع S_n

ب. عيّن قيمة العدد الطبيعي n بحيث $S_n = 80$

ج. اثبت بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2.

التمرين 12. (بكالوريا 2013 آداب)

(u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_0 وأساسها 5 بحيث : $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$

1. احسب u_0
2. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 5n + 1$
3. عيّن العدد الطبيعي n بحيث : $u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$
4. احسب المجموع : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2013}$
5. المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة : $v_n = 2u_n + 1$

أ. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (v_n)

ب. احسب المجموع : $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{2013}$

التمرين 13. (بكالوريا 2014 آداب)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الأربعة الآتية مع التعليل :

1. (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 وحدّها الأول $u_2 = 1$. الحدّ العام للمتتالية (u_n) هو:

أ) $u_n = 1 + 3n$ ب) $u_n = 7 + 3n$ جـ) $u_n = -5 + 3n$

2. n عدد طبيعي. المجموع $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ يساوي :

أ) $\frac{n^2+n}{2}$ ب) $\frac{n(n-1)}{2}$ جـ) $\frac{n^2+1}{2}$

3. x عدد حقيقي. تكون الأعداد $x - 2$ ، x ، $x + 1$ بهذا الترتيب حدودا متعاقبة لمتتالية هندسية إذا كان :

أ) $x = 3$ ب) $x = 5$ جـ) $x = -2$

4. (v_n) متتالية هندسية معرّفة على $\mathbb{N}$ ، حدّها العام $v_n = 2 \times 3^{n+1}$. أساس المتتالية (v_n) هو:

أ) 2 ب) 3 جـ) 6

التمرين 14. (بكالوريا 2014 آداب)

(v_n) المتتالية العددية المعرّفة بما يلي : $v_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = 5v_n + 4$

1. احسب v_1 ، v_2 ، v_3
2. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = v_n + 1$
   أ. بيّن أنّ (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$ وحدّها الأول $u_0 = 2$
   ب. اكتب u_n بدلالة n واستنتج v_n بدلالة n
   ج. حلل العدد 1250 إلى جداء عوامل أوّلية واستنتج أنّه حدّ من حدود المتتالية (u_n)
3. أ. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$
   ب. احسب بدلالة n المجموع S'_n حيث: $S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$

التمرين 15. (بكالوريا 2015 آداب)

(u_n) المتتالية الهندسية التي حدّها الأول u_0 وأساسها q حيث : $u_0 = 2$ و $q = 3$

1. احسب u_1 و u_2
2. اكتب u_n بدلالة n ثمّ استنتج u_5
3. عيّن اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)
4. أ. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$
   ب. استنتج قيمة المجموع : $2 + 6 + 18 + \cdots + 486$
5. أ. عيّن باقي القسمة الإقليدية على 5 لكل عدد من الأعداد 3 ، 3^2 ، 3^3 و 3^4
   ب. استنتج أنّه لكل k من $\mathbb{N}$: $3^{4k} \equiv 1[5]$
6. أ. عيّن الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $3^n - 1$ قابلا للقسمة على 5.

التمرين 16. (بكالوريا 2015 آداب)

(u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_1 وأساسها r حيث : $u_2 = \frac{1}{2}$ و $u_1 - u_3 = 5$

1. أ. بيّن أنّ : $u_1 + u_3 = 1$

   ب. عيّن الحدّ الأوّل u_1 ، ثمّ استنتج أنّ $r = -\frac{5}{2}$

2. اكتب u_n بدلالة n

3. أ. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

   ب. عيّن قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها $S_n = -\frac{657}{2}$

4. n عدد طبيعي غير معدوم ، نضع : $T_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + nu_n$

   أ. تحقق أنّ لكل n من $\mathbb{N}^*$: $(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$

   ب. باستعمال الاستدلال بالتراجع ، أثبت أنّه لكل n من $\mathbb{N}^*$:

   $$T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$$

التمرين 17. (بكالوريا 2016 آداب)

لتكن (u_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_n = 3n - 2$

1. احسب u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3
2. بيّن أنّ المتتالية (u_n) حسابية وعيّن أساسها
3. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)
4. بيّن أنّ العدد 1954 حدّ من حدود المتتالية (u_n) وعيّن رتبته
5. أ. احسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

   ب. عيّن العدد n بحيث يكون $S_n = 328$.

التمرين 18. (بكالوريا 2016 آداب)

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) التي أساسها 3 وحدّها الأول u_0 وتحقق :

$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$

1. احسب الحدّ الأول u_0
2. اكتب الحدّ العام u_n بدلالة n
3. عيّن العدد الطبيعي n بحيث : $u_n = 145$
4. احسب المجموع S بحيث : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{49}$
5. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة : $v_n = 2u_n + 3$

   احسب المجموع S' بحيث : $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{49}$.

التمرين 19. (بكالوريا 2017 آداب)

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما ، معرّفة على $\mathbb{N}$ حيث : $u_1 = 20$ و $u_3 = 320$

1. بيّن أنّ أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدّها الأوّل هو 5
2. اكتب عبارة الحدّ العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثمّ استنتج قيمة حدّها السابع
3. أ. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S حيث : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

ب. استنتج قيمة المجموع S' حيث : $S' = u_0 + u_1 + \cdots + u_6$.

التمرين 20. (بكالوريا 2017 آداب)

(u_n) متتالية حسابية معرّفة على المجموعة $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = -5$ و $u_3 + u_7 = 50$

1. عيّن الأساس r للمتتالية (u_n)
2. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 6n - 5$
3. بيّن أنّ العدد 2017 حدّ من حدود المتتالية (u_n) ، ما هي رتبته ؟
4. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S حيث : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

التمرين 21. (بكالوريا 2017 د2 آداب)

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول u_0 وأساسها r

1. احسب الحدّ u_4 علما أنّ : $u_3 + u_5 = 20$
2. احسب الحدّ u_5 علما أنّ : $2u_4 - u_5 = 7$
3. استنتج قيمة r واحسب u_0
4. تحقق أنّ : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3n - 2$
5. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
6. جد العدد الطبيعي n حيث : $S_n = 33$.

التمرين 22. (بكالوريا 2017 د2 آداب)

في كل حالة من الحالات الأربع الآتية اقتُرحت ثلاث إجابات ، واحدة فقط منها صحيحة ، يُطلب تحديدها مع التعليل :

1. الحدّ السادس لمتتالية حسابية أساسها 3- وحدّها الأول 1 هو:

أ) -17 ب) -14 جـ) -11

2. مجموع 100 حدٍ الأولى لمتتالية هندسية حدّها الأول 1 وأساسها 3 هو:

أ) $\frac{3^{101}-1}{2}$ ب) $\frac{1-3^{100}}{2}$ جـ) $\frac{3^{100}-1}{2}$

3. نضع من أجل كل عدد حقيقي x : $a = 2x + 2$ ، $b = 6x - 3$ ، $c = 4x$.
الأعداد الحقيقية a، b، c بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون:
أ) $x = \frac{4}{3}$ ب) $x = 0$ جـ) $x = \frac{3}{4}$

4. المتتالية العددية (u_n) المعرّفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ هي متتالية :
أ) حسابية أساسها 1 ب) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ جـ) لا حسابية ولا هندسية

التمرين 23. (بكالوريا 2018 آداب)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير.

1. (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = n^2 - 1$. المتتالية (u_n) :
أ) متزايدة تماما ب) متناقصة تماما جـ) ليست رتيبة

2. (v_n) متتالية هندسية حدّها الأول $v_1 = 3$ وأساسها $q = 2$. عبارة الحدّ العام للمتتالية (v_n) هي:
أ) $v_n = 3 \times 2^n$ ب) $v_n = 3 \times 2^{n-1}$ جـ) $v_n = 2 \times 3^n$
المجموع $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ يساوي:
أ) $3(2^n - 1)$ ب) $2^n - 1$ جـ) $2(3^n - 1)$

3. صندوق به 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس مرقمة من 11 إلى 20، نسحب عشوائيا كرية واحدة. احتمال الحصول على كرية تحمل عددا مضاعفا لـ 3 هو:
أ) $\frac{1}{3}$ ب) $\frac{3}{10}$ جـ) $\frac{7}{10}$
احتمال الحصول على كرية تحمل عددا فرديا ومضاعفا لـ 3 هو:
أ) $\frac{9}{10}$ ب) $\frac{3}{10}$ جـ) $\frac{1}{10}$

التمرين 24. (بكالوريا 2018 آداب)

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدّها الأول u_0 وأساسها q حيث:
$u_0 \times u_2 = 576$ و $u_0 + u_1 = 30$

1. بيّن أنّ $u_1 = 24$ ، ثمّ استنتج قيمة u_0
2. بيّن أنّ $q = 4$ ، ثمّ اكتب عبارة الحدّ العام u_n بدلالة n
3. أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n$ ، ثمّ استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

4. احسب 4^4 ، ثمّ تحقق أنّ العدد 1536 حدّ من حدود المتتالية (u_n) وعيّن رتبته
5. احسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

التمرين 25. (بكالوريا 2008 ت إ)

(u_n) متتالية عددية معرّفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = \alpha \; ; \; \alpha \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9} \; ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. برهن بالتراجع أنّه في حالة $\alpha = -\frac{8}{3}$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة
2. في كل ما يلي $\alpha = 2$ ، ونعرّف المتتالية (v_n) كما يلي : $v_n = u_n + \frac{8}{3}$
   أ. احسب u_1 ، u_2
   ب. أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_0
   ج. اكتب عبارة u_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 26. (بكالوريا 2008 ت إ)

المتتالية العددية (u_n) معرّفة كما يلي : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإنّ :
$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$

7. احسب u_1 ، u_2 و u_3
8. أ. اثبت بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -2$
   ب. جد اتجاه تغيّر المتتالية (u_n). ماذا تستنتج ؟
9. (v_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = u_n + 2$
   أ. بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية
   ب. عبّر بدلالة n عن الحدّ العام v_n ثمّ u_n
   ج. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
   د. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

التمرين 27. (بكالوريا 2009 ت إ)

1. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة بـ: $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n يكون : $3u_{n+1} = u_n + 4$
   أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون $u_n \leq 2$
   ب. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة
   ج. استنتج مع التبرير أنّ المتتالية (u_n) متقاربة

2. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 2$
   أ. أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد حدّها الأول وأساسها
   ب. اكتب الحدّ العام v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج الحدّ العام u_n بدلالة n
   ج. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
   د. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

التمرين 28. (بكالوريا 2009 ت إ)

(u_n) متتالية عددية معرّفة بـ: $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3u_n - 2$

1. احسب u_1 ، u_2
2. لتكن المتتالية (v_n) المعرّفة بـ : $v_n = u_n - 1$
   أ. أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_0
   ب. اكتب عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n
3. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = (-4) \times 3^n$ ، ثمّ استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).
4. عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون : $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = n - 79$.

التمرين 29. (بكالوريا 2010 ت إ)

1. n عدد طبيعي. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث :
   $S_n = 1 + e + e^2 + \cdots + e^n$
   (S_n مجموع حدود متتالية هندسية أساسها e وحدّها الأول 1)
2. لتكن المتتالية العددية (w_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = 2n + 4 + e^n$
   بيّن أنّ : $w_n = u_n + v_n$ حيث (u_n) متتالية حسابية و(v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين الحدّها الأول والأساس لكل منهما
3. اثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ :
   $4 + 6 + 8 + \cdots + (2n + 4) = (n + 1)(n + 4)$
4. استنتج المجموع S بدلالة n حيث : $S = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$

التمرين 30. (بكالوريا 2010 ت إ)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{4}$

1. احسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3
2. أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ : $u_n < 2$
   ب. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما
   جـ. استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة
3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n - 2$
   أ. بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدّها الأول
   ب. اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n :
   $$u_n = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$$
   ج. ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟
4. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ واستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$.

التمرين 31. (بكالوريا 2011 ت إ)

لتكن المتتالية العددية (u_n) حيث $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5}$

1. احسب u_1 و u_2
2. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{1}{3}$
3. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة
4. لتكن المتتالية العددية (v_n) حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - \frac{1}{3}$
   أ. بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدّها الأول
   ب. اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n
   ج. احسب نهاية المتتالية (u_n).

التمرين 32. (بكالوريا 2012 ت إ)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{3u_n+4}{9}$

1. أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{2}{3}$
   ب. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة
2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$
   أ. بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدّها الأول

ب. اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\right]$$

ج. ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

3. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

التمرين 33. (بكالوريا 2012 ت إ)

في بداية جانفي 2008 وضع شخصا مبلغا من المال قدره $50.000\ DA$ في صندوق التوفير والاحتياط. يقدم الصندوق فائدة قدرها 5% سنويا.

يسحب هذا الشخص نهاية كل سنة مبلغا قدره $5.000\ DA$ (بعد حساب الفوائد).

يرمز u_n إلى المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية جانفي من السنة $2008 + n$

1. أ. احسب كلا من u_0 ، u_1 و u_2

ب. هل المتتالية (u_n) هندسية ؟ هل هي حسابية ؟ برّر إجابتك

جـ. بيّن لماذا من أجل كل عدد طبيعي n لدينا ، $u_{n+1} = 1{,}05u_n - 5000$

2. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 100000$

أ. بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية ، حدّد أساسها وحدّها الأول

ب. اكتب v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n = -50000 \times (1{,}05)^n + 100000$$

3. أ. ما هو المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية عام 2015 ؟

ب. ابتداءً من أية سنة لا تسمح إدارة الصندوق لهذا الشخص بسحب المبلغ المعتاد على سحبه في نهاية كل سنة ؟

التمرين 34. (بكالوريا 2013 ت إ)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1} = \left(\frac{2a+1}{3}\right)u_n - \frac{2a+4}{3}$ ، حيث a وسيط حقيقي.

1. عيّن قيمة a التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة
2. نفرض $a \neq \frac{5}{2}$. عيّن قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية، ثمّ احسب عندئذ u_n ومجموع n حدا الأولى من المتتالية
3. عيّن قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) هندسية، ثمّ عيّن في هذه الحالة كلا من u_{50} ومجموع 50 حدا الأولى منها
4. نفرض $a = 4$. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإنّ: $u_n = 3^n + 2$

ثمّ بيّن أنّ : $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 4n + 3)$.

التمرين 35. (بكالوريا 2013 ت إ)

(u_n) متتالية عددية معرّفة بـ: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 6$

1. أ. احسب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4
   ب. هل المتتالية (u_n) رتيبة على $\mathbb{N}$ ؟ برّر إجابتك
2. أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(u_n - 4)$
   ب. استنتج أنّ المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - 4$ هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول
   جـ. اكتب v_n ثمّ u_n بدلالة n
   د. بيّن أنّ (u_n) متقاربة
3. باستعمال عبارة u_n ، تأكّد ثانية من نتيجة السؤال 1.ب.

التمرين 36. (بكالوريا 2014 ت إ)

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ حدودها موجبة تماما و(v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln u_n$

1. إذا كانت (u_n) متقاربة فإنّ (v_n) متقاربة
2. إذا كانت (u_n) متناقصة فإنّ (v_n) متناقصة
3. إذا كانت (u_n) هندسية فإنّ (v_n) حسابية.

التمرين 37. (بكالوريا 2014 ت إ)

المتتالية العددية (u_n) معرّفة كما يلي: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$

1. أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ $u_n > -3$
   ب. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما
   جـ. استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة
2. لتكن (v_n) متتالية هندسية متقاربة أساسها q حيث : $v_0 = 6$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) = 18$

أ. بيّن أنّ $\lim_{n\to+\infty}(v_0+v_1+\cdots+v_n)=\frac{v_0}{1-q}$

ب. احسب الأساس q ثمّ عيّن عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n

ج. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=v_n-3$ واستنتج عبارة u_n بدلالة n.

التمرين 38. (بكالوريا 2015 ت إ)

اختر الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1. نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بحدّها العام:
$u_n=5\times2^n\times3^{n-1}$

أ. (u_n) حسابية ب. (u_n) هندسية جـ. (u_n) لا هندسية ولا حسابية

2. (v_n) متتالية حسابية حدّها الأول $v_0=1$ وأساسها 4. قيمة n التي من أجلها يكون $v_1+v_2+\cdots+v_n=2015$ هي :

أ. $n=31$ ب. $n=32$ جـ. $n=33$

التمرين 39. (بكالوريا 2015 ت إ)

بيّنت دراسة أنّ 5% من عمال إحدى القطاعات الصناعية يُحالون على التقاعد سنويا وبالمقابل يُوظّف 3000 عامل سنويا. علما أنّ سنة 2012 كان عدد العمال 50000.

نعتبر الألف هو الوحدة ونرمز بـ : u_n لعدد العمال سنة $2012+n$ أي $u_0=50$

1. احسب u_1 و u_2
2. أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=0{,}95u_n+3$

ب. بيّن أنّ المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية

3. من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n=60-u_n$

أ. بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول

ب. اكتب v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج u_n بدلالة n

ج. قدّر عدد العمال سنة 2017

د. حدّد اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

ه. احسب نهاية المتتالية (u_n). هل يمكن أن يصل عدد عمال المصنع إلى 60 ألف عامل ؟

التمرين 40. (بكالوريا 2016 ت إ)

(v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة ومعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $v_0 = 18$ والعلاقة :

$v_0 + v_1 + v_2 = 38$

1. بيّن أنّ أساس المتتالية (v_n) هو $q = \frac{2}{3}$
2. أ. اكتب عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n

   ب. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (v_n)

   جـ. احسب نهاية (v_n)
3. نضع: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$

   أ. احسب S_n بدلالة n ، ثمّ استنتج نهاية S_n عندما يؤول n إلى $+\infty$

   ب. جد العدد الطبيعي n بحيث $S_n = \frac{3510}{81}$.

التمرين 41. (بكالوريا 2016 ت إ)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 5$ و $u_{n+1} = \frac{4}{7}u_n + \frac{3}{7}$

1. احسب الحدّين u_1 و u_2
2. أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$

   ب. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما

   جـ. ماذا تستنتج بالنسبة لتقارب المتتالية (u_n) ؟
3. لتكن المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - 1$

   أ. بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية معيّنا أساسها وحدّها الأول

   ب. اكتب v_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n :

   $$u_n = 1 + 4\left(\frac{4}{7}\right)^n$$

   ج. احسب نهاية u_n.

التمرين 42. (بكالوريا 2017 ت إ)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدّها الأول $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

1. أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 3$

   ب. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة

2. (v_n) المتتالية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = 3 - u_n$
   أ. بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ ثمّ عيّن حدّها الأول
   ب. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
   بيّن أنّ من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = 3(n-1) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

التمرين 43. (بكالوريا 2017 ت إ)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدّها الأول $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :
$u_{n+1} = 3u_n - 2$

1. احسب u_1 ، u_2 ، u_3 ثمّ خمّن اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)
2. نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرّفة بـ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_{n+1} - u_n$
   أ. بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 يُطلب تعيين حدّها الأول
   ب. عيّن v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج أنّ المتتالية (u_n) متزايدة
3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$
   أ. احسب S_n بدلالة n
   ب. بيّن أنّ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = S_n + u_0$ واستنتج عبارة u_n بدلالة n.

التمرين 44. (بكالوريا 2017 د2 ت إ)

لتكن (u_n) المتتالية المعرّفة بحدّها الأول u_0 حيث $u_0 = -2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :
$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$

1. أ. بيّن أنّ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 2$
   ب. عيّن اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثمّ استنتج أنّها متقاربة
2. لتكن المتتالية (v_n) المعرّفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = 2u_n - 4$
   أ. أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_0
   ب. جد عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n
3. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

التمرين 45. (بكالوريا 2017 د2 ت إ)

نعتبر المتتالية الهندسية (v_n) ذات الأساس e^2 والحدّ الأول v_0 حيث $v_0 = 1$

1. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$
2. نعتبر المتتاليتين (u_n) و(w_n) المعرّفتين كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n ،

$w_n = 2n + 4 + e^{2n}$ و $u_n = w_n - v_n$

بيّن أنّ المتتالية (u_n) حسابية ، حدّد أساسها r وحدّها الأول u_0

3. أثبت أنّ من أجل كل عدد طبيعي n :

$4 + 6 + 8 + \cdots + (2n + 4) = (n + 1)(n + 4)$

4. استنتج المجموع T_n بدلالة n حيث : $T_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$.

التمرين 46. (بكالوريا 2018 ت إ)

I- لتكن المتتاليتان العدديتان (u_n) و(v_n) المعرّفتان كما يلي:

$u_0 = 50$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 6$ و $v_n = u_n - 20$

1. برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها 0,7 يُطلب تعيين حدّها الأول v_0 وكتابة عبارة v_n بدلالة n
2. أ. اكتب بدلالة n عبارة الحدّ العام u_n

ب. عيّن اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

II- تملك جريدة يومية 5000 مشترك في سنة 2016. بعد كل سنة تفقد 30% من المشتركين وتكتسب 600 مشترك جديد.

نعتبر المئة هي الوحدة ونرمز بـ u_n لعدد المشتركين في سنة $2016 + n$ أي $u_0 = 50$

1. ما هو عدد المشتركين في سنة 2017 ؟ ثمّ في سنة 2018 ؟
2. أ. برّر العبارة $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 6$

ب. ابتداءً من أي سنة يصبح عدد المشتركين أقل من 2400 مشترك ؟

التمرين 47. (بكالوريا 2018 ت إ)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$2u_{n+1} = u_n + 6$

1. أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 6$

ب. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) واستنتج أنّها متقاربة

2. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$

أ. بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يُطلب تعيين حدّها الأول v_0

ب. اكتب v_n بدلالة n ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3. احسب بدلالة n ما يلي:

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ و $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \ldots \times v_n$.

التمرين 48. (بكالوريا 2008 ع ت)

1. نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $I = [1; 2]$ بالعبارة : $f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$

أ. بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على I

ب. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I

2. (u_n) هي المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي : $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : u_n ينتمي إلى I

ب. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثمّ استنتج أنّها متقاربة

3. أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$

ب. عيّن النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 49. (بكالوريا 2008 ع ت)

(u_n) متتالية عددية معرّفة كما يلي : $u_0 = \frac{5}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$

1. أ. ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ والمنحنى (d) الممثل للدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$

ب. باستعمال الرسم السابق، مثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4

جـ. ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

2. أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 6$

ب. تحقق أنّ (u_n) متزايدة

جـ. هل (u_n) متقاربة ؟ برّر إجابتك

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$

أ. أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول

ب. اكتب عبارة u_n بدلالة n ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 50. (بكالوريا 2009 ع ت)

(u_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 1$ ، $u_1 = 2$ و $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$

المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = u_{n+1} - u_n$

1. احسب v_0 و v_1
2. برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها
3. أ. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$

ب. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] + 1$

جـ. بيّن أنّ (u_n) متقاربة.

التمرين 51. (بكالوريا 2009 ع ت)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 وأساسها q حيث :

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

1. أ. احسب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول u_1

ب. اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n

ج. احسب S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ بدلالة n ، ثمّ عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n = 728$

2. (v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي :

$v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$

أ. احسب v_2 و v_3

ب. نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$.

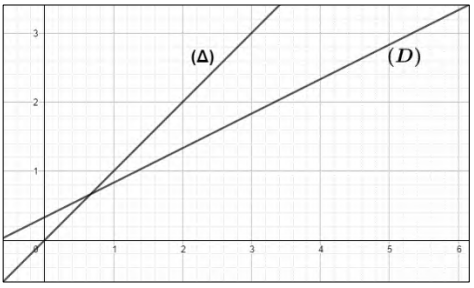
بيّن أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

ج. اكتب w_n بدلالة n ، ثمّ استنتج v_n بدلالة n.

التمرين 52. (بكالوريا 2010 ع ت)

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مثّلنا المستقيمين (Δ) و(D) معادلتيهما على الترتيب : $y = x$ و $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

1. لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$



أ. انقل الشكل ثمّ مثّل على محور الفواصل الحدود التالية : u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم

ب. عيّن إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D)

ج. أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2. أ. باستعمال الاستدلال بالتراجع ، اثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{2}{3}$

ب. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$

أ. أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدّها الأول

ب. اكتب بدلالة n عبارة الحدّ العام v_n ، واستنتج عبارة u_n بدلالة n

ج. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ واستنتج المجموع S'_n حيث : $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

التمرين 53. (بكالوريا 2011 ع ت)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 3u_n + 1$

(v_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n + \frac{1}{2}$

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات ، إجابة واحدة فقط منها صحيحة ، حددها مع التعليل.

1. المتتالية (v_n)

أ. حسابية ب. هندسية جـ. لا هندسية ولا حسابية

2. نهاية المتتالية (u_n) هي :

أ. $+\infty$ ب. $-\frac{1}{2}$ جـ. $-\infty$

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n :

$$S_n = -\frac{1}{2}(1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \cdots + e^{n\ln 3})$$

أ. $S_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$ ب. $S_n = \frac{1-3^n}{4}$ جـ. $S_n = \frac{1-3^{n+1}}{4}$

التمرين 54. (بكالوريا 2011 ع ت)

α عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1.

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$

(v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$

1. أ. أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها α

ب. اكتب بدلالة n و α عبارة v_n ثمّ استنتج بدلالة n و α عبارة u_n

جـ. عيّن قيم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها المتتالية (u_n) متقاربة

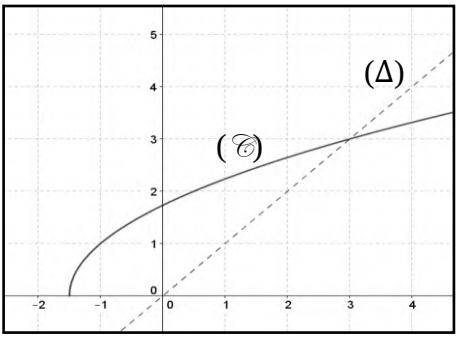
2. نضع $\alpha = \frac{3}{2}$. احسب بدلالة n المجموعين S_n و T_n حيث :

$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

التمرين 55. (بكالوريا 2012 ع ت)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة بحدها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$



1. لتكن h الدالة المعرّفة على المجال $]-\frac{3}{2}; +\infty[$ كما يلي: $h(x) = \sqrt{2x + 3}$

و $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (انظر الشكل المقابل)

أ. أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ، ثمّ مثّل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3.

(دون حسابها وموضحا خطوط الإنشاء)

ب. ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (u_n) وتقاربها

2. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$

3. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

4. استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين 56. (بكالوريا 2012 ع ت)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدّها الأول $u_0 = \frac{13}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$

2. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$.

استنتج أنّ (u_n) متزايدة تماما

3. برّر لماذا (u_n) متقاربة

4. (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\ln(u_n-3)$

أ. برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثمّ احسب حدّها الأول

ب. اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

ج. نضع من أجل كل عدد طبيعي n :

$P_n=(u_0-3)(u_1-3)(u_2-3)\times\ldots\times(u_n-3)$

اكتب P_n بدلالة n ، ثمّ بيّن أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n=\frac{1}{16}$.

التمرين 57. (بكالوريا 2013 ع ت)

I- المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\frac{5^{n+1}}{6^n}$

1. بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدّها الأول

2. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

II- المتتالية (u_n) معرّفة بـ: $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\sqrt{5u_n+6}$

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\le u_n\le 6$

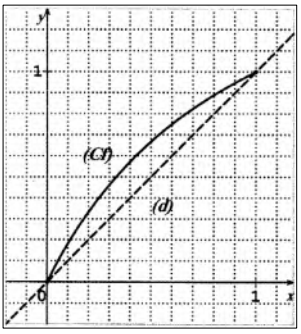
2. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

3. أ. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $6-u_{n+1}\le\frac{5}{6}(6-u_n)$

ب. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le 6-u_n\le v_n$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 58. (بكالوريا 2013 ع ت)

في الشكل المقابل ، (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرّفة على المجال $[0;1]$ بالعلاقة : $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ ، و (d) المستقيم ذو المعادلة $y=x$.



1. (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$

أ. أعد رسم هذا الشكل على ورقة الإجابة ، ثمّ مثّل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها ، مبرزا خطوط التمثيل

ب. ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها

2. أ. أثبت أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$

ب. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$

جـ. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

3. (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$

أ. برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يُطلب تحديد حدّها الأول v_0

ب. احسب نهاية (u_n).

التمرين 59. (بكالوريا 2014 ع ت)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$

و (v_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n + 4$

1. بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول
2. اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n
3. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$
4. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
5. لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n = 5(\frac{1}{v_n + 5} - 1)$

أ. بيّن أنّ المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

ب. احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - w_n)$.

التمرين 60. (بكالوريا 2014 ع ت)

I- نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام : $u_n = e^{\frac{1}{2} - n}$

1. بيّن أنّ (u_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول
2. احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. ماذا تستنتج ؟
3. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

II- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln u_n$

1. عبّر عن v_n بدلالة n ثمّ استنتج نوع المتتالية (v_n)
2. أ. احسب بدلالة n العدد P_n حيث: $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n)$

ب. عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث : $P_n + 4n > 0$.

التمرين 61. (بكالوريا 2015 ع ت)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = e^2 - 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1} = (1 + u_n)e^{-2} - 1$

1. احسب u_1 ، u_2 و u_3
2. أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 + u_n > 0$
3. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة. هل هي متقاربة ؟ علل.
4. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3(1 + u_n)$

أ. أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول

ب. اكتب v_n و u_n بدلالة n ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

ج. بيّن أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$\ln v_0 + \ln v_1 + \cdots + \ln v_n = (n + 1)(-n + 2 + \ln 3)$

التمرين 62. (بكالوريا 2015 ع ت)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

I- f الدالة المعرّفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{4x+1}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني

1. عيّن اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0; +\infty[$
2. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D) ذي المعادلة $y = x$
3. مثّل (C_f) و (D) على المجال $[0; 6]$

II- نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرّفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. أ. أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 ؛ v_0 ، v_1 ، v_2 و v_3 دون حسابها

ب. خمّن اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n)

2. أ. أثبت أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $2 \leq u_n < \alpha$ و $5 \leq v_n < \alpha$ حيث :
$\alpha = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$
ب. استنتج اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n)
3. أ. أثبت أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$
ب. بيّن أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
جـ. استنتج أنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$ ، ثمّ حدّد نهاية كل من (u_n) و (v_n).

التمرين 63. (بكالوريا 2016 ع ت)

I- f الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \sqrt{2x+8}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$
1. أ. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
ب. ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها
2. عيّن إحداثيي تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$
3. ارسم (C) و (Δ)

II- (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$
1. مثّل في الشكل السابق على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء
2. ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها
3. أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < 4$
ب. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)
جـ. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$
ثمّ استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_n \leq \frac{1}{2^n}(4 - u_0)$
د. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 64. (بكالوريا 2016 ع ت)

I- f الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{5x}{x+2}$
1. أ. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
ب. ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها
2. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f(x) \geq 0$

II- (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{5u_n}{u_n+2}$

1. أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 3$
   ب. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثمّ استنتج أنّها متقاربة
2. (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$
   أ. برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ ، يُطلب حساب حدّها الأول v_0
   ب. اكتب بدلالة n عبارة v_n ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n
   ج. احسب نهاية المتتالية (u_n)
3. اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \cdots + \frac{1}{u_n}$.

التمرين 65. (بكالوريا 2016 د2 ع ت)

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $I = [0; 4]$ كما يلي: $f(x) = \frac{13x}{9x+13}$

1. أ. بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال I
   ب. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I
2. لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = 4$ و $u_{n+1} = f(u_n)$
   أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 4$
   ب. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثمّ استنتج أنّها متقاربة
3. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \neq 0$
4. لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = 2 + \frac{13}{u_n}$
   أ. برهن أنّ المتتالية (v_n) حسابية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0
   ب. اكتب v_n بدلالة n
   ج. استنتج أنّ : $u_n = \frac{52}{36n+13}$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 66. (بكالوريا 2016 د2 ع ت)

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n+2}{u_n+3}$ ولتكن المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$

1. بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_0

2. أ. عبّر بدلالة n عن عبارة الحدّ العام v_n
ب. استنتج عبارة الحدّ العام u_n بدلالة n
جـ. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3. أ. احسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$
ب. تحقق أنّ : $\frac{1}{u_n+2} = \frac{1}{3}(1 - v_n)$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n
جـ. استنتج بدلالة n المجموع : $S'_n = \frac{1}{u_0+2} + \frac{1}{u_1+2} + \cdots + \frac{1}{u_n+2}$.

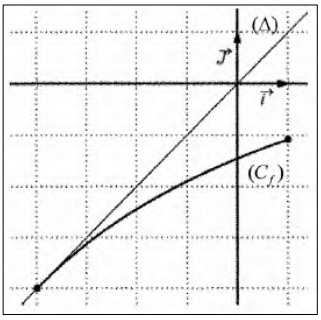
التمرين 67. (بكالوريا 2017 ع ت)

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرّفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :
$u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n+4}$ و $v_n = \frac{u_n+2}{1-u_n}$

1. أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$
ب. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما ، ثمّ استنتج انّها متقاربة

2. أ. بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ ، ثمّ عبّر عن حدّها العام v_n بدلالة n
ب. أثبت أنّ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 1 - \frac{3}{v_n+1}$ ، ثمّ استنتج النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 68. (بكالوريا 2017 ع ت)



المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$
f الدالة العددية المعرّفة على المجال $[-4; 1]$ كما يلي:
$f(x) = \frac{3x-16}{x+11}$ وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها ، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

I- تحقق أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4; 1]$ ثمّ بيّن أنّه من أجل كل $x \in [-4; 1]$ فإنّ $f(x) \in [-4; 1]$

II- (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدّها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

1. انقل الشكل المقابل ثمّ مثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (لا يُطلب حساب الحدود) ، ثمّ ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها
2. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $-4 < u_n \leq 0$ ، ثمّ بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما
3. لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرّفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$
أثبت أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{7}$ ، ثمّ احسب المجموع S حيث :
$S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \cdots + v_{2016} \times u_{2016}$.

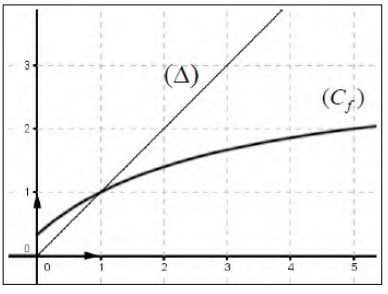
التمرين 69. (بكالوريا 2017 د2 ع ت)

نعتبر المتتاليتين (u_n) و(v_n) المعرّفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$$

1. احسب الحدّين u_1 وv_1
2. أ. اكتب $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$
ب. باستعمال البرهان بالتراجع برهن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما والمتتالية (v_n) متناقصة تماما
3. نعتبر المتتالية (w_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n = u_n - v_n$
برهن أنّ المتتالية (w_n) هندسية يُطلب تعيين حدّها الأول w_0 ، ثمّ عبّر عن w_n بدلالة n
4. بيّن أنّ المتتاليتين (u_n) و(v_n) متجاورتان.

التمرين 70. (بكالوريا 2017 د2 ع ت)



نعتبر الدالة f المعرّفة على $]0; +\infty[$ كما يلي:
$f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$ و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ والمستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$
α عدد حقيقي موجب ، (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول u_0 حيث $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$
I- عيّن قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة

II- نضع في كل ما يلي $\alpha = 5$

1. أ. انقل الشكل المقابل ثمّ مثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 دون حساب الحدود

ب. ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها

2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ. برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يُطلب تعيين حدّها الأول

ب. عبر بدلالة n عن v_n و u_n ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

3. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_n + v_{n+1} + \cdots + v_{n+2016}$

ثمّ استنتج بدلالة n المجموع S'_n حيث :

$$S'_n = \frac{1}{u_n + 1} + \frac{1}{u_{n+1} + 1} + \frac{1}{u_{n+2} + 1} + \cdots + \frac{1}{u_{n+2016} + 1}.$$

التمرين 71. (بكالوريا 2018 ع ت)

(u_n) متتالية عددية معرّفة بحدّها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$$

1. أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > -2$

ب. بيّن أنّ (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ واستنتج أنّها متقاربة

2. نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$

أثبت أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يُطلب تعيين حدّها الأول

3. عبر بدلالة n عن v_n و u_n ، واحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

4. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_0 v_0 + u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n = \frac{1}{3}(1 - n^2)$$

التمرين 72. (بكالوريا 2018 ع ت)

(u_n) متتالية عددية معرّفة كما يلي: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$$

1. احسب كلا من u_1 ، u_2 و u_3

2. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$ ثمّ استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

3. (v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = 2n + 1$

أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $e^{u_n} = v_n$

ب. استنتج عبارة الحدّ العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4. احسب المجموعين S_n و T حيث:

$$S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$$

و $T = e^{u_{1439}} + e^{u_{1440}} + \cdots + e^{u_{2018}}$

التمرين 73. (بكالوريا 2008 ت ر)

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $[0;2]$ بالعبارة : $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

1. أ. ادرس تغيّرات الدالة f على المجال $[0;2]$

ب. أنشئ (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (الوحدة على المحورين $4cm$)

جـ. برهن أنّه إذا كان $x \in [0;2]$ فإنّ $f(x) \in [0;2]$

2. نعرّف المتتالية العددية (u_n) على $\mathbb{N}$ كالآتي : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

أ. برّر وجود المتتالية (u_n). احسب الحدّين u_1 و u_2

ب. مثّل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على محور الفواصل وذلك بالاستعانة بالمنحنى (C) والمستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$

ج. ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها انطلاقا من التمثيل السابق

3. أ. برهن بالتراجع على العدد الطبيعي n أنّ : $0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

ب. برهن أنّه مهما يكن العدد الطبيعي n فإنّ : $u_{n+1} > u_n$. ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب (u_n) ؟

جـ. تحقق أنّ : $u_{n+1} - \sqrt{3} \leq \frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}(u_n - \sqrt{3})$ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

عيّن عددا حقيقيا k من $]0;1[$ بحيث : $|u_{n+1} - \sqrt{3}| \leq k|u_n - \sqrt{3}|$

بيّن أنّه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $|u_n - \sqrt{3}| \leq k^n|u_0 - \sqrt{3}|$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 74. (بكالوريا 2008 ت ر)

1. f الدالة العددية المعرّفة على $]-2;+\infty[$ كما يأتي : $f(x) = \frac{x^2+5}{x+2}$

(C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الأطوال $2cm$)

أ. احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف

ب. ادرس اتجاه تغيّر f ثم شكل جدول تغيراتها

ج. بيّن أنّ المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 2$ مقارب للمنحنى (C_f) ، ثمّ أنشئ (C_f) و (D)

د. بيّن أنّ صورة المجال $\left[1;\frac{5}{2}\right]$ محتواة في المجال $\left[1;\frac{5}{2}\right]$

2. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة بحدّها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1} = f(u_n)$

أ. باستخدام (C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y = x$ ، مثّل u_0 ، u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل (Ox)

ب. خمّن اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n)

ج. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ : $1 \leq u_n \leq \frac{5}{2}$ وأنّ المتتالية (u_n) متزايدة

د. استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 75. (بكالوريا 2009 ت ر)

1. عيّن الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2009

u_0 و a عددان طبيعيان غير معدومين ، (u_n) متتالية هندسية أساسها a وحدّها الأول u_0 بحيث : $u_1^2 + u_2 + 35a^2 = 2009$

ب. أحسب a و u_0

2. نضع $a = 7$ و $u_0 = 2$ ، أحسب u_n بدلالة n

3. نضع $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

أ. عبّر عن S_n بدلالة n

ب. عيّن العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n = 800$.

التمرين 76. (بكالوريا 2011 ت ر)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $u_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$

1. اثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإنّ : $u_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$ ، ثمّ استنتج أنّ : $u_n > 1$

2. ادرس اتجاه تغيّر (u_n) ثمّ بيّن أنّها متقاربة ، احسب نهاية (u_n)

3. ليكن الجداء P_n المعرّف كما يلي: $P_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$
اثبت بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإنّ : $P_n = \frac{2n+2}{n+2}$
4. (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $v_n = \ln u_n$
عبّر بدلالة P_n عن S_n حيث: $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

التمرين 77. (بكالوريا 2011 ت ر)

I) f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 3 - \frac{4}{e^x+1}$
($\mathscr{C}_f$) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. ادرس تغيرات الدالة f
2. عيّن المستقيمات المقاربة للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)
3. بيّن أنّ للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) نقطة انعطاف ω يُطلب تعيينها ، ثمّ اكتب معادلة لمماس ($\mathscr{C}_f$) عندها
4. لتكن g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = f(x) - x$
   أ. ادرس تغيرات الدالة g
   ب. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $2{,}7 < \alpha < 2{,}8$
5. أ. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $f(x) = 0$
   ب. ارسم المماس والمستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = x$ والمنحنى ($\mathscr{C}_f$)

II) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

1. باستخدام ($\mathscr{C}_f$) والمستقيم (Δ) ، مثّل u_0 ، u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل
2. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n < \alpha$
3. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما
4. استنتج أنّ (u_n) متقاربة وبيّن أنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

التمرين 78. (بكالوريا 2012 ت ر)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z :
$$(z^2 + 2z + 4)\left(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4\right) = 0$$
2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$
A ، B ، C و D نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب :
$z_D = -1 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = -1 - i\sqrt{3}$ ، $z_B = \sqrt{3} - i$ ، $z_A = \sqrt{3} + i$

أ. اكتب كلا من z_A ، z_B ، z_C و z_D على الشكل الأسّي.

ب. تحقق أنّ : $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = i$ ، ثمّ استنتج أنّ المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان.

3. z_n العدد المركب الذي طويلته $\frac{1}{2^n}$ و $n\frac{2\pi}{3}$ عمدة له حيث n عدد طبيعي.

L_n العدد المركب المعرف بـ: $L_n = z_D \times z_n$

أ. اكتب كلا من L_0 ، L_1 على الشكل الجبري.

ب. (u_n) هي المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $u_n = |L_n|$

- أثبت أنّ المتتالية (u_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.
- M_0، M_1،...،M_n صور الأعداد المركبة L_0 ، L_1 ، ... ، L_n على الترتيب.
احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \|\overrightarrow{OM_0}\| + \cdots + \|\overrightarrow{OM_n}\|$.
- جد نهاية S_n عندما يؤول n إلى $+\infty$.

التمرين 79. (بكالوريا 2013 ت ر)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: $u_0 = e^2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}}$

(v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{1}{2}\ln u_n + \frac{1}{2}$

1. بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثمّ احسب حدّها الأول
2. اكتب v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n
3. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$
4. احسب بدلالة n الجداء P_n حيث $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$ ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$.

التمرين 80. (بكالوريا 2014 ت ر)

I- f هي الدالة المعرّفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x) = x - \ln(x-1)$

1. حدّد حسب قيم x إشارة $f(x) - x$
2. أ. عيّن اتجاه تغيّر f

ب. بيّن أنّه إذا كان $x \in [2; e+1]$ فإنّ $f(x) \in [2; e+1]$

II- (u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = e+1$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n - 1)$

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n \in [2; e+1]$
2. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

3. برّر تقارب المتتالية (u_n) ، ثمّ احسب نهايتها.

التمرين 81. (بكالوريا 2014 ت ر)

n و p عددان طبيعيان.

1. ادرس حسب قيم n ، بواقي القسمة الإقليدية على 16 للعدد 5^n
2. نضع: $C_n = 16n + 9$ و $D_p = 5^p$
   أ. بيّن أنّه إذا كان $p = 4k + 2$ حيث k عدد طبيعي، فإنّه يوجد عدد طبيعي n يحقق $C_n = D_p$
   ب. عيّن n من أجل $p = 6$
3. f هي الدالة المعرّفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = 5^{(4x+2)} - 9$
   ادرس تغيّرات الدالة f ، ثمّ استنتج إشارة $f(x)$
4. (u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$ ،
   $u_{n+1} = 5^4\left(u_n + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{16}$
   أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{5^{(4n+2)}-9}{16}$
   ب. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإنّ u_n عدد طبيعي
5. استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

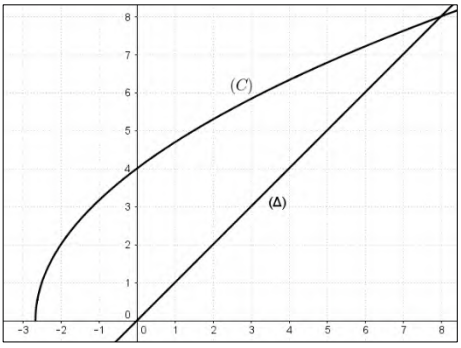
التمرين 82. (بكالوريا 2015 ت ر)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بحدّها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1} = \sqrt{6u_n + 16}$

1. h الدالة المعرّفة على المجال $\left[-\frac{8}{3}; +\infty\right[$ بما يلي:

$h(x) = \sqrt{6x + 16}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (انظر الشكل)



أ. أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ، ثمّ مثّل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3. (دون حسابها وموضحا خطوط الإنشاء)

ب. ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (u_n) وتقاربها

2. أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < 8$

ب. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}$

جـ. استنتج اتجاه تغيّر (u_n)

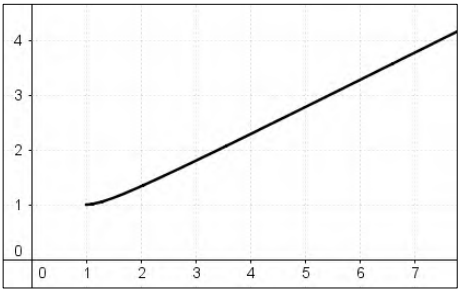
3. أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 8 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(8 - u_n)$

ب. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 8 - u_n \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ،

ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 83. (بكالوريا 2016 ت ر)

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ ، و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (الشكل المقابل)



1. بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$

2. لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

أ. انقل المنحنى المقابل ، ثمّ مثّل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) على محور الفواصل. (دون حسابها وموضحا خطوط الإنشاء)

ب. أعط تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها

ج. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 6$

د. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

ه. برّر تقارب المتتالية (u_n)

3. نعتبر المتتاليتين (v_n) و (w_n) المعرّفتين على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n-1}{u_n}$ و $w_n = \ln(v_n)$

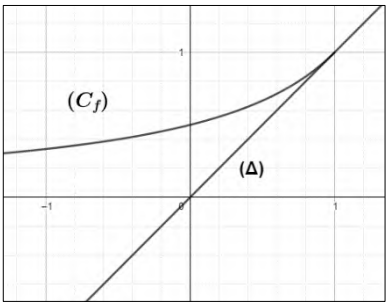
أ. برهن أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 ، يُطلب تعيين حدّها الأول

ب. اكتب w_n بدلالة n ثمّ v_n بدلالة n

ج. بيّن أنّ : $u_n = \frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}$ ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4. احسب بدلالة n المجموع التالي: $S_n = \frac{1}{w_0} + \frac{1}{w_1} + \cdots + \frac{1}{w_n}$.

التمرين 84. (بكالوريا 2017 ت ر)



نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $]-\infty;1]$ بـ: $f(x)=\frac{1}{2-x}$. (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، وليكن (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y=x$
(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدّها الأول u_0 حيث $u_0=-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$

1. أعد رسم الشكل المقابل ثمّ مثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مبرزا خطوط التمثيل، ثمّ ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها
2. برهن بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n<1$
3. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثمّ استنتج أنّها متقاربة
4. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=\frac{2}{1-u_n}$
   أ. برهن أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها 2 ، ثمّ عيّن عبارة حدّها العام v_n بدلالة n
   ب. استنتج عبارة الحدّ العام u_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 85. (بكالوريا 2017 د2 ت ر)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بـ: $u_1=\frac{1}{a}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $u_{n+1}=\frac{n+1}{an}u_n$ ، حيث a عدد حقيقي أكبر من أو يساوي 2.

1. أ. بيّن أنّ : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n>0$
   ب. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة
2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $v_n=\frac{1}{an}u_n$
   أ. بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{a}$ وعيّن حدّها الأول v_1 بدلالة a
   ب. جد بدلالة n و a عبارة الحدّ العام v_n ثمّ استنتج عبارة u_n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
3. احسب بدلالة n و a المجموع S_n حيث $S_n=u_1+\frac{1}{2}u_2+\frac{1}{3}u_3+\cdots+\frac{1}{n}u_n$ ثمّ عيّن قيمة a حيث $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\frac{1}{2016}$.

التمرين 86. (بكالوريا 2018 ت ر)

f الدالة العددية المعرّفة والمتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{2x}{e.x+1}$

و (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدّها الأول $u_0=\frac{5}{4e}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$u_{n+1}=f(u_n)$

1. أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>\frac{1}{e}$

ب. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\frac{e.u_n\left(\frac{1}{e}-u_n\right)}{e.u_n+1}$

ثمّ استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وبرّر أنّها متقاربة

2. لتكن المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n=\frac{e.u_n}{e.u_n-1}$

أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 يُطلب تعيين حدّها الأول v_0 وعبارة v_n بدلالة n

3. أ. تحقق أنّ من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n=1+\frac{1}{e.u_n-1}$ واستنتج عبارة u_n بدلالة n

ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

ب. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$

4. أ. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7

ب. عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها S_n يقبل القسمة على 7.

التمرين 87. (بكالوريا 2018 ت ر)

لتكن (u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام كما يلي: $u_n=2(3)^n$ و(v_n) متتالية عددية معرّفة بحدّها الأول $v_0=4$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1}=5v_n+u_n$

1. نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $w_n=\frac{v_n}{u_n}+\frac{1}{2}$

أثبت أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{3}$ يُطلب تعيين حدّها الأول

2. اكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$v_n=5^{n+1}-3^n$

3. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعددين 3^n و5^n على 8
4. عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد v_n على 8.

التمرين 88. (بكالوريا 2008 ر)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما $\sqrt{3}-i$ و $\sqrt{3}+3i$ على الترتيب.

1. أكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه O و يحوّل A إلى B ، ثمّ عيّن زاويته و نسبته
2. نعرّف متتالية النقط من المستوي المركب كما يأتي : $A_0 = A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $A_{n+1} = S(A_n)$. نرمز إلى لاحقة A_n بالرمز z_n
   أ. أنشئ في المستوي المركب النقط A_0 ، A_1 و A_2
   ب. برهن أنّ : $z_n = 2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$
   ج. عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية n التي تنتمي من أجلها النقطة A_n إلى المستقيم (OA_1)
3. نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة كما يلي : $u_0 = A_0A_1$ و $u_n = A_nA_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n
   أ. بيّن أنّ المتتالية (u_n) هندسية يُطلب تحديد حدها الأول u_0 و أساسها q
   ب. استنتج عبارة u_n بدلالة n
   ج. أحسب بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

التمرين 89. (بكالوريا 2008 ر)

1. نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $[1;+\infty[$ بالعبارة : $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$ يرمز (C) إلى منحنى f في المستوي المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (الوحدة على المحورين $2cm$)
   أ. احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ وفسّر النتيجة هندسيا
   ب. ادرس تغيّرات الدالة f
   ج. باستعمال منحنى دالة "الجذر التربيعي" ، أنشئ المنحنى (C)
   د. ارسم في نفس المعلم المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$
2. نعرّف المتتالية (u_n) على المجموعة $\mathbb{N}$ كالآتي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$
   أ. باستعمال (D) و (C) ، مثّل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على محور الفواصل
   ب. ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها
3. أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $2 \le u_n \le 5$ و $u_{n+1} > u_n$
   ب. استنتج أنّ (u_n) متقاربة. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 90. (بكالوريا 2008 ر)

(u_n) المتتالية المعرّفة بحدّها الأول $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$$

1. احسب u_1 ، u_2 ، u_3
2. (v_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$
   أ. برهن بالتراجع أنّ (v_n) متتالية ثابتة
   ب. استنتج عبارة u_n بدلالة n
   ج. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
3. (w_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $w_n = \frac{2}{3}n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$
   احسب المجموع S حيث : $S = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$.

التمرين 91. (بكالوريا 2009 ر)

1. نعرّف الدالة العددية f على المجال $[1;5]$ بالعبارة : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right)$.
   ليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (الوحدة على المحورين $3cm$)
   أ. ادرس تغيّرات الدالة f
   ب. أنشئ المنحنى البياني (C) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ في نفس المعلم
2. نعتبر المتتالية العددية (u_n) على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = 5$ وبالعبارة :
   $$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right)$$
   أ. احسب u_1 و u_2
   ب. استعمل المنحنى (C) والمستقيم (Δ) لتمثيل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على محور الفواصل
3. أ. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq \sqrt{5}$
   ب. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما. ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب (u_n) ؟
4. أ. برهن أنّه مهما يكن العدد الطبيعي n فإنّ : $u_{n+1} - \sqrt{5} \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{5})$
   ب. استنتج أنّ : $(u_n - \sqrt{5}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - \sqrt{5})$. ما هي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 92. (بكالوريا 2009 ر)

(u_n) المتتالية المعرّفة بحدّها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1} = 3u_n + 2n + 1$

(v_n) المتتالية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = u_n + \alpha n + \beta$ ،

حيث α و β عددان حقيقيان

1. عيّن α و β بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية يُطلب حساب أساسها وحدّها الأول
2. احسب كلا من v_n و u_n بدلالة n
3. احسب المجموعين S و S' حيث :

$S = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $S' = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

4. أ. عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5

ب. عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها u_n مضاعفا للعدد 5.

التمرين 93. (بكالوريا 2011 ر)

(u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها أعداد طبيعية تحقق:

$\begin{cases} u_4 = 15 \\ m + d = 42 \end{cases}$ حيث $\begin{cases} m = PPCM\,(u_3, u_5) \\ d = PGCD\,(u_3, u_5) \end{cases}$

1. عيّن الحدين u_3 و u_5 ، ثمّ استنتج u_0
2. أكتب (u_n) بدلالة n ، ثمّ بيّن أنّ 2010 حد من حدود (u_n) و عيّن رتبته
3. عيّن الحد الذي ابتداءً منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة من (u_n) يساوي 10080
4. n عدد طبيعي غير معدوم.

أ- أحسب بدلالة n المجموع S حيث :

$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2n}$

ب-استنتج بدلالة n المجموعين S_1 و S_2 حيث :

$S_1 = u_0 + u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n}$

$S_2 = u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n-1}$

التمرين 94. (بكالوريا 2012 ر)

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 16$ و من أجل كل عدد طبيعي n ،

$u_{n+1} = 6u_n - 9$

1) أ. احسب بواقي قسمة كل من u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 على 7

ب. خمّن قيمة للعدد a و قيمة للعدد b بحيث:

$u_{2k} \equiv a[7]$ و $u_{2k+1} \equiv b[7]$

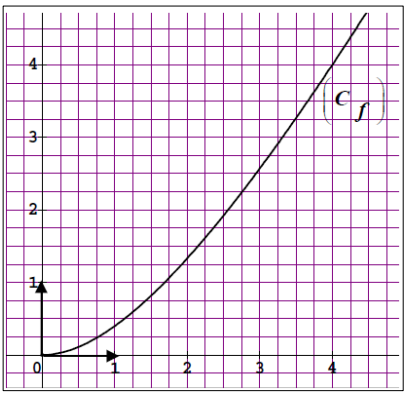
2) أ. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2} \equiv u_n[7]$

ب. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي k ، $u_{2k} \equiv 2[7]$ ، ثمّ استنتج أنّ : $u_{2k+1} \equiv 3[7]$

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - \frac{9}{5}$

أ. بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية ، يُطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب. أحسب بدلالة n كلا من u_n و S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.



التمرين 95. (بكالوريا 2014 ر)

الدالة العددية f معرّفة على $]-\infty;0]$ كما يلي: $f(x) = \frac{2x^2}{x+4}$. (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ كما هو مبيّن في الشكل أدناه.

1. بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما
2. (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$. (Δ) المستقيم الذي معادلته $y = x$

أ. باستعمال المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) مثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 دون حسابها

ب. ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

3. أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 3$

ب. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة

جـ. استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة

4. أ. ادرس إشارة العدد $7u_{n+1} - 6u_n$ واستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{6}{7}u_n$

ب. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$

جـ. احسب نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$

التمرين 96. (بكالوريا 2016 ر)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما، حدودها موجبة تماما، حدّها الأول u_0 وأساسها q حيث:

$$\begin{cases} \ln u_1 + \ln u_2 = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1+e^3) \end{cases}$$

1. احسب u_1 و u_2 ، ثمّ استنتج قيمة الأساس q
2. نضع: $u_1 = e^4$ و $q = e^3$
   أ. عبّر عن u_n بدلالة n
   ب. نضع: $S_n = \ln u_0 + \ln u_1 + \cdots + \ln u_n$. احسب S_n بدلالة n
3. من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $a_n = n + 3$
   أ. بيّن أنّ $PGCD(2S_n; a_n) = PGCD(a_n; 14)$
   ب. عيّن القيم الممكنة لـ: $PGCD(2S_n; a_n)$
   ج. عيّن قيم الأعداد الطبيعية n التي من أجلها: $PGCD(2S_n; a_n) = 7$
4. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7
5. نضع: $b_n = 3na_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1$
   عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $\begin{cases} b_n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$
6. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $(1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52)$ يقبل القسمة على 7.

التمرين 97. (بكالوريا 2017 ر)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = 1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 7u_n + 8$

1. برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n = 7^{n+1} - 4$
2. نضع من أجل كل عدد طبيعي n :
   $S_n = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
   أ. احسب بدلالة n المجموع S_n ، ثمّ جد علاقة بين S_n و S'_n
   ب. استنتج أنّ من أجل كل عدد طبيعي n : $18S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31$
3. أ. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 5
   ب. عين قيم n الطبيعية حتى يكون S'_n قابلا للقسمة على 5.

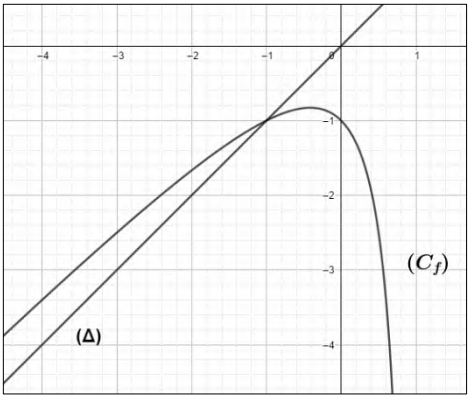
التمرين 98. (بكالوريا 2017 د2 ر)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بحدّها الأول u_0 حيث $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 4u_n + 1$

1. أ. بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$
   ب. تحقق أنّ: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، العددان الطبيعيان u_n و u_{n+1} أوليين فيما بينهما

2. لتكن المتتالية (v_n) المعرّفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = u_n + \frac{1}{3}$
   أ. أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_0
   ب. عبّر بدلالة n عن المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{3n}$
3. عيّن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين $4^n - 1$ و $4^{n+1} - 1$
4. أ. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7
   ب. عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد A_n المعرّف بـ:
   $A_n = 9S_n - 6n - 3^{6n+4}$ القسمة على 7.

التمرين 99. (بكالوريا 2018 ر)



f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-\infty; 1[$ بـ: $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$. (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = -3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$
ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$، و (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (انظر الشكل المقابل)

1. أعد رسم الشكل على ورقة الإجابة ثمّ مثّل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل، أعط تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها
2. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-3 \leq u_n < -1$
3. أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} + 1 \geq \frac{3}{4}(u_n + 1)$
   ب. استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
4. نضع $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n :
   $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right] \leq (u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \cdots + (u_n + 1) < 0$
   واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

التمرين 100. (بكالوريا 2018 ر)

f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$.

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}^*$ بحدّها العام $u_n=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{n^2}{n+1}$

أ. اكتب u_n بدلالة n ثمّ بيّن أنّ المتتالية (u_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول u_1

ب. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n=\left(\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}f\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}\right)$$

تمارين نموذجية
في
المتتاليات العددية

التمرين 1.

I- لتكن f دالة معرفة على المجال] 6 ; 3- [و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$: $f(x)=\frac{9}{6-x}$

1. احسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال] 6 ; 3- [
2. أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 3 ، ثم أنشئ المماس (Δ) و المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بدقة
3. بيّن أنه إذا كان $x<3$ فإن $f(x)<3$

II- لتكن $(U_n)_{n\in N}$ متتالية عددية معرفة كما يلي : $U_{n+1}=f(U_n)$; $U_0=-3$

1. أنشئ على محور الفواصل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 ، U_3 ، U_4
2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n<3$
3. حدد اتجاه تغير المتتالية (U_n). ماذا تستنتج ؟

III- لتكن $(V_n)_{n\in N}$ متتالية عددية معرفة كما يلي : $V_n=\frac{1}{U_n-3}$

- بيّن أن المتتالية (V_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول
- بيّن أن : $U_n=\frac{6n-3}{2n+1}$
- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$U_1\times U_2\times U_3\times\ldots\times U_n=\frac{3^n}{(2n+1)}$$

التمرين 2.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=6$ و $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+3$

1. مثل على حامل محور الفواصل كل من u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_4.
2. ضع تخمينا حول تغيرات وتقارب (u_n).
3. برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n>4$.
4. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم عيّن نهايتها.

نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n=\ln(u_n-4)$.

أ. برهن أن المتتالية (w_n) حسابية يطلب تعيّن أساسها وحدها الأول.

ب. تحقق أن: $w_n=(1-2n)\ln 2$.

ج. اكتب u_n بدلالة n.

د. احسب اصغر قيمة للعدد الطبيعي n حيث يكون: $u_n<4+2.10^{-4}$

التمرين 3.

1. لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$6\,u_{n+1} - 4\,u_n = n + 3 \;;\; u_0 = 1$$

أ. أثبت بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq \frac{1}{2}n + 1$.

ب. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

2. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 2u_n - n$

أ. أثبت أن (v_n) متتالية هندسية ، يُطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب. أكتب v_n ثم u_n بدلالة n. هل المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتان ؟

ج. احسب بدلالة n المجموعيّن :

$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

د. احسب بدلالة n الجداء : $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$.

التمرين 4.

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث :

$$ln\,u_3 + lnu_4 = 5 \;;\; lnu_3 - ln\,u_4 = -1$$

1. عيّن أساس المتتالية (u_n) و حدها الأول u_1.
2. أكتب u_n بدلالة n ، ثم احسب الجداء : $P_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$.

(v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = ln\,u_{n+1} - 2ln\,u_n$

3. أثبت أن (v_n) متتالية حسابية ، يُطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
4. احسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$.

التمرين 5.

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول u_0 و بعلاقة التراجع الآتية :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$

1. عيّن قيم u_0 التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة.
2. نفرض أن $u_0 = 0$.

- أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < 1$
- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3. (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$

- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية ، يُطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
- عبر عن v_n بدلالة n ، ثم احسب نهاية المتتالية (v_n).
- أكتب u_n بدلالة v_n ، ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n).

التمرين 6.

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان معرفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$v_n = 2 - ln\, u_n \quad ; \quad u_{n+1} = e\sqrt{u_n} \; ; \; u_0 = e$$

1. احسب u_1 ، v_0 و v_1.
2. أثبت أن (v_n) متتالية هندسية ، يُطلب تعيين أساسها.
3. أكتب v_n ثم u_n بدلالة n ، ثم ادرس تقارب المتتاليتين (u_n) و (v_n).
4. احسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$.
5. احسب بدلالة n الجداء : $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_{n-1}$.

التمرين 7.

(u_n) متتالية عددية معرّفة بحدها الأول $u_0 = 6$ والعلاقة التراجعية : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

من أجل كل عدد طبيعي n

1. احسب القيم المضبوطة للحدود u_1 ، u_2 و u_3. ماذا تخمن بالنسبة لاتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ؟
2. بيّن أنّ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 3$
3. برهن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ، ثمّ استنتج أنّها متقاربة
4. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي
   أ. عيّن العدد الحقيقي α حيث تكون المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين حدها الأول وأساسها
   ب. اكتب v_n بدلالة n واستنتج كتابة u_n بدلالة n. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
   ج. نضع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. احسب S_n بدلالة n.

التمرين 8.

1. (u_n) متتالية حسابية متناقصة معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 وأساسها r
   أ. عيّن u_0 و r علما أنّ : $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 24 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 210 \end{cases}$
   ب. اكتب u_n بدلالة n ، ثمّ احسب المجموع : $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة كما يلي : $v_n = e^{14-3n}$
   أ. بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدها الأول ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. ماذا تستنتج ؟
   ب. احسب المجموع: $S_n = v_0 + \cdots + v_n$ ، ثمّ احسب الجداء:
   $$P_n = v_0 \times \ldots \times v_n$$

ج. احسب u_{2011} ، ثمّ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$

التمرين 9.

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = \alpha$ والعلاقة التراجعية :

$u_{n+1} = \frac{5}{6}u_n + 335$ ، حيث α عدد حقيقي

1. عيّن العدد الحقيقي α حيث تكون المتتالية (u_n) ثابتة
2. نضع في كل ما يلي : $\alpha = 2009$
   أ. برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 2010$
   ب. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$. ماذا تستنتج ؟
3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n - 2010$
   أ. أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين حدها الأول وأساسها
   ب. اكتب v_n بدلالة n واستنتج كتابة u_n بدلالة n.
   ج. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
   د. احسب بدلالة n المجموعيّن: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$
   $S'_n = v_0 + 6v_1 + 6^2v_2 + \cdots + 6^n v_n$

التمرين 10.

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث : $\begin{cases} u_1 + u_3 = 30e \\ \ln(u_2) - \ln(u_4) + 2\ln 3 = 0 \end{cases}$

1. عيّن u_1 و q أساس المتتالية (u_n)
2. عبّر عن u_n بدلالة n
3. احسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$
4. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \ln(u_{n+2}) + \ln(u_{n+1})$
   أ. اكتب v_n بدلالة n ، ثمّ بيّن أنّ المتتالية (v_n) حسابية يُطلب تعيين حدها الأول وأساسها r
   ب. عيّن العدد الطبيعي n حيث : $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = 12 + 48\ln 3$.

التمرين 11.

I- لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة بحدها الأول $u_0 = \frac{3}{2}$ والعلاقة التراجعية : $u_{n+1} = \frac{3u_n+6}{u_n+4}$

من أجل كل عدد طبيعي n

1. بيّن أنّ من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 2$
2. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) واستنتج أنّها متقاربة
3. أعط تخمينا لنهاية المتتالية (u_n)

II- لتكن الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R} - \{-4\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{3x+6}{x+4}$

1. حل المعادلة $f(x) = x$ وليكن حلاها α و β حيث $\alpha < \beta$
2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$
   أ. اثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين حدها الأول وأساسها
   ب. اكتب v_n بدلالة n واستنتج كتابة u_n بدلالة n.
   ج. احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ وتحقق من صحة تخمينك.

التمرين 12.

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases}$

1. احسب u_1 ، u_2
2. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{2}{u_n + 1}$
   أ. بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين حدها الأول وأساسها
   ب. اكتب v_n بدلالة n واستنتج كتابة u_n بدلالة n. احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$
3. نضع : $S_n = v_0^2 + v_1^2 + \cdots + v_{n-1}^2$.
   أ. بيّن أنّ $S_n = \frac{9}{8}\left[1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right]$
   ب. عيّن أصغر عدد طبيعي n بحيث : $S_n > \frac{10}{9}$
4. احسب بدلالة n الجداء : $\pi_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$

التمرين 13.

نعرّف المتتاليتين (u_n) و (v_n) بـ : $u_0 = 1$ ، $v_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ ، $v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}$

1. من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $w_n = u_n - v_n$. برهن أنّ المتتالية (w_n) هندسية. عيّن نهايتها ، ثمّ عبّر عن w_n بدلالة n
2. عبّر عن $u_{n+1} - u_n$ و $v_{n+1} - v_n$ بدلالة w_n ، ثمّ استنتج اتجاه تغيّر المتتاليتين (u_n) و (v_n)
3. بيّن أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) لهما نفس النهاية يُرمز لها l

4. من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $t_n = 3u_n + 10v_n$.
برهن أنّ المتتالية (t_n) ثابتة ، ثمّ استنتج قيمة l .

التمرين 14.

لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ كما يلي : $g(x) = \frac{x^2}{2x-1}$

1. ادرس اتجاه تغير الدالة g
2. بيّن أنّه إذا كان $x \geq 1$ فإن $g(x) \geq 1$
3. نعرّف المتتالية (u_n) كما يلي : $u_{n+1} = g(u_n)$ و $u_0 = 2$
   أ. بيّن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 1$
   ب. حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n)
   ج. استنتج تقارب المتتالية (u_n)
4. نعرّف في مجموعة الأعداد الطبيعية المتتاليتين (v_n) و (w_n) كما يلي :
$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \quad \text{و} \quad w_n = \ln(v_n)$$
   أ. بيّن أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 يطلب تعيين حدها الأول
   ب. أكتب عبارة w_n و u_n بدلالة n ، ثمّ احسب نهاية u_n

التمرين 15.

I- f دالة معرفة على المجال] 4 , 2- [و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث: $f(x) = \frac{4}{4-x}$

1. احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ <}} f(x)$
2. ادرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيرات
3. أكتب معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 2$
4. بيّن أنه إذا كان : $0 \leq x \leq 2$ فإن $0 \leq f(x) \leq 2$
5. أنشئ المماس (Δ) والمنحنى (C_f)

II- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ : $v_{n+1} = f(v_n)$ و $v_0 = -1$

- عرف المتتالية (v_n)
- باستعمال المنحنى (C_f) والمماس (Δ) أنشئ الحدود v_0, v_1, v_2, v_3, v_4. ماذا تستنتج؟
- برهن بالتراجع أن : $0 \leq v_n \leq 2$
- برهن أن المتتالية (v_n) متزايدة تماما. ماذا تستنتج ؟
- برهن بالتراجع أن : $v_n = \frac{6n-2}{3n+2}$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

التمرين 16.

z_1 ، z_2 ، z_3 أعداد مركبة حيث : $z_1 = [r_1, \theta_1]$ ، $z_2 = [r_2, \theta_2]$ ، $z_3 = [r_3, \theta_3]$

1. اوجد هذه الأعداد المركبة علما أن :
   - $z_1 \times z_2 \times z_3 = 4\sqrt{2}(1+i)$
   - $\theta_1 ; \theta_2 ; \theta_3$ بهذا الترتيب ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية أساسها $\frac{\pi}{2}$ حيث : $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$
   - $r_1 ; r_2 ; r_3$ بهذا الترتيب ثلاثة حدود متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها 2

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقط A ، B و C هي صور الأعداد z_1 ، z_2 ، z_3 على الترتيب

2. أنشئ النقط A ، B و C واستنتج $\|\overrightarrow{OA}\|$ ، $\|\overrightarrow{OB}\|$ ، $\|\overrightarrow{OC}\|$
3. عيّن مجموعة النقط M التي تحقق : $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OM^2 = 22$

بوضع : $z = x + iy$. ليكن العدد المركب L حيث : $L = \frac{z+z_2}{z}$ حيث : $z \neq 0$

4. اكتب العدد المركب L على الشكل الجبري .
5. عيّن مجموعة النقط حتى يكون العدد L حقيقيا.

التمرين 17.

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث :

$$ln\, u_3 + 2ln\sqrt{u_6} = 11 \;\; ; \;\; lnu_3 - ln\, u_2 = 1$$

1. عيّن أساس المتتالية (u_n) و حدها الأول u_0.
2. أكتب u_n بدلالة n ، ثم احسب المجموع : $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

(v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = 3ln\, u_{n+1} - ln\, u_n$

3. أثبت أن (v_n) متتالية حسابية ، يُطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
4. احسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$.

التمرين 18.

u_0 و q عددان طبيعيان غير معدومين. (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q

1. عيّن u_0 و q علما أنّ u_0 أولي مع q و $3u_0^2 = u_3 - u_1$
2. نفرض أنّ $u_0 = 8$ و $q = 3$
   أ. احسب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3
   ب. عيّن عبارة الحد العام u_n بدلالة n
   ج. هل (u_n) متقاربة أم متباعدة ؟
3. نضع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

أ. تحقق أنّ : $S_n = 4(3^{n+1} - 1)$

ب. ليكن $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$. احسب P_n بدلالة n

ج. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n على 13

د. عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون S_n مضاعفا للعدد 13.

التمرين 19.

المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$. نأخذ كوحدة للأطوال $5cm$

ليكن f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z'

حيث : $z' = \frac{1}{2}(1+i)z + 1$

1. برّر أنّ f تشابه مباشر يُطلب تعيين مركزه Ω ذو اللاحقة ω ، نسبته k وزاويته θ
2. نسمي A_0 النقطة O ومن أجل كل عدد طبيعي n نضع : $A_{n+1} = f(A_n)$

أ. عيّن لاحقات النقط A_0 ، A_1 ، A_2 ، A_3 ، ثمّ علّم النقط A_0 ، A_1 ، A_2 ، A_3

ب. من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_n = \Omega A_n$. بيّن أنّ المتتالية (u_n) هندسية ، ثمّ بيّن أنّ عبارة الحد العام u_n هي : $u_n = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

ج. ابتداءً من أي رتبة n_0 تنتمي كل النقط A_n إلى القرص الذي مركزه Ω ونصف قطره 0,1 ؟

3. أ. ما هي طبيعة المثلث $\Omega A_0 A_1$ ؟ استنتج من أجل كل عدد طبيعي n طبيعة المثلث $\Omega A_n A_{n+1}$

ب. من أجل كل عدد طبيعي n ، نرمز بالرمز l_n إلى طول الخط المنكسر $A_0 A_1 A_2 \ldots A_n$ ، أي : $l_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$.

اكتب l_n بدلالة n ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} l_n$.

التمرين 20.

(u_n) متتالية حسابية حدودها موجبة ، حدها الأول u_0 وأساسها r

1. عيّن u_0 و r بحيث : $\begin{cases} u_0 + r = 4 \\ u_0^2 = u_{10} - u_1 \end{cases}$
2. نفرض : $u_0 = 3$ و $r = 1$. احسب المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
3. نعتبر المتتاليتان (v_n) و (t_n) المعرّفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$v_n = e^{u_n}$ و $t_n = -\frac{1}{u_n}$

أ. بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية ثمّ احسب عبارة P_n بدلالة n حيث :

$P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$

ب. حدّد اتجاه تغيّر كل من المتتاليتين (v_n) و (t_n).

التمرين 21.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = \frac{1}{8}$ والعلاقة التراجعية :

$$u_{n+1} = (2 - u_n)u_n$$

1. أ. أنشئ في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ الممثل للدالة f المعرّفة على المجال $[0;2]$ بالعلاقة : $f(x) = (2 - x)x$ والمستقيم (d) الذي معادلته $y = x$. (الوحدة $8cm$)

ب. مثّل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 وu_2. ماذا تخمن بالنسبة لاتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها ؟

2. أ. برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$

ب. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

ج. استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي :

$$v_n = \ln(1 - u_n)$$

أ. برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب. اكتب v_n بدلالة n واستنتج كتابة u_n بدلالة n.

ج. احسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

د. استنتج بدلالة n الجداء : $P_n = (1 - u_0)(1 - u_1) \times \ldots \times (1 - u_n)$.

التمرين 22.

لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة بحدها الأول $u_0 = \frac{11}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = 3u_n - 4$$

1. احسب الحدين u_1 و u_2
2. برهن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما
3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = 4u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي

أ. عيّن العدد الحقيقي α حيث تكون المتتالية (v_n) هندسية

ب. باستعمال قيمة α المحصّل عليها سابقا ، اكتب v_n بدلالة n ، ثمّ عبّر عن u_n بدلالة n.

ج. هل المتتالية (u_n) محدودة ؟

د. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_0 + \frac{u_1}{4} + \frac{u_2}{4^2} + \cdots + \frac{u_n}{4^n}$.

برهن أنّ المتتالية (w_n) متقاربة.

التمرين 23.

1. أ. حل المعادلة التفاضلية : $2y' - y = 0$

ب. عيّن الحل f الذي يحقق : $f(2) = 1$

2. (u_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بما يلي : $u_n = e^{\frac{n-2}{2}}$
   أ. برهن أنّ المتتالية (u_n) هندسية يُطلب تعيين حدها الأول u_0 وأساسها q
   ب. احسب بدلالة n المجموع : $S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$
3. (v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = \ln(u_n)$
   أ. برهن أنّ المتتالية (v_n) حسابية يُطلب تعيين حدها الأول v_0 وأساسها r
   ب. احسب بدلالة n المجموع : $S_2 = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$
   ج. عيّن قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون $S_2 = \frac{3}{2}$
4. احسب بدلالة n الجداء : $P = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$.

التمرين 24.

(u_n) متتالية عددية معرّفة بحدها الأول $u_0 = e^2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}}$$

(v_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \frac{1}{2}\ln u_n + \frac{1}{2}$

1. بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثمّ احسب حدها الأول
2. اكتب v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n
3. احسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$
4. احسب بدلالة n الجداء : $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$ ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$

التمرين 25.

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 16$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 6u_n - 9$

1) أ. احسب بواقي قسمة كل من u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 على 7
   ب. خمّن قيمة للعدد a و قيمة للعدد b بحيث: $u_{2k} \equiv a[7]$ و $u_{2k+1} \equiv b[7]$
2) أ. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2} \equiv u_n[7]$
   ب. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي k ، $u_{2k} \equiv 2[7]$ ، ثمّ استنتج أنّ : $u_{2k+1} \equiv 3[7]$
3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - \frac{9}{5}$
   أ. بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية ، يُطلب تعيين أساسها و حدها الأول
   ب. احسب بدلالة n كلا من u_n و S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

التمرين 26.

(u_n) متتالية هندسية معرّفة على $\mathbb{N}$ حدودها و أساسها q أعداد طبيعية غير معدومة حيث :

$$u_5 - 31u_1 - 6u_0^3 = 0 \ldots (1) \text{ و } q < u_0$$

1) تحقق أنّ المعادلة (1) تكافئ : $q(q^4 - 31) = 6u_0^2$

2) عيّن العددين الحقيقيين u_0 و q علما أنّهما أوليان فيما بيّنهما

3) كيف يُكتب الحد u_{30} في نظام التعداد ذي الأساس 3؟

4) نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

أ- احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n

ب- ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n على 7

ج- عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون S_n قابلا للقسمة على 7.

التمرين 27.

نعتبر المتتالية (u_n) للأعداد الطبيعية المعرفة بـ : $u_0 = 14$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 5u_n - 6$

1. احسب u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4. ما هو تخمينك حول الرقمين الأخيرين للعدد u_n
2. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+2} \equiv u_n[4]$ ، ثمّ استنتج أنّ:
$$u_{2k+1} \equiv 0[4] \text{ و } u_{2k} \equiv 2[4]$$
3. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $2u_n = 5^{n+2} + 3$
استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $2u_n \equiv 28[100]$
4. عيّن الرقمين الأخيرين للكتابة العشرية للعدد u_n تبعا لشفعية n.

التمرين 28.

A_0 و B_0 نقطتان من المستوي بحيث $A_0B_0 = 8\ cm$

ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A_0 ، نسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$

نعرّف متتالية النقط (B_n) بـ : $B_{n+1} = S(B_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n

1. أنشئ النقط B_1 ، B_2 ، B_3 و B_4
2. أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n المثلثان $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان
3. نعرّف المتتالية (u_n) بـ : $u_n = B_nB_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n

أ. أثبت أنّ (u_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها q

ب. اكتب عبارة u_n بدلالة n و u_0

ج. نضع : $\sum_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_n$

4. حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة : $3x - 4y = 2$

5. ليكن (Δ) المستقيم الذي يعامد المستقيم (A_0B_0) في A_0. عيّن قيّم العدد الطبيعي n التي من أجلها تنتمي النقطة B_n إلى المستقيم (Δ).

التمرين 29.

1. عيّن الجذرين التربيعيين للعدد المركّب $3-4i$
2. a ، b وc ثلاثة أعداد مركّبة تشكل بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية حسابية
   أ. عيّن الأعداد المركّبة a ، b وc حيث : $\begin{cases} a+b+c=6+6i \\ a.b.c=-30+18i \end{cases}$
   ب. نفرض $u_0=3i$ و$r=2-i$. عيّن رتبة الحدّ الذي قيمته $38-16i$
3. في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C التي لواحقها على الترتيب : $z_A=3i$ ، $z_B=2+2i$ ، $z_C=4+i$
   أ. بيّن أنّ النقط A ، B وC في استقامية
   ب. عيّن لاحقة النقطة D نظيرة B بالنسبة إلى O
   ج. عيّن لاحقة النقطة F صورة D بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$
   د. عيّن (Δ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث $|iz+3|=|z-2+4i|$
   ه. عيّن معادلة (Δ') صورة (Δ) بالتحاكي h الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$
   و. اكتب العبارة المركّبة للدوران r الذي مركزه D وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.

التمرين 30.

المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$

I- نريد إيجاد الأعداد المركّبة u التي تحقق : $u^2=21-20i$

1. اثبت أنّ u حل للمعادلة ذات المجهول المركّب z التالية :
   $$z^4-42z^2+841=0 \dots (E)$$
2. بيّن أنّ (E) تكافئ $(z^2+29)^2-100z^2=0$ ، ثمّ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)
3. استنتج قيم u

II- نعتبر النقط A,B,C وD لواحقها على الترتيب : $z_A=2-i$ ، $z_B=5-2i$ ، $z_C=-3+i$ و $z_D=-5+2i$. نعتبر التحويل f الذي يحوّل A إلى B ويحوّل C إلى D ، ولتكن M نقطة لاحقتها z وM' لاحقتها z' صورة M بالتحويل f

1. اكتب z' بدلالة z
2. عيّن طبيعة التحويل f واذكر عناصره

III- نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بـ $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=2u_n+1$

1. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، العددان u_{n+1} وu_n أوليان فيما بينهما
2. فسّر هندسيا باستعمال التحويل f ، حدود المتتالية (u_n)
3. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=2^n-1$

4. أ. بيّن أنّه من أجل كل عددين طبيعيين غير معدومين n وp حيث $n \geq p$ ، لدينا :

$$u_n = u_p + 2^p u_{n-p}$$

ب. بيّن أنّه من أجل كل $n \geq p$ ، $PGCD(u_n; u_p) = PGCD(u_p; u_{n-p})$

التمرين 31.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{10}{3}$

1. احسب u_1, u_2 ، ثمّ أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n < 5$
2. دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنّها متقاربة
3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - 5$
   أ. اثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول
   ب. اكتب عبارة v_n وu_n بدلالة n
   ج. استنتج نهاية u_n
   د. احسب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

التمرين 32.

نعرّف على $\mathbb{N}$ المتتالية (u_n) كما يلي: $u_0 = 5$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$

ونعرّف على $\mathbb{N}$ المتتالية (v_n) كما يلي: $v_n = u_n - 4$

1. اثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية، عيّن أساسها وحدها الأول
2. اكتب v_n وu_n بدلالة n. هل المتتالية (v_n) متقاربة؟
3. احسب المجموعين S_n و S'_n حيث:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n \text{ ، } S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

4. احسب S''_n ، P_n و K_n حيث:

$$S''_n = v_0^2 + v_1^2 + \cdots + v_n^2 \text{ ، } P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$$

$$K_n = v_0 + \frac{2}{5}v_1 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 v_2 + \cdots + \left(\frac{2}{5}\right)^n v_n$$

5. لتكن (w_n) متتالية حسابية أساسها α حيث $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
   برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\frac{1}{w_0 \times w_1} + \frac{1}{w_1 \times w_2} + \cdots + \frac{1}{w_n \times w_{n+1}} = \frac{n+1}{w_0 \times w_{n+1}}$$

التمرين 33.

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $9u_{n+1} = au_n + 4$

1. عيّن العدد الحقيقي a حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة
2. نضع في كل ما يأتي $a = 3$

أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n > 2$

ب. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ثمّ استنتج حصرا للعدد u_n

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة بـ: $3v_n = 3u_n - 2$

أ. اثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب. اكتب عبارة v_n بدلالة n، ثمّ استنتج أنّ: $u_n = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\right]$

4. احسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + \cdots + u_n$

التمرين 34.

I- (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما معرّفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_2 + u_4 = \frac{5}{16} \end{cases}$

1. احسب أساسها q. هل المتتالية (u_n) متقاربة؟ علل
2. اكتب عبارة u_n بدلالة n
3. احسب بدلالة n الجداء $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$
4. احسب بدلالة n المجموع $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \cdots + \frac{1}{u_n}$

II- (w_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان معرّفتان كما يلي: $w_0 = \frac{1}{3}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n $w_{n+1} = w_n(2 - w_n)$ و $v_n = 1 - w_n$

1. اكتب v_{n+1} بدلالة v_n
2. برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{(2)^n}$
3. احسب بدلالة n الجداء $\pi_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$.

التمرين 35.

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{8x-6}{x+1}$، نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ و(Δ) المستقيم الذي معادلته $y = x$

1. ادرس تغيرات الدالة f ، ثمّ أنشئ كلا من (C_f) و(Δ)
2. (u_n) متتالية عددية معرّفة كما يلي: $u_0 = 9$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = f(u_n)$

أ. تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 على محور الفواصل

ب. ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها

3. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 6$
4. أ. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ب. هل هي متقاربة؟ علل

5. أ. أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_{n+1}-6| \leq \frac{2}{7}|u_n-6|$

ب. أثبت بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_n-6| \leq 3\left(\frac{2}{7}\right)^n$

جـ. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين 36.

1. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب: $z_A = 3-i$ ، $z_B = 2-2i$ ، $z_C = -2i$ و $z_D = \bar{z}_C$

أ. علم النقط A ، B ، C و D (يتمم رسم الشكل في باقي مراحل التمرين)

ب. نضع: $k = \frac{z_D - z_C}{z_B - z_C}$. اكتب العدد k على الشكل الجبري ثمّ الأسي واستنتج طبيعة المثلث BCD

ج. عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد k^n حقيقيا سالبا تماما

2. ليكن التحويل S الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = (1-i)z + 2i$

أ. عيّن طبيعة وعناصر التحويل S

ب. لتكن Ω مركز التحويل S و ω لاحقتها. تحقق أنّ : $z' - z = i(\omega - z)$ واستنتج طبيعة المثلث $\Omega MM'$

3. نضع: $A_0 = A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $A_{n+1} = S(A_n)$ ، نرمز بـ z_n إلى لاحقة النقطة A_n ونعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بـ: $u_n = \|\Omega A_n\|$

أ. برهن أنّ (u_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب. احسب المجموع $S_n = |z_0 - \omega| + |z_1 - \omega| + \cdots + |z_n - \omega|$

التمرين 37.

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان معرّفتان في $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 4$ ، $u_{n+1} = 2u_n - 2n - 1$ و $v_n = u_n - 2n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي

1. عيّن قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها 2
2. اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n
3. احسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + \cdots + u_{n-1}$
4. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 7
5. نعتبر العدد k_n حيث: $k_n = 2^n + n^2 + 2n - 1$

عيّن قيم n بحيث يقبل العدد k_{3n} القسمة على 7.

التمرين 38.

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة كما يلي: $u_0 = u_1 = 1$

ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$: $u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}$

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2^{n+1} - 3^n$
2. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n و 3^n على 5
3. عيّن قيم n الطبيعية التي من أجلها يكون العدد $(1 + u_n)$ قابلا للقسمة على 5
4. ما هو باقي قسمة العدد $(2012^{4n-2} - 1433^{2011})$ على 5
5. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $3^{3n+2} + 2^{n+4} \equiv 0[5]$
6. احسب بدلالة n المجموع $S_n = u_2 + u_3 \ldots + u_n$

التمرين 39.

1. نعتبر المعادلة التفاضلية التالية: $y' + 2y = 0$
   أ. جد الحل $f(x)$ للمعادلة التفاضلية الذي يحقق الشرط: $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$
   ب. عيّن دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$
2. (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = \int_n^{n+1} 2e^{-2x+1}\, dx$
   أ. تحقق أنّ: $u_n = e(1 - e^{-2})e^{-2n}$
   ب. بيّن أنّ المتتالية (u_n) هندسية يُطلب تحديد أساسها q وحدّها الأول u_0
   ج. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n). هل هي متقاربة أم متباعدة؟
3. نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$
   أ. بيّن أنّ: $S_n = \int_0^n f(x)\, dx$
   ب. احسب بدلالة n المجموع S_n.

التمرين 40.

لكل سؤال إجابتان صحيحتان فقط من بين الإجابات الأربعة المقترحة، عيّنهما مع التعليل.

نعتبر المتتاليات الثلاث (u_n) ، (v_n) و (w_n) بحيث من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_n \leq v_n \leq w_n$

1. إذا كانت (v_n) تؤول إلى $(-\infty)$ ، فإنّ:
   أ. المتتالية (w_n) تؤول إلى $(-\infty)$
   ب. المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى
   ج. المتتالية (u_n) تؤول إلى $(-\infty)$
   د. المتتالية (w_n) ليس لها نهاية

2. إذا كانت $u_n > 1$ و $w_n = 2u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ ، فإنّ:
   أ. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$
   ب. المتتالية (w_n) تؤول إلى $(+\infty)$
   ج. $\lim\limits_{n\to+\infty} (w_n - u_n) = l$
   د. لا يمكننا الجزم فيما يخص نهاية (v_n)
3. إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2$ ، فإنّ:
   أ. المتتالية (v_n) محدودة من الأعلى
   ب. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$
   ج. المتتالية (v_n) ليس لها نهاية
   د. لا يمكننا الجزم فيما يخص نهاية (v_n)
4. إذا كانت $u_n = \frac{2n^2-1}{n^2}$ و $w_n = \frac{2n^2+3}{n^2}$ ، فإنّ:
   أ. $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$
   ب. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$
   ج. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$
   د. المتتالية (v_n) ليس لها نهاية.

حلول مواضيع المتتاليات العددية في البكالوريا

حل التمرين 1. (بكالوريا 2008 آداب)

$u_n = 3n + 1$

1. حساب u_0 ، u_1 ، u_2

$u_0 = 3(0) + 1 = \boxed{1}\,; u_1 = 3(1) + 1 = \boxed{4}\,; u_2 = 3(2) + 1 = \boxed{7}$

2. بيان أنّ (u_n) حسابية يُطلب تعيين أساسها واتجاه تغيّراتها

$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 1 - (3n+1) = 3n + 4 - 3n - 1 = \boxed{3}$

بما أنّ أساس المتتالية (u_n) موجب فهي متزايدة تماما

3. التحقّق أنّ العدد 2008 حدّ من حدود المتتالية (u_n) وتعيين رتبته

$u_n = 2008 \Rightarrow 3n + 1 = 2008 \Rightarrow 3n = 2007 \Rightarrow n = \dfrac{2007}{3} = \boxed{669}$

منه نستنتج أنّ العدد 2008 حدّ من حدود المتتالية (u_n) رتبته 670

4. حساب المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{669}$

$S = \dfrac{670}{2}(u_0 + u_{669}) = 335(1 + 2008) = 335 \times 2009 = \boxed{673015}$

حل التمرين 2. (بكالوريا 2008 آداب)

$u_{n+1} = 2u_n + 1$ ، $u_1 = 7$

1. حساب u_2 ، u_3 ، u_4

$u_2 = 2u_1 + 1 = 2(7) + 1 = \boxed{15}\,;\; u_3 = 2u_2 + 1 = 2(15) + 1 = \boxed{31}$

$u_4 = 2u_3 + 1 = 2(31) + 1 = \boxed{63}$

2. $v_n = u_n + 1$

أ. إثبات أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_1

$v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 2u_n + 2 = 2(u_n + 1) \Rightarrow \boxed{v_{n+1} = 2v_n}$

منه نستنتج أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدّها الأول $v_1 = u_1 + 1 = 8$

ب. كتابة عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n ثمّ استنتاج u_n بدلالة n

$v_n = v_1 \times q^{n-1} = \boxed{8 \times 2^{n-1}}\,;\; u_n = v_n - 1 = \boxed{8 \times 2^{n-1} - 1}$

ج. حساب S_n بدلالة n

$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = v_1\left(\dfrac{q^n - 1}{q - 1}\right) = 8\left(\dfrac{2^n - 1}{2 - 1}\right) = \boxed{8(2^n - 1)}$

د. تعيين n علما أنّ $S_n = 1016$

$S_n = 1016 \Rightarrow 8(2^n - 1) = 1016 \Rightarrow 2^n - 1 = \dfrac{1016}{8} = 127$

$\Rightarrow 2^n = 128 = 2^7 \Rightarrow \boxed{n = 7}$

حل التمرين 3. (بكالوريا 2009 آداب)

$u_1 = 2$ ، $u_2 - 2u_5 = 19$

1. أ. حساب الأساس r للمتتالية (u_n)

$$u_2 - 2u_5 = 19 \Rightarrow u_1 + r - 2(u_1 + 4r) = 19 \Rightarrow -u_1 - 7r = 19$$
$$\Rightarrow -7r = 19 + u_1 = 21 \Rightarrow \boxed{r = -3}$$

ب. حساب الحدّ العاشر

بما أنّ الحدّ الأول هو u_1 فإنّ الحدّ العاشر هو u_{10} ، ومنه :

$$u_{10} = u_1 + 9r = 2 + 9(-3) = 2 - 27 = \boxed{-25}$$

2. كتابة عبارة u_n بدلالة n

$$u_n = u_1 + (n-1)r = 2 - 3(n-1) = 2 - 3n + 3 \Rightarrow \boxed{u_n = -3n + 5}$$

3. بيان أنّ العدد (-2008) هو حدّا من حدود (u_n) وتحديد رتبته

$$u_n = -2008 \Rightarrow -3n + 5 = -2008 \Rightarrow -3n = -2013 \Rightarrow \boxed{n = 671}$$

منه نستنتج أنّ العدد (-2008) حدّ من حدود المتتالية (u_n) رتبته 671

4. حساب المجموع: $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{671}$

$$S = \frac{671}{2}(u_1 + u_{671}) = \frac{671}{2}(2 - 2008) = \frac{671}{2}(-2006) = \boxed{-673013}$$

حل التمرين 4. (بكالوريا 2009 آداب)

1. تعيين أساس المتتالية (u_n) وحدّها الأول u_0

$$u_5 = u_3 \times q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{u_5}{u_3} = \frac{576}{144} = 4 \Rightarrow \boxed{q = 2} \ (\text{لأنّ } q > 0)$$

$$u_3 = u_0 \times q^3 \Rightarrow u_0 = \frac{u_3}{q^3} = \frac{144}{8} = \boxed{18}$$

2. التحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 18 \times 2^n$

$$u_n = u_0 \times q^n = \boxed{18 \times 2^n}$$

3. حساب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

$$S_n = u_0\left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\right) = 18\left(\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1}\right) = \boxed{18(2^{n+1} - 1)}$$

استنتاج قيمة العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 1134$

$$S_n = 1134 \Rightarrow 18(2^{n+1} - 1) = 1134 \Rightarrow 2^{n+1} - 1 = \frac{1134}{18} = 63$$
$$\Rightarrow 2^{n+1} = 64 = 2^6 \Rightarrow n + 1 = 6 \Rightarrow \boxed{n = 5}$$

حل التمرين 5. (بكالوريا 2010 آداب)

I- $u_{10} = 31$ و $u_{15} = 46$

1. تعيين الأساس r والحدّ الأول u_0

$u_{15} = u_{10} + 5r \Rightarrow 5r = u_{15} - u_{10} = 46 - 31 = 15 \Rightarrow \boxed{r = \frac{15}{5} = 3}$

$u_{10} = u_0 + 10r \Rightarrow u_0 = u_{10} - 10r = 31 - 30 \Rightarrow \boxed{u_0 = 1}$

2. كتابة u_n بدلالة n

$u_n = u_0 + nr = 1 + 3n \Rightarrow \boxed{u_n = 3n + 1}$

3. بيان أنّ 6028 حدّ من حدود المتتالية (u_n)

$u_n = 6028 \Rightarrow 3n + 1 = 6028 \Rightarrow 3n = 6027 \Rightarrow \boxed{n = 2009}$

منه نستنتج أنّ العدد 6028 حدّ من حدود المتتالية (u_n)

4. حساب المجموع: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2009}$

$S = \frac{2010}{2}(u_0 + u_{2009}) = 1005(1 + 6028) = 1005 \times 6029 = \boxed{6059145}$

II- $v_n = 2 \times 8^n$

1. بيان أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0

$v_{n+1} = 2 \times 8^{n+1} = 2 \times 8^n \times 8 \Rightarrow \boxed{v_{n+1} = 8v_n}$

منه نستنتج أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 8$ وحدّها الأول $v_0 = 2 \times 8^0 = 2$

2. حساب بدلالة n المجموع: $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

$S' = v_0\left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\right) = 2\left(\frac{8^{n+1} - 1}{8 - 1}\right) = \boxed{\frac{2}{7}(8^{n+1} - 1)}$

حل التمرين 6. (بكالوريا 2010 آداب)

$u_1 = 6$ و $u_4 = 48$

1. أ. حساب الأساس والحدّ الأول للمتتالية (u_n)

$u_4 = u_1 \times q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{u_4}{u_1} = \frac{48}{6} = 8 \Rightarrow \boxed{q = \sqrt[3]{8} = 2}$

$u_1 = u_0 \times q \Rightarrow u_0 = \frac{u_1}{q} = \frac{6}{2} \Rightarrow \boxed{u_0 = 3}$

ب. استنتاج أنّ عبارة الحدّ العام للمتتالية (u_n) هي : $u_n = 3 \times 2^n$

$u_n = u_0 \times q^n = \boxed{3 \times 2^n}$

2. أ. بيان أنّ العدد 768 هو حدّ من حدود المتتالية (u_n)

$u_n = 768 \Rightarrow 3 \times 2^n = 768 \Rightarrow 2^n = \frac{768}{3} = 256 = 2^8 \Rightarrow \boxed{n = 8}$

منه نستنتج أنّ العدد 768 حدّ من حدود المتتالية (u_n)

ب. حساب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_7$

$$S_n = u_0\left(\frac{q^8-1}{q-1}\right) = 3\left(\frac{2^8-1}{2-1}\right) = 3(256-1) = 3\times 255 = \boxed{765}$$

3. $v_{n+1} = 2v_n - 1$ ، $v_0 = 4$

1. حساب v_1 ، v_2 ، v_3

$v_1 = 2v_0 - 1 = 2(4) - 1 = \boxed{7}$; $v_2 = 2v_1 - 1 = 2(7) - 1 = \boxed{13}$

$v_3 = 2v_2 - 1 = 2(13) - 1 = \boxed{25}$

2. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3\times 2^n + 1$

تحقيق التراجع : $v_0 = 3\times 2^0 + 1 = 4$ (محقّقة)

فرض التراجع : نفرض أنّ : $v_n = 3\times 2^n + 1$

برهان التراجع : نبرهن أنّ : $v_{n+1} = 3\times 2^{n+1} + 1$

$v_{n+1} = 2v_n - 1 = 2(3\times 2^n + 1) - 1 = 3\times 2^{n+1} + 2 - 1$

$\boxed{v_{n+1} = 3\times 2^{n+1} + 1}$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3\times 2^n + 1$

3. حساب المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_7$

$v_n = 3\times 2^n + 1 \Rightarrow \boxed{v_n = u_n + 1}$

$S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_7 = u_0 + 1 + u_1 + 1 + \cdots + u_7 + 1$

$$S' = \underbrace{(u_0 + u_1 + \cdots + u_7)}_{S} + \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{8\text{ مرات}} = S + 8 = 765 + 8 = \boxed{773}$$

حل التمرين 7. (بكالوريا 2011 آداب)

أ) $q = 3$ ، $u_0 + u_3 = 28$

1. حساب u_0 وكتابة الحدّ العام u_n بدلالة n

$u_0 + u_3 = 28 \Rightarrow u_0 + u_0.q^3 = 28 \Rightarrow u_0 + 27u_0 = 28 \Rightarrow 28u_0 = 28$

$\Rightarrow \boxed{u_0 = 1}$

$u_n = u_0 \times q^n \Rightarrow \boxed{u_n = 3^n}$

2. حساب المجموع: $S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$

$$S_1 = u_0\left(\frac{q^{10}-1}{q-1}\right) = \frac{3^{10}-1}{3-1} = \frac{59048}{2} = \boxed{29524}$$

ب) (v_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام $v_n = 1 - 5n$

1. بيان أنّ (v_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين أساسها واستنتاج اتجاه تغيّرها

$v_{n+1} = 1 - 5(n+1) = 1 - 5n - 5 = v_n - 5 \Rightarrow \boxed{v_{n+1} - v_n = -5}$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = -5$ وهي متناقصة (لأنّ $r < 0$)

2. حساب المجموع: $S_2 = v_0 + v_1 + \cdots + v_9$

$S_2 = v_0 + v_1 + \cdots + v_9 \; ; v_0 = 1 \; ; v_9 = 1 - 5(9) = 1 - 45 = -44$

$S_2 = \frac{10}{2}(v_0 + v_9) = 5(1 - 44) = 5(-43) = \boxed{-215}$

ج) $k_n = 1 + 3^n - 5n$

التحقق أنّ $k_n = u_n + v_n$

$k_n = 1 + 3^n - 5n = 1 - 5n + 3^n = \boxed{u_n + v_n}$

حساب المجموع: $S = k_0 + k_1 + \cdots + k_9$

$S = k_0 + k_1 + \cdots + k_9 = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \cdots + (u_9 + v_9)$

$S = (u_0 + u_1 + \cdots + u_9) + (v_0 + v_1 + \cdots + v_9)$

$S = S_1 + S_2 = 29524 - 215 = \boxed{29309}$

<u>حل التمرين 8. (بكالوريا 2011 آداب)</u>

$u_n = -2n$ و $v_n = 3^{-2n}$

1. (u_n) هي متتالية حسابية (اقتراح 2)

$u_{n+1} = -2(n + 1) = -2n - 2 = u_n - 2 \Rightarrow \boxed{u_{n+1} - u_n = -2}$

2. الحدّ الخامس والأربعون للمتتالية (u_n) يساوي -88 (اقتراح 3)

بما أنّ المتتالية (u_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ فإنّ حدّها الأوّل هو u_0 والحدّ الخامس والأربعون هو : $\boxed{u_{44} = -2(44) = -88}$

3. المجموع $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ يساوي $-n^2 - n$ (اقتراح 2)

$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n) = \frac{n+1}{2}(-2n)$

$S = -n(n + 1) = \boxed{-n^2 - n}$

4. (v_n) هي متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{9}$ (اقتراح 1)

$v_{n+1} = 3^{-2(n+1)} = 3^{-2n-2} = 3^{-2n} \times 3^{-2} = \boxed{v_n \times \frac{1}{9}}$

5. المتتالية (v_n) متناقصة (اقتراح 2)

بما أنّ $v_0 > 0$ و $0 < q < 1$ ، نستنتج أنّ المتتالية (v_n) متناقصة.

ملاحظة: يمكننا أيضا حساب $v_{n+1} - v_n$ وإثبات أنّه سالب :

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{9} v_n - v_n = (1 - 9 - 1)v_n = -\frac{8}{9} v_n = \boxed{-\frac{8}{9}(3^{-2n})}$

حل التمرين 9. (بكالوريا 2012 آداب)

1. أ. حساب b ، ثمّ كتابة a وc بدلالة r

$a+b+c=9 \Rightarrow 3b=9 \Rightarrow \boxed{b=3}$

$a=b-r \Rightarrow \boxed{a=3-r}\,; c=b+r \Rightarrow \boxed{c=3+r}$

ب. تعيين الأساس r واستنتاج a وc

$a\times c=-16 \Rightarrow (3-r)(3+r)=-16 \Rightarrow 9-r^2=-16 \Rightarrow r^2=25$

$\Rightarrow \boxed{r=5}$ (لأنّ المتتالية متزايدة)

$a=3-r=3-5 \Rightarrow \boxed{a=-2}\,; c=3+r=3+5 \Rightarrow \boxed{c=8}$

2. (u_n) متتالية حسابية حدّها الأول $u_0=-2$ وأساسها 5

أ. التعبير عن الحدّ العام u_n بدلالة n

$u_n=u_0+nr=-2+5n \Rightarrow \boxed{u_n=5n-2}$

ب. حساب u_{15} ، ثمّ استنتاج المجموع : $S=u_0+u_1+\cdots+u_{15}$

$u_{15}=5(15)-2=75-2 \Rightarrow \boxed{u_{15}=73}$

$S=u_0+u_1+\cdots+u_{15}=\frac{16}{2}(u_0+u_{15})=8(-2+73)=8\times 71$

$\boxed{S=568}$

3. (v_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $8v_n-u_n=0$

حساب المجموع : $S'=v_0+v_1+\cdots+v_{15}$

$8v_n-u_n=0 \Rightarrow 8v_n=u_n \Rightarrow v_n=\frac{1}{8}u_n$

$S'=v_0+v_1+\cdots+v_{15}=\frac{1}{8}(u_0+u_1+\cdots+u_{15})=\frac{1}{8}S=\frac{568}{8}$

$\boxed{S'=71}$

حل التمرين 10. (بكالوريا 2012 آداب)

I- (u_n) متتالية حسابية متزايدة ، أساسها r ، بحدّها الأول u_1 و $u_3=7$

1. حساب الجداءين T_1 و T_2 بدلالة r

$T_1=u_1\times u_5=(u_3-2r)(u_3+2r)=(u_3)^2-(2r)^2=\boxed{49-4r^2}$

$T_2=u_2\times u_4=(u_3-r)(u_3+r)=(u_3)^2-(r)^2=\boxed{49-r^2}$

2. تعيين الأساس r

$T_2-T_1=27 \Rightarrow (49-r^2)-(49-4r^2)=27 \Rightarrow 3r^2=27 \Rightarrow r^2=9$

$\Rightarrow \boxed{r=3}$ (لأنّ المتتالية (u_n) متزايدة)

II- نضع $r = 3$

1. أ. كتابة عبارة u_n بدلالة n

$u_n = u_3 + (n-3)r = 7 + 3(n-3) \Rightarrow \boxed{u_n = 3n - 2}$

ب. بيان أنّ $S_n = \frac{3n^2-n}{2}$

$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n(1+3n-2)}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$

$\boxed{S_n = \frac{3n^2 - n}{2}}$

ج. تعيين العدد الطبيعي n بحيث : $s_n = 145$

$S_n = 145 \Rightarrow \frac{3n^2 - n}{2} = 145 \Rightarrow 3n^2 - n - 290 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4(3)(-290) = 3481 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 59 \Rightarrow n = \frac{1+59}{6} = \boxed{10}$

ملاحظة : الحل الثاني $\frac{1-59}{6}$ مرفوض لأنّه غير طبيعي

2. أ. كتابة الحدّ u_{n+5} بدلالة العدد الطبيعي n

$u_{n+5} = 3(n+5) - 2 = \boxed{3n + 13}$

ب. تحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$

$\frac{u_{n+5}}{n} = \frac{3n+13}{n} = \frac{3n}{n} + \frac{13}{n} = \boxed{3 + \frac{13}{n}}$

ج. استنتاج الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعيا

يكون العدد $\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعيا لمّا يقسم n العدد 13 أي من أجل $\boxed{n \in \{1; 13\}}$

حل التمرين 11. (بكالوريا 2013 آداب)

(v_n) متتالية هندسية حدّها الأول $v_0 = 2$ وأساسها 3

1. أ. التعبير عن v_n بدلالة n

$v_n = v_0 \times q^n = \boxed{2 \times 3^n}$

ب. حساب بدلالة n الفرق $v_{n+1} - v_n$ واستنتاج اتجاه تغيّر المتتالية (v_n)

$v_{n+1} - v_n = 2 \times 3^{n+1} - 2 \times 3^n = (2 \times 3^n)(3-1) = \boxed{4 \times 3^n}$

بما أنّ الفرق $v_{n+1} - v_n$ موجب ، نستنتج أنّ المتتالية (v_n) متزايدة تماما

2. $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$

أ. **حساب بدلالة n المجموع S_n**

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} = v_0\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) = 2\left(\frac{3^n - 1}{3 - 1}\right) = \boxed{3^n - 1}$$

ب. **تعيين قيمة العدد الطبيعي n بحيث $S_n = 80$**

$$S_n = 80 \Rightarrow 3^n - 1 = 80 \Rightarrow 3^n = 81 \Rightarrow 3^n = 3^4 \Rightarrow \boxed{n = 4}$$

ج. **إثبات بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2**

تحقيق التراجع : $3^0 - 1 \equiv 0[2]$ (محققة لأنّ $3^0 - 1 = 0$ و $0 \equiv 0[2]$)

فرض التراجع : نفرض أنّ : $3^n - 1 \equiv 0[2]$

برهان التراجع : نبرهن أنّ : $3^{n+1} - 1 \equiv 0[2]$

$$3^n - 1 \equiv 0[2] \Rightarrow 3^n - 1 = 2k \Rightarrow 3^n = 2k + 1 \Rightarrow 3 \times 3^n = 3(2k + 1)$$
$$\Rightarrow 3^{n+1} = 3 \times 2k + 2 + 1 = 2(3k + 1) + 1 = 2k' + 1$$
$$\Rightarrow 3^{n+1} - 1 = 2k' \Rightarrow \boxed{3^{n+1} - 1 \equiv 0[2]}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2.

حل التمرين 12. (بكالوريا 2013 آداب)

(u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_0 وأساسها 5 بحيث : $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$

1. حساب u_0

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34 \Rightarrow u_0 + u_0 + r + u_0 + 2r + u_0 + 3r = 34$$
$$\Rightarrow 4u_0 + 6r = 34 \Rightarrow 4u_0 + 30 = 34 \Rightarrow 4u_0 = 4 \Rightarrow \boxed{u_0 = 1}$$

2. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 5n + 1$

$$u_n = u_0 + nr = 1 + 5n \Rightarrow \boxed{u_n = 5n + 1}$$

3. تعيين العدد الطبيعي n بحيث : $u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$

$$u_{n+1} + u_n - 8n = 4033 \Rightarrow 5(n + 1) + 1 + 5n + 1 - 8n = 4033$$
$$\Rightarrow 2n = 4026 \Rightarrow \boxed{n = 2013}$$

4. حساب المجموع : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2013}$

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2013} = \frac{2014}{2}(u_0 + u_{2013})$$

$$u_{2013} = 5(2013) + 1 = 10066\,; S = 1007 \times 10067 = \boxed{10137469}$$

5. $v_n = 2u_n + 1$

أ. **دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (v_n)**

$$v_{n+1} - v_n = (2u_{n+1} + 1) - (2u_n + 1) = 2(u_{n+1} - u_n) = 2 \times 5 = 10$$

بما أنّ الفرق $v_{n+1} - v_n$ موجب ، نستنتج أنّ المتتالية (v_n) متزايدة تماما

ب. **حساب المجموع : $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{2013}$**

$S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{2013} = 2u_0 + 1 + 2u_1 + 1 + \cdots + 2u_{2013} + 1$

$S' = 2(u_0 + u_1 + \cdots + u_{2013}) + (1 + 1 + \cdots + 1) = 2S + 2014$

$S' = 2(10137469) + 2014 = \boxed{20276952}$

حل التمرين 13. (بكالوريا 2014 آداب)

1. **(u_n) متتالية حسابية أساسها 3 وحدّها الأول $u_2 = 1$. الحدّ العام للمتتالية (u_n) هو: $u_n = -5 + 3n$ (الإجابة جـ)**

$u_0 = u_2 - 2r = 1 - 2(3) = -5$; $u_n = u_0 + nr = \boxed{-5 + 3n}$ ... ① ط

$u_n = u_2 + (n-2)r = 1 + 3(n-2) = 1 + 3n - 6 = \boxed{-5 + 3n}$ ... ② ط

2. **n عدد طبيعي. المجموع $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ يساوي : $\frac{n^2+n}{2}$ (الإجابة أ)**

$1 + 2 + 3 + \cdots + n$ يمثل مجموع n حد متتابع لمتتالية حسابية حدّها الأول 1 وأساسها 1، وهو يساوي:

$$\frac{n}{2}(1 + n) = \boxed{\frac{n^2 + n}{2}}$$

3. **x عدد حقيقي. تكون الأعداد $x - 2$ ، x ، $x + 1$ بهذا الترتيب حدودا متعاقبة لمتتالية هندسية إذا كان : $x = -2$ (الإجابة جـ)**

$\underbrace{(x+1)(x-2) = x^2}_{a \times c = b^2 \text{ ... (قانون الوسط الهندسي)}} \Rightarrow x^2 - x - 2 = x^2 \Rightarrow \boxed{x = -2}$

4. **(v_n) متتالية هندسية معرّفة على $\mathbb{N}$ ، حدّها العام $v_n = 2 \times 3^{n+1}$. أساس المتتالية (v_n) هو: 3 (الإجابة ب)**

$v_{n+1} = 2 \times 3^{n+2} = 2 \times 3^{n+1} \times 3 = 3v_n \Rightarrow \boxed{q = 3}$ ... ① ط

$v_n = v_0 \times q^n = 2 \times 3^n \times 3 = 6 \times 3^n \Rightarrow \boxed{v_0 = 6 \, ; q = 3}$ ... ② ط

حل التمرين 14. (بكالوريا 2014 آداب)

$v_{n+1} = 5v_n + 4$ ، $v_0 = 1$

1. **حساب v_1 ، v_2 ، v_3**

$v_1 = 5v_0 + 4 = 5(1) + 4 = \boxed{9}$

$v_2 = 5v_1 + 4 = 5(9) + 4 = \boxed{49}$

$v_3 = 5v_2 + 4 = 5(49) + 4 = \boxed{249}$

2. $u_n = v_n + 1$

أ. **بيان أنّ (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$ وحدّها الأول $u_0 = 2$**

$u_{n+1} = v_{n+1} + 1 = 5v_n + 4 + 1 = 5v_n + 5 = 5(v_n + 1) = 5u_n$

منه نستنتج أنّ (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$ وحدّها الأول u_0 حيث:

$u_0 = v_0 + 1 = 1 + 1 = 2$

ب. **كتابة u_n بدلالة n واستنتاج v_n بدلالة n**

$u_n = u_0 \times q^n \Rightarrow \boxed{u_n = 2 \times 5^n}$; $v_n = u_n - 1 \Rightarrow \boxed{v_n = 2 \times 5^n - 1}$

ج. **تحليل العدد 1250 إلى جداء عوامل أوّلية واستنتاج أنّه حدّ من حدود المتتالية (u_n)**

$1250 = 2 \times 5^4 \Rightarrow \boxed{1250 = u_4}$

3. أ. **حساب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$**

$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) = 2\left(\frac{5^n - 1}{5 - 1}\right) = \boxed{\frac{5^n - 1}{2}}$

ب. **حساب بدلالة n المجموع S'_n حيث: $S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$**

$S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} = u_0 - 1 + u_1 - 1 + \cdots + u_{n-1} - 1$

$S'_n = S_n - \left(\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\text{مرة } n}\right) = S_n - n = \frac{5^n - 1}{2} - n = \boxed{\frac{5^n - 2n - 1}{2}}$

<u>حل التمرين 15. (بكالوريا 2015 آداب)</u>

(u_n) المتتالية الهندسية التي حدّها الأول u_0 وأساسها q حيث : $u_0 = 2$ و $q = 3$

1. **حساب u_1 و u_2**

$u_1 = u_0 \times q = 2 \times 3 = \boxed{6}$

$u_2 = u_1 \times q = 6 \times 3 = \boxed{18}$

2. **كتابة u_n بدلالة n ثمّ استنتاج u_5**

$u_n = u_0 \times q^n = 2 \times 3^n ; u_5 = 2 \times 3^5 = 2 \times 243 \Rightarrow \boxed{u_5 = 486}$

3. **تعيين اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)**

طريقة ① :

$u_{n+1} - u_n = 2 \times 3^{n+1} - 2 \times 3^n = 2 \times 3^n(3 - 1) = 4 \times 3^n$

بما أنّ $4 \times 3^n > 0$ فإنّ $u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه نستنتج أنّ المتتالية (u_n) متزايدة

طريقة ② :

بما أنّ $u_0 > 0$ فإنّ $q > 1$ فإنّ المتتالية (u_n) متزايدة (خواص المتتالية الهندسية)

4. أ. حساب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) = 2\left(\frac{3^n - 1}{3 - 1}\right) = \boxed{3^n - 1}$$

ب. استنتاج قيمة المجموع : $2 + 6 + 18 + \cdots + 486$

$$2 + 6 + 18 + \cdots + 486 = u_0 + u_1 + \cdots + u_5 = 3^6 - 1 = \boxed{728}$$

5. أ. تعيين باقي القسمة الإقليدية على 5 لكل عدد من الأعداد 3 ، 3^2 ، 3^3 و 3^4

$\boxed{3 \equiv 3[5]}$; $3^2 = 9 \Rightarrow \boxed{3^2 \equiv 4[5]}$; $3^3 = 27 \Rightarrow \boxed{3^3 \equiv 2[5]}$;

$3^4 = 81 \Rightarrow \boxed{3^4 \equiv 1[5]}$

ب. استنتاج أنّه لكل k من $\mathbb{N}$: $3^{4k} \equiv 1[5]$

$$3^4 \equiv 1[5] \Rightarrow (3^4)^k \equiv 1^k[5] \Rightarrow \boxed{3^{4k} \equiv 1[5]}$$

6. أ. تعيين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $3^n - 1$ قابلا للقسمة على 5.

$$3^n - 1 \equiv 0[5] \Rightarrow 3^n \equiv 1[5] \Rightarrow \boxed{n = 4k\,;\, k \in \mathbb{N}}$$

<u>حل التمرين 16. (بكالوريا 2015 آداب)</u>

(u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_1 وأساسها r حيث : $u_2 = \frac{1}{2}$ و $u_1 - u_3 = 5$

1. أ. بيان أنّ : $u_1 + u_3 = 1$

$$u_1 + u_3 = 2u_2 = 2\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{u_1 + u_3 = 1}$$

ب. تعيين الحدّ الأوّل u_1 ، ثمّ استنتاج أنّ $r = -\frac{5}{2}$

$$\begin{cases} u_1 + u_3 = 1 \ldots ① \\ u_1 - u_3 = 5 \ldots ② \end{cases} \xrightarrow[①+②]{} 2u_1 = 6 \Rightarrow \boxed{u_1 = 3}$$

$$r = u_2 - u_1 = \frac{1}{2} - 3 \Rightarrow \boxed{r = -\frac{5}{2}}$$

2. كتابة u_n بدلالة n

$$u_n = u_1 + (n-1)r = 3 - \frac{5}{2}(n-1) \Rightarrow \boxed{u_n = -\frac{5}{2}n + \frac{11}{2}}$$

3. أ. حساب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}\left(3 - \frac{5}{2}n + \frac{11}{2}\right)$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left(\frac{-5n + 17}{2}\right) = \boxed{\frac{-5n^2 + 17n}{4}}$$

ب. تعيين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها $S_n = -\frac{657}{2}$

$$S_n = -\frac{657}{2} \Rightarrow \frac{-5n^2+17n}{4} = -\frac{657}{2} \Rightarrow 2(-5n^2+17n) = 4(-657)$$
$$\Rightarrow -10n^2+34n+2628 = 0 \Rightarrow \boxed{n = 18}$$

4. $T_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + nu_n$

أ. **تحقق أنّ لكل n من $\mathbb{N}^*$: $(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$**

$$(n+2)(9-5n) = 9n - 5n^2 + 18 - 10n = -5n^2 - n + 18$$

ب. **إثبات أنّه لكل n من $\mathbb{N}^*$: $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$**

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $T_1 = \frac{1}{6}(1+1)(14-5) = 3$ محققة لأنّ :

$$T_1 = u_1 = 3$$

فرض التراجع: نفرض أنّ $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(9-5n)$

$$T_{n+1} = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + (n+1)u_{n+1} = T_n + (n+1)u_{n+1}$$
$$T_{n+1} = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n) + (n+1)\left(-\frac{5}{2}n+3\right)$$
$$T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)\left[n(14-5n) + 6\left(-\frac{5}{2}n+3\right)\right]$$
$$T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(14n-5n^2-15n+18)$$
$$T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(-5n^2-n+18) = \boxed{\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(9-5n)}$$

<u>حل التمرين 17. (بكالوريا 2016 آداب)</u>

لتكن (u_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_n = 3n - 2$

1. حساب u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3

$$u_0 = 3(0) - 2 = \boxed{-2} \; ; \; u_1 = 3(1) - 2 = \boxed{1} \; ; \; u_2 = 3(2) - 2 = \boxed{4}$$
$$u_3 = 3(3) - 2 = \boxed{9}$$

2. بيان أنّ المتتالية (u_n) حسابية وتعيين أساسها

$$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - (3n-2) = 3n + 1 - 3n + 2 = \boxed{3}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r = 3$

3. دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

بما أنّ $r > 0$ فإنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما

4. بيان أنّ العدد 1954 حدّ من حدود المتتالية (u_n) وتعيين رتبته

$$3n - 2 = 1954 \Rightarrow 3n = 1956 \Rightarrow \boxed{n = 652}$$

منه نستنتج أنّ العدد 1954 حدّ من حدود المتتالية (u_n) رتبته 653

5. أ. حساب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n) = \frac{n+1}{2}(3n - 4)$$

$$\boxed{S_n = \frac{3n^2 - n - 4}{2}}$$

ب. تعيين العدد n بحيث يكون $S_n = 328$

$$S_n = 328 \Rightarrow \frac{3n^2 - n - 4}{2} = 328 \Rightarrow 3n^2 - n - 4 = 656$$

$$\Rightarrow 3n^2 - n - 660 = 0 \Rightarrow \boxed{n = 15}$$

حل التمرين 18. (بكالوريا 2016 آداب)

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) التي أساسها 3 وحدّها الأول u_0 وتحقق :

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$$

1. حساب الحدّ الأول u_0

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10 \Rightarrow u_0 + u_0 + r + u_0 + 2r + u_0 + 3r = 10$$

$$\Rightarrow 4u_0 + 6r = 10 \Rightarrow 4u_0 = 10 - 6r = -8 \Rightarrow \boxed{u_0 = -2}$$

2. كتابة الحدّ العام u_n بدلالة n

$$u_n = u_0 + nr = \boxed{-2 + 3n}$$

3. تعيين العدد الطبيعي n بحيث : $u_n = 145$

$$u_n = 145 \Rightarrow -2 + 3n = 145 \Rightarrow 3n = 147 \Rightarrow \boxed{n = 49}$$

4. حساب المجموع S بحيث : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{49}$

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{49} = \frac{50}{2}(u_0 + u_{49}) = 25(-2 + 145) = \boxed{3575}$$

5. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة : $v_n = 2u_n + 3$

حساب المجموع S' بحيث : $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{49}$

$$S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{49} = 2u_0 + 3 + 2u_1 + 3 + \cdots + 2u_{49} + 3$$

$$S' = 2(u_0 + u_1 + \cdots + u_{49}) + (3 + 3 + \cdots + 3) = 2S_n + 50(3)$$

$$\boxed{S' = 7300}$$

حل التمرين 19. (بكالوريا 2017 آداب)

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث : $u_1 = 20$ و $u_3 = 320$

1. بيان أنّ أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدّها الأوّل هو 5

$u_3 = u_1 \times q^2 \Rightarrow q^2 = \dfrac{u_3}{u_1} = \dfrac{320}{20} = 16 \Rightarrow \boxed{q = 4}$ (لأنّ حدود المتتالية موجبة)

$u_0 = \dfrac{u_1}{q} = \dfrac{20}{4} \Rightarrow \boxed{u_0 = 5}$

2. كتابة عبارة الحدّ العام للمتتالية (u_n) بدلالة n واستنتاج قيمة حدّها السابع

$u_n = u_0 \times q^n = \boxed{5 \times 4^n}$; $u_6 = 5 \times 4^6 = 5 \times 4096 \Rightarrow \boxed{u_6 = 20480}$

3. أ. حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S حيث : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0\left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\right) = 5\left(\frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1}\right)$$

$$\boxed{S = \frac{5}{3}(4^{n+1} - 1)}$$

ب. استنتاج قيمة المجموع S' حيث : $S' = u_0 + u_1 + \cdots + u_6$

$S' = u_0 + u_1 + \cdots + u_6 = \dfrac{5}{3}(4^7 - 1) = \boxed{27305}$

حل التمرين 20. (بكالوريا 2017 آداب)

(u_n) متتالية حسابية معرّفة بحدّها الأول $u_0 = -5$ و $u_3 + u_7 = 50$

1. تعيين الأساس r للمتتالية (u_n)

$u_3 + u_7 = 50 \Rightarrow u_0 + 3r + u_0 + 7r = 50 \Rightarrow 2u_0 + 10r = 50$

$\Rightarrow 10r = 50 - 2u_0 = 50 - 2(-5) = 60 \Rightarrow \boxed{r = 6}$

2. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 6n - 5$

$u_n = u_0 + nr = -5 + 6n \Rightarrow \boxed{u_n = 6n - 5}$

3. بيان أنّ العدد 2017 حدّ من حدود المتتالية (u_n) وتعيين رتبته

$6n - 5 = 2017 \Rightarrow 6n = 2022 \Rightarrow \boxed{n = 337}$

منه نستنتج أنّ العدد 2017 حدّ من حدود المتتالية (u_n) رتبته 338

4. حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S حيث : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \dfrac{n+1}{2}(u_0 + u_n) = \dfrac{n+1}{2}(-5 + 6n - 5)$

$S = \dfrac{(n+1)(6n-10)}{2} = (n+1)(3n-5) = \boxed{3n^2 - 2n - 5}$

حل التمرين 21. (بكالوريا 2017 د2 آداب)

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول u_0 وأساسها r

1. حساب الحدّ u_4 علما أنّ : $u_3 + u_5 = 20$

$u_3 + u_5 = 20 \Rightarrow 2u_4 = 20 \Rightarrow \boxed{u_4 = 10}$

2. حساب الحدّ u_5 علما أنّ : $2u_4 - u_5 = 7$

$2u_4 - u_5 = 7 \Rightarrow u_5 = 2u_4 - 7 = 20 - 7 \Rightarrow \boxed{u_5 = 13}$

3. استنتاج قيمة r وحساب u_0

$r = u_5 - u_4 = 13 - 10 = \boxed{3}$; $u_0 = u_4 - 4r = 10 - 12 = \boxed{-2}$

4. التحقق أنّ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3n - 2$

$u_n = u_0 + nr = -2 + 3n \Rightarrow \boxed{u_n = 3n - 2}$

5. حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n) = \frac{(n+1)(3n-4)}{2}$$

$$\boxed{S_n = \frac{3n^2 - n - 4}{2}}$$

6. جد العدد الطبيعي n حيث : $S_n = 33$

$$S_n = 33 \Rightarrow \frac{3n^2 - n - 4}{2} = 33 \Rightarrow 3n^2 - n - 4 = 66$$

$$\Rightarrow 3n^2 - n - 70 = 0 \Rightarrow \boxed{n = 5}$$

حل التمرين 22. (بكالوريا 2017 د2 آداب)

في كل حالة من الحالات الأربع الآتية اقتُرحت ثلاث إجابات ، واحدة فقط منها صحيحة ، يُطلب تحديدها مع التعليل :

1. الحدّ السادس لمتتالية حسابية أساسها 3- وحدّها الأول 1 هو: ب) -14

$u_5 = u_0 + 5r = 1 - 15 \Rightarrow \boxed{u_5 = -14}$

2. مجموع 100 حدٍ الأولى لمتتالية هندسية حدّها الأول 1 وأساسها 3 هو: جـ) $\frac{3^{100}-1}{2}$

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{99} = u_0\left(\frac{q^{100} - 1}{q - 1}\right) = \boxed{\frac{3^{100} - 1}{2}}$$

3. نضع من أجل كل عدد حقيقي x : $a = 2x + 2$ ، $b = 6x - 3$ ، $c = 4x$.
الأعداد الحقيقية a،b،c بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون: أ) $x = \frac{4}{3}$

$$a + c = 2b \Rightarrow 6x + 2 = 12x - 6 \Rightarrow 6x = 8 \Rightarrow \boxed{x = \frac{4}{3}}$$

4. المتتالية العددية (u_n) المعرّفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ هي متتالية : جـ) لا حسابية ولا هندسية

$$u_0 = 1\,; u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 1 = \frac{3}{2}; u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 1 = \frac{7}{4}$$

$$u_1 - u_0 = \frac{1}{2}\ ;\ u_2 - u_1 = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ ليست حسابية}}$$

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{3}{2}\ ;\ \frac{u_2}{u_1} = \frac{7}{6} \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ ليست هندسية}}$$

حل التمرين 23. (بكالوريا 2018 آداب)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير.

1. (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = n^2 - 1$. المتتالية (u_n) :
أ) متزايدة تماما

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 1 - (n^2 - 1) = 2n + 1$$

بما أنّ n عدد طبيعي فإنّ العبارة $2n + 1$ موجبة ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما

2. (v_n) متتالية هندسية حدّها الأول $v_1 = 3$ وأساسها $q = 2$. عبارة الحدّ العام للمتتالية (v_n) هي: ب) $v_n = 3 \times 2^{n-1}$

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = \boxed{3 \times 2^{n-1}}$$

المجموع $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ يساوي: أ) $3(2^n - 1)$

$$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = v_1\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) = 3\left(\frac{2^n - 1}{2 - 1}\right) = \boxed{3(2^n - 1)}$$

3. صندوق به 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس مرقمة من 11 إلى 20، نسحب عشوائيا كرية واحدة. احتمال الحصول على كرية تحمل عددا مضاعفا لـ 3 هو:
أ) $\frac{1}{3}$

الأعداد المضاعفة لـ 3 والمحصورة بين 11 و 20 هي: 12 ، 15 و 18 ، ومنه فإنّ احتمال الحصول على كرية تحمل عددا مضاعفا لـ 3 هو: $\boxed{\frac{3}{10}}$

احتمال الحصول على كرية تحمل عددا فرديا ومضاعفا لـ 3 هو: جـ) $\frac{1}{10}$

العدد الفردي المضاعف لـ 3 والمحصور بين 11 و 20 هو 15 ، ومنه فإنّ

احتمال الحصول على كرية تحمل عددا فرديا ومضاعفا لـ 3 هو: $\boxed{\frac{1}{10}}$

حل التمرين 24. (بكالوريا 2018 آداب)

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدّها الأول u_0 وأساسها q حيث:

$$u_0 \times u_2 = 576 \text{ و } u_0 + u_1 = 30$$

1. بيان أنّ $u_1 = 24$ ، ثمّ استنتج قيمة u_0

$u_0 \times u_2 = 576 \Rightarrow u_1^2 = 576 \Rightarrow \boxed{u_1 = \sqrt{576} = 24}$

$u_0 + u_1 = 30 \Rightarrow u_0 = 30 - u_1 = 30 - 24 \Rightarrow \boxed{u_0 = 6}$

2. بيان أنّ $q = 4$ ، وكتابة عبارة الحدّ العام u_n بدلالة n

$q = \frac{u_1}{u_0} = \frac{24}{6} \Rightarrow \boxed{q = 4}$; $u_n = u_0 \times q^n \Rightarrow \boxed{u_n = 6 \times 4^n}$

3. اثبات أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n$

$u_{n+1} - u_n = 6 \times 4^{n+1} - 6 \times 4^n = 6 \times 4^n(4 - 1) = \boxed{18 \times 4^n}$

استنتاج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

بما أنّ العبارة 18×4^n موجبة فإنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما

4. حساب 4^4 ، والتحقق أنّ العدد 1536 حدّ من حدود المتتالية (u_n) وتعيين رتبته

$4^4 = 256$; $u_n = 1536 \Rightarrow 6 \times 4^n = 1536 \Rightarrow 4^n = 256 \Rightarrow \boxed{n = 4}$

منه نستنتج أنّ العدد 1536 هو الحدّ الخامس من حدود المتتالية (u_n)

5. حساب بدلالة n المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) = 24\left(\frac{4^n - 1}{4 - 1}\right) = \boxed{8(4^n - 1)}$

حل التمرين 25. (بكالوريا 2008 ت إ)

(u_n) متتالية عددية معرّفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = \alpha \; ; \; \alpha \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9} \; ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. برهان بالتراجع أنّه في حالة $\alpha = -\frac{8}{3}$ تكون (u_n) ثابتة أي $u_{n+1} = u_n$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $u_1 = u_0$

$$u_0 = -\frac{8}{3} \Rightarrow u_n = \frac{2}{3}\left(-\frac{8}{3}\right) - \frac{8}{9} = -\frac{24}{9} = -\frac{8}{3} \Rightarrow \boxed{u_1 = u_0}$$

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_{n+1} = u_n$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_{n+2} = u_{n+1}$

$$u_{n+1} = u_n \Rightarrow \frac{2}{3}u_{n+1} - \frac{8}{9} = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9} \Rightarrow \boxed{u_{n+2} = u_{n+1}}$$

منه نستنتج أنّه في حالة $\alpha = -\frac{8}{3}$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة

2. $\alpha = 2$ ، $v_n = u_n + \frac{8}{3}$

أ. حساب u_1 ، u_2

$$u_1 = \frac{2}{3}u_0 - \frac{8}{9} = \frac{2}{3}(2) - \frac{8}{9} = \frac{4}{3} - \frac{8}{9} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

$$u_2 = \frac{2}{3}u_1 - \frac{8}{9} = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}\right) - \frac{8}{9} = \frac{8}{27} - \frac{8}{9} = \boxed{-\frac{16}{27}}$$

ب. إثبات أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_0

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{8}{3} = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9} + \frac{8}{3} = \frac{2}{3}u_n + \frac{16}{9} = \frac{2}{3}\left(u_n + \frac{8}{3}\right) = \boxed{\frac{2}{3}v_n}$$

منه نستنتج أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = \frac{2}{3}}$ وحدّها الأول v_0 ، حيث :

$$v_0 = u_0 + \frac{8}{3} = 2 + \frac{8}{3} = \boxed{\frac{14}{3}}$$

ج. كتابة عبارة u_n بدلالة n وحساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

$$v_n = v_0 . q^n = \frac{14}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \; ; u_n = v_n - \frac{8}{3} \Rightarrow \boxed{u_n = \frac{14}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{8}{3}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\underbrace{\frac{14}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\to 0} - \frac{8}{3}\right] = \boxed{-\frac{8}{3}}$$

حل التمرين 26. (بكالوريا 2008 ت إ)

$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$ ، $u_0 = 1$

1. حساب u_1 ، u_2 و u_3

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 - 1 = \frac{1}{2} - 1 = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}u_1 - 1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{4} - 1 = \boxed{-\frac{5}{4}}$$

$$u_3 = \frac{1}{2}u_2 - 1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{4}\right) - 1 = -\frac{5}{8} - 1 = \boxed{-\frac{13}{8}}$$

2. أ. إثبات بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -2$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $u_0 \geq -2$ (محققة لأنّ $u_0 = 1$)

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_n \geq -2$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_{n+1} \geq -2$

$$u_n \geq -2 \Rightarrow \frac{1}{2}u_n \geq -1 \Rightarrow \frac{1}{2}u_n - 1 \geq -2 \Rightarrow \boxed{u_{n+1} \geq -2}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -2$

ب. تعيين اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n - 1 - u_n = -\frac{1}{2}u_n - 1$$

$$u_n \geq -2 \Rightarrow -\frac{1}{2}u_n \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2}u_n - 1 \leq 0 \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة}}$$

بما أنّ المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل ومتناقصة ، فهي إذن متقاربة

3. $v_n = u_n + 2$

أ. بيان أنّ (v_n) متتالية هندسية

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 2 = \frac{1}{2}u_n - 1 + 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 = \frac{1}{2}(u_n + 2) = \boxed{\frac{1}{2}v_n}$$

منه نستنتج أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = \frac{1}{2}}$ وحدّها الأول $\boxed{v_0 = 3}$

ب. التعبير بدلالة n عن الحدّ العام v_n ثمّ u_n

$$v_n = v_0 . q^n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n ; u_n = v_n - 2 \Rightarrow \boxed{u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2}$$

ج. حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\underbrace{3\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\to 0} - 2\right] = \boxed{-2}$$

د. حساب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = v_0 - 2 + v_1 - 2 + \cdots + v_n - 2$$

$$S_n = v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) - 2(n+1) = 3\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right) - 2(n+1)$$

$$S_n = 6\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - 2n - 2 = \boxed{-6\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2n + 4}$$

حل التمرين 27. (بكالوريا 2009 ت إ)

1. $3u_{n+1} = u_n + 4$ ، $u_0 = -1$

أ. **برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون $u_n \leq 2$**

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $u_0 \leq 2$ (محققة لأنّ $u_0 = -1$)

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_n \leq 2$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_{n+1} \leq 2$

$$3u_{n+1} = u_n + 4 \Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3}$$

$$u_n \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{3}u_n \leq \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} \leq \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{u_{n+1} \leq 2}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 2$

ب. **بيان أنّ المتتالية (u_n) متزايدة**

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} - u_n = -\frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3} = \frac{-2u_n + 4}{3}$$

$$u_n \leq 2 \Rightarrow -2u_n \geq -4 \Rightarrow -2u_n + 4 \geq 0 \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة}}$$

ج. **استنتاج مع التبرير أنّ المتتالية (u_n) متقاربة**

بما أنّ المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى ومتزايدة ، فهي إذن متقاربة

2. $v_n = u_n - 2$

أ. **إثبات أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد حدّها الأول وأساسها**

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} - 2 = \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(u_n - 2) = \boxed{\frac{1}{3}v_n}$$

منه نستنتج أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q=\frac{1}{3}}$ وحدّها الأول v_0 ، حيث :

$$v_0 = u_0 - 2 = -1 - 2 = \boxed{-3}$$

ب. كتابة الحدّ العام v_n بدلالة n ، ثمّ استنتاج الحدّ العام u_n بدلالة n

$$v_n = v_0.q^n = -3\left(\frac{1}{3}\right)^n ; u_n = v_n + 2 \Rightarrow \boxed{u_n = -3\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2}$$

ج. حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\underbrace{-3\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{\to 0} + 2\right] = \boxed{2}$$

د. حساب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = v_0 + 2 + v_1 + 2 + \cdots + v_n + 2$$

$$S_n = v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) + 2(n+1) = -3\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right) + 2(n+1)$$

$$S_n = -\frac{9}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + 2n + 2 = \boxed{\frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 2n - \frac{5}{2}}$$

حل التمرين 28. (بكالوريا 2009 ت إ)

$u_{n+1} = 3u_n - 2$ ، $u_0 = -1$

1. حساب u_1 ، u_2

$$u_1 = 3u_0 - 2 = 3(-1) - 2 = \boxed{-5}$$

$$u_2 = 3u_1 - 2 = 3(-5) - 2 = \boxed{-17}$$

2. لتكن المتتالية (v_n) المعرّفة بـ : $v_n = u_n - 1$

أ. إثبات أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_0

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 3u_n - 3 = 3(u_n - 1) = \boxed{3v_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 وحدّها الأول $v_0 = -2$

ب. كتابة عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 \times q^n = \boxed{-2 \times 3^n}$$

3. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = (-4) \times 3^n$

$$u_{n+1} - u_n = (v_{n+1} + 1) - (v_n + 1) = v_{n+1} - v_n$$

$$= -2 \times 3^{n+1} + 2 \times 3^n = 3^n(-2 \times 3 + 2) = \boxed{(-4) \times 3^n}$$

استنتاج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

$(-4) \times 3^n < 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0 \Rightarrow$ المتتالية (u_n) متناقصة تماما

4. تعيين العدد الطبيعي n بحيث يكون : $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = n - 79$

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = v_0 + 1 + v_1 + 1 + \cdots + v_n + 1$$

$$= v_0\left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\right) + (n + 1) = -2\left(\frac{3^{n+1} - 1}{2}\right) + (n + 1)$$

$$= -3^{n+1} + 1 + n + 1 = \boxed{n + 2 - 3^{n+1}}$$

$$n + 2 - 3^{n+1} = n - 79 \Rightarrow 2 - 3^{n+1} = -79 \Rightarrow 3^{n+1} = 81 = 3^4$$

$$\Rightarrow n + 1 = 4 \Rightarrow \boxed{n = 3}$$

حل التمرين 29. (بكالوريا 2010 ت إ)

1. حساب بدلالة n المجموع S_n:

S_n هو مجموع $(n + 1)$ حد متتابع لمتتالية هندسية حدّها الأول 1 وأساسها e

$$S_n = 1 + e + e^2 + \cdots + e^n = \boxed{\frac{e^{n+1} - 1}{e - 1}}$$

2. $w_n = 2n + 4 + e^n$. بيان أنّ : $w_n = u_n + v_n$

نضع: $u_n = 2n + 4$ و $v_n = e^n$

$u_{n+1} - u_n = 2(n + 1) + 4 - 2n - 4 = 2 \Rightarrow \boxed{r = 2\,;\, u_0 = 4}$

$v_{n+1} = e^{n+1} = e^n \times e = v_n \times e \Rightarrow \boxed{q = e\,;\, v_0 = e^0 = 1}$

منه نستنتج أنّ : $w_n = u_n + v_n$ حيث (u_n) متتالية حسابية حدّها الأول 4 وأساسها 2 و (v_n) متتالية هندسية حدّها الأول 1 وأساسها e

3. إثبات أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ :

$$4 + 6 + 8 + \cdots + (2n + 4) = (n + 1)(n + 4)$$

$$4 + 6 + 8 + \cdots + (2n + 4) = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{n + 1}{2}(u_0 + u_n)$$

$$= \frac{n + 1}{2}(2n + 8) = \boxed{(n + 1)(n + 4)}$$

4. استنتاج المجموع S بدلالة n:

$$S = w_0 + w_1 + \cdots + w_n = (u_0 + u_1 + \cdots + u_n) + (v_0 + v_1 + \cdots + v_n)$$

$$= \boxed{(n + 1)(n + 4) + \frac{e^{n+1} - 1}{e - 1}}$$

حل التمرين 30. (بكالوريا 2010 ت إ)

$u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{4}$ ، $u_0 = 1$

1. حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3

$$u_1 = \frac{3u_0+2}{4} = \frac{3(1)+2}{4} = \boxed{\frac{5}{4}}$$

$$u_2 = \frac{3u_1+2}{4} = \frac{3\left(\frac{5}{4}\right)+2}{4} = \boxed{\frac{23}{16}}$$

$$u_3 = \frac{3u_2+2}{4} = \frac{3\left(\frac{23}{16}\right)+2}{4} = \boxed{\frac{101}{64}}$$

2. أ. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ : $u_n < 2$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $u_n < 2$. محققة لأنّ: $u_0 = 1$

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_n < 2$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_n < 2$

$$u_n < 2 \Rightarrow 3u_n + 2 < 8 \Rightarrow \frac{3u_n+2}{4} < 2 \Rightarrow \boxed{u_{n+1} < 2}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 2$

ب. بيان أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n+2}{4} - u_n = \boxed{\frac{2-u_n}{4}}$$

$u_n < 2 \Rightarrow -u_n > -2 \Rightarrow 2 - u_n > 0 \Rightarrow$ المتتالية (u_n) متزايدة تماما

جـ. استنتاج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة

بما أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي إذن متقاربة

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n - 2$

أ. بيان أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدّها الأول

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{3u_n+2}{4} - 2 = \frac{3u_n-6}{4} = \frac{3}{4}(u_n - 2) = \boxed{\frac{3}{4}v_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ وحدّها الأول $v_0 = u_0 - 2 = -1$

ب. كتابة عبارة v_n بدلالة n واستنتاج أنّ: $u_n = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$$v_n = v_0 \times q^n = \boxed{-\left(\frac{3}{4}\right)^n} \; ; \; v_n = u_n - 2 \Rightarrow u_n = v_n + 2 = \boxed{2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

ج. حساب نهاية المتتالية (u_n)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 2-\left(\frac{3}{4}\right)^n = 2\ ;\ \left[\left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0\right]$$

4. حساب المجموع S_n بدلالة n:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = -\left(\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}}\right)$$

$$\boxed{S_n = 4\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right]}$$

استنتاج أنّ: $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = v_0 + 2 + v_1 + 2 + \cdots + v_n + 2 = S_n + 2(n+1)$$
$$= 4\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right] + 2n + 2 = 4\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} + 2n - 2$$
$$= 4\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2 = \boxed{3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2}$$

حل التمرين 31. (بكالوريا 2011 ت إ)

$$u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5}\ ،\ u_0 = \frac{1}{2}$$

1. حساب u_1 و u_2

$$u_1 = \frac{2}{5}u_0 + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{5} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

$$u_2 = \frac{2}{5}u_1 + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{1}{5} = \boxed{\frac{9}{25}}$$

2. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{1}{3}$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $u_0 > \frac{1}{3}$. محققة لأنّ: $u_0 = \frac{1}{2}$

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_n > \frac{1}{3}$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_{n+1} > \frac{1}{3}$

$$u_n > \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{5}u_n > \frac{2}{15} \Rightarrow \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5} > \frac{2}{15} + \frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{u_{n+1} > \frac{1}{3}}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{1}{3}$

3. بيان أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثمّ استنتاج أنّها متقاربة

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5} - u_n = \boxed{\frac{1 - 3u_n}{5}}$$

$$u_n > \frac{1}{3} \Rightarrow -3u_n < -1 \Rightarrow 1 - 3u_n < 0 \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة تماما}}$$

بما أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد $\frac{1}{3}$ فهي إذن متقاربة

4. لتكن المتتالية العددية (v_n) حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - \frac{1}{3}$

أ. بيان أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدّها الأول

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{2}{5}u_n - \frac{2}{15} = \frac{2}{5}\left(u_n - \frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{2}{5}v_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ وحدّها الأول $v_0 = u_0 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

ب. كتابة كلا من v_n و u_n بدلالة n

$$v_n = v_0 \times q^n = \boxed{\frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^n} \; ; u_n = v_n + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{3}}$$

ج. حساب نهاية المتتالية (u_n)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}} \; ; \left[\left(\frac{2}{5}\right)^n \to 0\right]$$

حل التمرين 32. (بكالوريا 2012 ت إ)

$u_0 = 1$ ، $u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{9}$

1. أ. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{2}{3}$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $u_n > \frac{2}{3}$. محققة لأنّ: $u_0 = 1$

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_n > \frac{2}{3}$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_n > \frac{2}{3}$

$$u_n > \frac{2}{3} \Rightarrow 3u_n > 2 \Rightarrow 3u_n + 4 > 6 \Rightarrow \frac{3u_n + 4}{9} > \frac{6}{9} \Rightarrow \boxed{u_{n+1} > \frac{2}{3}}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{2}{3}$

ب. بيان أنّ المتتالية (u_n) متناقصة

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 4}{9} - u_n = \boxed{\frac{-6u_n + 4}{9}}$$

$$u_n > \frac{2}{3} \Rightarrow -6u_n < -4 \Rightarrow -6u_n + 4 < 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0$$

ومنه نستنتج أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما

2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$

أ. بيان أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدّها الأول

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{3u_n + 4}{9} - \frac{2}{3} = \frac{3u_n - 2}{9} = \frac{1}{3}\left(u_n - \frac{2}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{3}v_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدّها الأول $v_0 = u_0 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

ب. كتابة عبارة v_n بدلالة n ، واستنتاج أنّ: $u_n = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\right]$

$$v_n = v_0 \times q^n = \boxed{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n} \; ; u_n = v_n + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\right]}$$

ج. تعيين نهاية المتتالية (u_n)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\right] = \boxed{\frac{2}{3}} \; ; \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0\right]$$

3. حساب المجموع S_n بدلالة n:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = v_0 + \frac{2}{3} + v_1 + \frac{2}{3} + \cdots + v_n + \frac{2}{3}$$

$$S_n = v_0\left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right) + \frac{2}{3}(n+1) = \frac{1}{3}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}\right) + \frac{2}{3}(n+1)$$

$$\boxed{S_n = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] + \frac{2}{3}(n+1)}$$

<u>حل التمرين 33. (بكالوريا 2012 ت إ)</u>

1. أ. حساب كلا من u_0 ، u_1 و u_2

$$u_0 = \boxed{50.000} \; ; u_1 = 50.000(1{,}05) - 5000 = \boxed{47.500}$$

$$u_2 = 47.500(1{,}05) - 5000 = \boxed{44.875}$$

ب. المتتالية (u_n) ليست هندسية ولا حسابية

$u_0 \times u_2 \neq u_1^2 \Rightarrow$ المتتالية (u_n) ليست هندسية

$u_0 + u_2 \neq 2u_1 \Rightarrow$ المتتالية (u_n) ليست حسابية

جـ. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1,05u_n - 5000$

$u_{n+1} = u_n + 0,05u_n - 5000 = \boxed{1,05u_n - 5000}$

2. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 100000$

أ. بيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية ، حدّد أساسها وحدّها الأول

$v_{n+1} = u_{n+1} - 100.000 = 1,05u_n - 5000 - 100.000$

$v_{n+1} = 1,05u_n - 105.000 = 1,05(u_n - 100.000) = \boxed{1,05\ v_n}$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $1,05$ وحدّها الأول $v_0 = -50.000$

ب. كتابة v_n بدلالة n ، واستنتاج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n = -50000 \times (1,05)^n + 100000$$

$v_n = v_0 \times q^n = \boxed{-50.000(1,05)^n}$

$u_n = v_n + 100.000 = \boxed{-50.000(1,05)^n + 100.000}$

3. أ. حساب المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية عام 2015

نهاية عام 2015 يعني بداية عام 2016 ، ومنه:

$2016 = 2008 + 8 \Rightarrow u_8 = -50.000(1,05)^8 + 100.000$

$= \boxed{26.127,23\ DA}$

ب. تعيين السنة حيث لا تسمح إدارة الصندوق لهذا الشخص بالسحب من حسابه:

$u_n < 5000 \Rightarrow -50.000(1,05)^n + 100.000 < 5000$

$\Rightarrow -50.000(1,05)^n < -95.000 \Rightarrow 1,05^n > 1,9$

$\Rightarrow \ln 1,05^n > \ln 1,9 \Rightarrow n > \dfrac{\ln 1,9}{\ln 1,05} \Rightarrow \boxed{n = 14}$

حل التمرين 34. (بكالوريا 2013 ت إ)

$u_0 = 3$ ، $u_{n+1} = \left(\frac{2a+1}{3}\right)u_n - \frac{2a+4}{3}$

1. تعيين قيمة a التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة

(u_n) ثابتة $\Rightarrow u_{n+1} = u_n = u_0 \Rightarrow 3 = 3\left(\dfrac{2a+1}{3}\right) - \dfrac{2a+4}{3}$

$$\Rightarrow 3 = \frac{4a-1}{3} \Rightarrow 4a = 10 \Rightarrow \boxed{a = \frac{5}{2}}$$

2. تعيين قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية

(u_n) حسابية $\Rightarrow \frac{2a+1}{3} = 1 \Rightarrow 2a+1 = 3 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow \boxed{a = 1}$

حساب عندئذ u_n ومجموع n حدا الأولى من المتتالية

$u_{n+1} = u_n - 2 \Rightarrow r = -2$

$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = \frac{n}{2}(u_0 + u_{n-1}) = \frac{n}{2}(u_0 + u_0 + (n-1)r)$

$S_n = \frac{n}{2}[3 + 3 - 2(n-1)] = n(-n+4) = \boxed{-n^2 + 4n}$

3. تعيين قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) هندسية

(u_n) هندسية $\Rightarrow \frac{2a+4}{3} = 0 \Rightarrow 2a+4 = 0 \Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow \boxed{a = -2}$

تعيين كلا من u_{50} ومجموع 50 حدا الأولى منها

$u_{n+1} = -u_n \Rightarrow q = -1 \; ; u_{50} = u_0 \times q^{50} = 3(-1)^{50} = \boxed{3}$

$S' = u_0 + u_1 + \cdots + u_{49} = u_0\left(\frac{1-q^{50}}{1-q}\right) = \frac{3}{2}[1 - (-1)^{50}] = \boxed{0}$

4. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإنّ: $u_n = 3^n + 2$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $u_0 = 3^0 + 2$. محققة لأنّ: $u_0 = 3$

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_n = 3^n + 2$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_{n+1} = 3^{n+1} + 2$

$a = 4 \Rightarrow u_{n+1} = 3u_n - 4 = 3(3^n + 2) - 4 = 3.3^n + 2 = \boxed{3^{n+1} + 2}$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3^n + 2$

بيان أنّ : $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 4n + 3)$

$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 3^0 + 2 + 3^1 + 2 + \cdots + 3^n + 2$

$$= \frac{3^{n+1}-1}{3-1} + 2(n+1) = \frac{1}{2}[(3^{n+1} - 1) + 4(n+1)]$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}(3^{n+1} + 4n + 3)}$$

حل التمرين 35. (بكالوريا 2013 ت إ)

$u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 6$ ، $u_0 = 6$

1. أ. حساب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4

$$u_1 = -\frac{1}{2}u_0 + 6 = -\frac{1}{2}(6) + 6 = \boxed{3}$$

$$u_2 = -\frac{1}{2}u_1 + 6 = -\frac{1}{2}(3) + 6 = \boxed{\frac{9}{2}}$$

$$u_3 = -\frac{1}{2}u_2 + 6 = -\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}\right) + 6 = \boxed{\frac{15}{4}}$$

$$u_4 = -\frac{1}{2}u_3 + 6 = -\frac{1}{2}\left(\frac{15}{4}\right) + 6 = \boxed{\frac{33}{8}}$$

ب. المتتالية (u_n) ليست رتيبة على $\mathbb{N}$

$\begin{cases} u_1 < u_2 \\ u_2 > u_3 \end{cases} \Rightarrow$ المتتالية (u_n) ليست رتيبة

2. أ. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(u_n - 4)$

$$u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}u_n + 2 = \boxed{-\frac{1}{2}(u_n - 4)}$$

ب. استنتاج أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(u_n - 4) = \boxed{-\frac{1}{2}v_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $-\frac{1}{2}$ وحدّها الأول $v_0 = u_0 - 4 = 2$

جـ. كتابة v_n ثمّ u_n بدلالة n

$$v_n = v_0 \times q^n = \boxed{2\left(-\frac{1}{2}\right)^n} \; ; u_n = v_n + 4 = \boxed{2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 4}$$

د. بيان أنّ (u_n) متقاربة

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 4 = 4 \Rightarrow$$ المتتالية (u_n) متقاربة

3. التأكّد ثانية من نتيجة السؤال 1.ب باستعمال عبارة u_n

$$u_{n+1} - u_n = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 4 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 4 = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(-\frac{1}{2} - 1\right)$$

$$= \boxed{-3\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

بما أنّ إشارة $3-\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ليست ثابتة، نستنتج أنّ المتتالية (u_n) ليست رتيبة على $\mathbb{N}$.

حل التمرين 36. (بكالوريا 2014 ت إ)

1. إذا كانت (u_n) متقاربة فإنّ (v_n) متقاربة: خطأ

$$u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow v_n=\ln\left(\frac{1}{2}\right)^n=n\ln\frac{1}{2}=-n\ln 2$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0 \Rightarrow (u_n) \text{ متقاربة}$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n=\lim_{n\to+\infty} -n\ln 2=-\infty \Rightarrow (v_n) \text{ متباعدة}$$

2. إذا كانت (u_n) متناقصة فإنّ (v_n) متناقصة: صحيح

$$(u_n) \text{ متناقصة} \Rightarrow u_{n+1}<u_n \Rightarrow \ln u_{n+1}<\ln u_n \Rightarrow v_{n+1}<v_n$$
$$\Rightarrow (v_n) \text{ متناقصة}$$

3. إذا كانت (u_n) هندسية فإنّ (v_n) حسابية: صحيح

$$(u_n) \text{ هندسية} \Rightarrow u_{n+1}=u_n\times q \Rightarrow \ln u_{n+1}=\ln u_n+\ln q$$
$$\Rightarrow v_{n+1}=v_n+\ln q \Rightarrow (v_n) \text{ حسابية}$$

حل التمرين 37. (بكالوريا 2014 ت إ)

$$u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-1 \text{ ، } u_0=3$$

1. أ. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ $u_n>-3$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $u_0>-3$. محققة لأنّ: $u_0=3$

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_n>-3$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_{n+1}>-3$

$$u_n>-3 \Rightarrow \frac{2}{3}u_n>-2 \Rightarrow \frac{2}{3}u_n-1>-3 \Rightarrow \boxed{u_{n+1}>-3}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>-3$

ب. بيان أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n-1-u_n=\boxed{-\frac{1}{3}u_n-1}$$

$$u_n>-3 \Rightarrow -\frac{1}{3}u_n<1 \Rightarrow -\frac{1}{3}u_n-1<0 \Rightarrow \boxed{(u_n) \text{ متناقصة تماما}}$$

جـ. استنتاج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة

بما أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد -3 فهي إذن متقاربة

2. $v_0 = 6$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) = 18$

أ. بيان أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) = \frac{v_0}{1-q}$

$$\lim_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) = \lim_{n\to+\infty} v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = \boxed{\frac{v_0}{1-q}}$$

(v_n) متقاربة $\Rightarrow -1 < q < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0)$

ب. حساب الأساس q وتعيين عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n

$$\lim_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) = 18 \Rightarrow \frac{v_0}{1-q} = 18 \Rightarrow 1 - q = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{q = \frac{2}{3}}$$

$$v_n = v_0 \times q^n = \boxed{6\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

ج. برهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = v_n - 3$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $u_0 = v_0 - 3$. محققة لأنّ: $u_0 = 3$

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_n = v_n - 3$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_{n+1} = v_{n+1} - 3$

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1 = \frac{2}{3}(v_n - 3) - 1 = \frac{2}{3}v_n - 3 = \boxed{v_{n+1} - 3}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = v_n - 3$

استنتاج عبارة u_n بدلالة n

$$u_n = v_n - 3 = \boxed{6\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3}$$

حل التمرين 38. (بكالوريا 2015 ت ا)

1. $u_n = 5 \times 2^n \times 3^{n-1}$. المتتالية (u_n) هندسية (ب)

$$u_{n+1} = 5 \times 2^{n+1} \times 3^n = 5 \times \mathbf{2} \times 2^n \times \mathbf{3} \times 3^{n-1} = \boxed{6u_n}$$

2. قيمة n التي من أجلها $v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 2015$ هي: $n = 31$ (أ)

$$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \frac{n}{2}(v_1 + v_n) = \frac{n}{2}\left[\underbrace{1+4}_{v_1} + \underbrace{1+4n}_{v_n}\right]$$

$$= n(2n+3) = \boxed{2n^2 + 3n}$$

$$S_n = 2015 \Rightarrow 2n^2 + 3n - 2015 = 0 \Rightarrow \boxed{n = 31}$$

حل التمرين 39. (بكالوريا 2015 ت إ)

1. حساب u_1 و u_2

$$u_1 = 50\left(1 - \frac{5}{100}\right) + 3 = 50 \times 0{,}95 + 3 = \boxed{50{,}5}$$

$$u_2 = 50{,}5\left(1 - \frac{5}{100}\right) + 3 = 50{,}5 \times 0{,}95 + 3 = \boxed{50{,}975}$$

2. أ. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 3$

$$u_{n+1} = u_n\left(1 - \frac{5}{100}\right) + 3 = \boxed{0{,}95u_n + 3}$$

ب. بيان أنّ المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية

$$\underbrace{u_0 + u_2}_{100{,}975} \neq \underbrace{2u_1}_{101} \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ ليست حسابية}}$$

$$\underbrace{u_0 \times u_2}_{2548{,}75} \neq \underbrace{u_1^2}_{2550{,}25} \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ ليست هندسية}}$$

3. من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = 60 - u_n$

أ. بيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول

$$v_{n+1} = 60 - u_{n+1} = 60 - 0{,}95u_n + 3 = 63 - 0{,}95u_n$$
$$= 0{,}95(60 - u_n) = \boxed{0{,}95v_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $0{,}95$ وحدّها الأول $v_0 = 10$

ب. كتابة v_n بدلالة n ، واستنتاج u_n بدلالة n

$$v_n = v_0 \times q^n = \boxed{10(0{,}95)^n} \; ; u_n = 60 - v_n = \boxed{60 - 10(0{,}95)^n}$$

ج. تقدير عدد العمال سنة 2017

$$2012 + n = 2017 \Rightarrow n = 5 \; ; u_5 = 60 - 10(0{,}95)^5 = \boxed{52262}$$

د. تحديد اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = [60 - 10(0{,}95)^{n+1}] - [60 - 10(0{,}95)^n]$$
$$= 10(0{,}95)^n(1 - 0{,}95) = 0{,}5(0{,}95)^n$$

$$u_{n+1} - u_n > 0 \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة تماما}}$$

ه. حساب نهاية المتتالية (u_n)

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} [60 - 10(0{,}95)^n] = \boxed{60} \; ; \; [(0{,}95)^n \to 0]$$

لا يمكن أن يصل عدد عمال المصنع إلى 60 ألف عامل لأنّه مهما يكن العدد الطبيعي n فإنّ $10(0{,}95)^n \neq 0$.

حل التمرين 40. (بكالوريا 2016 ت إ)

$v_0 + v_1 + v_2 = 38$ ، $v_0 = 18$

1. بيان أنّ أساس المتتالية (v_n) هو $q = \frac{2}{3}$

$$v_0 + v_1 + v_2 = 38 \Rightarrow v_0 + v_0 q + v_0 q^2 = 38 \Rightarrow 18(q^2 + q + 1) = 38$$

$$\Rightarrow q^2 + q - \frac{10}{9} = 0 \Rightarrow \boxed{q = \frac{2}{3}} \text{ (الحل السالب مرفوض)}$$

2. أ. كتابة عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 \times q^n = \boxed{18\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

ب. دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (v_n)

$$\begin{cases} v_0 > 0 \\ 0 < q < 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة تماما}}$$

جـ. حساب نهاية (v_n)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 18\left(\frac{2}{3}\right)^n = \boxed{0}$$

3. $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$

أ. حساب S_n بدلالة n ، واستنتاج نهاية S_n عندما يؤول n إلى $+\infty$

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} = v_0\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = 18\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}\right)$$

$$\boxed{S_n = 54\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = 54}$$

ب. تعيين العدد الطبيعي n بحيث $S_n = \frac{3510}{81}$

$$S_n = \frac{3510}{81} \Rightarrow 54\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = \frac{3510}{81} \Rightarrow 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{65}{81}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{16}{81} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \Rightarrow \boxed{n = 4}$$

حل التمرين 41. (بكالوريا 2016 ت إ)

$u_{n+1} = \frac{4}{7}u_n + \frac{3}{7}$ ، $u_0 = 5$

1. حساب الحدّين u_1 و u_2

$$u_1 = \frac{4}{7}u_0 + \frac{3}{7} = \frac{4}{7}(5) + \frac{3}{7} = \boxed{\frac{23}{7}}$$

$$u_2 = \frac{4}{7}u_1 + \frac{3}{7} = \frac{4}{7}\left(\frac{23}{7}\right) + \frac{3}{7} = \boxed{\frac{113}{49}}$$

2. أ. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $u_n > 1$. محققة لأنّ: $u_0 = 5$

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_n > 1$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_{n+1} > 1$

$$u_n > 1 \Rightarrow \frac{4}{7}u_n > \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{4}{7}u_n + \frac{3}{7} > 1 \Rightarrow \boxed{u_{n+1} > 1}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$

ب. بيان أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4}{7}u_n + \frac{3}{7} - u_n = \boxed{\frac{3}{7}(1 - u_n)}$$

$$u_n > 1 \Rightarrow 1 - u_n < 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0 \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة تماما}}$$

جـ. استنتاج تقارب المتتالية (u_n)

بما أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي إذن متقاربة

3. لتكن المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - 1$

أ. بيان أنّ (v_n) متتالية هندسية معينا أساسها وحدّها الأول

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{4}{7}u_n + \frac{3}{7} - 1 = \frac{4}{7}u_n - \frac{4}{7} = \frac{4}{7}(u_n - 1) = \boxed{\frac{4}{7}v_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{4}{7}$ وحدّها الأول $v_0 = 4$

ب. كتابة v_n بدلالة n واستنتاج أنّ $u_n = 1 + 4\left(\frac{4}{7}\right)^n$

$$v_n = v_0 \times q^n = \boxed{4\left(\frac{4}{7}\right)^n} \; ; u_n = v_n + 1 = \boxed{1 + 4\left(\frac{4}{7}\right)^n}$$

ج. حساب نهاية u_n

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left[1 + 4\left(\frac{4}{7}\right)^n\right] = \boxed{1}\; ; \left[\left(\frac{4}{7}\right)^n \to 0\right]$$

حل التمرين 42. (بكالوريا 2017 ت إ)

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \text{ ، } u_0 = -1$$

1. أ. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 3$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $u_0 < 3$. محققة لأنّ: $u_0 = -1$

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_n < 3$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_{n+1} < 3$

$$u_n < 3 \Rightarrow \frac{1}{3}u_n < 1 \Rightarrow \frac{1}{3}u_n + 2 < 3 \Rightarrow \boxed{u_{n+1} < 3}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 3$

ب. بيان أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما واستنتاج أنّها متقاربة

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + 2 - u_n = 2 - \frac{2}{3}u_n = \frac{2}{3}(3 - u_n)$$

$$u_n < 3 \Rightarrow 3 - u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0 \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة تماما}}$$

بما أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 3 فهي إذن متقاربة

2. $v_n = 3 - u_n$

أ. بيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وتعيين حدّها الأول

$$v_{n+1} = 3 - u_{n+1} = 3 - \frac{1}{3}u_n - 2 = 1 - \frac{1}{3}u_n = \frac{1}{3}(3 - u_n) = \boxed{\frac{1}{3}v_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدّها الأول $v_0 = 3 - u_0 = 4$

ب. بيان أنّ من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = 3(n-1) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 3 - v_0 + 3 - v_1 + \cdots + 3 - v_n$$

$$S_n = 3(n+1) - v_0\left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right) = 3(n+1) - 4\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}\right)$$

$$S_n = 3n + 3 - 6\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] = 3n + 3 - 6 + 6\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\boxed{S_n = 3(n-1) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

حل التمرين 43. (بكالوريا 2017 ت إ)

$u_{n+1} = 3u_n - 2$ ، $u_0 = 2$

1. حساب u_1 ، u_2 ، u_3 ثمّ تخمين اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

$u_1 = 3u_0 - 2 = 3(2) - 2 = \boxed{4}$

$u_2 = 3u_1 - 2 = 3(4) - 2 = \boxed{10}$

$u_3 = 3u_2 - 2 = 3(10) - 2 = \boxed{28}$

نلاحظ أنّ المتتالية (u_n) متزايدة

2. $v_n = u_{n+1} - u_n$

أ. بيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 يُطلب تعيين حدّها الأول

$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = (3u_{n+1} - 2) - (3u_n - 2) = 3(u_{n+1} - u_n)$

$\boxed{v_{n+1} = 3v_n}$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 وحدّها الأول $v_0 = u_1 - u_0 = 2$

ب. تعيين v_n بدلالة n ، واستنتاج أنّ المتتالية (u_n) متزايدة

$v_n = v_0 \times q^n = \boxed{2 \times 3^n}$

$u_{n+1} - u_n = v_n = 2 \times 3^n \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة}}$

3. $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$

أ. حساب S_n بدلالة n

$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} = v_0 \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) = \boxed{3^n - 1}$

ب. بيان أنّ $u_n = S_n + u_0$ واستنتاج عبارة u_n بدلالة n

$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + \cdots + u_n - u_{n-1}$

$S_n = u_n - u_0 \Rightarrow u_n = S_n + u_0 = 3^n - 1 + 2 = \boxed{3^n + 1}$

حل التمرين 44. (بكالوريا 2017 د2 ت إ)

$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ ، $u_0 = -2$

1. أ. بيان أنّ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 2$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $u_0 < 2$. محققة لأنّ: $u_0 = -2$

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_n < 2$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_{n+1} < 2$

$u_n < 2 \Rightarrow \frac{1}{2}u_n < 1 \Rightarrow \frac{1}{2}u_n + 1 < 2 \Rightarrow \boxed{u_{n+1} < 2}$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 2$

ب. تعيين اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) واستنتاج أنّها متقاربة

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}u_n+1-u_n=1-\frac{1}{2}u_n=\boxed{\frac{1}{2}(2-u_n)}$$

$u_n<2\Rightarrow 2-u_n>0\Rightarrow u_{n+1}-u_n>0\Rightarrow$ المتتالية (u_n) متزايدة تماما

بما أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي إذن متقاربة

2. $v_n=2u_n-4$

أ. إثبات أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_0

$$v_{n+1}=2u_{n+1}-4=2\left(\frac{1}{2}u_n+1\right)-4=u_n-2=\frac{1}{2}(2u_n-4)$$

$$\boxed{v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدّها الأول $v_0=2u_0-4=-8$

ب. كتابة عبارة v_n بدلالة n واستنتاج عبارة u_n بدلالة n

$$v_n=v_0\times q^n=\boxed{-8\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$v_n=2u_n-4\Rightarrow u_n=\frac{1}{2}(v_n+4)=\frac{1}{2}\left[-8\left(\frac{1}{2}\right)^n+4\right]=\boxed{-4\left(\frac{1}{2}\right)^n+2}$$

3. حساب المجموع S_n بدلالة n

$$S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n=\frac{1}{2}(v_0+4)+\frac{1}{2}(v_1+4)+\cdots+\frac{1}{2}(v_n+4)$$

$$S_n=2(n+1)+\frac{1}{2}\left[v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)\right]$$

$$S_n=2(n+1)+\frac{1}{2}\left[-8\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)\right]=2(n+1)-8\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$\boxed{S_n=8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+2n-6}$$

<u>حل التمرين 45. (بكالوريا 2017 د2 ت إ)</u>

نعتبر المتتالية الهندسية (v_n) ذات الأساس e^2 والحدّ الأول v_0 حيث $v_0=1$

1. حساب المجموع S_n بدلالة n

$$S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n=v_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)=\boxed{\frac{e^{2n+2}-1}{e^2-1}}$$

2. $u_n = w_n - v_n$ و $w_n = 2n + 4 + e^{2n}$

بيان أنّ المتتالية (u_n) حسابية وتعيين أساسها r وحدّها الأول u_0

$u_n = w_n - v_n = w_n - v_0 . q^n = 2n + 4 + e^{2n} - e^{2n} = 2n + 4$

$u_{n+1} - u_n = 2n + 6 - 2n - 4 = \boxed{2}$

منه نستنتج أنّ المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r = 2$ وحدّها الأول $u_0 = 4$

3. إثبات أنّ: $4 + 6 + 8 + \cdots + (2n + 4) = (n + 1)(n + 4)$

$4 + 6 + 8 + \cdots + (2n + 4) = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$

$= \frac{n+1}{2}(4 + 2n + 4) = \boxed{(n + 1)(n + 4)}$

4. استنتاج المجموع T_n بدلالة n

$T_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n = u_0 + v_0 + u_1 + v_1 + \cdots + u_n + v_n$

$$\boxed{T_n = (n + 1)(n + 4) + \frac{e^{2n+2} - 1}{e^2 - 1}}$$

<u>حل التمرين 46. (بكالوريا 2018 ت إ)</u>

I- $u_0 = 50$ ، $u_{n+1} = 0,7u_n + 6$ و $v_n = u_n - 20$

1. برهان أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $0,7$ وكتابة عبارة v_n بدلالة n

$v_{n+1} = u_{n+1} - 20 = 0,7u_n - 14 = 0,7(u_n - 20) = \boxed{0,7v_n}$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $0,7$ وحدّها الأول $v_0 = u_0 - 20 = 30$

$v_n = v_0 \times q^n = \boxed{30(0,7)^n}$

2. أ. كتابة عبارة الحدّ العام u_n بدلالة n

$u_n = v_n + 20 = \boxed{30(0,7)^n + 20}$

ب. تعيين اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وحساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

طريقة ①

$u_{n+1} - u_n = 30(0,7)^{n+1} + 20 - 30(0,7)^n - 20 = 30(0,7)^n(0,7 - 1)$

$u_{n+1} - u_n = -9(0,7)^n \; ; u_{n+1} - u_n < 0 \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة تماما}}$

طريقة ②

بما أنّ $u_n = v_n + 20$ والمتتالية (v_n) متناقصة تماما $(0 < q < 1$ و$v_0 > 0)$

نستنتج أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 30(0,7)^n + 20 = \boxed{20} \; ; [(0,7)^n \to 0]$

-II

1. حساب عدد المشتركين في سنة 2017 ثمّ في سنة 2018

$u_1 = 50(1-0,3)+6 = 50(0,7)+6 = \boxed{41}$

$u_2 = 41(1-0,3)+6 = 41(0,7)+6 = \boxed{34,7}$

منه نستنتج أنّ عدد المشتركين في سنتي 2017 و 2018 هو 4100 و 3470 مشترك على الترتيب

2. أ. تبرير العبارة $u_{n+1} = 0,7u_n + 6$

$u_{n+1} = u_n(1-0,3)+6 = \boxed{0,7u_n+6}$

ب. يصبح عدد المشتركين أقل من 2400 مشترك ابتداءً من سنة 2022 لأنّ:

$$u_n < 24 \Rightarrow 30(0,7)^n + 20 < 24 \Rightarrow 30(0,7)^n < 4 \Rightarrow (0,7)^n < \frac{2}{15}$$

$$\Rightarrow n\ln 0,7 < \ln\left(\frac{2}{15}\right) \Rightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{2}{15}\right)}{\ln 0,7} \Rightarrow n > 5,65 \Rightarrow \boxed{n=6}$$

حل التمرين 47. (بكالوريا 2018 ت إ)

$2u_{n+1} = u_n + 6$ ، $u_0 = -1$

1. أ. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 6$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $u_0 < 6$. محققة لأنّ: $u_0 = -1$

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_n < 6$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_{n+1} < 6$

$$2u_{n+1} = u_n + 6 \Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$$

$$u_n < 6 \Rightarrow \frac{1}{2}u_n < 3 \Rightarrow \frac{1}{2}u_n + 3 < 6 \Rightarrow \boxed{u_{n+1} < 6}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 6$

ب. دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) واستنتاج أنّها متقاربة

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 3 - u_n = 3 - \frac{1}{2}u_n = \boxed{\frac{1}{2}(6-u_n)}$$

$u_n < 6 \Rightarrow 6 - u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0 \Rightarrow$ المتتالية (u_n) متزايدة تماما

بما أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 6 فهي إذن متقاربة

2. $v_n = u_n - 6$

أ. بيان أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يُطلب تعيين حدّها الأول v_0

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}u_n - 3 = \frac{1}{2}(u_n - 6) = \boxed{\frac{1}{2}v_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدّها الأول $v_0 = u_0 - 6 = -7$

ب. كتابة v_n بدلالة n وحساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$v_n = v_0 \times q^n = \boxed{-7\left(\frac{1}{2}\right)^n} \; ; u_n = v_n + 6 = \boxed{-7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left[-7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6\right] = \boxed{6} \; ; \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0\right]$$

3. حساب S_n و P_n بدلالة n

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = v_0 + 6 + v_1 + 6 + \cdots + v_n + 6$$

$$S_n = 6(n+1) + v_0\left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right) = 6(n+1) - 14\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$\boxed{S_n = 14\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 6n - 8}$$

$$P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \ldots \times v_n = v_0 \times v_0 q \times v_0 q^2 \ldots \times v_0 q^n$$

$$P_n = v_0^{n+1} \times q^{1+2+\cdots+n} = v_0^{n+1} \times q^{\frac{n(n+1)}{2}} = \boxed{(-7)^{n+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

حل التمرين 48. (بكالوريا 2008 ع ت)

1. نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $I=[1;2]$ بالعبارة : $f(x)=\frac{x+2}{-x+4}$

أ. بيان أنّ الدالة f متزايدة تماما على I

$f'(x)=\frac{6}{(-x+4)^2}$; $f'(x)>0 \Rightarrow$ الدالة f متزايدة تماما على I

ب. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I

$\begin{cases} x\in I \\ f \text{ متزايدة على } I \end{cases} \Rightarrow f(x)\in[f(1);f(2)] \Rightarrow f(x)\in[1;2] \Rightarrow \boxed{f(x)\in I}$

2. $u_0=\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

أ. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : u_n ينتمي إلى I

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $u_0\in I$ (محققة لأنّ $u_0=\frac{3}{2}$)

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_n\in I$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_{n+1}\in I$

$u_n\in I \Rightarrow f(u_n)\in I \Rightarrow \boxed{u_{n+1}\in I}$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\in I$

ب. دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) واستنتاج أنّها متقاربة

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2}{-u_n+4}-u_n=\frac{u_n+2-u_n(-u_n+4)}{-u_n+4}=\frac{u_n^2-3u_n+2}{-u_n+4}$$
$$=\frac{(u_n-1)(u_n-2)}{-u_n+4}$$

$u_n\in[1;2] \Rightarrow \begin{cases}(u_n-1)(u_n-2)\le 0\\ -u_n+4\ge 2\end{cases} \Rightarrow u_{n+1}-u_n\le 0$

$\Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة}}$

بما أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

3. أ. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $u_0=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^0+1}$ (محققة لأنّ $u_0=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$)

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_{n+1}=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+1}$

$$u_{n+1}=\frac{1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}+2}{-1-\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}+4}=\frac{3+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}}{3-\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}}=\frac{\frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+4}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}}{\frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+2}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}}$$

$$=\frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+4}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+2}=\frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+2+2}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+2}=1+\frac{2}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+2}$$

$$=1+\frac{2}{2\left[\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n+1\right]}=\boxed{1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+1}}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$

ب. تعيين النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}=\boxed{1};\ \left(\frac{3}{2}\right)^n\to+\infty\ ;\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}\to 0$$

حل التمرين 49. (بكالوريا 2008 ع ت)

$u_0=\frac{5}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+2$

1. أ. رسم المستقيم (Δ) والمنحنى (d)

ب. تمثيل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4

جـ. وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

بما أنّ ترتيب الحدود تصاعدي $(u_0<u_1<\cdots<u_4)$ والمسافة بين كل حدّين متتابعين تتقلص ، نخمّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة

2. أ. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\leq 6$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $u_0\leq 6$ (محققة لأنّ $u_0=\frac{5}{2}$)

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_n\leq 6$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_{n+1}\leq 6$

$$u_n\leq 6\Rightarrow\frac{2}{3}u_n\leq 4\Rightarrow\frac{2}{3}u_n+2\leq 6\Rightarrow\boxed{u_{n+1}\leq 6}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 6$

ب. التحقق أنّ (u_n) متزايدة

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 2 - u_n = 2 - \frac{1}{3}u_n = \frac{6 - u_n}{3}$$

$$u_n \leq 6 \Rightarrow -u_n \geq -6 \Rightarrow 6 - u_n \geq 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0 \Rightarrow \boxed{(u_n) \text{ متزايدة}}$$

جـ. بيان أنّ (u_n) متقاربة

بما أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$

أ. إثبات أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{2}{3}u_n - 4 = \frac{2}{3}(u_n - 6) = \boxed{\frac{2}{3}v_n}$$

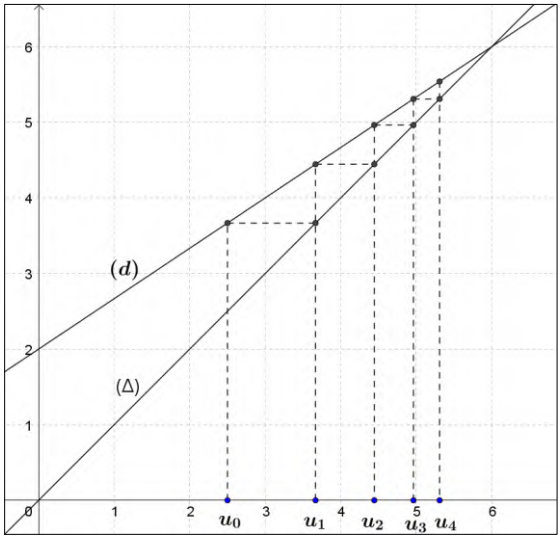
منه نستنتج أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = \frac{2}{3}}$ وحدّها الأول v_0 ، حيث :

$$v_0 = u_0 - 6 = \frac{5}{2} - 6 = \boxed{-\frac{7}{2}}$$

ب. كتابة عبارة u_n بدلالة n ثمّ استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

$$v_n = v_0 \times q^n = -\frac{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow u_n = v_n + 6 = \boxed{-\frac{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n + 6}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} -\frac{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n + 6 = \boxed{6} \; ; \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0\right]$$



حل التمرين 50. (بكالوريا 2009 ع ت)

$u_0 = 1$ ، $u_1 = 2$ و $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ ، $v_n = u_{n+1} - u_n$

1. حساب v_0 و v_1

$$v_0 = u_1 - u_0 = \boxed{1}$$

$$v_1 = u_2 - u_1 = \frac{4}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_0 - u_1 = \frac{1}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_0 = \boxed{\frac{1}{3}}$$

2. برهان أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n - u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_{n+1} - u_n) = \boxed{\frac{1}{3}v_n}$$

منه نستنتج أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = \frac{1}{3}}$

3. أ. حساب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$

$$S_n = v_0 + \cdots + v_{n-1} = v_0\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \boxed{\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}$$

ب. برهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] + 1$

$$S_n = v_0 + \cdots + v_{n-1} = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + \cdots + u_n - u_{n-1} = u_n - u_0$$

$$\Rightarrow u_n = S_n + u_0 = \boxed{\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] + 1}$$

جـ. بيان أنّ (u_n) متقاربة

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2}\underbrace{\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}_{\to 1} + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \boxed{\frac{5}{2}} \Rightarrow \boxed{(u_n) \text{ متقاربة}}$$

حل التمرين 51. (بكالوريا 2009 ع ت)

(u_n) **متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 وأساسها q حيث :**

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

1. **أ. حساب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتاج الحد الأول u_1**

$$u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \Rightarrow u_2^3 = 216 \Rightarrow u_2 = \sqrt[3]{216} = \boxed{6}$$

$$u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \Rightarrow u_1 + u_3 = 20 \Rightarrow \frac{u_2}{q} + u_2.q = 20 \Rightarrow \frac{6}{q} + 6q = 20$$

$$\Rightarrow 6q^2 - 20q + 6 = 0 \Rightarrow 3q^2 - 10q + 3 = 0$$

$$\Delta' = 16\ ; q' = \frac{5-4}{3} = \frac{1}{3}\ ;\ q'' = \frac{5+4}{3} = 3$$

بما أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما ، نستنتج أنّ $q = 3$ ، منه $u_1 = \frac{u_2}{q} = \frac{6}{3} = 2$

ب. كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n

$$u_n = u_1.q^{n-1} \Rightarrow \boxed{u_n = 2 \times 3^{n-1}}$$

ج. حساب S_n بدلالة n ، ثمّ تعيين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 728$

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) = 2\left(\frac{3^n - 1}{3 - 1}\right) \Rightarrow \boxed{S_n = 3^n - 1}$$

$$S_n = 728 \Rightarrow 3^n - 1 = 728 \Rightarrow 3^n = 729 \Rightarrow \ln(3^n) = \ln 729$$

$$\Rightarrow n \ln 3 = \ln 729 \Rightarrow n = \frac{\ln 729}{\ln 3} \Rightarrow \boxed{n = 6}$$

2. $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$ و $v_1 = 2$

أ. حساب v_2 و v_3

$$v_2 = \frac{3}{2}v_1 + u_1 = 3 + 2 = \boxed{5}\ ;\ v_3 = \frac{3}{2}v_2 + u_2 = \frac{15}{2} + 6 = \boxed{\frac{27}{2}}$$

ب. بيان أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$. $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{3u_n} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}\frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}\frac{v_n}{u_n} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{2}w_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (w_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

ج. كتابة w_n بدلالة n ، ثمّ استنتاج v_n بدلالة n.

$$w_1 = \frac{v_1}{u_1} - \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow w_n = w_1.q^{n-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \boxed{\frac{1}{3 \times 2^{n-1}}}$$

$$w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{v_n}{u_n} = w_n + \frac{2}{3} \Rightarrow v_n = u_n\left(w_n + \frac{2}{3}\right)$$

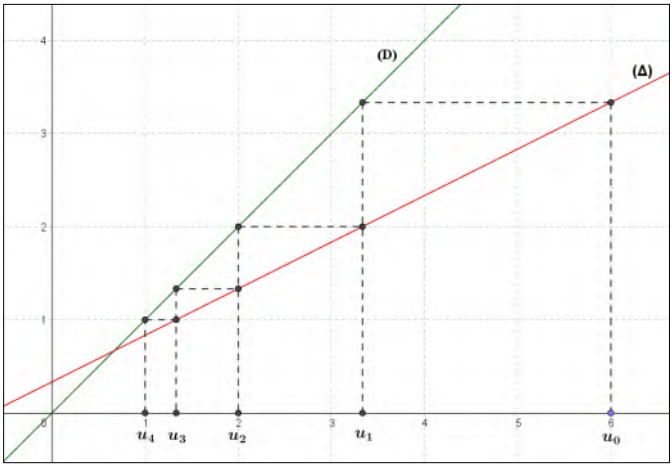
$$v_n = 2 \times 3^{n-1}\left(\frac{1}{3 \times 2^{n-1}} + \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2 \times 3^{n-1}}{3 \times 2^{n-1}} + \frac{2 \times 2 \times 3^{n-1}}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{3^{n-2}}{2^{n-2}} + 4 \times 3^{n-2}\right) = \boxed{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}(1 + 2^n)}$$

حل التمرين 52. (بكالوريا 2010 ع ت)

1. $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$

أ. تمثيل الحدود: u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 على محور الفواصل



ب. تعيين إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D)

$$M(x;y) \in (\Delta) \cap (D) \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{M\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)}$$

ج. اعطاء تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

بما أنّ ترتيب الحدود تنازلي $(u_0 > u_1 > \cdots > u_4)$ والمسافة بين كل حدّين متتابعين تتقلص ، نخمّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ومتقاربة

2. **أ. إثبات أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{2}{3}$**

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $u_0 > \frac{2}{3}$ (محققة لأنّ $u_0 = 6$)

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_n > \frac{2}{3}$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_{n+1} > \frac{2}{3}$

$$u_n > \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2}u_n > \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} > \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{u_{n+1} > \frac{2}{3}}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{2}{3}$

ب. استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$$

$$u_n > \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{1}{2}u_n < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} < 0 \Rightarrow \boxed{u_{n+1} - u_n < 0}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (u_n) متناقصة

3. $\boldsymbol{v_n = u_n - \frac{2}{3}}$

أ. **إثبات أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدّها الأول**

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{2}v_n}$$

منه نستنتج أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = \frac{1}{2}}$ وحدّها الأول v_0 ، حيث :

$$v_0 = u_0 - \frac{2}{3} = 6 - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{16}{3}}$$

ب. **كتابة عبارة الحدّ العام v_n ، واستنتاج عبارة u_n بدلالة n**

$$v_n = v_0 \times q^n = \boxed{\frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n} \; ; u_n = v_n + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}}$$

ج. **حساب بدلالة n المجموع S_n**

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0\left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right) = \frac{16}{3}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right)$$

$$\boxed{S_n = \frac{32}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}$$

استنتاج المجموع S'_n

$$S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = v_0 + \frac{2}{3} + v_1 + \frac{2}{3} + \cdots + v_n + \frac{2}{3}$$

$$S'_n = S_n + \frac{2}{3}(n+1) = \boxed{\frac{32}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + \frac{2}{3}(n+1)}$$

حل التمرين 53. (بكالوريا 2011 ع ت)

$$v_n = u_n + \frac{1}{2}\ ،\ u_{n+1} = 3u_n + 1\ ،\ u_0 = -1$$

1. المتتالية (v_n) هندسية (ب)

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} = 3u_n + 1 + \frac{1}{2} = 3u_n + \frac{3}{2} = 3\left(u_n + \frac{1}{2}\right) = \boxed{3v_n}$$

منه نستنتج أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = 3}$

2. نهاية المتتالية (u_n) هي : $-\infty$ (جـ)

$$v_0 = u_0 + \frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\ ; v_n = v_0 \times q^n = -\frac{1}{2} \times 3^n$$

$$u_n = v_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(3^n + 1)$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2}(3^n + 1) = \boxed{-\infty}$$

3. (جـ) $S_n = \frac{1-3^{n+1}}{4}$

$$S_n = -\frac{1}{2}\left(1 + e^{\ln 3} + e^{\ln 3^2} + e^{\ln 3^3} + \cdots + e^{\ln 3^n}\right)$$

$$S_n = -\tfrac{1}{2}(1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n) = -\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{3^{n+1}-1}{3-1}\right) = \boxed{\tfrac{1-3^{n+1}}{4}}$$

حل التمرين 54. (بكالوريا 2011 ع ت)

$$v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}\ ،\ u_{n+1} = \alpha u_n + 1\ ،\ u_0 = 6$$

1. أ. إثبات أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها α

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{\alpha - 1} = \alpha u_n + 1 + \frac{1}{\alpha - 1} = \alpha u_n + \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

$$= \alpha\left(u_n + \frac{1}{\alpha - 1}\right) = \boxed{\alpha v_n}$$

منه نستنتج أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = \alpha}$

ب. كتابة عبارة v_n ثمّ استنتاج عبارة u_n بدلالة n و α

$$v_0 = u_0 + \frac{1}{\alpha - 1} = 6 + \frac{1}{\alpha - 1} = \frac{6\alpha - 5}{\alpha - 1}\ ; v_n = v_0 \times q^n = \boxed{\left(\frac{6\alpha - 5}{\alpha - 1}\right)\alpha^n}$$

$$u_n = v_n - \frac{1}{\alpha - 1} = \boxed{\left(\frac{6\alpha - 5}{\alpha - 1}\right)\alpha^n - \frac{1}{\alpha - 1}}$$

جـ. تعيين قيم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها المتتالية (u_n) متقاربة

(u_n) متقاربة $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^n = 0 \Rightarrow \boxed{0 < \alpha < 1}$; $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{1}{\alpha - 1}\right)$

2. حساب بدلالة n المجموعين S_n و T_n حيث :

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n \quad \text{و} \quad T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

$$\alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow v_0 = \frac{6\left(\frac{3}{2}\right) - 5}{\frac{3}{2} - 1} = 8 \; ; \frac{1}{\alpha - 1} = \frac{1}{\frac{3}{2} - 1} = 2$$

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0\left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\right) = 8\left[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right]$$

$$\boxed{S_n = 16\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1\right]}$$

$$T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = v_0 - 2 + v_1 - 2 + \cdots + v_n - 2$$

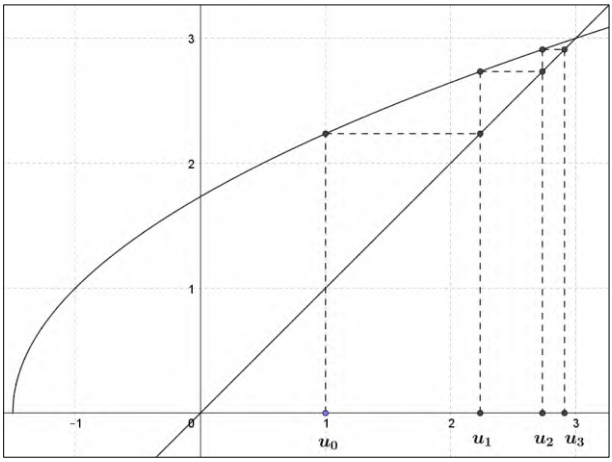
$$T_n = S_n - 2(n+1) = \boxed{16\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1\right] - 2(n+1)}$$

حل التمرين 55. (بكالوريا 2012 ع ت)

$u_0 = 1$ ، $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

1. لتكن h الدالة المعرّفة على المجال $]-\frac{3}{2}; +\infty[$ كما يلي: $h(x) = \sqrt{2x+3}$

أ. تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل



ب. وضع تخمين حول اتجاه تغيّر (u_n) وتقاربها

بما أنّ ترتيب الحدود تصاعدي $(u_0 < u_1 < \cdots < u_3)$ والمسافة بين كل حدّين متتابعين تتقلص ، نخمّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة

2. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $0 < u_0 < 3$ (محققة لأنّ $u_0 = 1$)

فرض التراجع: نفرض أنّ $0 < u_n < 3$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $0 < u_{n+1} < 3$

$$0 < u_n < 3 \Rightarrow 3 < 2u_n + 3 < 9 \Rightarrow 0 < \sqrt{3} < \sqrt{2u_n + 3} < 3$$

$$\Rightarrow \boxed{0 < u_{n+1} < 3}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$

3. دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n + 3} - u_n = \frac{\left(\sqrt{2u_n + 3} - u_n\right)\left(\sqrt{2u_n + 3} + u_n\right)}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n}$$

$$= \frac{-u_n^2 + 2u_n + 3}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n} = \frac{-(u_n + 1)(u_n - 3)}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n}$$

$$0 < u_n < 3 \Rightarrow \begin{cases} -(u_n + 1)(u_n - 3) > 0 \\ \sqrt{2u_n + 3} + u_n > 0 \end{cases} \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة}}$$

4. استنتاج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة وحساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

بما أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة ولتكن l نهايتها

$$(u_n) \text{ متقاربة} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} u_n = l \Rightarrow \sqrt{2l + 3} = l$$

$$\Rightarrow 2l + 3 = l^2 \Rightarrow l^2 - 2l - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{l = 3}$$

ملاحظة: القيمة $l = -1$ مرفوضة لأنّ $0 < u_n < 3$.

حل التمرين 56. (بكالوريا 2012 ع ت)

$u_0 = \frac{13}{4}$ **ومن أجل كل عدد طبيعي n :** $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$

1. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $3 < u_0 < 4$ (محققة لأنّ $u_0 = \frac{13}{4}$)

فرض التراجع: نفرض أنّ $3 < u_n < 4$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $3 < u_{n+1} < 4$

$3 < u_n < 4 \Rightarrow 0 < u_n - 3 < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{u_n - 3} < 1$

$\Rightarrow 3 < 3 + \sqrt{u_n - 3} < 4 \Rightarrow \boxed{3 < u_{n+1} < 4}$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$

2. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$.

$$u_{n+1} - u_n = 3 + \sqrt{u_n - 3} - u_n$$

$$= \frac{\left(\sqrt{u_n - 3} - (u_n - 3)\right)\left(\sqrt{u_n - 3} + (u_n - 3)\right)}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$$

$$= \frac{(u_n - 3) - (u_n - 3)^2}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3} = \boxed{\frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}}$$

استنتاج أنّ (u_n) متزايدة تماما

$-u_n^2 + 7u_n - 12 = -(u_n - 3)(u_n - 4)$

$3 < u_n < 4 \Rightarrow \begin{cases} -u_n^2 + 7u_n - 12 > 0 \\ \sqrt{u_n - 3} + u_n - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0$

$\Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة}}$

3. تبرير تقارب المتتالية (u_n)

بما أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

4. (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n - 3)$

أ. **برهان أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثمّ حساب حدّها الأول**

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 3) = \ln\sqrt{u_n - 3} = \frac{1}{2}\ln(u_n - 3) = \boxed{\frac{1}{2}v_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدّها الأول

$$v_0 = \ln(u_0 - 3) = \ln\frac{1}{4} = -\ln 4$$

ب. **كتابة كلا من v_n و u_n بدلالة n ثمّ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$**

$$v_n = v_0 \times q^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 4 = \boxed{-\frac{\ln 4}{2^n}}$$

$$v_n = \ln(u_n - 3) \Rightarrow u_n - 3 = e^{v_n} \Rightarrow u_n = e^{v_n} + 3 = \boxed{e^{-\frac{ln\,4}{2^n}} + 3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{ln\,4}{2^n}} + 3 = e^0 + 3 = \boxed{4}\,; \left(-\frac{ln\,4}{2^n} \to 0\right)$$

ج. **كتابة P_n بدلالة n وبيان أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{16}$**

$$P_n = (u_0-3)(u_1-3)(u_2-3)\times\ldots\times(u_n-3)$$

$$P_n = e^{v_0}\times e^{v_1}\times e^{v_2}\times\ldots\times e^{v_n} = e^{v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n} = e^{v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)}$$

$$P_n = e^{-\ln 4\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)} = \boxed{e^{-2\ln 4\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty} e^{-2\ln 4\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]} = e^{-2\ln 4} = e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)^2} = e^{\ln\frac{1}{16}} = \boxed{\frac{1}{16}}$$

<u>حل التمرين 57. (بكالوريا 2013 ع ت)</u>

I- المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$

1. **بيان أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدّها الأول**

$$v_n = \frac{5(5^n)}{6^n} = 5\left(\frac{5}{6}\right)^n ; v_{n+1} = 5\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} = 5\left(\frac{5}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right) = \boxed{\frac{5}{6}v_n}$$

منه نستنتج أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q=\frac{5}{6}}$ وحدّها الأول $v_0 = 5$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} 5\left(\frac{5}{6}\right)^n = \boxed{0} \quad \left[\left(\frac{5}{6}\right)^n \to 0\right]$$

II- $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{5u_n+6}$

1. **برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \le u_n \le 6$**

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $1 \le u_0 \le 6$ (محققة لأنّ $u_0 = 1$)

فرض التراجع: نفرض أنّ $1 \le u_n \le 6$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $1 \le u_{n+1} \le 6$

$$1 \le u_n \le 6 \Rightarrow 5 \le 5u_n \le 30 \Rightarrow 11 \le 5u_n+6 \le 36$$

$$\Rightarrow 1 \le \sqrt{11} \le \sqrt{5u_n+6} \le 6 \Rightarrow \boxed{1 \le u_{n+1} \le 6}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \le u_n \le 6$

2. **دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)**

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{5u_n+6}-u_n=\frac{\left(\sqrt{5u_n+6}-u_n\right)\left(\sqrt{5u_n+6}+u_n\right)}{\sqrt{5u_n+6}+u_n}$$

$$=\frac{-u_n^2+5u_n+6}{\sqrt{5u_n+6}+u_n}$$

$$1\le u_n\le 6\Rightarrow\begin{cases}-u_n^2+5u_n+6\ge 0\\ \sqrt{5u_n+6}+u_n>0\end{cases}\Rightarrow u_{n+1}-u_n\ge 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة}}$$

3. أ. برهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $6-u_{n+1}\le\frac{5}{6}(6-u_n)$

$$6-u_{n+1}=6-\sqrt{5u_n+6}=\frac{\left(6-\sqrt{5u_n+6}\right)\left(6+\sqrt{5u_n+6}\right)}{6+\sqrt{5u_n+6}}$$

$$=\frac{30-5u_n}{6+\sqrt{5u_n+6}}=\frac{5}{6+\sqrt{5u_n+6}}(6-u_n)$$

$$6+\sqrt{5u_n+6}\ge 6\Rightarrow\frac{1}{6+\sqrt{5u_n+6}}\le\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{5}{6+\sqrt{5u_n+6}}\le\frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow\frac{5}{6+\sqrt{5u_n+6}}(6-u_n)\le\frac{5}{6}(6-u_n)\Rightarrow\boxed{6-u_{n+1}\le\frac{5}{6}(6-u_n)}$$

ب. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le 6-u_n\le v_n$

$u_n\le 6\Rightarrow -u_n\ge -6\Rightarrow 6-u_n\ge 0$ ... ①

نبرهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $6-u_n\le v_n$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $6-u_0\le v_0$ (محققة لأنّ $6-u_0=5=v_0$)

فرض التراجع: نفرض أنّ $6-u_n\le v_n$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $6-u_{n+1}\le v_{n+1}$

$$\begin{cases}6-u_{n+1}\le\frac{5}{6}(6-u_n)\\ 6-u_n\le v_n\end{cases}\Rightarrow 6-u_{n+1}\le\frac{5}{6}v_n\Rightarrow 6-u_{n+1}\le v_{n+1}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $6-u_n\le v_n$ ... ②

من ① و② نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le 6-u_n\le v_n$

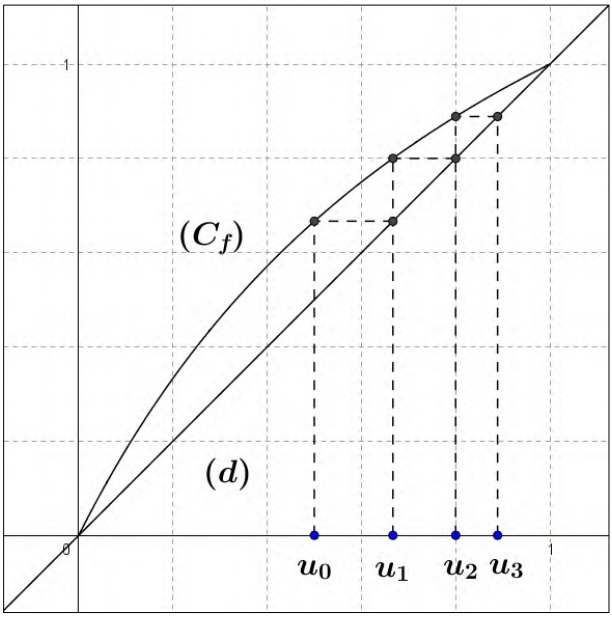
استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

$$\begin{cases}0\le 6-u_n\le v_n\\ \lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0\end{cases}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}6-u_n=0\Rightarrow\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=6}$$

حل التمرين 58. (بكالوريا 2013 ع ت)

1. $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

أ. تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 وu_3 على محور الفواصل



ب. تخمين حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها

بما أنّ ترتيب الحدود تصاعدي $(u_0 < u_1 < u_2 < u_3)$ والمسافة بين كل حدّين متتابعين تتقلص ، نخمّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة

2. أ. إثبات أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$

$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$; $f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$

ب. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $0 < u_0 < 1$ (محققة لأنّ $u_0 = \frac{1}{2}$)

فرض التراجع: نفرض أنّ $0 < u_n < 1$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $0 < u_{n+1} < 1$

$\begin{cases} 0 < u_n < 1 \\ \text{الدالة } f \text{ متزايدة} \end{cases} \Rightarrow f(0) < f(u_n) < f(1) \Rightarrow 0 < u_{n+1} < 1$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$

جـ. دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{u_n + 1} - u_n = \frac{-u_n^2 + u_n}{u_n + 1} = \frac{u_n(1 - u_n)}{u_n + 1}$$

$$0 < u_n < 1 \Rightarrow \begin{cases} u_n(1-u_n) > 0 \\ u_n + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{u_{n+1} - u_n > 0}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (u_n) متزايدة

3. $\boldsymbol{v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}}$

أ. برهان أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يُطلب تحديد حدّها الأول v_0

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}} = \frac{\frac{2u_n}{u_n + 1} - 1}{\frac{2u_n}{u_n + 1}} = \frac{u_n - 1}{2u_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right) = \boxed{\frac{1}{2}v_n}$$

منه نستنتج أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = \frac{1}{2}}$ وحدّها الأول v_0 ، حيث :

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2}} = \boxed{-1}$$

ب. حساب نهاية (u_n)

$$v_n = v_0 \times q^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n ; v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \Rightarrow u_n - 1 = v_n . u_n$$

$$\Rightarrow u_n(1 - v_n) = 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{1 - v_n} = \boxed{\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \boxed{1} ; \left[\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0\right]$$

<u>حل التمرين 59. (بكالوريا 2014 ع ت)</u>

$\boldsymbol{u_0 = 1}$ ، $\boldsymbol{u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}}$ ، $\boldsymbol{v_n = u_n + 4}$

1. بيان أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 4 = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3} + 4 = \frac{2}{3}u_n + \frac{8}{3} = \frac{2}{3}(u_n + 4) = \boxed{\frac{2}{3}v_n}$$

منه نستنتج أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = \frac{2}{3}}$ وحدّها الأول v_0 ، حيث :

$$v_0 = u_0 + 4 = \boxed{5}$$

2. كتابة كلا من v_n وu_n بدلالة n

$$v_n = v_0 \times q^n = \boxed{5\left(\frac{2}{3}\right)^n} \; ; \; u_n = v_n - 4 = \boxed{5\left(\frac{2}{3}\right)^n - 4}$$

3. دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$

طريقة ① :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3} - u_n = -\frac{1}{3}u_n - \frac{4}{3} = \frac{-u_n - 4}{3}$$

$$v_n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow v_n > 0 \Rightarrow -v_n < 0 \Rightarrow -u_n - 4 < 0 \Rightarrow \boxed{u_{n+1} - u_n < 0}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (u_n) متناقصة

طريقة ② : المتتاليتان u_n وv_n لهما نفس اتجاه التغيّر والمتتالية v_n متناقصة $(0 < q < 1$ و $v_0 > 0)$ ، منه نستنتج أنّ المتتالية u_n متناقصة أيضا

4. حساب المجموع S_n بدلالة n

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = v_0 - 4 + v_1 - 4 + \cdots + v_n - 4$$

$$S_n = (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) - 4(n+1) = v_0\left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right) - 4(n+1)$$

$$S_n = 5\left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}}\right) - 4(n+1) = 15\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] - 4(n+1)$$

$$\boxed{S_n = -15\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 4n + 11}$$

5. $w_n = 5\left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right)$

أ. **بيان أنّ المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$**

$$w_{n+1} - w_n = 5\left(\frac{1}{v_{n+1} + 5} - 1\right) - 5\left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right) = \frac{5}{v_{n+1} + 5} - \frac{5}{v_n + 5}$$

$$= \frac{-5(v_{n+1} - v_n)}{(v_{n+1} + 5)(v_n + 5)}$$

$$\begin{cases} \text{المتتالية } (v_n) \text{ متناقصة} \\ v_n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5(v_{n+1} - v_n) > 0 \\ (v_{n+1} + 5)(v_n + 5) > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{w_{n+1} - w_n > 0}$$

ومنه نستنتج أنّ المتتالية w_n متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

ب. **حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - w_n)$**

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - w_n) = \lim_{n\to+\infty}(v_n - 4) - 5\left(\frac{1}{v_n+5} - 1\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} 5\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(u_n - w_n) = -4 - 5\left(\frac{1}{5} - 1\right) = \boxed{0}$$

حل التمرين 60. (بكالوريا 2014 ع ت)

I- $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$

1. بيان أنّ (u_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول

$$u_{n+1} = e^{\frac{1}{2}-n-1} = e^{\frac{1}{2}-n} \times e^{-1} = \boxed{u_n \times e^{-1}}$$

منه نستنتج أنّ (u_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = e^{-1}}$ وحدّها الأول $\boxed{u_0 = e^{\frac{1}{2}}}$

2. حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{2}-n} = \boxed{0} \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متقاربة}}$$

3. حساب المجموع S_n بدلالة n

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = \boxed{e^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-e^{-n-1}}{1-e^{-1}}\right)}$$

II- $v_n = \ln u_n$

1. التعبير عن v_n بدلالة n واستنتاج نوع المتتالية (v_n)

$$v_n = \ln u_n = \ln e^{\frac{1}{2}-n} = \boxed{\frac{1}{2} - n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \left(\frac{1}{2} - n - 1\right) - \left(\frac{1}{2} - n\right) = \boxed{-1}$$

منه نستنتج أنّ (v_n) متتالية حسابية أساسها $\boxed{r = -1}$ وحدّها الأول $\boxed{v_0 = \frac{1}{2}}$

2. أ. حساب العدد P_n بدلالة n

$$P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n) = \ln(u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n)$$

$$P_n = \ln u_0 + \ln u_1 + \cdots + \ln u_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n)$$

$$P_n = \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - n\right) = \frac{(n+1)(1-n)}{2} = \boxed{\frac{1-n^2}{2}}$$

ب. تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث : $P_n + 4n > 0$

$$P_n + 4n > 0 \Rightarrow \frac{1-n^2}{2} + 4n > 0 \Rightarrow -n^2 + 8n + 1 > 0$$

$$\Rightarrow n \in \left]\underbrace{4-\sqrt{17}}_{-0,123}; \underbrace{4+\sqrt{17}}_{8,123}\right[\Rightarrow \boxed{n \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}}$$

حل التمرين 61. (بكالوريا 2015 ع ت)

$u_0 = e^2 - 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = (1+u_n)e^{-2} - 1$

1. حساب u_1 ، u_2 و u_3

$u_1 = (1+u_0)e^{-2} - 1 = e^2.e^{-2} - 1 = \boxed{0}$

$u_2 = (1+u_1)e^{-2} - 1 = \boxed{e^{-2} - 1}$

$u_3 = (1+u_2)e^{-2} - 1 = e^{-2}.e^{-2} - 1 = \boxed{e^{-4} - 1}$

2. إثبات أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 + u_n > 0$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $1 + u_0 > 0$ (محققة لأنّ $1 + u_0 = e^2$)

فرض التراجع: نفرض أنّ $1 + u_n > 0$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $1 + u_{n+1} > 0$

$1 + u_{n+1} = (1+u_n)e^{-2}$

$1 + u_n > 0 \Rightarrow (1+u_n)e^{-2} > 0 \Rightarrow \boxed{1 + u_{n+1} > 0}$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 + u_n > 0$

3. بيان أنّ المتتالية (u_n) متناقصة

$e^{-2} < 1 \Rightarrow (1+u_n)e^{-2} < 1 + u_n \Rightarrow 1 + u_{n+1} < 1 + u_n \Rightarrow u_{n+1} < u_n$

منه نستنتج أنّ المتتالية (u_n) متناقصة

4. $v_n = 3(1+u_n)$

أ. **إثبات أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول**

$v_{n+1} = 3(1+u_{n+1}) = 3(1+u_n)e^{-2} = \boxed{v_n.e^{-2}}$

منه نستنتج أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = e^{-2}}$ وحدّها الأول v_0 ، حيث :

$$v_0 = 3(1+u_0) = \boxed{3e^2}$$

ب. **كتابة v_n وu_n بدلالة n ، ثمّ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$**

$v_n = v_0 \times q^n = 3e^2(e^{-2})^n = \boxed{3e^{-2n+2}}$

$v_n = 3(1+u_n) \Rightarrow 1 + u_n = \frac{1}{3}v_n \Rightarrow u_n = \frac{1}{3}v_n - 1 = \boxed{e^{-2n+2} - 1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-2n+2} - 1 = \boxed{-1}$

ج. **بيان أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$:**

$\ln v_0 + \ln v_1 + \cdots + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$

$\ln v_0 + \ln v_1 + \cdots + \ln v_n = \ln(v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n)$

$= \ln(3e^2 \times 3e^0 \times 3e^{-2} \times 3e^{-2n+2}) = \ln(3^{n+1} \times e^{2+0-2-4\ldots-2n+2})$

$= \ln(3^{n+1}) + \ln e^{\frac{n+1}{2}(2-2n+2)} = (n+1)\ln 3 + (n+1)(-n+2)$

$= \boxed{(n+1)(-n+2+ln\,3)}$

حل التمرين 62. (بكالوريا 2015 ع ت)

I- $D_f = [0;+\infty[$ ، $f(x) = \frac{4x+1}{x+1}$

1. تعيين اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[0;+\infty[$

$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$; $f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

2. دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D) ذي المعادلة $y = x$

$f(x) - x = \frac{4x+1}{x+1} - x = \frac{-x^2+3x+1}{x+1}$

بما أنّ $x \geq 0$ ، فإنّ إشارة $f(x) - x$ من إشارة $(-x^2+3x+1)$

$x \in \left[0; \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right[: f(x) - x > 0 \Rightarrow (D)$ فوق (C_f)

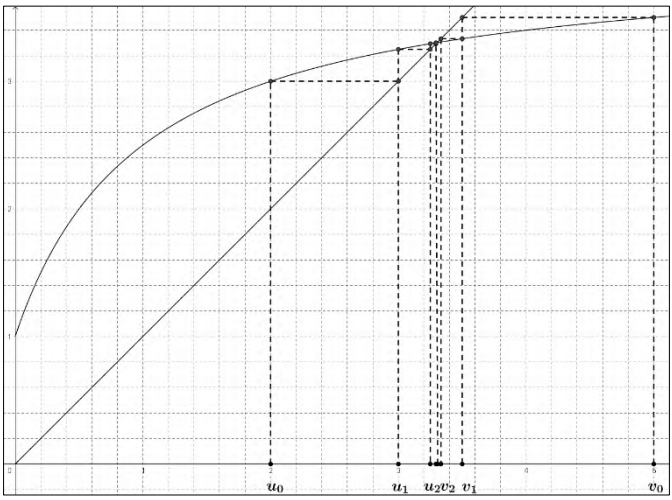
$x \in \left]\frac{3+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right[: f(x) - x < 0 \Rightarrow (D)$ تحت (C_f)

$(C_f) \cap (D) = \left\{\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}; \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\right\}$

3. تمثيل (C_f) و(D) على المجال $[0;6]$

II- $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

1. أ. إنشاء الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 وu_3 ؛ v_0 ، v_1 ، v_2 وv_3 على حامل محور الفواصل



ب. تخمين اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) و(v_n)

بما أنّ ترتيب حدود المتتالية (u_n) تصاعدي $(u_0 < u_1 < \cdots < u_4)$ وترتيب حدود المتتالية (v_n) تنازلي $(v_0 > v_1 > \cdots > v_4)$ ، نخمّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة والمتتالية (v_n) متناقصة، وبما أنّ المسافة بين كل حدّين متتابعين تتقلص ، نخمّن أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتان

2. أ. إثبات أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $2 \leq u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \leq 5$ حيث

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $2 \leq u_0 < \alpha$ (محققة لأنّ $u_0 = 2$ و$\alpha \approx 3{,}3$)

فرض التراجع: نفرض أنّ $2 \leq u_n < \alpha$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $2 \leq u_{n+1} < \alpha$

$$\begin{cases} 2 \leq u_n < \alpha \\ f \text{ متزايدة على } [2;\alpha[\end{cases} \Rightarrow f(2) \leq f(u_n) < f(\alpha) \Rightarrow \boxed{2 \leq 3 \leq u_{n+1} < \alpha}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leq u_n < \alpha$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $\alpha < v_0 \leq 5$ (محققة لأنّ $v_0 = 5$ و$\alpha \approx 3{,}3$)

فرض التراجع: نفرض أنّ $\alpha < v_n \leq 5$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $\alpha < v_{n+1} \leq 5$

$$\begin{cases} \alpha < v_n \leq 5 \\ f \text{ متزايدة على }]\alpha;5] \end{cases} \Rightarrow f(\alpha) < f(v_n) \leq f(5) \Rightarrow \boxed{\alpha < v_{n+1} \leq \frac{21}{6} \leq 5}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $\alpha < v_n \leq 5$

ب. استنتاج اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و(v_n)

$u_n \in [2;\alpha[: f(u_n) - u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0 \Rightarrow$ المتتالية (u_n) متزايدة

$v_n \in]\alpha;5] : f(v_n) - u_n < 0 \Rightarrow v_{n+1} - v_n < 0 \Rightarrow$ المتتالية (u_n) متناقصة

3. أ. إثبات أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{4v_n+1}{v_n+1}-\frac{4u_n+1}{u_n+1}$$
$$=\frac{(4v_n+1)(u_n+1)-(4u_n+1)(v_n+1)}{(v_n+1)(u_n+1)}$$
$$=\frac{3(v_n-u_n)}{(v_n+1)(u_n+1)}$$
$$\begin{cases} u_n \geq 2 \\ v_n > \alpha \geq 2 \end{cases} \Rightarrow (v_n+1)(u_n+1) \geq 9 \Rightarrow \frac{3}{(v_n+1)(u_n+1)} \leq \frac{3}{9}$$
$$\Rightarrow \frac{3(v_n-u_n)}{(v_n+1)(u_n+1)} \leq \frac{1}{3}(v_n-u_n)$$
$$\Rightarrow \boxed{v_{n+1}-u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n-u_n)}$$

ب. بيان أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $0 < v_0 - u_0 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$. محققة لأنّ:

$$v_0 - u_0 = 3 \text{ و } \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$$

فرض التراجع: نفرض أنّ $0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $0 < v_{n+1} - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n}$

$$\begin{cases} u_{n+1} < \alpha \\ v_{n+1} > \alpha \end{cases} \Rightarrow v_{n+1} - u_{n+1} > 0 \ldots ①$$
$$\begin{cases} v_{n+1}-u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n-u_n) \\ v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{cases} \Rightarrow v_{n+1}-u_{n+1} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$\Rightarrow v_{n+1}-u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \ldots ②$$

من ② و ① نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

جـ. استنتاج أنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

$$\begin{cases} 0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0}$$

تحديد نهاية كل من (u_n) و(v_n)

$$\begin{cases} (u_n) \text{ و } (v_n) \text{ متقاربتان} \\ \lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l \end{cases} \Rightarrow \frac{4l+1}{l+1} = l$$

$$\Rightarrow \boxed{l = \alpha}$$

حل التمرين 63. (بكالوريا 2016 ع ت)

I- $D_f = [0;+\infty[$ ، $f(x) = \sqrt{2x+8}$

1. أ. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x+8} = \boxed{+\infty}$$

ب. دراسة اتجاه تغيّر الدالة f

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	‖
$f(x)$	$2\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+8}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2x+8}}} \; ; f'(x) > 0 \Rightarrow \boxed{f \text{ متزايدة}}$$

2. تعيين إحداثيي تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$

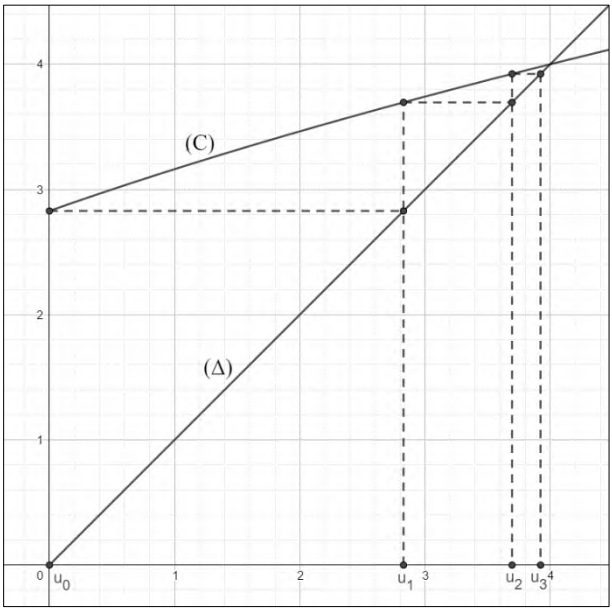
$$f(x) = x \Rightarrow \sqrt{2x+8} = x \Rightarrow 2x+8 = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$(C) \cap (\Delta) = \{(4;4)\}$$

3. رسم (C) و(Δ)

II- $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

1. تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 وu_3 (دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء



2. وضع تخمين حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها

بما أنّ ترتيب حدود المتتالية (u_n) تصاعدي $(u_0 < u_1 < \cdots < u_4)$ والمسافة بين كل حدّين متتابعين تتقلص ، نخمّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة

3. أ. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < 4$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $0 \leq u_0 < 4$. محققة لأنّ: $u_0 = 0$

فرض التراجع: نفرض أنّ $0 \leq u_n < 4$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $0 \leq u_{n+1} < 4$

$$0 \leq u_n < 4 \Rightarrow 8 \leq 2u_n + 8 < 16 \Rightarrow \sqrt{8} \leq \sqrt{2u_n + 8} < 4$$
$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} < 4$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < 4$

ب. دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n + 8} - u_n = \frac{\left(\sqrt{2u_n + 8} - u_n\right)\left(\sqrt{2u_n + 8} + u_n\right)}{\sqrt{2u_n + 8} + u_n}$$
$$= \frac{2u_n + 8 - u_n^2}{\sqrt{2u_n + 8} + u_n} = \frac{-u_n^2 + 2u_n + 8}{\sqrt{2u_n + 8} + u_n}$$

$$0 \leq u_n < 4 \Rightarrow \begin{cases} -u_n^2 + 2u_n + 8 > 0 \\ \sqrt{2u_n + 8} + u_n > 0 \end{cases} \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0 \Rightarrow \boxed{(u_n) \text{ متزايدة}}$$

جـ. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$

$$4 - u_{n+1} = 4 - \sqrt{2u_n + 8} = \frac{\left(4 - \sqrt{2u_n + 8}\right)\left(4 + \sqrt{2u_n + 8}\right)}{4 + \sqrt{2u_n + 8}}$$
$$= \frac{16 - 2u_n - 8}{4 + \sqrt{2u_n + 8}} = \frac{8 - 2u_n}{4 + \sqrt{2u_n + 8}} = \frac{2}{4 + \sqrt{2u_n + 8}}(4 - u_n)$$

$$\sqrt{2u_n + 8} \geq 0 \Rightarrow 4 + \sqrt{2u_n + 8} \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{4 + \sqrt{2u_n + 8}} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{4 + \sqrt{2u_n + 8}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{4 + \sqrt{2u_n + 8}}(4 - u_n) \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$$

$$\Rightarrow \boxed{4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)}$$

استنتاج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_n \leq \frac{1}{2^n}(4 - u_0)$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $4 - u_0 \leq \frac{1}{2^0}(4 - u_0)$. محققة لأنّ: $\frac{1}{2^0} = 1$

فرض التراجع: نفرض أنّ $4-u_n \leq \frac{1}{2^n}(4-u_0)$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $4-u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}(4-u_0)$

$$\begin{cases} 4-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4-u_n) \\ 4-u_n \leq \frac{1}{2^n}(4-u_0) \end{cases} \Rightarrow 4-u_{n+1} \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}(4-u_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{4-u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}(4-u_0)}$$

د. استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\begin{cases} 0 < 4-u_n \leq \frac{1}{2^n}(4-u_0) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}(4-u_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} 4-u_n = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 4}$$

حل التمرين 64. (بكالوريا 2016 ع ت)

I- f الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{5x}{x+2}$

1. أ. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x}{x} = \boxed{5}$$

ب. دراسة اتجاه تغيّر الدالة f وتشكيل جدول تغيّراتها

$$f'(x) = \frac{10}{(x+2)^2} \; ; f'(x) > 0 \Rightarrow \boxed{\text{الدالة } f \text{ متزايدة على المجال } [0;+\infty[}$$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	5

2. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f(x) \geq 0$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ f \text{ متزايدة على } [0;+\infty[\end{cases} \Rightarrow f(x) \geq f(0) \Rightarrow \boxed{f(x) \geq 0}$$

II- $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{5u_n}{u_n+2}$

1. أ. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 3$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $1 \leq u_0 \leq 3$. محققة لأنّ: $u_0 = 1$

فرض التراجع: نفرض أنّ $1 \leq u_n \leq 3$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $1 \leq u_{n+1} \leq 3$

$$1 \leq u_n \leq 3 \xrightarrow[f \text{ متزايدة}]{} f(1) \leq f(u_n) \leq f(3) \Rightarrow 1 \leq \frac{5}{3} \leq u_{n+1} \leq 3$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 3$

ب. دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثمّ استنتاج أنّها متقاربة

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5u_n}{u_n + 2} - u_n = \frac{3u_n - u_n^2}{u_n + 2} = \frac{u_n(3 - u_n)}{u_n + 2}$$

$$1 \leq u_n \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} u_n(3 - u_n) \geq 0 \\ u_n + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0 \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة}}$$

بما أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى ، نستنتج أنّها متقاربة

2. (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$

أ. **برهان أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ ، يُطلب حساب حدّها الأول v_0**

$$v_{n+1} = 1 - \frac{3}{u_{n+1}} = 1 - \frac{3}{\frac{5u_n}{u_n + 2}} = 1 - \frac{3(u_n + 2)}{5u_n} = 1 - \frac{3}{5} - \frac{6}{5u_n}$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{5} - \frac{6}{5u_n} = \frac{2}{5}\left(1 - \frac{3}{u_n}\right) = \boxed{\frac{2}{5}v_n} \; ; v_0 = 1 - \frac{3}{u_0} = 1 - 3 = \boxed{-2}$$

منه نستنتج أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ ، وحدّها الأول $v_0 = -2$

ب. **كتابة عبارة v_n بدلالة n واستنتاج عبارة u_n بدلالة n**

$$v_n = v_0 \times q^n = \boxed{-2\left(\frac{2}{5}\right)^n} \; ; \; v_n = 1 - \frac{3}{u_n} \Rightarrow \frac{3}{u_n} = 1 - v_n$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{3}{1 - v_n} = \boxed{\frac{3}{1 + 2\left(\frac{2}{5}\right)^n}}$$

ج. **حساب نهاية المتتالية (u_n)**

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{3}{1 + 2\left(\frac{2}{5}\right)^n} = \boxed{3} \; ; \left[\left(\frac{2}{5}\right)^n \to 0\right]$$

3. كتابة بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \cdots + \frac{1}{u_n}$

$$S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \cdots + \frac{1}{u_n} = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{u_0} + \frac{3}{u_1} + \cdots + \frac{3}{u_n}\right)$$

$$= \frac{1}{3}(1 - v_0 + 1 - v_1 + \cdots + 1 - v_n)$$

$$= \frac{1}{3}[-(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + (n+1)]$$

$$= \frac{1}{3}\left[-v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) + (n+1)\right] = \frac{1}{3}\left[2\left(\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{5}}\right) + (n+1)\right]$$

$$= \boxed{\frac{1}{3}\left[\frac{10}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right) + (n+1)\right]}$$

حل التمرين 65. (بكالوريا 2016 د2 ع ت)

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $I = [0;4]$ كما يلي: $f(x) = \frac{13x}{9x+13}$

1. أ. بيان أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال I

$$f'(x) = \frac{169}{(9x+13)^2} \; ; \; f'(x) > 0 \Rightarrow \boxed{\text{الدالة } f \text{ متزايدة تماما على المجال } I}$$

ب. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I

$$\begin{cases} x \in [0;4] \\ f \text{ متزايدة على } I \end{cases} \Rightarrow f(x) \in [f(0); f(4)] \Rightarrow f(x) \in \left[0; \frac{52}{49}\right] \Rightarrow \boxed{f(x) \in I}$$

2. $u_0 = 4$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

أ. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 4$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $0 \leq u_0 \leq 4$. محققة لأنّ: $u_0 = 4$

فرض التراجع: نفرض أنّ $0 \leq u_n \leq 4$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $0 \leq u_{n+1} \leq 4$

$$0 \leq u_n \leq 4 \xrightarrow[\text{حسب 1.ب}]{} 0 \leq f(u_n) \leq 4 \Rightarrow \boxed{0 \leq u_{n+1} \leq 4}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 4$

ب. دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، واستنتاج أنّها متقاربة

$$u_{n+1} - u_n = \frac{13u_n}{9u_n + 13} - u_n = \frac{-9u_n^2}{9u_n + 13}$$

$$0 \leq u_n \leq 4 \Rightarrow \begin{cases} -144 \leq -9u_n^2 \leq 0 \\ 13 \leq 9u_n + 13 \leq 49 \end{cases} \Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0 \Rightarrow \boxed{(u_n) \text{ متناقصة}}$$

بما أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي إذن متقاربة

3. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \neq 0$

من أجل $u_n = 0$ يكون $u_{n+1} = 0$ وتكون المتتالية (u_n) ثابتة (معدومة) وهذا يتناقض مع كونها متناقصة، ومنه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \neq 0$.

ملاحظة: يمكننا أيضا استعمال البرهان بالتراجع لإثبات أنّ $u_n \neq 0$.

4. لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = 2 + \frac{13}{u_n}$

أ. برهان أنّ المتتالية (v_n) حسابية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0

$$v_{n+1} = 2 + \frac{13}{u_{n+1}} = 2 + \frac{13}{\frac{13u_n}{9u_n + 13}} = 2 + \frac{9u_n + 13}{u_n} = 2 + \frac{13}{u_n} + 9$$

$$v_{n+1} = v_n + 9$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها 9 وحدّها الأول $v_0 = 2 + \frac{13}{4} = \frac{21}{4}$

ب. كتابة v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 + nr = \frac{21}{4} + 9n = \boxed{\frac{36n + 21}{4}}$$

ج. استنتاج أنّ : $u_n = \frac{52}{36n+13}$ وحساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

$$v_n = 2 + \frac{13}{u_n} \Rightarrow u_n = \frac{13}{v_n - 2} = \frac{13}{\frac{36n + 21}{4} - 2} = \frac{13}{\frac{36n + 13}{4}}$$

$$\boxed{u_n = \frac{52}{36n + 13}}$$

حل التمرين 66. (بكالوريا 2016 د2 ع ت)

$u_0 = 0$ ، $u_{n+1} = \frac{2u_n+2}{u_n+3}$ ، $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$

1. بيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_0

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\frac{2u_n + 2}{u_n + 3} - 1}{\frac{2u_n + 2}{u_n + 3} + 2} = \frac{\frac{u_n - 1}{u_n + 3}}{\frac{4u_n + 8}{u_n + 3}} = \frac{1}{4}\left(\frac{u_n - 1}{u_n + 2}\right) = \frac{1}{4}v_n$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدّها الأول $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+2} = -\frac{1}{2}$

2. أ. التعبير عن عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 \times q^n = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n = -\frac{1}{2 \times 4^n} = -\frac{1}{2 \times 2^{2n}} = \boxed{-\frac{1}{2^{2n+1}}}$$

ب. استنتاج عبارة الحدّ العام u_n بدلالة n

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \Rightarrow v_n(u_n + 2) = u_n - 1 \Rightarrow u_n(1 - v_n) = 2v_n + 1$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{2v_n + 1}{1 - v_n} = \boxed{\frac{1 - \frac{1}{2^{2n}}}{1 + \frac{1}{2^{2n+1}}}}$$

جـ. حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \frac{1}{2^{2n}}}{1 + \frac{1}{2^{2n+1}}} = \boxed{1} ; \left(\frac{1}{2^{2n}} \to 0 \text{ و } \frac{1}{2^{2n+1}} \to 0\right)$$

3. أ. حساب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0\left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}}\right)$$

$$\boxed{S_n = -\frac{2}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]}$$

ب. تحقق أنّ : $\frac{1}{u_n+2} = \frac{1}{3}(1 - v_n)$

$$\frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{\frac{2v_n + 1}{1 - v_n} + 2} = \frac{1}{\frac{3}{1 - v_n}} = \frac{1 - v_n}{3} = \boxed{\frac{1}{3}(1 - v_n)}$$

جـ. استنتاج بدلالة n المجموع : $S'_n = \frac{1}{u_0+2} + \frac{1}{u_1+2} + \cdots + \frac{1}{u_n+2}$

$$S'_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \cdots + \frac{1}{u_n + 2}$$

$$S'_n = \frac{1}{3}(1 - v_0) + \frac{1}{3}(1 - v_1) + \cdots + \frac{1}{3}(1 - v_n)$$

$$S'_n = \frac{1}{3}[(n + 1) - (v_0 + v_1 + \cdots + v_n)] = \frac{1}{3}[(n + 1) - S_n]$$

$$\boxed{S'_n = \frac{1}{3}\left[(n + 1) + \frac{2}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]\right]}$$

حل التمرين 67. (بكالوريا 2017 ع ت)

$u_0 = \frac{1}{4}$ ، $u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n+4}$ ، $v_n = \frac{u_n+2}{1-u_n}$

1. أ. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $0 < u_0 < 1$. محققة لأنّ: $u_0 = \frac{1}{4}$

فرض التراجع: نفرض أنّ $0 < u_n < 1$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $0 < u_{n+1} < 1$

$$0 < u_n < 1 \Rightarrow 4 < u_n + 4 < 5 \Rightarrow 2 < \frac{10}{u_n+4} < \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < 3 - \frac{10}{u_n+4} < 1 \Rightarrow \boxed{0 < \frac{1}{2} < u_{n+1} < 1}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$

ب. بيان أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما واستنتاج انّها متقاربة

$$u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{10}{u_n+4} - u_n = \frac{(3-u_n)(u_n+4)-10}{u_n+4}$$

$$= \frac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n+4} = \frac{(1-u_n)(2+u_n)}{u_n+4}$$

$$0 < u_n < 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < 1 - u_n < 1 \\ 2 < 2 + u_n < 3 \\ 4 < u_n + 4 < 5 \end{cases} \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0 \Rightarrow \boxed{(u_n) \text{ متزايدة تماما}}$$

بما أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي إذن متقاربة

2. أ. بيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}+2}{1-u_{n+1}} = \frac{5 - \frac{10}{u_n+4}}{-2 + \frac{10}{u_n+4}} = \frac{\frac{5u_n+10}{u_n+4}}{\frac{-2u_n+2}{u_n+4}} = \frac{5u_n+10}{2-2u_n}$$

$$v_{n+1} = \frac{5(u_n+2)}{2(1-u_n)} = \boxed{\frac{5}{2}v_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ وحدّها الأول $v_0 = \frac{u_0+2}{1-u_0} = 3$

التعبير عن v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 \times q^n = \boxed{3\left(\frac{5}{2}\right)^n}$$

ب. إثبات أنّ: $u_n = 1 - \frac{3}{v_n+1}$ واستنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n} \Rightarrow v_n(1 - u_n) = u_n + 2 \Rightarrow u_n(v_n + 1) = v_n - 2$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{v_n - 2}{v_n + 1} = \frac{v_n + 1 - 3}{v_n + 1} = \boxed{1 - \frac{3}{v_n + 1}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{3}{v_n + 1} = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{3}{3\left(\frac{5}{2}\right)^n + 1} = \boxed{1}$$

حل التمرين 68. (بكالوريا 2017 ع ت)

$D_f = [-4; 1]$ ، $f(x) = \frac{3x-16}{x+11}$

I- تحقق أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4; 1]$

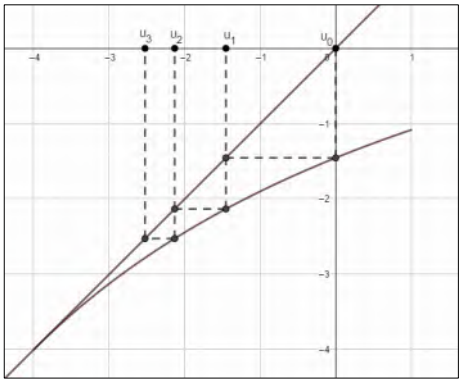
$f'(x) = \frac{49}{(x+11)^2}$; $f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4; 1]$

بيان أنّه من أجل كل $x \in [-4; 1]$ فإنّ $f(x) \in [-4; 1]$

$$\begin{cases} -4 \le x \le 1 \\ f \text{ متزايدة على } [-4; 1] \end{cases} \Rightarrow \underbrace{f(-4)}_{-4} \le f(x) \le \underbrace{f(1)}_{-\frac{13}{12}} \Rightarrow \boxed{f(x) \in [-4; 1]}$$

II- $u_0 = 0$ ، $u_{n+1} = f(u_n)$

1. تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 وu_3 على حامل محور الفواصل



التخمين حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها

المتتالية (u_n) متناقصة ومتقاربة

2. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $-4 < u_n \le 0$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $-4 < u_0 \le 0$. محققة لأنّ: $u_0 = 0$

فرض التراجع: نفرض أنّ $-4 < u_n \le 0$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $-4 < u_{n+1} \le 0$

$$-4 < u_n \leq 0 \underset{\text{حسب I}}{\Longrightarrow} -4 < f(u_n) \leq 0 \Rightarrow \boxed{-4 < u_{n+1} \leq 0}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $-4 < u_n \leq 0$

بيان أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n - 16}{u_n + 11} - u_n = \frac{-u_n^2 - 8u_n - 16}{u_n + 11} = \boxed{-\frac{(u_n + 4)^2}{u_n + 11}}$$

$$-4 < u_n \leq 0 \Rightarrow 7 < u_n + 11 \leq 11 \Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0 \Rightarrow \boxed{(u_n) \text{ متناقصة}}$$

3. $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$

إثبات أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{7}$

$$v_n \times u_n = 1 - 4v_n \Rightarrow v_n(u_n + 4) = 1 \Rightarrow v_n = \frac{1}{u_n + 4}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} + 4} = \frac{1}{\frac{3u_n - 16}{u_n + 11} + 4} = \frac{1}{\frac{7u_n + 28}{u_n + 11}} = \frac{u_n + 11}{7u_n + 28}$$

$$v_{n+1} = \frac{u_n + 4 + 7}{7u_n + 28} = \frac{u_n + 4}{7(u_n + 4)} + \frac{7}{7(u_n + 4)} = \boxed{\frac{1}{7} + v_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = \frac{1}{7}$

حساب المجموع S:

$$S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \cdots + v_{2016} \times u_{2016}$$
$$S = 1 - 4v_0 + 1 - 4v_1 + \cdots + 1 - 4v_{2016}$$
$$S = 2017 - 4(v_0 + v_1 + \cdots + v_{2016}) = 2017 - 4\left(\frac{2017}{2}\right)(v_0 + v_{2016})$$
$$v_0 = \frac{1}{u_0 + 4} = \frac{1}{4} \; ; v_{2016} = v_0 + 2016r = \frac{1}{4} + \frac{2016}{7} = \frac{1153}{4}$$
$$S = 2017 - 4034\left(\frac{1}{4} + \frac{1153}{4}\right) = \boxed{-1161792}$$

حل التمرين 69. (بكالوريا 2017 د2 ع ت)

$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$$

1. حساب الحدّين u_1 وv_1

$$u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 1 = \frac{3}{4} + 1 = \boxed{\frac{7}{4}} \; ; v_1 = \frac{3}{4}v_0 + 1 = \frac{9}{2} + 1 = \boxed{\frac{11}{2}}$$

2. أ. كتابة $u_{n+1}-u_n$ بدلالة $u_{n+2}-u_{n+1}$

$$u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{3}{4}u_{n+1}+1-\frac{3}{4}u_n-1=\boxed{\frac{3}{4}(u_{n+1}-u_n)}$$

ب. برهان أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما والمتتالية (v_n) متناقصة تماما

(u_n) متزايدة تماما $\Rightarrow u_{n+1}-u_n>0$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $u_1-u_0>0$. محققة لأنّ:

$$u_1-u_0=\frac{7}{4}-1=\frac{3}{4}\Rightarrow u_1-u_0>0$$

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_{n+1}-u_n>0$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_{n+2}-u_{n+1}>0$

$$u_{n+1}-u_n>0\Rightarrow\frac{3}{4}(u_{n+1}-u_n)>0\Rightarrow\boxed{u_{n+2}-u_{n+1}>0}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما

(v_n) متناقصة تماما $\Rightarrow v_{n+1}-v_n<0$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $v_1-v_0<0$. محققة لأنّ:

$$v_1-v_0=\frac{11}{2}-6=-\frac{1}{2}\Rightarrow v_1-v_0<0$$

فرض التراجع: نفرض أنّ $v_{n+1}-v_n<0$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $v_{n+2}-v_{n+1}<0$

$$v_{n+1}-v_n<0\Rightarrow\frac{3}{4}(v_{n+1}-v_n)<0\Rightarrow\boxed{v_{n+2}-v_{n+1}<0}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) متناقصة تماما

3. $w_n=u_n-v_n$

برهان أنّ المتتالية (w_n) هندسية يُطلب تعيين حدّها الأول w_0

$$w_{n+1}=u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+1-\frac{3}{4}v_n-1=\frac{3}{4}(u_n-v_n)=\frac{3}{4}w_n$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (w_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ وحدّها الأول $w_0=u_0-v_0=-5$

التعبير عن w_n بدلالة n

$$\boxed{w_n=w_0\times q^n=-5\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

4. بيان أنّ المتتاليتين (u_n) و(v_n) متجاورتان

$$\lim_{n\to+\infty}w_n=\lim_{n\to+\infty}-5\left(\frac{3}{4}\right)^n=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}u_n-v_n=0$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}v_n$$

$$\begin{cases} (u_n) \text{ متزايدة} \\ (v_n) \text{ متناقصة} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n \end{cases} \Rightarrow \boxed{(u_n) \text{ و } (v_n) \text{ متجاورتان}}$$

حل التمرين 70. (بكالوريا 2017 د2 ع ت)

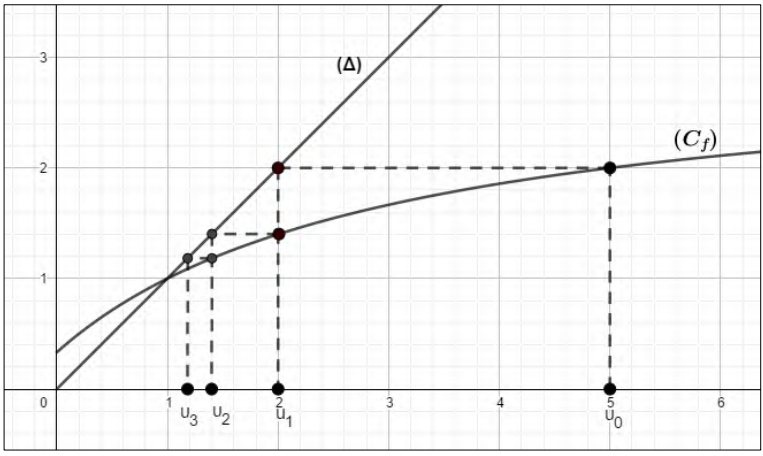
$u_{n+1} = f(u_n)$ ، $u_0 = \alpha$ ، $D_f = [0;+\infty[$ ، $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$

I- تعيين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة

$$(u_n) \text{ ثابتة} \Rightarrow u_{n+1} = u_n = u_0 \Rightarrow \frac{3\alpha+1}{\alpha+3} = \alpha \Rightarrow \alpha(\alpha+3) = 3\alpha+1$$
$$\Rightarrow \alpha^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

II- $\alpha = 5$

1. أ. تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 وu_3 على حامل محور الفواصل



ب. وضع تخمين حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها

المتتالية (u_n) متناقصة ومتقاربة نحو العدد 1

2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$

أ. برهان أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يُطلب تعيين حدّها الأول

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{\frac{3u_n+1}{u_n+3}-1}{\frac{3u_n+1}{u_n+3}+1} = \frac{\frac{2u_n-2}{u_n+3}}{\frac{4u_n+4}{u_n+3}} = \frac{2(u_n-1)}{4(u_n+1)} = \boxed{\frac{1}{2}v_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدّها الأول $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+1} = \frac{2}{3}$

ب. التعبير عن v_n وu_n بدلالة n وحساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$v_n = v_0 \times q^n = \boxed{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \Rightarrow v_n(u_n + 1) = u_n - 1 \Rightarrow u_n(1 - v_n) = 1 + v_n$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n} = \boxed{\frac{1 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \boxed{1}$$

3. حساب المجموع S_n واستنتاج المجموع S'_n بدلالة n:

$$S_n = v_n + v_{n+1} + \cdots + v_{n+2016} = v_n\left(\frac{1 - q^{2017}}{1 - q}\right)$$

$$S_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2017}}{1 - \frac{1}{2}}\right) = \boxed{\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2017}\right]}$$

$$u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n} \Rightarrow u_n + 1 = \frac{1 + v_n}{1 - v_n} + 1 = \frac{2}{1 - v_n} \Rightarrow \frac{1}{u_n + 1} = \frac{1}{2}(1 - v_n)$$

$$S'_n = \frac{1}{u_n + 1} + \frac{1}{u_{n+1} + 1} + \frac{1}{u_{n+2} + 1} + \cdots + \frac{1}{u_{n+2016} + 1}$$

$$S'_n = \frac{1}{2}(1 - v_n) + \frac{1}{2}(1 - v_{n+1}) + \cdots + \frac{1}{2}(1 - v_{n+2016})$$

$$S'_n = \frac{1}{2}(2017) - \frac{1}{2}(v_n + v_{n+1} + \cdots + v_{n+2016})$$

$$S'_n = -\frac{1}{2}(S_n - 2017) = \boxed{-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2017}\right] - 2017\right)}$$

حل التمرين 71. (بكالوريا 2018 ع ت)

$$u_0 = 1 \text{ ، } u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$$

1. أ. البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > -2$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $u_0 > -2$. محققة لأنّ: $u_0 = 1$

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_n > -2$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_{n+1} > -2$

$$u_n > -2 \Rightarrow u_n + 5 > 3 \Rightarrow \frac{1}{u_n+5} < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{9}{u_n+5} > -3$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{9}{u_n+5} > -2 \Rightarrow \boxed{u_{n+1} > -2}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$

ب. بيان أنّ (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ واستنتاج أنّها متقاربة

$$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{9}{u_n+5} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+5)-9}{u_n+5}$$

$$= \frac{-u_n^2 - 4u_n - 4}{u_n+5} = \boxed{\frac{-(u_n+2)^2}{u_n+5}}$$

$$u_n > -2 \Rightarrow \begin{cases} -(u_n+2)^2 < 0 \\ u_n + 5 > 3 \end{cases} \Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0 \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة}}$$

بما أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد -2 فهي إذن متقاربة

2. نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = \frac{1}{u_n+2}$

اثبات أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يُطلب تعيين حدّها الأول

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}+2} - \frac{1}{u_n+2} = \frac{1}{3 - \frac{9}{u_n+5}} - \frac{1}{u_n+2}$$

$$= \frac{u_n+5}{3u_n+6} - \frac{1}{u_n+2} = \frac{u_n+5-3}{3u_n+6} = \frac{u_n+2}{3(u_n+2)} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدّها الأول $v_0 = \frac{1}{u_0+2} = \frac{1}{3}$

3. التعبير عن v_n وu_n بدلالة n ، وحساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$v_n = v_0 + nr = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}n = \boxed{\frac{n+1}{3}}$$

$$v_n = \frac{1}{u_n+2} \Rightarrow u_n + 2 = \frac{1}{v_n} \Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n} - 2 = \frac{3}{n+1} - 2 = \boxed{\frac{-2n+1}{n+1}}$$

4. بيان أنّ: $u_0v_0 + u_1v_1 + \cdots + u_nv_n = \frac{1}{3}(1-n^2)$

$$u_n = \frac{1}{v_n} - 2 = \frac{1-2v_n}{v_n} \Rightarrow \boxed{u_n v_n = 1 - 2v_n}$$

$$u_0v_0 + u_1v_1 + \cdots + u_nv_n = (1-2v_0) + (1-2v_1) + \cdots + (1-2v_n)$$

$$= (n+1) - 2(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) = (n+1) - 2\left[\frac{n+1}{2}(v_0+v_n)\right]$$

$$= (n+1) - (n+1)\left(\frac{1}{3} + \frac{n+1}{3}\right) = (n+1)\left(1 - \frac{n+2}{3}\right)$$

$$= (n+1)\left(\frac{1-n}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{3}(1-n^2)}$$

حل التمرين 72. (بكالوريا 2018 ع ت)

$\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)}$ ، $\boldsymbol{u_0 = 0}$

1. حساب $\boldsymbol{u_1}$ ، $\boldsymbol{u_2}$ و $\boldsymbol{u_3}$

$$u_1 = u_0 + \ln 3 = \boxed{\ln 3}$$

$$u_2 = u_1 + \ln\frac{5}{3} = \ln 3 + \ln 5 - \ln 3 = \boxed{\ln 5}$$

$$u_3 = u_2 + \ln\frac{7}{5} = \ln 5 + \ln 7 - \ln 5 = \boxed{\ln 7}$$

2. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي $\boldsymbol{n}$: $\boldsymbol{\frac{2n+3}{2n+1} > 1}$

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow 2n+3 > 2n+1 \Rightarrow \boxed{\frac{2n+3}{2n+1} > 1}$$

استنتاج اتجاه تغيّر المتتالية $(\boldsymbol{u_n})$

$$u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) ; \frac{2n+3}{2n+1} > 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0 \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة تماما}}$$

3. (v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي $\boldsymbol{n}$ بـ: $\boldsymbol{v_n = 2n+1}$

أ. البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي $\boldsymbol{n}$: $\boldsymbol{e^{u_n} = v_n}$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $e^{u_0} = v_0$. محققة لأنّ: $e^{u_0} = 1 = v_0$

فرض التراجع: نفرض أنّ $e^{u_n} = v_n$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $e^{u_{n+1}} = v_{n+1}$

$$e^{u_{n+1}} = e^{u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)} = e^{u_n} \times e^{\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)} = v_n\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$$

$$= (2n+1)\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) = 2n+3 = \boxed{v_{n+1}}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $e^{u_n} = v_n$

ب. استنتاج عبارة الحدّ العام للمتتالية (u_n) بدلالة n وحساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$e^{u_n} = v_n \Rightarrow u_n = \ln v_n = \boxed{\ln(2n+1)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \ln(2n+1) = \boxed{+\infty}$$

4. حساب المجموعين S_n و T:

$$S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right) = \ln\left(\frac{v_1}{v_0} \times \frac{v_2}{v_1} \times \ldots \times \frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{v_n}{v_0}\right) = \ln(2n+1) \Rightarrow \boxed{S_n = u_n}$$

$$T = e^{u_{1439}} + e^{u_{1440}} + \cdots + e^{u_{2018}} = v_{1439} + v_{1440} + \cdots + v_{2018}$$

$$T_n = \frac{580}{2}[2(1439) + 1 + 2(2018) + 1] = 580 \times 3458 = \boxed{2005640}$$

(لاحظ أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها 2 و T هو مجموع $(2018 - 1439 + 1)$ حد من حدود (v_n)).

حل التمرين 73. (بكالوريا 2008 ت ر)

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $[0;2]$ بالعبارة : $f(x)=\frac{2x+3}{x+2}$

1. أ. دراسة تغيّرات الدالة f على المجال $[0;2]$

$f'(x)=\frac{1}{(x+2)^2}$; $f'(x)>0 \Rightarrow$ الدالة f متزايدة على المجال $[0;2]$

ب. إنشاء (C)

جـ. برهان أنّه إذا كان $x\in[0;2]$ فإنّ $f(x)\in[0;2]$

$\begin{cases} x\in[0;2] \\ f \text{ متزايدة على } [0;2] \end{cases} \Rightarrow f(x)\in[f(0);f(2)] \Rightarrow f(x)\in\left[\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right]$

$\Rightarrow \boxed{f(x)\in[0;2]}$

2. نعرّف المتتالية العددية (u_n) على $\mathbb{N}$ كالآتي : $u_0=0$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

أ. تبرير وجود المتتالية (u_n) وحساب الحدّين u_1 و u_2

لتبرير وجود المتتالية (u_n) نبرهن أنّ $u_n\neq -2$ ، ولذلك نبرهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n\geq 0$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $u_0\geq 0$. محققة لأنّ: $u_0=0$

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_n\geq 0$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_{n+1}\geq 0$

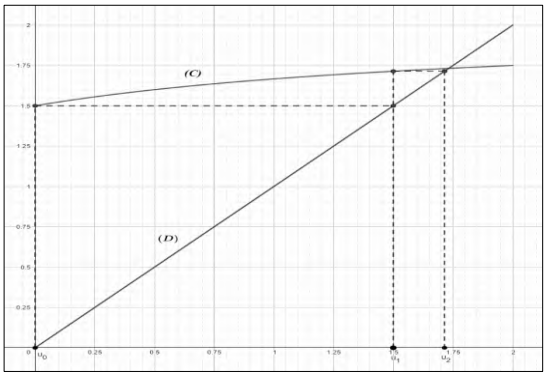
$u_n\geq 0 \underset{f \text{ متزايدة}}{\Longrightarrow} f(u_n)\geq f(0) \Rightarrow \boxed{u_{n+1}\geq \frac{3}{2}\geq 0}$

نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n\geq 0$ وبالتالي $u_n\neq -2$

ومنه فإنّ المتتالية (u_n) معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n.

$u_1=f(u_0)=\frac{2u_0+3}{u_0+2}=\boxed{\frac{3}{2}}$; $u_2=f(u_1)=\frac{2u_1+3}{u_1+2}=\frac{6}{\frac{7}{2}}=\boxed{\frac{12}{7}}$

ب. تمثيل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على محور الفواصل



ج. وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

نلاحظ أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة

3. أ. برهان بالتراجع على العدد الطبيعي n أنّ : $0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $0 \leq u_0 \leq \sqrt{3}$. محققة لأنّ: $u_0 = 0$

فرض التراجع: نفرض أنّ $0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $0 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$

$$0 \leq u_n \leq \sqrt{3} \xrightarrow[\text{حسب 1.ب}]{} 0 \leq f(u_n) \leq 4 \Rightarrow \boxed{0 \leq u_{n+1} \leq 4}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

ب. برهان أنّه مهما يكن العدد الطبيعي n فإنّ : $u_{n+1} > u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} - u_n = \frac{3 - u_n^2}{u_n + 2} = \boxed{\frac{(\sqrt{3} - u_n)(\sqrt{3} + u_n)}{u_n + 2}}$$

$$0 \leq u_n \leq \sqrt{3} \Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0 \Rightarrow \boxed{u_{n+1} \geq u_n}$$

استنتاج تقارب (u_n)

بما أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\sqrt{3}$ فهي إذن متقاربة

جـ. التحقق أنّ : $u_{n+1} - \sqrt{3} \leq \frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}(u_n - \sqrt{3})$

$$u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} - \sqrt{3} = \frac{(2 - \sqrt{3})u_n + (3 - 2\sqrt{3})}{u_n + 2}$$

$$= \frac{(2 - \sqrt{3})(u_n - \sqrt{3})}{u_n + 2} = \boxed{\frac{2 - \sqrt{3}}{u_n + 2}(u_n - \sqrt{3})}$$

تعيين عدد حقيقي k من $]0;1[$ بحيث : $|u_{n+1} - \sqrt{3}| \leq k|u_n - \sqrt{3}|$

$$0 \leq u_n \leq \sqrt{3} \Rightarrow 2 \leq u_n + 2 \leq \sqrt{3} + 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3} + 2} \leq \frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2} \leq \frac{2 - \sqrt{3}}{u_n + 2} \leq \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} u_{n+1} - \sqrt{3} = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{u_n + 2}(u_n - \sqrt{3}) \\ \dfrac{2 - \sqrt{3}}{u_n + 2} \leq \dfrac{2 - \sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \underbrace{u_{n+1} - \sqrt{3}}_{\leq 0} \geq \frac{2 - \sqrt{3}}{2}\underbrace{(u_n - \sqrt{3})}_{\leq 0}$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \sqrt{3}| \leq \frac{2 - \sqrt{3}}{2}|u_n - \sqrt{3}| \Rightarrow \boxed{k = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}}$$

بيان أنّه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $|u_n - \sqrt{3}| \leq k^n |u_0 - \sqrt{3}|$

$$\begin{cases} |u_n - \sqrt{3}| \leq k|u_{n-1} - \sqrt{3}| \\ |u_{n-1} - \sqrt{3}| \leq k|u_{n-2} - \sqrt{3}| \\ \vdots \\ |u_1 - \sqrt{3}| \leq k|u_0 - \sqrt{3}| \end{cases} \Rightarrow \boxed{|u_n - \sqrt{3}| \leq k^n |u_0 - \sqrt{3}|}$$

يمكننا أيضا استعمال البرهان بالتراجع

استنتاج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

$$\begin{cases} 0 \leq |u_n - \sqrt{3}| \leq k^n |u_0 - \sqrt{3}| \\ \lim\limits_{n \to +\infty} k^n |u_0 - \sqrt{3}| = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} |u_n - \sqrt{3}| = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{3}}$$

حل التمرين 74. (بكالوريا 2008 ت ر)

1. f الدالة العددية المعرّفة على $]-2; +\infty[$ كما يأتي : $f(x) = \frac{x^2+5}{x+2}$

أ. حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{x^2+5}{x+2} \to \frac{9}{0^+} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+5}{x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = \boxed{+\infty}$$

ب. دراسة اتجاه تغيّر f وتشكيل جدول تغيراتها

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - (x^2+5)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2} = \frac{(x-1)(x+5)}{(x+2)^2}$$

$x \in]-2; 1[: f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة f متناقصة

$x \in [1; +\infty[: f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة f متزايدة

x	-2		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

ج. بيان أنّ المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 2$ مقارب للمنحنى (C_f)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-2) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+5-(x^2-4)}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{9}{x+2} = \boxed{0}$$

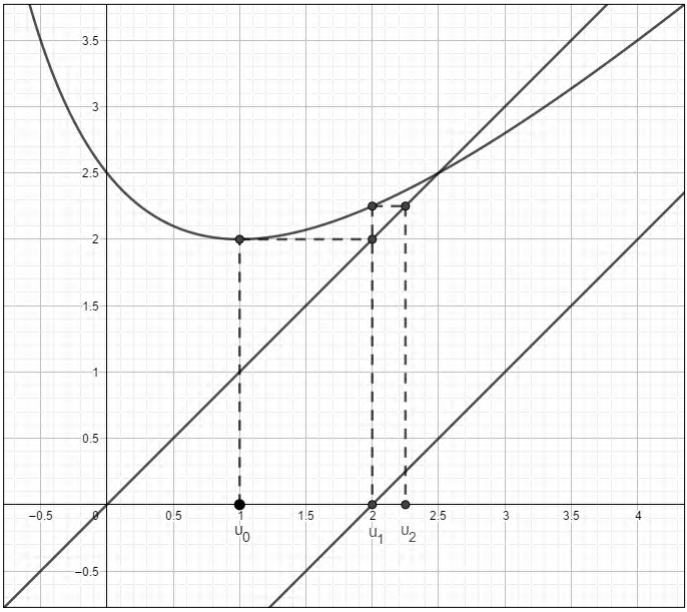
د. بيان أنّ صورة المجال $\left[1;\frac{5}{2}\right]$ محتواة في المجال $\left[1;\frac{5}{2}\right]$

$$\begin{cases} x \in \left[1;\frac{5}{2}\right] \\ \left[1;\frac{5}{2}\right] \text{ متزايدة على المجال } f \end{cases} \Rightarrow f(x) \in \left[f(1);f\left(\frac{5}{2}\right)\right] \Rightarrow f(x) \in \left[2;\frac{5}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{f\left(\left[1;\frac{5}{2}\right]\right) \subset \left[1;\frac{5}{2}\right]}$$

2. $u_{n+1} = f(u_n)$ ، $u_0 = 1$

أ. تمثيل u_0 ، u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل (Ox)



ب. تخمين اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n)

نلاحظ أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة

ج. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $1 \le u_n \le \frac{5}{2}$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $1 \le u_0 \le \frac{5}{2}$. محققة لأنّ: $u_0 = 1$

فرض التراجع: نفرض أنّ $1 \le u_n \le \frac{5}{2}$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $1 \le u_{n+1} \le \frac{5}{2}$

$$1 \le u_n \le \frac{5}{2} \xrightarrow[\text{حسب 1.ب}]{} 1 \le f(u_n) \le \frac{5}{2} \Rightarrow \boxed{1 \le u_{n+1} \le \frac{5}{2}}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \le u_n \le \frac{5}{2}$

بيان أنّ المتتالية (u_n) متزايدة

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 5}{u_n + 2} - u_n = \boxed{\frac{5 - 2u_n}{u_n + 2}}$$

$$u_n \le \frac{5}{2} \Rightarrow 5 - 2u_n \ge 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n \ge 0 \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة}}$$

د. استنتاج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة وحساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

بما أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\frac{5}{2}$ فهي إذن متقاربة

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l \Rightarrow \frac{l^2 + 5}{l + 2} = l \Rightarrow 2l = 5 \Rightarrow \boxed{l = \frac{5}{2}}$$

حل التمرين 75. (بكالوريا 2009 ت ر)

1. أ. تعيين الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2009

الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم 2009 هي 1 و 7 $\Rightarrow 2009 = 7^2 \times 41$

ب. حساب a وu_0

$$u_1^2 + u_2 + 35a^2 = 2009 \Rightarrow a^2u_0^2 + a^2u_0 + 35a^2 = 2009$$
$$\Rightarrow a^2(u_0^2 + u_0 + 35) = 2009 \Rightarrow a^2 \mid 2009$$
$$\Rightarrow a = 1 \text{ أو } a = 7$$

- $a = 1$: $u_0^2 + u_0 + 35 = 2009 \Rightarrow u_0^2 + u_0 - 1974 = 0$;
  $\Delta = 7897$ (ليس مربعا تاما)
- $a = 7$: $u_0^2 + u_0 + 35 = 41 \Rightarrow u_0^2 + u_0 - 6 = 0$;
  $\Delta = 25$; $u_0 = -3$ (مرفوض) أو $u_0 = 2$

$$\boxed{u_1^2 + u_2 + 35a^2 = 2009 \Rightarrow a = 7 \text{ ; } u_0 = 2}$$

2. حساب u_n بدلالة n

$$u_n = u_0 \times a^n \Rightarrow \boxed{u_n = 2 \times 7^n}$$

3. $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

أ. التعبير عن S_n بدلالة n

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0\left(\frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}\right) = 2\left(\frac{7^{n+1} - 1}{7 - 1}\right)$$

$$\boxed{S_n = \frac{1}{3}(7^{n+1} - 1)}$$

ب. تعيين العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n = 800$

$$S_n = 800 \Rightarrow \frac{1}{3}(7^{n+1} - 1) = 800 \Rightarrow 7^{n+1} - 1 = 2400$$
$$\Rightarrow 7^{n+1} = 2401 \Rightarrow \ln 7^{n+1} = \ln 2401$$
$$\Rightarrow (n+1)\ln 7 = \ln 2401 \Rightarrow n + 1 = \frac{\ln 2401}{\ln 7} = 4 \Rightarrow \boxed{n = 3}$$

حل التمرين 76. (بكالوريا 2011 ت ر)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $u_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$

1. إثبات أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإنّ : $u_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$

$$u_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n(n+2)} = \frac{n(n+2) + 1}{n(n+2)} = \boxed{1 + \frac{1}{n(n+2)}}$$

استنتاج أنّ : $u_n > 1$

$$n > 0 \Rightarrow \frac{1}{n(n+2)} > 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{n(n+2)} > 1 \Rightarrow \boxed{u_n > 1}$$

2. دراسة اتجاه تغيّر (u_n)

ندرس اتجاه تغيّر الدالة $f(n) = u_n$ على المجال $\mathbb{N}^*$

$$f'(n) = -\frac{2n+2}{[n(n+2)]^2} \; ; \; f'(n) < 0 \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة}}$$

بيان أنّ المتتالية (u_n) متقاربة وحساب نهايتها

بما أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي إذن متقاربة

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n(n+2)} = \boxed{1}$$

3. $P_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$

إثبات بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإنّ : $P_n = \frac{2n+2}{n+2}$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $P_1 = \frac{4}{3}$. محققة لأنّ: $u_1 = \frac{4}{3}$

فرض التراجع: نفرض أنّ $P_n = \frac{2n+2}{n+2}$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $P_{n+1} = \frac{2n+4}{n+3}$

$$P_{n+1} = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_{n+1} = P_n \times u_{n+1} = \frac{2n+2}{n+2} \times \frac{(n+2)^2}{(n+1)(n+3)}$$

$$= \frac{2(n+1)(n+2)}{(n+1)(n+3)} = \boxed{\frac{2n+4}{n+3}}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = \frac{2n+2}{n+2}$

4. التعبير عن S_n بدلالة P_n وحساب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

$$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \ln u_1 + \ln u_2 + \cdots + \ln u_n$$
$$= \ln(u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n) = \boxed{\ln P_n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \ln P_n = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{2n+2}{n+2}\right) = \boxed{\ln 2}$$

حل التمرين 77. (بكالوريا 2011 ت ر)

I) $D_f = \mathbb{R}$ ، $f(x) = 3 - \frac{4}{e^x+1}$

1. دراسة تغيرات الدالة f

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3 - \frac{4}{e^x+1} = \boxed{-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3 - \frac{4}{e^x+1} = \boxed{3}$$

$$f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x+1)^2} \; ; f'(x) > 0 \Rightarrow \boxed{\text{الدالة } f \text{ متزايدة تماما على } \mathbb{R}}$$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	-1 ↗ 3

2. تعيين المستقيمات المقاربة للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)

يقبل المنحنى ($\mathscr{C}_f$) مستقيمين مقاربين أفقيين ، أحدهما معادلته $y = -1$ بجوار $-\infty$ والآخر معادلته $y = 3$ بجوار $+\infty$

3. بيان أنّ للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) نقطة انعطاف ω

$$f''(x) = \frac{4e^x(e^x+1)^2 - 8e^{2x}(e^x+1)}{(e^x+1)^4} = \frac{4e^x(-e^x+1)}{(e^x+1)^4}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -e^x + 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

بما أنّ $f''(x)$ تنعدم وتغيّر إشارتها عند النقطة ذات الفاصلة 0 ، نستنتج أنّ $\omega(0;1)$ نقطة انعطاف المنحنى ($\mathscr{C}_f$)

كتابة معادلة لمماس ($\mathscr{C}_f$) عند ω

$$(T): y = f'(0)x + f(0) \Rightarrow \boxed{y = x + 1}$$

4. $D_g = \mathbb{R}$ ، $g(x) = f(x) - x$

أ. دراسة تغيرات الدالة g

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \boxed{-\infty}$$

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{4e^x}{(e^x+1)^2} - 1 = \frac{4e^x - (e^x+1)^2}{(e^x+1)^2} = -\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$$

$g'(x) \leq 0 \Rightarrow$ الدالة g متناقصة على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	1	↘	$-\infty$

ب. بيان أنّ $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $2,7 < \alpha < 2,8$

الدالة g مستمرو ورتيبة على المجال $]2,7;2,8[$ و $\underbrace{g(2,7)}_{\approx 0,05} \times \underbrace{g(2,8)}_{\approx -0,03} < 0$ ،

منه نستنتج أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $2,7 < \alpha < 2,8$

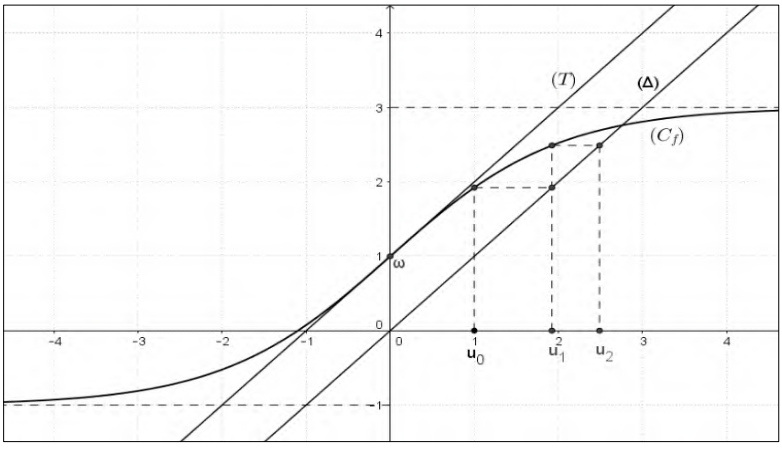
حسب مبرهنة القيم المتوسطة

5. أ. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \Rightarrow 3 - \frac{4}{e^x+1} = 0 \Rightarrow 3 = \frac{4}{e^x+1} \Rightarrow e^x + 1 = \frac{4}{3} \Rightarrow e^x = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = -\ln 3}$$

ب. رسم المماس والمستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = x$ والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$



II) $u_{n+1} = f(u_n)$ ، $u_0 = 1$

1. تمثيل u_0 ، u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل

2. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n < \alpha$

تحقيق التراجع : $1 \leq u_0 < \alpha$ (محققة لأنّ $u_0 = 1$)

فرض التراجع : نفرض أنّ $1 \leq u_n < \alpha$

برهان التراجع : نبرهن أنّ $1 \leq u_{n+1} < \alpha$

$$1 \leq u_n < \alpha \xrightarrow[\text{لأنّ } f \text{ متزايدة على } \mathbb{R}]{} \underbrace{f(1)}_{\approx 1,9} \leq \underbrace{f(u_n)}_{u_{n+1}} < \underbrace{f(\alpha)}_{\alpha} \Rightarrow 1 \leq u_{n+1} < \alpha$$

منه، نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n < \alpha$

$[g(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\alpha) - \alpha = 0 \Rightarrow f(\alpha) = \alpha]$

3. بيان أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$$

$$u_n < \alpha \xrightarrow[\text{لأنّ } g \text{ متناقصة}]{} g(u_n) > g(\alpha) \Rightarrow g(u_n) > 0 \Rightarrow \boxed{(u_n) \text{ متزايدة تماما}}$$

4. استنتاج أنّ (u_n) متقاربة وبيان أنّ : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

بما أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد α ، فهي إذن متقاربة

نرمز بـ l إلى نهاية المتتالية (u_n). لدينا :

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} u_n = l \Rightarrow f(l) = l \Rightarrow f(l) - l = 0 \Rightarrow g(l) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{l = \alpha}$$

<u>حل التمرين 78. (بكالوريا 2012 ت ر)</u>

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(z^2 + 2z + 4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$

$z^2 + 2z + 4 = 0$; $\Delta = -12 = (2\sqrt{3}i)^2$

$z_1 = -1 + i\sqrt{3}$; $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$

$z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$; $\Delta = -4 = (2i)^2$; $z_3 = \sqrt{3} + i$; $z_4 = \sqrt{3} - i$

$$\boxed{S = \{-1 + i\sqrt{3}\,; -1 - i\sqrt{3}\,;\ \sqrt{3} + i\,; \sqrt{3} - i\}}$$

2. $z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = \sqrt{3} - i$ ، $z_C = -1 - i\sqrt{3}$ ، $z_D = -1 + i\sqrt{3}$

أ. كتابة z_A ، z_B ، z_C و z_D على الشكل الأسّي

$$z_A = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \boxed{2e^{i\frac{\pi}{6}}}\,;\ z_B = \overline{z_A} = \boxed{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$$

$$z_C = -1 - i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boxed{2e^{i\frac{4\pi}{3}}}\,;\ z_D = \overline{z_C} = \boxed{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$

ب. التحقق أنّ : $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_C}=i$

$$\frac{z_D-z_B}{z_A-z_C}=\frac{-(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}+1)i}{(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}+1)i}=\frac{-1+i}{1+i}=\frac{-(1-i)^2}{2}=\frac{2i}{2}=\boxed{i}$$

استنتاج أنّ المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان

$$\arg\left(\frac{z_D-z_B}{z_A-z_C}\right)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{BD})=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\boxed{(AC)\perp(BD)}$$

3. $L_n=z_D\times z_n$ ، $z_n=\frac{1}{2^n}e^{\frac{2n\pi}{3}i}$

أ. كتابة L_0 ، L_1 على الشكل الجبري

$$L_0=z_D\times z_0=z_D(e^0)=z_D=\boxed{-1+i\sqrt{3}}$$

$$L_1=z_D\times z_1=2e^{i\frac{2\pi}{3}}\times\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}=e^{i\frac{4\pi}{3}}=\boxed{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

ب. $u_n=|L_n|$

- **اثبات أنّ المتتالية (u_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول**

$$u_{n+1}=|L_{n+1}|=|z_D\times z_{n+1}|=|z_D|\times\left|\frac{1}{2^{n+1}}e^{\frac{(2n+2)\pi}{3}i}\right|=2\times\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}\left(2\times\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2}|z_D\times z_n|=\frac{1}{2}|L_n|=\boxed{\frac{1}{2}u_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدّها الأول $u_0=|L_0|=2$

- **حساب المجموع S_n**

$$S_n=\|\overrightarrow{OM_0}\|+\|\overrightarrow{OM_1}\|\ldots+\|\overrightarrow{OM_n}\|=|L_0|+|L_1|+\cdots+|L_n|$$

$$S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n=u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)=2\left(\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\boxed{S_n=4\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}$$

- **إيجاد نهاية S_n**

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}4\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\boxed{4};\left(\frac{1}{2^{n+1}}\to0\right)$$

حل التمرين 79. (بكالوريا 2013 ت ر)

$$v_n = \frac{1}{2}\ln u_n + \frac{1}{2}\text{ ، }u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}}\text{ ، }u_0 = e^2$$

1. بيان أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحساب حدّها الأول

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}\ln u_{n+1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln\sqrt{\frac{u_n}{e}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{u_n}{e}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{u_n}{e}\right) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\ln u_n + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln u_n + \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{2}v_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدّها الأول $v_0 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

2. كتابة v_n بدلالة n ، ثمّ استنتاج عبارة u_n بدلالة n

$$v_n = v_0 \times q^n = \boxed{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$v_n = \frac{1}{2}\ln u_n + \frac{1}{2} \Rightarrow \ln u_n = 2v_n - 1 \Rightarrow u_n = e^{2v_n - 1} = \boxed{e^{3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}}$$

3. حساب المجموع S_n بدلالة n

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0\left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right)$$

$$\boxed{S_n = 3\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 3\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = \boxed{3}\,;\ \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \to 0\right]$$

4. حساب الجداء P_n بدلالة n

$$P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n = e^{2v_0 - 1} \times e^{2v_1 - 1} \times \ldots \times e^{2v_n - 1} = e^{2S_n - n - 1}$$

$$\boxed{P_n = e^{6\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] - n - 1}}$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\underbrace{6\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] - n - 1}_{\to -\infty}} = \boxed{0}$$

حل التمرين 80. (بكالوريا 2014 ت ر)

I- $D_f =]1;+\infty[$ ، $f(x) = x - \ln(x-1)$

1. تحديد إشارة $f(x) - x$

$f(x) - x = -\ln(x-1)$

$x \in]1;2[\Rightarrow x-1 \in]0;1[\Rightarrow \ln(x-1) < 0 \Rightarrow f(x) - x > 0$

$x \in [2;+\infty[\Rightarrow x-1 \in [1;+\infty[\Rightarrow \ln(x-1) \geq 0 \Rightarrow f(x) - x \leq 0$

x	1		2	$+\infty$
$-\ln(x-1)$		$+$	0	$-$

2. أ. تعيين اتجاه تغيّر f

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1}$

$x \in]1;2[\Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة f متناقصة

$x \in [2;+\infty[\Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة f متزايدة

ب. بيان أنّه إذا كان $x \in [2;e+1]$ فإنّ $f(x) \in [2;e+1]$

$\begin{cases} x \in [2;e+1] \\ \text{الدالة } f \text{ متزايدة} \end{cases} \Rightarrow f(x) \in \left[\underbrace{f(2)}_{2}; \underbrace{f(e+1)}_{e}\right] \Rightarrow f(x) \in [2;e+1]$

II- $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n - 1)$ ، $u_0 = e+1$

1. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n \in [2;e+1]$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $u_0 \in [2;e+1]$. محققة لأنّ: $u_0 = e+1$

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_n \in [2;e+1]$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_{n+1} \in [2;e+1]$

$u_n \in [2;e+1] \underset{\text{حسب 2.ب}}{\Longrightarrow} f(u_n) \in [2;e+1] \Rightarrow \boxed{u_{n+1} \in [2;e+1]}$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \in [2;e+1]$

2. دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$

$u_n \in [2;e+1] \underset{\text{حسب I.1}}{\Longrightarrow} f(u_n) - u_n \leq 0 \Rightarrow$ المتتالية (u_n) متناقصة

3. تبرير تقارب المتتالية (u_n) وحساب نهايتها

بما أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 2 فهي إذن متقاربة

$\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = l \Rightarrow f(l) = l \underset{\text{حسب I.1}}{\Longrightarrow} \boxed{l = 2}$

حل التمرين 81. (بكالوريا 2014 ت ر)

1. دراسة حسب قيم n ، بواقي القسمة الإقليدية على 16 للعدد 5^n

$5^{4k} \equiv 1[16]$; $5^{4k+1} \equiv 5[16]$; $5^{4k+2} \equiv 9[16]$; $5^{4k+3} \equiv 13[16]$;

2. $C_n = 16n + 9$ و $D_p = 5^p$

أ. بيان أنّه يوجد عدد طبيعي n يحقق $C_n = D_p$

$C_n = D_p \Rightarrow 5^p = 16n + 9 \Rightarrow 5^p \equiv 9[16] \Rightarrow \boxed{p = 4k + 2\ ;\ k \in \mathbb{N}}$

ب. تعيين n من أجل $p = 6$

$16n + 9 = 5^6 \Rightarrow 16n = 15616 \Rightarrow \boxed{n = 976}$

3. $D_f = [0; +\infty[$ ، $f(x) = 5^{(4x+2)} - 9$

دراسة تغيّرات الدالة f

$f(x) = e^{\ln 5^{(4x+2)}} - 9 = e^{(4x+2)\ln 5} - 9$; $f'(x) = (4\ln 5)e^{(4x+2)\ln 5}$

بما أنّ $f'(x) > 0$ ، فإنّ الدالة f متزايدة تماما على D_f

$f(0) = 16$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{(4x+2)\ln 5} - 9 = +\infty$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	16 ↗	$+\infty$

استنتاج إشارة $f(x)$

من جدول التغيّرات ، نستنتج أنّ $f(x) > 0$ من أجل $x \in D_f$

4. $u_{n+1} = 5^4\left(u_n + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{16}$ ، $u_0 = 1$

أ. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{5^{(4n+2)}-9}{16}$

تحقيق التراجع : $u_0 = \frac{5^2-9}{16} = 1$ (محققة)

فرض التراجع : نفرض أنّ $u_n = \frac{5^{(4n+2)}-9}{16}$

برهان التراجع : نبرهن أنّ $u_{n+1} = \frac{5^{(4n+6)}-9}{16}$

$$u_{n+1} = 5^4\left(u_n + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{16} = 5^4\left(\frac{5^{(4n+2)} - 9}{16} + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{16}$$

$$= \frac{5^4 \times 5^{(4n+2)} - 9}{16} = \boxed{\frac{5^{(4n+6)} - 9}{16}}$$

منه، نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{5^{(4n+2)}-9}{16}$

ب. برهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإنّ u_n عدد طبيعي

$5^{4k+2} \equiv 9[16] \Rightarrow 5^{4k+2} - 9 \equiv 0[16] \Rightarrow 16 \mid (5^{4k+2} - 9) \Rightarrow \boxed{u_n \in \mathbb{N}}$

5. استنتاج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

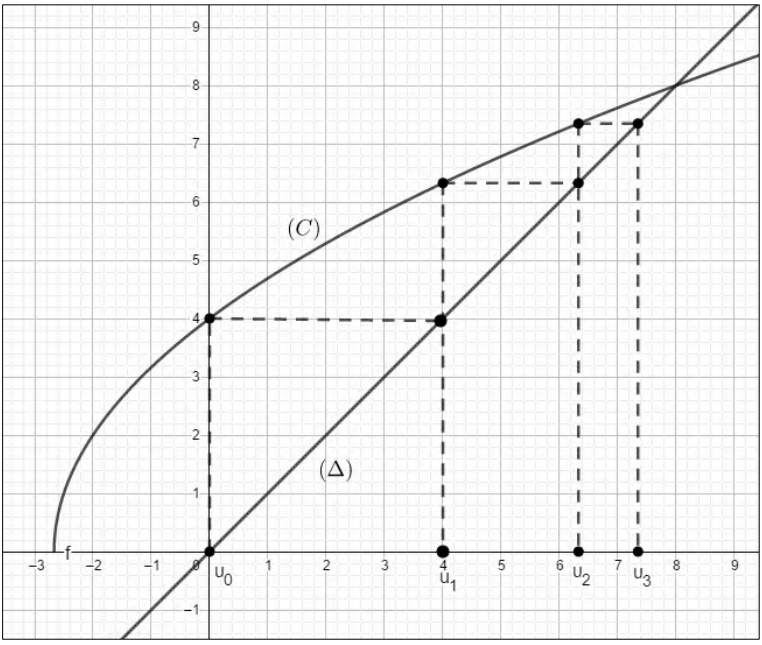
بما أنّ $u_n = \frac{1}{16} f(n)$ ، $\frac{1}{16} > 0$ والدالة $f(n)$ متزايدة ، نستنتج أنّ المتتالية (u_n) متزايدة.

حل التمرين 82. (بكالوريا 2015 ت ر)

$u_0 = 0$ ، $u_{n+1} = \sqrt{6u_n + 16}$

1. $h(x) = \sqrt{6x + 16}$ ، $D_h = \left[-\frac{8}{3}; +\infty\right[$

أ. تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل



ب. وضع تخمين حول اتجاه تغيّر (u_n) وتقاربها

نلاحظ أنّ المتتالية متزايدة ومتقاربة

2. أ. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < 8$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $0 \leq u_0 < 8$. محققة لأنّ: $u_0 = 0$

فرض التراجع: نفرض أنّ $0 \leq u_n < 8$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $0 \leq u_{n+1} < 8$

$0 \leq u_n < 8 \Rightarrow 16 \leq 6u_n + 16 < 64 \Rightarrow \boxed{0 \leq 4 \leq u_{n+1} < 8}$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < 8$

ب. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\frac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}$

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{6u_n+16}-u_n=\frac{\left(\sqrt{6u_n+16}-u_n\right)\left(\sqrt{6u_n+16}+u_n\right)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}$$

$$=\frac{-u_n^2+6u_n+16}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}=\boxed{\frac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}}$$

جـ. استنتاج اتجاه تغيّر (u_n)

$$0\le u_n<8\Rightarrow\frac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}>0\Rightarrow u_{n+1}-u_n>0\Rightarrow\boxed{(u_n)\text{ متزايدة}}$$

3. أ. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<8-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(8-u_n)$

$$u_{n+1}<8\Rightarrow-u_{n+1}>-8\Rightarrow\boxed{8-u_{n+1}>0}\ldots①$$

$$8-u_{n+1}=8-\sqrt{6u_n+16}=\frac{\left(8-\sqrt{6u_n+16}\right)\left(8+\sqrt{6u_n+16}\right)}{8+\sqrt{6u_n+16}}$$

$$=\frac{-6u_n+48}{8+\sqrt{6u_n+16}}=\frac{6(8-u_n)}{8+\sqrt{6u_n+16}}$$

$$u_n\ge0\Rightarrow\sqrt{6u_n+16}\ge4\Rightarrow8+\sqrt{6u_n+16}\ge12$$

$$\Rightarrow\frac{1}{8+\sqrt{6u_n+16}}\le\frac{1}{12}\Rightarrow\frac{6}{8+\sqrt{6u_n+16}}\le\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{6(8-u_n)}{8+\sqrt{6u_n+16}}\le\frac{1}{2}\underbrace{(8-u_n)}_{>0}\Rightarrow\boxed{8-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(8-u_n)}\ldots②$$

من ① و ② نستنتج أنّ $0<8-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(8-u_n)$

ب. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<8-u_n\le8\left(\frac{1}{2}\right)^n$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $0<8-u_0\le8$. محققة لأنّ $u_0=0$

فرض التراجع: نفرض أنّ $0<8-u_n\le8\left(\frac{1}{2}\right)^n$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $0<8-u_{n+1}\le8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$$\begin{cases}0<8-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(8-u_n)\\0<8-u_n\le8\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{cases}\Rightarrow0<8-u_{n+1}\le8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<8-u_n\le8\left(\frac{1}{2}\right)^n$

استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\begin{cases} 0 < 8 - u_n \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 8\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} 8 - u_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \boxed{8}$$

حل التمرين 83. (بكالوريا 2016 ت ر)

$$D_f = [1;+\infty[\ ،\ f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$$

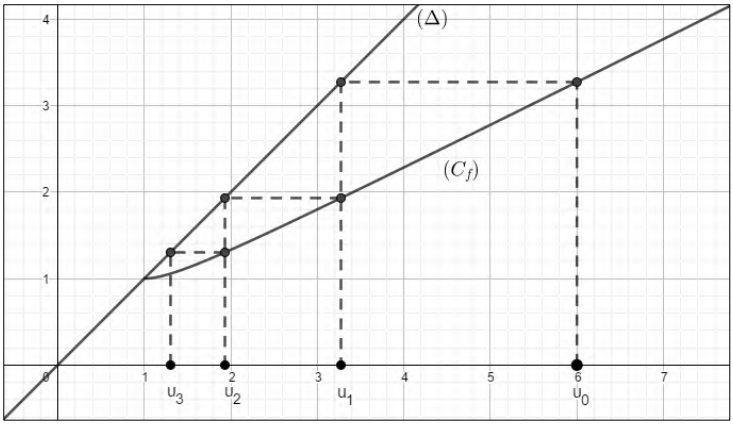
1. بيان أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$

$$f'(x) = \frac{2x(2x-1) - 2x^2}{(2x-1)^2} = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$$

$x \geq 1 \Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة f متزايدة على المجال $[1;+\infty[$

2. $u_{n+1} = f(u_n)$ ، $u_0 = 6$

أ. تمثيل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) على محور الفواصل



ب. اعطاء تخمين حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها

نلاحظ أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ومتقاربة

ج. برهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 6$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $1 \leq u_0 \leq 6$. محققة لأنّ: $u_0 = 6$

فرض التراجع: نفرض أنّ $1 \leq u_n \leq 6$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $1 \leq u_{n+1} \leq 6$

$$1 \leq u_n \leq 6 \underset{f \text{ متزايدة}}{\Longrightarrow} f(1) \leq f(u_n) \leq f(6) \Rightarrow \boxed{1 \leq u_{n+1} \leq \frac{36}{11} \leq 6}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 6$

د. دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^2}{2u_n-1}-u_n=\boxed{\frac{u_n(1-u_n)}{2u_n-1}}$$

$$1\le u_n\le 6\Rightarrow \frac{u_n(1-u_n)}{2u_n-1}\le 0\Rightarrow u_{n+1}-u_n\le 0\Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة}}$$

ه. تبرير تقارب المتتالية (u_n)

بما أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي إذن متقاربة

3. $v_n=\frac{u_n-1}{u_n}$ و $w_n=\ln(v_n)$

أ. برهان أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 ، يُطلب تعيين حدّها الأول

$$w_{n+1}=\ln(v_{n+1})=\ln\left(\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}}\right)=\ln\left(\frac{\frac{u_n^2}{2u_n-1}-1}{\frac{u_n^2}{2u_n-1}}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{u_n^2-2u_n+1}{u_n^2}\right)=\ln\left(\frac{u_n-1}{u_n}\right)^2=2\ln v_n=\boxed{2w_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (w_n) هندسية أساسها 2 وحدّها الأول $w_0=\ln v_0=\ln\left(\frac{5}{6}\right)$

ب. كتابة w_n بدلالة n ثمّ v_n بدلالة n

$$w_n=w_0\times q^n=\boxed{2^n\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$$

$$w_n=\ln v_n\Rightarrow v_n=e^{w_n}=e^{2^n\ln\left(\frac{5}{6}\right)}=\boxed{\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}$$

ج. بيان أنّ : $u_n=\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}$ وحساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

$$v_n=\frac{u_n-1}{u_n}\Rightarrow v_n.u_n=u_n-1\Rightarrow u_n(1-v_n)=1$$

$$\Rightarrow u_n=\frac{1}{1-v_n}=\boxed{\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}=\boxed{1};\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}\to 0\right]$$

4. حساب المجموع S_n بدلالة n

$$S_n = \frac{1}{w_0} + \frac{1}{w_1} + \cdots + \frac{1}{w_n} = \frac{1}{w_0} + \frac{1}{w_0 \times q} + \cdots + \frac{1}{w_0 \times^n}$$

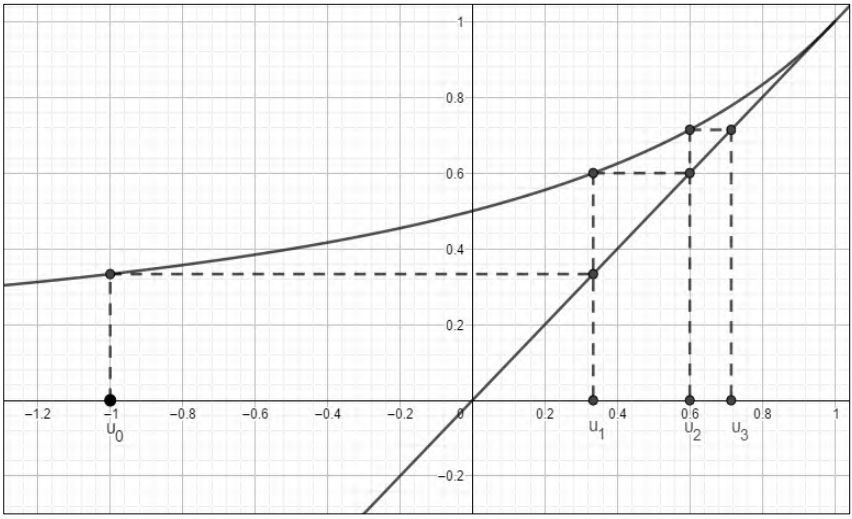
$$= \frac{1}{w_0}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \cdots + \frac{1}{q^n}\right)}_{\text{حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها } \frac{1}{q}} = \frac{1}{w_0}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{q}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{q}}\right)$$

$$\boxed{S_n = \frac{2}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}$$

حل التمرين 84. (بكالوريا 2017 ت ر)

$u_{n+1} = f(u_n)$ ، $u_0 = -1$ ، $D_f =]-\infty; 1]$ ، $f(x) = \frac{1}{2-x}$

1. تمثيل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3



وضع تخمين حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها

نلاحظ أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة

2. برهان بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 1$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $u_0 < 1$. محققة لأنّ: $u_0 = -1$

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_n < 1$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_{n+1} < 1$

$$u_n < 1 \Rightarrow 2 - u_n > 1 \Rightarrow \frac{1}{2-u_n} < 1 \Rightarrow \boxed{u_{n+1} < 1}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 1$

3. دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) واستنتاج أنّها متقاربة

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2-u_n} - u_n = \boxed{\frac{(u_n-1)^2}{2-u_n}}$$

$$u_n < 1 \Rightarrow \frac{(u_n-1)^2}{2-u_n} > 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0 \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة}}$$

4. $v_n = \frac{2}{1-u_n}$

أ. برهان أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها 2

$$v_{n+1} = \frac{2}{1-u_{n+1}} = \frac{2}{1-\frac{1}{2-u_n}} = \frac{2(2-u_n)}{1-u_n} = \frac{2(1-u_n)+2}{1-u_n}$$

$$= 2 + \frac{2}{1-u_n} = \boxed{2 + v_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها 2 وحدّها الأول $v_0 = 1$

تعيين عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 + nr = \boxed{2n+1}$$

ب. استنتاج عبارة الحدّ العام u_n بدلالة n وحساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$v_n = \frac{2}{1-u_n} \Rightarrow v_n(1-u_n) = 2 \Rightarrow u_n . v_n = v_n - 2$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{v_n - 2}{v_n} = \boxed{\frac{2n-1}{2n+1}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{2n} = \boxed{1}$$

حل التمرين 85. (بكالوريا 2017 د2 ت ر)

$u_1 = \frac{1}{a}$ ، $u_{n+1} = \frac{n+1}{an} u_n$ ، حيث a عدد حقيقي أكبر من أو يساوي 2

1. أ. بيان أنّ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n > 0$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $u_1 > 0$. محققة لأنّ: $u_1 = \frac{1}{a}$ و $a \geq 2$

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_n > 0$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_{n+1} > 0$

$$u_n > 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{n+1}{an}}_{>0} u_n > 0 \Rightarrow \boxed{u_{n+1} > 0}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$

ب. بيان أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثمّ استنتاج أنّها متقاربة

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{an} u_n - u_n = u_n\left(\frac{n+1}{an} - 1\right) = u_n\left[\frac{(1-a)n+1}{an}\right]$$

$$\begin{cases} a \geq 2 \\ n \geq 1 \end{cases} \Rightarrow (1-a)n \leq -1 \Rightarrow (1-a)n + 1 \leq 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة}}$$

بما أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي إذن متقاربة

2. $v_n = \frac{1}{an} u_n$

أ. بيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{a}$ وتعيين حدّها الأول v_1 بدلالة a

$$v_{n+1} = \frac{1}{a(n+1)} u_{n+1} = \frac{1}{a(n+1)} \times \frac{n+1}{an} u_n = \frac{1}{a} \times \frac{1}{an} u_n = \frac{1}{a} \times v_n$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{a}$ وحدّها الأول $v_1 = \frac{1}{a} u_1 = \frac{1}{a^2}$

ب. كتابة عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n و a

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n+1} = \boxed{\frac{1}{a^{n+1}}}$$

استنتاج عبارة u_n وحساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

$$v_n = \frac{1}{an} u_n \Rightarrow u_n = v_n \times an = \frac{an}{a^{n+1}} = \boxed{\frac{n}{a^n}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{a^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{e^{n \ln a}} = \boxed{0} \; ; \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0\right)$$

3. حساب المجموع S_n بدلالة n و a

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{3}u_3 + \cdots + \frac{1}{n}u_n \\ &= av_1 + \frac{1}{2}(2a \times v_2) + \frac{1}{3}(3a \times v_3) + \cdots + \frac{1}{n}(an \times v_n) \\ &= av_1 + av_2 + \cdots + av_n = a(v_1 + v_2 + \cdots + v_n) \\ &= av_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = a\left(\frac{1}{a}\right)^2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^n}{1-\frac{1}{a}}\right) = \boxed{\frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^n}{a-1}} \end{aligned}$$

تعيين قيمة a حيث $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2016}$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2016} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^n}{a-1} = \frac{1}{2016} \Rightarrow \frac{1}{a-1} = \frac{1}{2016}$$
$$\Rightarrow a-1 = 2016 \Rightarrow \boxed{a = 2017}$$

حل التمرين 86. (بكالوريا 2018 ت ر)

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ ، } u_0 = \frac{5}{4e} \text{ ، } D_f = [0;+\infty[\text{ ، } f(x) = \frac{2x}{e.x+1}$$

1. أ. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{1}{e}$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $u_0 > \frac{1}{e}$. محققة لأنّ: $u_0 = \frac{5}{4}\left(\frac{1}{e}\right)$

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_n > \frac{1}{e}$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_{n+1} > \frac{1}{e}$

$$f'(x) = \frac{2(e.x+1)-2ex}{(e.x+1)^2} = \frac{2}{(e.x+1)^2};\ f'(x) > 0 \Rightarrow \boxed{f \text{ متزايدة}}$$

$$\begin{cases} u_n > \frac{1}{e} \Rightarrow f(u_n) > f\left(\frac{1}{e}\right) \Rightarrow \boxed{u_{n+1} > \frac{1}{e}} \\ f \text{ متزايدة} \end{cases}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{1}{e}$

ب. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{e.u_n\left(\frac{1}{e}-u_n\right)}{e.u_n+1}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{e.u_n+1} - u_n = \frac{u_n - e.u_n^2}{e.u_n+1} = \boxed{\frac{e.u_n\left(\frac{1}{e}-u_n\right)}{e.u_n+1}}$$

استنتاج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتبرير أنّها متقاربة

$$u_n > \frac{1}{e} \Rightarrow \frac{1}{e} - u_n < 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0 \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة}}$$

بما أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي إذن متقاربة

2. اثبات أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 يُطلب تعيين حدّها الأول v_0

$$v_{n+1} = \frac{e.u_{n+1}}{e.u_{n+1}-1} = \frac{e\left(\frac{2u_n}{e.u_n+1}\right)}{e\left(\frac{2u_n}{e.u_n+1}\right)-1} = \frac{2e.u_n}{e.u_n-1} = \boxed{2v_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 وحدّها الأول $v_0 = \frac{e.u_0}{e.u_0-1} = 5$

كتابة عبارة v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 \times q^n = \boxed{5 \times 2^n}$$

3. أ. التحقق أنّ من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n = 1 + \frac{1}{e.u_n - 1}$

$$v_n = \frac{e.u_n}{e.u_n - 1} = \frac{e.u_n - 1 + 1}{e.u_n - 1} = \boxed{1 + \frac{1}{e.u_n - 1}}$$

استنتاج عبارة u_n بدلالة n وحساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

$$v_n = 1 + \frac{1}{e.u_n - 1} \Rightarrow e.u_n - 1 = \frac{1}{v_n - 1} \Rightarrow e.u_n = \frac{v_n}{v_n - 1}$$

$$u_n = \frac{v_n}{e(v_n - 1)} = \boxed{\frac{5 \times 2^n}{e(5 \times 2^n - 1)}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{5 \times 2^n}{e(5 \times 2^n - 1)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{e}\left(\frac{5 \times 2^n}{5 \times 2^n - 1}\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{5 \times 2^n - 1}\right) = \boxed{\frac{1}{e}}$$

ب. حساب المجموع S_n بدلالة n

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0\left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\right) = \boxed{5(2^{n+1} - 1)}$$

4. أ. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7

$2^0 \equiv 1[7]$; $2^1 \equiv 2[7]$; $2^2 \equiv 4[7]$; $2^3 \equiv 1[7]$

$\boxed{2^{3k} \equiv 1[7] \; ; \; 2^{3k+1} \equiv 2[7] \; ; \; 2^{3k+2} \equiv 4[7]}$

ب. تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها S_n يقبل القسمة على 7

$$S_n \equiv 0[7] \Rightarrow 5(2^{n+1} - 1) \equiv 0[7] \xrightarrow[5 \text{ أولي مع } 7]{} 2^{n+1} - 1 \equiv 0[7]$$

$$\Rightarrow 2^{n+1} \equiv 1[7] \Rightarrow n + 1 = 3k \Rightarrow \boxed{n = 3k - 1 \; ; k \in \mathbb{N}^*}$$

حل التمرين 87. (بكالوريا 2018 ت ر)

$$v_{n+1} = 5v_n + u_n \; ، \; v_0 = 4 \; ، \; u_n = 2(3)^n$$

1. اثبات أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{3}$ يُطلب تعيين حدّها الأول

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} + \frac{1}{2} = \frac{5v_n + u_n}{3u_n} + \frac{1}{2} = \frac{5}{3}\left(\frac{v_n}{u_n}\right) + \frac{5}{6} = \frac{5}{3}\left(\frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{5}{3}w_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (w_n) هندسية أساسها $\frac{5}{3}$ وحدّها الأول $w_0 = \frac{v_0}{u_0} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

2. كتابة عبارة الحد العام w_n بدلالة n

$$w_n = w_0 \times q^n = \boxed{\frac{5}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^n}$$

استنتاج أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n = 5^{n+1} - 3^n$

$$w_n = \frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{v_n}{u_n} = w_n - \frac{1}{2} \Rightarrow v_n = u_n\left(w_n - \frac{1}{2}\right)$$

$$v_n = 2(3)^n\left[\frac{5}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^n - \frac{1}{2}\right] = \boxed{5^{n+1} - 3^n}$$

3. دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعددين 3^n و5^n على 8

$$3^0 \equiv 1[8]\ ;\ 3^1 \equiv 3[8]\ ;\ 3^2 \equiv 1[8] \Rightarrow \boxed{3^{2k} \equiv 1[8]\ ;\ 3^{2k+1} \equiv 3[8]}$$

$$5^0 \equiv 1[8]\ ;\ 5^1 \equiv 5[8]\ ;\ 5^2 \equiv 1[8] \Rightarrow \boxed{5^{2k} \equiv 1[8]\ ;\ 5^{2k+1} \equiv 5[8]}$$

1. تعيين بواقي القسمة الإقليدية للعدد v_n على 8

$n =$	$2k$	$2k+1$	
$5^{n+1} \equiv$	5	1	[8]
$3^n \equiv$	1	3	[8]
$v_n \equiv$	4	6	[8]

حل التمرين 88. (بكالوريا 2008 ر)

$z_B = \sqrt{3} + 3i$ ، $z_A = \sqrt{3} - i$

1. كتابة العبارة المركبة للتشابه المباشر S

$$S(A) = B \Rightarrow z_B = az_A \Rightarrow a = \frac{z_B}{z_A} = \frac{\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}-i} = \sqrt{3}i \Rightarrow \boxed{z' = \sqrt{3}iz}$$

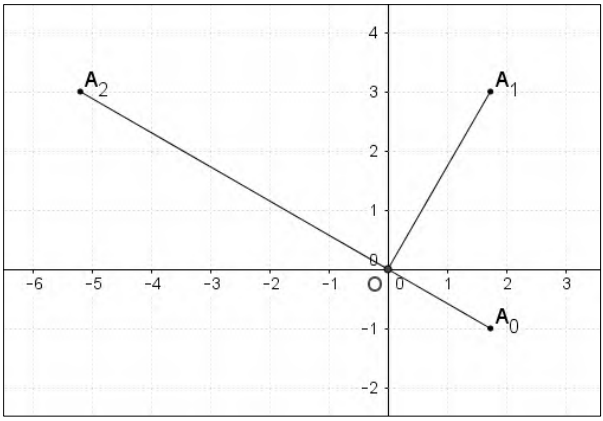
تعيين زاوية و نسبة التشابه S

$$a = \sqrt{3}i = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \boxed{k = |a| = \sqrt{3}\,;\ \theta = \arg(a) = \frac{\pi}{2}}$$

2. $A_{n+1} = S(A_n)$ ، $A_0 = A$

أ. إنشاء النقط A_0 ، A_1 و A_2

$$A_1 = S(A_0) \Rightarrow \begin{cases} OA_1 = \sqrt{3}OA_0 \\ (\overrightarrow{OA_0}; \overrightarrow{OA_1}) = \frac{\pi}{2} \end{cases} ;\ A_2 = S(A_1) \Rightarrow \begin{cases} OA_2 = 3OA_0 \\ (\overrightarrow{OA_0}; \overrightarrow{OA_2}) = \pi \end{cases}$$



ب. برهان أنّ : $z_n = 2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$

تحقيق التراجع: $z_0 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$ محقّقة لأنّ :

$$2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - 1 = z_0$$

فرض التراجع: نفرض أنّ $z_n = 2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$

تحقيق التراجع: نتحقّق أنّ $z_{n+1} = 2\left(\sqrt{3}\right)^{n+1} e^{i\left(\frac{(n+1)\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$

$$A_{n+1} = S(A_n) \Rightarrow z_{n+1} = \sqrt{3}i \times z_n = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$z_{n+1} = 2\left(\sqrt{3}\right)^{n+1} e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)} = \boxed{2\left(\sqrt{3}\right)^{n+1} e^{i\left(\frac{(n+1)\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}}$$

ج. تعيين قيم n التي تنتمي من أجلها النقطة A_n إلى المستقيم (OA_1)

$$A_n \in (OA_1) \Rightarrow \arg(z_n) = \arg(z_1) + k\pi \Rightarrow \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2} = \frac{1}{2} + k \Rightarrow \boxed{n = 2k + 1\,; k \in \mathbb{N}}$$

3. $u_0 = A_0A_1$ و $u_n = A_nA_{n+1}$

أ. بيان أنّ المتتالية (u_n) هندسية يُطلب تحديد حدها الأول u_0 و أساسها q

$$u_{n+1} = A_{n+1}A_{n+2} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = \left|\sqrt{3}iz_{n+1} - \sqrt{3}iz_n\right|$$

$$= \left|\sqrt{3}i(z_{n+1} - z_n)\right| = \left|\sqrt{3}i\right||z_{n+1} - z_n| = \sqrt{3}u_n$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q = \sqrt{3}$ وحدّها الأول :

$$u_0 = A_1A_0 = |z_1 - z_0| = \left|\sqrt{3} + 3i - \sqrt{3} + i\right| = |4i| = 4$$

ب. استنتاج عبارة u_n بدلالة n

$$u_n = u_0 \times q^n = \boxed{4 \times \sqrt{3}^n}$$

ج. حساب بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

$$S_n = u_0\left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\right) = \boxed{4\left(\frac{\sqrt{3}^{n+1} - 1}{\sqrt{3} - 1}\right)}$$

حساب $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 4\left(\frac{\sqrt{3}^{n+1} - 1}{\sqrt{3} - 1}\right) = \boxed{+\infty}\,; (\sqrt{3}^{n+1} \to +\infty)$$

حل التمرين 89. (بكالوريا 2008 ر)

1. $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}\,; Df = [1; +\infty[$

أ. حساب $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$\lim_{\substack{>\\ x\to 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{>\\ x\to 1}} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{\substack{>\\ x\to 1}} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \boxed{+\infty}$$

تفسير النتيجة هندسيا

يقبل المنحنى $(\mathscr{C}f)$ نصف مماس يوازي محور التراتيب عند النقطة ذات الفاصلة 1

ب. دراسة تغيّرات الدالة f

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3 + \sqrt{x-1} = \boxed{+\infty}$$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$; $f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة f متزايدة

جدول تغيرات الدالة f

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	3 ↗	$+\infty$

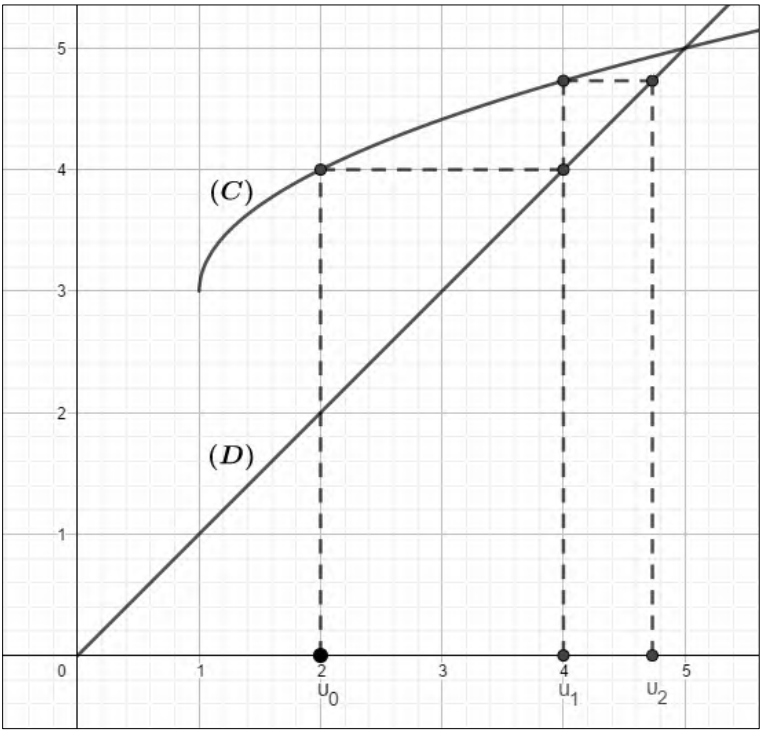
إنشاء المنحنى (C)

بما أنّ $f(x) = \sqrt{x-1} + 3$ (من الشكل $\sqrt{x+a} + b$) ، فإنّ المنحنى $(\mathscr{C}f)$ هو صورة منحنى دالة "الجذر التربيعي" بالانسحاب الذي شعاعه $\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$ ، أي $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

ج. رسم المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$

2. $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

أ. تمثيل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على محور الفواصل



ب. وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

نلاحظ أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة

3. أ. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $2 \leq u_n \leq 5$ و $u_{n+1} > u_n$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $2 \leq u_0 \leq 5$. محققة لأنّ: $u_0 = 2$

فرض التراجع: نفرض أنّ $2 \leq u_n \leq 5$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $2 \leq u_{n+1} \leq 5$

$$2 \leq u_n \leq 5 \Rightarrow 1 \leq u_n - 1 \leq 4 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{u_n - 1} \leq 2$$

$$\Rightarrow 4 \leq \sqrt{u_n - 1} + 3 \leq 5 \Rightarrow \boxed{2 \leq u_{n+1} \leq 5}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leq u_n \leq 5$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $u_1 > u_0$. محققة لأنّ: $u_0 = 2$ و $u_1 = 4$

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_{n+1} > u_n$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_{n+2} > u_{n+1}$

$$u_{n+1} > u_n \Rightarrow u_{n+1} - 1 > u_n - 1 \Rightarrow \sqrt{u_{n+1} - 1} > \sqrt{u_n - 1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{u_{n+1} - 1} + 3 > \sqrt{u_n - 1} + 3 \Rightarrow \boxed{u_{n+2} > u_{n+1}}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} > u_n$

ب. استنتاج أنّ (u_n) متقاربة وحساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

بما أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي إذن متقاربة

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} u_n = l \Rightarrow \sqrt{l - 1} + 3 = l \Rightarrow \sqrt{l - 1} = l - 3$$

$$\Rightarrow l - 1 = (l - 3)^2 \Rightarrow l^2 - 7l + 10 = 0 \Rightarrow \boxed{l = 5}$$

ملاحظة: الحل الثاني $(l = 2)$ مرفوض لأنّ $u_0 = 2$ والمتتالية (u_n) متزايدة

<u>حل التمرين 90. (بكالوريا 2008 ر)</u>

$$\boldsymbol{u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 \text{ ، } u_0 = 2}$$

1. حساب u_1 ، u_2 ، u_3

$$u_1 = \frac{2}{3}u_0 + 1 = \frac{4}{3} + 1 = \boxed{\frac{7}{3}} \text{ ; } u_2 = \frac{2}{3}u_1 + 1 = \frac{14}{9} + 1 = \boxed{\frac{23}{9}}$$

$$u_3 = \frac{2}{3}u_2 + 1 = \frac{46}{27} + 1 = \boxed{\frac{73}{27}}$$

2. $\boldsymbol{v_n = u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$

أ. **برهان بالتراجع أنّ (v_n) متتالية ثابتة**

نبرهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1} - v_n = 0$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $v_1 - v_0 = 0$. محققة لأنّ: $v_0 = 3$ و $v_1 = 3$

فرض التراجع: نفرض أنّ $v_{n+1} - v_n = 0$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $v_{n+2} - v_{n+1} = 0$

$$v_{n+2}-v_{n+1}=u_{n+2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}-u_{n+1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$
$$=\frac{2}{3}\left[u_{n+1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]+1-\frac{2}{3}\left[u_n+\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right]-1$$
$$=\frac{2}{3}\left[\left(u_{n+1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)-\left(u_n+\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right)\right]$$
$$=\frac{2}{3}(v_{n+1}-v_n)=0\Rightarrow \boxed{v_{n+2}-v_{n+1}=0}$$

منه نستنتج أنّ (v_n) متتالية ثابتة

ب. **استنتاج عبارة u_n بدلالة n**

$$u_n=v_n-\left(\frac{2}{3}\right)^n=\boxed{3-\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

ج. **حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$**

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}3-\left(\frac{2}{3}\right)^n=\boxed{3};\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0\right]$$

3. حساب المجموع S

$$S=w_0+w_1+\cdots+w_n=\frac{2}{3}(0)-\left(\frac{2}{3}\right)^0+\frac{2}{3}(1)-\left(\frac{2}{3}\right)^1+\cdots+\frac{2}{3}n-\left(\frac{2}{3}\right)^n$$
$$=\frac{2}{3}(1+2+\cdots+n)-\left[\left(\frac{2}{3}\right)^0+\left(\frac{2}{3}\right)^1+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$
$$=\frac{2}{3}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]-\left[\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}\right]=\boxed{\frac{n(n+1)}{3}-3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]}$$

حل التمرين 91. (بكالوريا 2009 ر)

5. $D_f=[1;5]$ ، $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{x}\right)$

أ. **دراسة تغيّرات الدالة f**

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{5}{x^2}\right)=\boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-5}{x^2}\right)}$$

$x\in[1;\sqrt{5}[: f'(x)<0\Rightarrow$ الدالة f متناقصة

$x\in[\sqrt{5};5]: f'(x)\geq 0\Rightarrow$ الدالة f متزايدة

x	1		$\sqrt{5}$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	↘	$\sqrt{5}$	↗	3

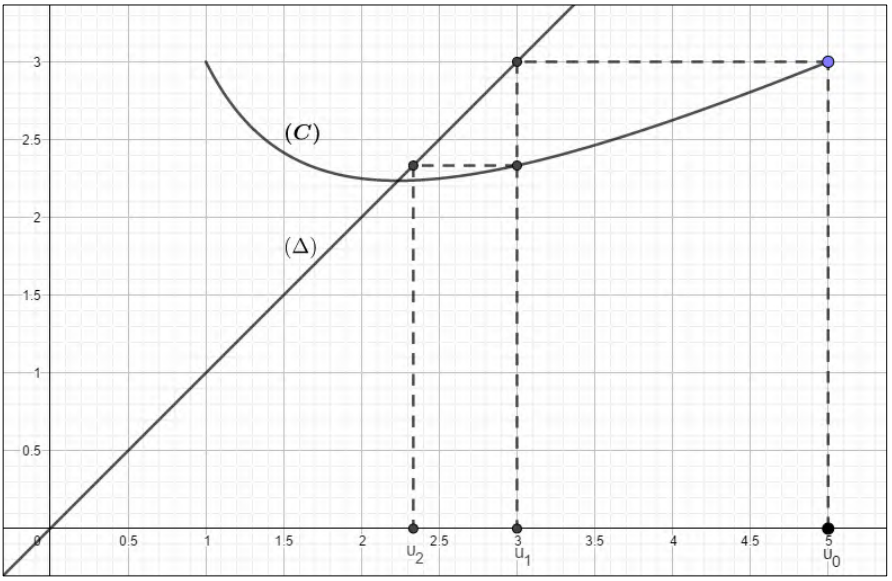
ب. إنشاء المنحنى البياني (C) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$

6. $u_0 = 5$ ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right)$

أ. حساب u_1 و u_2

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{5}{u_0}\right) = \frac{1}{2}(6) = \boxed{3}\ ;\ u_2 = \frac{1}{2}\left(u_1 + \frac{5}{u_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{14}{3}\right) = \boxed{\frac{7}{3}}$$

ب. تمثيل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على محور الفواصل



7. أ. برهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq \sqrt{5}$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $u_0 \geq \sqrt{5}$. محققة لأنّ: $u_0 = 5$

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_n \geq \sqrt{5}$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_{n+1} \geq \sqrt{5}$

$$u_n \geq \sqrt{5} \xrightarrow[\text{الدالة } f \text{ متزايدة}]{} f(u_n) \geq f\left(\sqrt{5}\right) \Rightarrow \boxed{u_{n+1} \geq \sqrt{5}}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq \sqrt{5}$

ب. بيان أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right) - u_n = \frac{5}{2u_n} - \frac{1}{2}u_n = \boxed{\frac{5 - u_n^2}{2u_n}}$$

$$u_n \geq \sqrt{5} \Rightarrow 5 - u_n^2 \leq 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0 \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة تماما}}$$

بما أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي إذن متقاربة

8. أ. برهان أنّه مهما يكن العدد الطبيعي n فإنّ : $u_{n+1}-\sqrt{5}\leq\frac{1}{2}(u_n-\sqrt{5})$

$$u_{n+1}-\sqrt{5}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{5}{u_n}\right)-\sqrt{5}=\frac{1}{2}\left(\frac{u_n^2-2\sqrt{5}u_n+5}{u_n}\right)$$

$$=\frac{(u_n-\sqrt{5})}{2u_n}(u_n-\sqrt{5})=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2u_n}\right)(u_n-\sqrt{5})$$

$$u_n\geq\sqrt{5}\Rightarrow\frac{\sqrt{5}}{2u_n}\geq 0\Rightarrow\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2u_n}\leq\frac{1}{2}\Rightarrow\boxed{u_{n+1}-\sqrt{5}\leq\frac{1}{2}(u_n-\sqrt{5})}$$

ب. استنتاج أنّ : $(u_n-\sqrt{5})\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n(u_0-\sqrt{5})$

$$\begin{cases}u_n-\sqrt{5}\leq\frac{1}{2}(u_{n-1}-\sqrt{5})\\ u_{n-1}-\sqrt{5}\leq\frac{1}{2}(u_{n-2}-\sqrt{5})\\ \vdots\\ u_1-\sqrt{5}\leq\frac{1}{2}(u_0-\sqrt{5})\end{cases}\Rightarrow\boxed{u_n-\sqrt{5}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n(u_0-\sqrt{5})}$$

يمكننا أيضا استعمال البرهان بالتراجع

استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

$$\begin{cases}0\leq u_n-\sqrt{5}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n(u_0-\sqrt{5})\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n(u_0-\sqrt{5})=0\end{cases}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}u_n-\sqrt{5}=0$$

$$\Rightarrow\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=\sqrt{5}}$$

حل التمرين 92. (بكالوريا 2009 ر)

$u_0=0$ ، $u_{n+1}=3u_n+2n+1$ ، $v_n=u_n+\alpha n+\beta$

1. **تعيين α وβ بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية يُطلب حساب أساسها وحدّها الأول**

$$v_{n+1}=u_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=3u_n+2n+1+\alpha n+\alpha+\beta$$
$$=3(u_n+\alpha n+\beta)-2\alpha n-2\beta+2n+1+\alpha$$
$$=3(u_n+\alpha n+\beta)+(2-2\alpha)n+(\alpha-2\beta+1)$$

(v_n) هندسية $\Rightarrow(2-2\alpha)n+(\alpha-2\beta+1)=0\Rightarrow\begin{cases}2-2\alpha=0\\ \alpha-2\beta+1=0\end{cases}$

$$\Rightarrow\boxed{\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=1\end{cases}}$$

2. **حساب كلا من v_n و u_n بدلالة n**

$$\begin{cases}\alpha = 1\\ \beta = 1\end{cases} \Rightarrow v_{n+1} = 3v_n \Rightarrow q = 3\,; v_0 = u_0 + 1 = 1 \Rightarrow \boxed{v_n = 3^n}$$

$$v_n = u_n + n + 1 \Rightarrow u_n = v_n - n - 1 = \boxed{3^n - n - 1}$$

3. **حساب المجموعين S و S':**

$$S = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right) = \boxed{\frac{3^{n+1}-1}{2}}$$

$$S' = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = v_0 - 1 + v_1 - 2 + \cdots + v_n - n - 1$$

$$= S - (1 + 2 + \cdots + n + 1) = S - \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$= \boxed{\frac{3^{n+1} - n^2 - 3n - 3}{2}}$$

4. **أ. تعيين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5**

$$3^0 \equiv 1[5]\,;\ 3^1 \equiv 3[5]\,;\ 3^2 \equiv 4[5]\,;\ 3^3 \equiv 2[5]\,;\ 3^4 \equiv 1[5]$$

$$\boxed{3^{4k} \equiv 1[5]\,;\ 3^{4k+1} \equiv 3[5]\,;\ 3^{4k+2} \equiv 4[5]\,;\ 3^{4k+3} \equiv 2[5]}$$

ب. تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها u_n مضاعفا للعدد 5

$$u_n \equiv 0[5] \Rightarrow 3^n - n - 1 \equiv 0[5] \Rightarrow 3^n - n \equiv 1[5]$$

$$n = 4k: 3^{4k} - 4k \equiv 1[5] \Rightarrow -4k \equiv 0[5] \Rightarrow k \equiv 0[5] \Rightarrow k = 5k'$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 20k'}$$

$$n = 4k+1: 3^{4k+1} - 4k - 1 \equiv 1[5] \Rightarrow -4k \equiv -1[5] \Rightarrow 4k \equiv 1[5]$$

$$\Rightarrow k \equiv 4[5] \Rightarrow k = 5k' + 4 \Rightarrow \boxed{n = 20k' + 17}$$

$$n = 4k+2: 3^{4k+2} - 4k - 2 \equiv 1[5] \Rightarrow -4k \equiv -1[5] \Rightarrow 4k \equiv 1[5]$$

$$\Rightarrow k \equiv 4[5] \Rightarrow k = 5k' + 4 \Rightarrow \boxed{n = 20k' + 18}$$

$$n = 4k+3: 3^{4k+3} - 4k - 3 \equiv 1[5] \Rightarrow -4k \equiv 2[5] \Rightarrow 4k \equiv 3[5]$$

$$\Rightarrow k \equiv 2[5] \Rightarrow k = 5k' + 2 \Rightarrow \boxed{n = 20k' + 11}$$

$$u_n \equiv 0[5] \Rightarrow \boxed{n \in \{20k';\ 20k' + 11\,;\ 20k' + 17\,;\ 20k' + 18\}\,; k' \in \mathbb{N}}$$

<u>حل التمرين 93. (بكالوريا 2011 ر)</u>

1. **تعيين الحدين u_3 و u_5 ، ثمّ استنتاج u_0**

$$u_3 = du'_3\,;\ u_5 = du'_5\,; m.d = u_3.u_5$$

$$\Rightarrow m = \frac{u_3.u_5}{d} = \frac{d^2.u'_3.u'_5}{d} = d.u'_3.u'_5$$

$$\begin{cases} u_4 = 15 \\ m + d = 42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_3 + u_5 = 30 \\ m + d = 42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d(u'_3 + u'_5) = 30 \\ d(u'_3 \times u'_5 + 1) = 42 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d \mid 30 \\ d \mid 42 \end{cases} \Rightarrow d|PGCD(30;42) \Rightarrow d|6 \Rightarrow d \in \{1,2,3,6\}$$

- $d = 1$: $\begin{cases} (u'_3 + u'_5) = 30 \\ (u'_3 \times u'_5) = 41 \end{cases}$; $x^2 - 30x + 41 = 0$; $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{N}$
- $d = 2$: $\begin{cases} (u'_3 + u'_5) = 15 \\ (u'_3 \times u'_5) = 20 \end{cases}$; $x^2 - 15x + 20 = 0$; $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{N}$
- $d = 3$: $\begin{cases} (u'_3 + u'_5) = 10 \\ (u'_3 \times u'_5) = 13 \end{cases}$; $x^2 - 10x + 13 = 0$; $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{N}$
- $d = 6$: $\begin{cases} (u'_3 + u'_5) = 5 \\ (u'_3 \times u'_5) = 6 \end{cases}$; $u'_3 = 2$; $u'_5 = 3$

$$\boxed{u_3 = 12 \; ; \; u_5 = 18}$$

استنتاج u_0

$u_5 = u_3 + 2r \Rightarrow 2r = u_5 - u_3 = 6 \Rightarrow \boxed{r = 3}$;

$u_0 = u_3 - 3r = 12 - 9 \Rightarrow \boxed{u_0 = 3}$

1. كتابة (u_n) بدلالة n

$u_n = u_0 + nr = 3 + 3n \Rightarrow \boxed{u_n = 3(n+1)}$

بيان أنّ 2010 حد من حدود (u_n) و تعيين رتبته

$u_n = 2010 \Rightarrow 3(n+1) = 2010 \Rightarrow n + 1 = 670 \Rightarrow \boxed{n = 669}$

منه 2010 حد من حدود (u_n) و رتبته هي 670

2. تعيين الحد الذي ابتداءً منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة من (u_n) يساوي 10080

$u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + u_{k+4} = 10080 \Rightarrow \frac{5}{2}(u_k + u_{k+4}) = 10080$

$u_k + u_k + 12 = 4032 \Rightarrow 2u_k = 4020 \Rightarrow \boxed{u_k = 2010}$

أ- حساب المجموع S بدلالة n

$$S = u_0 + u_1 + u_2 \ldots + u_{2n} = \frac{2n+1}{2}(u_0 + u_{2n})$$

$$S = \frac{2n+1}{2}(3 + 3 + 6n) \Rightarrow \boxed{S = (2n+1)(3n+3)}$$

ب-استنتاج المجموعين S_1 و S_2 بدلالة n

$S_1 = u_0 + u_2 + \cdots + u_{2n}$

$S_1 = u_0 + u_0 + 2r + u_0 + 4r + \cdots + u_0 + 2nr$

$S_1 = (n+1)u_0 + 2r(1 + 2 + \cdots + n)$

$$S_1 = 3(n+1) + 2r\left[\frac{n}{2}(1+n)\right] = 3(n+1) + 3n(n+1)$$

$$S_1 = 3(n+1)(1+n) \Rightarrow \boxed{S_1 = 3(n+1)^2}$$

$$S_2 = S - S_1 = 3(2n+1)(n+1) - 3(n+1)^2$$

$$S_2 = 3(n+1)(2n+1-n-1) \Rightarrow \boxed{S_2 = 3n(n+1)}$$

<u>حل التمرين 94. (بكالوريا 2012 ر)</u>

$u_0 = 16$ ، $u_{n+1} = 6u_n - 9$

1) أ. حساب بواقي قسمة كل من u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 على 7

$$u_0 = 16 \Rightarrow \boxed{u_0 \equiv 2[7]}$$

$$u_1 = 6u_0 - 9 \Rightarrow u_1 \equiv 6(2) - 9[7] \Rightarrow \boxed{u_1 \equiv 3[7]}$$

$$u_2 = 6u_1 - 9 \Rightarrow u_2 \equiv 6(3) - 9[7] \Rightarrow \boxed{u_2 \equiv 2[7]}$$

$$u_3 = 6u_2 - 9 \Rightarrow u_3 \equiv 6(2) - 9[7] \Rightarrow \boxed{u_3 \equiv 3[7]}$$

$$u_4 = 6u_3 - 9 \Rightarrow u_4 \equiv 6(3) - 9[7] \Rightarrow \boxed{u_4 \equiv 2[7]}$$

ب. تخمين قيمة لـ a و b حيث $u_{2k} \equiv a[7]$ و $u_{2k+1} \equiv b[7]$

$$\begin{cases} u_{2k} \equiv 2[7] \\ u_{2k+1} \equiv 3[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

2) أ. برهان أنّ $u_{n+2} \equiv u_n[7]$

$$u_{n+2} - u_n = 6u_{n+1} - 9 - u_n = 6(6u_n - 9) - 9 - u_n$$

$$u_{n+2} - u_n = 35u_n - 63 = 7(5u_n - 9)$$

$$u_{n+2} - u_n \equiv 0[7] \Rightarrow \boxed{u_{n+2} \equiv u_n[7]}$$

ب. برهان بالتراجع أنّ $u_{2k} \equiv 2[7]$

<u>تحقيق التراجع:</u> نتحقق أنّ $u_0 \equiv 2[7]$ (محققة)

<u>فرض التراجع:</u> نفرض أنّ $u_{2k} \equiv 2[7]$

<u>برهان التراجع:</u> نبرهن أنّ $u_{2(k+1)} \equiv 2[7]$

$$\begin{cases} u_{2(k+1)} = u_{2k+2} \\ u_{2k+2} \equiv u_{2k}[7] \text{(حسب السؤال السابق)} \\ u_{2k} \equiv 2[7] \text{(حسب فرض التراجع)} \end{cases} \Rightarrow u_{2(k+1)} \equiv 2[7]$$

استنتاج أنّ : $u_{2k+1} \equiv 3[7]$

$$u_{2k+1} = 6u_{2k} - 9 \Rightarrow u_{2k+1} \equiv 6(2) - 9[7] \Rightarrow \boxed{u_{2k+1} \equiv 3[7]}$$

3) $v_n = u_n - \frac{9}{5}$

أ. بيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية وتعيين أساسها وحدها الأول

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{9}{5} = 6u_n - 9 - \frac{9}{5} = 6u_n - \frac{63}{5} = 6\left(u_n - \frac{9}{5}\right) = 6v_n$$

$v_{n+1} = 6v_n$ منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = 6}$ و حدها الأول $v_0 = u_0 - \frac{9}{5} = 16 - \frac{9}{5} = \boxed{\frac{71}{5}}$

ب. حساب u_n و S_n بدلالة n

$$v_n = v_0 . q^n = \frac{71}{5}(6)^n \Rightarrow u_n = v_n + \frac{9}{5} \Rightarrow \boxed{u_n = \frac{71}{5}(6)^n + \frac{9}{5}}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = v_0 + \frac{9}{5} + v_1 + \frac{9}{5} + \cdots + v_n + \frac{9}{5}$$

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n + \frac{9}{5}(n+1)$$

$$S_n = v_0\left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\right) + \frac{9}{5}(n+1)$$

$$S_n = \frac{71}{5}\left(\frac{6^{n+1} - 1}{5}\right) + \frac{9}{5}(n+1)$$

$$\boxed{S_n = \frac{71}{25}(6^{n+1} - 1) + \frac{9}{5}(n+1)}$$

حل التمرين 95. (بكالوريا 2014 ر)

$D_f = [0; +\infty[$ ، $f(x) = \frac{2x^2}{x+4}$

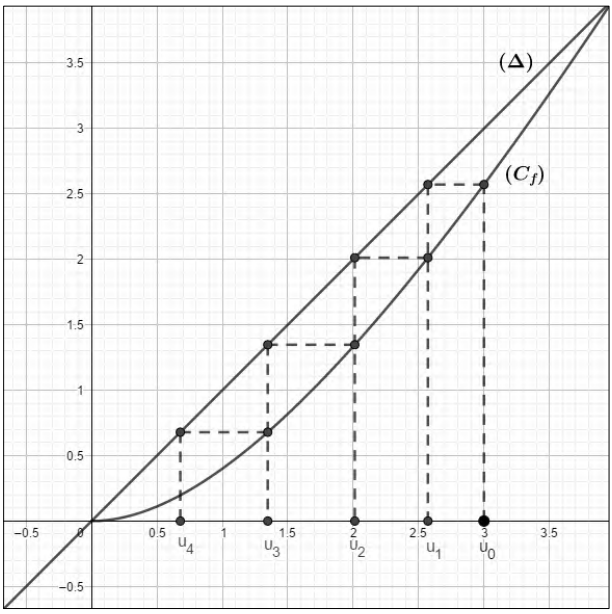
1. بيان أنّ الدالة f متزايدة تماما

$$f'(x) = \frac{4x(x+4) - 2x^2}{(x+4)^2} = \boxed{\frac{2x^2 + 16x}{(x+4)^2}}$$

$x \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة f متزايدة تماما على D_f

2. $u_{n+1} = f(u_n)$ ، $u_0 = 3$

أ. تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 على حامل محور الفواصل



ب. وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

نلاحظ أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ومتقاربة

3. **أ. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 3$**

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $0 \leq u_0 \leq 3$. محققة لأنّ: $u_0 = 3$

فرض التراجع: نفرض أنّ $0 \leq u_n \leq 3$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $0 \leq u_{n+1} \leq 3$

$$0 \leq u_n \leq 3 \xrightarrow[\text{الدالة } f \text{ متزايدة}]{} f(0) \leq f(u_n) \leq f(3) \Rightarrow \boxed{0 \leq u_{n+1} \leq \frac{18}{7} \leq 3}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 3$

ب. بيان أنّ المتتالية (u_n) متناقصة

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n^2}{u_n + 4} - u_n = \boxed{\frac{u_n(u_n - 4)}{u_n + 4}}$$

$$0 \leq u_n \leq 3 \Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0 \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة}}$$

جـ. استنتاج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة

بما أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي إذن متقاربة

4. **أ. دراسة إشارة العدد $7u_{n+1} - 6u_n$**

$$7u_{n+1} - 6u_n = \frac{14u_n^2}{u_n + 4} - 6u_n = \frac{8u_n^2 - 24u_n}{u_n + 4} = \boxed{\frac{8u_n(u_n - 3)}{u_n + 4}}$$

$$0 \leq u_n \leq 3 \Rightarrow \boxed{7u_{n+1} - 6u_n \leq 0}$$

استنتاج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{6}{7}u_n$

$$\begin{cases} 0 \leq u_n \leq 3 \\ 7u_{n+1} - 6u_n \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq u_{n+1} \leq 3 \\ u_{n+1} \leq \frac{6}{7}u_n \end{cases} \Rightarrow \boxed{0 \leq u_{n+1} \leq \frac{6}{7}u_n}$$

ب. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $0 \leq u_0 \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^0$. محققة لأنّ: $u_0 = 3$

فرض التراجع: نفرض أنّ $0 \leq u_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $0 \leq u_{n+1} \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$

$$\begin{cases} 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{6}{7}u_n \\ u_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n \end{cases} \Rightarrow \boxed{0 \leq u_{n+1} \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$

جـ. حساب نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$

$$\begin{cases} 0 \leq u_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 3\left(\frac{6}{7}\right)^n = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

<u>حل التمرين 96. (بكالوريا 2016 ر)</u>

$$\begin{cases} \ln u_1 + \ln u_2 = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1+e^3) \end{cases}$$

1. حساب u_1 و u_2 ، ثمّ استنتاج قيمة الأساس q

$$\begin{cases} \ln u_1 + \ln u_2 = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1+e^3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(u_1 \times u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1+e^3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 \times u_2 = e^{11} \\ u_1 + u_2 = e^4(1+e^3) \end{cases}$$

$\underbrace{x^2 - e^4(1+e^3)x + e^{11} = 0}$; $\Delta = e^8(1+e^3)^2 - 4e^{11}$

u_1 و u_2 هما حلا هذه المعادلة حيث $u_1 < u_2$

$$\Delta = e^8(e^6 - 2e^3 + 1) = e^8(e^3-1)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = e^4(e^3-1)$$

$$u_1 = \frac{e^4(1+e^3) - e^4(e^3-1)}{2} = e^4 ; u_2 = \frac{e^4(1+e^3) + e^4(e^3-1)}{2} = e^7$$

$$q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{e^7}{e^4} \Rightarrow \boxed{q = e^3}$$

2. $\boldsymbol{q = e^3}$ **و** $\boldsymbol{u_1 = e^4}$

أ. كتابة $\boldsymbol{u_n}$ **بدلالة** $\boldsymbol{n}$

$$u_n = u_1 q^{n-1} = e^4 . e^{3n-3} \Rightarrow \boxed{u_n = e^{3n+1}}$$

ب. حساب $\boldsymbol{S_n}$ **بدلالة** $\boldsymbol{n}$

$$S_n = \ln u_0 + \ln u_1 + \cdots + \ln u_n = \underbrace{1 + 4 + 7 + \cdots + 3n + 1}_{\text{حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها 3}}$$

$$S_n = \frac{n+1}{2}(1 + 3n + 1) = \boxed{\frac{3n^2 + 5n + 2}{2}}$$

3. $\boldsymbol{a_n = n + 3}$

أ. بيان أنّ $\boldsymbol{PGCD(2S_n; a_n) = PGCD(a_n; 14)}$

$$2S_n = 3n^2 + 5n + 2 = (n+3)(3n-4) + 14 = (3n-4)a_n + 14$$

$$\xrightarrow[PGCD(a;b)=PGCD(b;r)]{} \boxed{PGCD(2S_n; a_n) = PGCD(a_n; 14)}$$

ب. تعيين القيم الممكنة لـ: $\boldsymbol{PGCD(2S_n; a_n)}$

$$d = PGCD(2S_n; a_n) = PGCD(a_n; 14) \Rightarrow d \mid 14 \Rightarrow \boxed{d \in \{1; 2; 7; 14\}}$$

ج. تعيين قيم الأعداد الطبيعية $\boldsymbol{n}$ **التي من أجلها:** $\boldsymbol{PGCD(2S_n; a_n) = 7}$

$$d = 7 \Rightarrow \begin{cases} a_n \equiv 0[7] \\ a_n \not\equiv 0[14] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n + 3 \equiv 0[7] \\ n + 3 \not\equiv 0[14] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \equiv 4[7] \\ n \not\equiv 11[14] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 7k + 4 \\ n \neq 14k + 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 7k + 4 \\ k = 2k' \end{cases} \Rightarrow \boxed{n = 14k' + 4 \; ; \; k \in \mathbb{N}}$$

4. دراسة تبعا لقيم العدد الطبيعي $\boldsymbol{n}$ **، باقي القسمة الإقليدية للعدد** $\boldsymbol{2^n}$ **على 7**

$$2^{3k} \equiv 1[7] \; ; \; 2^{3k+1} \equiv 2[7] \; ; \; 2^{3k+2} \equiv 4[7] \; ;$$

5. $\boldsymbol{b_n = 3na_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1}$

تعيين قيم العدد الطبيعي $\boldsymbol{n}$ **التي من أجلها يكون :** $\begin{cases} \boldsymbol{b_n \equiv 0[7]} \\ \boldsymbol{n \equiv 0[5]} \end{cases}$

$$\begin{cases} b_n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3na_n - 2S_n + \underbrace{1437^{2016}}_{\equiv 2^{3(672)}[7]} + 1 \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3na_n - (3n-4)a_n - 14 + 1 + 1 \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a_n + 2 \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n \equiv 3[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n + 3 \equiv 3[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow n \equiv 0[35]$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 35k \; ; \; k \in \mathbb{N}}$$

6. بيان أنّ العدد $(1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52)$ يقبل القسمة على 7

$1437 \equiv 2[7] \Rightarrow 1437^{9n+1} \equiv 2^{3(3n)+1}[7] \Rightarrow \mathbf{1437^{9n+1} \equiv 2[7]}$

$4^{12n+1} \equiv 2^{24n+2}[7] \Rightarrow 4^{12n+1} \equiv 4[7] \Rightarrow \mathbf{3 \times 4^{12n+1} \equiv 5[7]}$

$1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52 \equiv 2 - 5 + 3[7]$

$\boxed{1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52 \equiv 0[7]}$

حل التمرين 97. (بكالوريا 2017 ر)

$\boldsymbol{u_{n+1} = 7u_n + 8}$ ، $\boldsymbol{u_0 = 1}$

1. برهان بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي $\boldsymbol{n}$: $\boldsymbol{3u_n = 7^{n+1} - 4}$

تحقيق التراجع : $3u_0 = 3$ (محققة لأنّ $u_0 = 1$)

فرض التراجع : نفرض أنّ : $3u_n = 7^{n+1} - 4$

برهان التراجع : نبرهن أنّ : $3u_{n+1} = 7^{n+2} - 4$

$3u_{n+1} = 21u_n + 24 = 7(3u_n) + 24 = 7(7^{n+1} - 4) + 24 = 7^{n+2} - 4$

منه، نستنتج أنّ من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n = 7^{n+1} - 4$

1. $\boldsymbol{S_n = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n}$ و $\boldsymbol{S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n}$

أ. حساب بدلالة $\boldsymbol{n}$ المجموع $\boldsymbol{S_n}$

S_n هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية حدّها الأول 1 وأساسها 7

$$S_n = \frac{7^{n+1} - 1}{7 - 1} = \boxed{\frac{7^{n+1} - 1}{6}}$$

إيجاد علاقة بين $\boldsymbol{S_n}$ و $\boldsymbol{S'_n}$

$$S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{1}{3}(7 - 4 + 7^2 - 4 + 7^3 - 4 + \cdots 7^{n+1} - 4)$$

$$S'_n = \frac{1}{3}\left[7\left(\frac{7^{n+1} - 1}{6}\right) - 4(n+1)\right] = \boxed{\frac{1}{3}[7S_n - 4(n+1)]}$$

ب. استنتاج أنّ من أجل كل عدد طبيعي $\boldsymbol{n}$: $\boldsymbol{18S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31}$

$$18S'_n = 6[7S_n - 4(n+1)] = 6\left[7\left(\frac{7^{n+1} - 1}{6}\right) - 4(n+1)\right]$$

$$= 7(7^{n+1} - 1) - 24(n+1) = \boxed{7^{n+2} - 24n - 31}$$

2. أ. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي $\boldsymbol{n}$ بواقي قسمة العدد $\boldsymbol{7^n}$ على 5

$7^{4k} \equiv 1[5]$; $7^{4k+1} \equiv 2[5]$; $7^{4k+2} \equiv 4[5]$; $7^{4k+3} \equiv 3[5]$

ب. تعيين قيم n الطبيعية حتى يكون S'_n قابلا للقسمة على 5

$$S'_n \equiv 0[5] \Rightarrow 18S'_n \equiv 0[5] \Rightarrow 7^{n+2} - \underbrace{24}_{\equiv -1[5]}\ n - \underbrace{31}_{\equiv 1[5]} \equiv 0[5]$$

$$\Rightarrow 7^{n+2} + n \equiv 1[5]$$

طريقة أولى:

بما أنّ بواقي قسمة 7^n على 5 دورية (دورها 4) ، وبواقي قسمة n على 5 دورية (دورها 5) نأخذ المضاعف المشترك الأصغر للدورين وهو 20 ، ونحل الموافقة باستعمال الجدول التالي:

$n \equiv [20]$	$7^{n+2} \equiv [5]$	$7^{n+2} + n \equiv [5]$	$n \equiv [20]$	$7^{n+2} \equiv [5]$	$7^{n+2} + n \equiv [5]$
0	4	4	10	1	**1**
1	3	4	11	2	3
2	1	3	12	4	**1**
3	2	0	13	3	**1**
4	4	3	14	1	0
5	3	3	15	2	2
6	1	2	16	4	0
7	2	4	17	3	0
8	4	2	18	1	4
9	3	2	19	2	**1**

$$\boxed{S'_n \equiv 0[5] \Rightarrow n = 20k + 10\,;20k + 12\,;20k + 13\,;20k + 19\,;\ k \in \mathbb{N}}$$

طريقة ثانية: نكتب n بدلالة k ، ثمّ نحل الموافقة الناتجة :

$$n = 4k: 7^{n+2} + n \equiv 1[5] \Rightarrow \underbrace{7^{4k+2}}_{\equiv 4[5]} + 4k \equiv 1[5] \Rightarrow 4k \equiv 2[5]$$

$$\Rightarrow k \equiv 3[5] \Rightarrow k = 5\alpha + 3 \Rightarrow n = 4(5\alpha + 3) = \boxed{20\alpha + 12}$$

$$n = 4k + 1: 7^{n+2} + n \equiv 1[5] \Rightarrow \underbrace{7^{4k+3}}_{\equiv 3[5]} + 4k + 1 \equiv 1[5] \Rightarrow 4k \equiv 2[5]$$

$$\Rightarrow k \equiv 3[5] \Rightarrow k = 5\alpha + 3 \Rightarrow n = 4(5\alpha + 3) + 1 = \boxed{20\alpha + 13}$$

$$n = 4k + 2: 7^{n+2} + n \equiv 1[5] \Rightarrow \underbrace{7^{4(k+1)}}_{\equiv 1[5]} + 4k + 2 \equiv 1[5] \Rightarrow 4k \equiv 3[5]$$

$$\Rightarrow k \equiv 2[5] \Rightarrow k = 5\alpha + 2 \Rightarrow n = 4(5\alpha + 2) + 2 = \boxed{20\alpha + 10}$$

$$n = 4k + 3: 7^{n+2} + n \equiv 1[5] \Rightarrow \underbrace{7^{4(k+1)+1}}_{\equiv 2[5]} + 4k + 3 \equiv 1[5] \Rightarrow 4k \equiv 1[5]$$

$$\Rightarrow k \equiv 4[5] \Rightarrow k = 5\alpha + 4 \Rightarrow n = 4(5\alpha + 4) + 3 = \boxed{20\alpha + 19}$$

حل التمرين 98. (بكالوريا 2017 د2 ر)

$u_{n+1} = 4u_n + 1$ ، $u_0 = 0$

1. أ. بيان أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $u_0 = \frac{1}{3}(4^0 - 1)$. محققة لأنّ: $u_0 = 0$

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_{n+1} = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)$

$$u_{n+1} = 4u_n + 1 = \frac{4}{3}(4^n - 1) + 1 = \frac{1}{3}4^{n+1} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}(4^n - 1)}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$

ب. التحقق أنّ العددين الطبيعيين u_n وu_{n+1} أوليين فيما بينهما

$u_{n+1} - 4u_n = 1 \underset{\text{بيزو}}{\Rightarrow}$ العددين الطبيعيين u_n وu_{n+1} أوليين فيما بينهما

2. $v_n = u_n + \frac{1}{3}$

أ. **إثبات أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_0**

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{3} = 4u_n + 1 + \frac{1}{3} = 4\left(u_n + \frac{1}{3}\right) = \boxed{4v_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 4 وحدّها الأول $v_0 = \frac{1}{3}$

ب. **التعبير عن المجموع S_n بدلالة n**

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{3n} = v_0\left(\frac{q^{3n+1} - 1}{q - 1}\right) = \boxed{\frac{1}{9}(4^{3n+1} - 1)}$$

3. تعيين القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين $4^n - 1$ و$4^{n+1} - 1$

$$PGCD(4^{n+1} - 1; 4^n - 1) = PGCD(3u_{n+1}; 3u_n) = 3\underbrace{PGCD(u_{n+1}; u_n)}_{1}$$

$$= \boxed{3}$$

4. أ. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7

$4^0 \equiv 1[7]$; $4^1 \equiv 4[7]$; $4^2 \equiv 2[7]$; $4^3 \equiv 1[7]$

$\boxed{4^{3k} \equiv 1[7]\ ;\ 4^{3k+1} \equiv 4[7]\ ;\ 4^{3k+2} \equiv 2[7]}$

ب. تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد A_n القسمة على 7

$A_n \equiv 0[7] \Rightarrow 9S_n - 6n - 3^{6n+4} \equiv 0[7]$

$4^{3n+1} - 1 - 6n - 4^{6n+4} \equiv 0[7]$ $(3 \equiv -4[7] \Rightarrow 3^{6n+4} \equiv 4^{6n+4}[7])$

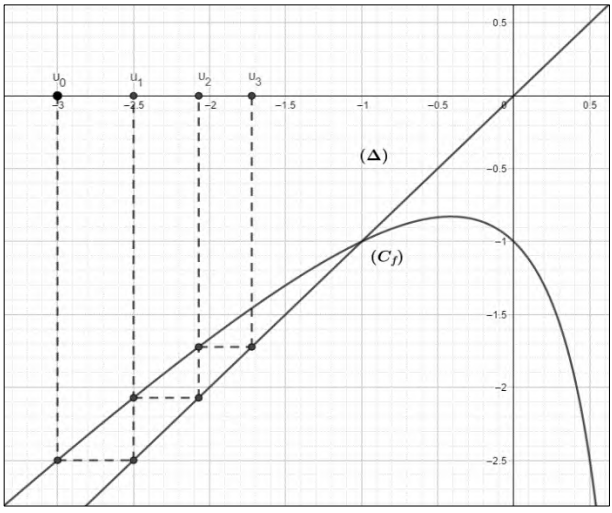
$4^{3n+1} - 1 - 6n - 4^{3(2n+1)+1} \equiv 0[7] \Rightarrow -1 - 6n \equiv 0[7] \underset{-6 \equiv 1[7]}{\Longrightarrow} n \equiv 1[7]$

$\Rightarrow \boxed{n = 7k + 1\ ;\ k \in \mathbb{N}}$

حل التمرين 99. (بكالوريا 2018 ر)

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ ، } u_0 = -3 \text{ ، } D_f =]-\infty; 1] \text{ ، } f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

1. تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 وu_3 على محور الفواصل



نلاحظ أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة

2. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-3 \leq u_n < -1$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $-3 \leq u_0 < -1$. محققة لأنّ: $u_0 = -3$

فرض التراجع: نفرض أنّ $-3 \leq u_n < -1$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $-3 \leq u_{n+1} < -1$

$$-3 \leq u_n < -1 \underset{f \text{ متزايدة}}{\Longrightarrow} f(-3) \leq f(u_n) < f(-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{-3 \leq -\frac{5}{2} \leq u_{n+1} < -1}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $-3 \leq u_n < -1$

3. أ. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} + 1 \geq \frac{3}{4}(u_n + 1)$

$$u_{n+1} + 1 = \frac{u_n^2 + 1}{u_n - 1} + 1 = \frac{u_n^2 + u_n}{u_n - 1} = \frac{u_n}{u_n - 1}(u_n + 1)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{u_n - 1}\right)(u_n + 1)$$

$$u_n \geq -3 \Rightarrow u_n - 1 \geq -4 \Rightarrow \frac{1}{u_n - 1} \leq -\frac{1}{4} \Rightarrow 1 + \frac{1}{u_n - 1} \leq \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{u_n - 1}\right)\underbrace{(u_n + 1)}_{<0} \geq \frac{3}{4}\underbrace{(u_n + 1)}_{<0} \Rightarrow \boxed{u_{n+1} + 1 \geq \frac{3}{4}(u_n + 1)}$$

ب. استنتاج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$

تحقيق التراجع: نتحقق أنّ $u_0 + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^0$. محققة لأنّ: $-2 \geq -2$

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_n + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_{n+1} + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

$$\begin{cases} u_{n+1} + 1 \geq \frac{3}{4}(u_n + 1) \\ u_n + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n \end{cases} \Rightarrow \boxed{u_{n+1} + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\begin{cases} -2\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq u_n + 1 < 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -2\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -1}$$

4. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

$$\mathbf{8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right] \leq (u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \cdots + (u_n + 1) < 0}$$

$$(u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \cdots + (u_n + 1) \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^0 - 2\left(\frac{3}{4}\right)^1 - \cdots - 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\geq -2\left[\left(\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right] \geq -2\left[\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}}\right]$$

$$\geq -8\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right] \geq 8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right] \ldots ①$$

$$u_n < -1 \Rightarrow \underbrace{(u_0 + 1)}_{<0} + \underbrace{(u_1 + 1)}_{<0} + \cdots + \underbrace{(u_n + 1)}_{<0} < 0 \ldots ②$$

من ① و② نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right] \leq (u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \cdots + (u_n + 1) < 0$$

استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

$$(u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \cdots + (u_n + 1) < 0 \Rightarrow S_n + n + 1 < 0$$

$\Rightarrow S_n < -n-1 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\infty}$; $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} -n-1 = -\infty\right)$

حل التمرين 100. (بكالوريا 2018 ر)

$\boldsymbol{D_f =]0;+\infty[}$ ، $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}}}$

$\boldsymbol{(u_n)}$ **متتالية عددية معرّفة على** $\mathbb{N}^*$ **بحدّها العام** $\boldsymbol{u_n = \frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n^2}{n+1}}$

أ. **كتابة** $\boldsymbol{u_n}$ **بدلالة** $\boldsymbol{n}$

$$u_n = \frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n^2}{n+1} = \frac{n}{n+1}\left[n + \left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-n}\right] - \frac{n^2}{n+1}$$

$$= \frac{n^2}{n+1} + \frac{n}{n+1}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)e^{-n}\right] - \frac{n^2}{n+1} = \boxed{e^{-n}}$$

بيان أنّ المتتالية $\boldsymbol{(u_n)}$ **هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول** $\boldsymbol{u_1}$

$u_{n+1} = e^{-n-1} = e^{-n} \times e^{-1} = \boxed{u_n \times e^{-1}}$

منه نستنتج أنّ المتتالية (u_n) هندسية أساسها e^{-1} وحدّها الأول $u_1 = e^{-1}$

ب. **حساب المجموع** $\boldsymbol{S_n}$ **بدلالة** $\boldsymbol{n}$

$$\frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n^2}{n+1} + \frac{n^2-1}{n+1} = u_n + (n-1)$$

$$S_n = \left(\tfrac{1}{2}f(1) - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{2}{3}f\left(\tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{3}{4}f\left(\tfrac{1}{3}\right) - \tfrac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\tfrac{n}{n+1}f\left(\tfrac{1}{n}\right) - \tfrac{1}{n+1}\right)$$

$$= u_1 + (1-1) + u_2 + (2-1) + u_3 + (3-1) + \cdots + u_n + (n-1)$$

$$= (u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n) + (1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1)$$

$$= u_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) + \frac{n(n-1)}{2} = \boxed{e^{-1}\left(\frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}\right) + \frac{n(n-1)}{2}}$$

حلول
التمارين النموذجية
في
المتتاليات العددية

2 0 2

حل التمرين 1.

I- $D_f =]-3;6[$ ، $f(x) = \frac{9}{6-x}$

1. **حساب $f'(x)$ وتشكيل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]-3;6[$**

$f'(x) = \frac{9}{(6-x)^2}$; $f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة f متزايدة

$\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ > }} f(x) = 1$; $\lim\limits_{\substack{x \to 6 \\ < }} f(x) = +\infty$

x	-3		6
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$

2. **كتابة معادلة المماس (Δ) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 3**

$(\Delta): y = f'(3)(x-3) + f(3) \Rightarrow y = x$

انشاء المماس (Δ) و المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بدقة

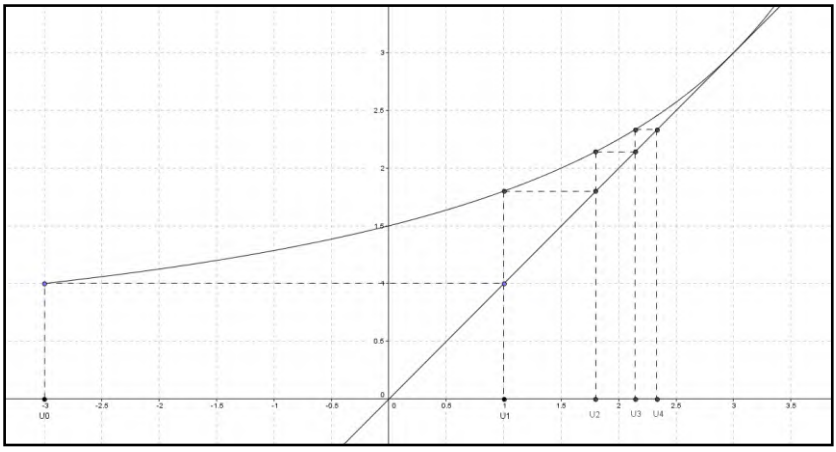
3. **بيان أنه إذا كان $x < 3$ فإن $f(x) < 3$**

بما أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-3;6[$ ، فإنّه من أجل $x < 3$:

لدينا $f(x) < f(3)$ منه $f(x) < 3$

II- **لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_{n+1} = f(u_n)$; $u_0 = -3$**

1. **انشاء الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4**



2. **برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 3$**

- تحقيق التراجع : $u_0 < 3$ (محقّقة لأنّ $u_0 = -3$)
- فرض التراجع : نفرض أنّ : $u_n < 3$
- برهان التراجع : نبرهن أنّ : $u_{n+1} < 3$

$u_n < 3 \Rightarrow f(u_n) < 3 \Rightarrow u_{n+1} < 3$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 3$

3. تحديد اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$u_{n+1}-u_n=\frac{9}{6-u_n}-u_n=\frac{u_n^2-6u_n+9}{6-u_n}=\frac{(u_n-3)^2}{6-u_n}$$

$u_n<3\Rightarrow 6-u_n>3\Rightarrow u_{n+1}-u_n>0\Rightarrow$ المتتالية (u_n) متزايدة

بما أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى ، نستنتج أنها متقاربة

III- لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $v_n=\frac{1}{u_n-3}$

- **بيان أن المتتالية (V_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول**

$$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}-3}=\frac{1}{\frac{9}{6-u_n}-3}=\frac{1}{\frac{3u_n-9}{6-u_n}}=\frac{6-u_n}{3(u_n-3)}$$

$$=\frac{3-u_n}{3(u_n-3)}+\frac{3}{3(u_n-3)}=-\frac{1}{3}+v_n$$

نستنتج أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $-\frac{1}{3}$ وحدّها الأول $v_0=\frac{1}{u_0-3}=-\frac{1}{6}$

- **بيان أن : $u_n=\frac{6n-3}{2n+1}$**

$$v_n=v_0+nr=-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}n=\frac{-2n-1}{6}$$

$$\frac{1}{u_n-3}=v_n\Rightarrow u_n-3=\frac{1}{v_n}\Rightarrow u_n=\frac{1}{v_n}+3=\frac{-6}{2n+1}+3=\boxed{\frac{6n-3}{2n+1}}$$

- **البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :**

$$u_1\times u_2\times u_3\times\ldots\times u_n=\frac{3^n}{(2n+1)}$$

- تحقيق التراجع: $u_1=\frac{3}{3}=1$ (محقّقة)
- فرض التراجع: نفرض أنّ $u_1\times u_2\times u_3\times\ldots\times u_n=\frac{3^n}{(2n+1)}$
- برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_1\times u_2\times u_3\times\ldots\times u_n\times u_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{(2n+3)}$

$$u_1\times u_2\times u_3\times\ldots\times u_n\times u_{n+1}=\frac{3^n}{(2n+1)}\times u_{n+1}$$

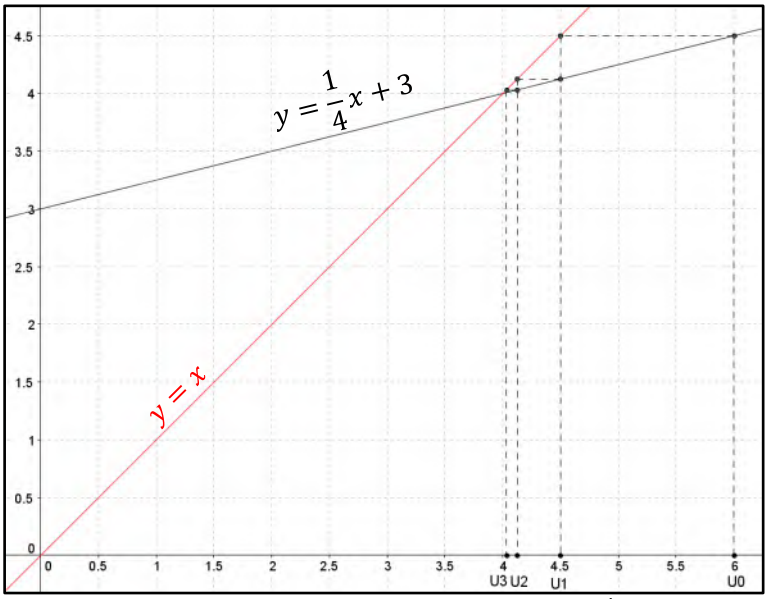
$$=\frac{3^n}{(2n+1)}\times\frac{6n+3}{2n+3}=\frac{3^n}{(2n+1)}\times\frac{3(2n+1)}{2n+3}=\frac{3.3^n}{2n+3}=\frac{3^{n+1}}{(2n+3)}$$

منه نستنتج أنّه من أجل $n\in\mathbb{N}^*$: $u_1\times u_2\times u_3\times\ldots\times u_n=\frac{3^n}{(2n+1)}$

حل التمرين 2.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 6$ ، $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$

1. تمثيل الحدود u_3, u_2, u_1, u_0 على حامل محور الفواصل



2. يمكننا التخمين أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ومتقاربة

3. البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 4$

- تحقيق التراجع : $u_0 > 4$ (محقّقة لأنّ $u_0 = 6$)
- فرض التراجع : نفرض أنّ : $u_n > 4$
- برهان التراجع : نبرهن أنّ : $u_{n+1} > 4$

$$u_n > 4 \Rightarrow \frac{1}{4}u_n > 1 \Rightarrow \frac{1}{4}u_n + 3 > 4 \Rightarrow u_{n+1} > 4$$

4. استنتاج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ثم تعيين نهايتها

بما أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل ، فهي إذن متقاربة

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l \Rightarrow \frac{1}{4}l + 3 = l \Rightarrow \frac{3}{4}l = 3 \Rightarrow \boxed{l = 4}$$

5. $w_n = \ln(u_n - 4)$

أ. برهان أن المتتالية (w_n) حسابية وتعين أساسها وحدها الأول

$$w_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 4) = \ln\left(\frac{1}{4}u_n - 1\right) = \ln\left[\frac{1}{4}(u_n - 4)\right]$$

$$= \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \ln(u_n - 4) = w_n - \ln 4$$

منه المتتالية (w_n) حسابية أساسها $-\ln 4$ وحدّها الأول $w_0 = \ln(u_0 - 4) = \ln 2$

ب. التحقّق أنّ : $w_n = (1-2n)\ln 2$

$w_n = w_0 + nr = \ln 2 - n\ln 4 = \ln 2 - 2n\ln 2 \Rightarrow \boxed{w_n = (1-2n)\ln 2}$

ج. كتابة u_n بدلالة n

$w_n = \ln(u_n - 4) \Rightarrow u_n - 4 = e^{w_n} \Rightarrow u_n = e^{w_n} + 4 = e^{\ln 2 - n\ln 4} + 4$

$$\Rightarrow u_n = \frac{e^{\ln 2}}{e^{\ln 4^n}} + 4 = \boxed{\frac{2}{4^n} + 4}$$

د. حساب اصغر قيمة للعدد الطبيعي n حيث يكون: $u_n < 2.10^{-4} + 4$

$$u_n < 2.10^{-4} + 4 \Rightarrow \frac{2}{4^n} + 4 < \frac{2}{10^4} + 4 \Rightarrow \frac{1}{4^n} < \frac{1}{10^4} \Rightarrow 4^n > 10^4$$

$$\Rightarrow \ln(4^n) > \ln(10^4) \Rightarrow n\ln 4 > 4\ln 10 \Rightarrow n > \frac{4\ln 10}{\ln 4}$$

$$\Rightarrow n > 6{,}64 \Rightarrow \boxed{n = 7}$$

حل التمرين 3.

1. لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$6\,u_{n+1} - 4\,u_n = n + 3 \;;\; u_0 = 1$$

أ. اثبات بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq \frac{1}{2}n + 1$

- تحقيق التراجع : $u_0 \leq 1$ (محقّقة لأنّ $u_0 = 1$)
- فرض التراجع : نفرض أنّ $u_n \leq \frac{1}{2}n + 1$
- برهان التراجع : نبرهن أنّ $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(n+1) + 1$ أي $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}$

$$6u_{n+1} - 4\,u_n = n + 3 \Rightarrow u_{n+1} = \frac{2}{3}\,u_n + \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}$$

$$u_n \leq \frac{1}{2}n + 1 \Rightarrow \frac{2}{3}u_n \leq \frac{1}{3}n + \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3}\,u_n + \frac{1}{6}n + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{3}n + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq \frac{1}{2}n + \frac{7}{6} \Rightarrow u_{n+1} \leq \frac{1}{2}n + \frac{3}{2} \left(\text{لأنّ } \frac{7}{6} < \frac{3}{2}\right)$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq \frac{1}{2}n + 1$

ب. استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}\,u_n + \frac{1}{6}n + \frac{1}{2} - \,u_n = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\,u_n = \frac{n + 3 - 2\,u_n}{6}$$

$$u_n \leq \frac{1}{2}n + 1 \Rightarrow 2u_n \leq n + 2 \Rightarrow n + 3 \geq 2u_n \Rightarrow n + 3 - 2u_n \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(u_n) \text{ متزايدة}}$$

2. $v_n = 2u_n - n$

أ. اثبات أن (v_n) متتالية هندسية ، يُطلب تعيين أساسها و حدها الأول

$$v_{n+1} = 2u_{n+1} - (n+1) = \frac{4}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{4}{3}u_n - \frac{2}{3}n$$
$$= \frac{2}{3}(2u_n - n) = \frac{2}{3}v_n$$

منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ وحدّها الأول $v_0 = 2u_0 = 2$

ب. كتابة v_n ثمّ u_n بدلالة n

$$v_n = v_0.q^n \Rightarrow \boxed{v_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$v_n = 2u_n - n \Rightarrow u_n = \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}n \Rightarrow \boxed{u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{2}n}$$

دراسة تقارب المتتاليتين (u_n) و (v_n) :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{2}n = +\infty \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متباعدة}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (v_n) \text{ متقاربة}}$$

ج. حساب بدلالة n المجموعين : S_n و S'_n

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = 2\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n = 6\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]}$$

$$S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{1}{2}v_0 + \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}n$$

$$S'_n = \frac{1}{2}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + \frac{1}{2}(1 + 2 + \cdots + n)$$

$$S'_n = \frac{1}{2}S_n + \frac{n}{2}(n+1) \Rightarrow \boxed{S'_n = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] + \frac{n}{2}(n+1)}$$

د. حساب بدلالة n الجداء : $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n = v_0 \times v_0.q \times v_0.q^2 \times \ldots \times v_0.q^n$$

$$P_n = v_0^{n+1}.q^{1+2+\cdots+n} = v_0^{n+1}.q^{\frac{n(n+1)}{2}} = \boxed{2^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

حل التمرين 4.

1. تعيين أساس المتتالية (u_n) و حدها الأول u_1

$$\ln u_3 - \ln u_4 = -1 \Rightarrow \ln\left(\frac{u_3}{u_4}\right) = -1 \Rightarrow \frac{u_3}{u_4} = e^{-1} \Rightarrow \frac{u_4}{u_3} = e \Rightarrow \boxed{q = e}$$

$$\ln u_3 + \ln u_4 = 5 \Rightarrow \ln(u_1.e^2) + \ln(u_1.e^3) = 5$$

$$\Rightarrow \ln u_1 + \ln e^2 + \ln u_1 + \ln e^3 = 5 \Rightarrow 2\ln u_1 = 0 \Rightarrow \boxed{u_1 = 1}$$

2. كتابة u_n بدلالة n ، ثم حساب الجداء : $P_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$

$$u_n = u_1.q^{n-1} \Rightarrow \boxed{u_n = e^{n-1}}$$

$$P_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = 1 \times e \times \ldots \times e^{n-1} = e^{1+2+\cdots+n-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_n = e^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

$$v_n = \ln u_{n+1} - 2\ln u_n$$

3. اثبات أنّ (v_n) متتالية حسابية ، يُطلب تعيين أساسها و حدها الأول

$$v_n = \ln u_{n+1} - 2\ln u_n = \ln e^n - 2\ln e^{n-1} = n - 2(n-1) = -n + 2$$

$$v_{n+1} = -(n+1) + 2 = -n + 2 - 1 = \boxed{v_n - 1}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = -1$ وحدّها الأول $v_1 = 1$

$$v_n = v_1 + (n-1)r \Rightarrow \boxed{v_n = 2 - n}$$

4. حساب بدلالة n المجموع : $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

$$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \frac{n}{2}(v_1 + v_n) = \frac{n}{2}(1 + 2 - n)$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n = \frac{n}{2}(3 - n)}$$

حل التمرين 5.

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

1. تعيين قيم u_0 التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة

المتتالية (u_n) ثابتة $\Rightarrow u_{n+1} = u_n = u_0 \Rightarrow u_0 = \dfrac{2u_0 + 1}{u_0 + 2}$

$$\Rightarrow u_0^2 + 2u_0 = 2u_0 + 1 \Rightarrow u_0^2 = 1 \Rightarrow \boxed{u_0 = 1 \text{ أو } u_0 = -1}$$

2. نفرض أن $u_0 = 0$

- **اثبات أن من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \leq u_n < 1$**

تحقيق التراجع : $0 \leq u_0 < 1$ (محقّقة لأنّ $u_0 = 0$)

فرض التراجع : نفرض أنّ $0 \leq u_n < 1$

برهان التراجع : نبرهن أنّ $0 \leq u_{n+1} < 1$

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} = \frac{2u_n + 4 - 3}{u_n + 2} = \frac{2(u_n + 2) - 3}{u_n + 2} = 2 - \frac{3}{u_n + 2}$$

$$0 \leq u_n < 1 \Rightarrow 2 \leq u_n + 2 < 3 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} \leq -\frac{3}{u_n + 2} \leq -1 \Rightarrow 2 - \frac{3}{2} \leq 2 - \frac{3}{u_n + 2} < 2 - 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq u_{n+1} < 1 \Rightarrow \boxed{0 \leq u_{n+1} < 1}$$

- **دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)**

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - u_n = \frac{-u_n^2 + 1}{u_n + 2} = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{u_n + 2}$$

بما أنّ $0 \leq u_n < 1$ ، فإنّ $u_{n+1} - u_n > 0$ ، منه المتتالية (u_n) متزايدة

3. $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

- **اثبات أن (v_n) متتالية هندسية ، يُطلب تعيين أساسها و حدها الأول**

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - 1}{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2} + 1} = \frac{u_n - 1}{3u_n + 3} = \frac{1}{3}\left(\frac{u_n - 1}{u_n + 1}\right) = \frac{1}{3}v_n$$

منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدّها الأول $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = -1$

- **كتابة v_n بدلالة n ، ثم حساب نهاية المتتالية (v_n)**

$$v_n = v_0 . q^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow \boxed{v_n = -\frac{1}{3^n}} \; ; \; \boxed{\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{3^n} = 0}$$

- **كتابة u_n بدلالة v_n ، ثم استنتاج نهاية المتتالية (u_n)**

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \Rightarrow v_n(u_n + 1) = u_n - 1 \Rightarrow u_n(v_n - 1) = -v_n - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n = \frac{-v_n - 1}{v_n - 1}}$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{-v_n - 1}{v_n - 1} = 1}$$

حل التمرين 6.

$$v_n = 2 - \ln u_n \quad ; \quad u_{n+1} = e\sqrt{u_n} \; ; \; u_0 = e$$

1. حساب u_1 ، v_0 و v_1

$$u_1 = e\sqrt{e} = \boxed{e^{\frac{3}{2}}};\ v_0 = 2 - \ln u_0 = \boxed{1};\ v_1 = 2 - \ln u_1 = 2 - \frac{3}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

2. اثبات أن (v_n) متتالية هندسية ، يُطلب تعيين أساسها

$$v_{n+1} = 2 - \ln u_{n+1} = 2 - \ln e\sqrt{u_n} = 1 - \ln\sqrt{u_n} = 1 - \frac{1}{2}\ln u_n = \frac{1}{2}v_n$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

3. كتابة v_n ثم u_n بدلالة n

$$v_n = v_0.q^n = \boxed{\frac{1}{2^n}};\ln u_n = 2 - v_n = 2 - \frac{1}{2^n} \Rightarrow \boxed{u_n = e^{2-\frac{1}{2^n}}}$$

دراسة تقارب المتتاليتين (u_n) و (v_n)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{2-\frac{1}{2^n}} = e^2 \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متقاربة}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (v_n) \text{ متقاربة}}$$

4. حساب المجموع S_n بدلالة n

$$S_n = v_0 + \cdots + v_{n-1} = v_0\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = \boxed{2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}$$

5. حساب الجداء P_n بدلالة n

$$P_n = u_0 \times \ldots \times u_{n-1} = e^{2-1} \times e^{2-\frac{1}{2}} \times e^{2-\frac{1}{4}} \times e^{2-\frac{1}{8}} \times \ldots \times e^{2-\frac{1}{2^{n-1}}}$$

$$P_n = e^{2n-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}})} = \boxed{e^{2n-2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}}$$

حل التمرين 7.

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \text{ ، } u_0 = 6$$

1. حساب القيم المضبوطة للحدود u_1 ، u_2 و u_3.

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 2 = 4\ ;\ u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 2 = \frac{10}{3}\ ;\ u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 = \frac{28}{9}\ ;$$

التخمين بالنسبة لاتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

من خلال القيم المضبوطة للحدود u_1 ، u_2 و u_3 ، نخمن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة

2. بيان أنّ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 3$

تحقيق التراجع : $u_0 \geq 3$ (محقّقة لأنّ $u_0 = 6$)

فرض التراجع : نفرض أنّ $u_n \geq 3$

برهان التراجع : نبرهن أنّ $u_{n+1} \geq 3$

$$u_n \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{3}u_n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{3}u_n + 2 \geq 3 \Rightarrow u_{n+1} \geq 3$$

3. البرهان أنّ المتتالية (u_n) متناقصة واستنتاج أنّها متقاربة

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + 2 - u_n = -\frac{2}{3}u_n + 2$$

$$u_n \geq 3 \Rightarrow -\frac{2}{3}u_n \leq -2 \Rightarrow -\frac{2}{3}u_n + 2 \leq 0 \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة}}$$

بما أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل $(u_n \geq 3)$ ، نستنتج أنّها متقاربة

4. $v_n = u_n + \alpha$

أ. تعيين α حيث تكون المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين حدها الأول وأساسها

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha = \frac{1}{3}u_n + 2 + \alpha = \frac{1}{3}(u_n + 6 + 3\alpha) = \frac{1}{3}v_n$$

$$u_n + 6 + 3\alpha = u_n + \alpha \Rightarrow 6 + 3\alpha = \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = -3}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n \Rightarrow \boxed{q = \frac{1}{3}\ ;\ v_0 = u_0 - 3 = 3}$$

ب. كتابة v_n بدلالة n واستنتاج كتابة u_n بدلالة n

$$v_n = v_0 . q^n = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow \boxed{v_n = \frac{1}{3^{n-1}}} ; u_n = v_n + 3 \Rightarrow \boxed{u_n = \frac{1}{3^{n-1}} + 3}$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^{n-1}} + 3 = \boxed{3}$$

ج. حساب S_n بدلالة n

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = v_0 + 3 + v_1 + 3 + \cdots + v_n + 3$$

$$= v_0\left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right) + 3(n+1) = 3\left(\frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}}\right) + 3(n+1)$$

$$= \frac{9}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) + 3n + 1 = \boxed{3n - \frac{1}{2.3^{n-1}} + \frac{11}{2}}$$

حل التمرين 8.

1. (u_n) متتالية حسابية متناقصة معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 وأساسها r

أ. تعيين u_0 و r علما أنّ : $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 24 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 210 \end{cases}$

$u_1 + u_2 + u_3 = 24 \Rightarrow 3u_2 = 24 \Rightarrow u_2 = 8$

$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 210 \Rightarrow u_1^2 + u_3^2 = 210 - 64$

$\Rightarrow (8-r)^2 + (8+r)^2 = 146 \Rightarrow 2r^2 = 18$

$\Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow \boxed{r = -3}$ (لأنّ المتتالية (u_n) متناقصة)

$u_0 = u_2 - 2r = 8 + 6 \Rightarrow \boxed{u_0 = 14}$

ب. كتابة u_n بدلالة n وحساب المجموع S'_n

$u_n = u_0 + nr \Rightarrow \boxed{u_n = 14 - 3n}$

$$S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n) = \frac{n+1}{2}(14 + 14 - 3n)$$

$$\boxed{S'_n = \frac{(n+1)(28-3n)}{2}}$$

2. $v_n = e^{14-3n}$

أ. بيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدها الأول

$v_{n+1} = e^{14-3(n+1)} = e^{14-3n-3} = e^{14-3n}.e^{-3} = e^{-3}.v_n$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها e^{-3} وحدّها الأول $v_0 = e^{14}$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} e^{14-3n} = 0\ ;\ (14-3n \to -\infty \Rightarrow e^{14-3n} \to 0)$$

نستنتج أنّ المتتالية (v_n) متقاربة

ب. حساب المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right) = \boxed{e^{14}\left(\frac{e^{-3n-3}-1}{e^{-3}-1}\right)}$$

حساب الجداء $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$

$P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n = v_0 \times v_0.q \times \ldots \times v_0.q^n = v_0^{n+1} \times q^{1+2+\cdots+n}$

$$= v_0^{n+1} \times q^{\frac{n(n+1)}{2}} = e^{14(n+1)}.e^{-3\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)} = \boxed{e^{-\frac{3}{2}n^2+\frac{25}{2}n+14}}$$

ج. حساب u_{2011} ، ثمّ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$

$u_{2011} = 14 - 3(2011) = -6019$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} e^{14}\left(\frac{e^{-3n-3}-1}{e^{-3}-1}\right) = \boxed{-\frac{e^{14}}{e^{-3}-1}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\underbrace{-\frac{3}{2}n^2+\frac{25}{2}n+14}_{\to-\infty}} = \boxed{0}$$

حل التمرين 9.

$u_{n+1} = \frac{5}{6}u_n + 335$ ، $u_0 = \alpha$

1. تعيين العدد الحقيقي α حيث تكون المتتالية (u_n) ثابتة

$$u_{n+1} = u_n = u_0 = \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{5}{6}\alpha + 335 \Rightarrow \alpha = 335 \times 6 = \boxed{2010}$$

2. نضع في كل ما يلي : $\alpha = 2009$

أ. برهان بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 2010$

تحقيق التراجع : $u_0 \leq 2010$ (محقّقة لأنّ $u_0 = 2009$)

فرض التراجع : نفرض أنّ $u_n \leq 2010$

برهان التراجع : نبرهن أنّ $u_{n+1} \leq 2010$

$$u_n \leq 2010 \Rightarrow \frac{5}{6}u_n \leq 1675 \Rightarrow \frac{5}{6}u_n + 335 \leq 2010 \Rightarrow u_{n+1} \leq 2010$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 2010$

ب. بيان أنّ المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5}{6}u_n + 335 - u_n = 335 - \frac{1}{6}u_n = \frac{2010 - u_n}{6}$$

بما أنّ $u_n \leq 2010$ ، فإنّ $2010 - u_n \geq 0$ ، منه المتتالية (u_n) متزايدة

الاستنتاج : المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى ومتزايدة ، فهي إذن متقاربة

3. $v_n = u_n - 2010$

أ. اثبات أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين حدها الأول وأساسها

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2010 = \frac{5}{6}u_n + 335 - 2010 = \frac{5}{6}u_n - 1675$$

$$= \frac{5}{6}(u_n - 2010) = \frac{5}{6}v_n$$

منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{5}{6}$ وحدها الأول $v_0 = -1$

ب. كتابة v_n بدلالة n : $\boxed{v_n = v_0 . q^n = -\left(\frac{5}{6}\right)^n}$

استنتاج كتابة u_n بدلالة n : $\boxed{u_n = v_n + 2010 = 2010 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}$

ج. حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2010 - \left(\frac{5}{6}\right)^n = \boxed{2010}$

د. حساب بدلالة n المجموعين : S_n و S'_n

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = -\left(\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}}{1-\frac{5}{6}}\right) = \boxed{-6\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}\right)}$$

$$S'_n = v_0 + 6v_1 + 6^2v_2 + \cdots + 6^nv_n$$
$$= v_0 + 6v_0.q + 6^2v_0.q^2 + \cdots + 6^nv_0.q^n$$
$$= v_0 \underbrace{(1 + 6q + 6^2q^2 + \cdots + 6^nq^n)}_{\text{حدود متتابعة لمتتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها } 6q} = v_0\left(\frac{1-(6q)^{n+1}}{1-6q}\right)$$
$$= -\left(\frac{1-(5)^{n+1}}{1-5}\right) = \boxed{\frac{1-(5)^{n+1}}{4}}$$

حل التمرين 10.

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث : $\begin{cases} u_1 + u_3 = 30e \\ \ln(u_2) - \ln(u_4) + 2\ln 3 = 0 \end{cases}$

1. تعيين u_1 وq أساس المتتالية (u_n)

$$\ln(u_2) - \ln(u_4) + 2\ln 3 = 0 \Rightarrow \ln(u_4) - \ln(u_2) = 2\ln 3$$
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{u_4}{u_2}\right) = 2\ln 3 \Rightarrow \ln\left(\frac{u_2.q^2}{u_2}\right) = 2\ln 3 \Rightarrow \ln q^2 = 2\ln 3$$
$$\Rightarrow 2\ln q = 2\ln 3 \Rightarrow \boxed{q = 3}$$

$$u_1 + u_3 = 30e \Rightarrow u_1 + u_1.q^2 = 30e \Rightarrow 10u_1 = 30e \Rightarrow \boxed{u_1 = 3e}$$

2. عبارة u_n بدلالة n

$$u_n = u_1.q^{n-1} \Rightarrow u_n = 3e.3^{n-1} \Rightarrow \boxed{u_n = 3^n.e}$$

3. حساب بدلالة n المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{3e}{2}(3^n - 1)}$$

4. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \ln(u_{n+2}) + \ln(u_{n+1})$

أ. كتابة v_n بدلالة n

$$v_n = \ln(u_{n+2}) + \ln(u_{n+1}) = \ln(3^{n+2}.e) + \ln(3^{n+1}.e)$$
$$= \ln(3^{n+2}) + \ln(e) + \ln(3^{n+1}) + \ln(e)$$
$$= (n+2)\ln 3 + (n+1)\ln 3 + 2 \Rightarrow \boxed{v_n = (2n+3)\ln 3 + 2}$$

بيان أنّ المتتالية (v_n) حسابية يُطلب تعيين حدها الأول وأساسها r

$$v_{n+1} = (2n+5)\ln 3 + 2 = (2n+3)\ln 3 + 2 + 2\ln 3 = v_n + 2\ln 3$$

نستنتج أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $2\ln 3$ وحدها الأول $v_0 = 3\ln 3 + 2$

ب. تعيين العدد الطبيعي n حيث $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = 12 + 48\ln 3$

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = 12 + 48\ln 3 \Rightarrow \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n) = 12 + 48\ln 3$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{2}[3\ln 3 + 2 + (2n+3)\ln 3 + 2] = 12 + 48\ln 3$$
$$\Rightarrow \frac{n+1}{2}[2(n+3)\ln 3 + 4] = 12 + 48\ln 3$$
$$\Rightarrow (n+1)[(n+3)\ln 3 + 2] = 12 + 48\ln 3$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2(n+1) = 12 \\ (n+1)(n+3) = 48 \end{cases} \Rightarrow \boxed{n = 5}$$

حل التمرين 11.

I- $u_0 = \frac{3}{2}$ ، $u_{n+1} = \frac{3u_n+6}{u_n+4}$

1. بيان أنّ من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 2$

تحقيق التراجع : $1 < u_0 < 2$ (محقّقة لأنّ $u_0 = \frac{3}{2}$)

فرض التراجع : نفرض أنّ $1 < u_n < 2$

برهان التراجع : نبرهن أنّ $1 < u_{n+1} < 2$

$$u_{n+1} = \frac{3u_n+6}{u_n+4} = \frac{3u_n+12-6}{u_n+4} = \frac{3(u_n+4)-6}{u_n+4} = 3 - \frac{6}{u_n+4}$$

$$1 < u_n < 2 \Rightarrow 5 < u_n + 4 < 6 \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{1}{u_n+4} < \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow -\frac{6}{5} < -\frac{6}{u_n+4} < -1 \Rightarrow 3 - \frac{6}{5} < 3 - \frac{6}{u_n+4} < 3 - 1$$

$$\Rightarrow \frac{9}{5} < u_{n+1} < 2 \Rightarrow 1 < u_{n+1} < 2$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 2$

2. دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n+6}{u_n+4} - u_n = \frac{3u_n+6-u_n^2-4u_n}{u_n+4} = -\frac{u_n^2+u_n-6}{u_n+4}$$
$$= -\frac{(u_n+3)(u_n-2)}{u_n+4}$$

$$1 < u_n < 2 \Rightarrow \begin{cases} (u_n+3)(u_n-2) < 0 \\ u_n + 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{(u_n+3)(u_n-2)}{u_n+4} > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة}}$$

استنتاج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة

بما أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى ، فهي متقاربة

3. تخمين نهاية المتتالية (u_n)

بما أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 ، فهي متقاربة نحو 2 ، منه

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 2}$$

II- لتكن الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-4\}$ كما يلي : $f(x)=\frac{3x+6}{x+4}$

1. حل المعادلة $f(x)=x$

$$f(x)=x \Rightarrow \frac{3x+6}{x+4}=x \Rightarrow \frac{3x+6}{x+4}-x=0 \Rightarrow \frac{-x^2-x+6}{x+4}=0$$

$$\Rightarrow -(x+3)(x-2)=0 \Rightarrow x=-3 \text{ أو } x=2 \Rightarrow \boxed{\alpha=-3\ ;\ \beta=2}$$

2. $v_n=\frac{u_n+3}{u_n-2}$

أ. اثبات أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين حدها الأول وأساسها

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+3}{u_{n+1}-2}=\frac{\frac{3u_n+6}{u_n+4}+3}{\frac{3u_n+6}{u_n+4}-2}=\frac{\frac{3u_n+6+3u_n+12}{u_n+4}}{\frac{3u_n+6-2u_n-8}{u_n+4}}=\frac{6u_n+18}{u_n-2}$$

$$=\frac{6(u_n+3)}{u_n-2}=6v_n$$

منه ، المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=6$ وحدها الأول $v_0=\frac{u_0+3}{u_0-2}=\frac{\frac{3}{2}+3}{\frac{3}{2}-2}=-9$

ب. كتابة v_n بدلالة n واستنتاج كتابة u_n بدلالة n

$$v_n=v_0.q^n \Rightarrow \boxed{v_n=-9\times 6^n}$$

$$v_n=\frac{u_n+3}{u_n-2} \Rightarrow v_n(u_n-2)=u_n+3 \Rightarrow u_n(v_n-1)=2v_n+3$$

$$u_n=\frac{2v_n+3}{v_n-1}=\frac{2(v_n-1)+5}{v_n-1}=2+\frac{5}{v_n-1}=\boxed{2-\frac{5}{9\times 6^n+1}}$$

ج. حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 2-\frac{5}{9\times 6^n+1}=\boxed{2}$$

حل التمرين 12.

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=3u_n+2 \end{cases}$

1. حساب u_1 ، u_2

$$u_1=3u_0+2=5\ ;\ u_2=3u_1+2=17$$

2. $v_n = \frac{2}{u_n+1}$

أ. بيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين حدها الأول وأساسها

$$v_{n+1} = \frac{2}{u_{n+1}+1} = \frac{2}{3u_n+2+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{u_n+1}\right) = \frac{1}{3}v_n$$

منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{2}{u_0+1} = 1$

ب. كتابة v_n بدلالة n واستنتاج كتابة u_n بدلالة n

$$v_n = v_n.q^n \Rightarrow \boxed{v_n = \frac{1}{3^n}}$$

$$v_n = \frac{2}{u_n+1} \Rightarrow v_n(u_n+1) = 2 \Rightarrow u_n = \frac{2-v_n}{v_n} = \frac{2-\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n}}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n = 2.3^n - 1}$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 2.3^n - 1 = \boxed{+\infty}$$

3. $S_n = v_0^2 + v_1^2 + \cdots + v_{n-1}^2$

أ. بيان أنّ $S_n = \frac{9}{8}\left[1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right]$

$$S_n = v_0^2 + v_1^2 + \cdots + v_{n-1}^2$$
$$= v_0^2 + (v_0.q)^2 + (v_0.q^2)^2 + \cdots + (v_0.q^{n-1})^2$$
$$= v_0^2 + v_0^2.q^2 + v_0^2.q^4 + \cdots + v_0^2.q^{2n-2}$$
$$= v_0^2(1 + q^2 + q^4 + \cdots + q^{2n-2})$$
$$= v_0^2\left(\frac{1-q^{2n}}{1-q^2}\right) = \left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}\right) = \left(\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}{\frac{8}{9}}\right)$$
$$= \boxed{\frac{9}{8}\left[1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right]}$$

ب. تعيين أصغر عدد طبيعي n بحيث : $S_n > \frac{10}{9}$

$$S_n > \frac{10}{9} \Rightarrow \frac{9}{8}\left[1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right] > \frac{10}{9} \Rightarrow 1-\left(\frac{1}{9}\right)^n > \frac{80}{81} \Rightarrow -\left(\frac{1}{9}\right)^n > -\frac{1}{81}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{9^n} < \frac{1}{81} \Rightarrow 9^n > 81 \Rightarrow n > 2 \Rightarrow \boxed{n = 3}$$

4. حساب بدلالة n الجداء : $\pi_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$

$$\pi_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n = v_0 \times v_0.q \times v_0.q^2 \times \ldots \times v_0.q^n$$

$$\pi_n = v_0^{n+1} \times q^{1+2+\cdots+n} = v_0^{n+1} \times q^{\frac{n(n+1)}{2}} \Rightarrow \boxed{\pi_n = \frac{1}{3^{\frac{n(n+1)}{2}}} = 3^{\frac{-n(n+1)}{2}}}$$

حل التمرين 13.

$w_n = u_n - v_n$ ، $v_{n+1} = \frac{u_n+4v_n}{5}$ ، $u_{n+1} = \frac{u_n+2v_n}{3}$ ، $v_0 = 2$ ، $u_0 = 1$

1. برهان أنّ المتتالية (w_n) هندسية

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + 4v_n}{5}$$

$$= \frac{5u_n + 10v_n - 3u_n - 12v_n}{15} = \frac{2}{15}(u_n - v_n)$$

بما أنّ $w_{n+1} = \frac{2}{15}w_n$ ، فإنّ المتتالية (w_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{15}$

تعيين نهايتها

بما أنّ $0 < q < 1$ ، فإنّ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n) = 0}$

كتابة w_n بدلالة n

$w_0 = u_0 - v_0 = -1$; $\boxed{w_n = w_0.q^n = -\left(\frac{2}{15}\right)^n}$

2. كتابة $u_{n+1} - u_n$ و $v_{n+1} - v_n$ بدلالة w_n

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \frac{-2u_n + 2v_n}{3} = -\frac{2}{3}(u_n - v_n)$$

$$= -\frac{2}{3}w_n$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 4v_n}{5} - v_n = \frac{u_n - v_n}{5} = \frac{1}{5}(u_n - v_n) = \frac{1}{5}w_n$$

استنتاج اتجاه تغيّر المتتاليتين (u_n) و (v_n)

$$w_n < 0 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3}w_n > 0 \\ \frac{1}{5}w_n < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{n+1} - u_n > 0 \\ v_{n+1} - v_n < 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \text{المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة} \\ \text{المتتالية } (v_n) \text{ متناقصة} \end{cases}}$$

3. بيان أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) لهما نفس النهاية يُرمز لها l

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \lim_{n\to+\infty}(v_n) = l}$$

4. $t_n = 3u_n + 10v_n$. برهان أنّ المتتالية (t_n) ثابتة ، ثمّ استنتاج قيمة l

$$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 10v_{n+1} = 3\left(\frac{u_n + 2v_n}{3}\right) + 10\left(\frac{u_n + 4v_n}{5}\right)$$

$$= u_n + 2v_n + 2u_n + 8v_n = 3u_n + 10v_n = t_n \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (t_n) \text{ ثابتة}}$$

بما أنّ المتتالية (t_n) ثابتة ، فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = t_0 = 3u_0 + 10v_0 = 23$

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = 23 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (3u_n + 10v_n) = 23 \Rightarrow 3l + 10l = 23$$

$$\Rightarrow 13l = 23 \Rightarrow \boxed{l = \frac{23}{13}}$$

حل التمرين 14.

$$D_g = \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[\text{ ، } g(x) = \frac{x^2}{2x-1}$$

1. دراسة اتجاه تغير الدالة g

$$g'(x) = \frac{2x(2x-1) - 2x^2}{(2x-1)^2} = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$$

$x \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[\Rightarrow g'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة g متناقصة ; $x \in [1; +\infty[\Rightarrow g'(x) \geq 0$

$\Rightarrow \boxed{\text{الدالة } g \text{ متزايدة}}$

2. بيان أنّه إذا كان $x \geq 1$ فإن $g(x) \geq 1$

بما أنّ الدالة g متزايدة تماما على المجال $]1; +\infty[$ ، فإنّ :

$$x \geq 1 \Rightarrow g(x) \geq g(1) \Rightarrow g(x) \geq 1$$

3. $u_{n+1} = g(u_n)$ و $u_0 = 2$

أ. بيان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 1$

- تحقيق التراجع : $u_0 \geq 1$ (محقّقة لأنّ $u_0 = 2$)
- فرض التراجع : نفرض أنّ $u_n \geq 1$
- برهان التراجع : نبرهن أنّ $u_{n+1} \geq 1$

$$u_n \geq 1 \xrightarrow[\text{من السؤال 2}]{} g(u_n) \geq 1 \Rightarrow u_{n+1} \geq 1$$

ب. تحديد اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{{u_n}^2}{2u_n - 1} - u_n = \frac{-{u_n}^2 + u_n}{2u_n - 1} = \frac{u_n(1-u_n)}{2u_n - 1}$$

$u_n \geq 1 \Rightarrow 1 - u_n \leq 0 \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة}}$

ج. استنتاج تقارب المتتالية (u_n)

بما أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي متقاربة

4. $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ و $w_n = \ln(v_n)$

أ. بيان أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 يطلب تعيين حدها الأول

$$w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln\left(\frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{{u_n}^2}{2u_n - 1} - 1}{\frac{{u_n}^2}{2u_n - 1}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{{u_n}^2 - 2u_n + 1}{{u_n}^2}\right) = \ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right)^2 = 2\ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right)$$

$$= 2\ln(v_n) = 2w_n$$

منه نستنتج أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول:

$$w_0 = \ln(v_0) = \ln\left(\frac{u_0 - 1}{u_0}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$$

ب. كتابة عبارة w_n و u_n بدلالة n

$$w_n = w_0 . q^n = \boxed{-2^n . \ln 2}$$

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \Rightarrow u_n . v_n = u_n - 1 \Rightarrow u_n(v_n - 1) = -1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{1 - v_n}$$

$$w_n = \ln(v_n) \Rightarrow v_n = e^{w_n}$$

$$u_n = \frac{1}{1 - v_n} \Rightarrow u_n = \frac{1}{1 - e^{w_n}} = \boxed{\frac{1}{1 - e^{-2^n . \ln 2}}}$$

حساب نهاية u_n

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1 - \underbrace{e^{-2^n . \ln 2}}_{\to 0}} = \boxed{1}$$

حل التمرين 15.

$Df = [-2; 4[$ ، $f(x) = \frac{4}{4-x}$ -I

1. حساب $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ <}} f(x)$

$$\lim_{\substack{x \to 4 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 4 \\ <}} \frac{4}{4 - x} = \boxed{+\infty}$$

2. دراسة تغيرات الدالة f

$$f'(x) = \frac{4}{(4-x)^2} \; ; f'(x) > 0 \Rightarrow \boxed{\text{الدالة } f \text{ متزايدة}}$$

جدول تغيرات الدالة f

x	-2		4
$f'(x)$	$+$		
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	↗	$+\infty$

3. كتابة معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 2$

$y = f'(2)(x-2) + f(2) \Rightarrow \boxed{(\Delta) : y = x}$

4. بيان أنه إذا كان : $0 \leq x \leq 2$ فإن $0 \leq f(x) \leq 2$

بما أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;2]$ ، فإنّ :

$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(2) \Rightarrow 1 \leq f(x) \leq 2 \Rightarrow \boxed{0 \leq f(x) \leq 2}$

5. انشاء المماس (Δ) و المنحنى (C_f)

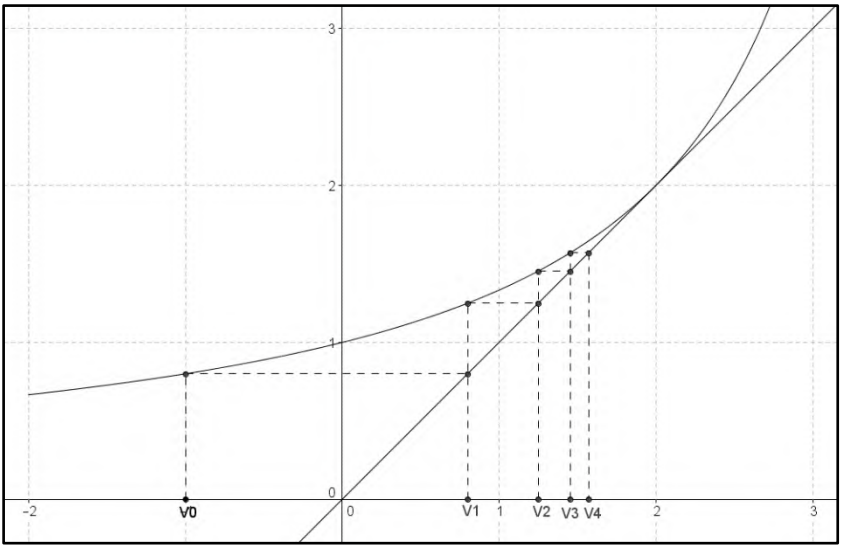
(انظر الشكل التالي)

II- $v_0 = -1$ و $v_{n+1} = f(v_n)$

- **تعريف المتتالية (v_n)**

$v_{n+1} = \frac{4}{4 - v_n}$; $v_0 = -1$

- **انشاء الحدود v_4, v_3, v_2, v_1, v_0**



نستنتج أنّ المتتالية (v_n) متزايدة ومتقاربة نحو العدد 2

- **برهان بالتراجع أنّ : $0 \le v_n \le 2$**

تحقيق التراجع : $0 \le v_1 \le 2$ (محقّقة لأنّ $v_1 = \frac{4}{5}$)

فرض التراجع : نفرض أنّ : $0 \le v_n \le 2$

برهان التراجع : نبرهن أنّ : $0 \le v_{n+1} \le 2$

$$0 \le v_n \le 2 \xrightarrow[\text{من السؤال 4}]{} 0 \le f(v_n) \le 2 \Rightarrow 0 \le v_{n+1} \le 2$$

- **برهان أن المتتالية (v_n) متزايدة تماما**

$$v_{n+1} - v_n = \frac{4}{4 - v_n} - v_n = \frac{v_n^2 - 4v_n + 4}{4 - v_n} = \frac{(v_n - 2)^2}{4 - v_n}$$

$v_n \le 2 \Rightarrow 4 - v_n \ge 2 \Rightarrow v_{n+1} - v_n \ge 0 \Rightarrow$ المتتالية (v_n) متزايدة

بما أنّ المتتالية (v_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 ، نستنتج أنها متقاربة

- **برهان بالتراجع أن : $v_n = \frac{6n-2}{3n+2}$**

تحقيق التراجع : $v_0 = -1$

فرض التراجع : نفرض أنّ $v_n = \frac{6n-2}{3n+2}$

برهان التراجع : نبرهن أنّ $v_{n+1} = \frac{6n+4}{3n+5}$

$$v_{n+1} = \frac{4}{4 - v_n} = \frac{4}{4 - \frac{6n-2}{3n+2}} = \frac{4(3n+2)}{6n+10} = \frac{4(3n+2)}{2(3n+5)} = \boxed{\frac{6n+4}{3n+5}}$$

حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{6n+4}{3n+5} = \lim_{n \to +\infty} \frac{6n}{3n} = \boxed{2}$$

<u>حل التمرين 16.</u>

$z_3 = [r_3, \theta_3]$ ، $z_2 = [r_2, \theta_2]$ ، $z_1 = [r_1, \theta_1]$

1. ايجاد الأعداد المركبة z_1 ، z_2 ، z_3:

<u>طريقة أولى:</u>

$$\begin{cases} z_1 \times z_2 \times z_3 = 4\sqrt{2}(1+i) \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 3\theta_2 \\ r_1 \times r_2 \times r_3 = r_2^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (r_1 \times r_2 \times r_3)e^{(\theta_1+\theta_2+\theta_3)i} = 8e^{i\frac{\pi}{4}} \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 3\theta_2 \\ r_1 \times r_2 \times r_3 = r_2^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow r_2^3 e^{i(3\theta_2)} = 8e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \begin{cases} r_2^3 = 8 \\ 3\theta_2 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_2 = 2 \\ \theta_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

$$0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta_1 + \frac{\pi}{2} < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta_2 < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} < \pi$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{12} + \frac{2k}{3} < 1 \Rightarrow 0{,}6 < k < 1{,}4 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_2 = \frac{3\pi}{4}}$$

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{r_2}{q} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ \theta_1 = \theta_2 - r = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} ; \begin{cases} r_3 = r_2 \times q = 2 \times 2 = 4 \\ \theta_3 = \theta_2 + r = \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{5\pi}{4} \end{cases}$$

$$\boxed{\boldsymbol{z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i ; z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i \; ; \; z_3 = 4e^{i\frac{5\pi}{4}} = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i}}$$

طريقة ثانية:

$$\begin{cases} z_1 \times z_2 \times z_3 = 4\sqrt{2}(1+i) \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \theta_1 + \theta_1 + \dfrac{\pi}{2} + \theta_1 + \pi \\ r_1 \times r_2 \times r_3 = r_1 \times 2r_1 \times 4r_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (r_1 \times r_2 \times r_3)e^{(\theta_1+\theta_2+\theta_3)i} = 8e^{i\frac{\pi}{4}} \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 3\theta_1 + \dfrac{3\pi}{2} \\ r_1 \times r_2 \times r_3 = 8r_1^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 8r_1^3 e^{i\left(3\theta_1 + \frac{3\pi}{2}\right)} = 8e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \begin{cases} 8r_1^3 = 8 \\ 3\theta_1 + \dfrac{3\pi}{2} = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ \theta_1 = -\dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

$$0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < -\frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < -\frac{5}{12} + \frac{2k}{3} < \frac{1}{2}$$

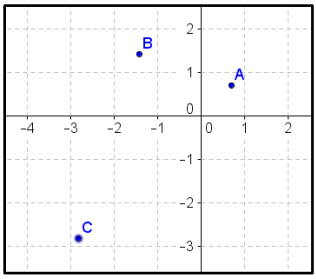
$$\Rightarrow 0{,}6 < k < 1{,}4 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow \theta_1 = -\frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \boxed{\theta_1 = \frac{\pi}{4}}$$

$$\begin{cases} r_2 = r_1 \times q = 1 \times 2 = 2 \\ \theta_2 = \theta_1 + r = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases} ; \begin{cases} r_3 = r_1 \times q^2 = 1 \times 2^2 = 4 \\ \theta_3 = \theta_1 + 2r = \dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{5\pi}{4} \end{cases}$$

$$\boxed{\boldsymbol{z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i ; z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i \; ; \; z_3 = 4e^{i\frac{5\pi}{4}} = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i}}$$

2. انشاء النقط A ، B و C **واستنتاج** $\|\overrightarrow{OA}\|$، $\|\overrightarrow{OB}\|$، $\|\overrightarrow{OC}\|$

$$\|\overrightarrow{OA}\| = |z_1| = 1 \; ; \; \|\overrightarrow{OB}\| = |z_2| = 2 \; ; \; \|\overrightarrow{OC}\| = |z_3| = 4$$



3. تعيين مجموعة النقط M التي تحقق: $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OM^2 = 22$

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OM^2 = 22 \Rightarrow 1 + 4 + 16 + OM^2 = 22$$
$$\Rightarrow OM^2 = 1$$

مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1

4. كتابة العدد المركب L على الشكل الجبري

$$L = \frac{z + z_2}{z} = \frac{x + iy - \sqrt{2} + \sqrt{2}i}{x + iy} = \frac{(x - \sqrt{2}) + (y + \sqrt{2})i}{x + iy}$$
$$= \frac{[(x - \sqrt{2}) + (y + \sqrt{2})i](x - iy)}{x^2 + y^2}$$
$$= \frac{[x(x - \sqrt{2}) + y(y + \sqrt{2})] + [x(y + \sqrt{2}) - y(x - \sqrt{2})]i}{x^2 + y^2}$$

$$\boxed{L = \frac{x^2 + y^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y}{x^2 + y^2} + \frac{\sqrt{2}x + \sqrt{2}y}{x^2 + y^2}i}$$

5. تعيين مجموعة النقط حتى يكون العدد L حقيقيا

$$L \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0 \\ x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ (x; y) \neq (0; 0) \end{cases}$$

مجموعة النقط حتى يكون العدد L حقيقيا هي المستقيم ذي المعادلة $y = -x$ (المنصّف الثاني) باستثناء المبدأ

حل التمرين 17.

$$\boldsymbol{\ln u_3 + 2\ln\sqrt{u_6} = 11 \ ; \ \ln u_3 - \ln u_2 = 1}$$

1. تعيين أساس المتتالية (u_n) و حدها الأول u_0

$$\ln u_3 - \ln u_2 = 1 \Rightarrow \ln\frac{u_3}{u_2} = \ln e \Rightarrow \frac{u_3}{u_2} = e \Rightarrow \boxed{q = e}$$
$$\ln u_3 + \ln u_6 = 11 \Rightarrow \ln(u_3 . u_6) = \ln(e^{11}) \Rightarrow u_3 . u_6 = e^{11}$$
$$\Rightarrow u_0 . e^3 . u_0 . e^6 = e^{11} \Rightarrow u_0^2 . e^9 = e^{11} \Rightarrow {u_0}^2 = \frac{e^{11}}{e^9} = e^2 \Rightarrow \boxed{u_0 = e}$$

2. كتابة u_n بدلالة n ، ثم حساب المجموع : $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

$$u_n = u_0 . q^n = e . e^n \Rightarrow \boxed{u_n = e^{n+1}}$$
$$S = u_1 + \cdots + u_n = u_1\left(\frac{1 - q^n}{1 - q}\right) \Rightarrow \boxed{S = e^2\left(\frac{1 - e^n}{1 - e}\right)}$$

(v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = 3\ln u_{n+1} - \ln u_n$

3. اثبات أن (v_n) متتالية حسابية ، يُطلب تعيين أساسها و حدها الأول

$v_n = 3\ln u_{n+1} - \ln u_n = 3\ln e^{n+2} - \ln e^{n+1} = 3(n+2) - (n+1)$

$v_n = 2n + 5$

$v_{n+1} - v_n = 2n + 7 - 2n - 5 = 2$

منه، نستنتج أنّ (v_n) متتالية حسابية أساسها $\boxed{r = 2}$ و حدها الأول $\boxed{v_0 = 5}$

4. حساب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$

$$S_n = v_0 + \cdots + v_{n-1} = \frac{n}{2}(v_0 + v_{n-1}) = \frac{n}{2}(5 + 2n + 3) = \boxed{n(n+4)}$$

حل التمرين 18.

1) تعيين u_0 و q

$3u_0^2 = u_3 - u_1 \Rightarrow 3u_0^2 = u_0q^3 - u_0q \Rightarrow 3u_0 = q(q^2 - 1)$

$\begin{cases} q \mid 3u_0 \\ PGCD(q; u_0) = 1 \end{cases} \Rightarrow q \mid 3 \Rightarrow q = 1$ أو $q = 3$

بما أنّ $u_0 \neq 0$ فإنّ $q \neq 1$ منه $\boxed{q = 3}$

$3u_0 = q(q^2 - 1) \Rightarrow 3u_0 = 3(8) \Rightarrow \boxed{u_0 = 8}$

2) $q = 3$ ، $u_0 = 8$

أ- حساب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3

$\boxed{u_1 = u_0.q = 24}$; $\boxed{u_2 = u_1.q = 72}$; $\boxed{u_3 = u_2.q = 216}$

ب- تعيين عبارة u_n بدلالة n

$u_n = u_0.q^n \Rightarrow \boxed{u_n = 8.3^n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} 8.3^n = +\infty \Rightarrow$ المتتالية (u_n) متباعدة

3) $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

أ- التحقق أنّ: $S_n = 4(3^{n+1} - 1)$

$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 + u_0.q + \cdots + u_0.q^n$

$S_n = u_0(1 + q + \cdots + q^n) = u_0(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1})$

$$\boxed{S_n = 8\left(\frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1}\right) = 4(3^{n+1} - 1)}$$

ب- حساب P_n بدلالة n

$P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n = u_0 \times u_0.q \times u_0.q^2 \times \ldots \times u_0.q^n$

$P_n = u_0^{n+1}.q^{1+2+\cdots+n} = u_0^{n+1}.q^{\frac{n(n+1)}{2}} \Rightarrow \boxed{P_n = 8^{n+1}.3^{\frac{n(n+1)}{2}}}$

ج- دراسة بواقي قسمة 3^n على 13

$3^0 \equiv 1[13]\ ;\ 3^1 \equiv 3[13]\ ;3^2 \equiv 9[13]\ ;3^3 \equiv 1[13]$

$\boxed{3^{3k} \equiv 1[13]\ ;3^{3k+1} \equiv 3[13]\ ;3^{3k+2} \equiv 9[13]}$

د- تعيين قيم n حيث $S_n \equiv 0[13]$

$S_n \equiv 0[13] \Rightarrow 4(3^{n+1}-1) \equiv 0[13]$

$n+1$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$	
$3^{n+1} \equiv$	1	3	9	[13]
$3^{n+1}-1 \equiv$	0	2	8	[13]
$4(3^{n+1}-1) \equiv$	0	8	6	[13]

$S_n \equiv 0[13] \Rightarrow n+1 = 3k \Rightarrow \boxed{n = 3k-1\ ;k \in \mathbb{N}^*}$

حل التمرين 19.

$$z' = \frac{1}{2}(1+i)z + 1$$

1. تبرير أنّ f تشابه مباشر يُطلب تعيين مركزه Ω ذو اللاحقة ω ، نسبته k وزاويته θ

$$a = \frac{1}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}\ ;\ \omega = \frac{b}{1-a}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}(1+i)} = \frac{2}{1-i} = \boxed{1+i}$$

منه ، نستنتج أنّ f تشابه مباشر مركزه $\Omega(1;1)$ ، نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$

2. نسمي A_0 النقطة O ومن أجل كل عدد طبيعي n نضع : $A_{n+1} = f(A_n)$

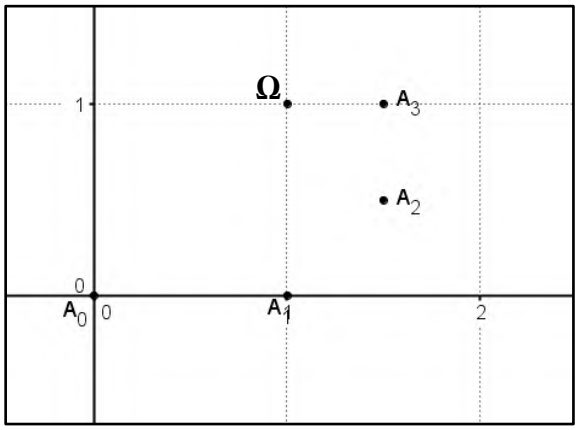
أ. تعيين لاحقات النقط A_1 ، A_2 ، A_3

$$A_1 = f(A_0) \Rightarrow z_1 = \frac{1}{2}(1+i)z_0 + 1 \Rightarrow \boxed{z_1 = 1}$$

$$A_2 = f(A_1) \Rightarrow z_2 = \frac{1}{2}(1+i)z_1 + 1 = \frac{1}{2}(1+i) + 1 \Rightarrow \boxed{z_2 = \frac{1}{2}(3+i)}$$

$$A_3 = f(A_2) \Rightarrow z_3 = \frac{1}{2}(1+i)z_2 + 1 = \frac{1}{4}(1+i)(3+i) + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{z_3 = \frac{3}{2} + i}$$



ب. بيان أنّ المتتالية (u_n) هندسية

$$\begin{cases} u_{n+1} = \Omega A_{n+1} \\ A_{n+1} = f(A_n) \end{cases} \Rightarrow \Omega A_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega A_n \Rightarrow \boxed{u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n}$$

نستنتج أنّ المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ وحدّها الأول $u_0 =$

$$\Omega A_0 = |\omega| = |1 + i| = \sqrt{2}$$

بيان أنّ عبارة الحد العام u_n هي : $u_n = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

$$u_n = u_0 q^n = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \Rightarrow \boxed{u_n = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}$$

ج. تعيين رتبة n_0 حتى تنتمي كل النقط A_n إلى القرص الذي مركزه Ω ونصف قطره $0,1$

تنتمي النقط A_n إلى القرص الذي مركزه Ω ونصف قطره $0,1$ إذا وفقط إذا كان $\Omega A_n \leq 0,1$

$$\Omega A_n \leq 0,1 \Rightarrow u_n \leq 0,1 \Rightarrow \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leq 0,1 \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leq \frac{0,1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leq \ln\left(\frac{0,1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow n \underbrace{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{<0} \leq \ln\left(\frac{0,1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{0,1}{\sqrt{2}}\right)}{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$\Rightarrow n \geq 7,64 \Rightarrow \boxed{n_0 = 8}$$

3. أ. تعيين طبيعة المثلث $\Omega A_0 A_1$

$$\begin{cases} \Omega A_1 = A_0 A_1 = 1 \\ (\Omega A_1) \perp (A_0 A_1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } \Omega A_0 A_1 \text{ قائم في } A_1 \text{ ومتساوي الساقين}}$$

استنتاج من أجل كل عدد طبيعي n طبيعة المثلث $\Omega A_n A_{n+1}$

بما أنّ المثلث $\Omega A_n A_{n+1}$ هو صورة المثلث $\Omega A_0 A_1$ بالتشابه المباشر $f^n = \underbrace{fofo\dots of}_{n \text{ مرة}}$ ، وعلما أنّ التشابه المباشر يحافظ على الأشكال ،

نستنتج أنّ المثلث $\Omega A_n A_{n+1}$ قائم في A_{n+1} ومتساوي الساقين

ب. كتابة l_n بدلالة n وحساب $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n$

$$l_n = \Omega A_1 + \Omega A_2 + \cdots + \Omega A_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

$$l_n = \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \boxed{\frac{2}{2-\sqrt{2}}\left[1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right]}$$

$$\lim_{n\to+\infty} l_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{2-\sqrt{2}}\left[1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right] = \boxed{\frac{2}{2-\sqrt{2}}} \; ; \; \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \to 0\right]$$

حل التمرين 20.

1. **تعيين u_0 وr بحيث :** $\begin{cases} u_0 + r = 4 \\ u_0^2 = u_{10} - u_1 \end{cases}$

$$u_0^2 = u_{10} - u_1 \Rightarrow u_0^2 = u_0 + 10r - u_0 - r \Rightarrow u_0^2 = 9r \Rightarrow r = \frac{u_0^2}{9}$$

$$u_0 + r = 4 \Rightarrow u_0 + \frac{u_0^2}{9} = 4 \Rightarrow u_0^2 + 9u_0 - 36 = 0 \Rightarrow \boxed{u_0 = 3}$$

($u_0 = -12$ مرفوضة لأنّ $u_0 \geq 0$)

$$u_0 + r = 4 \Rightarrow \boxed{r = 1}$$

2. **حساب المجموع :** $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

$$S_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n) = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_0 + nr) = \boxed{\frac{(n+1)(n+6)}{2}}$$

3. $t_n = -\frac{1}{u_n}$ ، $v_n = e^{u_n}$

أ. بيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية

$$v_{n+1} = e^{u_{n+1}} = e^{u_n + r} = e^{u_n + 1} = e.e^{u_n} \Rightarrow \boxed{v_{n+1} = e.v_n}$$

منه ، المتتالية (v_n) هندسية أساسها e وحدّها الأول $v_0 = e^{u_0} = e^3$

حساب عبارة P_n بدلالة n ، حيث : $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n = v_0 \times e.v_0 \times \ldots \times e^n.v_0$$

$$P_n = v_0^{n+1}.e^{1+\cdots+n} = e^{3(n+1)}.e^{\frac{n(n+1)}{2}} = \boxed{e^{(n+1)\left(\frac{1}{2}n+3\right)}}$$

ب. تحديد اتجاه تغيّر كل من المتتاليتين (v_n) و (t_n)

بما أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها e فهي إذن متزايدة $(e > 1)$

$$t_{n+1} - t_n = -\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_n} = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n.u_{n+1}} = \frac{r}{u_n.u_{n+1}} = \frac{1}{u_n.u_{n+1}}$$

بما أنّ حدود المتتالية (u_n) موجبة ، فإنّ $u_n.u_{n+1} > 0$ ، أي:

$t_{n+1} - t_n > 0$ ، منه المتتالية (t_n) متزايدة.

حل التمرين 21.

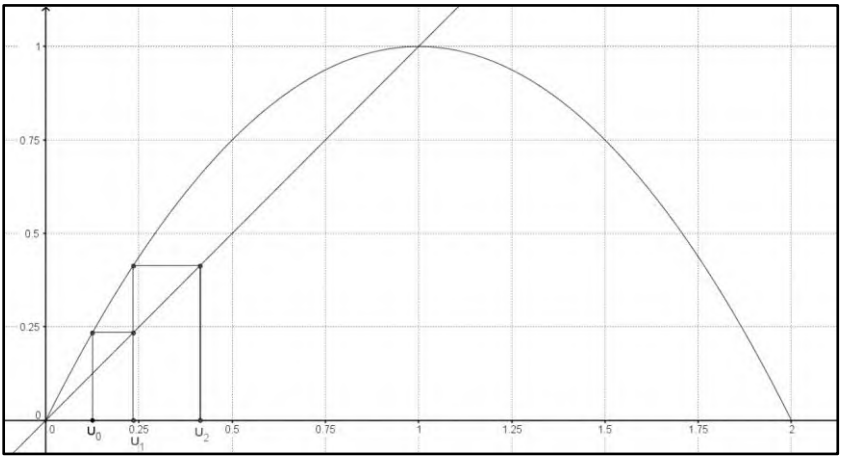
$$u_{n+1} = (2 - u_n)u_n \text{ ، } u_0 = \frac{1}{8}$$

1. أ. انشاء المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيم (d)

$$f(x) = (2-x)x = -x^2 + 2x \, ; f'(x) = -2x + 2 = 2(-x+1)$$

x	0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

ب. تمثيل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 و u_2



التخمين بالنسبة لاتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها

من المنحنى البياني نخمن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة نحو العدد 1

2. أ. برهان بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$

- تحقيق التراجع : $0 < u_0 < 1$ (محقّقة لأنّ $u_0 = \frac{1}{8}$)
- فرض التراجع : نفرض أنّ $0 < u_n < 1$
- برهان التراجع : نبرهن أنّ $0 < u_{n+1} < 1$

$$0 < u_n < 1 \Rightarrow 0 < f(u_n) < 1 \Rightarrow 0 < u_{n+1} < 1$$

منه ، نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$

ب. بيان أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = (2 - u_n)u_n - u_n = u_n(2 - u_n - 1) = u_n(1 - u_n)$$

$$0 < u_n < 1 \Rightarrow -1 < -u_n < 0 \Rightarrow 0 < 1 - u_n < 1$$

$$\Rightarrow 0 < u_n(1 - u_n) < 1 \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0$$

منه ، المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

ج. استنتاج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة

المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى ، فهي متقاربة

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l \Rightarrow (2 - l)l = l \Rightarrow l(1 - l) = 0$$

$$\Rightarrow l = 0 \text{ أو } l = 1 \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1} \quad (u_n > 0 \text{ مرفوضة لأنّ})$$

3. $v_n = \ln(1 - u_n)$

أ. برهان أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول

$$v_{n+1} = \ln(1 - u_{n+1}) = \ln[(1 - (2 - u_n)u_n)] = \ln(1 - 2u_n + u_n^2)$$

$$= \ln(1 - u_n)^2 = 2\ln(1 - u_n) \Rightarrow \boxed{v_{n+1} = 2v_n}$$

منه ، المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 وحدها الأول $v_0 = \ln\left(\frac{7}{8}\right)$

ب. كتابة v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 . q^n = \boxed{\ln\left(\frac{7}{8}\right) . 2^n}$$

استنتاج كتابة u_n بدلالة n

$$v_n = \ln(1 - u_n) \Rightarrow 1 - u_n = e^{v_n} \Rightarrow u_n = 1 - e^{v_n} = \boxed{1 - e^{\ln\left(\frac{7}{8}\right).2^n}}$$

ج. حساب المجموع S_n بدلالة n

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0\left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\right) = \boxed{(2^{n+1} - 1)\ln\left(\frac{7}{8}\right)}$$

د. استنتاج الجداء P_n بدلالة n

$$P_n = (1-u_0)(1-u_1)\times\ldots\times(1-u_n)$$
$$\ln P_n = \ln[(1-u_0)(1-u_1)\times\ldots\times(1-u_n)]$$
$$\ln P_n = \underbrace{\ln(1-u_0)}_{v_0} + \underbrace{\ln(1-u_1)}_{v_1} + \cdots + \underbrace{\ln(1-u_n)}_{v_n} = S_n \Rightarrow P_n = e^{S_n}$$
$$\Rightarrow \boxed{P_n = e^{(2^{n+1}-1)\ln\left(\frac{7}{8}\right)}}$$

حل التمرين 22.

$$u_{n+1} = 3u_n - 4 \text{ ، } u_0 = \frac{11}{4}$$

1. حساب الحدين u_1 و u_2

$$u_1 = 3u_0 - 4 = \frac{33}{4} - 4 = \boxed{\frac{17}{4}} \text{ ; } u_2 = 3u_1 - 4 = \frac{51}{4} - 4 = \boxed{\frac{35}{4}}$$

2. برهان أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما

$$u_{n+1} - u_n = 3u_n - 4 - u_n = 2u_n - 4 = 2(u_n - 2)$$

نبرهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 2$

- تحقيق التراجع : $u_0 > 2$ (محقّقة $u_0 = \frac{11}{4}$)
- فرض التراجع : نفرض أنّ $u_n > 2$
- برهان التراجع : نبرهن أنّ $u_{n+1} > 2$

$$u_n > 2 \Rightarrow 3u_n > 6 \Rightarrow 3u_n - 4 > 2 \Rightarrow u_{n+1} > 2$$

بما أنّ $u_n > 2$ ، فإنّ $2(u_n - 2) > 0$ ، أي $u_{n+1} - u_n > 0$ ، منه المتتالية (u_n) متزايدة تماما

3. $\alpha \in \mathbb{R}$ ، $v_n = 4u_n + \alpha$

أ. تعيين العدد الحقيقي α حيث تكون المتتالية (v_n) هندسية

$$v_{n+1} = 4u_{n+1} + \alpha = 4(3u_n - 4) + \alpha = 12u_n - 16 + \alpha$$
$$= 3\left(4u_n + \frac{\alpha - 16}{3}\right)$$

تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا وفقط إذا $\frac{\alpha-16}{3} = \alpha$ ، أي $\alpha - 16 = 3\alpha$

منه $\boxed{\alpha = -8}$

ب. كتابة v_n و u_n بدلالة n

$$v_0 = 4u_0 - 8 = 3 \text{ ; } v_n = v_0.q^n = 3.3^n \Rightarrow \boxed{v_n = 3^{n+1}}$$

$$v_n = 4u_n - 8 \Rightarrow u_n = \frac{1}{4}v_n + 2 \Rightarrow \boxed{u_n = \frac{3^{n+1}}{4} + 2}$$

ج. بيان أنّ المتتالية (u_n) محدودة

بما أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ، نستنتج أنّ المتتالية (u_n) غير محدودة (محدودة من الأسفل فقط)

د. برهان أنّ المتتالية (w_n) متقاربة

$$w_n = u_0 + \frac{u_1}{4} + \frac{u_2}{4^2} + \cdots + \frac{u_n}{4^n}$$
$$= \frac{1}{4}v_0 + 2 + \frac{1}{4^2}v_1 + \frac{2}{4} + \frac{1}{4^3}v_2 + \frac{2}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{n+1}}v_n + \frac{2}{4^n}$$
$$= \frac{1}{4}v_0 + \frac{3}{4^2}v_0 + \frac{3^2}{4^3}v_0 + \cdots + \frac{3^n}{4^{n+1}}v_0 + 2 + \frac{2}{4} + \frac{2}{4^2} + \cdots \frac{2}{4^n}$$
$$= \frac{v_0}{4}\left(1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) + 2\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots \frac{1}{4^n}\right)$$
$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}}\right) + 2\left(\frac{1 - \frac{1}{4^{n+1}}}{1 - \frac{1}{4}}\right)$$
$$= 3\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right] + \frac{8}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right)$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 3 + \frac{8}{3} = \frac{17}{3} \Rightarrow$ المتتالية (w_n) متقاربة

حل التمرين 23.

1. أ. حل المعادلة التفاضلية : $2y' - y = 0$

$$2y' - y = 0 \Rightarrow y' = \frac{1}{2}y \Rightarrow \boxed{y = ce^{\frac{1}{2}x}}$$

ب. تعيين الحل f الذي يحقق : $f(2) = 1$

$$f(2) = 1 \Rightarrow ce = 1 \Rightarrow c = e^{-1} \Rightarrow \boxed{f(x) = e^{\frac{1}{2}x - 1}}$$

2. $u_n = e^{\frac{n-2}{2}}$

أ. برهان أنّ المتتالية (u_n) هندسية يُطلب تعيين حدها الأول u_0 وأساسها q

$$u_{n+1} = e^{\frac{n-1}{2}} = e^{\frac{n-2}{2}+\frac{1}{2}} = e^{\frac{n-2}{2}}.e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{u_{n+1} = \sqrt{e}.u_n}$$

منه ، المتتالية (u_n) هندسية حدها الأول $u_0 = e^{-1}$ وأساسها $q = \sqrt{e}$

ب. حساب المجموع S_1 بدلالة n

$$S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) \Rightarrow \boxed{S_1 = e^{-1}\left(\frac{\sqrt{e}^n - 1}{\sqrt{e} - 1}\right)}$$

3. $v_n = \ln(u_n)$

أ. برهان أنّ المتتالية (v_n) حسابية يُطلب تعيين حدها الأول v_0 وأساسها r

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln\left(\sqrt{e}.u_n\right) = \ln\sqrt{e} + \ln u_n \Rightarrow \boxed{v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}}$$

منه، المتتالية (v_n) حسابية حدها الأول $v_0 = \ln e^{-1} = -1$ وأساسها $r = \frac{1}{2}$

ب. حساب بدلالة n المجموع : $S_2 = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

$$S_2 = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n) = \frac{n+1}{2}(v_0 + v_0 + nr)$$

$$S_2 = \frac{n+1}{2}\left(-2 + \frac{1}{2}n\right) = \boxed{\frac{(n+1)(n-4)}{4}}$$

ج. تعيين قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون $S_2 = \frac{3}{2}$

$$S_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{(n+1)(n-4)}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow (n+1)(n-4) = 6$$

$$\Rightarrow n^2 - 3n - 10 = 0 \Rightarrow \boxed{n = 5}$$

4. حساب الجداء P بدلالة n

$$P = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n = u_0 \times u_0.q \times \ldots \times u_0.q^n = u_0^{n+1}.q^{1+2+\cdots+n}$$

$$= u_0^{n+1}.q^{\frac{n(n+1)}{2}} = e^{-(n+1)}.\sqrt{e}^{\frac{n(n+1)}{2}} = e^{-(n+1)}.e^{\frac{n(n+1)}{4}}$$

$$= e^{\frac{n(n+1)}{4}-(n+1)} = \boxed{e^{\frac{(n+1)(n-4)}{4}}}$$

حل التمرين 24.

$$v_n = \frac{1}{2}\ln u_n + \frac{1}{2}\text{ ، }u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}}\text{ ، }u_0 = e^2$$

1. بيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، وحساب حدها الأول

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}\ln u_{n+1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln\sqrt{\frac{u_n}{e}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{u_n}{e}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{u_n}{e}\right) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}(\ln u_n - 1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\ln u_n + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln u_n + \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{2}v_n}$$

منه ، المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، وحدها الأول $v_0 = \frac{1}{2}\ln u_0 + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}$

2. كتابة v_n بدلالة n

$$v_n = v_0.q^n = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{\frac{3}{2^{n+1}}}$$

استنتاج عبارة u_n بدلالة n

$$v_n = \frac{1}{2}\ln u_n + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln u_n = v_n - \frac{1}{2} \Rightarrow \ln u_n = 2v_n - 1 = \frac{3}{2^n} - 1$$

$$\ln u_n = 3.2^{-n} - 1 \Rightarrow \boxed{u_n = e^{3.2^{-n}-1}}$$

3. حساب المجموع S_n بدلالة n

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n = -3\left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right)}$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} -3\left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right) = \boxed{3}\,;\ \left(\frac{1}{2^{n+1}} \to 0\right)$$

4. حساب الجداء P_n بدلالة n

$$P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n = e^{2v_0-1} \times e^{2v_1-1} \times \ldots \times e^{2v_n-1}$$

$$P_n = e^{2(v_0+v_1+\cdots+v_n)-(n+1)} = e^{2S_n-(n+1)} = \frac{e^{2S_n}}{e^{n+1}} \Rightarrow \boxed{P_n = \frac{e^{-6\left(\frac{1}{2^{n+1}}-1\right)}}{e^{n+1}}}$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-6\left(\frac{1}{2^{n+1}}-1\right)}}{e^{n+1}} \begin{matrix} \to e^6 \\ \to +\infty \end{matrix} = \boxed{0}$$

<u>حل التمرين 25.</u>

$u_{n+1} = 6u_n - 9$ ، $u_0 = 16$

1) أ. حساب بواقي قسمة كل من u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 على 7

$$u_0 = 16 \Rightarrow u_0 \equiv 2[7]$$

$$u_1 = 6u_0 - 9 = 87 = 12 \times 7 + 3 \Rightarrow u_1 \equiv 3[7]$$

$$u_2 = 6u_1 - 9 = 513 = 73 \times 7 + 2 \Rightarrow u_2 \equiv 2[7]$$

$$u_3 = 6u_2 - 9 = 3069 = 438 \times 7 + 3 \Rightarrow u_3 \equiv 3[7]$$

ب. تخمين قيمة للعدد a و قيمة للعدد b بحيث: $u_{2k} \equiv a[7]$ و $u_{2k+1} \equiv b[7]$

$$u_{2k} \equiv 2[7] \Rightarrow \boxed{a = 2}\,;\ u_{2k+1} \equiv 3[7] \Rightarrow \boxed{b = 3}$$

2) أ. برهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2} \equiv u_n[7]$

$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9 = 6(6u_n - 9) - 9 = 36u_n - 72$$

$$\begin{cases} 36 \equiv 1[7] \\ 72 \equiv 0[7] \end{cases} \Rightarrow 36u_n - 72 \equiv u_n[7] \Rightarrow \boxed{u_{n+2} \equiv u_n[7]}$$

ب. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي k ، $u_{2k} \equiv 2[7]$

- تحقيق التراجع: $u_0 \equiv 2[7]$
- فرض التراجع: نفرض أنّ $u_{2k} \equiv 2[7]$
- برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_{2k+2} \equiv 2[7]$

$$\begin{cases} u_{2k} \equiv 2[7] \\ u_{n+2} \equiv u_n[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{2k} \equiv 2[7] \\ u_{2k+2} \equiv u_{2k}[7] \end{cases} \Rightarrow u_{2k+2} \equiv 2[7]$$

نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا : $\boxed{u_{2k} \equiv 2[7]}$

استنتاج أنّ : $u_{2k+1} \equiv 3[7]$

$$\begin{cases} u_{2k+1} = 6u_{2k} - 9 \\ u_{2k} \equiv 2[7] \end{cases} \Rightarrow u_{2k+1} \equiv 6(2) - 9[7] \Rightarrow \boxed{u_{2k+1} \equiv 3[7]}$$

3) $v_n = u_n - \frac{9}{5}$

أ. بيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية ، يُطلب تعيين أساسها و حدها الأول

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{9}{5} = 6u_n - 9 - \frac{9}{5} = 6u_n - \frac{54}{5} = 6\left(u_n - \frac{9}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{n+1} = 6v_n}$$

نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية ، أساسها $q = 6$ وحدها الأول :

$$v_0 = u_0 - \frac{9}{5} = 16 - \frac{9}{5} = \frac{71}{5}$$

ب. حساب بدلالة n كلا من u_n و S_n

$$v_n = v_0 . q^n = \frac{71}{5} \times 6^n \; ; u_n = v_n + \frac{9}{5} \Rightarrow \boxed{u_n = \frac{71}{5} \times 6^n + \frac{9}{5}}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = v_0 + \frac{9}{5} + v_1 + \frac{9}{5} + \cdots + v_n + \frac{9}{5}$$

$$S_n = v_0\left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\right) + \frac{9}{5}(n+1) = \frac{71}{5}\left(\frac{6^{n+1} - 1}{6 - 1}\right) + \frac{9}{5}(n+1)$$

$$\boxed{S_n = \frac{71}{25}(6^{n+1} - 1) + \frac{9}{5}(n+1)}$$

حل التمرين 26.

$q < u_0$ ، $u_5 - 31u_1 - 6u_0^3 = 0$ ... (1)

1) التحقق أنّ المعادلة (1) تكافئ : $q(q^4 - 31) = 6u_0^2$

$$u_5 - 31u_1 - 6u_0^3 = 0 \Rightarrow u_0.q^5 - 31u_0.q - 6u_0^3 = 0$$
$$\Rightarrow q^5 - 31q - 6u_0^2 = 0 \Rightarrow \boxed{q(q^4 - 31) = 6u_0^2}$$

2) تعيين u_0 و q علما أنّهما أوليان فيما بينهما

$$\begin{cases} q \mid 6u_0^2 \\ PGCD(q; u_0) = 1 \end{cases} \Rightarrow q \mid 6 \Rightarrow q \in \{1; 2; 3; 6\}$$

$q = 1: u_0^2 = -5$(مستحيل)؛ $q = 2: u_0^2 = -5$(مستحيل)

$\boxed{q = 3: u_0^2 = 25 \Rightarrow u_0 = 5}$

$q = 6: u_0^2 = 1265$(مستحيل لأنه ليس مربع تام)

3) كتابة الحد u_{30} في نظام التعداد ذي الأساس 3

$$u_{30} = u_0.q^{30} = 5.3^{30} = (3 + 2).3^{30}$$
$$u_{30} = 3^{31} + 2.3^{30} + 0.3^{29} + 0.3^{28} + \cdots + 0 = \boxed{\overline{12\underbrace{000\ldots000}_{30\text{ صفرا}}}^3}$$

4) $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

أ- حساب المجموع S_n بدلالة n

$$S_n = u_0 + u_0.q + \cdots + u_0.q^n = u_0(1 + q + \cdots + q^n)$$
$$S_n = u_0\left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\right) = \boxed{\frac{5}{2}(3^{n+1} - 1)}$$

ب- دراسة بواقي قسمة 3^n على 7

$3^0 \equiv 1[7]$; $3^1 \equiv 3[7]$; $3^2 \equiv 2[7]$; $3^3 \equiv 6[7]$; $3^4 \equiv 4[7]$

$3^5 \equiv 5[7]$; $3^6 \equiv 1[7]$

$$\boxed{\begin{matrix} 3^{6k} \equiv 1[7]\ ;\ 3^{6k+1} \equiv 3[7]\ ;\ 3^{6k+2} \equiv 2[7]\ ;\ 3^{6k+3} \equiv 6[7] \\ 3^{6k+4} \equiv 4[7]\ ;\ 3^{6k+5} \equiv 5[7] \end{matrix}}$$

ج- تعيين قيم n حيث $S_n \equiv 0[7]$

$$S_n \equiv 0[7] \Rightarrow 5\left(\frac{3^{n+1} - 1}{2}\right) \equiv 0[7]$$
$$\Rightarrow \frac{3^{n+1} - 1}{2} \equiv 0[7]$$ (لأنّ 5 أولي مع 7)
$$\Rightarrow 3^{n+1} - 1 \equiv 0[7]$$ (لأنّ $3^{n+1} - 1$ زوجي و 2 أولي مع 7)
$$\Rightarrow 3^{n+1} \equiv 1[7] \Rightarrow n + 1 = 6k \Rightarrow \boxed{n = 6k - 1; k \in \mathbb{N}^*}$$

حل التمرين 27.

$u_{n+1} = 5u_n - 6$ ، $u_0 = 14$

1. حساب u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4

$\boxed{u_1 = 64\ ;\ u_2 = 314\ ;\ u_3 = 1564\ ;\ u_4 = 7814}$

يظهر أنّ الرقمين الأخيرين للعدد u_n هما 64 من أجل n فردي و 14 من أجل n زوجي

2. برهان أنّ $u_{n+2} \equiv u_n[4]$

$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5(5u_n - 6) - 6 = 25u_n - 36$

$\begin{cases} 25 \equiv 1[4] \\ 36 \equiv 0[4] \end{cases} \Rightarrow 25u_n - 36 \equiv u_n[4] \Rightarrow \boxed{u_{n+2} \equiv u_n[4]}$

استنتاج أنّ: $u_{2k} \equiv 2[4]$ و $u_{2k+1} \equiv 0[4]$

نبرهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا : $u_{2k} \equiv 2[4]$

- تحقيق التراجع: $u_0 = 14 = 4(3) + 2 \Rightarrow u_0 \equiv 2[4]$. منه القضية محققة من أجل $k = 0$
- فرض التراجع: نفرض أنّ القضية محققة من أجل عدد طبيعي k أي: $u_{2k} \equiv 2[4]$
- برهان التراجع: نبرهن أنّ القضية محققة من أجل العدد الطبيعي $k + 1$ أي : $u_{2k+2} \equiv 2[4]$

$\begin{cases} u_{2k} \equiv 2[4] \\ u_{n+2} \equiv u_n[4] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{2k} \equiv 2[4] \\ u_{2k+2} \equiv u_{2k}[4] \end{cases} \Rightarrow u_{2k+2} \equiv 2[4]$

نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا : $\boxed{u_{2k} \equiv 2[4]}$

$\begin{cases} u_{2k+1} = 5u_{2k} - 6 \\ u_{2k} \equiv 2[4] \end{cases} \Rightarrow u_{2k+1} \equiv 5(2) - 6[4] \Rightarrow \boxed{u_{2k+1} \equiv 0[4]}$

3. برهان بالتراجع أنّ $2u_n = 5^{n+2} + 3$

- تحقيق التراجع: $2u_0 = 28 = 5^2 + 3$ ، منه القضية محققة من أجل $n = 0$
- فرض التراجع: نفرض أنّ القضية محققة من أجل عدد طبيعي n أي: $2u_n = 5^{n+2} + 3$
- برهان التراجع: نبرهن أنّ القضية محققة من أجل العدد الطبيعي $n + 1$ أي: $2u_{n+1} = 5^{n+3} + 3$

$2u_{n+1} = 2(5u_n - 6) = 5(2u_n) - 12 = 5(5^{n+2} + 3) - 12$

$2u_{n+1} = 5^{n+3} + 3 \Rightarrow 2u_{n+1} = 5^{n+3} + 3$

نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $\boxed{2u_n = 5^{n+2} + 3}$

استنتاج أنّ $2u_n \equiv 28[100]$

نبرهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $2u_n \equiv 28[100]$

- تحقيق التراجع: $2u_0 = 5^2 + 3 = 28 \Rightarrow 2u_0 \equiv 28[100]$. منه القضية محققة من أجل $n = 0$
- فرض التراجع: نفرض أنّ القضية محققة من أجل العدد الطبيعي n أي: $2u_n \equiv 28[100]$
- برهان التراجع: نبرهن أنّ القضية محققة من أجل العدد الطبيعي $n+1$ أي: $2u_{n+1} \equiv 28[100]$

$2u_n \equiv 28[100] \Rightarrow 5^{n+2} + 3 \equiv 28[100] \Rightarrow 5^{n+2} \equiv 25[100]$

$2u_{n+1} = 5^{(n+1)+2} + 3 = 5.5^{n+2} + 3 = 5(100k + 25) + 3$

$= 5(100k) + 128 = 100(5k + 1) + 28 = 100k' + 28$

$\Rightarrow 2u_{n+1} \equiv 28[100]$

نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $\boxed{2u_n \equiv 28[100]}$

4. تعيين الرقمين الأخيرين للكتابة العشرية للعدد u_n تبعا لشفعية n

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $2u_n \equiv 28[100]$ ، منه $2u_n = 100k + 28$ أي $u_n = 50k + 14$

- من أجل k زوجي، لدينا: $k = 2k'$ منه $u_n = 100k' + 14$، أي الرقمين الأخيرين هما 14
- من أجل k فردي، لدينا: $k = 2k' + 1$ منه $u_n = 100k' + 64$، أي الرقمين الأخيرين هما 64

و بما أنّ $100k' + 14 \equiv 2[4]$ و $100k' + 64 \equiv 0[4]$، نستنتج من السؤال (2) أنّ الرقمين الأخيرين للكتابة العشرية للعدد u_n هما 14 من أجل n زوجي و64 من أجل n فردي.

حل التمرين 28.

$S\left(A_0 ; \frac{1}{2} ; \frac{3\pi}{4}\right)$ ، $B_{n+1} = S(B_n)$ ، $A_0B_0 = 8\ cm$

1. انشاء النقط B_1 ، B_2 ، B_3 و B_4 (انظر الشكل في نهاية التمرين)

$B_1 = S(B_0) \Rightarrow \boxed{(\overrightarrow{A_0B_0}; \overrightarrow{A_0B_1}) = \frac{3\pi}{4} \text{ و } A_0B_1 = 8\left(\frac{1}{2}\right) = 4\ cm}$

$B_2 = S(B_1) \Rightarrow \boxed{(\overrightarrow{A_0B_1}; \overrightarrow{A_0B_2}) = \frac{3\pi}{4} \text{ و } A_0B_2 = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ cm}$

$B_3 = S(B_2) \Rightarrow \boxed{(\overrightarrow{A_0B_2}; \overrightarrow{A_0B_3}) = \frac{3\pi}{4} \text{ و } A_0B_3 = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1\ cm}$

$B_4 = S(B_3) \Rightarrow \boxed{(\overrightarrow{A_0B_3}; \overrightarrow{A_0B_4}) = \frac{3\pi}{4} \text{ و } A_0B_4 = 1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ cm}$

2. اثبات أنّ المثلثين $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان

$$\begin{cases} B_{n+1} = S(B_n) \\ B_{n+2} = S(B_{n+1}) \end{cases} \Rightarrow A_0B_{n+1}B_{n+2} = S(A_0B_nB_{n+1})$$

بما أنّ المثلث $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ صورة المثلث $A_0B_nB_{n+1}$ بالتشابه S ، فهما إذن متشابهان

3. $u_n = B_nB_{n+1}$

أ. اثبات أنّ (u_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها q

$$u_{n+1} = B_{n+1}B_{n+2} = \frac{1}{2}B_nB_{n+1} = \boxed{\frac{1}{2}u_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

ب. كتابة عبارة u_n بدلالة n و u_0

$$u_n = u_0q^n = \boxed{u_0\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

ج. حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_n$

$$\sum_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right] = 2u_0\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_n = 2u_0 = \boxed{2B_0B_1}$$

4. حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $3x-4y=2$

نلاحظ أنّ الثنائية $(2;1)$ حل خاص للمعادلة $3x-4y=2$

$$\begin{cases} 3x-4y=2 \\ 3(2)-4(1)=2 \end{cases} \Rightarrow 3(x-2) = 4(y-1)$$

$$\begin{cases} 4 \mid 3(x-2) \\ PGCD(3;4)=1 \end{cases} \Rightarrow 4 \mid x-2 \Rightarrow x = 4\alpha+2\,;y = 3\alpha+1\ ;\alpha\in\mathbb{Z}$$

$$\boxed{S = \{4\alpha+2\,;3\alpha+1\}\,;\alpha\in\mathbb{Z}}$$

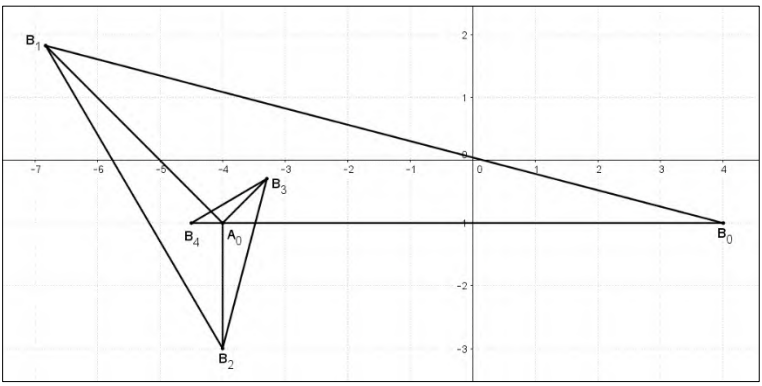
5. تعيين قيّم العدد الطبيعي n التي من أجلها تنتمي النقطة B_n إلى المستقيم (Δ)

$$B_n \in (\Delta) \Rightarrow \left(\overrightarrow{A_0B_0};\overrightarrow{A_0B_n}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{A_0B_0};\overrightarrow{A_0B_1}\right) + \left(\overrightarrow{A_0B_1};\overrightarrow{A_0B_2}\right) + \cdots + \left(\overrightarrow{A_0B_{n-1}};\overrightarrow{A_0B_n}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Rightarrow \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \cdots + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow n\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \frac{3n}{4} = \frac{1}{2} + k$$

$$\Rightarrow 3n - 4k = 2 \Rightarrow \boxed{n = 4\alpha+2\,;\alpha\in\mathbb{N}}$$



حل التمرين 29.

1. تعيين الجذرين التربيعيين للعدد المركّب $3-4i$

$$z=x+iy\,;z^2=3-4i\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=5\\x^2-y^2=3\\2xy=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=4\\y=-\dfrac{2}{x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z_1=2-i\\z_2=-2+i\end{cases}$$

2.

أ. تعيين الأعداد المركّبة a ، b و c

$$a+b+c=6+6i\Rightarrow 3b=6+6i\Rightarrow b=2+2i$$

$$a.b.c=-30+18i\Rightarrow ac=\frac{-30+18i}{2+2i}\Rightarrow (b-r)(b+r)=-3+12i$$

$$\Rightarrow b^2-r^2=-3+12i\Rightarrow r^2=(2+2i)^2+3-12i$$

$$\Rightarrow r^2=3-4i\Rightarrow r=2-i \text{ أو } r=-2+i$$

- $r=2-i\Rightarrow\begin{cases}a=b-r=2+2i-2+i=3i\\c=b+r=2+2i+2-i=4+i\end{cases}$

$$\boxed{a=3i\,;b=2+2i\,;c=4+i}$$

- $r=-2+i\Rightarrow\begin{cases}a=b-r=2+2i+2-i=4+i\\c=b+r=2+2i-2+i=3i\end{cases}$

$$\boxed{a=4+i\,;b=2+2i\,;c=3i}$$

ب. تعيين رتبة الحدّ الذي قيمته $38-16i$

$$u_n=u_0+nr=3i+n(2-i)$$

$$u_n=38-16i\Rightarrow 3i+n(2-i)=38-16i\Rightarrow n(2-i)=38-19i$$

$$\Rightarrow n=\frac{38-19i}{2-i}=\frac{19(2-i)}{2-i}=19$$

منه نستنتج أنّ الحدّ $38-16i$ هو الحدّ العشرون

3. $z_C = 4 + i \; ، \; z_B = 2 + 2i \; ، \; z_A = 3i$

أ. بيان أنّ النقط A ، B و C في استقامية

$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{2 - i}{4 - 2i} = \frac{2 - i}{2(2 - i)} = \frac{1}{2}; \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R} \Rightarrow$ النقط A ، B و C في استقامية

ب. تعيين لاحقة النقطة D

$\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB} \Rightarrow z_D = -z_B \Rightarrow \boxed{z_D = -2 - 2i}$

ج. تعيين لاحقة النقطة F

$F = T(D) \Rightarrow z_F = z_D + z_{\overrightarrow{AC}} = z_D + z_C - z_A \Rightarrow \boxed{z_F = 2 - 4i}$

د. تعيين المجموعة (Δ)

$M \in (\Delta) \Rightarrow |iz + 3| = |z - 2 + 4i| \Rightarrow |i(z - 3i)| = |z - 2 + 4i|$

$\Rightarrow |i||z - 3i| = |z - (2 - 4i)| \Rightarrow |z - z_A| = |z - z_F| \Rightarrow \boxed{AM = FM}$

منه نستنتج أنّ (Δ) هو محور القطعة $[AF]$

ه. تعيين معادلة (Δ')

$h(F) = F' \Rightarrow z_{F'} - z_A = \frac{1}{2}(z_F - z_A) \Rightarrow z_{F'} = \frac{1}{2}(z_F + z_A) = \frac{1}{2}(2 - i)$

$\Rightarrow \boxed{z_{F'} = 1 - \frac{1}{2}i}$

بما أنّ $h(A) = A$ ، فإنّ (Δ') هو محور القطعة $[AF']$.

لدينا طريقتين لكتابة معادلة محور قطعة مستقيمة.

الطريقة ①:

لتكن النقطة I منتصف القطعة $[AF']$. لدينا :

$z_I = \frac{z_A + z_{F'}}{2} = \frac{1 + \frac{5}{2}i}{2} = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{5}{4}i}; \overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ y - \frac{5}{4} \end{pmatrix}; \overrightarrow{AF'}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$

$M \in (\Delta') \Rightarrow \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{AF'} \Rightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AF'} = 0 \Rightarrow x - \frac{1}{2} - \frac{7}{2}\left(y - \frac{5}{4}\right) = 0$

$\Rightarrow x - \frac{7}{2}y + \frac{31}{8} = 0 \Rightarrow \boxed{8x - 28y + 31 = 0}$

الطريقة ②:

$M \in (\Delta') \Rightarrow AM = F'M \Rightarrow AM^2 = F'M^2$

$\Rightarrow x^2 + (y - 3)^2 = (x - 1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow -6y + 9 = -2x + y + \frac{5}{4}$

$\Rightarrow 2x - 7y + \frac{31}{4} = 0 \Rightarrow \boxed{8x - 28y + 31 = 0}$

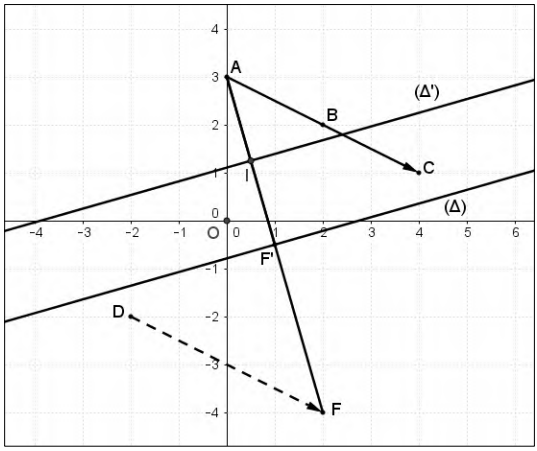
و. كتابة العبارة المركّبة للدوران r الذي مركزه D وزاويته $-\frac{\pi}{3}$

$$M' = r(M) \Rightarrow z' - z_D = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - z_D)$$

$$\Rightarrow z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_D$$

$$\Rightarrow z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-2 - 2i)$$

$$\Rightarrow \boxed{z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z - 1 + \sqrt{3} - (1 + \sqrt{3})i}$$



حل التمرين 30.

$u^2 = 21 - 20i$ -I

1. إثبات أنّ u حل للمعادلة (E)

$$u^4 - 42u^2 + 841 = (21 - 20i)^2 - 42(21 - 20i) + 841$$

$$= 41 - 840i - 882 + 840i + 841 = \boxed{0}$$

2. بيان أنّ (E) تكافئ $(z^2 + 29)^2 - 100z^2 = 0$

$$(z^2 + 29)^2 - 100z^2 = 0 \Leftrightarrow z^4 + 58z^2 + 841 - 100z^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z^4 - 42z^2 + 841 = 0}$$

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

$$(z^2 + 29)^2 - 100z^2 = 0 \Rightarrow (z^2 + 29 - 10z)(z^2 + 29 + 10z) = 0$$

$$z^2 - 10z + 29 = 0\ ;\ \Delta = -16 = (4i)^2\ ;\ z_1 = 5 - 2i\ ;\ z_2 = 5 + 2i$$

$$z^2 + 10z + 29 = 0\ ;\ \Delta = -16 = (4i)^2\ ;\ z_3 = -5 - 2i\ ;\ z_4 = -5 + 2i$$

$$\boxed{S = \{5 - 2i\ ;\ 5 + 2i\ ;\ -5 - 2i\ ;\ -5 + 2i\}}$$

3. استنتاج قيم u

$$\begin{cases} u^2 = 21 - 20i \\ u \in S_{(E)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{u \in \{5 - 2i\,;\, -5 + 2i\}}$$

لاحظ أنّه بتربيع العددين $5 - 2i$ و $-5 + 2i$ نحصل على $21 + 20i$

II- $z_A = 2 - i$ ، $z_B = 5 - 2i$ ، $z_C = -3 + i$ و $z_D = -5 + 2i$

1. كتابة z' بدلالة z

$$\begin{cases} f(A) = B \\ f(C) = D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_D = az_C + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{z_B - z_D}{z_A - z_C} \\ b = z_B - az_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{10 - 4i}{5 - 2i} = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$M' = f(M) \Rightarrow \boxed{z' = 2z + 1}$$

2. تعيين طبيعة التحويل f وذكر عناصره

$$a = 2\,;\, b = 1\,;\; z_\omega = \frac{b}{1 - a} = -1$$

منه نستنتج أنّ التحويل f تحاكي مركزه $\omega(-1;0)$ ونسبته 2

III- $u_0 = 0$ ، $u_{n+1} = 2u_n + 1$

1. بيان أنّ العددين u_{n+1} و u_n أوليان فيما بينهما

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 \Rightarrow u_{n+1} - 2u_n = 1 \underset{\text{بيزو}}{\Rightarrow} \boxed{PGCD(u_{n+1}; u_n) = 1}$$

2. تفسير حدود المتتالية (u_n)

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 \Rightarrow u_{n+1} = f(u_n) \Rightarrow u_n = |z_n|$$

منه نستنتج أنّ حدود المتتالية (u_n) هي أطوال القطع المستقيمة $[OM_n]$ ، حيث :

$M_0 = O$ و $M_{n+1} = f(M_n)$

3. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2^n - 1$

تحقيق التراجع: $u_0 = 0$ (محققة)

فرض التراجع: نفرض أنّ $u_n = 2^n - 1$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = \boxed{2^{n+1} - 1}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2^n - 1$

4. أ. بيان أنّ : $u_n = u_p + 2^p u_{n-p}$

$$u_p + 2^p u_{n-p} = 2^p - 1 + 2^p(2^{n-p} - 1) = 2^p - 1 + 2n - 2^p = 2^n - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n = u_p + 2^p u_{n-p}}$$

ب. بيان أنّ : $PGCD(u_n; u_p) = PGCD(u_p; u_{n-p})$

$$d = PGCD(u_n; u_p)\,;\, d' = PGCD(u_p; u_{n-p})$$

$$d = PGCD(u_n; u_p) \Rightarrow \begin{cases} d \mid u_n \\ d \mid u_p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid u_n - u_p \\ d \mid u_p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid 2^p u_{n-p} \\ d \mid u_p \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d \mid u_{n-p} \\ d \mid u_p \end{cases} \Rightarrow d \mid PGCD(u_p; u_{n-p}) \Rightarrow \boxed{d \mid d'}$$

$$d' = PGCD(u_p; u_{n-p}) \Rightarrow \begin{cases} d' \mid u_{n-p} \\ d' \mid u_p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d' \mid 2^p u_{n-p} \\ d' \mid u_p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d' \mid u_n - u_p \\ d' \mid u_p \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d' \mid u_n \\ d' \mid u_p \end{cases} \Rightarrow d' \mid PGCD(u_n; u_p) \Rightarrow \boxed{d' \mid d}$$

$$\begin{cases} d \mid d' \\ d' \mid d \end{cases} \Rightarrow d = d' \Rightarrow \boxed{PGCD(u_n; u_p) = PGCD(u_p; u_{n-p})}$$

حل التمرين 31.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{10}{3}$

1. حساب u_1, u_2 :

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + \frac{10}{3} = \frac{11}{3} \; ; \; u_2 = \frac{1}{3}u_1 + \frac{10}{3} = \frac{11}{9} + \frac{10}{3} = \frac{41}{9}$$

البرهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n < 5$

- تحقيق التراجع : $u_0 < 5$ (محقّقة لأنّ $u_0 = 1$)
- فرض التراجع : نفرض أنّ $u_n < 5$
- برهان التراجع : نبرهن أنّ $u_{n+1} < 5$

$$u_n < 5 \Rightarrow \frac{1}{3}u_n < \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{1}{3}u_n + \frac{10}{3} < \frac{15}{3} \Rightarrow u_{n+1} < 5$$

2. دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + \frac{10}{3} - u_n = \frac{2}{3}(5 - u_n)$$

$$u_n < 5 \Rightarrow 5 - u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0 \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة}}$$

استنتاج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ثم تعيين نهايتها

بما أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى ، فهي إذن متقاربة

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} u_n = l \Rightarrow \frac{1}{3}l + \frac{10}{3} = l \Rightarrow \frac{2}{3}l = \frac{10}{3} \Rightarrow \boxed{l = 5}$$

3. $v_n = u_n - 5$

أ. اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية وتعين أساسها وحدها الأول

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 5 = \frac{1}{3}u_n + \frac{10}{3} - 5 = \frac{1}{3}u_n - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}(u_n - 5) = \frac{1}{3}v_n$$

منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدّها الأول $v_0 = u_0 - 5 = -4$

ب. كتابة v_n و u_n بدلالة n

$$v_n = v_0.q^n = -4\left(\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow \boxed{v_n = -\frac{4}{3^n}}; u_n = v_n + 5 \Rightarrow \boxed{u_n = -\frac{4}{3^n} + 5}$$

ج. استنتاج نهاية u_n :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} -\frac{4}{3^n} + 5 = \boxed{5}$$

د. حساب المجموع S_n :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = v_0 + 5 + v_1 + 5 + \cdots + v_n + 5$$

$$= v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) + 5(n+1)$$

$$= -4\left(\frac{1-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}\right) + 5(n+1)$$

$$= -6\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right) + 5n + 5 \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{2}{3^n} + 5n - 1}$$

حل التمرين 32.

$v_n = u_n - 4$ ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$ ، $u_0 = 5$

1. اثبات أنّ المتتالية (v_n) هندسية وتعيين أساسها وحدها الأول

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}u_n - 2 = \frac{1}{2}(u_n - 4) = \frac{1}{2}v_n$$

منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدّها الأول $v_0 = u_0 - 4 = 1$

2. كتابة v_n و u_n بدلالة n وبيان تقارب المتتالية (v_n)

$$v_n = v_0.q^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \boxed{v_n = \frac{1}{2^n}}; \; u_n = v_n + 4 \Rightarrow \boxed{u_n = \frac{1}{2^n} + 4}$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (v_n) \text{ متقاربة}}$$

3. حساب المجموعين S_n و S'_n:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = \left(\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) = \boxed{2-\frac{1}{2^n}}$$

$$S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = v_0 + 4 + v_1 + 4 + \cdots + v_n + 4$$
$$= S_n + 4(n+1) = \boxed{4n + 6 - \frac{1}{2^n}}$$

4. حساب S''_n ، P_n و K_n :

$$S''_n = v_0^2 + v_1^2 + \cdots + v_n^2 = v_0^2 + (v_0.q)^2 + \cdots + (v_0.q^n)^2$$
$$= v_0^2 + v_0^2.q^2 + \cdots + v_0^2.q^{2n} = v_0^2(1 + q^2 + \cdots + q^{2n})$$
$$= v_0^2\left(\frac{1-q^{2n+2}}{1-q^2}\right) = \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}}{1-\frac{1}{4}}\right) \Rightarrow \boxed{S''_n = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{2n+2}}\right)}$$

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n = v_0 \times v_0.q \times v_0.q^2 \times \ldots \times v_0.q^n$$
$$= v_0^{n+1} \times q^{1+2+\cdots+n} = v_0^{n+1} \times q^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \boxed{2^{\frac{-n^2-n}{2}}}$$

$$K_n = v_0 + \frac{2}{5}v_1 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 v_2 + \cdots + \left(\frac{2}{5}\right)^n v_n$$
$$= v_0 + \frac{2}{5}v_0.q + \left(\frac{2}{5}\right)^2 v_0.q^2 + \cdots + \left(\frac{2}{5}\right)^n v_0.q^n$$
$$= v_0 + \left(\frac{2}{5}q\right)v_0 + \left(\frac{2}{5}q\right)^2 v_0 + \cdots + \left(\frac{2}{5}q\right)^n v_0$$
$$= v_0\left[1 + \left(\frac{2}{5}q\right) + \left(\frac{2}{5}q\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{5}q\right)^n\right]$$
$$= v_0\left[1 + \left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{5}\right)^n\right] = \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{5}} = \boxed{\frac{5}{4}\left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right)}$$

5. **البرهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n :**

$$\frac{1}{w_0 \times w_1} + \frac{1}{w_1 \times w_2} + \cdots + \frac{1}{w_n \times w_{n+1}} = \frac{n+1}{w_0 \times w_{n+1}}$$

- **تحقيق التراجع:** $\frac{1}{w_0 \times w_1} = \frac{1}{w_0 \times w_1}$ (محقّقة)
- **فرض التراجع:** نفرض أنّ:

$$\frac{1}{w_0 \times w_1} + \frac{1}{w_1 \times w_2} + \cdots + \frac{1}{w_n \times w_{n+1}} = \frac{n+1}{w_0 \times w_{n+1}}$$

- **برهان التراجع:** نبرهن أنّ:

$$\frac{1}{w_0 \times w_1} + \frac{1}{w_1 \times w_2} + \cdots + \frac{1}{w_n \times w_{n+1}} + \frac{1}{w_{n+1} \times w_{n+2}} = \frac{n+2}{w_0 \times w_{n+2}}$$

$$\frac{1}{w_0 \times w_1}+\frac{1}{w_1 \times w_2}+\cdots+\frac{1}{w_n \times w_{n+1}}+\frac{1}{w_{n+1} \times w_{n+2}}$$
$$=\frac{n+1}{w_0 \times w_{n+1}}+\frac{1}{w_{n+1} \times w_{n+2}}=\frac{(n+1)w_{n+2}+w_0}{w_0 \times w_{n+1} \times w_{n+2}}$$
$$=\frac{(n+1)\underbrace{(w_{n+1}+\alpha)}_{w_{n+2}}+\underbrace{w_{n+1}-(n+1)\alpha}_{w_0}}{w_0 \times w_{n+1} \times w_{n+2}}$$
$$=\frac{(n+2)w_{n+1}}{w_0 \times w_{n+1} \times w_{n+2}}=\boxed{\frac{n+2}{w_0 \times w_{n+2}}}$$

حل التمرين 33.

1. تعيين العدد الحقيقي a حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة

$$9u_{n+1}=au_n+4 \Rightarrow u_{n+1}=\frac{a}{9}u_n+\frac{4}{9}\ ;u_0=1$$

المتتالية (u_n) ثابتة $\Rightarrow u_{n+1}=u_n=1 \Rightarrow \frac{a}{9}+\frac{4}{9}=1 \Rightarrow \boxed{a=5}$

$a=3$ .2

أ. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n>2$

$$u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+\frac{4}{9}\ ;3u_n>2 \Rightarrow u_n>\frac{2}{3}$$

تحقيق التراجع : نتحقق أنّ $u_0>\frac{2}{3}$ (صحيحة لأنّ $u_0=1$)

فرض التراجع : نفرض أنّ $u_n>\frac{2}{3}$

برهان التراجع : نبرهن أنّ $u_{n+1}>\frac{2}{3}$

$$u_n>\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{3}u_n>\frac{2}{9} \Rightarrow \frac{1}{3}u_n+\frac{4}{9}>\frac{6}{9} \Rightarrow \boxed{u_{n+1}>\frac{2}{3}}$$

منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي $3u_n>2$: n

ب. بيان أنّ المتتالية (u_n) متناقصة واستنتاج حصر للعدد u_n

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}u_n+\frac{4}{9}-u_n=\boxed{\frac{4-6u_n}{9}}$$

$$u_n>\frac{2}{3} \Rightarrow -6u_n<-4 \Rightarrow 4-6u_n<0 \Rightarrow \boxed{\text{متناقصة } (u_n)}$$

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_n>\frac{2}{3} \\ \text{متناقصة } (u_n) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{2}{3}<u_n\leq 1}$$

3. $3v_n = 3u_n - 2$

أ. اثبات أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول

$$3v_n = 3u_n - 2 \Rightarrow v_n = u_n - \frac{2}{3}$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{9} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{9} = \frac{1}{3}\left(u_n - \frac{2}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{3}v_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدّها الأول $v_0 = u_0 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

ب. كتابة عبارة v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 \times q^n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}$$

استنتاج أنّ: $u_n = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\right]$

$$u_n = v_n + \frac{2}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 2\left(\frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\right]}$$

4. حساب المجموع S_n بدلالة n

$$S_n = u_0 + \cdots + u_n = v_0 + \frac{2}{3} + \cdots + v_n + \frac{2}{3}$$

$$= v_0\left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right) + \frac{2}{3}(n+1) = \frac{1}{3}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}\right) + \frac{2}{3}(n+1)$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] + \frac{2}{3}(n+1)}$$

حل التمرين 34.

I- $u_0 = 1$ ، $u_2 + u_4 = \frac{5}{16}$

1. حساب الأساس q

$$u_2 + u_4 = \frac{5}{16} \Rightarrow u_0 q^2 + u_0 q^4 = \frac{5}{16} \Rightarrow q^4 + q^2 - \frac{5}{16} = 0$$

$$x = q^2 \Rightarrow x^2 + x - \frac{5}{16} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{q = \frac{1}{2}}$$

ملاحظة: الحل $x = -\frac{5}{4}$ مرفوض لأنّ حدود المتتالية (u_n) موجبة تماما

بما أنّ $0 < q < 1$ ، فإنّ المتتالية (u_n) متقاربة

2. كتابة عبارة u_n بدلالة n

$$u_n = u_0.q^n \Rightarrow \boxed{u_n = \frac{1}{2^n}}$$

3. حساب الجداء P_n بدلالة n

$$P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n = u_0 \times u_0.q \times u_0.q^2 \times \ldots \times u_0.q^n$$

$$= u_0^{n+1}.q^{1+2+\cdots+n} = q^{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \boxed{2^{\frac{-n^2-n}{2}}}$$

4. حساب المجموع S_n بدلالة n

$$S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \cdots + \frac{1}{u_n} = 1 + 2 + \cdots + 2^n = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = \boxed{2^{n+1}-1}$$

II- $w_0 = \frac{1}{3}$ ، $w_{n+1} = w_n(2 - w_n)$ ، $v_n = 1 - w_n$

1. كتابة v_{n+1} بدلالة v_n

$$v_{n+1} = 1 - w_{n+1} = 1 - w_n(2 - w_n) = 1 - 2w_n + w_n^2 = (1 - w_n)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{n+1} = v_n^2}$$

2. البرهان بالتراجع أنّ : $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{(2)^n}$

تحقيق التراجع : $v_0 = \frac{2}{3}$ (محقّقة لأنّ $v_0 = 1 - w_0 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$)

فرض التراجع : نفرض أنّ $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{(2)^n}$

برهان التراجع : نبرهن أنّ $v_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{(2)^{n+1}}$

$$v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{(2)^n} \Rightarrow v_n^2 = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{(2)^n}\right]^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2.(2)^n} \Rightarrow \boxed{v_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{(2)^{n+1}}}$$

3. حساب الجداء π_n بدلالة n

$$\pi_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^8 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{(2)^n}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{1+2+4+8+\cdots+2^n} = \boxed{\left(\frac{2}{3}\right)^{2^{n+1}-1}}$$

حل التمرين 35.

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $[0, +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{8x-6}{x+1}$

1. دراسة تغيرات الدالة f

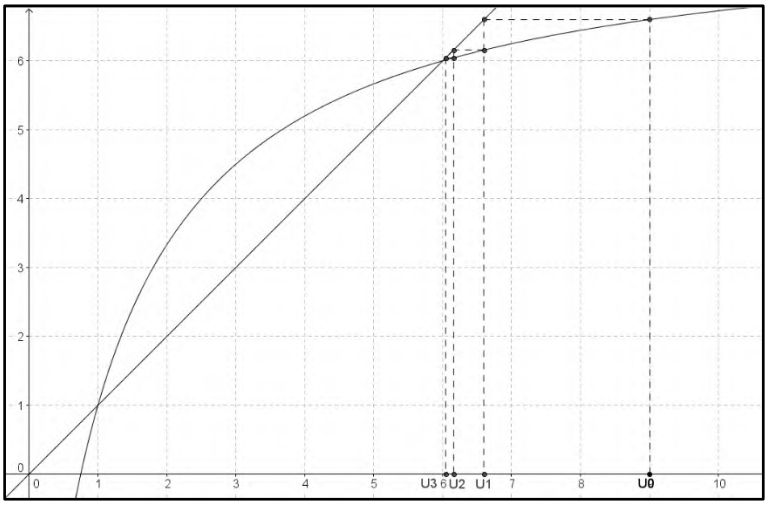
$f'(x) = \dfrac{14}{(x+1)^2}$; $f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0, +\infty[$

$f(0) = -6$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{8x}{x} = 8$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	-6	$\nearrow 8$

2. $u_{n+1} = f(u_n)$ و $u_0 = 9$

أ. تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 على محور الفواصل



ب. يمكننا التخمين أنّ المتتالية (u_n) متناقصة متقاربة نحو العدد 6

3. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 6$

- تحقيق التراجع : $u_0 \geq 6$ (محقّقة لأنّ $u_0 = 9$)
- فرض التراجع : نفرض أنّ : $u_n \geq 6$
- برهان التراجع : نبرهن أنّ : $u_{n+1} \geq 6$

$$u_{n+1} = \frac{8u_n - 6}{u_n + 1} = \frac{8(u_n + 1) - 14}{u_n + 1} \Rightarrow u_{n+1} = 8 - \frac{14}{u_n + 1}$$

$$u_n \geq 6 \Rightarrow u_n + 1 \geq 7 \Rightarrow \frac{1}{u_n+1} \leq \frac{1}{7} \Rightarrow -\frac{14}{u_n+1} \geq -2$$

$$\Rightarrow 8 - \frac{14}{u_n+1} \geq 6 \Rightarrow \boxed{u_{n+1} \geq 6}$$

4. أ. دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{8u_n - 6}{u_n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 6}{u_n+1} = -\frac{(u_n-6)(u_n-1)}{u_n+1}$$

$$u_n \geq 6 \Rightarrow -\frac{(u_n-6)(u_n-1)}{u_n+1} \leq 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0 \Rightarrow \boxed{(u_n) \text{ متناقصة}}$$

ب. استنتاج تقارب المتتالية (u_n)

بما أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل ، نستنتج أنها متقاربة

5. أ. اثبات أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_{n+1} - 6| \leq \frac{2}{7}|u_n - 6|$

$$u_{n+1} - 6 = \frac{8u_n - 6}{u_n+1} - 6 = \frac{2u_n - 12}{u_n+1} = \frac{2}{u_n+1}(u_n - 6)$$

$$u_n \geq 6 \Rightarrow u_n + 1 \geq 7 \Rightarrow \frac{2}{u_n+1} \leq \frac{2}{7} \Rightarrow u_{n+1} - 6 \leq \frac{2}{7}(u_n - 6)$$

$$\Rightarrow \boxed{|u_{n+1} - 6| \leq \frac{2}{7}|u_n - 6|}$$

(لأنّ العبارتين $u_n - 6$ و $u_{n+1} - 6$ موجبتين)

ب. اثبات بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_n - 6| \leq 3\left(\frac{2}{7}\right)^n$

- تحقيق التراجع : $|u_0 - 6| \leq 3\left(\frac{2}{7}\right)^0$ (محقّقة لأنّ $3 \leq 3$)
- فرض التراجع : نفرض أنّ $|u_n - 6| \leq 3\left(\frac{2}{7}\right)^n$
- برهان التراجع : نبرهن أنّ $|u_{n+1} - 6| \leq 3\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}$

$$|u_{n+1} - 6| \leq \frac{2}{7}|u_n - 6| \Rightarrow |u_{n+1} - 6| \leq 3\left(\frac{2}{7}\right)^n \times \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow \boxed{|u_{n+1} - 6| \leq 3\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}}$$

جـ. استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$|u_n - 6| \leq 3\left(\frac{2}{7}\right)^n \Rightarrow -3\left(\frac{2}{7}\right)^n \leq u_n - 6 \leq 3\left(\frac{2}{7}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} -3\left(\frac{2}{7}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} 3\left(\frac{2}{7}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 6}$$

حل التمرين 36.

1. $z_A = 3 - i$ ، $z_B = 2 - 2i$ ، $z_C = -2i$ ، $z_D = \bar{z}_C$

أ.

ب. كتابة العدد k على الشكل الجبري ثمّ الأسي

$$k = \frac{z_D - z_C}{z_B - z_C} = \frac{4i}{2} \Rightarrow \boxed{k = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

$$\arg(k) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } BCD \text{ قائم في } C}$$

ج. تعيين مجموعة قيم n حيث $k^n < 0$

$$k^n < 0 \Rightarrow \arg(k^n) = (2k+1)\pi \Rightarrow \frac{n}{2}\pi = (2k+1)\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 4k + 2\,;k \in \mathbb{N}}$$

2. $S(M) = M' \Rightarrow z' = (1-i)z + 2i$

أ. تعيين طبيعة وعناصر التحويل S

$$|1-i| = \sqrt{2}\,;\ \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\,;\ z_\omega = \frac{2i}{i} = 2$$

نستنتج أنّ التحويل S هو تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$ ، زاويته $-\frac{\pi}{4}$ ومركزه $\Omega(2;0)$

ب. التحقق أنّ : $z' - z = i(\omega - z)$

$$z' - z = (1-i)z + 2i - z = -iz + 2i = i(2-z) = \boxed{i(\omega - z)}$$

$$z' - z = i(\omega - z) \Rightarrow \frac{z'-z}{\omega - z} = i\,; \begin{cases} \left|\dfrac{z'-z}{\omega - z}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z'-z}{\omega - z}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{المثلث } \Omega MM' \text{ قائم في } M \text{ ومتساوي الساقين}}$$

3. $u_n = \|\Omega A_n\|$ ، $A_{n+1} = S(A_n)$ ، $A_0 = A$

أ. برهان أنّ المتتالية (u_n) هندسية

$$u_{n+1} = \|\Omega A_{n+1}\| = |z_{n+1} - \omega| = |(1-i)z_n + 2i - 2|$$
$$= |(1-i)z_n - 2(1-i)| = |(1-i)(z_n - 2)|$$
$$= |1-i||z_n - 2| = \sqrt{2}\|\Omega A_n\| \Rightarrow \boxed{u_{n+1} = \sqrt{2}u_n}$$

منه المتتالية (u_n) هندسية أساسها $\boxed{q=\sqrt{2}}$ وحدّها الأول u_0 حيث:

$$u_0 = \|\Omega A_0\| = |z_A - \omega| = |1-i| = \boxed{\sqrt{2}}$$

ب. حساب المجموع S_n

$$S_n = |z_0-\omega| + |z_1-\omega| + \cdots + |z_n-\omega|$$
$$= \|\Omega A_0\| + \|\Omega A_1\| + \cdots + \|\Omega A_n\| = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$
$$= u_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}^{n+1}-1}{\sqrt{2}-1}\right) = \sqrt{2}(\sqrt{2}+1)\left(\sqrt{2}^{n+1}-1\right)$$
$$= \boxed{(2+\sqrt{2})\left(\sqrt{2}^{n+1}-1\right)}$$

حل التمرين 37.

$v_n = u_n - 2n + \alpha$ ، $u_{n+1} = 2u_n - 2n - 1$ ، $u_0 = 4$

1. تعيين α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها 2

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2(n+1) + \alpha = 2u_n - 2n - 1 - 2n - 2 + \alpha$$
$$= 2u_n - 4n - 3 + \alpha = 2\left(u_n - 2n + \frac{\alpha-3}{2}\right)$$

$$v_{n+1} = 2v_n \Rightarrow \frac{\alpha-3}{2} = \alpha \Rightarrow 2\alpha = \alpha - 3 \Rightarrow \boxed{\alpha = -3}$$

2. كتابة v_n بدلالة n واستنتاج u_n بدلالة n

$$v_0 = u_0 + \alpha = 1\ ; \boxed{v_n = v_0.q^n = 2^n}$$

$$v_n = u_n - 2n - 3 \Rightarrow u_n = v_n + 2n + 3 = \boxed{2^n + 2n + 3}$$

3. حساب S_n

$$w_n = 2n + 3;$$
$$S_n = u_0 + \cdots + u_{n-1} = v_0 + w_0 + \cdots + v_{n-1} + w_{n-1}$$
$$= v_0\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right) + \frac{n}{2}(w_0 + w_{n-1}) = 2^n - 1 + \frac{n}{2}(3 + 2n + 1)$$
$$= \boxed{2^n + n^2 + 2n - 1}$$

4. دراسة بواقي قسمة 2^n على 7

$$2^0 \equiv 1[7]\ ;\ 2^1 \equiv 2[7]\ ;\ 2^2 \equiv 4[7]\ ; 2^3 \equiv 1[7]$$
$$\boxed{2^{3k} \equiv 1[7]\ ;\ 2^{3k+1} \equiv 2[7]\ ;\ 2^{3k+2} \equiv 4[7]}$$

5. تعيين قيم n حيث $K_{3n} \equiv 0[7]$

$$K_{3n} \equiv 0[7] \Rightarrow 2^{3n} + 9n^2 + 6n - 1 \equiv 0[7] \Rightarrow 2n(n+3) \equiv 0[7]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n \equiv 0[7] \\ \text{أو} \\ n+3 \equiv 0[7] \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} n = 7k; k \in \mathbb{N} \\ \text{أو} \\ n = 7k+4 \end{cases}}$$

حل التمرين 38.

$$u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2} \; ; \; u_0 = u_1 = 1$$

1. البرهان أنّ : $u_n = 2^{n+1} - 3^n$

- **تحقيق التراجع :** نتحقق أنّ $u_0 = 2^1 - 3^0$ (محققة لأنّ $u_0 = 1$)
- **فرض التراجع :** نفرض أنّ $u_n = 2^{n+1} - 3^n$
- **برهان التراجع :** نبرهن أنّ $u_{n+1} = 2^{n+2} - 3^{n+1}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 5u_n - 6u_{n-1} = 5(2^{n+1} - 3^n) - 6(2^n - 3^{n-1}) \\ &= 5.2^{n+1} - 5.3^n - 6.2^n + 6.3^{n-1} \\ &= 5.2^{n+1} - (2+3)3^n - 3.2^{n+1} + 2.3^n = 2.2^{n+1} - 3.3^n \\ &= 2^{n+2} - 3^{n+1} \end{aligned}$$

ومنه نستنتج أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2^{n+1} - 3^n$

2. دراسة بواقي قسمة 2^n و 3^n على 5

$$2^{4k} \equiv 1[5] \; ; \; 2^{4k+1} \equiv 2[5] \; ; \; 2^{4k+2} \equiv 4[5] \; ; \; 2^{4k+3} \equiv 3[5]$$
$$3^{4k} \equiv 1[5] \; ; \; 3^{4k+1} \equiv 3[5] \; ; \; 3^{4k+2} \equiv 4[5] \; ; \; 3^{4k+3} \equiv 2[5]$$

3. تعيين قيم n حيث $(1 + u_n)$ يقبل القسمة على 5

$$1 + u_n \equiv 0[5] \Rightarrow 1 + 2^{n+1} - 3^n \equiv 0[5] \Rightarrow 2^{n+1} - 3^n \equiv 4[5]$$

$n =$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$2^{n+1} \equiv$	2	4	3	1	[5]
$3^n \equiv$	1	3	4	2	[5]
$2^{n+1} - 3^n \equiv$	1	1	4	4	[5]

$$1 + u_n \equiv 0[5] \Rightarrow \boxed{n = 4k+3 \text{ أو } n = 4k+2 \; ; k \in \mathbb{N}}$$

4. تعيين باقي قسمة $2012^{4n-2} - 1433^{2011}$ على 5

$$\begin{cases} 2012 \equiv 2[5] \Rightarrow 2012^{4n-2} \equiv 2^{4k+2}[5] \Rightarrow 2012^{4n-2} \equiv 4[5] \\ 1433 \equiv 3[5] \Rightarrow 1433^{2011} \equiv 3^{4k+3}[5] \Rightarrow 1433^{2011} \equiv 2[5] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{2012^{4n-2} - 1433^{2011} \equiv 2[5]}$$

5. البرهان أنّ : $3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv 0[5]$

- **طريقة أولى**

$3^{3n+2}+2^{n+4}=9.3^{3n}+16.2^n=9.27^n+16.2^n$

$9\equiv -1[5]\,;27\equiv 2[5]\,;16\equiv 1[5]$

$\begin{cases}9.27^n\equiv -2^n[5]\\ 16.2^n\equiv 2^n[5]\end{cases}\Rightarrow \boxed{3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv 0[5]}$

- **طريقة ثانية**

$n=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$3n+2\equiv$	2	1	0	3	[4]
$3^{3n+2}\equiv$	4	3	1	2	[5]
$2^{n+4}\equiv$	1	2	4	3	[5]
$3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv$	0	0	0	0	[5]

6. حساب المجموع S_n

$$\begin{aligned}S_n&=u_2+\cdots+u_n\\&=(2^3-3^2)+(2^4-3^3)+(2^5-3^4)+\cdots+(2^{n+1}-3^n)\\&=\underbrace{(2^3+2^4+\cdots+2^n)}_{v_0=2^3\,;\,q=2}-\underbrace{(3^2+3^3+\cdots+3^n)}_{w_0=3^2\,;\,q'=3}\\&=2^3\left(\frac{2^{n-2}-1}{2-1}\right)-3^2\left(\frac{3^{n-1}-1}{3-1}\right)\\&=2^3(2^{n-2}-1)-\frac{3^2}{2}(3^{n-2}-1)=\boxed{2^{n+1}-\frac{3^n}{2}-\frac{7}{2}}\end{aligned}$$

حل التمرين 39.

1. $y'+2y=0$

أ. إيجاد الحل $f(x)$ للمعادلة التفاضلية الذي يحقق الشرط: $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$

$y'+2y=0\Rightarrow y'=-2y\Rightarrow f(x)=ce^{-2x}$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\Rightarrow ce^{-1}=2\Rightarrow c=2e\Rightarrow \boxed{f(x)=2e^{-2x+1}}$

ب. تعيين دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

$f'+2f=0\Rightarrow f=-\frac{1}{2}f'\Rightarrow F(x)=-\frac{1}{2}f(x)=\boxed{-e^{-2x+1}}$

2. $u_n=\int_n^{n+1}2e^{-2x+1}\,dx$

أ. **التحقق أنّ:** $u_n = e(1-e^{-2})e^{-2n}$

$$u_n = \int_n^{n+1} 2e^{-2x+1}\,dx = F(n+1) - F(n) = -e^{-2n-1} + e^{-2n+1}$$
$$= (e - e^{-1})e^{-2n} = \boxed{e(1-e^{-2})e^{-2n}}$$

ب. **بيان أنّ المتتالية (u_n) هندسية يُطلب تحديد أساسها q وحدّها الأول u_0**

$u_{n+1} = e(1-e^{-2})e^{-2n-2} = e(1-e^{-2})e^{-2n}.e^{-2} = u_n.e^{-2}$

منه نستنتج أنّ المتتالية (u_n) هندسية أساسها e^{-2} وحدّها الأول $u_0 = e(1-e^{-2})$

ج. **دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها**

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ 0 < q < 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة}}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} e(1-e^{-2})e^{-2n} = 0 \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متقاربة}}$$

3. $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$

أ. **بيان أنّ:** $S_n = \int_0^n f(x)\,dx$

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$
$$= \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx + \cdots + \int_{n-1}^n f(x)\,dx = \boxed{\int_0^n f(x)\,dx}$$

ب. **حساب المجموع S_n بدلالة n**

$$S_n = \int_0^n f(x)\,dx = F(n) - F(0) = e - e^{-2n+1} = \boxed{e(1-e^{-2n})}$$

حل التمرين 40.

$$u_n \le v_n \le w_n$$

1. **إذا كانت (v_n) تؤول إلى $(-\infty)$ ، فإنّ:**

ب. **المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى**

$$u_n \le v_n \Rightarrow \boxed{(u_n) \text{ محدودة من الأعلى}}$$

ج. **المتتالية (u_n) تؤول إلى $(-\infty)$**

$$\begin{cases} u_n \le v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty} \text{ (النهاية بالمقارنة)}$$

2. إذا كانت $u_n > 1$ و $w_n = 2u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ ، فإنّ:

ج. $\lim\limits_{n\to+\infty} (w_n - u_n) = l$

$$\lim_{n\to+\infty} (w_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} (2u_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} (u_n) = \boxed{l}$$

د. لا يمكننا الجزم فيما يخص نهاية (v_n)

$$\begin{cases} u_n \le v_n \le w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2l \end{cases} \Rightarrow \boxed{l \le \lim_{n\to+\infty} v_n \le 2l}$$

3. إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2$ ، فإنّ:

أ. المتتالية (v_n) محدودة من الأعلى

$u_n \le v_n \Rightarrow$ $\boxed{\text{محدودة من الأعلى } (u_n)}$

ج. لا يمكننا الجزم فيما يخص نهاية (v_n)

$$\begin{cases} u_n \le v_n \le w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{-2 \le \lim_{n\to+\infty} v_n \le 2}$$

4. إذا كانت $u_n = \frac{2n^2-1}{n^2}$ و $w_n = \frac{2n^2+3}{n^2}$ ، فإنّ:

ب. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2-1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{n^2} = \boxed{2}$$

ج. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$

$$\begin{cases} u_n \le v_n \le w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 2}$$

قواعد أساسية
في
الاحتمالات

1. العد (القائمة - الترتيبة – التبديلة - التوفيقة)

ليكن n و p عددان طبيعيان حيث: $n \geq p$

التسمية	الرمز	الاستعمال	الترتيب	التكرار
القائمة	n^p	السحب على التوالي بإرجاع	مهمّ	ممكن
الترتيبة	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	السحب على التوالي بدون إرجاع	مهمّ	غير ممكن
التبديلة	$A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$	ترتيبة بحيث $(n = p)$	مهمّ	غير ممكن
التوفيقة	$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$	السحب في آن واحد	غير مهمّ	غير ممكن

لاحظ أنّ $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$

الجمعيات واللجان:

- في حالة تحديد وظيفة الأشخاص (رئيس، نائب، أمين،...) نستعمل الترتيبة A_n^p
- في حالة عدم تحديد وظيفة الأشخاص نستعمل التوفيقة C_n^p

خواص:

$0! = 1! = 1$	$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n = (n-1)! \times n$	
$C_{n+1}^n = n + 1$	$A_n^1 = C_n^1 = n$	$A_n^0 = C_n^0 = C_n^n = 1$

مثال 1:

لتكن المجموعة E حيث: $E = \{1; 2; 3; 4\}$

الجدول التالي يبيّن طريقة حساب الأعداد التي يمكن تشكيلها باستعمال هذه الأرقام

مكوّنة من:	مكررة ومرتبة (قائمة)	غير مكررة ومرتبة (ترتيبة)	غير مكررة وغير مرتبة (توفيقة)
رقمين	$4^2 = 16$	$A_4^2 = \frac{4!}{2!} = 12$	$C_4^2 = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$
3 أرقام	$4^3 = 64$	$A_4^3 = \frac{4!}{1!} = 4! = 24$	$C_4^3 = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$
4 أرقام	$4^4 = 256$	$A_4^4 = \frac{4!}{0!} = 4! = 24$	$C_4^4 = \frac{4!}{4!\,0!} = 1$

مثال 2:

يحتوي كيس على 4 كرات حمراء مرقمة من 1 إلى 4 و6 كرات بيضاء مرقمة من 1 إلى 6 و8 كرات خضراء مرقمة من 1 إلى 8. نسحب عشوائيا من هذا الكيس 3 كرات.
ما هو عدد الحالات التي نحصل فيها على:

أ. ثلاثة أرقام فردية
ب. كرة حمراء على الأقل
ج. كرة خضراء على الأكثر
د. كرة واحدة فقط تحمل الرقم 4
ه. ثلاث كرات من نفس اللون
و. ثلاث كرات مختلفة الألوان
ز. ثلاث كرات من لونين مختلفين

في حالة السحب:

1) في آن واحد ، 2) على التوالي بدون إرجاع ، 3) على التوالي بإرجاع

الحل:

لدينا في الكيس 18 كرة من 3 ألوان $(R;B;V)$ بالإضافة إلى 18 رقما 9 منها فردية $[1⑦;2⑤;3①;3③;2⑥;1⑧;3②;3④]$ و 9 زوجية.

1. في حالة السحب في آن واحد (توفيقة)

أ. ثلاثة أرقام فردية: $C_9^3 = \frac{9!}{3!6!} = \frac{9\times8\times7\times6!}{6\times6!} = \boxed{84}$

ب. كرة حمراء على الأقل:

طريقة ① ... $\underbrace{C_4^1 \times C_{14}^2}_{1R\text{ و }2(B;V)} + \underbrace{C_4^2 \times C_{14}^1}_{2R\text{ و }1(B;V)} + \underbrace{C_4^3}_{3R} = \boxed{452}$ (أو، أو)

طريقة ② (الحادثة العكسية) ... $\underbrace{C_{18}^3}_{\text{الحالات الممكنة}} - \underbrace{C_{14}^3}_{0R=3(B;V)} = \boxed{452}$

ج. كرة خضراء على الأكثر: $\underbrace{C_{10}^3}_{0V=3(B;R)} + \underbrace{C_8^1 \times C_{10}^2}_{1V\text{ و }2(B;R)} = \boxed{480}$

د. كرة واحدة فقط تحمل الرقم 4: $\underbrace{C_3^1}_{1④} \times \underbrace{C_{15}^2}_{2\neq④\text{ و }} = \boxed{315}$

ه. ثلاث كرات من نفس اللون: $\underbrace{C_4^3}_{3R} + \underbrace{C_6^3}_{3B} + \underbrace{C_8^3}_{3V} = \boxed{80}$

و. ثلاث كرات مختلفة الألوان: $C_4^1 \times C_6^1 \times C_8^1 = \boxed{192}$

ز. ثلاث كرات من لونين مختلفين:

طريقة ① ... $C_4^1(C_6^2 + C_8^2) + C_6^1(C_4^2 + C_8^2) + C_8^1(C_4^2 + C_6^2) = \boxed{544}$

طريقة ② (الحادثة العكسية) ... $\underbrace{C_{18}^3}_{\text{الحالات الممكنة}} - \underbrace{(80 + 192)}_{\text{الحالتان السابقتان}} = \boxed{544}$

2. في حالة السحب على التوالي بدون إرجاع (ترتيبة)

أ. ثلاثة أرقام فردية: $A_9^3 = \frac{9!}{6!} = \frac{9\times8\times7\times6!}{6!} = \boxed{504}$

ب. كرة حمراء على الأقل:

طريقة ① ... $3\left(\underbrace{A_4^1 \times A_{14}^2}_{1R+2(B;V)}\right) + 3\left(\underbrace{A_4^2 \times A_{14}^1}_{2R+1(B;V)}\right) + \underbrace{A_4^3}_{3R} = \boxed{2712}$

طريقة ② (الحادثة العكسية) ... $\underbrace{A_{18}^3}_{\text{الحالات الممكنة}} - \underbrace{A_{14}^3}_{0R=3(B;V)} = \boxed{2712}$

ج. كرة خضراء على الأكثر: $\underbrace{A_{10}^3}_{0V=3(B;R)} + 3\left(\underbrace{A_8^1 \times A_{10}^2}_{1V+2(B;R)}\right) = \boxed{2880}$

د. كرة واحدة فقط تحمل الرقم 4: $3\left(\underbrace{A_3^1}_{1④} \times \underbrace{A_{15}^2}_{2\neq④}\right) = \boxed{1890}$

ه. ثلاث كرات من نفس اللون: $\underbrace{A_4^3}_{3R} + \underbrace{A_6^3}_{3B} + \underbrace{A_8^3}_{3V} = \boxed{480}$

و. ثلاث كرات مختلفة الألوان: $6(A_4^1 \times A_6^1 \times A_8^1) = \boxed{1152}$

ز. ثلاث كرات من لونين مختلفين:

طريقة ① ... $3[A_4^1(A_6^2 + A_8^2) + A_6^1(A_4^2 + A_8^2) + A_8^1(A_4^2 + A_6^2)] = \boxed{3264}$

طريقة ② (الحادثة العكسية) ... $\underbrace{A_{18}^3}_{\text{الحالات الممكنة}} - \underbrace{(480 + 1152)}_{\text{الحالتان السابقتان}} = \boxed{3264}$

3. في حالة السحب على التوالي بإرجاع (قائمة)

أ. ثلاثة أرقام فردية: $9^3 = \boxed{729}$

ب. كرة حمراء على الأقل:

طريقة ① ... $3\left(\underbrace{4^1 \times 14^2}_{1R+2(B;V)}\right) + 3\left(\underbrace{4^2 \times 14^1}_{2R+1(B;V)}\right) + \underbrace{4^3}_{3R} = \boxed{3088}$

طريقة ② (الحادثة العكسية) ... $\underbrace{18^3}_{\text{الحالات الممكنة}} - \underbrace{14^3}_{0R=3(B;V)} = \boxed{3088}$

ج. كرة خضراء على الأكثر: $\underbrace{10^3}_{0V=3(B;R)} + 3\left(\underbrace{8^1 \times 10^2}_{1V+2(B;R)}\right) = \boxed{3400}$

د. كرة واحدة فقط تحمل الرقم 4: $3\left(\underbrace{3^1}_{1④} \times \underbrace{15^2}_{2\neq④}\right) = \boxed{2025}$

ه. ثلاث كرات من نفس اللون: $\underbrace{4^3}_{3R} + \underbrace{6^3}_{3B} + \underbrace{8^3}_{3V} = \boxed{792}$

و. ثلاث كرات مختلفة الألوان: $6(4 \times 6 \times 8) = \boxed{1152}$

ز. ثلاث كرات من لونين مختلفين:

طريقة ① ... $3[4(6^2 + 8^2) + 6(4^2 + 8^2) + 8(4^2 + 6^2)] = \boxed{3888}$

طريقة ② (الحادثة العكسية) ... $\underbrace{18^3}_{\text{الحالات الممكنة}} - \underbrace{(792 + 1152)}_{\text{الحالتان السابقتان}} = \boxed{3888}$

مثال 3:

تتكون جمعية من 6 رجال و 3 نساء.

1. نريد تشكيل إدارة تتألف من رئيس، نائب وأمين.
   أ. بكم طريقة يمكن اختيار هذه الإدارة؟
   ب. ما هو عدد الطرق لتشكيل إدارة بحيث يكون الرئيس رجلا
   ج. ما هو عدد الطرق بحيث يكون الرئيس رجلا ونائبه امرأة
2. نريد الآن تشكيل لجنة ذات 5 أشخاص من بينهم رئيسا، نائبا وأمينا. بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللجنة بحيث يكون الرئيس رجلا ونائبه امرأة؟

الحل:

1. نريد تشكيل إدارة تتألف من رئيس، نائب وأمين
   أ. بما أنّنا حددنا وظائف الأعضاء (ترتيبة) فإنّ عدد الطرق الممكنة لاختيار هذه الإدارة هو:

$$A_9^3 = \frac{9!}{6!} = \boxed{504}$$

   ب. نختار الرئيس من بين 6 رجال (A_6^1) ونختار العضوين الآخرين من بين الأعضاء الثمانية المتبقين (A_8^2) ، وبالتالي فإنّ عدد الطرق لتشكيل إدارة بحيث يكون الرئيس رجلا هو:

$$A_6^1 \times A_8^2 = 6 \times \frac{8!}{6!} = \boxed{336}$$

   ج. نختار الرئيس من بين 6 رجال (A_6^1) ونختار نائبه من بين 3 نساء (A_3^1) ونختار الأمين من بين الأعضاء السبعة المتبقين (A_7^1) ، وبالتالي فإنّ عدد الطرق بحيث يكون الرئيس رجلا ونائبه امرأة هو:

$$A_6^1 \times A_3^1 \times A_7^1 = 6 \times 3 \times 7 = \boxed{126}$$

2. في هذه الحالة أضفنا شخصين إلى هذه اللجنة دون أن نحدد لهما وظيفة ، واختيارهما يتم من بين الأعضاء الستة المتبقين (C_6^2) ، وبالتالي فإنّ عدد الطرق الممكنة لاختيار هذه اللجنة بحيث يكون الرئيس رجلا ونائبه امرأة هو:

$$A_6^1 \times A_3^1 \times A_7^1 \times C_6^2 = 126 \times 15 = \boxed{1890}$$

2. دستور ثنائي الحد

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^{n-p} y^p = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \cdots + C_n^n y^n$$

مثال:

$$(x+y)^2 = \sum_{p=0}^{2} C_2^p x^{2-p} y^p = C_2^0 x^2 + C_2^1 xy + C_2^2 y^2 = \boxed{x^2 + 2xy + y^2}$$

$$(x+y)^3 = \sum_{p=0}^{3} C_3^p x^{3-p} y^p = C_3^0 x^3 + C_3^1 x^2 y + C_3^2 xy^2 + C_3^3 y^3$$

$$= \boxed{x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3}$$

3. خواص الاحتمالات

الخاصية	لغة الحوادث
$0 \leq P(A) \leq 1$	A حادثة كيفية
$P(\emptyset) = 0$	الحادثة المستحيلة
$P(E) = 1$	الحادثة الأكيدة
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$	الحادثة العكسية
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	A و B حادثتان كيفيتان
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	A و B حادثتان غير متلائمتين
$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$	A و B حادثتان كيفيتان
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$	A و B حادثتان مستقلتان

مثال:

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس، منها 3 حمراء، 3 خضراء و4 بيضاء. نسحب 3 كريات من الكيس في آن واحد. ما احتمال الحصول على:

أ. 3 كريات من اللون نفسه

ب. كرية واحدة من كل لون

ج. كرية بيضاء واحدة على الأقل.

الحل:

أ. حساب احتمال الحصول على 3 كريات من اللون نفسه

$$P(A)=\frac{\underbrace{C_3^3}_{\text{3 حمراء}}+\underbrace{C_3^3}_{\text{3 خضراء}}+\underbrace{C_4^3}_{\text{3 بيضاء}}}{C_{10}^3}=\frac{6}{120}=\boxed{\frac{1}{20}}$$

ب. حساب احتمال الحصول على كرية واحدة من كل لون

$$P(B)=\frac{\underbrace{C_3^1}_{\text{1 حمراء}}\times\underbrace{C_3^1}_{\text{1 خضراء}}\times\underbrace{C_4^1}_{\text{1 بيضاء}}}{C_{10}^3}=\frac{36}{120}=\boxed{\frac{3}{10}}$$

ج. حساب احتمال الحصول على كرية بيضاء واحدة على الأقل

$$P(C)=1-\underbrace{P(\bar{C})}_{\text{لا توجد كرية بيضاء}}=1-\frac{\overbrace{C_6^3}^{\text{3 كريات بين حمراء وخضراء}}}{C_{10}^3}=1-\frac{20}{120}=\boxed{\frac{5}{6}}$$

4. قانون الاحتمال، الأمل الرياضياتي، التباين والانحراف المعياري لمتغيّر عشوائي

متغيّر عشوائي X هو دالة عددية معرّفة على مجموعة المخارج Ω ومزوّدة باحتمال P

$$X\in\{x_1;x_2;\dots;x_n\}\;;P(X=X_i)=P_i\;;\sum_{i=1}^{n}P_i=1$$

قانون الاحتمال

X_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X=X_i)$	P_1	P_2	...	P_n

الأمل الرياضياتي	التباين	الانحراف المعياري
$E(X)=\sum_{i=1}^{n}X_i\times P_i$	$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$	$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

خواص: (a عدد حقيقي ثابت)

$E(aX)=aE(X)$	$E(X+a)=E(X)+a$	$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

$V(ax)=a^2V(X)$	$V(X+a)=V(X)$	$\sigma(aX)=\lvert a\rvert\sigma(X)$	$\sigma(X+a)=\sigma(X)$

مثال:

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس، منها 3 حمراء، 3 خضراء و4 بيضاء. نسحب 3 كريات من الكيس في آن واحد، وليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب، عدد الكريات البيضاء المسحوبة.

1. ما هو قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X؟
2. احسب الأمل الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمتغيّر العشوائي X.

الحل:

1. تعيين قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X

$X \in \{0; 1; 2; 3\}$

$$P(X=0) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{1}{6}} \; ; P(X=1) = \frac{C_4^1 \times C_6^2}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 \times C_6^1}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{3}{10}} \; ; P(X=3) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{1}{30}}$$

X_i	0	1	2	3
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

تأكد دائما أنّ مجموع الاحتمالات يساوي 1 $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{3}{10}+\frac{1}{30}=1\right)$

2. حساب الأمل الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمتغيّر العشوائي X

$$E(X) = \sum X_i \times P_i = 0\left(\frac{1}{6}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{3}{10}\right) + 3\left(\frac{1}{30}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{1}{10} = \boxed{\frac{6}{5}}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum X_i^2 \times P_i - [E(X)]^2$$

$$= 0^2\left(\frac{1}{6}\right) + 1^2\left(\frac{1}{2}\right) + 2^2\left(\frac{3}{10}\right) + 3^2\left(\frac{1}{30}\right) - \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \boxed{\frac{14}{25}}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \boxed{\frac{\sqrt{14}}{5}}$$

5. الاحتمالات الشرطية

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

P_A يُسمى الاحتمال الشرطي علما أنّ A محققة
$P_A(B)$ تُقرأ: "احتمال B علما أنّ A محققة"

مثال 1: (ت1 ص211 من الكتاب المدرسي)
يحتوي صندوق على 6 كرات حمراء و3 كرات خضراء لا نميّز بينها عند اللمس. نسحب كرتين على التوالي بدون إرجاع، ولتكن الحادثة A "الكرة المسحوبة الأولى حمراء" والحادثة B "الكرة المسحوبة الثانية خضراء".
احسب $P(A)$ و $P_A(B)$ ثمّ استنتج $P(A \cap B)$.

الحل:

لدينا 6 كرات حمراء من أصل 9 كرات، أي: $P(A) = \frac{6}{9} = \boxed{\frac{2}{3}}$

بعد سحب كرة حمراء يبقى لدينا 8 كرات من بينها 3 خضراء، أي: $P_A(B) = \boxed{\frac{3}{8}}$

بما أنّ $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$، فإنّ: $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} = \boxed{\frac{1}{4}}$

مثال 2:
يحتوي صندوق على 6 كرات حمراء تحمل الأرقام 0،0،1،1،1،1 و8 كرات بيضاء تحمل الأرقام 0،0،0،1،1،1،1،1. نسحب من الصندوق كرتين في آن واحد.

1. إذا كانت الكرتان المسحوبتان تحملان الرقم 1، فما هو احتمال أن تكونا بيضاوين؟
2. احسب احتمال الحصول على كرتين تحملان نفس اللون علما أنّهما تحملان الرقم 1.

الحل:
لتكن A الحادثة "الحصول على كرتين تحملان الرقم 1"
و B الحادثة "الحصول على كرتين بيضاوين". لدينا:

$$P_A(B) = \frac{\underbrace{P(A \cap B)}_{\text{الحصول على كرتين بيضاوين تحملان الرقم 1}}}{\underbrace{P(A)}_{\text{الحصول على كرتين تحملان الرقم 1}}} = \frac{\frac{C_5^2}{C_{14}^2}}{\frac{C_9^2}{C_{14}^2}} = \frac{\frac{10}{91}}{\frac{36}{91}} = \frac{10}{36} = \boxed{\frac{5}{18}}$$

لتكن C الحادثة " الحصول على كرتين من نفس اللون"

$$P_A(C) = \frac{\underbrace{P(A \cap C)}_{\text{الحصول على كرتين من نفس اللون تحملان الرقم 1}}}{\underbrace{P(A)}_{\text{الحصول على كرتين تحملان الرقم 1}}} = \frac{\frac{C_4^2 + C_5^2}{C_{14}^2}}{\frac{C_9^2}{C_{14}^2}} = \frac{\frac{16}{91}}{\frac{36}{91}} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

6. شجرة الاحتمالات

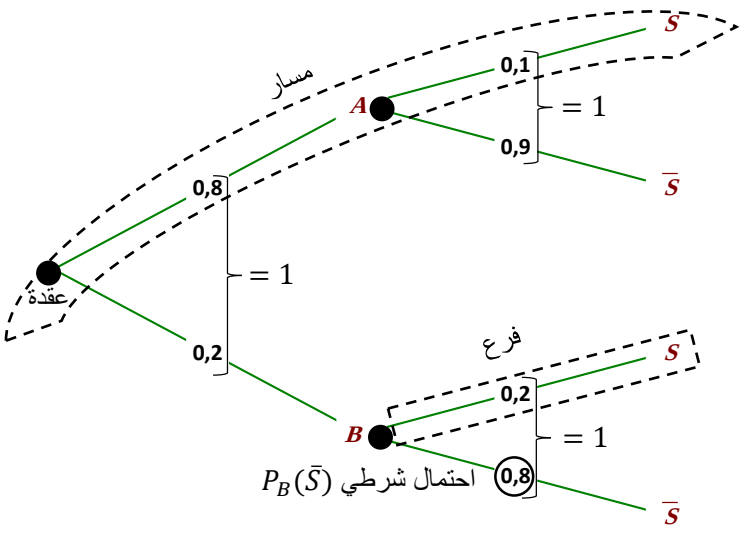
في كثير من الأحيان يمكننا نمذجة تجربة عشوائية باستعمال شجرة الاحتمالات والتي تسهل علينا الحصول على جميع المخارج المتعلقة بهذه التجربة وحساب احتمالاتها.

قواعد استعمال شجرة الاحتمالات:

1. مجموع الاحتمالات الصادرة عن كل عقدة يساوي 1
2. احتمال الحادثة المتعلقة بكل مسار يساوي جداء احتمالات الفروع الموجودة على هذا المسار
3. احتمال كل حادثة يساوي مجموع احتمالات المسارات المؤدية لهذه الحادثة

مثال 1:

لتكن A ، B وS ثلاث حوادث و$\bar{S}$ الحادثة العكسية للحادثة S.



لدينا في هذه الشجرة 3 عقد، 4 مسارات و6 فروع.

$P(A \cap S) = P(A) \times P_A(S) = 0{,}8 \times 0{,}1 = \boxed{0{,}08}$

$P(A \cap \bar{S}) = P(A) \times P_A(\bar{S}) = 0{,}8 \times 0{,}9 = \boxed{0{,}72}$

$P(B \cap S) = P(B) \times P_B(S) = 0{,}2 \times 0{,}2 = \boxed{0{,}04}$

$P(B \cap \bar{S}) = P(B) \times P_B(\bar{S}) = 0{,}2 \times 0{,}8 = \boxed{0{,}16}$

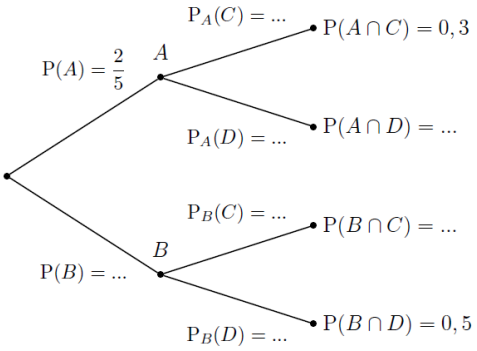
$P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S) = 0{,}08 + 0{,}04 = \boxed{0{,}12}$

$P(\bar{S}) = P(A \cap \bar{S}) + P(B \cap \bar{S}) = 0{,}72 + 0{,}16 = \boxed{0{,}88}$ ... طريقة ①

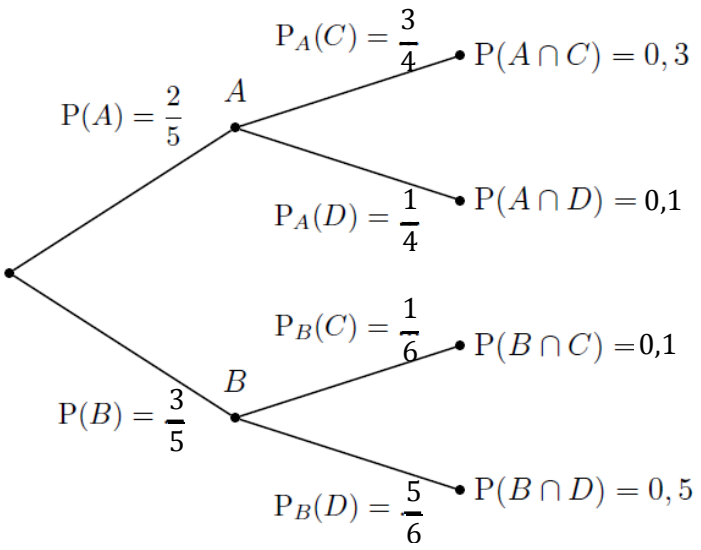
$P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0{,}12 = \boxed{0{,}88}$ ... طريقة ②

مثال 2:

أكمل شجرة الاحتمالات التالية:



الحل:



$$P(A \cap C) = P(A) \times P_A(C) \Rightarrow P_A(C) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{0,3}{\frac{2}{5}} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

$$P_A(D) = 1 - P_A(C) = 1 - \frac{3}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10} = \boxed{0,1}$$

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{5} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

$$P(B \cap D) = P(B) \times P_B(D) \Rightarrow P_B(D) = \frac{P(B \cap D)}{P(B)} = \frac{0,5}{\frac{3}{5}} = \boxed{\frac{5}{6}}$$

$$P_B(C) = 1 - P_B(D) = 1 - \frac{5}{6} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

$$P(B \cap C) = P(B) \times P_B(C) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{10} = \boxed{0,1}$$

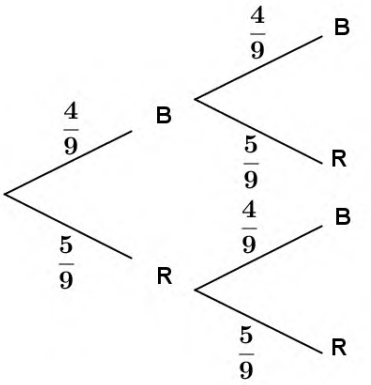
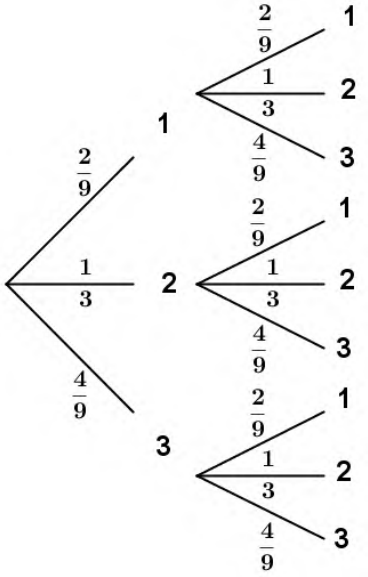
مثال3: (بكالوريا 2009 ت إ)

يحتوي كيس على 9 كرات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها 4 كرات بيضاء (B) تحمل الأرقام 3،3،2،1 و5 كرات حمراء (R) تحمل الأرقام 3،3،2،2،1. نسحب عشوائيا من هذا الكيس كرتين على التوالي مع إرجاع الكرة المسحوبة.

1. شكل شجرة الاحتمالات الموافقة لهذه الوضعية في الحالتين الآتيتين:
   أ. باعتماد ألوان الكرات
   ب. باعتماد الأرقام المسجلة على الكرات
2. احسب احتمال كل من الحوادث التالية:
   أ. A: الكرتان المسحوبتان بيضاوان
   ب. C: إحدى الكرتين المسحوبتين فقط حمراء
   ج. D: لا يظهر الرقم 1.

الحل:

بما أنّ السحب يتم على التوالي مع إرجاع الكرة المسحوبة فإنّ احتمال الحصول على كرة بيضاء (B) هو $\frac{4}{9}$ و احتمال الحصول على كرة حمراء (R) هو $\frac{5}{9}$ ، أمّا احتمال الحصول على الأرقام 1 ، 2 و 3 فهو على الترتيب: $\frac{2}{9}$ ، $\frac{3}{9}$ و $\frac{4}{9}$.

شجرة الاحتمالات باعتماد ألوان الكرات	شجرة الاحتمالات باعتماد الأرقام المسجلة على الكرات
	

حساب احتمال الحوادث A ، C و D:

$$P(A) = P(B \cap B) = \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \boxed{\frac{16}{81}}$$

$$P(C) = P(B \cap R) + P(R \cap B) = \left(\frac{4}{9} \times \frac{5}{9}\right) + \left(\frac{5}{9} \times \frac{4}{9}\right) = \boxed{\frac{40}{81}}$$

$$P(D) = P(2;2) + P(2;3) + P(3;2) + P(3;3)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} \times \frac{4}{9}\right) + \left(\frac{4}{9} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \boxed{\frac{49}{81}}$$

كيفية حساب الطرق الممكنة للسحب

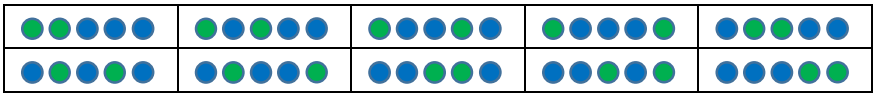
أولا: السحب على التوالي بدون إرجاع

لدينا كيس يحتوي على 7 كريات زرقاء، 4 خضراء و 3 حمراء. نسحب على التوالي بدون إرجاع 5 كريات.

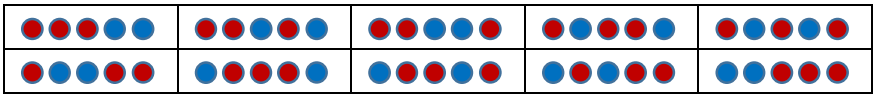
1. احتمال الحصول على 5 كريات زرقاء هو: $\frac{A_7^5}{A_{14}^5} = \frac{3}{286}$
2. احتمال الحصول على 3 كريات زرقاء و 2 خضراء هو: $C_5^2 \times \frac{A_7^3 \times A_4^2}{A_{14}^5} = \frac{15}{143}$
3. احتمال الحصول على 2 كريات زرقاء و 3 حمراء هو: $C_5^3 \times \frac{A_7^2 \times A_3^3}{A_{14}^5} = \frac{3}{286}$
4. احتمال الحصول على 3 كريات زرقاء، 1 خضراء و 1 حمراء هو:
$$C_5^1 \times C_4^1 \times \frac{A_7^3 \times A_4^1 \times A_3^1}{A_{14}^5} = \frac{30}{143}$$
5. احتمال الحصول على 2 كريات زرقاء ، 2 خضراء و 1 حمراء هو:
$$C_5^1 \times C_4^2 \times \frac{A_7^2 \times A_4^2 \times A_3^1}{A_{14}^5} = \frac{27}{143}$$

توضيح:

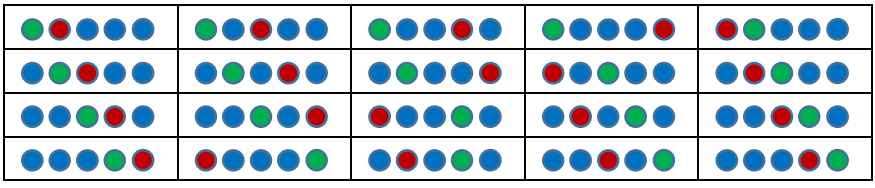
في الحالة الثانية يمثل العدد C_5^2 الحالات الممكنة لترتيب الكرتين الخضراوين ضمن الكرات الخمس وهي 10 حالات مفصلة كالتالي:



أما في الحالة الثالثة فيمثل العدد C_5^3 الحالات الممكنة لترتيب الكرات الحمراء الثلاث ضمن الكرات الخمس وهي 10 حالات أيضا لأنّ: $C_5^2 = C_5^3 = 10$



وفي الحالة الرابعة يمثل العدد C_5^1 الحالات الممكنة (5) لترتيب الكرة الخضراء ضمن الكرات الخمس والعدد C_4^1 الحالات الممكنة (4) لترتيب الكرة الحمراء ضمن الكرات الأربع المتبقية ، ويكون لدينا 20 حالة مفصلة كالتالي:



ثانيا: السحب على التوالي بإرجاع

1. احتمال الحصول على 5 كريات زرقاء هو: $\frac{7^5}{14^5} = \frac{1}{32}$
2. احتمال الحصول على 3 كريات زرقاء و 2 خضراء هو: $C_5^2 \times \frac{7^3 \times 4^2}{14^5} = \frac{5}{49}$
3. احتمال الحصول على 2 كريات زرقاء و 3 حمراء هو: $C_5^3 \times \frac{7^2 \times 3^3}{14^5} = \frac{135}{5488}$
4. احتمال الحصول على 3 كريات زرقاء، 1 خضراء و 1 حمراء هو:
$$C_5^1 \times C_4^1 \times \frac{7^3 \times 4^1 \times 3^1}{14^5} = \frac{15}{98}$$
5. احتمال الحصول على 2 كريات زرقاء ، 2 خضراء و 1 حمراء هو:
$$C_5^1 \times C_4^2 \times \frac{7^2 \times 4^2 \times 3^1}{14^5} = \frac{45}{343}$$

ثالثا: السحب في آن واحد

1. احتمال الحصول على 5 كريات زرقاء هو: $\frac{C_7^5}{C_{14}^5} = \frac{3}{286}$
2. احتمال الحصول على 2 كريات زرقاء و 3 حمراء هو: $\frac{C_7^2 \times C_3^3}{C_{14}^5} = \frac{3}{286}$
3. احتمال الحصول على 2 كريات زرقاء ، 2 خضراء و 1 حمراء هو:
$$\frac{C_7^2 \times C_4^2 \times C_3^1}{C_{14}^5} = \frac{27}{143}$$

لاحظ أنّ في حالة السحب في آن واحد نكتفي بالتوفيقات ولا نضربها في العدد الذي يحدد ترتيب سحب الكرات لأنّ في هذه الحالة الترتيب غير مهمّ.

ملاحظة:

تعمدت كتابة 2 كريات زرقاء (وهذا خطأ من الناحية اللغوية) بدلا من كريتين زرقاوين (وهو الصواب) بغرض الاختصار والتسهيل على الطالب في الربط بين عدد ولون الكريات المسحوبة وبين التوفيقات الموجودة في النتيجة، فالمعذرة يا أهل اللغة.

تمارين نموذجية في الاحتمالات

التمرين 1.

نعتبر 10 قريصات، 6 مرقمة بالرقم 0 و 4 مرقمة بالرقم 1. ما هو عدد الطرق لسحب 3 قريصات في آن واحد بحيث:

1. كل القريصات مرقمة بالرقم 0
2. قريصتان مرقمتان بالرقم 0
3. قريصة واحدة مرقمة بالرقم 0
4. كل القريصات مرقمة بنفس الرقم
5. كل القريصات مرقمة بالرقم 1
6. قريصتان مرقمتان بنفس الرقم.

التمرين 2.

يحتوي كيس على 4 قريصات بيضاء مرقمة من 1 إلى 4 و 6 قريصات سوداء مرقمة من 1 إلى 6 وقريصتين حمراوين مرقمتين بالرقمين 1 و 2. نسحب 3 قريصات من الكيس في آن واحد. ما هو عدد الحالات الممكنة بحيث:

1. كل القريصات المسحوبة من اللون نفسه
2. نسحب قريصة واحدة من كل لون
3. نسحب قريصتان من نفس اللون
4. نسحب على الأقل قريصة واحدة بيضاء
5. نسحب على الأقل قريصة واحدة حمراء
6. كل القريصات المسحوبة تحمل نفس الرقم
7. مجموع أرقام القريصات المسحوبة يشكل عددا زوجيا.

التمرين 3.

يحتوي كيس على 17 قريصة مرقمة من 1 إلى 17. نسحب بطريقة عشوائية 3 قريصات في آن واحد. ما هو عدد الحالات الممكنة لسحب:

1. قريصة واحدة تحمل عددا فرديا
2. قريصتين كلتاهما تحمل عددا أوليا
3. على الأقل قريصة واحدة تحمل عددا زوجيا
4. قريصة واحدة تحمل عددا يقبل القسمة على 3.

التمرين 4.

يحتوي كيس على 7 كريات حمراء، 5 بيضاء و 3 سوداء. نسحب عشوائيا 4 كريات في آن واحد. احسب عدد الحالات الممكنة:

1. لسحب هذه الكريات بدون تمييز

2. لسحب 4 كريات من لون واحد
3. لسحب 4 كريات من الألوان الثلاثة
4. لسحب 4 كريات من لونين مختلفين.

التمرين 5.

يحتوي كيس على 7 قريصات مرقمة من 1 إلى 7. نسحب من الكيس 3 قريصات الواحدة تلو الأخرى ونرتبها وفق ترتيب هذا السحب.

1. ما هو عدد الأعداد ذات 3 أرقام؟
2. من بين هذه الأعداد كم عددا:
   أ. يبدأ بالرقم 3
   ب. يبدأ بالرقم 1 وينتهي بالرقم 3
   ج. يحتوي على الرقم 6.

التمرين 6.

يحتوي كيس على 3 كريات بيضاء و 4 سوداء.

1. نسحب من هذا الكيس 4 كريات على التوالي دون إرجاع.
   أ. ما هو عدد الحالات الممكنة بحيث تكون الكريات المسحوبة الثلاثة الأولى سوداء والرابعة بيضاء؟
   ب. ما هو عدد الحالات الممكنة 3 كريات سوداء وواحدة بيضاء؟
2. نسحب الآن من هذا الكيس 4 كريات على التوالي بإرجاع. أجب في هذه الحالة عن السؤالين السابقين.

التمرين 7.

يتكون قسم من 9 طلبة و 3 طالبات. نريد تشكيل لجنة مكونة من 4 أشخاص. ما هو عدد الحالات الممكنة بحيث:

1. توجد في اللجنة طالبة واحدة
2. توجد في اللجنة طالبة واحدة على الأقل
3. لا توجد في اللجنة أيّة طالبة
4. يوجد في اللجنة الجنسان معا
5. يوجد في اللجنة الطالب x.

التمرين 8.

تتكون جمعية من 6 رجال و 3 نساء.

1. نريد تشكيل إدارة تتألف من رئيس، نائب وأمين.

أ. بكم طريقة يمكن اختيار هذه الإدارة؟
ب. ما هو عدد الطرق لتشكيل إدارة بحيث يكون الرئيس رجلا
ج. ما هو عدد الطرق بحيث يكون الرئيس رجلا ونائبه امرأة

2. نريد الآن تشكيل لجنة ذات 5 أشخاص من بينهم رئيسا، نائبا وأمينا. بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللجنة بحيث يكون الرئيس رجلا ونائبه امرأة؟

التمرين 9.

ما هو عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها باستعمال الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 و 6 إذا كانت هذه الأعداد تتكون من:

1. ثلاثة أرقام
2. ستة أرقام متمايزة
3. أربعة أرقام متمايزة تنتهي بالرقم 1
4. أربعة أرقام متمايزة بحيث يكون الرقم الأول مختلف عن 1
5. ثلاثة أرقام متمايزة بحيث يكون العدد أكبر من 300
6. ثلاثة أرقام متمايزة بحيث يكون العدد زوجيا.

التمرين 10.

يحتوي صندوق على 9 كريات مرقمة من 1 إلى 9. نسحب عشوائيا من هذا الصندوق 3 كريات في آن واحد. ما هو احتمال الحصول على:

1. ثلاث كريات أرقامها زوجية
2. ثلاث كريات، إحداها على الأقل تحمل رقما فرديا
3. كرتين فقط تحملان رقمين أوليين
4. ثلاث كريات مجموع أرقامها يساوي 9.

التمرين 11.

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس، منها 3 حمراء، 3 خضراء و4 بيضاء.

1. نسحب 3 كريات من الكيس في آن واحد. ما احتمال الحصول على:
   أ. 3 كريات من اللون نفسه
   ب. كرية واحدة من كل لون
   ج. كرية بيضاء واحدة على الأقل
2. نعتبر المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب، عدد الكريات البيضاء المسحوبة.

أ. ما هو قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X؟
ب. احسب الأمل الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمتغيّر العشوائي X.

التمرين 12.

يحتوي كيس على 4 كريات بيضاء، 3 سوداء وكرتين خضراوين. نسجل على كل كرية بيضاء الرقم (-1) وعلى كل كرية سوداء الرقم (2) وعلى كل كرية خضراء الرقم (3). نسحب من هذا الكيس كريتين في آن واحد.
ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب، مجموع الرقمين المسجلين على الكرتين المسحوبتين.

1. ما هي قيم المتغيّر العشوائي X ؟
2. عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X
3. احسب الأمل الرياضي $E(X)$، التباين $V(X)$ والانحراف المعياري $\sigma(X)$.

التمرين 13.

يحتوي كيس على 30 كرة، منها 5 كرات تحمل الرقم (1) و10 كرات تحمل الرقم (2) و15 كرة تحمل الرقم (3). نسحب من هذا الكيس 3 كرات في آن واحد.

1. احسب احتمال الحوادث التالية:
   A. كل الكرات المسحوبة تحمل الرقم 2
   B. الكرات المسحوبة تتألف من رقمين فقط
   C. الكرات المسحوبة تحمل 3 أرقام مختلفة
   D. كرة واحدة على الأقل من الكرات المسحوبة تحمل الرقم 2
   E. مجموع أرقام الكرات المسحوبة عدد فردي
   F. جداء أرقام الكرات المسحوبة عدد زوجي
2. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب، مجموع الرقمين المسجلين على الكرتين المسحوبتين.
3. ما هي قيم المتغيّر العشوائي X ؟
4. عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X
5. احسب الأمل الرياضي $E(X)$، التباين $V(X)$ والانحراف المعياري $\sigma(X)$.

التمرين 14.

يحتوي صندوق على 11 كرية، 5 منها سوداء و 4 بيضاء وكريتين حمراوين.

1. نسحب من الكيس 4 كريات في آن واحد. احسب احتمال سحب:
   أ. 4 كريات من اللون نفسه
   ب. كريتين من اللون نفسه وكريتين من لونين مختلفين

ج. 4 كريات من لونين مختلفين
د. كرية واحدة حمراء وعلى الأقل واحدة بيضاء

2. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب، عدد الألوان المحصل عليها.
أ. ما هو قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X؟
ب. احسب الأمل الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمتغيّر العشوائي X.

التمرين 15.

يشتري تاجر علب من الشاي الأخضر من مصنعين A وB. 80% من العلب من عند المصنع A و 20% من العلب من عند المصنع B. تأكد بعد الدراسة أنّ 10% من العلب المصنوعة في A و 20% من العلب المصنوعة في B تحتوي على آثار مبيدات.
نختار علبة من عند التاجر ونعتبر الحوادث التالية:
A الحادثة: العلبة مصدرها المصنع A
B الحادثة: العلبة مصدرها المصنع B
S الحادثة: تحتوي العلبة على آثار المبيدات.

1. ترجم الوضعية بشجرة
2. احسب احتمال الحادثة $B \cap S$
3. بيّن أنّ احتمال أن لا تحتوي العلبة على آثار المبيدات هو 0,88
4. إذا كانت العلبة المختارة تحتوي على آثار المبيدات فما هو احتمال أن يكون مصدرها هو المصنع B؟

التمرين 16.

يحتوي كيس على $n + 8$ قريصة $(n \geq 2)$ منها 8 قريصات بيضاء و n سوداء.
يسحب لاعب قريصات من الكيس فيربح نقطة على كل قريصة بيضاء ويخسر نقطتين على كل قريصة سوداء.

1. في هذا السؤال يسحب اللاعب قريصتين على التوالي بإرجاع. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب قيمة الربح أو الخسارة.
أ. عرّف بدلالة n قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$
ب. عيّن قيمة للعدد n حتى يكون الأمل الرياضياتي معدوما.
2. نفرض في هذا السؤال أنّ $n = 6$. يسحب اللاعب 3 قريصات في آن واحد. ليكن Y المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب قيمة الربح أو الخسارة.
عرّف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي Y.

التمرين 17.

I) C_1 وC_2 حجرا نرد متوازنان. تحمل أوجه المكعب C_1 الأعداد:
0 ، 0 ، $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{4\pi}{3}$ ، $\frac{4\pi}{3}$ وتحمل أوجه المكعب C_2 الأعداد: 0 ، 0 ، $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$. نرمي الحجرين في آن واحد ونسجل العددين الظاهرين على الوجهين العلويين لـ C_1 وC_2.
نرمز لهذين العددين بـ: α وβ. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل رمية العدد $\sin(\alpha+\beta)$

1. ما هي القيم الممكنة للمتغيّر العشوائي X؟ (يمكن إعطاء النتائج في جدول)
2. عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X
3. احسب الأمل الرياضي $E(X)$ والانحراف المعياري $\sigma(X)$ للمتغيّر العشوائي X

II) نجري الآن اللعبة الآتية: يربح شخص 10 نقاط عندما يرمي الحجرين ويتحصل على $\sin(\alpha+\beta)=1$ أو $\sin(\alpha+\beta)=-1$ ويخسر 5 نقاط في باقي الحالات.
ليكن Y المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل رمية قيمة الربح أو الخسارة.

1. عرّف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي Y.
2. نرمي حجري النرد 5 مرات. ما هو احتمال أن يربح اللاعب 20 نقطة؟

التمرين 18.

يحتوي كيس أ على 6 قريصات متماثلة لا نفرق بينها باللمس تحمل الأرقام التالية: 1 ، 2 ، 2 ، 2 ، 4 ، 4 ، ويحتوي كيس ب على 4 قريصات متماثلة لا نفرق بينها باللمس تحمل الأرقام التالية: 0 ، 1 ، 2 ، 4. نسحب قريصة من الكيس أ ثمّ قريصة من الكيس ب ونسمي x الرقم المسجل على القريصة المسحوبة من الكيس أ و y القريصة المسحوبة من الكيس ب.

1. احسب احتمال الحصول على رقمين متساويين $(x=y)$
2. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل ثنائية (x,y) العدد x^y. عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X واحسب أمله الرياضي.

التمرين 19.

يحتوي كيس على قريصتين بيضاوين تحملان الرقمين 1 و 1- وثلاث قريصات سوداء تحمل الأرقام التالية: 1 ، 1 و 1-. نسحب من هذا الكيس قريصتين في آن واحد.

1. احسب احتمال الحادثتين التاليتين:
   A : "الحصول على قريصتين من نفس اللون" ، B : "الحصول على قريصتين من نفس اللون ولهما نفس الرقم"

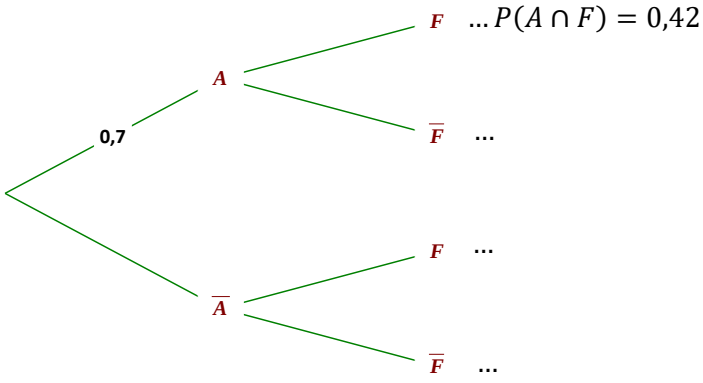
2. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الرقمين المسجلين على القريصتين.
   أ. عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X
   ب. احسب الأمل الرياضي للمتغيّر العشوائي X وتباينه.
3. نسحب الآن من الكيس قريصتين بالتتابع وبدون إعادة، وليكن a الرقم المسجل على القريصة المسحوبة الأولى و b الرقم المسجل على القريصة المسحوبة الثانية. نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)$ المستويين (P) و (P') حيث : $(P): x+ay+b=0$ و $(P'): x+by-a=0$. احسب احتمال الحادثتين التاليتين:
E : "$(P') \parallel (P)$" ، F : "$(P') \perp (P)$".

التمرين 20.

في مؤتمر صحفي لوحظ أنّ 70% من المشاركين يتكلمون اللغة الإنجليزية و63% من المشاركين يتكلمون اللغة الفرنسية و42% من المشاركين يتكلمون اللغتين معا. يُختار صحفي مشارك لاستجوابه.

نرمز بـ A إلى الحادثة : "المشارك يتكلم اللغة الإنجليزية" و F إلى الحادثة : "المشارك يتكلم اللغة الفرنسية"

1. بيّن أنّ $P_A(F)=0{,}6$ ، ثمّ استنتج $P_A(\bar{F})$
2. بيّن أنّ $P(F\cap \bar{A})=0{,}21$
3. أكمل شجرة الاحتمالات
4. ما هو احتمال أن لا يتكلم المشارك أيّ من اللغتين؟



التمرين 21.

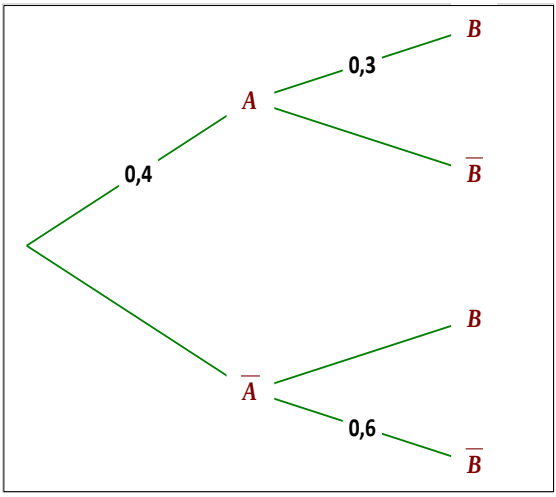
نعتبر التجربة العشوائية الممثلة بشجرة الاحتمالات التالية:

أجب بصحيح أو خطأ على كل من المقترحات التالية مع التبرير:

1) $P(\bar{A}) = 0,6$

2) $P_A(\bar{B}) = 0,7$

3) $P(B) = 0,7$



التمرين 22.

في مدينة 20% من الأشخاص لديهم حاسوب، 90% منهم يستعملون الأنترنت و60% من الأشخاص الذين ليس لديهم حاسوب يستعملون الأنترنت. نختار عشوائيا شخصا من هذه المدينة.

نرمز بـ A إلى الحادثة : " الشخص المختار لديه حاسوب "

B إلى الحادثة : " الشخص المختار يستعمل الأنترنت"

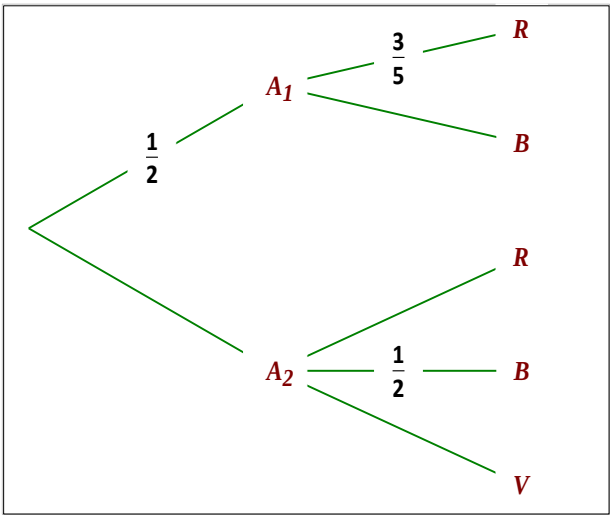
1. شكل شجرة الاحتمالات
2. ما هو احتمال أن يكون الشخص المختار ليس لديه حاسوب ولا يستعمل الأنترنت؟
3. احسب $P(\bar{A} \cap B)$ و$P(A \cap B)$ ، ثمّ استنتج $P(B)$
4. علما أن الشخص المختار يستعمل الأنترنت، ما هو احتمال أن يكون لديه حاسوب؟

التمرين 23.

نعتبر وعاء A_1 يضم 5 قريصات منها 3 حمراء و2 بيضاء ووعاء A_2 يضم 6 قريصات منها 2 حمراء، 3 بيضاء وواحدة خضراء.

نختار عشوائيا أحد الوعاءين ونسحب منه قريصة واحدة. نسمي الحادثة R "الحصول على قريصة حمراء" والحادثة B "الحصول على قريصة بيضاء" والحادثة V "الحصول على قريصة خضراء"

1. أكمل شجرة الاحتمالات
2. ما هو احتمال الحصول على قريصة حمراء؟
3. ما هو احتمال الحصول على قريصة حمراء علما أنّها من الوعاء A_1؟
4. يسحب لاعب قريصة من الكيس فيربح نقطة واحدة على كل قريصة حمراء ونقطتين على كل قريصة خضراء ويخسر نقطة واحدة على كل قريصة بيضاء، وليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب أرباح القريصات.
   أ. عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X
   ب. احسب الأمل الرياضي للمتغيّر العشوائي X وتباينه.



التمرين 24.

نرمي حجر النرد غير مزيف أوجهه مرقمة كما يلي: $1, 1, 2, 2, -1, -1$ مرتين متتاليتين ونسجل الرقمين الظاهرين.

1. عيّن Ω مجموعة الإمكانيات (الشاملة)
2. احسب احتمال الحوادث التالية:
   A. الحصول على رقمين مجموعهما 3
   B. الحصول على رقمين جداؤهما 1
   C. الحصول على رقمين متساويين
3. ما هو احتمال الحصول على رقمين جداؤهما 1 علما أنهما متساويين؟
4. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بمجموع الرقمين المحصل عليهما
   أ. عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X
   ب. احسب الأمل الرياضي للمتغيّر العشوائي X وتباينه.

التمرين 25.

كانت نسبة الحاصلين على معدل 10 فما فوق في امتحان شهادة البكالوريا في مادة الرياضيات في شعبة العلوم التجريبية هي 60%. أردنا التحقق من حصول هؤلاء التلاميذ على شهادة البكالوريا فكانت النتائج كالتالي:

احتمال أن يكون التلميذ ناجحا علما أنّه متحصل على معدل 10 فما فوق في مادة الرياضيات هو $\frac{9}{10}$

احتمال أن يكون التلميذ متحصلا على معدل 10 فما فوق في مادة الرياضيات علما أنّه ناجح في البكالوريا هو $\frac{14}{15}$

نسمي الحادثة M: " التلميذ متحصل على معدل 10 فما فوق في مادة الرياضيات" والحادثة A: " التلميذ ناجح في البكالوريا"

1. شكل شجرة الاحتمالات
2. احسب $P(M \cap A)$ و$P(\overline{M} \cap A)$ ، ثمّ استنتج $P(A)$
3. احسب $P_{\overline{M}}(A)$
4. عيّن العدد الحقيقي k حيث: $P_M(A) = k \times P_{\overline{M}}(A)$. ماذا تستنتج؟

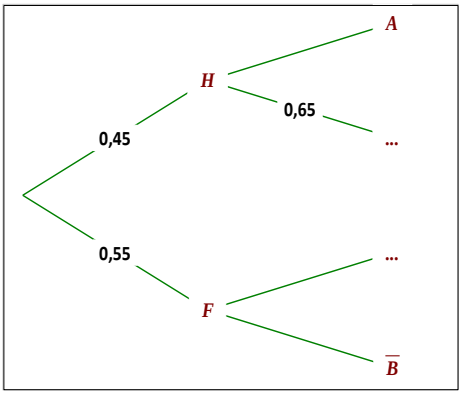
التمرين 26.

يتكون مجتمع من 55% نساء و45% رجال، 25% من النساء يتحدثن لغة أجنبية و35% من الرجال يتحدثون أيضا لغة أجنبية.

نختار عشوائيا شخصا من هذا المجتمع ونعتبر الحوادث التالية:

H "رجل" ، F "امرأة" ، A "رجل يتحدث لغة أجنبية" ، B "امرأة تتحدث لغة أجنبية"

1. انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثمّ أكملها
2. احسب احتمال أن يكون الشخص المختار:
   أ. رجلا يتحدث لغة أجنبية
   ب. امرأة لا تتحدث لغة أجنبية
   ج. شخصا يتحدث لغة أجنبية
3. احسب احتمال أن يكون الشخص المختار امرأة علما أنه يتحدث لغة أجنبية.



التمرين 27.

نسحب على التوالي وبدون إرجاع ثلاثة عناصر من المجموعة $E = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ فنحصل على ثلاثية $(a; b; c)$ من عناصر E

1. ما هو عدد الثلاثيات المختلفة التي يمكن الحصول عليها؟
2. ما هو عدد الثلاثيات المختلفة التي يمكن الحصول عليها حيث مجموع عناصرها معدوم؟
3. نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ النقط $A(2; 0)$ ، $B(0; -4)$ و $C(2; 2)$ ، ولتكن النقطة G مرجح الجملة $\{(A; a), (B; b), (C; c)\}$.
   أ. ما هو احتمال وجود النقطة G؟
   ب. ما هو احتمال أن تكون النقطة O مرجح الجملة السابقة؟

التمرين 28.

نعتبر نرد متوازن على شكل رباعي وجوه منتظم مرقم من 1 إلى 4. نرمي هذا النرد مرتين متتاليتين ونعتبر الأحداث التالية:

A: " مجموع الرقمين المحصل عليهما زوجي" ، B: " الرقم الأول المحصل عليه 4" ، C: " الرقم المحصل عليه في الرمية الأولى أكبر تماما من الرقم المحصل عليه في الرمية الثانية".

1. احسب الاحتمالات التالية: $P_A(B)$ ، $P_B(C)$ ، $P_A(C)$
2. هل الحادثتان A و B مستقلتين؟ هل الحادثتان A و C مستقلتين؟ هل الحادثتان B و C مستقلتين؟

التمرين 29.

يحتوي صندوق على 100 مكعب، 60 منها خضراء والبقية حمراء. 40% من المكعبات الخضراء مرسوم على كل وجه منها دائرة، 20% مرسوم عليها معيّن والبقية مرسوم عليها نجمة، بينما 20% من المكعبات الحمراء مرسوم عليها دائرة، $x\%$ مرسوم عليها معيّن والبقية مرسوم عليها نجمة، حيث $0 \leq x \leq 80$.

نرمز بـ: V إلى الحادثة "الحصول على مكعب أخضر"، R "الحصول على مكعب أحمر"، C "الحصول على مكعب مرسوم عليه دائرة"، L "الحصول على مكعب مرسوم عليه معيّن" و E "الحصول على مكعب مرسوم عليه نجمة"

I- نسحب من الصندوق مكعبا واحدا. (يمكنك الاستعانة بشجرة الاحتمالات)

1. بيّن أنّ: $P(L) = 0{,}12 + 0{,}004x$
2. عيّن قيمة x بحيث: $P(L) = P(E)$
3. عيّن قيمة x بحيث تكون الحادثتان V و L مستقلتين

4. نفرض أنّ $x = 50$. احسب احتمال سحب مكعب أخضر علما أنّه يحمل رسم المعيّن.

II- نسحب الآن ثلاثة مكعبات في آن واحد.

1. ما هو احتمال سحب مكعب أحمر على الأقل؟
2. ما هو احتمال أن تكون المكعبات المسحوبة من نفس اللون؟
3. ما هو احتمال سحب مكعب واحد يحمل رسم الدائرة؟

التمرين 30.

U_1 صندوق يحتوي على 3 كرات حمراء و5 خضراء و U_2 صندوق يحتوي على 3 كرات حمراء ، 3 خضراء وكرتين بيضاوين.

نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق U_1 ونضعها في الصندوق U_2، ثمّ نسحب عشوائيا من الصندوق U_2 كرتين في آن واحد.

A. احسب احتمال سحب كرتين بيضاوين من الصندوق U_2
B. احسب احتمال سحب كرتين خضراوين من الصندوق U_2
C. احسب احتمال سحب كرتين حمراوين من الصندوق U_2
D. احسب احتمال سحب كرتين مختلفتين في اللون من الصندوق U_2.

التمرين 31.

لتكن A وB حادثتان حيث: $P(A) = 0,3$ ، $P(B) = 0,8$ و $P(A \cap B) = 0,2$.

اختر الجواب الصحيح مما يلي مع التعليل:

		أ	ب	جـ
1	$P(\bar{A})$	*0,8*	*0,2*	*0,7*
2	$P(\bar{B})$	*0,5*	*0,2*	*0,7*
3	$P(A \cup B)$	*0,9*	*0,25*	*0,8*
4	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	*0,2*	*0,1*	*0,9*
5	$P_B(A)$	*0,5*	*0,3*	*0,25*
6	$P_A(B)$	*0,9*	$2/3$	*0,25*
7	$P_{\bar{B}}(\bar{A})$	*0,5*	*0,3*	*0,8*
8	$P_{\bar{B}}(A)$	*0,2*	$1/3$	$2/3$

التمرين 32.

ملاحظة: أسئلة الأجزاء الثلاثة مستقلة عن بعضها البعض.

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة لا يمكن التمييز بينها باللمس، منها 5 حمراء، 3 زرقاء وكرتين صفراوين

I- نسحب عشوائيا 3 كريات في آن واحد.

1. ما هو عدد الحالات الممكنة لهذا السحب؟
2. احسب احتمال الحادثتين التاليتين:
   A. تظهر الألوان الثلاثة في السحب
   B. من بين الكريات المسحوبة توجد على الأقل واحدة زرقاء
3. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكريات الزرقاء المسحوبة
   أ. عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي
   ب. احسب $P(e^X \geq e)$

II- نفرض أنّ الكريات المسحوبة في الجزء الأول كلها زرقاء ولم تعاد إلى الكيس.

نسحب الآن من نفس الكيس كريتين على التوالي وبدون إرجاع.

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير:

1. عدد الحالات الممكنة لهذا السحب هو 42
2. احتمال الحصول على كريتين من نفس اللون هو $\frac{10}{42}$
3. احتمال أن تكون الكرية الثانية حمراء علما أنّ الأولى صفراء هو $\frac{1}{6}$

III- نفرض أنّ الكريات المسحوبة في الجزء الثاني مختلفة اللون ولم تعاد إلى الكيس.

نسحب الآن من نفس الكيس كريتين على التوالي وبإرجاع الكرية المسحوبة.

بيّن أنّ $P_{R_2}(J_1) = \frac{1}{5}$ ، حيث: R_2 تعني الكرية الثانية حمراء وJ_1 تعني الكرية الأولى صفراء.

التمرين 33.

U_1 صندوق يحتوي على 3 كرات حمراء وكرتين خضراوين وU_2 صندوق يحتوي على 3 كرات خضراء وكرتين حمراوين. نقوم بسحب كرة عشوائيا من الصندوق U_1 ونضعها في الصندوق U_2، ثمّ نسحب عشوائيا من الصندوق U_2 كرتين في آن واحد. نرمز بـ R_1 للحادثة " سحب كرة حمراء من الصندوق U_1 " وبـ A للحادثة " سحب كرتين حمراوين من الصندوق U_2"

1. احسب الاحتمالين $P(R_1)$ و $P(R_1 \cap A)$
2. تحقّق أنّ $P(A) = \frac{11}{75}$. هل الحادثتان A و R_1 مستقلتان؟
3. علما أنّ الكرتين المسحوبتين من الصندوق U_2 حمراوين، ما احتمال أنّ الكرة المسحوبة من الصندوق U_1 كانت حمراء؟
4. نضيف n كرة حمراء إلى الصندوق U_1 ونعيد التجربة العشوائية السابقة. يربح لاعب 5 نقاط عند سحبه لكرة خضراء من الصندوق U_2 ويخسر 10 نقاط عند سحبه لكرة حمراء من هذا الصندوق. نسمي X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع أرباح اللاعب.

أ. بيّن أنّ: $P(X = -5) = \frac{9n+43}{15(n+5)}$

ب. اعط بدلالة n قانون احتمال المتغيّر العشوائي X.

التمرين 34.

نعتبر صندوقين A وB. يحتوي الصندوق A على 6 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء ويحتوي الصندوق B على 8 كرات بيضاء وكرتين سوداوين. نختار عشوائيا أحد الصندوقين ونسحب منه كرة واحدة بإرجاع. إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء نعيد السحب من نفس الصندوق، وإذا كانت الكرة المسحوبة سوداء نعيد السحب من الصندوق الآخر، ونواصل في تطبيق هذه القاعدة عند كل سحب.

I- ليكن P_n احتمال أن يكون السحب رقم n من الصندوق A $(n \in \mathbb{N}^*)$

1. احسب الاحتمالين P_1 وP_2. (نذكر أنّ السحب الثاني يتمّ من الصندوق A إمّا لأنّ السحب الأول كان كرة بيضاء من الصندوق A وإمّا لأنّ السحب الأول كان كرة سوداء من الصندوق B).
2. بيّن أنّه توجد علاقة تراجعية تعطى بالمتتالية (P_n) ، حيث من أجل كل $n \geq 2$: $P_n = aP_{n-1} + b$ حيث a وb عددان حقيقيان يُطلب تعيينهما.

II- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $u_1 = \frac{1}{2}$ ومن أجل $n \geq 2$:

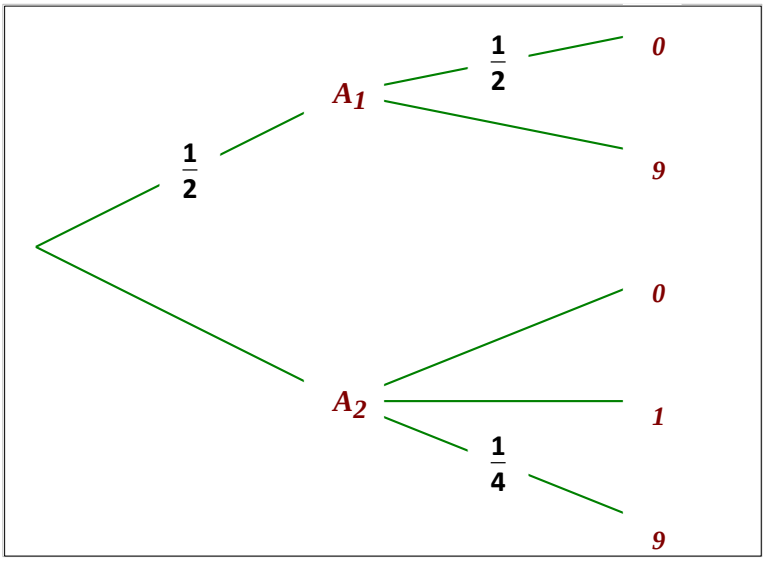
$$u_n = \frac{2}{5}u_{n-1} + \frac{1}{5}$$

1. عيّن العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n = u_n - \alpha$ متتالية هندسية
2. أعط عبارة u_n بدلالة n ، ثمّ بيّن أنّ المتتالية (u_n) متقاربة وحدّد نهايتها
3. برهن أنّه من أجل كل $n \geq 1$ لدينا : $P_n > \frac{1}{3}$
4. عيّن قيّم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $\frac{1}{3} < P_n < \frac{1}{3} + \frac{1}{10000}$.

التمرين 35.

وعاء A_1 يضم أربع قريصات مرقمة 0 ، 0 ، 9 ، 9 ووعاء A_2 يضم أربع قريصات مرقمة 0 ، 0 ، 1 ، 9. نختار عشوائيا أحد الوعاءين ونسحب منه قريصة واحدة. نرفق بكل نتيجة سحب العدد $N = 200a$ حيث a هو الرقم الذي تحمله القريصة المسحوبة.

1. أكمل شجرة الاحتمالات التالية
2. احسب احتمال الحادثة A "العدد N يساوي 2009"
3. علما أنّ العدد N يساوي 2009، ما هو احتمال أن تكون القريصة المسحوبة من الوعاء A_1 ؟
4. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب مجموع أرقام العدد N
   أ. عيّن قيّم المتغيّر العشوائي X
   ب. عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي.



التمرين 36.

يحتوي كيس U_1 على 5 كرات بيضاء و7 كرات سوداء ويحتوي كيس U_2 على كرة بيضاء و 11 كرة سوداء.

يرمي لاعب حجر نرد أوجهه مرقمة من 1 إلى 6. إذا حصل على الرقم 6 يسحب عشوائيا كرة من الكيس U_1 وإلا يسحب كرة من الكيس U_2.

نرمز بـ B للحادثة " سحب كرة بيضاء ".

1. بيّن أنّ $P(B) = \frac{5}{36}$

2. علما أنّ الكرة المسحوبة بيضاء، أي الاحتمالين أكبر: أنّ تكون الكرة المسحوبة من الوعاء U_1 أم من الوعاء U_2 ؟
3. يكرر اللاعب هذه التجربة مرتين بحيث يعيد الصندوقين إلى تعدادها الأول بعد التجربة الأولى. يربح اللاعب x نقطة (x عدد طبيعي غير معدوم) إذا حصل على كرة بيضاء ويخسر 20 نقطة إذا حصل على كرة سوداء. نسمي Y المتغيّر العشوائي الذي يرفق مجموع أرباح اللاعب بعد الانتهاء من التجربتين.
   أ. عيّن قيّم المتغيّر العشوائي Y
   ب. عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي Y واحسب أمله الرياضياتي بدلالة x
   ج. من أجل أي قيم للعدد x يكون $E(Y) \geq 0$ ؟

التمرين 37.

يحتوي وعاء على n كرة بيضاء (n عدد طبيعي غير معدوم)، 5 كرات حمراء و3 كرات خضراء. نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد.

1. ما هو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين؟
2. نرمز بـ $P(n)$ إلى احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون
   أ. أثبت أنّ $P(n) = \frac{n^2-n+26}{(n+7)(n+8)}$
   ب. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} P(n)$. فسّر النتيجة.
3. نضع فيما يلي: $n = 4$. يقوم لاعب بسحب كرتين في آن واحد ثمّ يرجعهما إلى الوعاء ويعيد السحب مرة ثانية. يدفع اللاعب مقابل إجراء هذين السحبين 30 نقطة ويتحصل من أجل كل سحب على 40 نقطة إذا كانت الكرتان من نفس اللون، بينما يتحصل على 5 نقاط فقط إذا كانت الكرتان مختلفتين في اللون.
ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحبين فرق النقاط المدفوعة والمتحصل عليها من طرف هذا اللاعب.
   أ. عيّن قيّم المتغيّر العشوائي X
   ب. عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي.

التمرين 38.

1. أ. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n على 10
   ب. عيّن باقي قسمة العدد A_n على 10 حيث:
   $A_n = 3^{16n+6} - 2 \times 109^{2n+3} - 13$

2. نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x وy حيث:
$(E): 1008x - 343y = 301$
أ. اثبت أنّ المعادلة (E) تكافئ المعادلة $144x - 49y = 43$
ب. تحقق أنّ $(x_0; y_0) = (16; 47)$ حل خاص للمعادلة $144x - 49y = 1$
ج. استنتج حلول المعادلة (E)
3. A عدد طبيعي يُكتب $\overline{xx0xx01}$ في نظام التعداد ذي الأساس 3 ويُكتب $\overline{y611}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7
أ. عيّن قيمتي العددين الطبيعيين x وy
ب. اكتب A في النظام العشري
4. يحتوي كيس على 4 كرات مرقمة ببواقي قسمة 3^n على 10. نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد
أ. احسب احتمال الحصول على رقمين مجموعهما يساوي مجموع أرقام العدد 2017
ب. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الرقمين المتحصل عليهما. عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي.

التمرين 39.

يتكون قسم من 18 تلميذ و12 تلميذة. نريد تشكيل لجنة للقسم تضم رئيسا ونائبا وأمينا.
1. ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها؟
2. ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها بحيث:
أ. يكون الأمين تلميذة
ب. يوجد في اللجنة التلميذ x
ج. يكون الرئيس تلميذا والأمين تلميذة
د. يكون الرئيس ونائبه من جنسين مختلفين
3. نفرض أنّ الرئيس تلميذ والأمين تلميذة وأنّ التلميذ x لا يريد الانضمام إلى التلميذة y.
ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها في هذه الظروف؟

التمرين 40.

تشتمل مؤسسة تربوية على أعضاء إدارة (A) ، أساتذة (P) وتلاميذ (E). يوجد 9% أساتذة و85% تلاميذ. يمثل الرجال (H) 40% من الأساتذة ، 35% من التلاميذ و75% من أعضاء الإدارة. نستجوب عشوائيا فردا من أفراد هذه المؤسسة.

1. شكل شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه التجربة
2. ما هو احتمال أن يكون الفرد المستجوب امرأة ؟
3. إذا كان الفرد المستجوب رجلا، ما هو بتقريب 10^{-2} احتمال أن يكون تلميذا ؟

التمرين 41.

يحتوي كيس على 6 كرات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس، منها 4 خضراء وكرتين حمراوين.

1. نسحب عشوائيا كرة واحدة من هذا الكيس. ما هو احتمال الحصول على كرة خضراء؟
2. نسحب عشوائيا على التوالي وبالإرجاع 4 كرات من هذا الكيس. ما هو احتمال الحصول على كرة خضراء مرتين فقط؟
3. نسحب عشوائيا على التوالي وبالإرجاع n كرة من هذا الكيس.
   أ. بيّن أنّ احتمال الحصول على كرة خضراء على الأقل هو:
   $$P = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$
   ب. عيّن أصغر قيمة للعدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $P \geq 0{,}999$. (نأخذ $\log 3 \approx 0{,}48$)

التمرين 42.

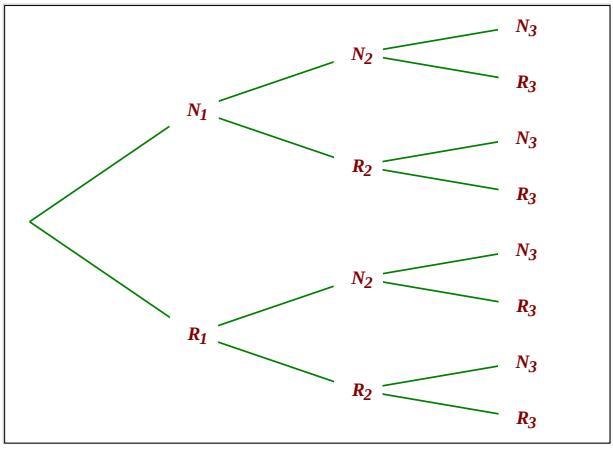
يحتوي كيس على 10 قريصات مرقمة من 1 إلى 10. نسحب 3 قريصات من الكيس في آن واحد. احسب احتمال سحب 3 قريصات:

A. أرقامها زوجية
B. أرقامها فردية
C. رقم احداها على الأقل عدد غير أولي
D. مجموع أرقامها عدد فردي
E. جداء أرقامها عدد زوجي
F. أرقامها تشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية
G. أرقامها تشكل حدودا متتابعة لمتتالية هندسية.

التمرين 43.

نعتبر 3 أكياس U_1 ، U_2 و U_3. يحتوي الكيس U_1 على كرتين سوداوين و3 كرات حمراء ويحتوي كيس U_2 على كرة سوداء و4 كرات حمراء بينما يحتوي كيس U_3 على 3 كرات سوداء و4 كرات حمراء. نسحب عشوائيا كرة من الكيس U_1 وكرة من الكيس U_2 ونضعهما في الكيس U_3 ، ثمّ نسحب عشوائيا كرة من الكيس U_3. من أجل القيم 1 ، 2 ، 3 لـ i نرمز بـ R_i للحادثة "سحب كرة حمراء من الكيس U_i" و N_i للحادثة "سحب كرة سوداء من الكيس U_i"

1. انقل واكمل شجرة الاحتمالات التالية
2. احسب احتمال الحادثتين $N_1 \cap N_2 \cap N_3$ و $N_1 \cap R_2 \cap N_3$ ، ثمّ استنتج احتمال الحادثة $N_1 \cap N_3$
3. احسب بنفس الطريقة احتمال الحادثة $R_1 \cap N_3$ ، ثمّ استنتج احتمال الحادثة N_3
4. هل الحادثتان N_1 و N_3 مستقلتان؟
5. علما أنّ الكرة المسحوبة من U_3 سوداء، ما هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_1 حمراء؟



التمرين 44.

1. (u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_1 وأساسها r
   أ. احسب u_1 و r علما أنّ : $\begin{cases} 5u_1 + 25u_2 = 3 \\ 5u_3 + u_6 = 1 \end{cases}$
   ب. اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n
   ج. عيّن قيمة العدد الطبيعي p حيث : $u_1 + u_2 + \cdots + u_p = 1$
2. نرمي زهرة نرد مزيفة بحيث احتمال ظهور كل وجه مُعطى في الجدول التالي

الوجه	1	2	3	4	5	6
الاحتمال	u_1	u_2	$\frac{11}{75}$	u_4	u_5	$\frac{4}{15}$

أ. عيّن احتمال ظهور الأوجه 1 ، 2 ، 4 و5

ب. احسب احتمال ظهور الوجه 1 علما أنّ الرقم الظاهر فردي

ج. نعتبر الحادثتين التاليتين: A "الرقم الظاهر زوجي" ، B "الرقم الظاهر مضاعف للعدد 3". هل الحادثتان A وB مستقلتان؟

التمرين 45.

I- نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $\begin{cases} u_1 = 0,1 \\ u_{n+1} = 0,24 - 0,2\, u_n \end{cases}$

1. احسب الحدود u_2 ، u_3 وu_4
2. لتكن (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n = u_n - 0,2$
   أ. اثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول
   ب. اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n واستنتج عبارة u_n بدلالة n

II- من أجل تحليل عمل آلة ورشة، نسجل شهرا بعد شهر تعطلها ونلاحظ ما يلي:

- تتعطل الآلة مرة واحدة على الأكثر خلال شهر
- إذا لم تتعطل الآلة خلال الشهر (m) ، فإنّ احتمال تعطلها في الشهر الموالي $(m+1)$ هو $0,24$
- إذا تتعطل الآلة خلال الشهر (m) ، فإنّ احتمال تعطلها في الشهر الموالي $(m+1)$ هو $0,04$
- احتمال أن تتعطل الآلة في الشهر الأول من بداية عملها هو $0,1$

نرمز بـ E_n للحادثة " تتعطل الآلة في الشهر n من بداية عملها " ونرمز بـ P_n لاحتمال الحادثة E_n

1. احسب الاحتمالات التالية: P_1 ، $P_{E_1}(E_2)$ ، $P(E_1 \cap E_2)$ ، $P(\overline{E_1} \cap E_2)$ ، P_2
2. أ. ما هي قيمتي $P_{E_n}(E_{n+1})$ و $P_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$ ؟
   ب. برهن أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $P_{n+1} = 0,24 - 0,2\, P_n$
   جـ. اكتب عبارة P_n بدلالة n
   د. اثبت أنّ المتتالية (P_n) متقاربة واحسب نهايتها.

التمرين 46.

تمارس مجموعة من المتربصين نشاطات رياضية (التنس، السباحة وكرة القدم) ونشاطات فكرية (الشطرنج والمطالعة). يعطي الجدول التالي توزيع 150 متربص حسب نشاطه الرياضي والفكري.

	التنس (T)	السباحة (N)	كرة القدم (F)	المجموع
الشطرنج (E)	45	18	27	90
المطالعة (L)	33	9	18	60
المجموع	78	27	45	150

نختار عشوائيا متربصا. حدد في كل حالة من الحالات التالية الجواب الوحيد الصحيح مع التعليل:

1. احتمال الحادثة "يمارس المتربص التنس أو المطالعة" هو:
   أ) $\frac{138}{150}$ ب) $\frac{33}{150}$ جـ) $\frac{105}{150}$
2. احتمال الحادثة "يمارس المتربص كرة القدم والمطالعة" هو:
   أ) $\frac{18}{45}$ ب) $\frac{18}{60}$ جـ) $\frac{18}{150}$
3. يمثل العدد $\frac{45}{78}$ احتمال الحادثة "يمارس المتربص ...":
   أ) التنس والشطرنج ب) التنس علما أنّه يمارس الشطرنج
   جـ) الشطرنج علما أنّه يمارس التنس
4. احتمال الحادثة "يمارس المتربص السباحة علما أنّه يمارس المطالعة" هو:
   أ) $\frac{9}{27}$ ب) $\frac{9}{18}$ جـ) $\frac{9}{60}$
5. الحادثتان "يمارس المتربص كرة القدم" و "يمارس المتربص الشطرنج":
   أ) غير متلائمتين ب) مستقلتان جـ) غير الجوابين

التمرين 47.

يحتوي كيس U_1 على قريصتين تحملان الرقم (1) و4 قريصات تحمل الرقم (2) ويحتوي كيس U_2 على 3 كرات حمراء و 4 كرات خضراء. نسحب عشوائيا قريصة واحدة من الكيس U_1.

1. احسب احتمال الحادثتين التاليتين: A " سحب قريصة تحمل الرقم (1) " ، B للحادثة " سحب قريصة تحمل الرقم (2) "

2. نعتبر في هذا السؤال التجربة العشوائية التالية: نسحب قريصة واحدة من الكيس U_1 ونسجل رقمها. إذا كان هذا الرقم هو (1) نسحب كرة واحدة من الكيس U_2 وإذا كان هذا الرقم هو (2) نسحب كرتين في آن واحد من الكيس U_2. ليكن n عدد الكرات الحمراء المسحوبة من الكيس U_2 ونرمز بـ: E_n للحادثة "الحصول على n كرة حمراء"

أ. بيّن أنّ: $P(E_1) = \frac{11}{21}$ و $P(E_2) = \frac{2}{21}$

ب. احسب احتمال الحادثة A علما أنّ الحادثة E_1 محققة.

التمرين 48.

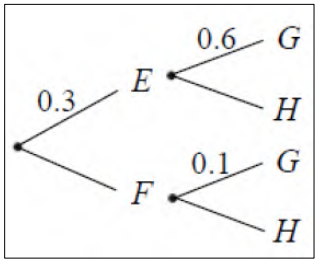
لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط. عيّن الجواب الصحيح معللا اختيارك:

1. إذا كانت A وB حادثتين مستقلتين بحيث $P(A) = 0,6$ و$P(B) = 0,3$ فإنّ:

أ) $P(A \cup B) = 0,9$ ب) $P(A \cap B) = 0,18$ جـ) $P_A(B) = 0,4$

2. نعتبر الشجرة المتوازنة المقابلة. الاحتمال الشرطي $P_H(F)$ يساوي:

أ) 0,63 ب) 0,75 جـ) 0,84



3. الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X يساوي:

أ) $\frac{3}{2}$ ب) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ جـ) 2

X_i	1	2	4
P_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

4. A وB حادثتان حيث $P(A) = 0,4$ ، $P(B) = 0,5$ و $P(\overline{A \cup B}) = 0,35$. احتمال الحادثة $P(A \cap B)$ هو:

أ) 0,1 ب) 0,25 جـ) لا نعرف

5. A وB حادثتان حيث $P(A) = 0,3$ ، $P_A(B) = 0,4$ و $P(A \cup B) =$ 0,68. احتمال الحادثة $P(B)$ هو:

أ) 0,204 ب) 0,272 جـ) 0,5

التمرين 49.

يحتوي صندوق U_1 على 5 كرات حمراء و3 كرات خضراء ويحتوي صندوق U_2 على كرة خضراء و4 كرات حمراء.

I- نختار عشوائيا أحد الصندوقين ونسحب منه كرة واحدة.

إذا علمت أنّ $P(u_2) = 2P(u_1)$

1. شكل شجرة الاحتمالات المناسبة لهذه التجربة
2. احسب احتمال سحب كرة حمراء
3. احسب احتمال سحب كرة خضراء علما أنّها سُحبت من الصندوق U_1

II- نعتبر أنّ اختيار الصندوق U_1 يُعطي 4 نقاط واختيار الصندوق U_2 يُعطي نقطتين، بينما اختيار كرة حمراء يُعطي نقطة واحدة واختيار كرة خضراء يُعطي 3 نقاط، وليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع نقاط الصندوق المختار والكرة المسحوبة.

1. عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X
2. احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

التمرين 50.

بينت دراسة إحصائية لتلاميذ السنة الثالثة ثانوي بإحدى الثانويات أنّ 30% من التلاميذ قدموا من الإكمالية A ، 45% من الإكمالية B والبقية من الإكمالية C. بعد اجتياز التلاميذ لامتحان البكالوريا تبيّن ما يلي: نجح في الامتحان 25% من التلاميذ القادمين من الإكمالية A و18% من الذين قدموا من الإكمالية B و84% من التلاميذ قدموا من الإكمالية C.

نختار تلميذا من تلاميذ السنة الثالثة ثانوي بطريقة عشوائية بعد اجتياز امتحان البكالوريا.

يرمز R إلى الحادثة "التلميذ المختار نجح في الامتحان"

يرمز A إلى الحادثة "التلميذ المختار قادم من الإكمالية A"

يرمز B إلى الحادثة "التلميذ المختار قادم من الإكمالية B"

يرمز C إلى الحادثة "التلميذ المختار قادم من الإكمالية C"

1. انجز شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية
2. أثبت أنّ $P(C \cap R) = 0,21$

3. احسب $P(R)$ احتمال الحادثة R
4. احسب الاحتمال الشرطي $P_R(B)$.

التمرين 51.

عدد تلاميذ قسم دراسي هو 35 تلميذا من بينهم 15 بنتا. يختار كل تلميذ من القسم رياضة واحدة فقط يمارسها في إطار نشاطات النادي الرياضي للمؤسسة. 75% من الأولاد اختاروا ممارسة كرة القدم و15% اختاروا ممارسة كرة اليد بينما اختار 10% ممارسة الكرة الطائرة. 60% من البنات اخترن ممارسة الكرة الطائرة والبقية اخترن ممارسة كرة اليد. لتمثيل هذا القسم في منافسة رياضية، يتم اختيار تلميذ واحد منه بطريقة عشوائية.

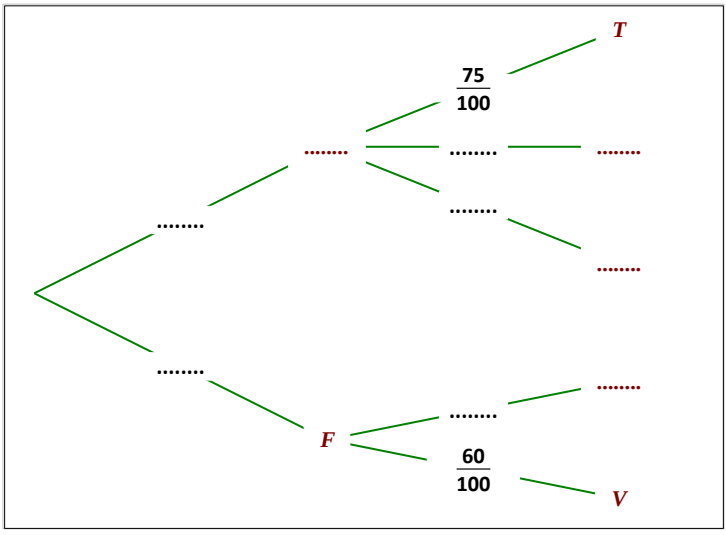
يرمز G إلى الحادثة "التلميذ المختار ولد" ويرمز F إلى الحادثة "التلميذ المختار بنت"

يرمز T إلى الحادثة "التلميذ المختار يمارس كرة القدم"

يرمز M إلى الحادثة "التلميذ المختار يمارس كرة اليد"

يرمز V إلى الحادثة "التلميذ المختار يمارس الكرة الطائرة"

1. انقل الشجرة المقابلة على ورقة الإجابة، ثمّ أكملها
2. احسب $P(V)$ احتمال أن تتحقق الحادثة V
3. احسب الاحتمال الشرطي $P_V(G)$.
4. احسب احتمال أن يكون التلميذ المختار لا يمارس كرة القدم. (تُعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال).



التمرين 52.

U_1 ، U_2 وU_3 ثلاثة أكياس يحوي كل منها 6 كريات متماثلة. يحوي الكيس U_1 كريتين بيضاوين و4 كريات حمراء ويحوي الكيس U_2 ثلاث كريات بيضاء وثلاث كريات

حمراء، أمّا الكيس U_3 فإنّه يحوي خمس كريات بيضاء وكرية حمراء. نختار عشوائيا كيسا ثمّ نسحب منه كرية واحدة.

1. شكل شجرة الاحتمالات المتوازنة التي تنمذج هذه الوضعية
2. احسب احتمال سحب كرية بيضاء من الكيس U_3
3. ما احتمال سحب كرية بيضاء؟
4. احسب احتمال سحب كرية من الكيس U_3 علما أنّها بيضاء.

التمرين 53.

يحتوي كيس U_1 على 5 كريات بيضاء و7 كريات سوداء لا نفرق بينها عند اللمس.

1. يسحب لاعب 3 كريات عشوائيا في آن واحد.
   أ. احسب احتمال الحوادث التالية:
   - A "يسحب اللاعب كرية بيضاء واحدة فقط "
   - B "يسحب اللاعب كريتين بيضاوين"
   - C "يسحب اللاعب 3 كريات بيضاء"

   ب. يربح اللاعب 10 نقاط من أجل كل كرية بيضاء مسحوبة، وليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع النقاط المحصل عليها. عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X واحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.
2. يسحب اللاعب كرية واحدة من الكيس، فإذا كانت الكرية المسحوبة بيضاء يربح اللاعب 10 نقاط ويتوقف عن اللعب، وإذا كانت الكرية المسحوبة سوداء، يعيد اللاعب الكرية المسحوبة إلى الكيس ويسحب كرية أخرى في نفس الظروف. تتكرر العملية وتتوقف اللعبة تلقائيا عند السحب الثالث.
   احسب احتمال الحوادث التالية:
   - D "يربح اللاعب في السحب الأول"
   - E "يربح اللاعب في السحب الثاني"
   - F "يربح اللاعب في السحب الثالث"
   - G "لا يربح اللاعب شيئا"

التمرين 54.

D_1 و D_2 حجرا نرد متوازنان. تحمل أوجه المكعب D_1 الأرقام 1،1،2،3،3،4 وتحمل أوجه المكعب D_2 الأرقام 1،2،3،4،5،6.

نرمي الحجرين في آن واحد ونسجل الرقمين الظاهرين على الوجهين العلويين لـ D_1 و D_2. نرمز لهذين الرقمين بـ: a وb.

1. احسب احتمال الحادثتين التاليتين:
   أ. A "الحصول على رقمين متساويين"
   ب. B "الحصول على رقمين فرديين"
2. نعتبر في هذا السؤال التجربة التالية: نرمي الحجر D_2 مرة واحدة ونسجل الرقم الظاهر على الوجه العلوي الذي نرمز له بـ n، ونرفق بكل رقم ظاهر $(1 \leq n \leq 6)$ الثنائية (a, b) حيث $a = 5n + 3$ و $b = 3n + 1$.
   أ. من أجل $n \in \{1,2,3,4,5,6\}$ ، أعط الثنائية (a, b) المرفقة بالإضافة إلى $d = PGCD(a, b)$
   ب. احسب احتمال الحادثتين التاليتين:
   - C "الحصول على عددين أوليين"
   - D "الحصول على عددين أوليين فيما بينهما".

التمرين 55.

في ثانوية ما، 25% من التلاميذ مستواهم ضعيف في مادة الرياضيات و15% منهم مستواهم ضعيف في مادة الفيزياء و10% مستواهم ضعيف في المادتين معا. نختار عشوائيا تلميذا واحدا من هذه الثانوية.

1. احسب احتمال أن يكون مستوى هذا التلميذ ضعيفا في المادتين معا.
2. احسب احتمال أن يكون مستوى هذا التلميذ ضعيفا في مادة الرياضيات أو في مادة الفيزياء.
3. إذا كان مستوى هذا التلميذ ضعيفا في مادة الفيزياء، ما احتمال أن يكون مستواه ضعيفا في مادة الرياضيات أيضا؟
4. إذا كان مستوى هذا التلميذ ضعيفا في مادة الرياضيات، ما احتمال أن يكون مستواه ضعيفا في مادة الفيزياء أيضا؟

التمرين 56.

$\frac{3}{4}$ من مترشحي البكالوريا في أحد أقسام السنة النهائية يعملون بجد خلال السنة الدراسية. احتمال نجاح مترشح يعمل بجد هو $\frac{9}{10}$ واحتمال نجاح مترشح لم يعمل بجد هو $\frac{2}{10}$. نقول عن مترشح أنّه مفاجأة إذا عمل بجد ولم ينجح أو نجح ولم يعمل بجد. نعتبر الحوادث التالية:

T "المترشح يعمل بجد" ، A "المترشح ناجح" ، S "المترشح مفاجأة". نختار عشوائيا مترشحا من هذا القسم.

1. شكل شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية
2. احسب احتمال الحوادث: $T \cap A$ ، $T \cap \bar{A}$ و $\bar{T} \cap A$

3. ما احتمال أن يكون المترشح ناجحا؟
4. علما أن المترشح ناجح، ما احتمال أن يكون عمل بجد؟
5. بيّن أنّ $P(S) = 0,125$.

التمرين 57.

نعتبر نرد على شكل رباعي وجوه منتظم يحمل الأرقام التالية: 1،1،3،5.

1. نرمي هذا النرد مرتين، وليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل رميتين مجموع الرقمين المسجلين على الوجه الأسفل خلال الرميتين.
   أ. عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X
   ب. احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.
2. نرمي هذا النرد عدة مرات متتالية ونعتبر كل رمية مستقلة عن الأخرى، وليكن u_n احتمال الحادثة التالية: "ظهور رقم 3 لأول مرة على الوجه الأسفل في الرمية ذات الرتبة n" حيث n عدد طبيعي غير معدوم.
   أ. احسب u_1 ، u_2 و u_3 ، ثمّ اكتب عبارة u_n بدلالة n
   ب. احسب بدلالة n الاحتمال S_n للحادثة التالية: "لا يظهر الرقم 3 على الوجه الأسفل في الرمية ذات الرتبة $n + 1$"
   ج. احسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$. ما يمكن القول عن هذه الحادثة عندما يؤول n إلى $+\infty$ ؟

التمرين 58.

I- يحتوي صندوق على خمس كريات بيضاء مرقمة بـ : 1،1،1،0،1- وخمس كريات سوداء مرقمة بـ : 1،1،0،0،1- ، لا نفرق بينها عند اللمس. نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من الصندوق ونعتبر الحوادث التالية:

A "الحصول على كرية بيضاء واحدة فقط" ، B "الحصول على كرية بيضاء على الأقل" ، C "الكريات المسحوبة لها نفس اللون" ، D "الكريات المسحوبة من لونين مختلفين" ، F "مجموع أرقام الكريات المسحوبة معدوم".

أ. احسب احتمال الحوادث A ، B و C

ب. بيّن أنّ: $P(D) = \frac{5}{6}$ ، $P(F) = \frac{31}{120}$ و $P(C \cap F) = \frac{7}{120}$

ج. إذا كان مجموع أرقام الكريات المسحوبة معدوم، ما احتمال أن تكون الكريات من نفس اللون؟

II- نعتبر المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع أرقام الكريات المسحوبة

1. عيّن قيم المتغيّر العشوائي X
2. عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

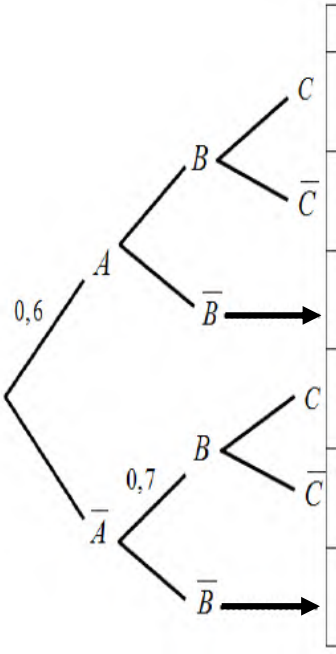
التمرين 59.

يحتوي صندوق على 12 كرية متجانسة ومرقمة من 1 إلى 12. نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من هذا الصندوق.

1. احسب احتمال الحوادث التالية:
   - A. "الحصول على 3 أرقام تقبل القسمة على 3"
   - B. "الحصول على رقم واحد يقبل القسمة على 3"
   - C. "الحصول على 3 أرقام تشكل متتالية حسابية أساسها $r = 3$"
   - D. "الحصول على 3 أرقام تشكل متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$"
2. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات التي تقبل أرقامها القسمة على 3
   - أ. عيّن قيم المتغيّر العشوائي X
   - ب. عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين 60.

I- انقل شجرة الاحتمالات التالية ثمّ أتممها.



المتغير العشوائي X	الاحتمال P
3	.....
2	0,108
0	0,42
2	0,1344
3	.....
0	.....

II- بالاعتماد على الشجرة، عيّن الإجابة الصحيحة الوحيدة من بين الاقتراحات التالية مع التعليل:

1. الاحتمال $P(A \cap B \cap C)$ هو:
   أ) 1,3 ب) 0,4 ج) 0,072
2. الاحتمال $P(C)$ هو:
   أ) 0,1344 ب) 0,2064 ج) 0,072
3. الاحتمال $P(\bar{B})$ هو:
   أ) 0,54 ب) 0,42 ج) 0,072
4. الاحتمال $P_{A\cap B}(\bar{C})$ هو:
   أ) 0,2536 ب) 0,6 ج) 0,88
5. الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X هو:
   أ) 1,1376 ب) 1 ج) 3,1020

التمرين 61.

زهرة نرد غير متوازنة، تحمل أوجهها الأرقام 1،2،3،4،5،6 احتمالات ظهورها في رمية واحدة هي $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$.

1. احسب الاحتمالات $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ إذا علمت أنها تمثل بهذا الترتيب حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$
2. نرمي زهرة النرد هذه مرة واحدة.
   أ. ما احتمال ظهور رقم زوجي؟
   ب. ما احتمال ظهور رقم مضاعف لـ 3؟
3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية العدد المحصل عليه.
   عرّف قانون الاحتمال واحسب أمله الرياضياتي والتباين.

التمرين 62.

زهرة نرد غير متوازنة، تحمل أوجهها الأرقام 1،2،3،4،5،6 احتمالات ظهورها في رمية واحدة هي $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$.

1. احسب هذه الاحتمالات إذا علمت أن:
   - P_1, P_3, P_5 تمثل بهذا الترتيب حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{8}$
   - P_2, P_4, P_6 تمثل بهذا الترتيب حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$
   - $3P_1 = 2P_2$
2. احسب احتمال الحادثتين:
   A. "ظهور رقم زوجي"
   B. "عدم ظهور الرقم 6"

3. نرمي زهرة النرد هذه مرتين، وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية القيمة المطلقة لفرق الرقمين المحصل عليهما.
عرّف قانون الاحتمال واحسب أمله الرياضياتي.

التمرين 63.

يحتوي كيس على 3 زهرات نرد مكعبة، منها اثنتان عاديتان أوجه كل منهما تحمل مرقمة من 1 إلى 6، وواحدة خاصة لها 3 أوجه تحمل الرقم 1 و3 أوجه تحمل الرقم 6. نسحب من هذا الكيس زهرتي نرد في آن واحد ثمّ نرمي النردين ونسجل الرقمين الظاهرين على الوجهين العلويين. نسمي الحادثة A "الزهرتان المسحوبتان عاديتان" والحادثة B "الوجهان العلويان يحملان الرقم 6"

1. عيّن الحادثة العكسية للحادثة A واحسب $P(\bar{A})$
2. احسب $P_A(B)$ و $P(B \cap A)$ ، ثمّ استنتج $P(B)$
3. بيّن أنّ $P_B(A) = \frac{1}{7}$.

التمرين 64.

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة بحدها الأول $u_1 = \frac{1}{2}$ والعلاقة التراجعية

$$u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}$$

لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل $n \geq 1$ كما يلي: $v_n = u_n - \frac{2}{5}$

1. بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول، ثمّ اكتب عبارة u_n بدلالة n
2. نعتبر حجري نرد A وB حيث يحتوي A على 3 أوجه حمراء و3 أوجه خضراء، بينما يحتوي B على 4 أوجه حمراء ووجهين أخضرين. نأخذ عشوائيا أحد الحجرين ونرميه، إذا حصلنا على وجه أحمر نحتفظ بنفس الحجر وإذا حصلنا على وجه أخضر نغيّر الحجر ونرمي مرّة ثانية وهكذا... نسمي A_n الحادثة "نستعمل الحجر A في الرمية n" و $\overline{A_n}$ الحادثة العكسية لها، ونسمي R_n الحادثة "نحصل على وجه أحمر في الرمية n" و $\overline{R_n}$ الحادثة العكسية لها، نرمز بـ a_n و r_n لاحتمالي الحادثتين A_n و R_n على الترتيب.
   أ. احسب a_1 و r_1 (يمكن استعمال شجرة الاحتمالات)
   ب. بملاحظة أنّه من أجل كل $n \geq 1$:
   $R_n = (R_n \cap A_n) \cup (R_n \cap \overline{A_n})$ ، بيّن أنّ $r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}$
   ج. بيّن أنّه من أجل كل $n \geq 1$:
   $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$ ، ثمّ استنتج أنّ: $a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$

د. استنتج عبارة r_n بدلالة n ، ثمّ احسب $\lim_{n\to\infty} r_n$.

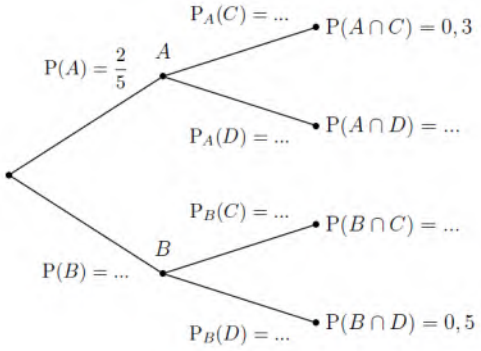
التمرين 65.

يحتوي كيس على 4 كريات حمراء و n كرية سوداء حيث n عدد طبيعي و $n \geq 2$.

1. نعتبر $n = 5$ ونسحب 3 كريات من الكيس على التوالي دون إرجاع.
   أ. احسب احتمال الحادثتين التاليتين:
   A. "الحصول على 3 كريات من نفس اللون"
   B. "الحصول على كرة واحدة حمراء على الأقل"
   ب. بيّن أنّ احتمال الحصول على كرة واحدة حمراء فقط هو: $\frac{10}{21}$
2. في هذا الجزء نعتبر n كيفي ونسحب من الكيس كريتين على التوالي بإرجاع. وليكن Y المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات السوداء المسحوبة
   أ. عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي Y
   ب. بيّن أنّ: $E(Y) = \frac{2n}{n+4}$
   ج. عيّن n حيث: $E(Y) = \frac{42}{25}$.

التمرين 66.

أكمل شجرة الاحتمالات التالية:



التمرين 67.

n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 4. لدينا 3 صناديق u_1 ، u_2 و u_3 حيث:

- يحتوي الصندوق u_1 على كرة حمراء واحدة و $(n-1)$ كرة بيضاء
- يحتوي الصندوق u_2 على كرتين حمراوين و $(n-2)$ كرة بيضاء
- يحتوي الصندوق u_3 على ثلاث كرات حمراء و $(n-3)$ كرة بيضاء

I- نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق الثلاثة ثمّ نسحب منه في آن واحد كرتين.
ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات الحمراء المسحوبة

1. عيّن قيم المتغيّر العشوائي X
2. عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X
3. علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين، ما هو احتمال أن يكون السحب من الصندوق u_3 ؟

II- نسحب الآن الكرات من الصندوق u_2 الواحدة تلو الأخرى بدون إرجاع دون توقف إلى أن نحصل على كرة بيضاء فنوقف التجربة. نعتبر المتغيّر العشوائي Y الذي يساوي عدد الكرات المسحوبة إلى غاية إيقاف التجربة

1. عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي Y واحسب الأمل الرياضياتي $E(Y)$ والتباين $V(Y)$
2. عين قيمة n حيث: $E(Y) = \frac{13}{11}$.

التمرين 68.

اختر الإجابة الصحيحة الوحيدة مع التعليل لكل واحدة من الأسئلة المستقلة التالية:

1. يحتوي صندوق على 3 كرات حمراء و5 كرات سوداء. نسحب منه عشوائيا وفي آن واحد 3 كرات.
احتمال الحصول على كرة حمراء وكرتين سوداوين هو:

أ	$\frac{15}{28}$	ب	$\frac{15}{64}$	جـ	$\frac{13}{56}$	د	$\frac{75}{512}$

2. تحسبا لانتشار عدوى الأنفلونزا في مدينة، تمّ تلقيح ثلث سكانها. نسبة المصابين بالعدوى ممن تمّ تلقيحهم هي $\frac{1}{10}$. نختار عشوائيا شخصا من هذه المدينة، احتمال أن يكون الشخص المختار مصاب بالعدوى هو 0,25.
احتمال أن يكون الشخص المختار مصاب بالعدوى علما أنّه ملقح هو:

أ	$\frac{4}{30}$	ب	$\frac{1}{12}$	جـ	$\frac{3}{40}$	د	$\frac{1}{120}$

3. يرمي لاعب زهرة نرد متوازنة ويحصل على 10 نقاط عند ظهور الرقم 1 ونقطة واحدة عند ظهور الرقمين 2 أو 4، وفي بقية الحالات لا يحصل على شيء. نسمي X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية عدد النقاط المحصل عليها.
التباين $V(X)$ للمتغير العشوائي X هو:

أ	17	ب	16	جـ	13	د	2

التمرين 69.

اختر الإجابة الصحيحة الوحيدة مع التعليل لكل واحدة من الأسئلة التالية: يحتوي صندوق على 5 كرات حمراء و3 كرات سوداء.

1. نسحب من الصندوق عشوائيا وفي آن واحد 3 كرات.

احتمال الحصول على 3 كرات سوداء هو:

أ	$\frac{1}{3!}$	ب	$\frac{1}{120}$	جـ	$\frac{1}{56}$

احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون هو:

أ	$\frac{16}{24}$	ب	$\frac{11}{120}$	جـ	$\frac{11}{56}$

2. نسحب الآن من الصندوق عشوائيا 5 كرات على التوالي بإرجاع

احتمال الحصول على 5 كرات سوداء هو:

أ	$\left(\frac{1}{5}\right)^5$	ب	$\left(\frac{3}{8}\right)^5$	جـ	$\left(\frac{3}{8}\right)^5 \times \left(\frac{5}{8}\right)^3$

احتمال الحصول على كرتين حمراوين و3 كرات سوداء هو:

أ	$10\left(\frac{5}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2$	ب	$2\left(\frac{5}{8}\right) + 3\left(\frac{3}{8}\right)$	جـ	$\left(\frac{5}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2$

3. نسحب الآن من الصندوق عشوائيا كرتين على التوالي بدون إرجاع. ولتكن الحوادث التالية:

R_1 : "الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء"

N_1 : "الكرة المسحوبة في المرة الأولى سوداء"

R_2 : "الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء"

N_2 : "الكرة المسحوبة في المرة الثانية سوداء"

$P_{R_1}(R_2)$ يساوي:

أ	$\frac{5}{14}$	ب	$\frac{4}{7}$	جـ	$\frac{5}{8}$

احتمال الحادثة $R_1 \cap N_2$ هو:

أ	$\frac{15}{56}$	ب	$\frac{15}{64}$	جـ	$\frac{16}{49}$

احتمال الحصول على كرة حمراء في المرة الثانية هو:

أ	$\frac{3}{28}$	ب	$\frac{5}{7}$	جـ	$\frac{5}{8}$

احتمال الحصول على كرة حمراء في المرة الأولى علما أن الكرة المسحوبة في المرة الثانية سوداء هو:

أ	$\frac{5}{7}$	ب	$\frac{3}{8}$	جـ	$\frac{15}{56}$

التمرين 70. (بكالوريا 2015 ت إ)

1. A وB حادثتان من مجموعة إمكانيات، حيث $P(A) = 0,3$ و $P_A(B) = 0,4$. احتمال الحادثة $P(A \cap B)$ هو:

أ) 0,12 ب) 0,1 جـ) 0,7

2. A وB حادثتان مستقلتان من مجموعة إمكانيات، حيث $P(A) = 0,3$ و $P(B) = 0,4$. احتمال الحادثة $P(A \cup B)$ هو:

أ) 0,7 ب) 0,58 جـ) 0,12

3. A وB حادثتان من مجموعة إمكانيات، حيث $P(A) = 0,3$ ، $P_A(B) = 0,4$ و $P(A \cup B) = 0,68$. احتمال الحادثة $P(B)$ هو:

أ) 0,204 ب) 0,272 جـ) 0,5

التمرين 71. (بكالوريا 2015 ت إ)

مصنع سيارات يشتغل بوحدتين A وB وينتج نوعين: سيارات تسير بالبنزين يُرمز إليها بـ E وأخرى بغير البنزين $\bar{E}$. رُبع انتاج هذا المصنع تصنعه الوحدة A.

اشترى شخص سيارة من إنتاج هذا المصنع، احتمال أن تكون هذه السيارة من صنع الوحدة A وتسير بالبنزين يساوي $\frac{1}{6}$، واحتمال أن تكون من صنع الوحدة B وتسير بالبنزين يساوي $\frac{3}{8}$. (تُعطى كل النتائج على شكل كسر غير قابل للاختزال)

1. بيّن أنّ احتمال أن تكون السيارة تسير بالبنزين علما أنّها من صنع الوحدة A يساوي $\frac{2}{3}$.
2. احسب احتمال أن تكون السيارة تسير بالبنزين علما أنّها من صنع الوحدة B.
3. أ. احسب احتمال أن تكون السيارة تسير بالبنزين.

ب. علما أنّ السيارة تسير بالبنزين ما احتمال أن تكون من صنع الوحدة A؟

انجز شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية.

التمرين 72. (بكالوريا 2016 ت إ)

الجدول التالي يعطي توزيع 500 تلميذ في إحدى الثانويات.

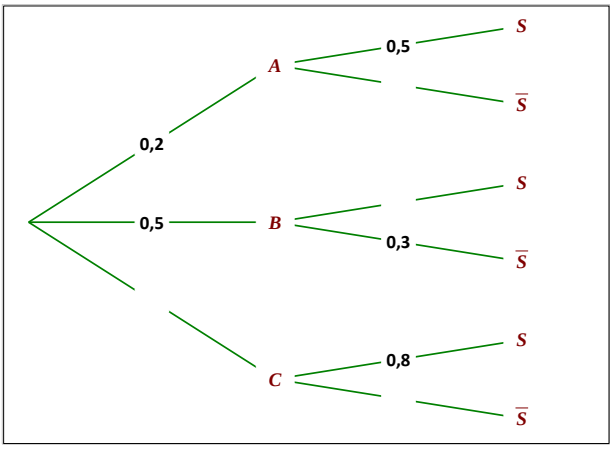
التلميذ	ذكور	إناث
يملك هاتفا نقالا	60	240
لا يملك هاتفا نقالا	120	80

نختار عشوائيا تلميذا من الثانوية ونسمي H الحادثة: "التلميذ المختار ذكرا" ، F الحادثة: "التلميذ المختار أنثى" ، S الحادثة: "التلميذ يملك هاتفا نقالا" ، $\bar{S}$ الحادثة: "التلميذ لا يملك هاتفا نقالا"

1. شكل شجرة الاحتمالات لهذه الوضعية.
2. احسب احتمال كل حادثة مما يلي:
   أ. التلميذ المختار أنثى وتملك هاتفا نقالا
   ب. التلميذ المختار لا يملك هاتفا نقالا
3. نفرض أنّ التلميذ المختار لا يملك هاتفا نقالا. ما هو احتمال أن يكون هذا التلميذ ذكرا؟

التمرين 73. (بكالوريا 2016 ت إ)

تقترح وكالة أسفار على زبائنها ثلاث وجهات A ، B وC.
20% من الزبائن اختاروا الوجهة A، 50% اختاروا الوجهة B، والباقي اختاروا الوجهة C. عند العودة من السفر أجرت الوكالة استجوابا لزبائنها حول مدى إعجابهم بالوجهة واستنتجت ما يلي: 50% من أصحاب الوجهة A كانوا معجبين بها ، 30% من أصحاب الوجهة B كانوا غير معجبين بها ، 80% من أصحاب الوجهة C كانوا معجبين بها. نختار عشوائيا أحد الزبائن ونسمي الحوادث التالية: S: "الزبون معجب بالوجهة المختارة" و $\bar{S}$: " الزبون غير معجب بالوجهة المختارة ".



1. انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثمّ أكمل القيم الناقصة.
2. أ. احسب احتمالات الحوادث التالية: $A \cap S$ ، $B \cap S$ و $C \cap S$
   ب. استنتج احتمال أن يكون الزبون معجب بالوجهة المختارة
3. نستجوب زبونا غير معجب بالوجهة المختارة، ما احتمال أن يكون من أصحاب الوجهة B؟

التمرين 74. (بكالوريا 2017 ت إ)

يستقبل مركز إجراء امتحان شهادة البكالوريا مترشحين موزعين على ثلاث شعب هي: شعبة الآداب والفلسفة (L) ، شعبة العلوم التجريبية (S) ، شعبة التسيير والاقتصاد (G).
47% من المترشحين ذكور (M) والباقي إناث (F).
من بين الذكور يوجد 35% في شعبة العلوم التجريبية و 49% في شعبة الآداب والفلسفة.
من بين الإناث يوجد 10% في شعبة التسيير والاقتصاد و 49% في شعبة العلوم التجريبية. نختار عشوائيا مترشحا من هذا المركز.

1. انجز شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية.
2. احسب احتمال كل حادثة مما يلي:
   A. المترشح المختار أنثى ومن شعبة التسيير والاقتصاد
   B. المترشح المختار من شعبة التسيير والاقتصاد
   C. المترشح المختار أنثى علما أنّه من شعبة التسيير والاقتصاد.

التمرين 75. (بكالوريا 2017 ت إ)

أجريت دراسة إحصائية حول العلاقة بين استعمال الأنترنت وامتلاك جهاز حاسوب في مدينة ما، فكانت النتائج كما يلي: 80% من سكان هذه المدينة يملكون جهاز حاسوب، 90% من سكان هذه المدينة الذين يملكون جهاز حاسوب يستعملون الأنترنت، 60% من سكان هذه المدينة الذين لا يملكون جهاز حاسوب يستعملون الأنترنت. نختار عشوائيا شخصا من هذه المدينة.

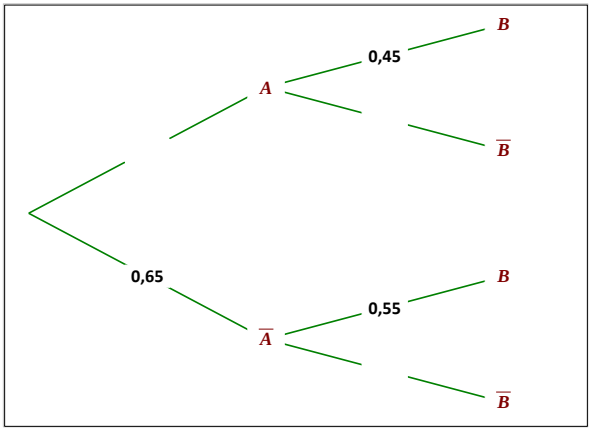
يرمز A إلى الحادثة: "الشخص المختار يملك جهاز حاسوب"
يرمز B إلى الحادثة: "الشخص المختار يستعمل الأنترنت"

1. انجز شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية.
2. أ. بيّن أنّ احتمال أن يكون الشخص المختار لا يملك جهاز حاسوب يساوي 0,20
   ب. ما احتمال أن يكون الشخص المختار يملك جهاز حاسوب ويستعمل الأنترنت؟
   جـ. ما احتمال أن يكون الشخص المختار لا يملك جهاز حاسوب ويستعمل الأنترنت؟
3. أحسب احتمال أن يكون الشخص المختار يستعمل الأنترنت
4. أحسب احتمال أن يكون الشخص المختار يملك جهاز حاسوب علما أنّه يستعمل الأنترنت.

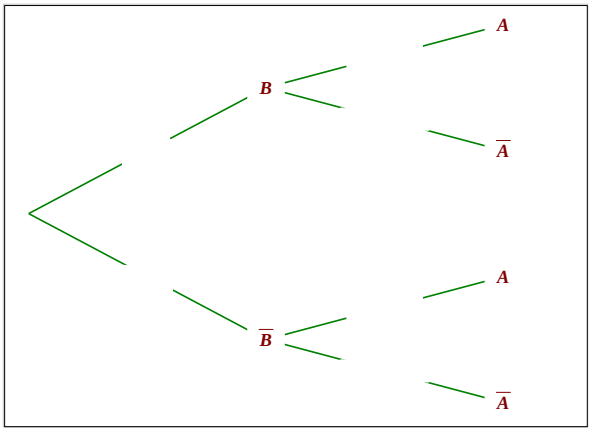
التمرين 76. (بكالوريا 2017 د 2 ت إ)

الشجرة المقابلة تنمذج تجربة عشوائية حيث A و B حادثتان، $\bar{A}$ و $\bar{B}$ حادثتاهما العكسيتان على الترتيب.

1. انقل وأكمل الشجرة المقابلة ثمّ احسب الاحتمالات الآتية:
$P(A \cap B)$ و $P(A \cap \bar{B})$



2. أ. احسب الاحتمالات الآتية: $P(B)$ ، $P_B(A)$ و $P_{\bar{B}}(A)$
ب. انقل وأكمل الشجرة المقابلة.



التمرين 77. (بكالوريا 2017 د 2 ت إ)

في كل حالة من الحالات الآتية، اقتُرحت ثلاث إجابات واحدة منها فقط صحيحة، عيّن الاقتراح الصحيح مع التبرير.

1. A و B حادثتان مستقلتان.

إذا كان $P(A \cap B) = 0,03$ و $P(A) = 0,4$ فإنّ:

أ	$P(B) = 0,43$	ب	$P(B) = 0,075$	جـ	$P(B) = 0,37$

2. A و B حادثتان.

إذا كان $P(A \cap B) = \frac{3}{100}$ و $P_A(B) = \frac{1}{4}$ فإنّ:

أ	$P(A) = \frac{3}{25}$	ب	$P(A) = \frac{4}{25}$	جـ	$P(A) = \frac{3}{400}$

3. A و B حادثتان.

إذا كان $P(A) = 0,4$ و $P(B) = 0,5$ و $P(\overline{A \cup B}) = 0,55$ فإنّ:

أ	$\boldsymbol{P(A \cap B) = 0,2}$	ب	$\boldsymbol{P(A \cap B) = 0,45}$	جـ	$\boldsymbol{P(A \cap B) = 0,9}$

4. الجدول التالي يعرّف قانون احتمال تجربة عشوائية.

x_i	-2	-1	α	3
$P(X = x_i)$	0,12	0,50	β	0,30

قيمتا α و β حتى يكون الأمل الرياضياتي للمتغيّر العشوائي X يساوي 0,32:

أ	$\boldsymbol{\alpha = 1}$ و $\boldsymbol{\beta = 0,08}$	ب	$\boldsymbol{\alpha = 2}$ و $\boldsymbol{\beta = 0,03}$	جـ	$\boldsymbol{\alpha = 2}$ و $\boldsymbol{\beta = 0,08}$

التمرين 78. (بكالوريا 2018 ع ت)

يحوي صندوق 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها أربع كريات بيضاء مرقمة بـ: 1 ، 2 ، 2 ، 3 وثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 2 ، 2 ، 3 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 2 ، 3 ، 3. نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من هذا الصندوق.

نعتبر الحادثتين A: "الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني"

B: "الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم"

1. أ) احسب $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B على الترتيب

ب) بيّن أنّ: $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$ ثمّ استنتج $P_A(B)$ و $P(A \cup B)$

2. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا. عرّف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين 79. (بكالوريا 2018 ت ر)

كيس به 7 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها 3 بيضاء و4 خضراء. نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من الكيس.

I) 1) احسب احتمال الحادثة A: "سحب كريتين مختلفتين في اللون"

2) احسب احتمال الحادثة B: "سحب كريتين من نفس اللون"

II) نقترح اللعبة التالية : للمشاركة يدفع اللاعب α (DA) ، (حيث α عدد طبيعي مُعطى) فإذا سحب كريتين بيضاوين يتحصل على 100 DA ، وإذا سحب كريتين مختلفتين في اللون يتحصل على 50 DA ، وإذا سحب كريتين خضراوين يخسر ما دفعه. وليكن X المتغيّر العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α.

1. برّر أنّ قيّم المتغيّر العشوائي X بدلالة α هي $\{100-\alpha, 50-\alpha, -\alpha\}$ ثمّ عرّف قانون احتماله
2. بيّن أنّ الأمل الرياضياتي للمتغيّر العشوائي X هو: $E(X) = -\alpha + \frac{300}{7}$ ، ثمّ اوجد أكبر قيمة ممكنة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب.

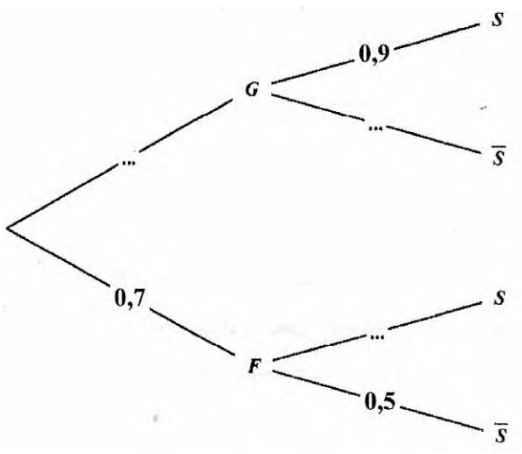
التمرين 80. (بكالوريا 2018 ر)

كيس يحوي 9 كريات لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي: خمس كريات حمراء مرقمة بـ: 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 3- ، 2 ، 3 وكرية بيضاء مرقمة بـ: 1-. نسحب عشوائيا 4 كريات في آن واحد.

1. احسب احتمال الحوادث التالية:
   A. "الحصول على 4 كريات من نفس اللون"
   B. "الحصول على كرية بيضاء على الأكثر"
   C. "الحصول على 4 كريات مجموع أرقامها معدوم"
2. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس.
   أ. عيّن قيّم المتغيّر العشوائي X ثمّ عرّف قانون احتماله
   ب. احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغيّر العشوائي X
   ج. احسب احتمال الحادثة: "$X^2 - X > 0$"

التمرين 81. (بكالوريا 2018 ت إ)

أُجريت دراسة إحصائية على قسم نهائي تسيير واقتصاد حول ممارسة التلاميذ لرياضة ما، فكانت النتائج كما يلي: 70% من التلاميذ إناث، منهن 50% لا يمارسن هذه الرياضة. 90% من التلاميذ الذكور يمارسون هذه الرياضة. نختار عشوائيا تلميذا من هذا القسم ونعتبر الحوادث التالية:



G : التلميذ المختار ذكر

F : التلميذ المختار أنثى

S : التلميذ المختار يمارس هذه الرياضة

1. انقل الشجرة المقابلة ثمّ أكملها
2. احسب الاحتمالات الآتية: $P(S)$ ، $P(G \cap \bar{S})$ ، $P_{\bar{S}}(F)$ و $P_S(G)$
3. هل الحادثتان G و $\bar{S}$ مستقلتان؟ برّر إجابتك

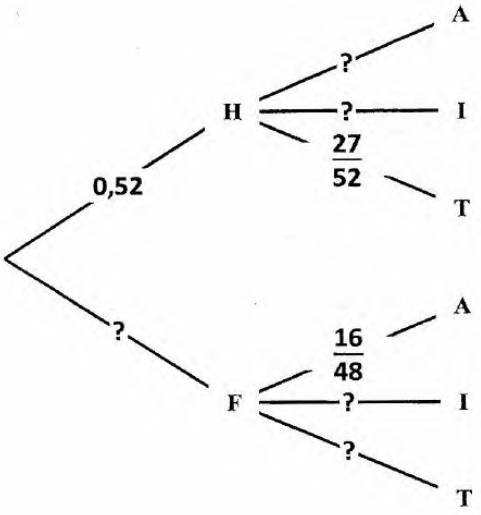
التمرين 82. (بكالوريا 2018 ت إ)

تضم مؤسسة إنتاجية موظفين من الجنسين: رجالا يُرمز لهم بـ H ونساء يُرمز لهنّ بـ F.
منهم الإداريون "A" ، المهندسون "I" والعمال "T" موزعين حسب الجدول المقابل:

	الإداريون A	المهندسون I	العمال T
الرجال	12%	13%	27%
النساء	16%	12%	20%

يخضع الموظفون لفحص طبي دوري. نختار عشوائيا موظفا.

1. أ) بيّن أنّ احتمال أن يكون الموظف رجلا هو $P(H) = 0{,}52$
   ب) انقل ثمّ أتمم الشجرة
2. احسب: $P(H \cap T)$ و $P(F \cap I)$
3. ما احتمال أن يكون الموظف مهندسا؟
4. ما احتمال أن يكون الموظف رجلا علما أنّه إداري؟



التمرين 83. (بكالوريا 2019 ع ت)

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 وكرية واحدة تحمل الرقم 2 وسبع كريات خضراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 وثلاث كريات تحمل الرقم 2 (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس). نسحب عشوائيا كريتين من الكيس في آن واحد ونعتبر الحادثتين A و B حيث:

A: "سحب كريتين من نفس اللون" ، B: "سحب كريتين تحملان نفس الرقم".

1) بين أن احتمال الحادثة A هو $P(A) = \frac{31}{66}$ واحسب احتمال الحادثة B.

2) علما أن الكريتين المسحوبتين من نفس اللون، ما احتمال أن تحملا نفس الرقم؟

3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس.

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين 84. (بكالوريا 2019 ع ت)

يحتوي صندوق على 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس منها كريتان تحملان الرقم 0 وثلاث تحمل الرقم 1 والكريات الأخرى تحمل الرقم 2. نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الصندوق. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب، جداء الأرقام المسجلة على الكريات المسحوبة.

1. عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي$E(X)$.
2. بين أن احتمال الحصول على ثلاث كريات كل منها تحمل رقما زوجيا هو $\frac{7}{24}$.
3. نسحب الآن من الصندوق كريتين على التوالي دون إرجاع. ما احتمال الحصول على كريتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علما أن جداء هما زوجي؟

التمرين 85. (بكالوريا 2019 ت ر)

توجد إجابة صحيحة واحدة من بين الأجوبة المقترحة في كل حالة من الحالات التالية. اختر الإجابة الصحيحة مبررا اختيارك.

يحتوي كيس على ثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام 3,2,1 وكريتين سوداوين تحملان الرقمين 2,1 (الكريات لا نفرق بينها عند اللمس) نسحب من الكيس 3 كريات عشوائيا وفي آن واحد. X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات السوداء المسحوبة.

1. قيم المتغير العشوائي X هي:

أ) $\{1; 2; 3\}$ ، ب) $\{0; 2; 3\}$ ، جـ) $\{0; 1; 2\}$

2. الأمل الرياضياتي $E(X)$ لـ X هو:

أ) $E(X) = \frac{4}{5}$ ، ب) $E(X) = \frac{6}{5}$ ، جـ) $E(X) = \frac{11}{10}$

3. احتمال "الحصول على كرية واحدة سوداء تحمل الرقم 1 من الكريات المسحوبة" يساوي:

أ) $\frac{7}{10}$ ، ب) $\frac{9}{10}$ ، جـ) $\frac{3}{5}$

4. احتمال "باقي قسمة مجموع مربعات الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة على 13 هو 1" يساوي:

أ) $\frac{2}{5}$ ، ب) $\frac{3}{10}$ ، جـ) $\frac{1}{5}$

التمرين 86. (بكالوريا 2019 ت ر)

يحتوي كيس على أربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 1، 2، 3، 4 وثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام 1، 2، 3 وكريتين سوداوين تحملان الرقمين 1، 2 (كل الكريات متشابهة لا نفرق بينها عند اللمس). نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من هذا الكيس .

1) احسب احتمال الحوادث التالية:

أ) الحادثة A: "الحصول على كرية بيضاء واحدة".

ب) الحادثة B: "الحصول على كريتين بيضاوين على الأكثر".

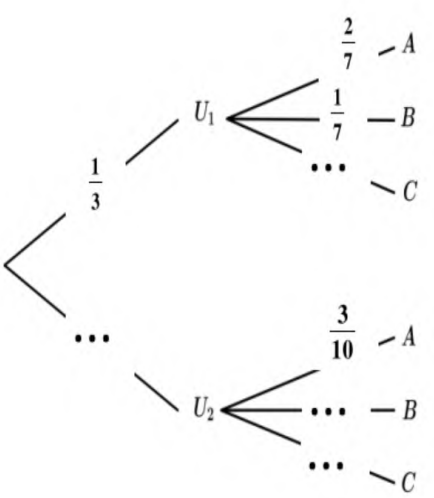
جـ) الحادثة C: "الحصول على ثلاث كريات تحمل أرقاما غير أولية ".

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات التي تحمل أرقاما أولية.

أ) عيّن قيم المتغير العشوائي X ، ثم عرّف قانون احتماله.

ب) احسب $P(X^2 - X \leq 0)$.

التمرين 87. (بكالوريا 2019 ر)



صندوقان غير شفافين U_1 وU_2، يحتوي الصندوق U_1 على 4 كريات حمراء و3 كريات سوداء ويحتوي الصندوق U_2 على 3 كريات حمراء وكريتين سوداوين (الكريات كلها متشابهة لا نفرق بينها عند اللمس). نرمي نردا غير مزيف ذا ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6.

إذا ظهر الرقمان 2 أو 4 نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من الصندوق U_1 وفي باقي الحالات نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من الصندوق U_2.

نعتبر الأحداث A ، B و C المعرفة بـ:

A : "سحب كريتين حمراوين"

B : "سحب كريتين سوداوين" و C : "سحب كريتين من لونين مختلفين".

1) انقل، وأكمل شجرة الاحتمالات.

2) احسب احتمالات الأحداث A ، B و C.

نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عند الكريات الحمراء المسحوبة.

3) أ) عين قيم المتغير العشوائي X.

ب) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.

4) احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

التمرين 88. (بكالوريا 2019 ت إ)

نرمي نردا غير مزيف ذا ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6 مرتين متتاليتين ونسجل الرقم الظاهر على الوجه العلوي في كل مرة.

1) ما احتمال الحصول على رقمين زوجيين ؟

2) ما احتمال الحصول على رقمين جداؤهما يساوي 6؟

3) ما احتمال الحصول على رقمين أحدهما ضعف الآخر؟

4) ما احتمال الحصول على رقمين زوجيين أحدهما هو 2؟

التمرين 89. (بكالوريا 2019 ت إ)

1) حل في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ المعادلة :

$$(4x^2 + 3x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0 \dots (E)$$

2) كيس به أربع كريات تحمل الأرقام 1، 2، 3، 4 نسحب منه كرية واحدة ونرمز بـ P_i إلى احتمال سحب الكرية التي تحمل الرقم i ونضع:

$P_1 = 3\alpha^2$ ، $P_2 = \alpha^2$ ، $P_3 = \alpha$ و $P_4 = 2\alpha$.

- حدد قيمة α.

3) نضع $\alpha = \frac{1}{4}$ ، احسب احتمال الأحداث التالية:

A : "سحب كرية تحمل رقما فرديا ".

B : "سحب كرية تحمل الرقم 4 ".

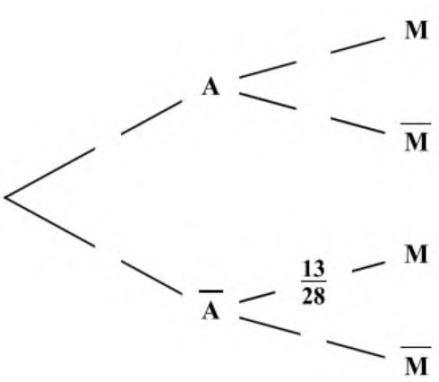
C : "سحب كرية تحمل رقما أصغر من أو يساوي 3".

D : "سحب كرية تحمل رقما حلا للمعادلة (E)".

التمرين 90. (بكالوريا 2020 ع ت)

يحتوي وعاء U على 4 كريات حمراء و6 سوداء، ويحتوي وعاء V على 5 كريات حمراء و3 سوداء وكل الكريات متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس. نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من أحد الوعاءين بالكيفية التالية:

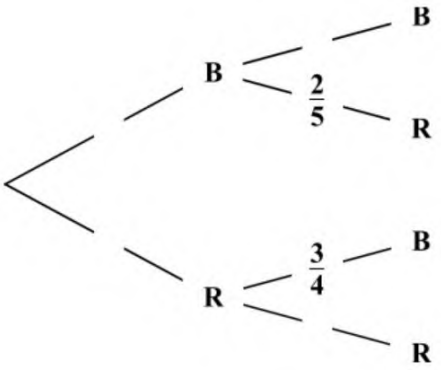
نقوم بسحب بطاقة واحدة عشوائيا من كيس يحتوي على 6 بطاقات متماثلة ومرقمة من 1 إلى 6 ، إذا تحصلنا على أحد الرقمين 3 أو 5 نسحب الكريتين من U وفي باقي الحالات نسحب الكريتين من V.



نسمي A الحدث: "الحصول على أحد الرقمين 3 أو 5". نسمي M الحدث: "الحصول على كريتين من نفس اللون".

1. تحقق أن $P(\bar{A})$ احتمال السحب من الوعاء V هو $\frac{2}{3}$.
2. علما أن الكريتين المسحوبتين من U، بين أن احتمال أن تكونا من نفس اللون هو $\frac{7}{15}$.
3. انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكملها واستنتج $P(M)$.
4. احسب $P_{\overline{M}}(A)$ احتمال السحب من الوعاء U علما أن الكريتين المسحوبتين مختلفتا اللون؟

التمرين 91. (بكالوريا 2020 ع ت)



كيس به ثلاث كريات بيضاء وكريتين حمراوين لا نميز بينها عند اللمس، نسحب عشوائيا كريتين على التوالي من الكيس بالكيفية التالية: إذا كانت الكرية المسحوبة بيضاء نعيدها إلى الكيس وإذا كانت حمراء لا نعيدها إلى الكيس.

1) أ. انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكملها.

B يرمز إلى الحصول على كرية بيضاء و R إلى الحصول على كرية حمراء.

ب. احسب احتمال أن تكون الكرية المسحوبة الثانية حمراء.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لكريتين عدد الكريات الحمراء المسحوبة.

أ. عين مجموعة قيم المتغير العشوائي X.

ب. بين أن: $P(X=1)=\frac{27}{50}$، ثم عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X.

ج. احسب $E(X)$ الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X.

التمرين 92. (بكالوريا 2020 ت ر)

يحتوي كيس على أربع كريات حمراء مرقمة بـ: 2، 2، 2، 2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 3، 3، 2. الكريات لا نفرق بينها باللمس ، نسحب عشوائيا في آن واحد كريتين من هذا الكيس.

1) نعتبر الحدثين A : "الحصول على كريتين تحملان نفس الرقم" و B "الحصول على كريتين مختلفتين في اللون".

أ. احسب احتمال كل من الحدثين A و B.

ب. بين أن احتمال الحصول على كريتين تحملان نفس الرقم ومختلفتين في اللون يساوي $\frac{4}{21}$.

ج. استنتج احتمال الحصول على كريتين تحملان نفس الرقم أو مختلفتين في اللون.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب جداء الرقمين الظاهرين على الكريتين المسحوبتين.

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

3) في لعبة، يقوم لاعب بسحب كريتين : إذا كان جداء رقميهما 4 يربح x^2 دينار، إذا كان جداء رقميهما 6 يخسر y^2 دينار، وإذا كان جداء رقميهما 9 يخسر 130 دينار. (x و y عددان طبيعيان غير معدومين).

عين قيمة كل من x و y حتى تكون هذه اللعبة عادلة.

التمرين 93. (بكالوريا 2020 ت ر)

يحتوي كيس على كريتين خضراوين تحملان الرقمين 1، 2 وثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام 1، 2، 2 وأربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 2، 3، 3، 4. (الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس)

I) نسحب من هذا الكيس 3 كريات في آن واحد.

1) احسب احتمال كل من الحدثين A و B التاليين:

A : "الحصول على 3 كريات من نفس اللون"

B : "الحصول على كرية بيضاء على الأقل".

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب أكبر الأرقام المحصل عليها.

أ. بين أن: $P(X = 3) = \frac{3}{7}$ ثم عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.

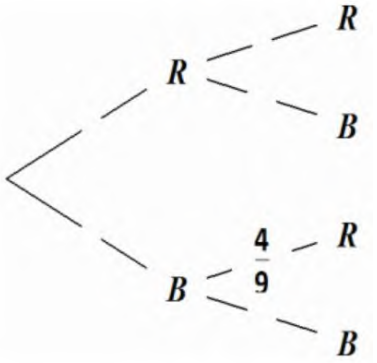
ب. احسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X.

II) نسحب الآن 3 كريات على التوالي دون إرجاع.

ليكن C الحدث: "الحصول على 3 أرقام جداؤها عدد زوجي" . احسب احتمال C.

التمرين 94. (بكالوريا 2020 ر)

صندوق به 5 كريات بيضاء و3 كريات حمراء (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس). نسحب من الصندوق كرية واحدة حيث: إذا ظهرت كرية حمراء نعيدها إلى الصندوق ونضيف له كرية بيضاء، وإذا ظهرت كرية بيضاء نعيدها إلى الصندوق ونضيف له كرية حمراء، ثم نكرر العملية مرة ثانية.



1) انقل شجرة الاحتمالات المقابلة التي تنمذج هذه التجربة ثم أكملها.

2) بين أن احتمال أن يوجد في الصندوق 7 كريات بيضاء هو $\frac{1}{8}$.

3) احسب احتمال أن يوجد في الصندوق 4 كريات حمراء على الأقل.

4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ كقيمة عدد الكريات البيضاء الموجودة في الصندوق بعد العملية الثانية.

أ. برر أن قيم المتغير العشوائي X هي: 5، 6 و7.

ب. عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم احسب $E(X)$ أمله الرياضياتي.

التمرين 95. (بكالوريا 2020 ر)

يحتوي صندوق على كريات متماثلة منها: n كرية بيضاء تحمل العدد π (π عدد طبيعي و $n \geq 2$) و4 كريات حمراء تحمل الأعداد $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{3}$ و π وكريتين خضراوين تحملان العددين $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{3}$. نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من هذا الصندوق.

1. أ. احسب احتمال كل من A و B حيث:

A : "سحب كريتين من نفس اللون" ، B : "سحب كريتين تحملان نفس العدد علما أنهما من نفس اللون".

ب. عيّن العدد الطبيعي n حتى يكون: $P(A) = \frac{17}{55}$.

2. نفرض فيما يلي: $n = 5$ ونسمي α و β العددين الظاهرين على الكريتين المسحوبتين. نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب العدد $\cos(\alpha)\cos(\beta)$.

أ. برر أن قيم المتغير العشوائي X هي : $-\frac{1}{2}$ ، 0 ، $\frac{1}{4}$، 1.

ب. بيّن أنّ: $P(X = 0) = \frac{27}{55}$.

ج. عين قانون احتمال المتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي$E(X)$.

التمرين 96. (بكالوريا 2021 ع ت)

يراد تشكيل بطريقة عشوائية لجنة تتكون من عضوين من بين ثلاثة رجال H_1 ، H_2 و H_3 وامرأتان F_1 و F_2.

نعتبر الحوادث A ، B و C حيث :

A "عضوا اللجنة من نفس الجنس" B "عضوا اللجنة من جنسين مختلفين" C " H_1 عضو في اللجنة."

1) أ. احسب $P(A)$ ، $P(B)$ احتمال A و B على الترتيب.

ب. بيّن أن $P(C)$ احتمال الحدث C يساوي $\frac{2}{5}$.

2) المتغير العشوائي X يرفق بكل إمكانية اختيار لعضوين عدد الرجال في اللجنة.

أ. برر أن مجموعة قيم X هي $\{0; 1; 2\}$.

ب. عين قانون احتمال المتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين 97. (بكالوريا 2021 ع ت)

صندوق به 9 بطاقات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، مكتوب على كل منها سؤال واحد، منها ثلاثة أسئلة في الهندسة مرقمة بـ: 1، 2 و3، أربعة أسئلة في الجبر مرقمة بـ: 1، 2، 3 و4 وسؤالين في التحليل مرقمين بـ: 1 و2.
نسحب عشوائيا بطاقة واحدة من الصندوق ونعتبر الحوادث التالية:
A "سحب سؤال في الهندسة" ، B "سحب سؤال في التحليل" و C "سحب سؤال في الجبر يحمل رقما زوجيا".

1) احسب $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$ احتمال الحوادث A ، B و C على الترتيب.
2) احسب احتمال سحب سؤال رقمه مختلف عن 1.
3) المتغير العشوائي X يرفق بكل بطاقة مسحوبة رقم السؤال المسجل عليها.
أ. برر أن مجموعة قيم X هي $\{1; 2; 3; 4\}$.
ب. عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب $E(X)$ أمله الرياضياتي.
جـ. استنتج قيمة $E(2021X + 1442)$.

التمرين 98. (بكالوريا 2021 ر)

كيس به 12 كرية متماثلة لا نفرق بينها باللمس.
كل من الكريات الاثنتي عشرة تحمل رقما من بين الأعداد التالية:1، 2، 3، 4.
نسحب عشوائيا كرية واحدة من الكيس.
نرمز بـ: P_i إلى احتمال سحب كرة رقمها i، حيث:
$P_1 = \frac{1}{3}$ ، $P_2 = \frac{1}{6}$ ، $P_3 = \frac{1}{4}$ و $P_4 = \frac{1}{4}$.

1. وزع الكريات الاثنتي عشرة حسب الأرقام 1، 2، 3، 4
2. احسب احتمال كل من الحوادث A ، B و C الآتية:
A " سحب كرة تحمل رقما فرديا "
B " سحب كرية تحمل رقما من أرقام نظام التعداد ذي الأساس 4 "
C " سحب كرة رقمها حل للمعادلة: $2^x = x^2$ "
3. المتغير العشوائي X يرفق بكل سحب لكرة الرقم الذي تحمله.
عن مجموعة قيم المتغير العشوائي X ثم احسب $E(X)$ أمله الرياضياتي.

التمرين 99. (بكالوريا 2021 ر)

يراد عشوائيا تشكيل لجنة تضم رئيسا ونائبا له من بين ثلاثة رجال H_1 ، H_2 و H_3 وأربع نساء F_1 ، F_2 ، F_3 و F_4

1. بين أن عدد اللجان التي يمكن تشكيلها هو 42.
2. نعتبر الحوادث الآتية:

A "اللجنة من نفس الجنس" ، B "اللجنة من جنسين مختلفين"

C "H_1 هو الرئيس" ، E "اللجنة لا تضم كلا من H_1 و F_1"

أ. احسب $P(A)$ احتمال الحدث A ثم استنتج $P(B)$

ب. احسب $P(C)$ و $P(E)$

3. المتغير العشوائي X يرفق بكل لجنة عند الرجال فيها.

عين قانون احتمال X ثم احسب $E(X)$ أمله الرياضياتي.

إياك أن تكون "مفعولا به" .. كن دائما "فاعلا"

مهما أحسست "بالكسرة" اترك بقلبك "فتحة" تدخل منها الأحلام

لا تكره أحدا لمجرد أنّه مختلف معك .. اترك مشاعرك "ضمّة" لكل الناس

لا ترض أن تكون "مجرورا" من أحد مهما كان قريبا منك .. فستلقى نفسك دائما "مرفوع" الرأس

صحيح يمكنك أن تحنّ إلى الذكريات .. لكن لا تستسلم لـ"كان وأخواتها"

لا تنخدع لكل من ابتسم لك .. وانتبه من "أدوات النصب"

اشتغل واحلم وتحدّ ولا تسمح أن يكون مستقبلك "مبنيا للمجهول"

لا تخبئ مشاعرك اتجاه أحد .. فالمشاعر التي تأتي متأخرة تصبح "ممنوعة من الصرف"

عش دائما "مبتدأ" .. ولا تكن مجرد "خبر"

حلول تمارين الاحتمالات

التمرين 1.

حساب عدد الطرق لسحب 3 قريصات في آن واحد بحيث:

1. **كل القريصات مرقمة بالرقم 0**

$$C_6^3 = \frac{6!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{6} = \boxed{20}$$

2. **قريصتان مرقمتان بالرقم 0**

$$C_6^2 \times C_4^1 = \frac{6!}{2! \times 4!} \times 4 = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2! \times 4!} \times 4 = \frac{6 \times 5 \times 4}{2} = \boxed{60}$$

3. **قريصة واحدة مرقمة بالرقم 0**

$$C_6^1 \times C_4^2 = 6 \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 6 \times \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \frac{6 \times 4 \times 3}{2} = \boxed{36}$$

4. **كل القريصات مرقمة بالرقم 1**

$$C_4^3 = \frac{4!}{3! \times 1!} = \frac{4 \times 3!}{3!} = \boxed{4}$$

5. **كل القريصات مرقمة بنفس الرقم**

$$C_6^3 + C_4^3 = 20 + 4 = \boxed{24}$$

6. **قريصتان مرقمتان بنفس الرقم.**

$$C_6^2 \times C_4^1 + C_6^1 \times C_4^2 = 60 + 36 = \boxed{96}$$

التمرين 2.

حساب عدد الحالات الممكنة بحيث:

1. **كل القريصات المسحوبة من اللون نفسه**

$$C_6^3 + C_4^3 = 20 + 4 = \boxed{24}$$

2. **نسحب قريصة واحدة من كل لون**

$$C_4^1 \times C_6^1 \times C_2^1 = 4 \times 6 \times 2 = \boxed{48}$$

3. **نسحب قريصتان من نفس اللون**

$$C_6^2 \times C_6^1 + C_4^2 \times C_8^1 + C_2^2 \times C_{10}^1 = 90 + 48 + 10$$
$$= \boxed{148} \text{ ... طريقة ①}$$

$$C_{12}^3 - (24 + 48) = 220 - 72 = \boxed{148} \text{ ... طريقة ②}$$

4. **نسحب على الأقل قريصة واحدة خضراء**

$$C_4^1 \times C_8^2 + C_4^2 \times C_8^1 + C_4^3 = 112 + 48 + 4 = \boxed{164} \text{ ... طريقة ①}$$

$$C_{12}^3 - C_8^3 = 220 - 56 = \boxed{164} \text{ ... طريقة ②}$$

5. **نسحب على الأقل قريصة واحدة حمراء**

$$C_2^1 \times C_{10}^2 + C_2^2 \times C_{10}^1 = 90 + 10 = \boxed{100} \text{ ... طريقة ①}$$

$C_{12}^3 - C_{10}^3 = 220 - 120 = \boxed{100}$ ... طريقة ②

6. كل القريصات المسحوبة تحمل نفس الرقم

$C_3^3 + C_3^3 = 1 + 1 = \boxed{2}$

7. مجموع أرقام القريصات المسحوبة يشكل عددا زوجيا

يحتوي الكيس على 6 أرقام فردية و6 أرقام زوجية، ونحصل على عدد زوجي عند سحب (3 أرقام زوجية) أو (رقمين فرديين ورقم زوجي)

$C_6^3 + C_6^2 \times C_6^1 = 20 + 90 = \boxed{110}$

التمرين 3.

حساب عدد الحالات الممكنة لسحب:

1. قريصة واحدة تحمل عددا فرديا

$C_9^1 \times C_8^2 = 9 \times 28 = \boxed{252}$

2. قريصتين كلتاهما تحمل عددا أوليا

$C_7^2 \times C_{10}^1 = 21 \times 10 = \boxed{210}$

3. على الأقل قريصة واحدة تحمل عددا زوجيا

$C_8^1 \times C_9^2 + C_8^2 \times C_9^1 + C_8^3 = 288 + 252 + 56 = \boxed{596}$ ... طريقة ①

$C_{17}^3 - C_9^3 = 680 - 84 = \boxed{596}$ ... طريقة ②

4. قريصة واحدة تحمل عددا يقبل القسمة على 3

$C_5^1 \times C_{12}^2 = 5 \times 66 = \boxed{330}$

التمرين 4.

حساب عدد الحالات الممكنة:

1. لسحب هذه الكريات بدون تمييز

$C_{15}^4 = \boxed{1365}$

2. لسحب 4 كريات من لون واحد

$C_7^4 + C_5^4 = 35 + 5 = \boxed{40}$

3. لسحب 4 كريات من الألوان الثلاثة

$$C_7^2 \times C_5^1 \times C_3^1 + C_7^1 \times C_5^2 \times C_3^1 + C_7^1 \times C_5^1 \times C_3^2$$
$$= 315 + 210 + 105 = \boxed{630}$$

4. لسحب 4 كريات من لونين مختلفين.

$1365 - (40 + 630) = \boxed{695}$

التمرين 5.

1. حساب عدد الأعداد ذات 3 أرقام:

$$A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = \boxed{210}$$

2. حساب عدد الأعداد ذات 3 أرقام بحيث:

أ) يبدأ بالرقم 3: $\boxed{3 \quad . \quad .}$

$$A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = 6 \times 5 = \boxed{30}$$

ب) يبدأ بالرقم 1 وينتهي بالرقم 3: $\boxed{1 \quad . \quad 3}$

$$A_5^1 = \frac{5!}{(5-1)!} = \frac{5!}{4!} = \boxed{5}$$

ج) يحتوي على الرقم 6: $\boxed{6 \quad . \quad .}$ أو $\boxed{. \quad 6 \quad .}$ أو $\boxed{. \quad . \quad 6}$

$$3 \times A_6^2 = 3 \times 30 = \boxed{90}$$

التمرين 6.

يحتوي كيس على 3 كريات خضراء و4 حمراء.

1. نسحب من هذا الكيس 4 كريات على التوالي دون إرجاع.

أ. عدد الحالات الممكنة بحيث تكون الكريات المسحوبة الثلاثة الأولى حمراء والرابعة خضراء

$$A_4^1 \times A_3^1 \times A_2^1 \times A_3^1 = 4 \times 3 \times 2 \times 3 = \boxed{72}$$

ب. عدد الحالات الممكنة لسحب 3 كريات حمراء وواحدة خضراء

$$C_4^1 \times A_4^3 \times A_3^1 = 4 \times 24 \times 3 = \boxed{288}$$

2. نسحب الآن من هذا الكيس 4 كريات على التوالي بإرجاع

أ. عدد الحالات الممكنة بحيث تكون الكريات المسحوبة الثلاثة الأولى حمراء والرابعة خضراء

$$4^3 \times 3 = 64 \times 3 = \boxed{192}$$

ب. عدد الحالات الممكنة لسحب 3 كريات حمراء وواحدة خضراء

$$4 \times 4^3 \times 3 = 4 \times 192 = \boxed{768}$$

التمرين 7.

حساب عدد الحالات الممكنة بحيث:

1. **توجد في اللجنة طالبة واحدة**

$C_3^1 \times C_9^3 = 3 \times 84 = \boxed{252}$

2. **توجد في اللجنة طالبة واحدة على الأقل**

$C_3^1 \times C_9^3 + C_3^2 \times C_9^2 + C_3^3 \times C_9^1 = 252 + 108 + 9 = \boxed{369}$

3. **لا توجد في اللجنة أيّة طالبة**

$C_9^4 = \boxed{126}$

4. **يوجد في اللجنة الجنسان معا**

$C_3^1 \times C_9^3 + C_3^2 \times C_9^2 + C_3^3 \times C_9^1 = 252 + 108 + 9$

$= \boxed{369}$ ... طريقة ①

$C_{12}^4 - C_9^4 = 495 - 126 = \boxed{369}$ ... طريقة ②

5. **يوجد في اللجنة الطالب x.**

$C_{11}^3 = \boxed{165}$

التمرين 8.

تتكون جمعية من 6 رجال و3 نساء.

1. **نريد تشكيل إدارة تتألف من رئيس، نائب وأمين.**

أ. **حساب عدد الطرق الممكنة لاختيار هذه الإدارة**

$A_9^3 = \frac{9!}{6!} = \boxed{504}$

ب. **حساب عدد الطرق لتشكيل إدارة بحيث يكون الرئيس رجلا**

$A_6^1 \times A_8^2 = 6 \times \frac{8!}{6!} = \boxed{336}$

ج. **حساب عدد الطرق بحيث يكون الرئيس رجلا ونائبه امرأة**

$A_6^1 \times A_3^1 \times A_7^1 = 6 \times 3 \times 7 = \boxed{126}$

2. **حساب عدد الطرق الممكنة لاختيار هذه اللجنة بحيث يكون الرئيس رجلا ونائبه امرأة**

$A_6^1 \times A_3^1 \times A_7^1 \times C_6^2 = 126 \times 15 = \boxed{1890}$

التمرين 9.

حساب عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها باستعمال الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 و 6

إذا كانت هذه الأعداد تتكون من:

1. **ثلاثة أرقام**

$$6^3 = \boxed{216}$$

2. **ستة أرقام متمايزة**

$$A_6^6 = 6! = \boxed{720}$$

3. **أربعة أرقام متمايزة تنتهي بالرقم 1**

$$A_5^3 = \frac{5!}{2!} = \boxed{60}$$

4. **أربعة أرقام متمايزة بحيث يكون الرقم الأول مختلف عن 1**

$$A_5^1 \times A_5^3 = 5 \times 60 = \boxed{300}$$

5. **ثلاثة أرقام متمايزة بحيث يكون العدد أكبر من 300**

$$A_4^1 \times A_5^2 = 4 \times 20 = \boxed{80}$$

6. **ثلاثة أرقام متمايزة بحيث يكون العدد زوجيا.**

$$A_3^1 \times A_5^2 = 3 \times 20 = \boxed{60}$$

التمرين 10.

حساب احتمال الحصول على:

1. **ثلاث كريات أرقامها زوجية**

$$P(A) = \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{4}{84} = \boxed{\frac{1}{21}}$$

2. **ثلاث كريات، إحداها على الأقل تحمل رقما فرديا**

$$P(B) = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{21} = \boxed{\frac{20}{21}}$$

3. **كرتين فقط تحملان رقمين أوليين**

$$P(C) = \frac{C_4^2 \times C_5^1}{C_9^3} = \frac{30}{84} = \boxed{\frac{5}{14}}$$

4. **ثلاث كريات مجموع أرقامها يساوي 9، أي: $\{1; 2; 6\}$ أو $\{1; 3; 5\}$ أو $\{2; 3; 4\}$**

$$P(D) = \frac{3C_3^3}{C_9^3} = \frac{3}{84} = \boxed{\frac{1}{28}}$$

التمرين 11.

1. **حساب احتمال الحصول على:**

أ. **3 كريات من اللون نفسه**

$$P(A) = \frac{C_3^3 + C_3^3 + C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{6}{120} = \boxed{\frac{1}{20}}$$

ب. **كرية واحدة من كل لون**

$$P(B) = \frac{C_3^1 \times C_3^1 \times C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{36}{120} = \boxed{\frac{3}{10}}$$

ج. **كرية زرقاء واحدة على الأقل**

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = 1 - \frac{20}{120} = \boxed{\frac{5}{6}}$$

2. **نعتبر المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب، عدد الكريات الزرقاء المسحوبة.**

أ. **تعيين قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X**

$X \in \{0; 1; 2; 3\}$

$$P(X = 0) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{1}{6}} ; P(X = 1) = \frac{C_4^1 \times C_6^2}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_4^2 \times C_6^1}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{3}{10}} ; P(X = 3) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{1}{30}}$$

X_i	0	1	2	3
$P(X = X_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

ب. **حساب الأمل الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمتغيّر العشوائي X.**

$$E(X) = \sum X_i \times P_i = 0\left(\frac{1}{6}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{3}{10}\right) + 3\left(\frac{1}{30}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{1}{10} = \boxed{\frac{6}{5}}$$

$$V(X) = \sum X_i^2 \times P_i - [E(X)]^2$$

$$= 0^2\left(\frac{1}{6}\right) + 1^2\left(\frac{1}{2}\right) + 2^2\left(\frac{3}{10}\right) + 3^2\left(\frac{1}{30}\right) - \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \boxed{\frac{14}{25}}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \boxed{\frac{\sqrt{14}}{5}}$$

التمرين 12.

1. تعيين قيم المتغيّر العشوائي X

$$\Omega = \left\{ \underbrace{RR}_{-1-1} ; \underbrace{RB}_{-1+2} ; \underbrace{RV}_{-1+3} ; \underbrace{BB}_{2+2} ; \underbrace{BV}_{2+3} ; \underbrace{VV}_{3+3} \right\} \Rightarrow \boxed{X \in \{-2; 1; 2; 4; 5; 6\}}$$

2. تعيين قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X

$$P(X=-2) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \boxed{\frac{1}{6}};\ P(X=1) = \frac{C_4^1 \times C_3^1}{C_9^2} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^1 \times C_2^1}{C_9^2} = \boxed{\frac{2}{9}};\ P(X=4) = \frac{C_3^2}{C_9^2} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

$$P(X=5) = \frac{C_3^1 \times C_2^1}{C_9^2} = \boxed{\frac{1}{6}};\ P(X=6) = \frac{C_2^2}{C_9^2} = \boxed{\frac{1}{36}}$$

X_i	-2	1	2	4	5	6
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$

3. حساب الأمل الرياضي $E(X)$، التباين $V(X)$ والانحراف المعياري $\sigma(X)$

$$E(X) = \sum X_i \times P_i$$

$$= -2\left(\frac{1}{6}\right) + 1\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{2}{9}\right) + 4\left(\frac{1}{12}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{36}\right) = \boxed{\frac{16}{9}}$$

$$V(X) = \sum X_i^2 \times P_i - [E(X)]^2$$

$$= 4\left(\frac{1}{6}\right) + 1\left(\frac{1}{3}\right) + 4\left(\frac{2}{9}\right) + 16\left(\frac{1}{12}\right) + 25\left(\frac{1}{6}\right) + 36\left(\frac{1}{36}\right) - \left(\frac{16}{9}\right)^2$$

$$= \boxed{\frac{847}{162}}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{847}{162}} = \boxed{\frac{11\sqrt{14}}{18}}$$

التمرين 13.

1. حساب احتمال الحوادث التالية:

A. كل الكرات المسحوبة تحمل الرقم 2

$$P(A) = \frac{C_{10}^3}{C_{30}^3} = \boxed{\frac{6}{203}}$$

B. الكرات المسحوبة تتألف من رقمين فقط

$$P(B) = \frac{(C_5^2 \times C_{25}^1) + (C_{10}^2 \times C_{20}^1) + (C_{15}^2 \times C_{15}^1)}{C_{30}^3} = \boxed{\frac{545}{812}}$$

C. الكرات المسحوبة تحمل 3 أرقام مختلفة

$$P(C) = \frac{C_5^1 \times C_{10}^1 \times C_{15}^1}{C_{30}^3} = \boxed{\frac{75}{406}}$$

D. كرة واحدة على الأقل من الكرات المسحوبة تحمل الرقم 2

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - \frac{C_{20}^3}{C_{30}^3} = 1 - \frac{57}{203} = \boxed{\frac{146}{203}}$$

E. مجموع أرقام الكرات المسحوبة عدد فردي

$$P(E) = \frac{C_{20}^3 + (C_{10}^2 \times C_{20}^1)}{C_{30}^3} = \boxed{\frac{102}{203}}$$

F. جداء أرقام الكرات المسحوبة عدد زوجي

$$P(F) = 1 - P(\overline{F}) = 1 - \frac{C_{20}^3}{C_{30}^3} = 1 - \frac{57}{203} = \boxed{\frac{146}{203}}$$

ملاحظة: $P(F) = P(D)$ لأنّ جداء أرقام الكرات المسحوبة يكون عددا زوجيا إذا كانت كرة واحدة على الأقل من الكرات المسحوبة تحمل الرقم 2.

2. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب، مجموع الأرقام المسجلة على الكرات المسحوبة.

A. تعيين قيم المتغيّر العشوائي X

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} \{1,1,1\}; \{1,1,2\}; \{1,1,3\}; \{1,2,3\}; \{2,2,1\}; \{2,2,2\}; \{2,2,3\}; \\ \{3,3,1\}; \{3,3,2\}; \{3,3,3\} \end{matrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{X \in \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}}$$

B. تعيين قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X

$$P(X = 3) = \frac{C_5^3}{C_{30}^3} = \boxed{\frac{1}{406}};\ P(X = 4) = \frac{C_5^2 \times C_{10}^1}{C_{30}^3} = \boxed{\frac{5}{203}}$$

$$P(X=5)=\frac{C_5^2\times C_{15}^1+C_{10}^2\times C_5^1}{C_{30}^3}=\boxed{\frac{75}{812}}$$

$$P(X=6)=\frac{C_5^1\times C_{10}^1\times C_{15}^1+C_{10}^3}{C_{30}^3}=\boxed{\frac{3}{14}}$$

$$P(X=7)=\frac{C_{10}^2\times C_{15}^1+C_{15}^2\times C_5^1}{C_{30}^3}=\boxed{\frac{60}{203}}$$

$$P(X=8)=\frac{C_{15}^2\times C_{10}^1}{C_{30}^3}=\boxed{\frac{15}{58}}\;;P(X=9)=\frac{C_{15}^3}{C_{30}^3}=\boxed{\frac{13}{116}}$$

X_i	3	4	5	6	7	8	9
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{406}$	$\frac{5}{203}$	$\frac{75}{812}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{60}{203}$	$\frac{15}{58}$	$\frac{13}{116}$

C. حساب الأمل الرياضي $E(X)$، التباين $V(X)$ والانحراف المعياري $\sigma(X)$

$$E(X)=3\left(\frac{1}{406}\right)+4\left(\frac{5}{203}\right)+5\left(\frac{75}{812}\right)+6\left(\frac{3}{14}\right)+7\left(\frac{60}{203}\right)+8\left(\frac{15}{58}\right)+9\left(\frac{13}{116}\right)=\boxed{7}$$

$$V(X)=9\left(\frac{1}{406}\right)+16\left(\frac{5}{203}\right)+25\left(\frac{75}{812}\right)+36\left(\frac{3}{14}\right)+49\left(\frac{60}{203}\right)+64\left(\frac{15}{58}\right)+81\left(\frac{13}{116}\right)-7^2=\boxed{\frac{45}{29}}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{45}{29}}=\boxed{\frac{3\sqrt{145}}{29}}$$

التمرين 14.

1. حساب احتمال سحب:

A. 4 كريات من اللون نفسه

$$P(A)=\frac{C_5^4+C_4^4}{C_{11}^4}=\boxed{\frac{1}{55}}$$

B. كريتين من اللون نفسه وكريتين من لونين مختلفين

$$P(B) = \frac{(C_5^2 \times C_4^1 \times C_2^1) + (C_4^2 \times C_5^1 \times C_2^1) + (C_2^2 \times C_4^1 \times C_5^1)}{C_{11}^4}$$

$$= \boxed{\frac{16}{33}}$$

C. 4 كريات من لونين مختلفين

$$P(\bar{C}) = P(A) + P(B) \Rightarrow P(C) = 1 - [P(A) + P(B)]$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{55} + \frac{16}{33}\right) = \boxed{\frac{82}{165}}$$

D. كرية واحدة حمراء وعلى الأقل واحدة خضراء

$$P(D) = \frac{(C_2^1 \times C_4^1 \times C_5^2) + (C_2^1 \times C_4^2 \times C_5^1) + (C_2^1 \times C_4^3)}{C_{11}^4} = \boxed{\frac{74}{165}}$$

2. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب، عدد الألوان المحصل عليها.

أ. تعيين قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X

$$X \in \{1; 2; 3\} ; P(X = 1) = P(A) = \frac{1}{55} ; P(X = 2) = P(C)$$

$$= \frac{82}{165} ; P(X = 3) = P(B) = \frac{16}{33}$$

X_i	1	2	3
$P(X = X_i)$	$\frac{1}{55}$	$\frac{82}{165}$	$\frac{16}{33}$

ب. حساب الأمل الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمتغيّر العشوائي X

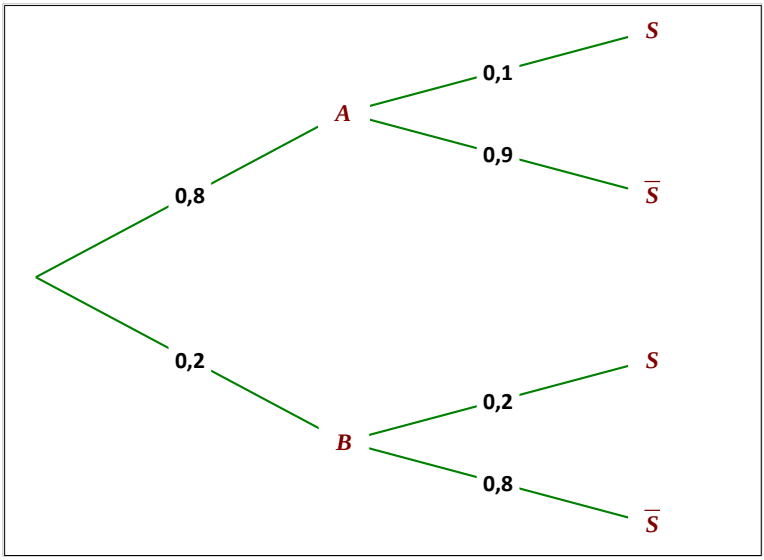
$$E(X) = 1\left(\frac{1}{55}\right) + 2\left(\frac{82}{165}\right) + 3\left(\frac{16}{33}\right) = \boxed{\frac{37}{15}}$$

$$V(X) = 1\left(\frac{1}{55}\right) + 4\left(\frac{82}{165}\right) + 9\left(\frac{16}{33}\right) - \left(\frac{37}{15}\right)^2 = \boxed{\frac{706}{2475}}$$

$$\sigma(X) = \boxed{\sqrt{\frac{706}{2475}}}$$

التمرين 15.

1. **ترجمة الوضعية بشجرة**



2. **حساب احتمال الحادثة $B \cap S$**

$$P(B \cap S) = 0{,}2 \times 0{,}2 = \boxed{0{,}04}$$

3. **بيان أنّ احتمال أن لا تحتوي العلبة على آثار المبيدات هو $0{,}88$**

$$P(\bar{S}) = P(A \cap \bar{S}) + P(B \cap \bar{S}) = 0{,}8 \times 0{,}9 + 0{,}2 \times 0{,}8$$
$$= 0{,}72 + 0{,}16 = \boxed{0{,}88}$$

4. **حساب احتمال أن يكون مصدر العلبة المختارة هو المصنع B علما أنها تحتوي على آثار المبيدات**

$$P_S(B) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{P(B \cap S)}{1 - P(\bar{S})} = \frac{0{,}04}{0{,}12} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

التمرين 16.

1. **ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب قيمة الربح أو الخسارة**

   أ. **تعريف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X وحساب أمله الرياضياتي $E(X)$**

$$X \in \left\{ \underbrace{2}_{BB} ; \underbrace{-1}_{BN+NB} ; \underbrace{-4}_{NN} \right\} ; P(X = 2) = \left(\frac{8}{n+8}\right)^2 = \boxed{\frac{64}{(n+8)^2}}$$

$$P(X=-1)=2\left(\frac{8}{n+8}\right)\left(\frac{n}{n+8}\right)=\boxed{\frac{16n}{(n+8)^2}}$$

$$P(X=-4)=\left(\frac{n}{n+8}\right)^2=\boxed{\frac{n^2}{(n+8)^2}}$$

X_i	2	-1	-4
$P(X=X_i)$	$\frac{64}{(n+8)^2}$	$\frac{16n}{(n+8)^2}$	$\frac{n^2}{(n+8)^2}$

$$E(X)=2\times\frac{64}{(n+8)^2}-\frac{16n}{(n+8)^2}-\frac{4n^2}{(n+8)^2}$$
$$=\boxed{\frac{-4n^2-16n+128}{(n+8)^2}}$$

ب. تعيين قيمة للعدد n حتى يكون الأمل الرياضياتي معدوما

$$E(X)=0\Rightarrow\frac{-4n^2-16n+128}{(n+8)^2}=0\Rightarrow -n^2-4n+32=0$$
$$\Rightarrow\boxed{n=4}$$

2. تعريف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي Y

$$Y\in\left\{\underbrace{-6}_{3N};\ \underbrace{-3}_{2N+1B};\ \underbrace{0}_{1N+2B};\ \underbrace{3}_{3B}\right\};P(Y=-6)=\frac{C_6^3}{C_{14}^3}$$
$$=\boxed{\frac{5}{91}}\ ;\ P(Y=-3)=\frac{C_6^2\times C_8^1}{C_{14}^3}=\boxed{\frac{30}{91}}$$

$$P(Y=0)=\frac{C_6^1\times C_8^2}{C_{14}^3}=\boxed{\frac{6}{13}}\ ;\ P(Y=3)=\frac{C_8^3}{C_{14}^3}=\boxed{\frac{2}{13}}$$

Y_i	-6	-3	0	3
$P(Y=Y_i)$	$\frac{5}{91}$	$\frac{30}{91}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{2}{13}$

التمرين 17.

I) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل رمية العدد $\sin(\alpha+\beta)$

1. تعيين القيم الممكنة للمتغيّر العشوائي X

β \ α	0	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$
0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	-1	-1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	-1	-1
$\frac{\pi}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

$$\boxed{X \in \left\{-1; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right\}}$$

2. تعيين قانون احتمال المتغيّر العشوائي X

X_i	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$P(X = X_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

3. حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري للمتغيّر العشوائي X

$$E(X) = -1\left(\frac{1}{9}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{9}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{9}\right) + 1\left(\frac{2}{9}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{6}}$$

$$V(X) = 1\left(\frac{1}{9}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{9}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{9}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{9}\right) + 1\left(\frac{2}{9}\right) - \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$= \frac{5}{4} \Rightarrow \sigma(X) = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

II) ليكن Y المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل رمية قيمة الربح أو الخسارة

1. عرّف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي Y.

$Y \in \{-5; 10\}$; $P(Y = 10) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$; $P(Y = -5) = \frac{2}{3}$

Y_i	-5	10
$P(Y = Y_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

2. حساب احتمال أن يربح اللاعب 20 نقطة عندما يرمي حجري النرد 5 مرات

يربح اللاعب 20 نقطة عندما يربح 3 مرات ويخسر مرتين

$[3(10) + 2(-5) = 20]$ ومنه:

$$P = C_5^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \boxed{\frac{40}{243}}$$

التمرين 18.

1. حساب احتمال الحصول على رقمين متساويين $(x = y)$

	1	2	2	2	4	4
0	(1,0)	(2,0)	(2,0)	(2,0)	(4,0)	(4,0)
1	$(\mathbf{1},\mathbf{1})$	(2,1)	(2,1)	(2,1)	(4,1)	(4,1)
2	(1,2)	$(\mathbf{2},\mathbf{2})$	$(\mathbf{2},\mathbf{2})$	$(\mathbf{2},\mathbf{2})$	(4,2)	(4,2)
4	(1,4)	(2,4)	(2,4)	(2,4)	$(\mathbf{4},\mathbf{4})$	$(\mathbf{4},\mathbf{4})$

$$P(A) = \underbrace{\left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{4}\right)}_{(\mathbf{1},\mathbf{1})} + \underbrace{\left(\frac{3}{6} \times \frac{1}{4}\right)}_{(\mathbf{2},\mathbf{2})} + \underbrace{\left(\frac{2}{6} \times \frac{1}{4}\right)}_{(\mathbf{4},\mathbf{4})} = \frac{6}{24} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

2. تعيين قانون احتمال المتغيّر العشوائي X وحساب أمله الرياضي

	1	2	2	2	4	4
0	$1^0 = 1$	$2^0 = 1$	$2^0 = 1$	$2^0 = 1$	$4^0 = 1$	$4^0 = 1$
1	$1^1 = 1$	$2^1 = 2$	$2^1 = 2$	$2^1 = 2$	$4^1 = 4$	$4^1 = 4$
2	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$2^2 = 4$	$2^2 = 4$	$4^2 = 16$	$4^2 = 16$
4	$1^4 = 1$	$2^4 = 16$	$2^4 = 16$	$2^4 = 16$	$4^4 = 64$	$4^4 = 64$

$X \in \{1; 2; 4; 16; 64\}$

$$P(X=1)=\boxed{\frac{9}{24}}\ ;\ P(X=2)=\boxed{\frac{3}{24}}\ ;\ P(X=4)=\boxed{\frac{5}{24}}$$

$$P(X=16)=\boxed{\frac{5}{24}}\ ;\ P(X=64)=\boxed{\frac{2}{24}}$$

X_i	1	2	4	16	64
$P(X=X_i)$	$\frac{9}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{2}{24}$

$$E(X)=\frac{9}{24}+\frac{6}{24}+\frac{20}{24}+\frac{80}{24}+\frac{128}{24}=\boxed{\frac{81}{8}}$$

التمرين 19.

1. حساب احتمال الحادثتين A و B:

$$P(A)=\frac{C_2^2+C_3^2}{C_5^2}=\boxed{\frac{2}{5}}\ ;\ P(B)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\boxed{\frac{1}{10}}$$

2. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الرقمين المسجلين على القريصتين

أ. تعيين قانون احتمال المتغيّر العشوائي X

$$X\in\left\{\underbrace{-2}_{\{-1;-1\}}\ ;\ \underbrace{0}_{\{-1;1\}}\ ;\ \underbrace{2}_{\{1;1\}}\right\};P(X=-2)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\boxed{\frac{1}{10}}\ ;P(X=0)$$

$$=\frac{C_2^1\times C_3^1}{C_5^2}=\boxed{\frac{3}{5}}\ ;P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\boxed{\frac{3}{10}}$$

X_i	-2	0	2
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

ب. حساب الأمل الرياضي للمتغيّر العشوائي X وتباينه

$$E(X)=-\frac{2}{10}+\frac{6}{10}=\boxed{\frac{2}{5}}\ ;V(X)=\frac{4}{10}+\frac{12}{10}-\frac{4}{25}=\boxed{\frac{36}{25}}$$

3. حساب احتمال الحادثتين E و F:

$$(P')\parallel(P)\Rightarrow a=b\Rightarrow P(E)=\frac{A_2^2+A_3^2}{A_5^2}=\boxed{\frac{2}{5}}$$

$$(P') \perp (P) \Rightarrow 1 + ab = 0 \Rightarrow ab = -1 \Rightarrow P(F) = \frac{A_2^1 \times A_3^1}{A_5^2} = \boxed{\frac{3}{10}}$$

التمرين 20.

$P(A) = 0{,}7\ ;\ P(F) = 0{,}63\ ;\ P(A \cap F) = 0{,}42$

1. بيان أنّ $P_A(F) = 0{,}6$ واستنتاج $P_A(\overline{F})$

$$P(A \cap F) = P(A) \times P_A(F) \Rightarrow P_A(F) = \frac{P(A \cap F)}{P(A)} = \frac{0{,}42}{0{,}7} = \boxed{0{,}6}$$

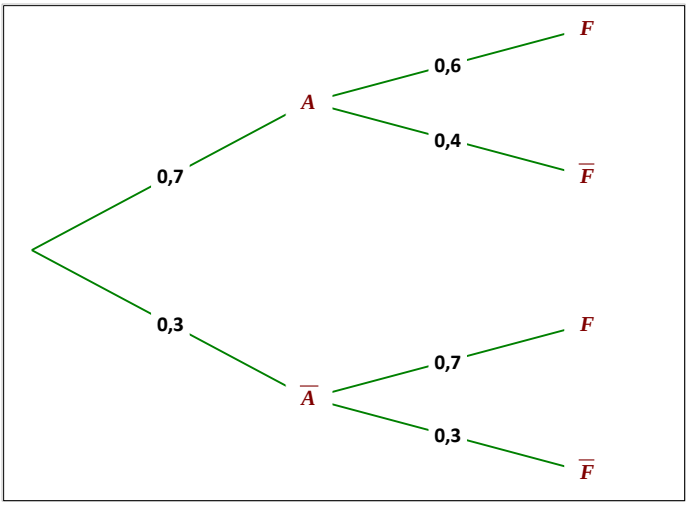
$$P_A(\overline{F}) = 1 - P_A(F) = 1 - 0{,}6 = \boxed{0{,}4}$$

2. بيان أنّ $P(F \cap \overline{A}) = 0{,}21$

$$P_F(A) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{0{,}42}{0{,}63} = \frac{2}{3} \Rightarrow P_F(\overline{A}) = 1 - P_F(A) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P_F(\overline{A}) = \frac{P(F \cap \overline{A})}{P(F)} \Rightarrow P(F \cap \overline{A}) = P(F) \times P_F(\overline{A}) = \frac{0{,}63}{3} = \boxed{0{,}21}$$

3. شجرة الاحتمالات



4. حساب احتمال أن لا يتكلم المشارك أيّ من اللغتين

$$P(\overline{A} \cap \overline{F}) = 0{,}3 \times 0{,}3 = \boxed{0{,}09}$$

التمرين 21.

1) $P(\bar{A}) = 0,6$: صحيح

$P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,4 = \boxed{0,6}$

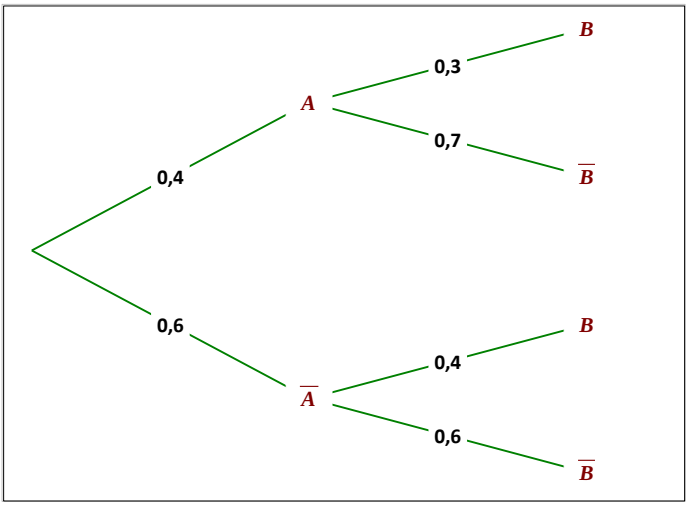
2) $P_A(\bar{B}) = 0,7$: صحيح

$P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - 0,3 = \boxed{0,7}$

3) $P(B) = 0,7$: خطأ

$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = (0,4 \times 0,3) + (0,6 \times 0,4)$

$= \boxed{0,36}$



التمرين 22.

1. **شجرة الاحتمالات**
2. **حساب احتمال أن يكون الشخص المختار ليس لديه حاسوب ولا يستعمل الأنترنت**

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,8 \times 0,4 = \boxed{0,32}$

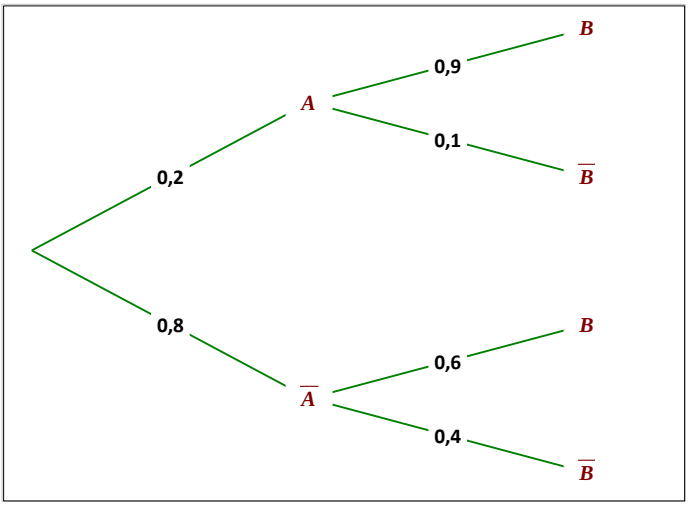
3. **حساب $P(\bar{A} \cap B)$ و$P(A \cap B)$ واستنتاج $P(B)$**

$P(\bar{A} \cap B) = 0,8 \times 0,6 = \boxed{0,48}$; $P(A \cap B) = 0,2 \times 0,9 = \boxed{0,18}$

$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0,18 + 0,48 = \boxed{0,66}$

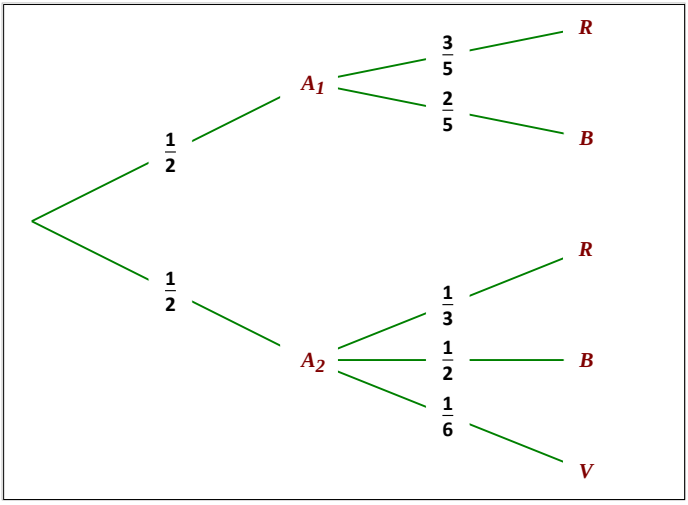
4. **حساب احتمال أن يكون الشخص المختار لديه حاسوب علما أنّه يستعمل الأنترنت**

$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,18}{0,66} = \boxed{\dfrac{3}{11}}$



التمرين 23.

1. **شجرة الاحتمالات**



2. **احتمال الحصول على قريصة حمراء**

$$P(R) = P(A_1 \cap R) + P(A_2 \cap R) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{7}{15}}$$

3. **احتمال الحصول على قريصة حمراء علما أنّها من الوعاء A_1**

$$P_{A_1}(R) = \frac{P(R \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

4. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب أرباح القريصات

أ. تعيين قانون احتمال المتغيّر العشوائي X

$X \in \{-1; 1; 2\}$

$$P(X=-1) = P(B) = \left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{9}{20}}$$

$$P(X=1) = P(R) = \boxed{\frac{7}{15}} \; ; \; P(X=2) = P(V) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

X_i	-1	1	2
$P(X=X_i)$	$\frac{9}{20}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{12}$

ب. حساب الأمل الرياضي للمتغيّر العشوائي X وتباينه

$$E(X) = -1\left(\frac{9}{20}\right) + 1\left(\frac{7}{15}\right) + 2\left(\frac{1}{12}\right) = \boxed{\frac{11}{60}}$$

$$V(X) = 1\left(\frac{9}{20}\right) + 1\left(\frac{7}{15}\right) + 4\left(\frac{1}{12}\right) - \left(\frac{11}{60}\right)^2 = \boxed{\frac{4379}{3600}}$$

التمرين 24.

1. تعيين مجموعة الإمكانيات Ω

① \ ②	-1	-1	1	1	2	2
-1	$(-1,-1)$	$(-1,-1)$	$(1,-1)$	$(1,-1)$	$(2,-1)$	$(2,-1)$
-1	$(-1,-1)$	$(-1,-1)$	$(1,-1)$	$(1,-1)$	$(2,-1)$	$(2,-1)$
1	$(-1,1)$	$(-1,1)$	$(1,1)$	$(1,1)$	$(2,1)$	$(2,1)$
1	$(-1,1)$	$(-1,1)$	$(1,1)$	$(1,1)$	$(2,1)$	$(2,1)$
2	$(-1,2)$	$(-1,2)$	$(1,2)$	$(1,2)$	$(2,2)$	$(2,2)$
2	$(-1,2)$	$(-1,2)$	$(1,2)$	$(1,2)$	$(2,2)$	$(2,2)$

$$\boxed{\Omega = \{(-1,-1)\,;(-1,1)\,;(-1,2)\,;(1,-1)\,;(1,1)\,;(1,2)\,;(2,-1)\,;(2,1)\,;(2,2)\}}$$

2. حساب احتمال الحوادث التالية:

A. الحصول على رقمين مجموعهما 3

$$P(A) = P(1,2) + P(2,1) = \frac{4}{36} + \frac{4}{36} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

B. الحصول على رقمين جداؤهما 1

$$P(B) = P(-1,-1) + P(1,1) = \frac{4}{36} + \frac{4}{36} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

C. الحصول على رقمين متساويين

$$P(C) = P(-1,-1) + P(1,1) + P(2,2) = \frac{4}{36} + \frac{4}{36} + \frac{4}{36} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

3. حساب احتمال الحصول على رقمين جداؤهما 1 علما أنهما متساويين

$$P_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(B)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

4. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بمجموع الرقمين المحصل عليهما

أ. تعيين قانون احتمال المتغيّر العشوائي X

الرمية ① / الرمية ②	-1	-1	1	1	2	2
-1	-2	-2	0	0	1	1
-1	-2	-2	0	0	1	1
1	0	0	2	2	3	3
1	0	0	2	2	3	3
2	1	1	3	3	4	4
2	1	1	3	3	4	4

$X \in \{-2; 0; 1; 2; 3; 4\}$

$$P(X=-2) = \frac{4}{36} = \boxed{\frac{1}{9}} \; ; \; P(X=0) = \frac{8}{36} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

$$P(X=1) = \frac{8}{36} = \boxed{\frac{2}{9}} \; ; \; P(X=2) = \frac{4}{36} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

$$P(X=3) = \frac{8}{36} = \boxed{\frac{2}{9}} \; ; P(X=4) = \frac{4}{36} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

X_i	-2	0	1	2	3	4
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

ب. حساب الأمل الرياضي للمتغيّر العشوائي X وتباينه

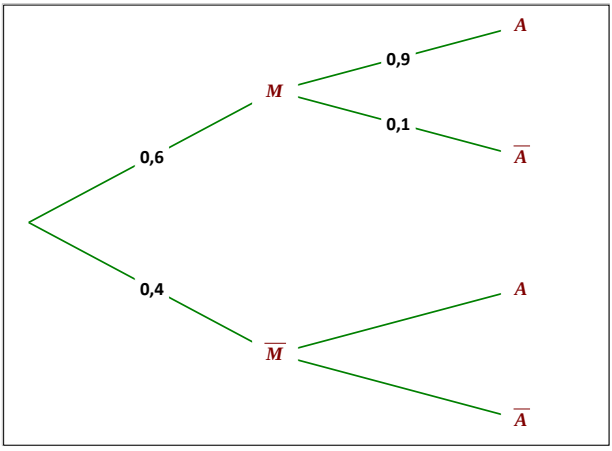
$$E(X) = -\frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{6}{9} + \frac{4}{9} = \frac{12}{9} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

$$V(X) = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} + \frac{18}{9} + \frac{16}{9} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \boxed{\frac{28}{9}}$$

التمرين 25.

$$P(M) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} \; ; P_M(A) = \frac{9}{10} \; ; P_A(M) = \frac{14}{15} \; ; P_A(\bar{M}) = \frac{1}{15}$$

1. شجرة الاحتمالات



2. حساب $P(M \cap A)$ و$P(A)$ ، واستنتاج $P(\bar{M} \cap A)$

$$P(M \cap A) = P(M) \times P_M(A) = \frac{3}{5} \times \frac{9}{10} = \boxed{\frac{27}{50}}$$

$$P_A(M) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(A) = \frac{P(M \cap A)}{P_A(M)} = \frac{\frac{27}{50}}{\frac{14}{15}} = \boxed{\frac{81}{140}}$$

$$P(A) = P(M \cap A) + P(\bar{M} \cap A) \Rightarrow P(\bar{M} \cap A) = P(A) - P(M \cap A)$$

$$= \frac{81}{140} - \frac{27}{50} = \boxed{\frac{27}{700}}$$

3. حساب $P_{\bar{M}}(A)$

$$P_{\bar{M}}(A) = \frac{P(\bar{M} \cap A)}{P(\bar{M})} = \frac{P(\bar{M} \cap A)}{1 - P(M)} = \frac{\frac{27}{700}}{\frac{2}{5}} = \boxed{\frac{27}{280}}$$

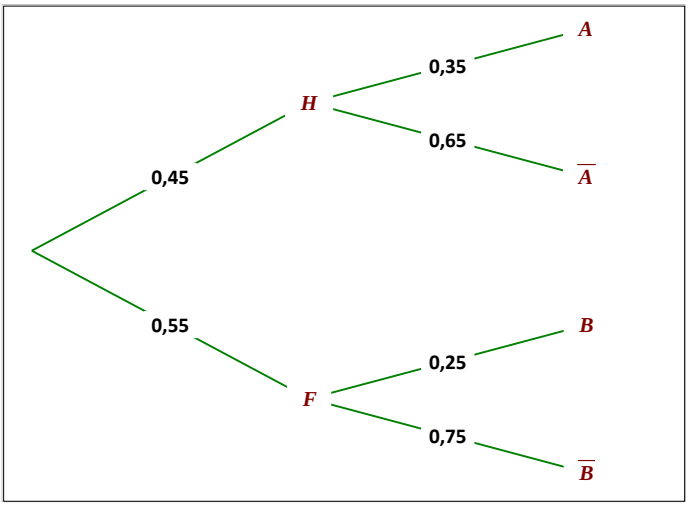
4. **تعيين العدد الحقيقي k حيث: $P_M(A) = k \times P_{\bar{M}}(A)$**

$$P_M(A) = k \times P_{\bar{M}}(A) \Rightarrow k = \frac{P_M(A)}{P_{\bar{M}}(A)} = \frac{\frac{14}{15}}{\frac{27}{280}} = \frac{784}{81} \approx \boxed{9{,}679}$$

نستنتج أنّ احتمال حصولك على البكالوريا بمعدل في الرياضيات أكبر من 10 يساوي تقريبا عشرة أضعاف احتمال حصولك على البكالوريا دون المعدل في الرياضيات (واللبيب بالإشارة يفهم).

التمرين 26.

1. **شجرة الاحتمالات**



2. **احسب احتمال أن يكون الشخص المختار:**

أ. **رجلا يتحدث لغة أجنبية**

$$P(H \cap A) = 0{,}45 \times 0{,}35 = \boxed{0{,}1575}$$

ب. **امرأة لا تتحدث لغة أجنبية**

$$P(F \cap \bar{B}) = 0{,}55 \times 0{,}75 = \boxed{0{,}4125}$$

ج. **شخصا يتحدث لغة أجنبية**

$$P(C) = P(H \cap A) + P(F \cap B) = (0{,}45 \times 0{,}35) + (0{,}55 \times 0{,}25) = \boxed{0{,}295}$$

3. **احسب احتمال أن يكون الشخص المختار امرأة علما أنه يتحدث لغة أجنبية**

$$P_C(F) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}55 \times 0{,}25}{0{,}295} = \boxed{0{,}466}$$

التمرين 27.

1. تعيين عدد الثلاثيات المختلفة التي يمكن الحصول عليها

$A_5^3 = \boxed{60}$

2. تعيين عدد الثلاثيات المختلفة التي يمكن الحصول عليها حيث مجموع عناصرها معدوم

$2A_3^3 = \boxed{12}$

$$\left(\underbrace{\{-2;0;2\}}_{A_3^3} \Rightarrow \begin{cases} (-2;0;2) \\ (-2;2;0) \\ (0;-2;2) \\ (0;2;-2) \\ (2;-2;0) \\ (2;0;-2) \end{cases} + \underbrace{\{-1;0;1\}}_{A_3^3} \Rightarrow \begin{cases} (-1;0;1) \\ (-1;1;0) \\ (0;-1;1) \\ (0;1;-1) \\ (1;-1;0) \\ (1;0;-1) \end{cases} \right)$$

3. $\boldsymbol{A(2;0)}$ ، $\boldsymbol{B(0;-4)}$ و $\boldsymbol{C(2;2)}$ ، $\boldsymbol{G\{(A;a),(B;b),(C;c)\}}$

A. حساب احتمال وجود النقطة $\boldsymbol{G}$

$$P(A) = 1 - \frac{12}{60} = 1 - \frac{1}{5} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

B. حساب احتمال أن تكون النقطة $\boldsymbol{O}$ مرجح الجملة السابقة

$$G = O \Rightarrow \begin{cases} 2a + 2c = 0 \\ -4b + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = \frac{1}{2}c \end{cases} \Rightarrow (a;b;c) = \left(-c;\frac{1}{2}c;c\right)$$

$$\Rightarrow (a;b;c) \in \{(-2;1;2);(2;-1;-2)\}$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{2}{60} = \boxed{\frac{1}{30}}$$

التمرين 28.

$\oplus$	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

1. حساب الاحتمالات التالية: $P_A(B)$ ، $P_B(C)$ ، $P_A(C)$

$$P(A) = P(1;1) + P(1;3) + P(2;2) + P(2;4) + P(3;1) + P(3;3) + P(4;2) + P(4;4) = \frac{8}{16} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$P(B) = P(4;1) + P(4;2) + P(4;3) + P(4;4) = \frac{4}{16} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$P(C) = P(2;1) + P(3;1) + P(3;2) + P(4;1) + P(4;2) + P(4;3) = \frac{6}{16} = \boxed{\frac{3}{8}}$$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{16}}{\frac{8}{16}} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$\left(P(A \cap B) = P(4;2) + P(4;4) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}\right)$$

$$P_B(C) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{4}{16}} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

$$\left(P(B \cap C) = P(4;1) + P(4;2) + P(4;3) = \frac{3}{16}\right)$$

$$P_A(C) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{16}}{\frac{8}{16}} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$\left(P(A \cap C) = P(3;1) + P(4;2) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}\right)$$

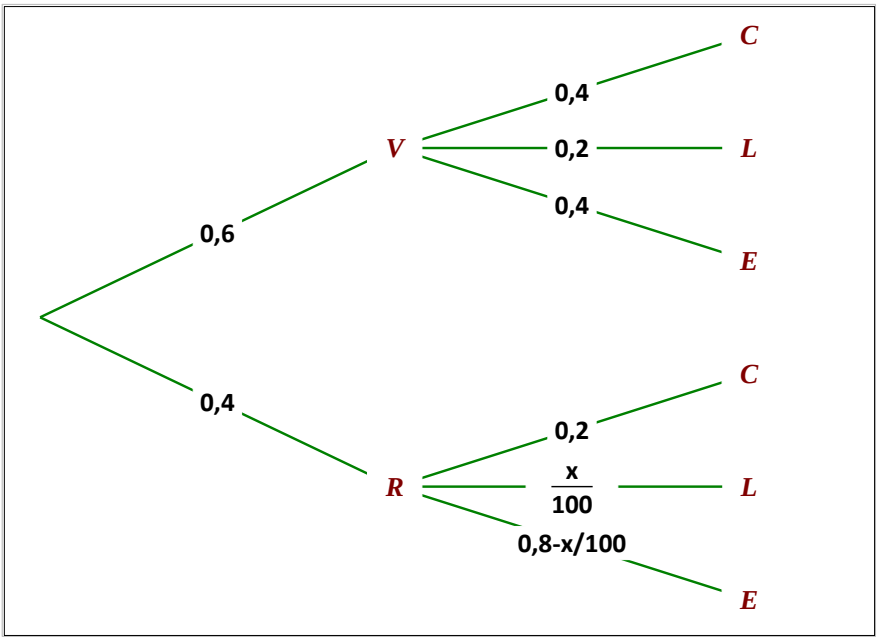
2. الحادثتان A و B مستقلتان لأنّ $\underbrace{P(A \cap B)}_{\frac{1}{8}} = \underbrace{P(A) \times P(B)}_{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}}$

الحادثتان A و C غير مستقلتين لأنّ $\underbrace{P(A \cap C)}_{\frac{1}{8}} \neq \underbrace{P(A) \times P(C)}_{\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{16}}$

الحادثتان B و C غير مستقلتين لأنّ $\underbrace{P(B \cap C)}_{\frac{3}{16}} \neq \underbrace{P(B) \times P(C)}_{\frac{1}{4}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{32}}$

التمرين 29.

I- نسحب من الصندوق مكعبا واحدا.



1. **بيان أنّ:** $P(L) = 0,12 + 0,004x$

$$P(L) = P(V \cap L) + P(R \cap L) = 0,6 \times 0,2 + 0,4 \times \frac{x}{100}$$
$$= \boxed{0,12 + 0,004x}$$

2. **تعيين قيمة x بحيث:** $P(L) = P(E)$

$$P(E) = P(V \cap E) + P(R \cap E) = 0,6 \times 0,4 + 0,4 \times \left(0,8 - \frac{x}{100}\right)$$
$$= 0,24 + 0,32 - 0,004x = \boxed{0,56 - 0,004x}$$
$$P(L) = P(E) \Rightarrow 0,12 + 0,004x = 0,56 - 0,004x \Rightarrow 0,008x = 0,44$$
$$\Rightarrow \boxed{x = 55}$$

3. **تعيين قيمة x بحيث تكون الحادثتان V و L مستقلتين**

V و L مستقلتان $\Rightarrow P(L) = P_V(L) \Rightarrow 0,12 + 0,004x = 0,2$
$$\Rightarrow 0,004x = 0,08 \Rightarrow \boxed{x = 20}$$

4. **حساب احتمال سحب مكعب أخضر علما أنّه يحمل رسم المعيّن**

$$P_L(V) = \frac{P(V \cap L)}{P(L)} = \frac{P(V) \times P_V(L)}{P(L)} = \frac{0,6 \times 0,2}{0,12 + 0,004 \times 50} = \boxed{0,375}$$

II- نسحب الآن ثلاثة مكعبات في آن واحد.

1. حساب احتمال سحب مكعب أحمر على الأقل

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_{60}^3}{C_{100}^3} = 1 - \frac{34220}{161700} \approx \boxed{0,79}$$

2. حساب احتمال أن تكون المكعبات المسحوبة من نفس اللون

$$P(B) = \frac{C_{60}^3 + C_{40}^3}{C_{100}^3} = \frac{3}{11} \approx \boxed{0,27}$$

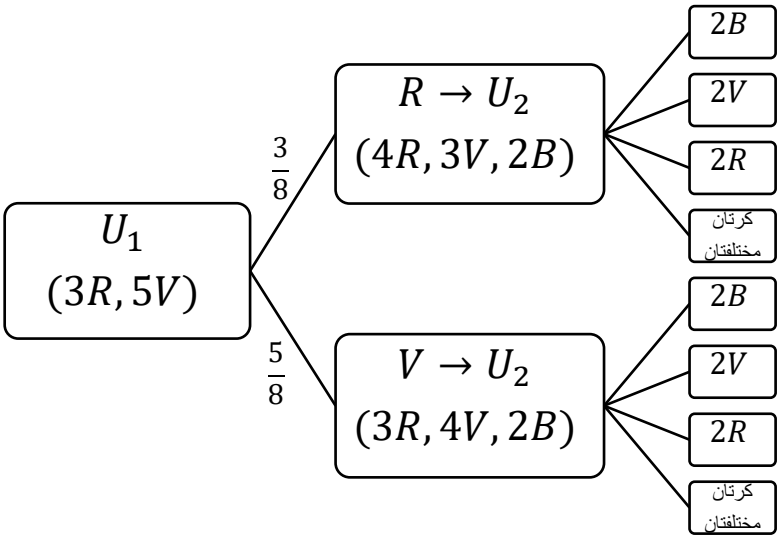
3. حساب احتمال سحب مكعب واحد يحمل رسم الدائرة

4. عدد المكعبات الخضراء التي تحمل رسم الدائرة هو: $60 \times 0,4 = 24$

عدد المكعبات الحمراء التي تحمل رسم الدائرة هو: $40 \times 0,2 = 8$

$$P(D) = \frac{C_{32}^1 \times C_{68}^2}{C_{100}^3} = \frac{18224}{40425} \approx \boxed{0,45}$$

التمرين 30.



A. حساب احتمال سحب كرتين بيضاوين من الصندوق U_2

$$P(A) = \frac{C_2^2}{C_9^2} = \boxed{\frac{1}{36}}$$ (لا توجد علاقة بالسحب الأول)

B. حساب احتمال سحب كرتين خضراوين من الصندوق U_2

$$P(B) = \frac{3}{8} \times \frac{C_3^2}{C_9^2} + \frac{5}{8} \times \frac{C_4^2}{C_9^2} = \boxed{\frac{13}{96}}$$

C. حساب احتمال سحب كرتين حمراوين من الصندوق U_2

$$P(C) = \frac{3}{8} \times \frac{C_4^2}{C_9^2} + \frac{5}{8} \times \frac{C_3^2}{C_9^2} = \boxed{\frac{11}{96}}$$

D. حساب احتمال سحب كرتين مختلفتين في اللون من الصندوق U_2

$$P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - [P(A) + P(B) + P(C)]$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{36} + \frac{13}{96} + \frac{11}{96}\right) = 1 - \frac{5}{18} = \boxed{\frac{13}{18}}$$

التمرين 31.

$P(A) = 0,3$ ، $P(B) = 0,8$ و $P(A \cap B) = 0,2$

		أ	ب	جـ
1	$P(\bar{A})$			*0,7*
2	$P(\bar{B})$		*0,2*	
3	$P(A \cup B)$	*0,9*		
4	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$		*0,1*	
5	$P_B(A)$			*0,25*
6	$P_A(B)$		$2/3$	
7	$P_{\bar{B}}(\bar{A})$	*0,5*		
8	$P_A(\bar{B})$		$1/3$	

التعليل:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,3 = \boxed{0,7}$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,8 = \boxed{0,2}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,8 - 0,2 = \boxed{0,9}$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,9 = \boxed{0,1}$$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,2}{0,8} = \frac{1}{4} = \boxed{0,25}$$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,2}{0,3} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$P_{\bar{B}}(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2} = \boxed{0,5}$$

$$P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

التمرين 32.

I- نسحب عشوائيا 3 كريات في آن واحد

1. عدد الحالات الممكنة لهذا السحب

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{3! \times 7!} = \boxed{120}$$

2. حساب احتمال الحادثتين التاليتين:

A. تظهر الألوان الثلاثة في السحب

$$P(A) = \frac{C_5^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{30}{120} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

B. من بين الكريات المسحوبة توجد على الأقل واحدة زرقاء

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{C_7^3}{C_{10}^3} = 1 - \frac{7}{24} = \boxed{\frac{17}{24}}$$

3. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكريات الزرقاء المسحوبة

أ. تعيين قانون احتمال المتغيّر العشوائي X وحساب أمله الرياضياتي

$X \in \{0; 1; 2; 3\}$

$$P(X = 0) = \frac{C_7^3}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{7}{24}} \; ; \; P(X = 1) = \frac{C_3^1 \times C_7^2}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{21}{40}}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_3^2 \times C_7^1}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{7}{40}} \; ; \; P(X = 3) = \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{1}{120}}$$

X_i	0	1	2	3
$P(X = X_i)$	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$

$$E(X) = 1\left(\frac{21}{40}\right) + 2\left(\frac{7}{40}\right) + 3\left(\frac{1}{120}\right) = \frac{36}{40} = \boxed{\frac{9}{10}}$$

ب. حساب $P(e^X \geq e)$

$$P(e^X \geq e) = P(X \geq 1) = P(B) = \boxed{\frac{17}{24}}$$

II- نسحب الآن كريتين على التوالي وبدون إرجاع

بما أنّ الكريات المسحوبة في الجزء الأول كلها زرقاء ولم تعاد إلى الكيس، فقد صار لدينا 5 كريات حمراء وكرتين صفراوين

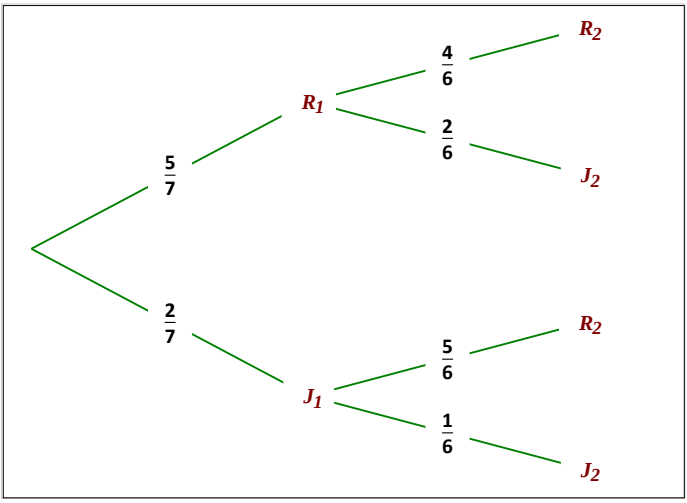
1. **عدد الحالات الممكنة لهذا السحب هو 42 : صحيح**

$$A_7^2 = \frac{7!}{5!} = \boxed{42}$$

2. **احتمال الحصول على كريتين من نفس اللون هو $\frac{10}{42}$: خطأ**

$$\frac{A_5^2 + A_2^2}{A_7^2} = \boxed{\frac{22}{42}}$$

3. **احتمال أن تكون الكرية الثانية حمراء علما أنّ الأولى صفراء هو $\frac{1}{6}$: خطأ**



$$P_{J_1}(R_2) = \boxed{\frac{5}{6}}$$

III- نسحب الآن كريتين على التوالي بإرجاع

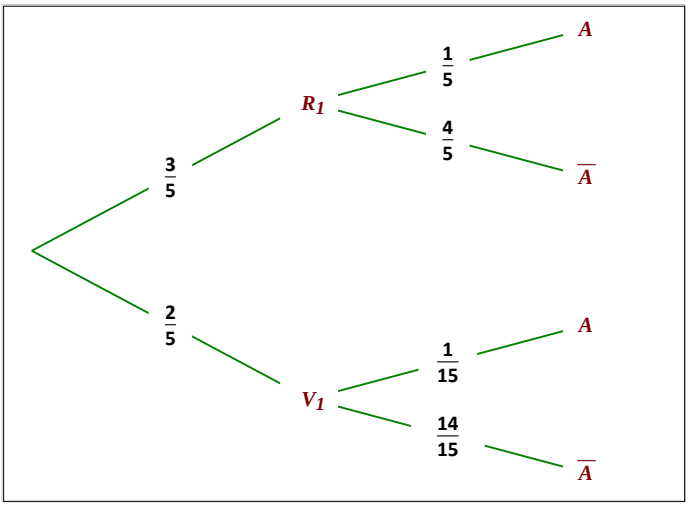
بما أنّ الكريات المسحوبة في الجزء الثاني مختلفة اللون ولم تعاد إلى الكيس، فقد صار لدينا 4 كريات حمراء وواحدة صفراء

بيان أنّ $P_{R_2}(J_1) = \frac{1}{5}$

$$P_{R_2}(J_1) = \frac{P(J_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{P(J_1) \times P(R_2)}{P(R_2)} = P(J_1) = \boxed{\frac{1}{5}}$$

(لاحظ أنّ الحادثتين J_1 و R_2 مستقلتان)

التمرين 33.



1. **حساب الاحتمالين $P(R_1)$ و $P(R_1 \cap A)$**

عندما نسحب كرة حمراء من U_1 ونضعها في U_2 يصير لدينا 3 كرات حمراء و3 كرات خضراء في U_2، ومنه:

$$P(R_1) = \boxed{\frac{3}{5}}$$

$$P(R_1 \cap A) = P(R_1) \times P_{R_1}(A) = \frac{3}{5} \times \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} = \boxed{\frac{3}{25}}$$

2. **التحقّق أنّ $P(A) = \frac{11}{75}$**

عندما نسحب كرة خضراء من U_1 ونضعها في U_2 يصير لدينا كرتين حمراوين و4 كرات خضراء في U_2، ومنه:

$$P(V_1) = \boxed{\frac{2}{5}}$$

$$P(V_1 \cap A) = P(V_1) \times P_{V_1}(A) = \frac{2}{5} \times \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{15} = \boxed{\frac{2}{75}}$$

$$P(A) = P(R_1 \cap A) + P(V_1 \cap A) = \frac{3}{25} + \frac{2}{75} = \boxed{\frac{11}{75}}$$

الحادثتان A وR_1 غير مستقلتين لأنّ $P(R_1) \times P(A) \neq P(R_1 \cap A)$

$$P(R_1) \times P(A) = \frac{3}{5} \times \frac{11}{75} = \frac{11}{125}; P(R_1 \cap A) = \frac{3}{25}$$

3. حساب احتمال أنّ الكرة المسحوبة من الصندوق U_1 كانت حمراء علما أنّ الكرتين المسحوبتين من الصندوق U_2 حمراوين

$$P_A(R_1) = \frac{P(R_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{25}}{\frac{11}{75}} = \boxed{\frac{9}{11}}$$

4. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع أرباح اللاعب

أ. بيان أنّ: $P(X=-5) = \frac{9n+43}{15(n+5)}$

$$P(X=-5) = P(\{R;V\}) = \frac{n+3}{n+5} \times \frac{C_3^1 \times C_3^1}{C_6^2} + \frac{2}{n+5} \times \frac{C_2^1 \times C_4^1}{C_6^2}$$

$$= \frac{n+3}{n+5} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{n+5} \times \frac{8}{15} = \boxed{\frac{9n+43}{15(n+5)}}$$

ب. قانون احتمال المتغيّر العشوائي X

$X \in \{-20; -5; 10\}$

$$P(X=-20) = P(\{R;R\}) = \frac{n+3}{n+5} \times \frac{C_3^2}{C_6^2} + \frac{2}{n+5} \times \frac{C_2^2}{C_6^2}$$

$$= \frac{n+3}{n+5} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{n+5} \times \frac{1}{15} = \boxed{\frac{3n+11}{15(n+5)}}$$

$$P(X=10) = P(\{V;V\}) = \frac{n+3}{n+5} \times \frac{C_3^2}{C_6^2} + \frac{2}{n+5} \times \frac{C_4^2}{C_6^2}$$

$$= \frac{n+3}{n+5} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{n+5} \times \frac{2}{5} = \boxed{\frac{n+7}{5(n+5)}}$$

X_i	-20	-5	10
$P(X=X_i)$	$\frac{3n+11}{15(n+5)}$	$\frac{9n+43}{15(n+5)}$	$\frac{n+7}{5(n+5)}$

التمرين 34.

I- ليكن P_n احتمال أن يكون السحب رقم n من الصندوق A ($n \in \mathbb{N}^*$)

1. احسب الاحتمالين P_1 و P_2

$$P_1 = \frac{1}{2}$$

نسمي A_2 الحادثة "تمّ السحب الثاني من الصندوق A". لدينا:

$$A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap A_2)$$

$$P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap A_2)$$
$$= P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(A_2)$$
$$P_2 = P_1 \times P_{A_1}(A_2) + (1 - P_1) \times P_{B_1}(A_2) \quad \left(P(B_1) = P(\overline{A_1}) \text{ لأنّ}\right)$$

$P_{A_1}(A_2)$ هو احتمال سحب الكرة الثانية من الصندوق A علما أنّ الكرة الأولى سحبت من الصندوق A، وتتحقق هذه الحادثة عندما تكون الكرة الأولى المسحوبة بيضاء، وبما أنّ الصندوق A يحتوي على 6 كرات بيضاء من بين 10 كرات فإنّ: $P_{A_1}(A_2) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

$P_{B_1}(A_2)$ هو احتمال سحب الكرة الثانية من الصندوق A علما أنّ الكرة الأولى سحبت من الصندوق B، وتتحقق هذه الحادثة عندما تكون الكرة الأولى المسحوبة سوداء، وبما أنّ الصندوق B يحتوي على كرتين سوداوين من بين 10 كرات فإنّ: $P_{B_1}(A_2) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. ومنه نستنتج أنّ:

$$P_2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{10} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

2. بيان أنّه توجد علاقة تراجعية تعطى بالمتتالية (P_n) ، حيث من أجل كل $P_n = aP_{n-1} + b : \ n \geq 2$

نسمي A_n الحادثة: "يكون السحب رقم n من الصندوق A"

A_{n-1} الحادثة: "يكون السحب رقم $n-1$ من الصندوق A"

B_{n-1} الحادثة: "يكون السحب رقم $n-1$ من الصندوق B"

$$A_n = (A_{n-1} \cap A_n) \cup (B_{n-1} \cap A_n)$$
$$P(A_n) = P(A_{n-1} \cap A_n) + P(B_{n-1} \cap A_n)$$
$$= P(A_{n-1}) \times P_{A_{n-1}}(A_n) + P(B_{n-1}) \times P_{B_{n-1}}(A_n)$$
$$P_n = \frac{3}{5}P_{n-1} + \frac{1}{5}(1 - P_{n-1}) = \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}\right)P_{n-1} + \frac{1}{5}$$
$$\Rightarrow \boxed{P_n = \frac{2}{5}P_{n-1} + \frac{1}{5}}$$

II- $u_1 = \frac{1}{2}$ ، $u_n = \frac{2}{5}u_{n-1} + \frac{1}{5}$ ، $n \geq 2$

1. تعيين العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5} - \alpha = \frac{2}{5}\left(u_n + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\alpha\right) = \frac{2}{5}v_n$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\alpha = -\alpha \Rightarrow \frac{3}{2}\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{3}}$$

منه نستنتج أنّه من أجل $\alpha = \frac{1}{3}$ تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$

2. كتابة عبارة u_n بدلالة n ، وبيان أنّ المتتالية (u_n) متقاربة وحدّد نهايتها

$$v_1 = u_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}; v_n = v_1.q^{n-1} = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$

$$u_n = v_n + \alpha \Rightarrow \boxed{u_n = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}}$$

$$-1 < \frac{2}{5} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{متقاربة } (u_n)}$$

3. برهان أنّه من أجل كل $n \geq 1$: $P_n > \frac{1}{3}$

$$\begin{cases} u_n = \frac{2}{5}u_{n-1} + \frac{1}{5} \\ P_n = \frac{2}{5}P_{n-1} + \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow P_n = u_n = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{3} > \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{P_n > \frac{1}{3}}$$

4. تعيين قيّم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $\frac{1}{3} < P_n < \frac{1}{3} + \frac{1}{10000}$

$$P_n < \frac{1}{3} + \frac{1}{10000} \Rightarrow \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{3} < \frac{1}{3} + \frac{1}{10000}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} < \frac{1}{10000} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} < 6.10^{-4}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} < \ln 6.10^{-4} \Rightarrow (n-1)\ln\left(\frac{2}{5}\right) < \ln 6 - 4\ln 10$$

$$\Rightarrow n - 1 > \frac{\ln 6 - 4\ln 10}{\ln 2 - \ln 5} \quad \left(\text{لأن } \ln\left(\frac{2}{5}\right) < 0\right)$$

$$\Rightarrow n > \frac{\ln 6 - 4\ln 10}{\ln 2 - \ln 5} + 1 \Rightarrow n > 9{,}1 \Rightarrow \boxed{n \geq 10}$$

التمرين 35.

1. شجرة الاحتمالات

2. حساب احتمال الحادثة A "العدد N يساوي 2009"

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \boxed{\frac{3}{8}}$$

3. حساب احتمال أن تكون القريصة المسحوبة من الوعاء A_1 علما أنّ العدد N يساوي 2009

$$P_A(A_1) = \frac{P(A_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

4. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب مجموع أرقام العدد N

أ. تعيين قيّم المتغيّر العشوائي X

$X \in \{2; 3; 11\}$

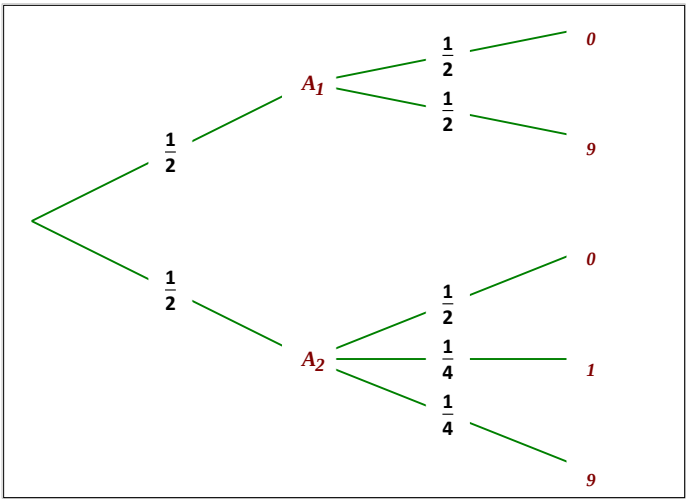
ب. تعيين قانون احتمال المتغيّر العشوائي X وحساب أمله الرياضياتي

$$P\underbrace{(X=2)}_{a=0} = 2\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{2}} \; ; \; P\underbrace{(X=3)}_{a=1} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

$$P\underbrace{(X=11)}_{a=9} = P(A) = \boxed{\frac{3}{8}}$$

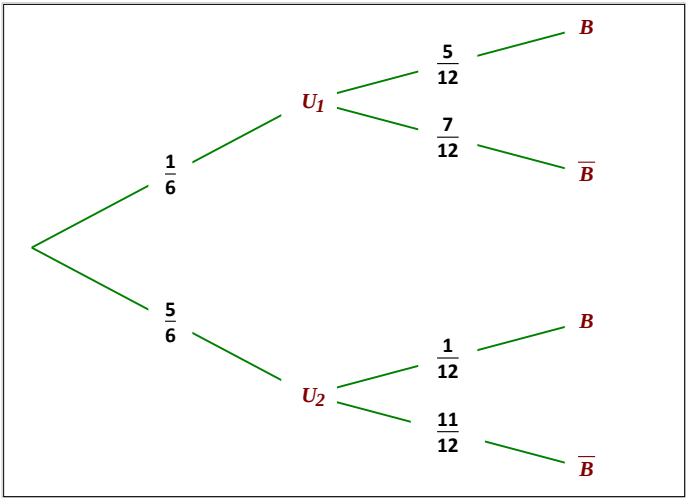
X_i	2	3	11
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

$$E(X) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right) + 11\left(\frac{3}{8}\right) = \boxed{\frac{11}{2}}$$



التمرين 36.

1. بيان أنّ $P(B)=\frac{5}{36}$



$$P(B)=P(U_1\cap B)+P(U_2\cap B)=\frac{1}{6}\times\frac{5}{12}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{12}=\boxed{\frac{5}{36}}$$

2. تعيين أي الاحتمالين أكبر علما أنّ الكرة المسحوبة بيضاء

$$P_B(U_1)=\frac{P(U_1\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{5}{72}}{\frac{5}{36}}=\boxed{\frac{1}{2}};\ P_B(U_2)=\frac{P(U_2\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{5}{72}}{\frac{5}{36}}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

نستنتج أنّ الاحتمالين متساويان

3. ليكن Y المتغيّر العشوائي الذي يرفق مجموع أرباح اللاعب

أ. تعيين قيّم المتغيّر العشوائي Y

$Y\in\{2x;x-20;-40\}$

ب. تعيين قانون احتمال المتغيّر العشوائي Y وحساب أمله الرياضياتي

$$P(Y=2x)=[P(B)]^2=\left(\frac{5}{36}\right)^2=\boxed{\frac{25}{1296}}$$

$$P(Y=-40)=[P(\bar{B})]^2=\left(1-\frac{5}{36}\right)^2=\left(\frac{31}{36}\right)^2=\boxed{\frac{961}{1296}}$$

$$P(Y=x-20)=2\times P(B)\times P(\bar{B})=2\times\frac{5}{36}\times\frac{31}{36}=\boxed{\frac{310}{1296}}$$

نضرب في 2 لأنّ الكرة الأولى قد تكون بيضاء والثانية سوداء أو العكس

Y_i	$2x$	$x-20$	-40
$P(Y=Y_i)$	$\frac{25}{1296}$	$\frac{961}{1296}$	$\frac{310}{1296}$

ج. تعيين قيم x حتى يكون $E(Y) \geq 0$

$$E(Y) \geq 0 \Rightarrow 2x\left(\frac{25}{1296}\right) + (x-20)\left(\frac{961}{1296}\right) - 40\left(\frac{310}{1296}\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1011x - 31620}{1296} \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{31620}{1011} \Rightarrow \boxed{x \geq 32}$$

التمرين 37.

1. حساب احتمال الحصول على كرتين بيضاوين

$$P(\{B;B\}) = \frac{C_n^2}{C_{n+8}^2} = \frac{\frac{n!}{2!\,(n-2)!}}{\frac{(n+8)!}{2!\,(n+6)!}} = \frac{\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}}{\frac{(n+8)(n+7)(n+6)!}{(n+6)!}}$$

$$= \boxed{\frac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)}}$$

2. نرمز بـ $P(n)$ إلى احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون

أ. اثبات أنّ $P(n) = \frac{n^2-n+26}{(n+7)(n+8)}$

$$P(n) = P(\{B;B\}) + P(\{R;R\}) + P(\{V;V\}) = \frac{C_n^2 + C_5^2 + C_3^2}{C_{n+8}^2}$$

$$= \frac{n(n-1)+20+6}{(n+8)(n+7)} = \boxed{\frac{n^2-n+26}{(n+7)(n+8)}}$$

ب. حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} P(n)$

$$\lim_{n\to+\infty} P(n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-n+26}{(n+7)(n+8)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2} = \boxed{1}$$

تفسير النتيجة: كلما كان عدد الكرات البيضاء كبيرا كان احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون أكبر

3. $n = 4$

أ. تعيين قيّم المتغيّر العشوائي X

$X \in \{50; 5; -20\}$

ب. تعيين قانون احتمال المتغيّر العشوائي X وحساب أمله الرياضياتي

X_i	50	5	-20
$P(X=X_i)$	$\frac{361}{4356}$	$\frac{1786}{4356}$	$\frac{2209}{4356}$

$$P(X=50)=[P(4)]^2=\left(\frac{38}{132}\right)^2=\boxed{\frac{361}{4356}}$$

$$P(X=-20)=[1-P(4)]^2=\left(1-\frac{38}{132}\right)^2=\boxed{\frac{2209}{4356}}$$

$$P(X=5)=2[P(4)][1-P(4)]=2\left(\frac{38}{132}\right)\left(\frac{94}{132}\right)=\boxed{\frac{1786}{4356}}$$

$$E(X)=50\left(\frac{361}{4356}\right)+5\left(\frac{1786}{4356}\right)-20\left(\frac{2209}{4356}\right)=\boxed{-\frac{4300}{1089}}$$

التمرين 38.

1. أ. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n على 10

$3^0\equiv 1[10]\ ;\ 3^1\equiv 3[10]\ ;\ 3^2\equiv 9[10]\ ;\ 3^3\equiv 7[10]\ ;\ 3^4\equiv 1[10]$

$\boxed{3^{4k}\equiv 1[10]\ ;\ 3^{4k+1}\equiv 3[10]\ ;\ 3^{4k+2}\equiv 9[10]\ ;\ 3^{4k+3}\equiv 7[10]}$

ب. تعيين باقي قسمة العدد A_n على 10

$A_n=3^{16n+6}-2\times 109^{2n+3}-13$

$3^{16n+6}=3^{4(4n+1)+2}\Rightarrow 3^{16n+6}\equiv 9[10]$

$109\equiv 3^2[10]\Rightarrow 109^{2n+3}\equiv 3^{4n+6}[10]\Rightarrow 109^{2n+3}\equiv 9[10]$

$A_n\equiv 9-2\times 9-13[10]\Rightarrow A_n\equiv -22[10]\Rightarrow \boxed{A_n\equiv 8[10]}$

2. (E): $1008x-343y=301$

أ. اثبات أنّ المعادلة (E) تكافئ المعادلة $144x-49y=43$

$PGCD(1008;343;301)=7\Rightarrow \boxed{(E):144x-49y=43}$

ب. التحقق أنّ $(16;47)$ حل خاص للمعادلة $144x-49y=1$

$144(16)-49(47)=2304-2303=\boxed{1}$

ج. استنتاج حلول المعادلة (E)

بما أنّ $(16;47)$ حل خاص للمعادلة $144x-49y=1$ ،

فإنّ $(688;2021)$ حل خاص للمعادلة $144x-49y=43$

$$\begin{cases} 144x-49y=43 \\ 144(688)-49(2021)=43 \end{cases}\Rightarrow 144(x-688)=49(y-2021)$$

$$\begin{cases} 49|144(x-688) \\ PGCD(49;144)=1 \end{cases} \Rightarrow 49|x-688$$

$$\Rightarrow x = 49k + 688\,; y = 144k + 2021$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \{(49k + 688\,; 144k + 2021)\}\,; k \in \mathbb{Z}}$$

3. $A = \overline{xx0xx01}^3 = \overline{y611}^7$

أ. تعيين قيمتي العددين الطبيعيين x و y

$$\overline{xx0xx01}^3 = \overline{y611}^7 \Rightarrow (3^6 + 3^5 + 3^3 + 3^2)x + 1 = 7^3y + 6.7^2 + 8$$

$$\Rightarrow 1008x - 343y = 301 \Rightarrow (x;y) = (49k + 688\,; 144k + 2021)$$

$$\begin{cases} 0 \le x < 3 \\ 0 \le y < 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le 49k + 688 < 3 \\ 0 \le 144k + 2021 < 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -14{,}04 \le k < -13{,}98 \\ -14{,}03 \le k < -13{,}99 \end{cases}$$

$$\Rightarrow k = -14 \Rightarrow \boxed{(x;y) = (2\,;5)}$$

ب. كتابة A في النظام العشري

$$A = 343(5) + 302 = \boxed{2017}$$

4.

أ. حساب احتمال الحصول على رقمين مجموعهما يساوي مجموع أرقام العدد 2017

$$P(S=10) = P(\{1;9\}) + P(\{3;7\}) = 2 \times \frac{C_1^1 \times C_1^1}{C_4^2} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

ب. تعيين قانون احتمال المتغيّر العشوائي X وحساب أمله الرياضياتي

$$\Omega = \{\{1;3\};\{1;7\};\{1;9\};\{3;7\};\{3;9\};\{7;9\}\}$$

$$\Rightarrow \boxed{X \in \{4;8;10;12;16\}}$$

$$P(X=4) = \frac{C_1^1 \times C_1^1}{C_4^2} = \boxed{\frac{1}{6}}\ ;\ P(X=8) = \frac{C_1^1 \times C_1^1}{C_4^2} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

$$P(X=10) = 2 \times \frac{C_1^1 \times C_1^1}{C_4^2} = \boxed{\frac{1}{3}}\ ;\ P(X=12) = \frac{C_1^1 \times C_1^1}{C_4^2} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

$$P(X=16) = \frac{C_1^1 \times C_1^1}{C_4^2} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

X_i	4	8	10	12	16
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = \frac{4}{6} + \frac{8}{6} + \frac{10}{3} + \frac{12}{6} + \frac{16}{6} = \boxed{10}$$

التمرين 39.

1. **عدد اللجان التي يمكن تشكيلها**

$$A_{30}^{3} = \frac{30!}{27!} = 30 \times 29 \times 28 = \boxed{24360}$$

2. **عدد اللجان التي يمكن تشكيلها بحيث:**

أ. **يكون الأمين تلميذة**

$$A_{12}^{1} \times A_{29}^{2} = \boxed{9744}$$

ب. **يوجد في اللجنة التلميذ x**

$$A_{29}^{2} = \boxed{812}$$

ج. **يكون الرئيس تلميذا والأمين تلميذة**

$$A_{18}^{1} \times A_{12}^{1} \times A_{28}^{1} = \boxed{6048}$$

د. **يكون الرئيس ونائبه من جنسين مختلفين**

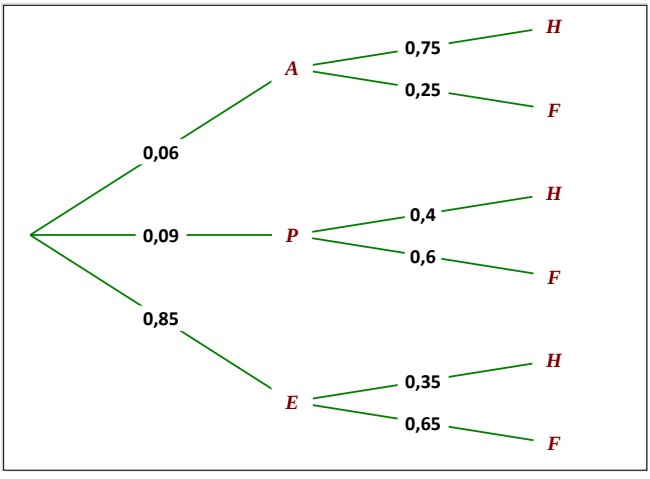
$$2 \times A_{18}^{1} \times A_{12}^{1} \times A_{28}^{1} = \boxed{12096}$$

3. **عدد اللجان التي يمكن تشكيلها علما أنّ الرئيس تلميذ والأمين تلميذة وأنّ التلميذ x لا يريد الانضمام إلى التلميذة y**

$$A_{18}^{1} \times A_{11}^{1} \times A_{27}^{1} + A_{17}^{1} \times A_{12}^{1} \times A_{27}^{1} = \boxed{10854}$$

التمرين 40.

1. **شجرة الاحتمالات**



2. **حساب احتمال أن يكون الفرد المستجوب امرأة**

$$P(F) = P(A \cap F) + P(P \cap F) + P(E \cap F)$$
$$= 0{,}06 \times 0{,}25 + 0{,}09 \times 0{,}6 + 0{,}85 \times 0{,}65 = \boxed{0{,}6215}$$

3. حساب احتمال أن يكون الفرد المستجوب تلميذا علما أنّه رجل

$$P_H(E) = \frac{P(H \cap E)}{P(H)} = \frac{P(H \cap E)}{1 - P(F)} = \frac{0{,}85 \times 0{,}35}{0{,}3785} \approx \boxed{0{,}79}$$

التمرين 41.

1. حساب احتمال الحصول على كرة خضراء

$$P(A) = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

2. حساب احتمال الحصول على كرة خضراء مرتين فقط

$$P(B) = C_4^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \boxed{\frac{8}{27}}$$

3. نسحب عشوائيا على التوالي وبالإرجاع n كرة من هذا الكيس

أ. بيان أنّ احتمال الحصول على كرة خضراء على الأقل هو $P = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_n^0 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^n = \boxed{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

ب. تعيين أصغر قيمة للعدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $P \geq 0{,}999$

$$P \geq 0{,}999 \Rightarrow 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \geq 1 - 10^{-3} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq \log 10^{-3} \Rightarrow n \log\frac{1}{3} \leq -3 \Rightarrow n \geq -\frac{3}{\log\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{3}{\log 3} \Rightarrow \boxed{n = 7}$$

التمرين 42.

حساب احتمال سحب 3 قريصات:

A. أرقامها زوجية

$$P(A) = \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

B. أرقامها فردية

$$P(B) = \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

C. رقم احداها على الأقل عدد غير أولي

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = 1 - \frac{1}{30} = \boxed{\frac{29}{30}}$$

(الأعداد الأولية هي 7,5,3,2 وغير الأولية هي 10,9,8,6,4,1)

D. مجموع أرقامها عدد فردي

$$P(D) = P(\text{3 أرقام فردية}) + P(\text{رقمان زوجيان ورقم فردي})$$

$$= \frac{C_5^3 + C_5^2 \times C_5^1}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

E. جداء أرقامها عدد زوجي

$$P(E) = P(\text{رقم إحداها على الأقل زوجي}) = 1 - P(\text{3 أرقام فردية})$$

$$= 1 - \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = 1 - \frac{1}{12} = \boxed{\frac{11}{12}}$$

F. أرقامها تشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية

$$r = \pm 1 : \Omega_1 = \{\{1;2;3\};\{2;3;4\};\{3;4;5\};\{4;5;6\};\{5;6;7\};\{6;7;8\};\{7;8;9\};\{8;9;10\}\}$$

$$r = \pm 2 : \Omega_2 = \{\{1;3;5\};\{3;5;7\};\{5;7;9\};\{2;4;6\};\{4;6;8\};\{6;8;10\}\}$$

$$r = \pm 3 : \Omega_3 = \{\{1;4;7\};\{2;5;8\};\{3;6;9\};\{4;7;10\}\}$$

$$r = \pm 4 : \Omega_4 = \{\{1;5;9\};\{2;6;10\}\}$$

$$P(F) = 20 \times \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

G. أرقامها تشكل حدودا متتابعة لمتتالية هندسية

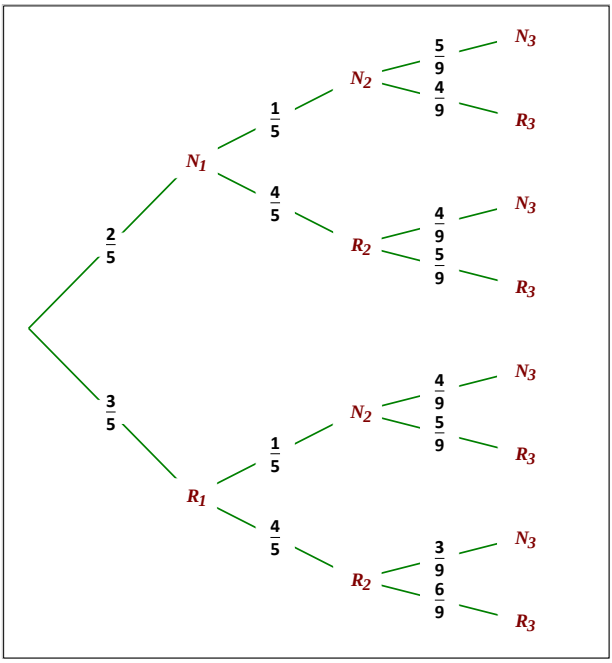
$$q = 2 \text{ أو } q = \frac{1}{2} : \Omega = \{\{1;2;4\};\{2;4;8\}\}$$

$$q = 3 \text{ أو } q = \frac{1}{3} : \Omega' = \{1;3;9\}$$

$$P(G) = 3 \times \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{1}{40}}$$

التمرين 43.

1. **شجرة الاحتمالات**



2. حساب احتمال الحادثتين $N_1 \cap N_2 \cap N_3$ و $N_1 \cap V_2 \cap N_3$

$$P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{5}{9} = \boxed{\frac{2}{45}}$$

$$P(N_1 \cap R_2 \cap N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{9} = \boxed{\frac{32}{225}}$$

استنتاج احتمال الحادثة $N_1 \cap N_3$

$$P(N_1 \cap N_3) = P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) + P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \frac{2}{45} + \frac{32}{225}$$

$$= \boxed{\frac{14}{75}}$$

3. حساب احتمال الحادثة $R_1 \cap N_3$

$$P(R_1 \cap N_2 \cap N_3) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{9} = \boxed{\frac{4}{75}}$$

$$P(R_1 \cap R_2 \cap N_3) = \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{9} = \boxed{\frac{4}{25}}$$

$$P(R_1 \cap N_3) = P(R_1 \cap N_2 \cap N_3) + P(R_1 \cap N_2 \cap N_3) = \frac{4}{75} + \frac{4}{25}$$

$$= \boxed{\frac{16}{75}}$$

استنتاج احتمال الحادثة N_3

$$P(N_3) = P(N_1 \cap N_3) + P(R_1 \cap N_3) = \frac{14}{75} + \frac{16}{75} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

4. **الحادثتان N_1 و N_3 غير مستقلتين**

$$P(N_1 \cap N_3) = \frac{14}{75} \; ; \; P(N_1) \times P(N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \boxed{\frac{4}{25}}$$

$P(N_1 \cap N_3) \neq P(N_1) \times P(N_3) \Rightarrow$ الحادثتان N_1 و N_3 غير مستقلتين

5. **حساب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_1 حمراء علما أنّ الكرة المسحوبة من U_3 سوداء**

$$P_{N_3}(R_1) = \frac{P(R_1 \cap N_3)}{P(N_3)} = \frac{\frac{16}{75}}{\frac{2}{5}} = \boxed{\frac{8}{15}}$$

التمرين 44.

1. **(u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_1 وأساسها r**

أ. **حساب u_1 و r**

$$\begin{cases} 5u_1 + 25u_2 = 3 \\ 5u_3 + u_6 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5u_1 + 25(u_1 + r) = 3 \\ 5(u_1 + 2r) + (u_1 + 5r) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 30u_1 + 25r = 3 \\ 6u_1 + 15r = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{1}{15} ; r = \frac{1}{25}}$$

ب. **كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n**

$$u_n = u_1 + (n-1)r = \frac{1}{15} + \frac{1}{25}(n-1) = \boxed{\frac{3n+2}{75}}$$

ج. **تعيين قيمة العدد الطبيعي p حيث: $u_1 + u_2 + \cdots + u_p = 1$**

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_p = 1 \Rightarrow \frac{p}{2}(u_1 + u_p) = 1 \Rightarrow \frac{p}{2}\left(\frac{1}{15} + \frac{3p+2}{75}\right) = 1$$

$$\Rightarrow p(3p+7) = 150 \Rightarrow 3p^2 + 7p - 150 = 0 \Rightarrow \boxed{p = 6}$$

2.

الوجه	1	2	3	4	5	6
الاحتمال	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{75}$	$\frac{11}{75}$	$\frac{14}{75}$	$\frac{17}{75}$	$\frac{4}{15}$

أ. تعيين احتمال ظهور الأوجه 1 ، 2 ، 4 و5

$$u_1 = \boxed{\frac{1}{15}}; u_2 = \frac{3(2)+2}{75} = \boxed{\frac{8}{75}}; u_4 = \frac{3(4)+2}{75} = \boxed{\frac{14}{75}};$$

$$u_5 = \frac{3(5)+2}{75} = \boxed{\frac{17}{75}}$$

ب. احسب احتمال ظهور الوجه 1 علما أنّ الرقم الظاهر فردي

نسمي الحادثة C "الرقم الظاهر 1" والحادثة I "الرقم الظاهر فردي"

$$P_I(C) = \frac{P(C \cap I)}{P(I)} = \frac{u_1}{u_1 + u_3 + u_5} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{11}{25}} = \boxed{\frac{5}{33}}$$

ج. الحادثتان A و B غير مستقلتين

$$P(A) = u_2 + u_4 + u_6 = \boxed{\frac{14}{25}} \; ; \; P(B) = u_3 + u_6 = \boxed{\frac{31}{75}}$$

$$P(A \cap B) = u_6 = \boxed{\frac{4}{15}}$$

$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B) \Rightarrow$ الحادثتان A و B غير مستقلتين

التمرين 45.

I- $\begin{cases} u_1 = 0,1 \\ u_{n+1} = 0,24 - 0,2\, u_n \end{cases}$

1. حساب الحدود u_2 ، u_3 و u_4

$$u_2 = 0,24 - 0,2\, u_1 = 0,24 - 0,2(0,1) = \boxed{0,22}$$

$$u_3 = 0,24 - 0,2\, u_2 = 0,24 - 0,2(0,22) = \boxed{0,196}$$

$$u_4 = 0,24 - 0,2\, u_3 = 0,24 - 0,2(0,196) = \boxed{0,2008}$$

2. $v_n = u_n - 0,2$

أ. اثبات أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 0,2 = 0,24 - 0,2u_n - 0,2 = -0,2(u_n - 0,2)$$

$v_{n+1} = -0{,}2\ v_n$

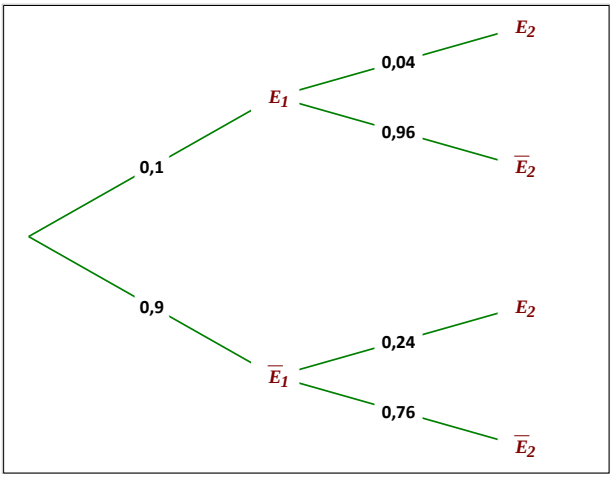
منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $-0{,}2$ وحدّها الأول $v_1 = -0{,}1$

ب. كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n واستنتاج عبارة u_n بدلالة n

$v_n = v_1 \times q^{n-1} = \boxed{-0{,}1(-0{,}2)^{n-1}}$

$u_n = v_n + 0{,}2 = \boxed{-0{,}1(-0{,}2)^{n-1} + 0{,}2}$

II- يمكننا الاستعانة بشجرة الاحتمالات



1. حساب الاحتمالات التالية:

$P_1 = P(E_1) = \boxed{0{,}1}$

$P_{E_1}(E_2) = \boxed{0{,}04}$

$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \times P_{E_1}(E_2) = 0{,}1 \times 0{,}04 = \boxed{0{,}004}$

$P(\overline{E_1} \cap E_2) = P(\overline{E_1}) \times P_{\overline{E_1}}(E_2) = 0{,}9 \times 0{,}24 = \boxed{0{,}216}$

$P_2 = P(E_2) = P(E_1 \cap E_2) + P(\overline{E_1} \cap E_2) = \boxed{0{,}22}$

2. أ. تعيين قيمتي $P_{E_n}(E_{n+1})$ و $P_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$

$P_{E_n}(E_{n+1}) = \boxed{0{,}04}$; $P_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) = \boxed{0{,}24}$

ب. برهان أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $P_{n+1} = 0{,}24 - 0{,}2\ P_n$

$P_{n+1} = P(E_{n+1}) = P(E_n \cap E_{n+1}) + P(\overline{E_n} \cap E_{n+1})$

$= P(E_n) \times P_{E_n}(E_{n+1}) + P(\overline{E_n}) \times P_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$

$= 0{,}04P_n + 0{,}24(1 - P_n) = \boxed{0{,}24 - 0{,}2P_n}$

جـ. كتابة عبارة P_n بدلالة n

$\boxed{P_n = -0{,}1(-0{,}2)^{n-1} + 0{,}2}$; $[(P_n) = (u_n)]$

د. اثبات أنّ المتتالية (P_n) متقاربة وحساب نهايتها

بما أنّ $-1 < q < 1$ نستنتج أنّ المتتالية (P_n) متقاربة

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty} [-0{,}1(-0{,}2)^{n-1} + 0{,}2] = \boxed{0{,}2}$$

التمرين 46.

$$P(T) = \frac{78}{150}; P(N) = \frac{27}{150}; P(F) = \frac{45}{150}; P(E) = \frac{90}{150}; P(L) = \frac{60}{150}$$

1. **احتمال الحادثة "يمارس المتربص التنس أو المطالعة" هو:** جـ) $\frac{105}{150}$

$$P(T \cup L) = P(T) + P(L) - P(T \cap L) = \frac{78 + 60 - 33}{150} = \boxed{\frac{105}{150}}$$

2. **احتمال الحادثة "يمارس المتربص كرة القدم والمطالعة" هو:** جـ) $\frac{18}{150}$

$$P(F \cap L) = \boxed{\frac{18}{150}}$$

3. **يمثل العدد $\frac{45}{78}$ احتمال الحادثة "يمارس المتربص ...":**

جـ) الشطرنج علما أنّه يمارس التنس

$$P_T(E) = \frac{P(E \cap T)}{P(T)} = \boxed{\frac{45}{78}}$$

4. **احتمال الحادثة "يمارس المتربص السباحة علما أنّه يمارس المطالعة" هو:**

جـ) $\frac{9}{60}$

$$P_L(N) = \frac{P(N \cap L)}{P(L)} = \boxed{\frac{9}{60}}$$

5. **الحادثتان "يمارس المتربص كرة القدم" و "يمارس المتربص الشطرنج":**

ب) مستقلتان

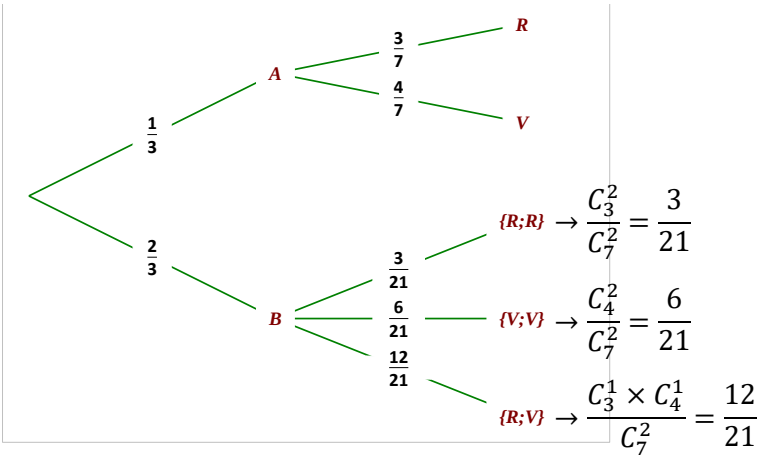
$$\underbrace{P(E \cap F)}_{\frac{27}{150}=\frac{9}{50}} = \underbrace{P(E) \times P(F)}_{\frac{90}{150}\times\frac{45}{150}=\frac{9}{50}} \Rightarrow \boxed{\text{الحادثتان } E \text{ و} F \text{ مستقلتان}}$$

التمرين 47.

1. **حساب احتمال الحادثتين A و B**

$$P(A) = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}\ ;\ P(B) = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

2. يمكننا الاستعانة بشجرة الاحتمالات



$$\frac{1}{3}\quad \frac{2}{3}\quad \frac{3}{7}\quad \frac{4}{7}\quad \frac{3}{21}\quad \frac{6}{21}\quad \frac{12}{21}$$

$$\{R;R\} \rightarrow \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{3}{21}$$

$$\{V;V\} \rightarrow \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{6}{21}$$

$$\{R;V\} \rightarrow \frac{C_3^1 \times C_4^1}{C_7^2} = \frac{12}{21}$$

أ. بيان أنّ: $P(E_1) = \frac{11}{21}$ و $P(E_2) = \frac{2}{21}$

$$P(E_1) = P(A \cap R) + P(B \cap \{R;V\}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{7} + \frac{2}{3} \times \frac{12}{21} = \boxed{\frac{11}{21}}$$

$$P(E_2) = P(B \cap \{R;R\}) = \frac{2}{3} \times \frac{12}{21} = \boxed{\frac{11}{21}}$$

ب. حساب احتمال الحادثة A علما أنّ الحادثة E_1 محققة

$$P_{E_1}(A) = \frac{P(A \cap E_1)}{P(E_1)} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{11}{21}} = \boxed{\frac{3}{11}}$$

التمرين 48.

1. إذا كانت A و B حادثتين مستقلتين بحيث $P(A) = 0,6$ و $P(B) = 0,3$

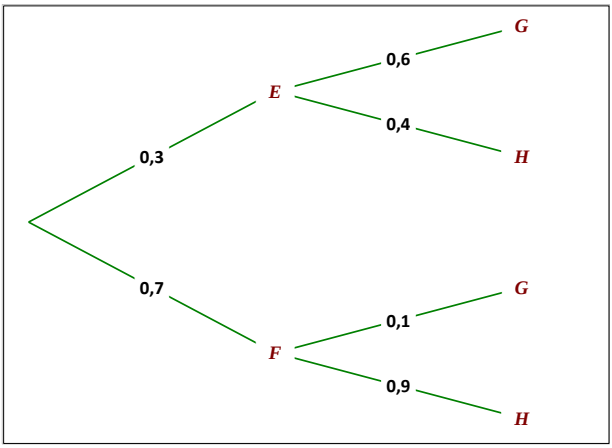
فإنّ: ب) $P(A \cap B) = 0,18$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,3 \times 0,6 = \boxed{0,18}$$

2. الاحتمال الشرطي $P_H(F)$ يساوي: جـ) $0,84$

$$P_H(F) = \frac{P(F \cap H)}{P(H)} = \frac{P(F \cap H)}{P(E \cap H) + P(F \cap H)}$$

$$= \frac{0,7 \times 0,9}{0,3 \times 0,4 + 0,7 \times 0,9} = \boxed{0,84}$$



3. الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X يساوي: ب) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

$$E(X) = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{4} = 2$$

$$V(X) = \frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{16}{4} - 4 = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{\sigma(X) = \sqrt{\frac{3}{2}}}$$

4. $P(A) = 0,4$ ، $P(B) = 0,5$ و $P(\overline{A \cup B}) = 0,35$

احتمال الحادثة $P(A \cap B)$ هو: ب) $0,25$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,4 + 0,5 - (1 - 0,35)$$
$$= \boxed{0,25}$$

5. $P(A) = 0,3$ ، $P_A(B) = 0,4$ و $P(A \cup B) = 0,68$

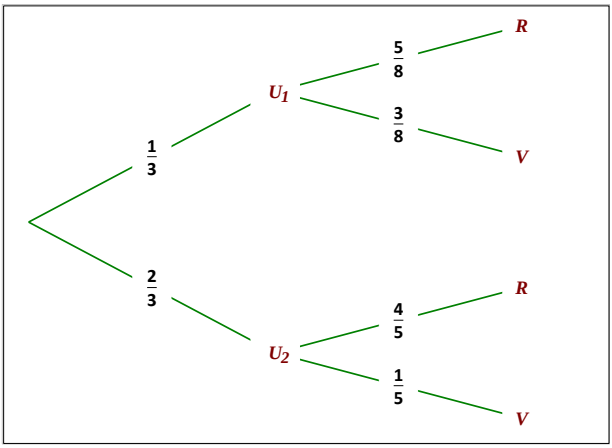
احتمال الحادثة $P(B)$ هو: جـ) $0,5$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - P(A) \times P_A(B)$$
$$\Rightarrow P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A) \times P_A(B)$$
$$= 0,68 - 0,3 + 0,3 \times 0,4 = 0,38 + 0,12 = \boxed{0,5}$$

التمرين 49.

I- $P(u_2) = 2P(u_1)$

1. شجرة الاحتمالات



2. حساب احتمال سحب كرة حمراء

$$P(R) = P(U_1 \cap R) + P(U_2 \cap R) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{8} + \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \boxed{\frac{89}{120}}$$

3. حساب احتمال سحب كرة خضراء علما أنّها سُحبت من الصندوق U_1

$$P_{U_1}(V) = \frac{P(U_1 \cap V)}{P(U_1)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{8}}{\frac{1}{3}} = \boxed{\frac{3}{8}}$$

II- ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع نقاط الصندوق المختار والكرة المسحوبة

1. تعيين قانون احتمال المتغيّر العشوائي X

سحب كرة حمراء من U_1 يُعطي 5 نقاط $(4 + 1)$

سحب كرة خضراء من U_1 يُعطي 7 نقاط $(4 + 3)$

سحب كرة حمراء من U_2 يُعطي 3 نقاط $(2 + 1)$

سحب كرة خضراء من U_2 يُعطي 5 نقاط $(2 + 3)$

منه نستنتج أنّ $X \in \{3; 5; 7\}$

$$P(X = 3) = P(U_2 \cap R) = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \boxed{\frac{8}{15}}$$

$$P(X = 5) = P(U_1 \cap R) + P(U_2 \cap V) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{8} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \boxed{\frac{41}{120}}$$

$$P(X = 7) = P(U_1 \cap V) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

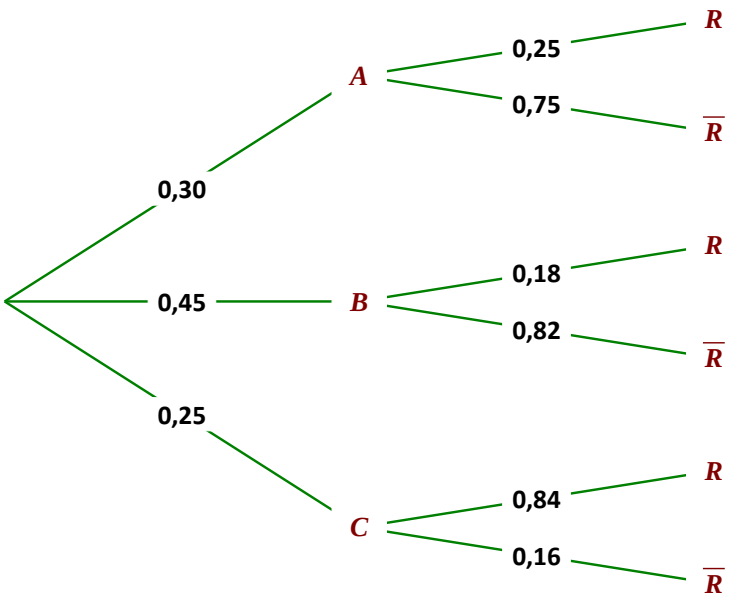
2. حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$

X_i	3	5	7
$P(X=X_i)$	$\frac{8}{15}$	$\frac{41}{120}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X)=3\left(\frac{8}{15}\right)+5\left(\frac{41}{120}\right)+7\left(\frac{1}{8}\right)=\boxed{\frac{211}{60}}$$

التمرين 50.

1. شجرة الاحتمالات



2. اثبات أنّ $P(C\cap R)=0,21$

$$P(C\cap R)=P(C)\times P_C(R)=0,25\times 0,84=\boxed{0,21}$$

3. حساب $P(R)$

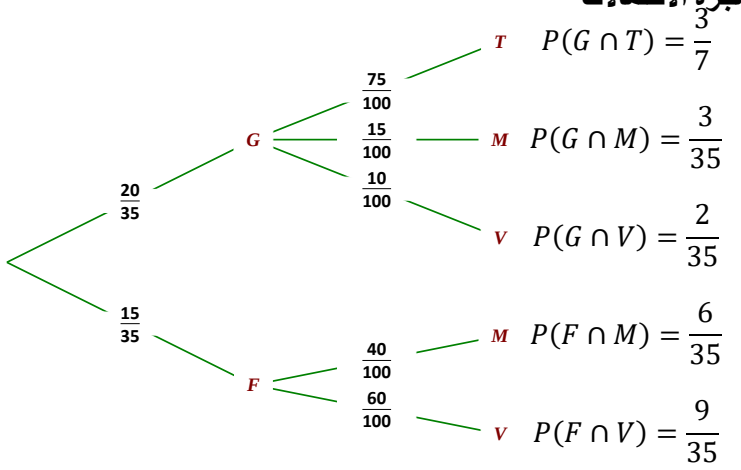
$$P(R)=P(A\cap R)+P(B\cap R)+P(C\cap R)$$
$$P(R)=0,30\times 0.25+0,45\times 0,18+0,25\times 0,84=\boxed{0,366}$$

4. حساب الاحتمال الشرطي $P_R(B)$

$$P_R(B)=\frac{P(B\cap R)}{P(R)}=\frac{0,45\times 0,18}{0,366}\approx\boxed{0,22}$$

التمرين 51.

1. **شجرة الاحتمالات**



2. **حساب $P(V)$ احتمال أن تتحقق الحادثة V**

$$P(V) = P(G \cap V) + P(F \cap V) = \frac{2}{35} + \frac{9}{35} = \boxed{\frac{11}{35}}$$

3. **حساب الاحتمال الشرطي $P_V(G)$**

$$P_V(G) = \frac{P(G \cap V)}{P(V)} = \frac{\frac{2}{35}}{\frac{11}{35}} = \boxed{\frac{2}{11}}$$

4. **حساب احتمال أن يكون التلميذ المختار لا يمارس كرة القدم**

$$P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 1 - P(G \cap T) = 1 - \frac{3}{7} = \boxed{\frac{4}{7}}$$

التمرين 52.

1. **شجرة الاحتمالات (انظر نهاية التمرين)**
2. **حساب احتمال سحب كرية بيضاء من الكيس U_3**

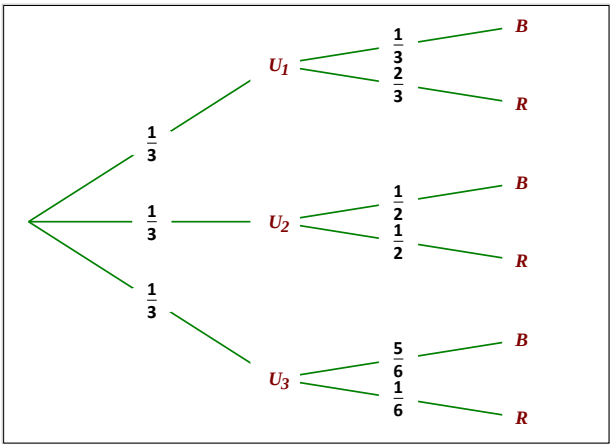
$$P(U_3 \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \boxed{\frac{5}{18}}$$

3. **حساب احتمال سحب كرية بيضاء**

$$P(B) = P(U_1 \cap B) + P(U_2 \cap B) + P(U_3 \cap B)$$
$$= \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{5}{6}\right) = \boxed{\frac{5}{9}}$$

4. حساب احتمال سحب كرية من الكيس U_3 علما أنّها بيضاء

$$P_B(U_3) = \frac{P(U_3 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{18}}{\frac{5}{9}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$



التمرين 53.

1. يسحب لاعب 3 كريات عشوائيا في آن واحد

أ. حساب احتمال الحوادث A ، B و C

$$P(A) = \frac{C_5^1 \times C_7^2}{C_{12}^3} = \boxed{\frac{21}{44}}; P(B) = \frac{C_5^2 \times C_7^1}{C_{12}^3} = \boxed{\frac{7}{22}}; P(C) = \frac{C_5^3}{C_{12}^3} = \boxed{\frac{1}{22}}$$

ب. تعيين قانون احتمال المتغيّر العشوائي X وحساب الأمل الرياضياتي

$X \in \{0; 10; 20; 30\}$

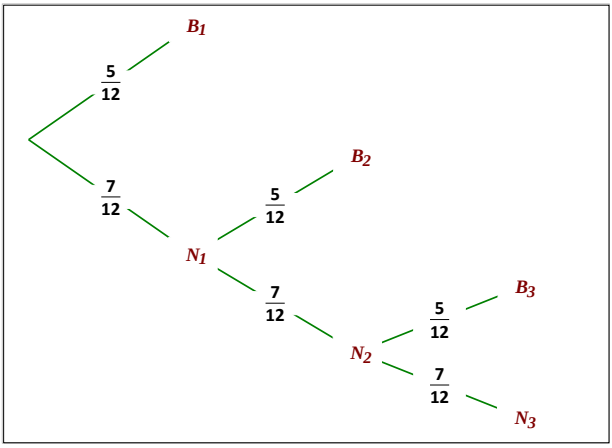
$$P(X = 0) = \frac{C_7^3}{C_{12}^3} = \boxed{\frac{7}{44}}; P(X = 10) = P(A) = \boxed{\frac{21}{44}}$$

$$P(X = 20) = P(B) = \boxed{\frac{7}{22}}; P(X = 30) = P(C) = \boxed{\frac{1}{22}}$$

X_i	0	10	20	30
$P(X = X_i)$	$\frac{7}{44}$	$\frac{21}{44}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$

$$E(X) = 10\left(\frac{21}{44}\right) + 20\left(\frac{7}{22}\right) + 30\left(\frac{1}{22}\right) = \boxed{\frac{25}{2}}$$

2. حساب احتمال الحوادث D ، E ، F و G



$$P(D) = P(B_1) = \boxed{\frac{5}{12}} \; ; \; P(E) = P(N_1 \cap B_2) = \frac{7}{12} \times \frac{5}{12} = \boxed{\frac{35}{144}}$$

$$P(F) = P(N_1 \cap N_2 \cap B_3) = \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} \times \frac{5}{12} = \boxed{\frac{245}{1728}}$$

$$P(G) = P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \left(\frac{7}{12}\right)^3 = \boxed{\frac{343}{1728}}$$

التمرين 54.

1. حساب احتمال الحادثتين A و B

b \ a	1	1	2	3	3	4
1	$(\mathbf{1};\mathbf{1})$	$(\mathbf{1};\mathbf{1})$	$(2;1)$	$(3;1)$	$(3;1)$	$(4;1)$
2	$(1;2)$	$(1;2)$	$(\mathbf{2};\mathbf{2})$	$(3;2)$	$(3;2)$	$(4;2)$
3	$(1;3)$	$(1;3)$	$(2;3)$	$(\mathbf{3};\mathbf{3})$	$(\mathbf{3};\mathbf{3})$	$(4;3)$
4	$(1;4)$	$(1;4)$	$(2;4)$	$(3;4)$	$(3;4)$	$(\mathbf{4};\mathbf{4})$
5	$(1;5)$	$(1;5)$	$(2;5)$	$(3;5)$	$(3;5)$	$(4;5)$
6	$(1;6)$	$(1;6)$	$(2;6)$	$(3;6)$	$(3;6)$	$(4;6)$

$$P(A) = \frac{6}{36} = \boxed{\frac{1}{6}} \; ; P(B) = \frac{12}{36} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

2. $a = 5n + 3$ ، $b = 3n + 1$

أ. اعطاء الثنائيات (a, b) المرفقة بالإضافة إلى $d = PGCD(a, b)$

n	a	b	d
1	8	4	4
2	13	7	1
3	18	10	2
4	23	13	1
5	28	16	4
6	33	19	1

ب. حساب احتمال الحادثتين C و D

$$P(C) = P(n=2) + P(n=4) = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$P(D) = P(n=2) + P(n=4) + P(n=6) = \frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

التمرين 55.

نسمي M الحادثة "التلميذ ضعيف في مادة الرياضيات" و F الحادثة "التلميذ ضعيف في مادة الفيزياء"

$P(M) = 0{,}25\ ;\ P(F) = 0{,}15\ ; P(M \cap F) = 0{,}1$

1. **حساب احتمال أن يكون مستوى هذا التلميذ ضعيفا في المادتين معا**

$P(M \cap F) = \boxed{0{,}1}$

2. **حساب احتمال أن يكون مستوى هذا التلميذ ضعيفا في مادة الرياضيات أو في مادة الفيزياء**

$P(M \cup F) = P(M) + P(F) - P(M \cap F) = 0{,}25 + 0{,}15 - 0{,}1 = \boxed{0{,}3}$

3. **حساب احتمال أن يكون مستوى هذا التلميذ ضعيفا في مادة الرياضيات علما أنّه ضعيف في مادة الفيزياء**

$$P_F(M) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{0{,}1}{0{,}15} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

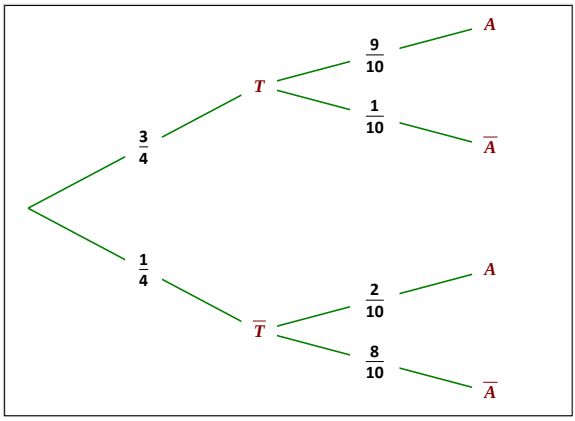
4. **حساب احتمال أن يكون مستوى هذا التلميذ ضعيفا في مادة الفيزياء علما أنّه ضعيف في مادة الرياضيات**

$$P_M(F) = \frac{P(M \cap F)}{P(M)} = \frac{0{,}1}{0{,}25} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

ملاحظة: رمزت إلى الحادثة "التلميذ ضعيف في مادة الفيزياء" بـ (F) ليس لأنّ الفيزياء تُكتب $Fisic$ أو $Fisique$ (كما يكتبها البعض) ولكن لتفادي تسميتها بـ (P) حتى لا يُقال إنّ الأستاذ والفرنسية حادثتان غير متلائمتين أو أنّهما لا ينتميان لنفس المستوي.

التمرين 56.

1. **شجرة الاحتمالات**



2. **حساب احتمال الحوادث: $T \cap A$ ، $T \cap \bar{A}$ و $\bar{T} \cap A$**

$$P(T \cap A) = P(T) \times P_T(A) = \frac{3}{4} \times \frac{9}{10} = \boxed{\frac{27}{40}}$$

$$P(T \cap \bar{A}) = P(T) \times P_T(\bar{A}) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{10} = \boxed{\frac{3}{40}}$$

$$P(\bar{T} \cap A) = P(\bar{T}) \times P_{\bar{T}}(A) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{10} = \boxed{\frac{1}{20}}$$

3. **حساب احتمال أن يكون المترشح ناجحا**

$$P(A) = P(T \cap A) + P(\bar{T} \cap A) = \frac{27}{40} + \frac{1}{20} = \boxed{\frac{29}{40}}$$

4. **حساب احتمال أن يكون المترشح عمل بجد علما أنّه ناجح**

$$P_A(T) = \frac{P(T \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{27}{40}}{\frac{29}{40}} = \boxed{\frac{27}{29}}$$

5. **بيان أنّ $P(S) = 0,125$**

$$P(S) = P(T \cap \bar{A}) + P(\bar{T} \cap A) = \frac{3}{40} + \frac{1}{20} = \frac{5}{40} = \boxed{0,125}$$

التمرين 57.

.1

أ. تعيين قانون احتمال المتغيّر العشوائي X

	1	1	3	5
1	2	2	4	6
1	2	2	4	6
3	4	4	6	8
5	6	6	8	10

$X \in \{2; 4; 6; 8; 10\}$

$P(X = 2) = \frac{4}{16} = \boxed{\frac{1}{4}}$; $P(X = 4) = \frac{4}{16} = \boxed{\frac{1}{4}}$; $P(X = 6) = \boxed{\frac{5}{16}}$

$P(X = 8) = \frac{2}{16} = \boxed{\frac{1}{8}}$; $P(X = 10) = \boxed{\frac{1}{16}}$

X_i	2	4	6	8	10
$P(X = X_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

ب. حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$

$E(X) = 2\left(\frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{4}\right) + 6\left(\frac{5}{16}\right) + 8\left(\frac{1}{8}\right) + 10\left(\frac{1}{16}\right) = \boxed{5}$

2. نرمز بـ A_n إلى الحادثة "ظهور الرقم 3 لأول مرة في الرمية n"

أ. حساب u_1 ، u_2 وu_3 وكتابة عبارة u_n بدلالة n

$u_1 = P(A_1) = \boxed{\frac{1}{4}}$

$u_2 = P(A_2) = P(\overline{A_1} \cap A_2) = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{16}}$

$u_3 = P(A_3) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3) = \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} = \boxed{\frac{9}{64}}$

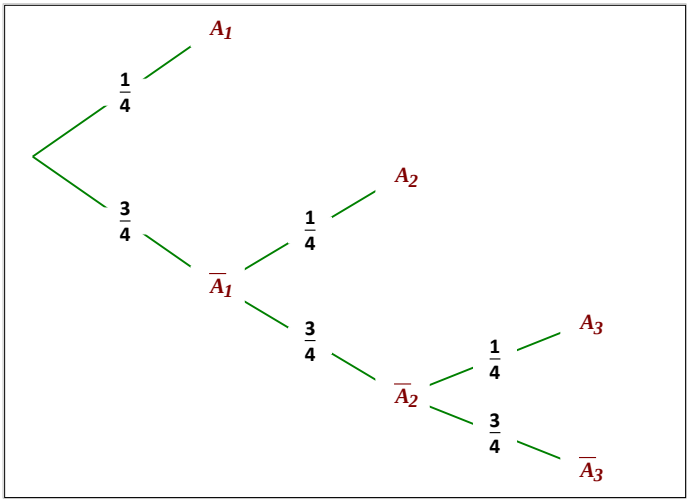
ب. حساب الاحتمال S_n بدلالة n

$S_n = P(\overline{A_{n+1}}) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{n+1}}) = \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{n+1} = \boxed{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}$

ج. حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = \boxed{0}$$

عندما يؤول n إلى $+\infty$ يمكن القول عن هذه الحادثة أنّها مستحيلة



التمرين 58.

I-

أ. حساب احتمال الحوادث A ، B و C

$$P(A) = \frac{C_5^1 \times C_5^2}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{5}{12}} \; ; \; P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{11}{12}}$$

$$P(C) = 2\frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

ب. بيان أنّ: $P(D) = \frac{5}{6}$ ، $P(F) = \frac{31}{120}$ و $P(C \cap F) = \frac{7}{120}$

$$P(D) = P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{6} = \boxed{\frac{5}{6}}$$

$$P(F) = P\{0;0;0\} + P\{-1;0;1\} = \frac{C_3^3}{C_{10}^3} + \frac{C_2^1 \times C_3^1 \times C_5^1}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{31}{120}}$$

$$P(C \cap F) = P\{-1;0;1\} = \underbrace{\frac{C_1^1 \times C_1^1 \times C_3^1}{C_{10}^3}}_{\text{الكريات البيضاء}} + \underbrace{\frac{C_1^1 \times C_2^1 \times C_2^1}{C_{10}^3}}_{\text{الكريات السوداء}} = \boxed{\frac{7}{120}}$$

ج. حساب احتمال أن تكون الكريات المسحوبة من نفس اللون علما أنّ مجموع أرقامها معدوم

$$P_F(C) = \frac{P(C \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{7}{120}}{\frac{31}{120}} = \boxed{\frac{7}{31}}$$

II- X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع أرقام الكريات المسحوبة

1. تعيين قيم المتغيّر العشوائي X

$$\Omega = \left\{ \underbrace{\{-1;-1;0\}}_{X=-2}; \underbrace{\{-1;0;0\}; \{-1;-1;1\}}_{X=-1}; \underbrace{\{0;0;0\}; \{-1;0;1\}}_{X=0} \right.$$
$$\left. \underbrace{\{0;0;1\}; \{-1;1;1\}}_{X=1}; \underbrace{\{0;1;1\}}_{X=2}; \underbrace{\{1;1;1\}}_{X=3} \right\}$$

$$\boxed{X \in \{-2;-1;0;1;2;3\}}$$

2. تعريف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X وحساب أمله الرياضياتي $E(X)$

$$P(X=-2) = \frac{C_2^2 \times C_3^1}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{1}{40}}$$

$$P(X=-1) = \frac{(C_2^1 \times C_3^2) + (C_2^2 \times C_5^1)}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{11}{120}}$$

$$P(X=0) = P(F) = \boxed{\frac{31}{120}}$$

$$P(X=1) = \frac{(C_3^2 \times C_5^1) + (C_2^1 \times C_5^2)}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{7}{24}}$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^2 \times C_3^1}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$P(X=3) = \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

X_i	-2	-1	0	1	2	3
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{40}$	$\frac{11}{120}$	$\frac{31}{120}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

$$E(X) = -\frac{2}{40} - \frac{11}{120} + \frac{7}{24} + \frac{2}{4} + \frac{3}{12} = \boxed{\frac{9}{10}}$$

التمرين 59.

يحتوي صندوق على 12 كرية متجانسة ومرقمة من 1 إلى 12. نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من هذا الصندوق.

1. احسب احتمال الحوادث التالية:

***A*. "الحصول على 3 أرقام تقبل القسمة على 3"**

$$P(A) = \frac{C_4^3}{C_{12}^3} = \frac{4}{220} = \boxed{\frac{1}{55}}$$

***B*. "الحصول على رقم واحد يقبل القسمة على 3"**

$$P(B) = \frac{C_4^1 \times C_8^2}{C_{12}^3} = \frac{112}{220} = \boxed{\frac{28}{55}}$$

***C*. "الحصول على 3 أرقام تشكل متتالية حسابية أساسها $r = 3$"**

$$P(C) = P(\{1;4;7\} + \{2;5;8\} + \{3;6;9\} + \{4;7;10\} + \{5;8;11\} + \{6;9;12\}) = \frac{6C_3^3}{C_{12}^3} = \frac{6}{220} = \boxed{\frac{3}{110}}$$

***D*. "الحصول على 3 أرقام تشكل متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$"**

$$P(D) = P(\{4;2;1\} + \{8;4;2\} + \{12;6;3\}) = \frac{3C_3^3}{C_{12}^3} = \boxed{\frac{3}{220}}$$

2. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات التي تقبل أرقامها القسمة على 3

أ. تعيين قيم المتغيّر العشوائي X

$$X \in \{0;1;2;3\}$$

ب. تعريف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X وحساب أمله الرياضياتي $E(X)$

$$P(X=0) = \frac{C_8^3}{C_{12}^3} = \boxed{\frac{14}{55}} \; ; \; P(X=1) = \frac{C_4^1 \times C_8^2}{C_{12}^3} = \boxed{\frac{28}{55}}$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 \times C_8^1}{C_{12}^3} = \boxed{\frac{12}{55}} \; ; \; P(X=3) = \frac{C_4^3}{C_{12}^3} = \boxed{\frac{1}{55}}$$

X_i	0	1	2	3
$P(X = X_i)$	$\frac{14}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{1}{55}$

$$E(X) = \frac{28}{55} + \frac{24}{55} + \frac{3}{55} = \boxed{1}$$

التمرين 60.

I- شجرة الاحتمالات

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \boxed{0,4}$

$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P_A(\bar{B}) = 0,42 \Rightarrow P_A(\bar{B}) = \dfrac{0,42}{P(A)} = \dfrac{0,42}{0,6}$

$= \boxed{0,7}$; $P_A(B) = 1 - P_A(\bar{B}) = \boxed{0,3}$

$P(A \cap B \cap \bar{C}) = P(A) \times P_A(B) \times P_{A \cap B}(\bar{C}) = 0,108$

$\Rightarrow P_{A \cap B}(\bar{C}) = \dfrac{0,108}{P(A) \times P_A(B)} = \dfrac{0,108}{0,6 \times 0,3} = \boxed{0,6}$

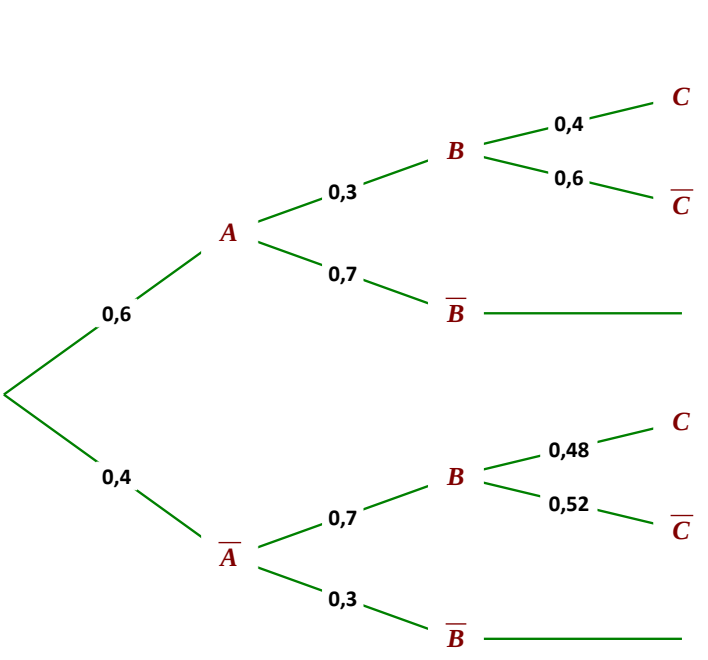
$P_{A \cap B}(C) = 1 - P_{A \cap B}(\bar{C}) = \boxed{0,4}$

$P(\bar{A} \cap B \cap C) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) \times P_{\bar{A} \cap B}(C) = 0,1344$

$\Rightarrow P_{\bar{A} \cap B}(C) = \dfrac{0,1344}{P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)} = \dfrac{0,1344}{0,4 \times 0,7} = \boxed{0,48}$

$P_{\bar{A} \cap B}(\bar{C}) = 1 - P_{\bar{A} \cap B}(C) = \boxed{0,52}$

$P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - P_{\bar{A}}(B) = \boxed{0,3}$



X	الاحتمال P
3	0,072
2	0,108
0	0,42
2	0,1344
3	0,1456
0	0,12

II- تعيين الإجابة الصحيحة الوحيدة من بين الاقتراحات التالية مع التعليل:

1. الاحتمال $P(A \cap B \cap C)$ هو: ج) $0,072$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P_A(B) \times P_{A \cap B}(C) = 0,6 \times 0,3 \times 0,4$$
$$= \boxed{0,072}$$

2. الاحتمال $P(C)$ هو: ب) $0,2064$

$$P(C) = P(A \cap B \cap C) + P(\bar{A} \cap B \cap C) = 0,072 + 0,1344$$
$$= \boxed{0,2064}$$

3. الاحتمال $P(\bar{B})$ هو: أ) $0,54$

$$P(\bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,42 + 0,12 = \boxed{0,54}$$

4. الاحتمال $P_{A \cap B}(\bar{C})$ هو: ب) $0,6$

$$P_{A \cap B}(\bar{C}) = \frac{0,108}{P(A) \times P_A(B)} = \frac{0,108}{0,6 \times 0,3} = \boxed{0,6}$$

5. الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X هو: أ) $1,1376$

$$E(X) = 2(0,108 + 0,1344) + 3(0,072 + 0,1456) = \boxed{1,1376}$$

التمرين 61.

1. حساب الاحتمالات $P_6, P_5, P_4, P_3, P_2, P_1$

$$\sum_{i=1}^{6} P_i = 1 \Rightarrow P_1\left(\frac{1-q^6}{1-q}\right) = 1 \Rightarrow 2P_1\left(1-\frac{1}{2^6}\right) = 1$$
$$\Rightarrow P_1 = \frac{1}{2\left(1-\frac{1}{2^6}\right)} = \frac{32}{63}$$

$$\boxed{P_1 = \frac{32}{63}\ ; P_2 = \frac{16}{63}; P_3 = \frac{8}{63}\ ; P_4 = \frac{4}{63}; P_5 = \frac{2}{63}\ ; P_6 = \frac{1}{63}}$$

2. نرمي زهرة النرد هذه مرة واحدة

A. احتمال ظهور رقم زوجي

$$P(A) = P_2 + P_4 + P_6 = \frac{16}{63} + \frac{4}{63} + \frac{1}{63} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

B. احتمال ظهور رقم مضاعف لـ 3

$$P(B) = P_3 + P_6 = \frac{8}{63} + \frac{1}{63} = \boxed{\frac{1}{7}}$$

3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية العدد المحصل عليه
تعريف قانون الاحتمال وحساب أمله الرياضياتي والتباين

X_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=X_i)$	$\frac{32}{63}$	$\frac{16}{63}$	$\frac{8}{63}$	$\frac{4}{63}$	$\frac{2}{63}$	$\frac{1}{63}$

$$E(X)=1\left(\frac{32}{63}\right)+2\left(\frac{16}{63}\right)+3\left(\frac{8}{63}\right)+4\left(\frac{4}{63}\right)+5\left(\frac{2}{63}\right)+6\left(\frac{1}{63}\right)$$
$$=\boxed{\frac{40}{21}}$$

$$V(X)=\sum_{i=1}^{6}X_i^2.P_i-[E(X)]^2$$

$$V(X)=1\left(\frac{32}{63}\right)+4\left(\frac{16}{63}\right)+9\left(\frac{8}{63}\right)+16\left(\frac{4}{63}\right)+25\left(\frac{2}{63}\right)$$
$$+36\left(\frac{1}{63}\right)-\left(\frac{40}{21}\right)^2=\boxed{\frac{626}{441}}$$

التمرين 62.

1. حساب الاحتمالات $P_6, P_5, P_4, P_3, P_2, P_1$

$$P_3=P_1+\frac{1}{8};P_5=P_1+\frac{1}{4}\ ;\ P_2=\frac{3}{2}P_1\ ;P_4=\frac{1}{2}P_2=\frac{3}{4}P_1\ ;$$
$$P_6=\frac{1}{4}P_2=\frac{3}{8}P_1$$

$$\sum_{i=1}^{6}P_i=1\Rightarrow P_1+\frac{3}{2}P_1+P_1+\frac{1}{8}+\frac{3}{4}P_1+P_1+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}P_1=1$$
$$\Rightarrow\frac{45}{8}P_1=\frac{5}{8}\Rightarrow P_1=\frac{1}{9}$$

$$\boxed{P_1=\frac{1}{9}\ ;P_2=\frac{1}{6};P_3=\frac{17}{72}\ ;P_4=\frac{1}{12};P_5=\frac{13}{36}\ ;P_6=\frac{1}{24}}$$

2. احسب احتمال الحادثتين:

A. "ظهور رقم زوجي"

$$P(A)=P_2+P_4+P_6=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\boxed{\frac{7}{24}}$$

B. "عدم ظهور الرقم 6"

$$P(B)=\overline{P_6}=1-P_6=1-\frac{1}{24}=\boxed{\frac{23}{24}}$$

3. تعريف قانون الاحتمال وحساب أمله الرياضياتي

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$$P(X=0)=P(\{1;1\}+\{2;2\}+\{3;3\}+\{4;4\}+\{5;5\}+\{6;6\})$$
$$=P_1^2+P_2^2+P_3^2+P_4^2+P_5^2+P_6^2$$
$$=\left(\frac{1}{9}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{17}{72}\right)^2+\left(\frac{1}{12}\right)^2+\left(\frac{13}{36}\right)^2+\left(\frac{1}{24}\right)^2=\boxed{\frac{203}{864}}$$
$$P(X=1)=P(\{1;2\}+\{2;1\}+\{2;3\}+\{3;2\}+\{3;4\}+\{4;3\}$$
$$+\{4;5\}+\{5;4\}+\{5;6\}+\{6;5\})$$
$$=2(P_1P_2+P_2P_3+P_3P_4+P_4P_5+P_5P_6)$$
$$=2\left[\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{17}{72}\right)+\left(\frac{17}{72}\right)\left(\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{13}{36}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{13}{36}\right)\left(\frac{1}{24}\right)\right]=\boxed{\frac{53}{216}}$$
$$P(X=2)=P(\{1;3\}+\{3;1\}+\{2;4\}+\{4;2\}+\{3;5\}+\{5;3\}$$
$$+\{4;6\}+\{6;4\})$$
$$=2(P_1P_3+P_2P_4+P_3P_5+P_4P_6)$$
$$=2\left[\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{17}{72}\right)+\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{17}{72}\right)\left(\frac{13}{36}\right)+\left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{1}{24}\right)\right]=\boxed{\frac{167}{648}}$$
$$P(X=3)=P(\{1;4\}+\{4;1\}+\{2;5\}+\{5;2\}+\{3;6\}+\{6;3\})$$
$$=2(P_1P_4+P_2P_5+P_3P_6)$$
$$=2\left[\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{13}{36}\right)+\left(\frac{17}{72}\right)\left(\frac{1}{24}\right)\right]=\boxed{\frac{137}{864}}$$
$$P(X=4)=P(\{1;5\}+\{5;1\}+\{2;6\}+\{6;2\})$$
$$=2(P_1P_5+P_2P_6)=2\left[\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{13}{36}\right)+\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{24}\right)\right]=\boxed{\frac{61}{648}}$$

$$P(X=5)=P(\{1;6\}+\{6;1\})=2(P_1P_6)=2\left[\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{24}\right)\right]=\boxed{\frac{1}{108}}$$

X_i	0	1	2	3	4	5
$P(X=X_i)$	$\frac{203}{864}$	$\frac{53}{216}$	$\frac{167}{648}$	$\frac{137}{864}$	$\frac{61}{648}$	$\frac{1}{108}$

$$E(X)=1\left(\frac{53}{216}\right)+2\left(\frac{167}{648}\right)+3\left(\frac{137}{864}\right)+4\left(\frac{61}{648}\right)+5\left(\frac{1}{108}\right)$$
$$=\boxed{\frac{4301}{2592}}$$

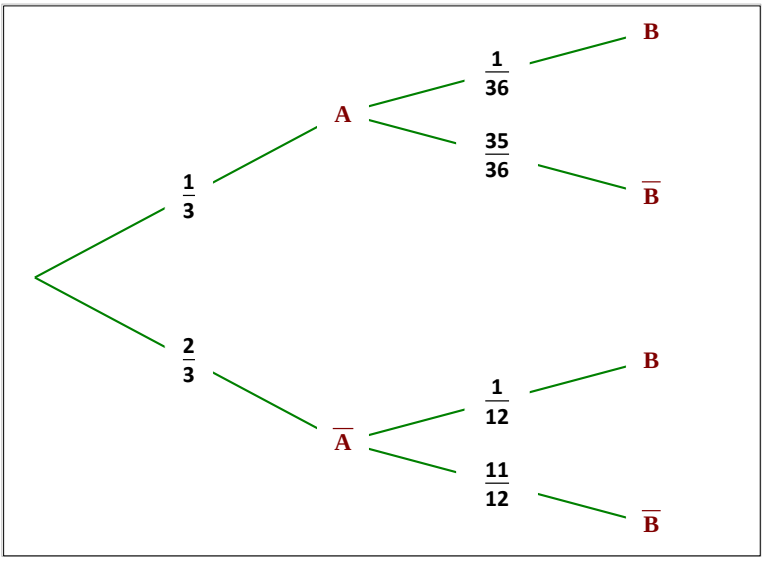
التمرين 63.

1. **تعيين الحادثة العكسية للحادثة A وحساب $P(\bar{A})$**

$\bar{A}$ "زهرة واحدة على الأقل خاصة"

$$P(\bar{A})=\frac{C_1^1\times C_2^1}{C_3^2}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

2. **حساب $P_A(B)$ و $P(B\cap A)$ واستنتاج $P(B)$**



$$P_A(B) = \boxed{\frac{1}{36}} \; ; \; P(B \cap A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{36} = \boxed{\frac{1}{108}}$$

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = \frac{1}{108} + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{12}\right) = \boxed{\frac{7}{108}}$$

3. بيان أنّ $P_B(A) = \frac{1}{7}$

$$P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{108}}{\frac{7}{108}} = \boxed{\frac{1}{7}}$$

التمرين 64.

$$v_n = u_n - \frac{2}{5} \text{ ، } u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3} \text{ ، } u_1 = \frac{1}{2}$$

1. بيان أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{5} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{1}{6}u_n - \frac{1}{15} = \frac{1}{6}\left(u_n - \frac{2}{5}\right)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{6}v_n \Rightarrow q = \frac{1}{6} \; ; v_1 = \frac{1}{10}$$

كتابة عبارة u_n بدلالة n

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \Rightarrow u_n = v_n + \frac{2}{5} = \boxed{\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}}$$

2. A_n الحادثة "نستعمل الحجر A في الرمية n"

R_n الحادثة "نحصل على وجه أحمر في الرمية n"

أ. حساب a_1 و r_1

$$a_1 = P(A_1) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$r_1 = P(R_1) = P(A_1 \cap R_1) + P(\overline{A_1} \cap R_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$$

$$= \boxed{\frac{7}{12}}$$

ب. بيان أنّ $r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}$

$$r_n = P(R_n) = P(A_n \cap R_n) + P(\overline{A_n} \cap R_n)$$
$$= P(A_n) \times P_{A_n}(R_n) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(R_n)$$

$$= \frac{1}{2}a_n + \frac{2}{3}(1 - a_n) = \boxed{-\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}}$$

ج. بيان أنّ: $\boldsymbol{A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})}$

نستعمل الحجر A في الرمية "$n+1$" في الحالتين التاليتين:

1) استعملنا الحجر A في الرمية n وحصلنا على وجه أحمر أي: $A_n \cap R_n$

2) استعملنا الحجر B في الرمية n وحصلنا على وجه أخضر أي: $\overline{A_n} \cap \overline{R_n}$

ومنه نستنتج أنّه من أجل كل $n \geq 1$:

$$A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$$

استنتاج أنّ: $\boldsymbol{a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}}$

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap R_n) + P(\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$$
$$= P(A_n) \times P_{A_n}(R_n) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(\overline{R_n})$$
$$= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}(1 - a_n) = \boxed{\frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}}$$

د. استنتاج عبارة $\boldsymbol{r_n}$ بدلالة $\boldsymbol{n}$ وحساب $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} r_n}$

بما أنّ المتتالين (a_n) و (u_n) يحققان نفس العلاقة التراجعية ولهما نفس الحد الأول، فإنهما متساويتان ومنه فإنّه من أجل كل $n \geq 1$:

$a_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$ ، وبالتالي نستنتج أنّ:

$$r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}\left[\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}\right] + \frac{2}{3} = \boxed{-\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n} + \frac{3}{5}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n} + \frac{3}{5} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

التمرين 65.

A. "الحصول على 3 قريصات من نفس اللون"

$$P(A) = \frac{A_6^3 + A_4^3}{A_{10}^3} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

B. "الحصول على 3 قريصات بلونين مختلفين"

$$P(B) = \frac{3(A_6^1 \times A_4^2 + A_4^1 \times A_6^2)}{A_{10}^3} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

C. "الحصول على 3 قريصات مجموع أرقامها 15"

$$15 = \underbrace{\{1+6+8\}}_{\frac{6(A_2^1\times A_1^1\times A_1^1)}{A_{10}^3}} = \underbrace{\{2+5+8\}}_{\frac{6(A_2^1\times A_2^1\times A_1^1)}{A_{10}^3}} = \underbrace{\{3+4+8\}}_{\frac{6(A_1^1\times A_1^1\times A_1^1)}{A_{10}^3}} = \underbrace{\{4+5+6\}}_{\frac{6(A_1^1\times A_2^1\times A_1^1)}{A_{10}^3}}$$

$$\boldsymbol{P(C) = \frac{6[(A_2^1\times A_1^1\times A_1^1)+(A_2^1\times A_2^1\times A_1^1)+(A_1^1\times A_1^1\times A_1^1)+(A_1^1\times A_2^1\times A_1^1)]}{A_{10}^3}}$$

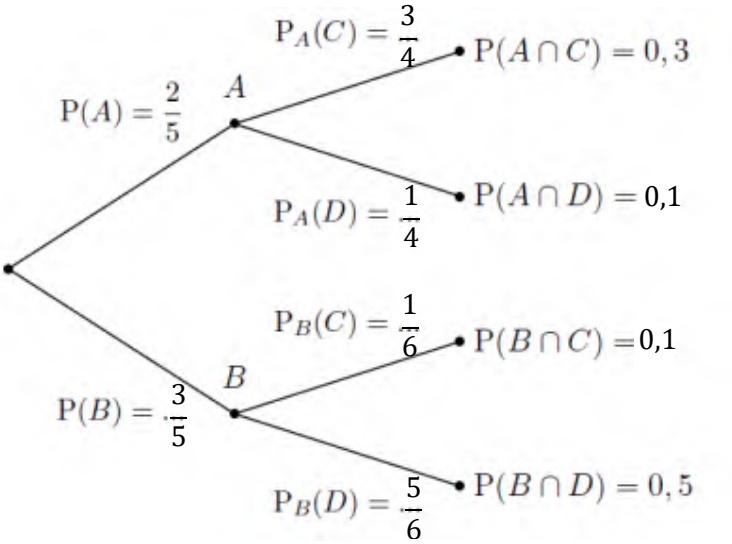
$$= \boxed{\frac{3}{40}}$$

D. "الحصول على 3 قريصات مجموع أرقامها 15 علما أنّها من نفس اللون"

$$P(D) = P_A(C) = \frac{P(A\cap C)}{P(A)} = \frac{P(\{1+6+8\})}{P(A)} = \frac{1:60}{1:5} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

التمرين 66.

1. شجرة الاحتمالات



$$P(A\cap C) = P(A)\times P_A(C) \Rightarrow P_A(C) = \frac{P(A\cap C)}{P(A)} = \frac{0,3}{\frac{2}{5}} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

$$P_A(D) = 1 - P_A(C) = 1 - \frac{3}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$P(A\cap D) = P(A)\times P_A(D) = \frac{2}{5}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{10} = \boxed{0,1}$$

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{5} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

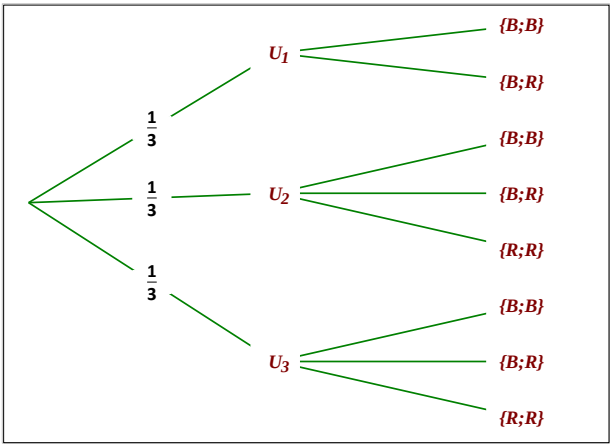
$$P(B \cap D) = P(B) \times P_B(D) \Rightarrow P_B(D) = \frac{P(B \cap D)}{P(B)} = \frac{0{,}5}{\frac{3}{5}} = \boxed{\frac{5}{6}}$$

$$P_B(C) = 1 - P_B(D) = 1 - \frac{5}{6} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

$$P(B \cap C) = P(B) \times P_B(C) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{10} = \boxed{0{,}1}$$

التمرين 67.

-I



1. تعيين قيم المتغيّر العشوائي X

$X \in \{0; 1; 2\}$

2. تعريف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X

$$P(X = 0) = P(\{B, B\}) = \frac{1}{3}\left(\frac{C_{n-1}^2}{C_n^2} + \frac{C_{n-2}^2}{C_n^2} + \frac{C_{n-3}^2}{C_n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\frac{(n-1)!}{2!\,(n-3)!}}{\frac{n!}{2!\,(n-2)!}} + \frac{\frac{(n-2)!}{2!\,(n-4)!}}{\frac{n!}{2!\,(n-2)!}} + \frac{\frac{(n-3)!}{2!\,(n-5)!}}{\frac{n!}{2!\,(n-2)!}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)} + \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)} + \frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}\right)$$

$$= \boxed{\frac{3n^2 - 15n + 20}{3n(n-1)}}$$

$$P(X=1)=P(\{B,R\})=\frac{1}{3}\left(\frac{C_{n-1}^1\times C_1^1}{C_n^2}+\frac{C_{n-2}^1\times C_2^1}{C_n^2}+\frac{C_{n-3}^1\times C_3^1}{C_n^2}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{2(n-1)}{n(n-1)}+\frac{4(n-2)}{n(n-1)}+\frac{6(n-3)}{n(n-1)}\right)=\boxed{\frac{12n-28}{3n(n-1)}}$$
$$P(X=2)=P(\{R,R\})=\frac{1}{3}\left(\frac{C_2^2}{C_n^2}+\frac{C_3^2}{C_n^2}\right)=\boxed{\frac{8}{3n(n-1)}}$$

X_i	0	1	2
$P(X=X_i)$	$\frac{3n^2-15n+20}{3n(n-1)}$	$\frac{12n-28}{3n(n-1)}$	$\frac{8}{3n(n-1)}$

3. حساب احتمال أن يكون السحب من الصندوق u_3 علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين

نسمي A الحادثة "الحصول على كرتين حمراوين" و B الحادثة "السحب من الصندوق u_3"

$$P_A(B)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{C_3^2}{C_n^2}}{\frac{8}{3n(n-1)}}=\frac{\frac{2}{3n(n-1)}}{\frac{8}{3n(n-1)}}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

-II

1. تعريف قانون احتمال المتغيّر العشوائي Y وحساب الأمل الرياضياتي $E(Y)$ و التباين $V(Y)$

يمكننا الحصول على كرة بيضاء في السحب الأول أو الثاني (الكرة الأولى حمراء) أو الثالث (الكرتان الأوليان حمراوان)

$$Y\in\{1;2;3\}\,;P(Y=1)=\frac{A_{n-2}^1}{A_n^1}=\boxed{\frac{n-2}{n}}\;;\;P(Y=2)$$
$$=\frac{A_2^1\times A_{n-2}^1}{A_n^2}=\boxed{\frac{2n-4}{n(n-1)}}$$
$$P(Y=3)=\frac{A_2^2\times A_{n-2}^1}{A_n^3}=\boxed{\frac{2n-4}{n(n-1)(n-2)}}$$

Y_i	1	2	3
$P(Y=Y_i)$	$\frac{n-2}{n}$	$\frac{2n-4}{n(n-1)}$	$\frac{2n-4}{n(n-1)(n-2)}$

$$E(Y)=\frac{n-2}{n}+\frac{4(n-2)}{n(n-1)}+\frac{6(n-2)}{n(n-1)(n-2)}$$
$$=\frac{(n-2)(n-1)+4(n-2)+6}{n(n-1)}=\boxed{\frac{n+1}{n-1}}$$
$$V(Y)=\frac{n-2}{n}+\frac{8(n-2)}{n(n-1)}+\frac{18(n-2)}{n(n-1)(n-2)}-\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2$$
$$=\frac{(n-2)(n-1)+8(n-2)+18}{n(n-1)}-\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2$$
$$V(Y)=\frac{n^2+5n+4}{n(n-1)}-\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2$$
$$=\frac{(n^2+5n+4)(n-1)-n(n+1)^2}{n(n-1)^2}=\boxed{\frac{2n^2-2n-4}{n(n-1)^2}}$$

2. تعيين قيمة n حيث: $E(Y)=\frac{13}{11}$

$$E(Y)=\frac{13}{11}\Rightarrow\frac{n+1}{n-1}=\frac{13}{11}\Rightarrow 13n-13=11n+11\Rightarrow 2n=24$$
$$\Rightarrow\boxed{n=12}$$

التمرين 68.

1. احتمال الحصول على كرة حمراء وكرتين سوداوين هو: $\frac{15}{28}$ (أ)

$$\frac{C_3^1\times C_5^2}{C_8^3}=\frac{30}{56}=\boxed{\frac{15}{28}}$$

2. احتمال أن يكون الشخص المختار مصاب بالعدوى علما أنّه ملقح هو: $\frac{3}{40}$ (جـ)

نسمي V الحادثة "الشخص المختار ملقح" و G الحادثة "الشخص المختار مصاب بالعدوى". لدينا:

$$P(V)=\frac{1}{3};P(G)=0{,}25=\frac{1}{4};P_G(V)=\frac{1}{10}$$
$$P_V(G)=\frac{P(G\cap V)}{P(V)}=\frac{P(G)\times P_G(V)}{P(V)}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}}{\frac{1}{3}}=\boxed{\frac{3}{40}}$$

3. التباين $V(X)$ للمتغير العشوائي X هو: 13 (جـ)

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X هو:

X_i	0	1	10
$P(X = X_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = \frac{1}{3} + \frac{10}{6} = 2 \; ; V(X) = \frac{1}{3} + \frac{10^2}{6} - 2^2 = \boxed{13}$$

التمرين 69.

1. نسحب من الصندوق عشوائيا وفي آن واحد 3 كرات.

احتمال الحصول على 3 كرات سوداء هو: $\frac{1}{56}$ (جـ)

$$\frac{C_3^3}{C_8^3} = \boxed{\frac{1}{56}}$$

احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون هو: $\frac{11}{56}$ (جـ)

$$\frac{C_3^3 + C_5^3}{C_8^3} = \boxed{\frac{11}{56}}$$

2. نسحب الآن من الصندوق عشوائيا 5 كرات على التوالي بإرجاع

احتمال الحصول على 5 كرات سوداء هو: $\left(\frac{3}{8}\right)^5$ (ب)

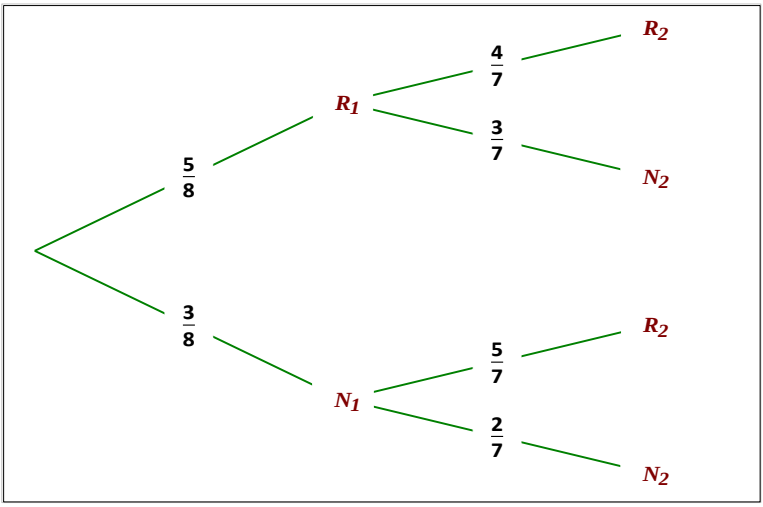
$$C_5^5 \left(\frac{3}{8}\right)^5 = \boxed{\left(\frac{3}{8}\right)^5}$$

احتمال الحصول على كرتين سوداوين و3 كرات حمراء هو:

(أ) $10\left(\frac{5}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2$

$$C_5^2 \left(\frac{5}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \boxed{10\left(\frac{5}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2}$$

3. نسحب الآن من الصندوق عشوائيا كرتين على التوالي بدون إرجاع



$P_{R_1}(R_2)$ يساوي: $\frac{4}{7}$ (ب) (من شجرة الاحتمالات)

احتمال الحادثة $R_1 \cap N_2$ هو: $\frac{15}{56}$ (أ)

$$P(R_1 \cap N_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(N_2) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \boxed{\frac{15}{56}}$$

احتمال الحصول على كرة حمراء في المرة الثانية هو: $\frac{5}{8}$ (جـ)

$$P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(N_1 \cap R_2)$$
$$= P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) + P(N_1) \times P_{N_1}(R_2)$$
$$P(R_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{35}{56} = \boxed{\frac{5}{8}}$$

احتمال الحصول على كرة حمراء في المرة الأولى علما أن الكرة المسحوبة في المرة الثانية سوداء هو: $\frac{5}{7}$ (أ)

$$P_{N_2}(R_1) = \frac{P(R_1 \cap N_2)}{P(N_2)} = \frac{P(R_1) \times P_{R_1}(N_2)}{1 - P(R_2)} = \frac{\frac{5}{8} \times \frac{3}{7}}{\frac{3}{8}} = \boxed{\frac{5}{7}}$$

التمرين 70. (بكالوريا 2015 ت إ)

1. **احتمال الحادثة $P(A \cap B)$ هو:** أ) **$0,12$**

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,3 \times 0,4 = \boxed{0,12}$$

2. **احتمال الحادثة $P(A \cup B)$ هو:** ب) **$0,58$**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \quad [\text{لأنّ الحادثتان } A \text{ و} B \text{ مستقلتان}]$$
$$= 0,3 + 0,4 - 0,12 = \boxed{0,58}$$

3. **احتمال الحادثة $P(B)$ هو:** جـ) **$0,5$**

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = 0,68 + 0,12 - 0,3 = \boxed{0,5}$$

التمرين 71. (بكالوريا 2015 ت إ)

1. **بيان أنّ احتمال أن تكون السيارة تسير بالبنزين علما أنّها من A يساوي $\frac{2}{3}$**

$$P_A(E) = \frac{P(A \cap E)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

2. **حساب احتمال أن تكون السيارة تسير بالبنزين علما أنّها من B**

$$P_B(E) = \frac{P(B \cap E)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

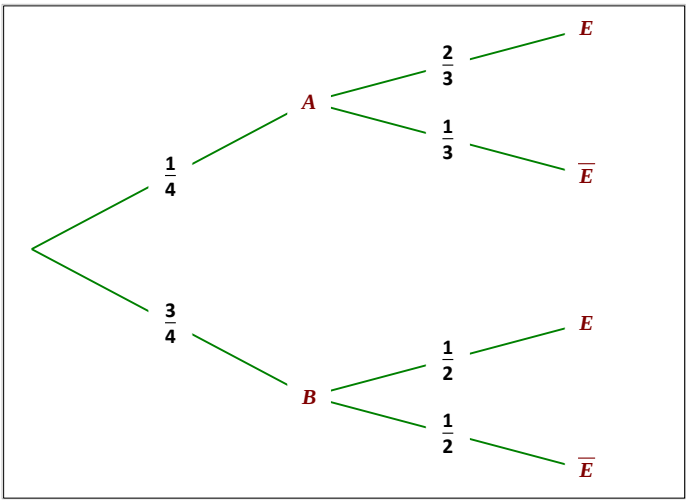
3. **أ. حساب احتمال أن تكون السيارة تسير بالبنزين**

$$P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E) = \frac{1}{6} + \frac{3}{8} = \boxed{\frac{13}{24}}$$

ب. حساب احتمال أن تكون السيارة من صنع الوحدة A علما أنّها تسير بالبنزين

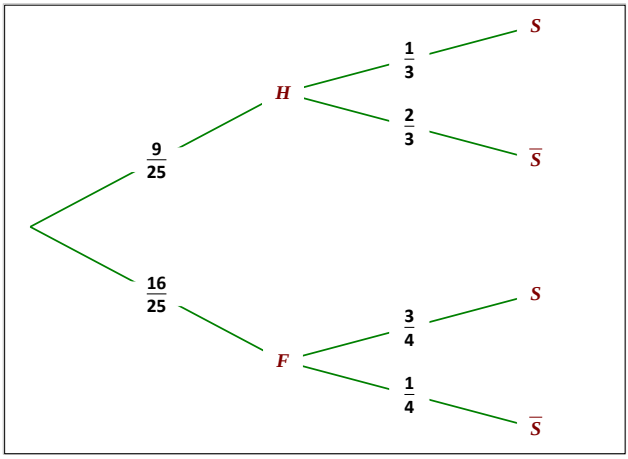
$$P_E(A) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{13}{24}} = \boxed{\frac{4}{13}}$$

4. **شجرة الاحتمالات**



التمرين 72. (بكالوريا 2016 ت إ)

1. **شجرة الاحتمالات**



2. **حساب احتمال كل حادثة مما يلي:**

أ. **التلميذ المختار أنثى وتملك هاتفا نقالا**

$$P(F \cap S) = \frac{16}{25} \times \frac{3}{4} = \boxed{\frac{12}{25}}$$

ب. **التلميذ المختار لا يملك هاتفا نقالا**

$$P(\bar{S}) = P(H \cap \bar{S}) + P(F \cap \bar{S}) = \left(\frac{9}{25} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{16}{25} \times \frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{2}{5}}$$

3. **حساب احتمال أن يكون التلميذ المختار ذكرا علما أنّه لا يملك هاتفا نقالا**

$$P_{\bar{S}}(H) = \frac{P(H \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{\frac{18}{75}}{\frac{2}{5}} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

التمرين 73. (بكالوريا 2016 ت إ)

1. **شجرة الاحتمالات**
2. **أ. حساب احتمالات الحوادث التالية: $A \cap S$ ، $B \cap S$ و $C \cap S$**

$$P(A \cap S) = 0{,}2 \times 0{,}5 = \boxed{0{,}1}$$

$$P(B \cap S) = 0{,}5 \times 0{,}7 = \boxed{0{,}35}$$

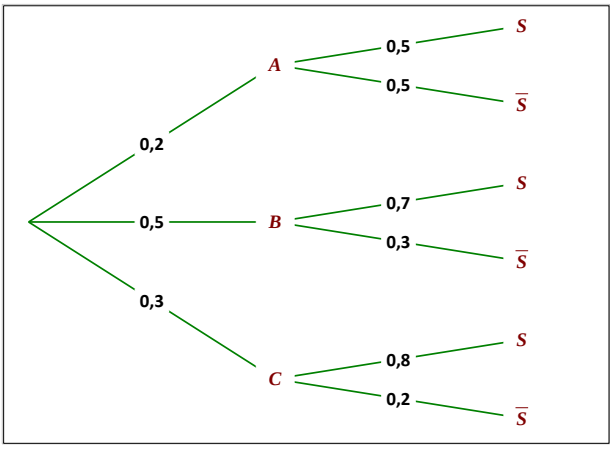
$$P(C \cap S) = 0{,}3 \times 0{,}8 = \boxed{0{,}24}$$

ب. استنتاج احتمال أن يكون الزبون معجب بالوجهة المختارة

$$P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S) + P(C \cap S) = \boxed{0{,}69}$$

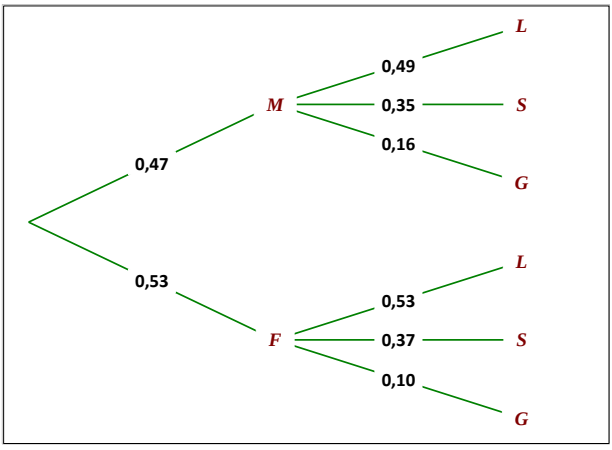
3. **حساب احتمال أن يكون الزبون من أصحاب الوجهة B علما أنّه غير معجب**

$$P_{\bar{S}}(B) = \frac{P(B \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{0{,}5 \times 0{,}3}{1 - 0{,}69} = \frac{0{,}15}{0{,}31} \approx \boxed{0{,}48}$$



التمرين 74. (بكالوريا 2017 ت إ)

1. **شجرة الاحتمالات**



2. **حساب احتمال الحوادث A ، B و C:**

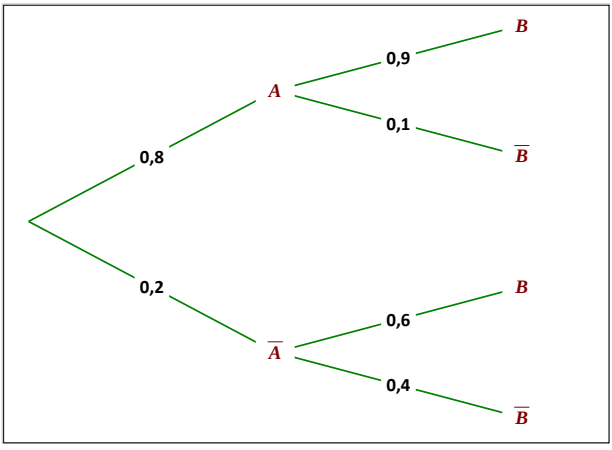
$$P(A) = P(F \cap G) = 0{,}53 \times 0{,}1 = \boxed{0{,}053}$$

$$P(B) = P(G) = P(F \cap G) + P(M \cap G) = 0{,}053 + 0{,}0752 = \boxed{0{,}1282}$$

$$P(C) = P_G(F) = \frac{P(F \cap G)}{P(G)} = \frac{0{,}053}{0{,}1282} = \boxed{0{,}4134}$$

التمرين 75. (بكالوريا 2017 ت إ)

1. **شجرة الاحتمالات**



2. **أ. بيان أنّ احتمال أن يكون الشخص المختار لا يملك جهاز حاسوب يساوي $0,20$**

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}8 = \boxed{0{,}2}$$

ب. حساب احتمال أن يكون الشخص المختار يملك جهاز حاسوب ويستعمل الأنترنت

$$P(A \cap B) = 0{,}8 \times 0{,}9 = \boxed{0{,}72}$$

جـ. حساب احتمال أن يكون الشخص المختار لا يملك جهاز حاسوب ويستعمل الأنترنت

$$P(\bar{A} \cap B) = 0{,}2 \times 0{,}6 = \boxed{0{,}12}$$

3. حساب احتمال أن يكون الشخص المختار يستعمل الأنترنت

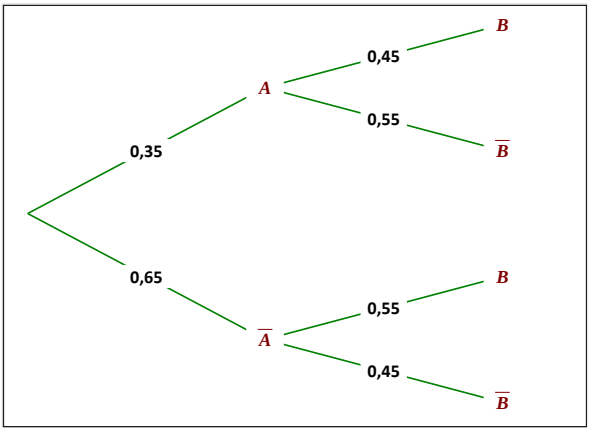
$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0{,}72 + 0{,}12 = \boxed{0{,}84}$$

4. حساب احتمال أن يكون الشخص المختار يملك جهاز حاسوب علما أنّه يستعمل الأنترنت

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}72}{0{,}84} \approx \boxed{0{,}857}$$

التمرين 76. (بكالوريا 2017 د 2 ت إ)

1. شجرة الاحتمالات



حساب الاحتمالات الآتية: $P(A \cap B)$ و $P(A \cap \bar{B})$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}35 \times 0{,}45 = \boxed{0{,}1575}$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P_A(\bar{B}) = 0{,}35 \times 0{,}55 = \boxed{0{,}1925}$$

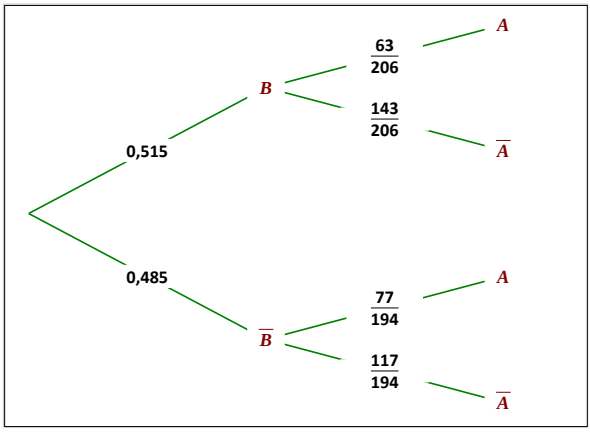
2. أ. حساب الاحتمالات الآتية: $P(B)$ ، $P_B(A)$ و $P_{\bar{B}}(A)$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0{,}1575 + 0{,}3575 = \boxed{0{,}515}$$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}1575}{0{,}515} = \boxed{\frac{63}{206}}$$

$$P_{\bar{B}}(A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0{,}1925}{1 - P(B)} = \frac{0{,}1925}{0{,}485} = \boxed{\frac{77}{194}}$$

ب. شجرة الاحتمالات



التمرين 77. (بكالوريا 2017 د 2 ت إ)

1. A و B حادثتان مستقلتان.

إذا كان $P(A \cap B) = 0,03$ و $P(A) = 0,4$ فإنّ:

(ب) $P(B) = 0,075$

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}03}{0{,}4} = \boxed{0{,}075}$$

2. A و B حادثتان.

إذا كان $P(A \cap B) = \frac{3}{100}$ و $P_A(B) = \frac{1}{4}$ فإنّ:

(أ) $P(A) = \frac{3}{25}$

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P_A(B)} = \frac{\frac{3}{100}}{\frac{1}{4}} = \boxed{\frac{3}{25}}$$

3. A و B حادثتان.

إذا كان $P(A) = 0,4$ و $P(B) = 0,5$ و $P(\overline{A \cup B}) = 0,55$

فإنّ: (ب) $P(A \cap B) = 0,45$

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) + P(\overline{A \cup B}) - 1$$
$$= 0,4 + 0,5 + 0,55 - 1 = \boxed{0,45}$$

4. قيمتا α و β حتى يكون الأمل الرياضياتي للمتغيّر العشوائي X يساوي $0,32$ هما: $\alpha = 2$ و $\beta = 0,08$ (جـ)

$$E(X) = -2(0,12) - 0,50 + \alpha\beta + 3(0,30) = \alpha\beta + 0,16$$
$$\begin{cases} 0,12 + 0,5 + \beta + 0,3 = 1 \\ E(X) = 0,32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,92 + \beta = 1 \\ \alpha\beta + 0,16 = 0,32 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \beta = 0,08 \\ \alpha = 2 \end{cases}}$$

التمرين 78. (بكالوريا 2018 ع ت)

1. أ) حساب $P(A)$ و $P(B)$

$$P(A) = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_3^1}{C_{10}^3} = \frac{36}{120} = \boxed{\frac{3}{10}}$$

$$P(B) = \frac{C_5^3 + C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{14}{120} = \boxed{\frac{7}{60}}$$

ب) بيان أنّ: $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$

$$P(A \cap B) = \frac{\underbrace{(C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1)}_{\text{كريات تحمل الرقم ②}} + \underbrace{(C_1^1 \times C_1^1 \times C_2^1)}_{\text{كريات تحمل الرقم ③}}}{C_{10}^3} = \frac{6}{120} = \boxed{\frac{1}{20}}$$

استنتاج $P_A(B)$ و $P(A \cup B)$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{10}} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{10} + \frac{7}{60} - \frac{1}{20} = \boxed{\frac{11}{30}}$$

2. تعريف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X وحساب أمله الرياضياتي $E(X)$

$X \in \{0; 1; 2; 3\}$

$$P(X = 0) = \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{1}{12}} ; P(X = 1) = \frac{C_5^1 \times C_5^2}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{5}{12}} ;$$

$$P(X = 2) = \frac{C_5^2 \times C_5^1}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{5}{12}} ; P(X = 3) = \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

X_i	0	1	2	3
$P(X = X_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

$$E(X) = \frac{5}{12} + \frac{10}{12} + \frac{3}{12} = \frac{18}{12} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

التمرين 79. (بكالوريا 2018 ت ر)

I) 1) حساب احتمال الحادثة A: "سحب كريتين مختلفتين في اللون"

$$P(A) = \frac{C_4^1 \times C_3^1}{C_7^2} = \frac{12}{21} = \boxed{\frac{4}{7}}$$

2) حساب احتمال الحادثة B: "سحب كريتين من نفس اللون"

$$P(B) = \frac{C_3^2 + C_4^2}{C_7^2} = \frac{9}{21} = \boxed{\frac{3}{7}} \dots \text{طريقة ①}$$

$$P(B) = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{7} = \boxed{\frac{3}{7}} \dots \text{طريقة ②}$$

II) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α

1. تبرير أنّ قيّم المتغيّر العشوائي X بدلالة α هي :

$$\{100 - \alpha, 50 - \alpha, -\alpha\}$$

عند سحب كريتين بيضاوين يتحصل اللاعب على $100\ DA$ ويكون ربحه $100 - \alpha$، وإذا سحب كريتين مختلفتين في اللون يتحصل على $50\ DA$ ويكون ربحه $50 - \alpha$ ، وإذا سحب كريتين خضراوين يخسر ما دفعه وتكون خسارته α

تعريف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X

$$P(X = 100 - \alpha) = P(\{B, B\}) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \boxed{\frac{1}{7}} \; ; P(X = 50 - \alpha)$$

$$= P(\{B, N\}) = \frac{C_3^1 \times C_4^1}{C_7^2} = \boxed{\frac{4}{7}} \; ;$$

$$P(X = -\alpha) = P(\{N, N\}) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \boxed{\frac{2}{7}}$$

X_i	$100-\alpha$	$50-\alpha$	$-\alpha$
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

2. بيان أنّ: $E(X)=-\alpha+\frac{300}{7}$

$$E(X)=\frac{100-\alpha}{7}+\frac{4(50-\alpha)}{7}-\frac{2\alpha}{7}=\frac{-7\alpha+300}{7}=\boxed{-\alpha+\frac{300}{7}}$$

تعيين أكبر قيمة ممكنة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب

$$E(X)>0\Rightarrow-\alpha+\frac{300}{7}>0\Rightarrow\alpha<\frac{300}{7}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{أكبر قيمة ممكنة لـ } \alpha \text{ هي } 42\ DA}$$

التمرين 80. (بكالوريا 2018 ر)

1. حساب احتمال الحوادث A ، B و C:

$$P(A)=\frac{C_5^4}{C_9^4}=\boxed{\frac{5}{126}}\ ;\ P(B)=\frac{C_1^1\times C_8^3+C_8^4}{C_9^4}=\boxed{1}$$

$$P(C)=P(\{1;3;-1;-3\})+P(\{2;2;-1;-3\})$$

$$=\frac{C_2^1\times C_1^1\times C_1^1\times C_1^1}{C_9^4}+\frac{C_4^2\times C_1^1\times C_1^1}{C_9^4}=\boxed{\frac{4}{63}}$$

2. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس

أ. تعيين قيّم المتغيّر العشوائي X وتعريف قانون احتماله

$X\in\{0;1;2;3\}$

$$P(X=0)=\frac{C_3^3\times C_6^1}{C_9^4}=\boxed{\frac{1}{21}}\ ;P(X=1)=\frac{C_3^2\times C_6^2}{C_9^4}=\boxed{\frac{5}{14}}$$

$$P(X=2)=\frac{C_3^1\times C_6^3}{C_9^4}=\boxed{\frac{10}{21}}\ ;P(X=3)=\frac{C_6^4}{C_9^4}=\boxed{\frac{5}{42}}$$

X_i	0	1	2	3
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{42}$

ب. حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغيّر العشوائي X

$$E(X) = \frac{5}{14} + \frac{20}{21} + \frac{15}{42} = \boxed{\frac{5}{3}}$$

ج. حساب احتمال الحادثة: "$X^2 - X > 0$"

$$X^2 - X > 0 \Rightarrow X(X-1) > 0 \Rightarrow X > 1 \Rightarrow P(X^2 - X > 0)$$
$$= P(X=2) + P(X=3) = \frac{10}{21} + \frac{5}{42} = \boxed{\frac{25}{42}}$$

التمرين 81. (بكالوريا 2018 ت إ)

1. شجرة الاحتمالات

2. حساب الاحتمالات الآتية: $P(S)$ ، $P(G \cap \bar{S})$ ، $P_{\bar{S}}(F)$ و $P_S(G)$

$$P(S) = P(G \cap S) + P(F \cap S) = 0{,}3 \times 0{,}9 + 0{,}7 \times 0{,}5 = \boxed{0{,}62}$$

$$P(G \cap \bar{S}) = 0{,}3 \times 0{,}1 = \boxed{0{,}03}$$

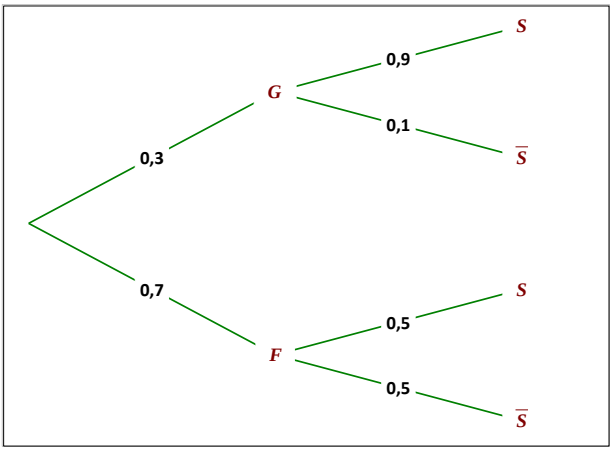
$$P_{\bar{S}}(F) = \frac{P(F \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{P(F \cap \bar{S})}{1 - P(S)} = \frac{0{,}7 \times 0{,}5}{1 - 0{,}62} = \frac{0{,}35}{0{,}38} \approx \boxed{0{,}92}$$

$$P_S(G) = \frac{P(G \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}3 \times 0{,}9}{0{,}62} = \frac{0{,}27}{0{,}62} \approx \boxed{0{,}44}$$

3. الحادثتان G و $\bar{S}$ غير مستقلتين

$$P(G) = 0{,}3\ ;\ P(\bar{S}) = 0{,}38\ ;\ \underbrace{P(G) \times P(\bar{S})}_{0{,}114} \neq \underbrace{P(G \cap \bar{S})}_{0{,}03}$$

$\Rightarrow$ الحادثتان G و $\bar{S}$ غير مستقلتين



التمرين 82. (بكالوريا 2018 ت إ)

1. أ) بيان أنّ احتمال أن يكون الموظف رجلا هو $P(H) = 0,52$

$$P(H) = 0,12 + 0,13 + 0,27 = \boxed{0,52}$$

ب) شجرة الاحتمالات

2. حساب: $P(H \cap T)$ و $P(F \cap I)$

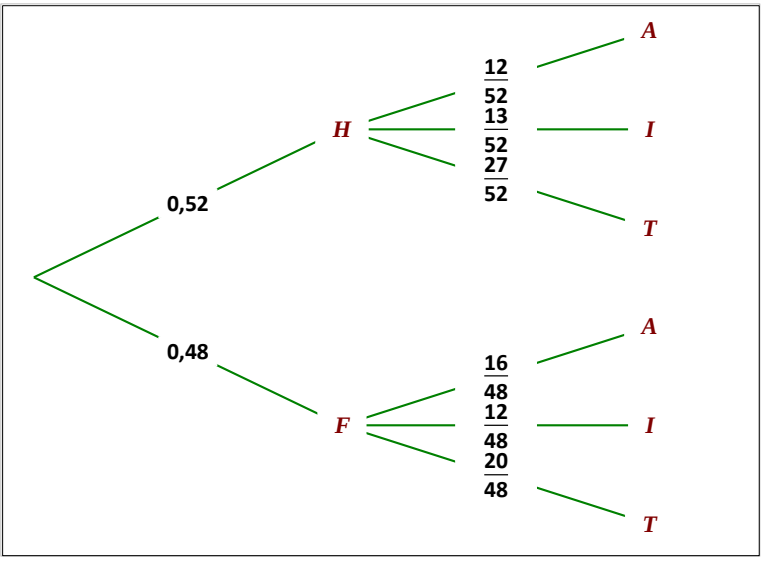
$$P(H \cap T) = 0,52 \times \frac{27}{52} = \boxed{0,27} \; ; \; P(F \cap I) = 0,48 \times \frac{12}{48} = \boxed{0,12}$$

3. حساب احتمال أن يكون الموظف مهندسا

$$P(I) = P(H \cap I) + P(F \cap I) = 0,52 \times \frac{13}{52} + 0,48 \times \frac{12}{48}$$
$$= 0,13 + 0,12 = \boxed{0,25}$$

4. حساب احتمال أن يكون الموظف رجلا علما أنّه إداري

$$P_A(H) = \frac{P(H \cap A)}{P(A)} = \frac{0,52 \times \frac{12}{52}}{0,52 \times \frac{12}{52} + 0,48 \times \frac{16}{48}} = \frac{0,12}{0,12 + 0,16}$$
$$= \frac{0,12}{0,28} = \boxed{\frac{3}{7}}$$



التمرين 83. (بكالوريا 2019 ع ت)

②②②①①①①②①①①①

$$n = 12\ ; p = 2\ ;\ C_{12}^2 = 66$$

1) بيان أن احتمال الحادثة A هو $P(A) = \frac{31}{66}$ وحساب احتمال الحادثة B.

$$P(A) = \frac{C_5^2 + C_7^2}{C_{12}^2} = \boxed{\frac{31}{66}}\ ;\ P(B) = \frac{C_8^2 + C_4^2}{C_{12}^2} = \boxed{\frac{17}{33}}$$

2) حساب احتمال سحب كريتين تحملان نفس الرقم علما أنهما من نفس اللون

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{C_4^2 + C_4^2 + C_3^2}{C_{12}^2}}{\frac{31}{66}} = \frac{\frac{5}{22}}{\frac{31}{66}} = \boxed{\frac{23}{33}}$$

3) تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X وحساب أمله الرياضياتي $E(X)$.

$X = \{3; 4; 5\}$

$$\underbrace{P(X = 3) = \frac{C_5^2}{C_{12}^2} = \boxed{\frac{5}{33}}}_{\text{سحب كريتين حمراوين}}\ ;\underbrace{P(X = 4) = \frac{C_5^1 \times C_7^1}{C_{12}^2} = \boxed{\frac{35}{66}}}_{\text{سحب كرية حمراء وأخرى خضراء}}$$

$$\underbrace{P(X = 5) = \frac{C_7^2}{C_{12}^2} = \boxed{\frac{7}{22}}}_{\text{سحب كريتين خضراوين}}$$

X_i	3	4	5
$P(X = X_i)$	$\frac{5}{33}$	$\frac{35}{66}$	$\frac{7}{22}$

$$E(X) = 3\left(\frac{5}{33}\right) + 4\left(\frac{35}{66}\right) + 5\left(\frac{7}{22}\right) = \boxed{\frac{25}{6}}$$

التمرين 84. (بكالوريا 2019 ع ت)

②②②②②①①①⓪⓪

$$n = 10\ ; p = 3\ ;\ C_{10}^{3} = 120$$

1. تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم حساب أمله الرياضياتي $E(X)$.

$$\Omega = \left\{ \underbrace{111}_{1}\ ;\ \underbrace{222}_{8}\ ;\ \underbrace{001}_{0}\ ;\ \underbrace{002}_{0}\ ;\ \underbrace{110}_{0}\ ;\ \underbrace{112}_{2}\ ;\ \underbrace{220}_{0}\ ;\ \underbrace{221}_{4}\ ;\ \underbrace{012}_{0} \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{X = \{0; 1; 2; 4; 8\}}$$

$$P(X = 0) = 1 - \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{8}{15}}\ ;\ P(X = 1) = \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{1}{120}}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_3^2 \times C_5^1}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{1}{8}}\ ;\ P(X = 4) = \frac{C_5^2 \times C_3^1}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$P(X = 8) = \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

X_i	0	1	2	4	8
$P(X = X_i)$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

$$E(X) = \left(\frac{1}{120}\right) + 2\left(\frac{1}{8}\right) + 4\left(\frac{1}{4}\right) + 8\left(\frac{1}{12}\right) = \boxed{\frac{77}{40}}$$

2. بيان أن احتمال الحصول على ثلاث كريات كل منها تحمل رقما زوجيا هو $\frac{7}{24}$.

ليكن A الحدث "سحب ثلاث كريات كل منها تحمل رقما زوجيا هو $\frac{7}{24}$"

$$P(A) = \frac{C_7^3}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{7}{24}}$$

3. حساب احتمال الحصول على كريتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علما أن جداءهما زوجي.

ليكن B الحدث "سحب كريتين تحملان رقمين مجموعهما فردي"
و C الحدث "سحب كريتين تحملان رقمين جداءهما زوجي"

الحصول على رقمين جداءهما زوجي يكون بسحب على الأقل رقما زوجيا (وهي عكس الحادثة "سحب رقميين فردين")، أما الحصول على رقمين مجموعهما فردي وجداءهما زوجي يكون بسحب رقما فرديا وآخر زوجيا مع احتساب **معامل الترتيب لأننا نسحب على التوالي**، ومنه:

$$P_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{\dfrac{2A_7^1 \times A_3^1}{A_{10}^2}}{1 - \dfrac{A_3^2}{A_{10}^2}} = \frac{\dfrac{7}{15}}{\dfrac{14}{15}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

التمرين 85. (بكالوريا 2019 ت ر)

❷❶③②①

$$\boldsymbol{n = 5\ ; p = 3\ ;\ C_5^3 = 10}$$

1. قيم المتغير العشوائي X هي: جـ) $\{0; 1; 2\}$

عند سحب 3 كريات في آن واحد نحصل على 3 كريات بيضاء $(X = 0)$، أو كريتين بيضاوين وأخرى سوداء $(X = 1)$، أو كريتين سوداوين وأخرى بيضاء $(X = 2)$.

2. الأمل الرياضياتي $E(X)$ لـ X هو: ب) $E(X) = \frac{6}{5}$

$$\underbrace{P(X = 0) = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \boxed{\frac{1}{10}}}_{\text{سحب 3 كريات بيضاء}} ; \underbrace{P(X = 1) = \frac{C_3^2 \times C_2^1}{C_5^3} = \boxed{\frac{3}{5}}}_{\text{سحب كريتين بيضاوين وأخرى سوداء}}$$

$$\underbrace{P(X = 2) = \frac{C_3^1 \times C_2^2}{C_5^3} = \boxed{\frac{3}{10}}}_{\text{سحب كريتين سوداوين وأخرى بيضاء}}$$

X_i	0	1	2
$P(X = X_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

$$E(X) = \frac{3}{5} + 2\left(\frac{3}{10}\right) = \boxed{\frac{6}{5}}$$

3. احتمال "الحصول على كرية واحدة سوداء تحمل الرقم 1 من الكريات المسحوبة" يساوي: جـ) $\frac{3}{5}$

ليكن A الحدث "الحصول على كرية واحدة سوداء تحمل الرقم 1"

$$P(A) = \frac{C_1^1 \times C_4^2}{C_5^3} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

4. احتمال "باقي قسمة مجموع مربعات الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة على 13 هو 1" يساوي: أ) $\frac{2}{5}$

ليكن B الحدث "سحب ثلاث كريات باقي قسمة مجموع مربعات أرقامها على 13 هو 1"

مثال: عند سحب الكريات ①②③ أو ❶❷③ يكون مجموع مربعات أرقامها هو $s = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$ وباقي قسمته على 13 هو $r = 1$.

$$\Omega = \left\{ \underbrace{\begin{matrix}❶①② \\ ❶①❷\end{matrix}}_{s=6;r=6} ; \underbrace{❶①③}_{s=11;r=11} ; \underbrace{\begin{matrix}❷②① \\ ❷②❶\end{matrix}}_{s=9;r=9} ; \underbrace{❷②③}_{s=17;r=4} ; \underbrace{\begin{matrix}③②① \\ ③❷❶\end{matrix}}_{s=14;r=1} \right\}$$

$$P(B) = \frac{C_1^1 \times C_2^1 \times C_2^2}{C_5^3} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

التمرين 86. (بكالوريا 2019 ت ر)

❷❶③②①④③②①

$$\boldsymbol{n = 9\ ; p = 3\ ;\ C_9^3 = 84}$$

1) حساب احتمال الحوادث التالية:

أ) الحادثة A: "الحصول على كرية بيضاء واحدة".

$$P(A) = \frac{C_4^1 \times C_5^2}{C_9^3} = \boxed{\frac{10}{21}}$$

ب) الحادثة B: "الحصول على كريتين بيضاوين على الأكثر".

لاحظ أنّ الحادثة $\bar{B}$ هي: "الحصول على 3 كريات بيضاء".

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{C_4^3}{C_9^3} = \boxed{\frac{20}{21}}$$

جـ) الحادثة C: "الحصول على ثلاث كريات تحمل أرقاما غير أولية".

$$P(C)=\frac{C_4^3}{C_9^3}=\boxed{\frac{1}{21}}$$

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات التي تحمل أرقاما أولية.

أ) تعيين قيم المتغير العشوائي X وتعريف قانون احتماله.

لدينا في الكيس 4 كريات تحمل أرقاما غير أولية (①④①❶) و5 كريات تحمل أرقاما أولية (②③②③❷)، ومنه:

$$X=\{0;1;2;3\}$$

$$P(X=0)=P(C)=\frac{C_4^3}{C_9^3}=\boxed{\frac{1}{21}}\ ;P(X=1)=\frac{C_4^2\times C_5^1}{C_9^3}=\boxed{\frac{5}{14}}$$

$$P(X=2)=\frac{C_4^1\times C_5^2}{C_9^3}=\boxed{\frac{10}{21}}\ ;\ P(X=3)=\frac{C_5^3}{C_9^3}=\boxed{\frac{5}{42}}$$

X_i	0	1	2	3
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{42}$

ب) حساب $P(X^2-X\leq 0)$.

$$X^2-X\leq 0\Rightarrow X(X-1)\leq 0\Rightarrow X\in[0;1]\Rightarrow X\in\{0;1\}$$

$$P(X^2-X\leq 0)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{1}{21}+\frac{5}{14}=\boxed{\frac{17}{42}}$$

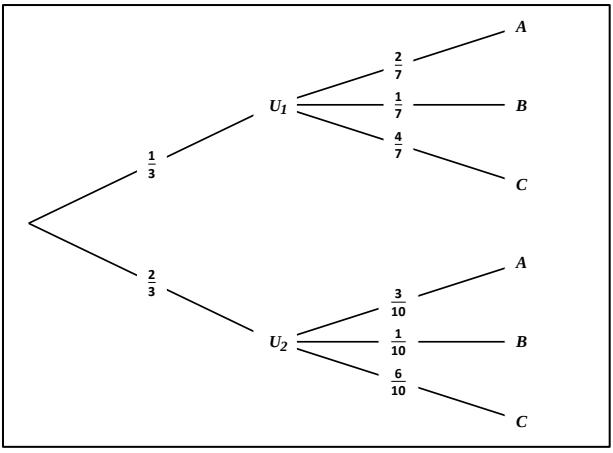
التمرين 87. (بكالوريا 2019 ر)

U_1 U_2

1) اكمال شجرة الاحتمالات.

$$P(U_2) = 1 - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}} \; ; P_{U_1}(C) = 1 - \left(\frac{2}{7} + \frac{1}{7}\right) = \boxed{\frac{4}{7}}$$

$$\underbrace{P_{U_2}(B) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \boxed{\frac{1}{10}}}_{\text{سحب كريتين سوداوين من الصندوق } U_2} \; ; \underbrace{P_{U_2}(C) = 1 - \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{10}\right) = \boxed{\frac{6}{10}}}_{\text{سحب كريتين من لونين مختلفين من الصندوق } U_2}$$



2) حساب احتمالات الأحداث A ، B و C.

$$P(A) = P(U_1 \cap A) + P(U_2 \cap A) = \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{7}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{10}\right) = \boxed{\frac{31}{105}}$$

$$P(B) = P(U_1 \cap B) + P(U_2 \cap B) = \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{10}\right) = \boxed{\frac{12}{105}}$$

$$P(C) = P(U_1 \cap C) + P(U_2 \cap C) = \left(\frac{1}{3} \times \frac{4}{7}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{6}{10}\right) = \boxed{\frac{62}{105}}$$

3) أ) تعيين قيم المتغير العشوائي X.

$$X = \{0; 1; 2\}$$

ب) تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.

$$P(X = 0) = P(B) = \boxed{\frac{12}{105}} \; ; P(X = 1) = P(C) = \boxed{\frac{62}{105}}$$

$$P(X=2)=P(A)=\boxed{\frac{31}{105}}$$

X_i	0	1	2
$P(X=X_i)$	$\frac{12}{105}$	$\frac{62}{105}$	$\frac{31}{105}$

4) حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

$$E(X)=\frac{62}{105}+2\left(\frac{31}{105}\right)=\boxed{\frac{124}{105}}$$

التمرين 88. (بكالوريا 2019 ت إ)

$$card(\Omega)=6\times 6=\boxed{36}$$

1) حساب احتمال الحصول على رقمين زوجيين

	1	2	3	4	5	6
1						
2		✕		✕		✕
3						
4		✕		✕		✕
5						
6		✕		✕		✕

$$P_1=\frac{9}{36}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

2) حساب احتمال الحصول على رقمين جداؤهما يساوي 6

	1	2	3	4	5	6
1						✕
2			✕			
3		✕				
4						
5						
6	✕					

$$P_2=\frac{4}{36}=\boxed{\frac{1}{9}}$$

3) حساب احتمال الحصول على رقمين أحدهما ضعف الآخر

	1	2	3	4	5	6
1		✕				
2	✕			✕		
3						✕
4		✕				
5						
6			✕			

$$P_3 = \frac{6}{36} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

4) حساب احتمال الحصول على رقمين زوجيين أحدهما هو 2

	1	2	3	4	5	6
1						
2		✕		✕		✕
3						
4		✕				
5						
6		✕				

$$P_4 = \frac{5}{36} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

التمرين 89. (بكالوريا 2019 ت إ)

1) حل المعادلة (E) ... $(4x^2 + 3x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0$:

$4x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = \frac{1}{4}$

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_3 = 2\ ; x_4 = 3$

$$\boxed{S = \left\{-1; \frac{1}{4}; 2; 3\right\}}$$

2) $P_1 = 3\alpha^2$ ، $P_2 = \alpha^2$ ، $P_3 = \alpha$ و $P_4 = 2\alpha$.

تحديد قيمة α.

$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1 \Rightarrow 3\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha + 2\alpha = 1$

$$\Rightarrow 4\alpha^2 + 3\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{4}}$$

3) حساب احتمال الأحداث التالية:

A : "سحب كرية تحمل رقما فرديا".

$$P(A) = P_1 + P_3 = \frac{3}{16} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{7}{16}}$$

B : "سحب كرية تحمل الرقم 4".

$$P(B) = P_4 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

C : "سحب كرية تحمل رقما أصغر من أو يساوي 3".

$$P(C) = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{3}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

D : "سحب كرية تحمل رقما حلا للمعادلة (E)".

$$P(D) = P_2 + P_3 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{5}{16}}$$

التمرين 90. (بكالوريا 2020 ع ت)

U ***V***

1. التحقق أن $P(\bar{A})$ احتمال السحب من الوعاء V هو $\frac{2}{3}$.

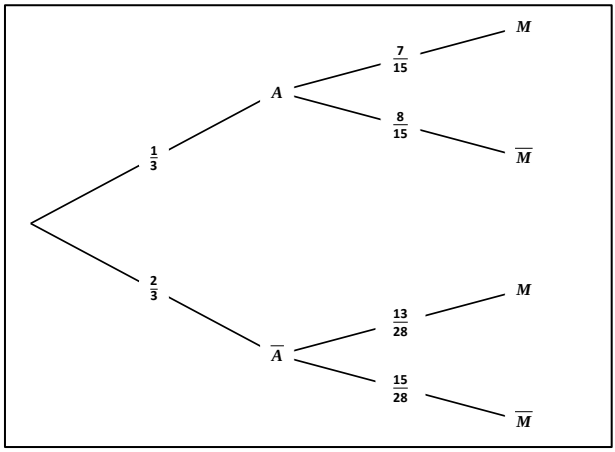
$$P(\bar{A}) = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

2. بيان أن احتمال أن تكون الكريتين المسحوبتين من نفس اللون علما أنهما من U هو $\frac{7}{15}$.

$$P_A(M) = \frac{C_4^2 + C_6^2}{C_{10}^2} = \boxed{\frac{7}{15}}$$

3. اكمال شجرة الاحتمالات واستنتاج $P(M)$.

$$P(M) = P(A \cap M) + P(\bar{A} \cap M) = \left(\frac{1}{3} \times \frac{7}{15}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{13}{28}\right) = \boxed{\frac{293}{630}}$$

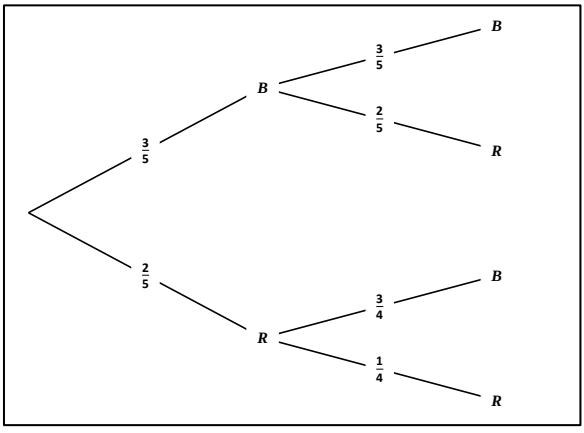


4. حساب $P_{\bar{M}}(A)$

$$P_{\bar{M}}(A) = \frac{P(A \cap \bar{M})}{P(\bar{M})} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{8}{15}}{1 - \frac{293}{630}} = \boxed{\frac{112}{337}}$$

التمرين 91. (بكالوريا 2020 ع ت)

1) أ. اكمال شجرة الاحتمالات.



ب. حساب احتمال أن تكون الكرية المسحوبة الثانية حمراء.

$$P(B \cap R) + P(R \cap R) = \left(\frac{3}{5} \times \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{17}{50}}$$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لكريتين عدد الكريات الحمراء المسحوبة.

أ. تعيين مجموعة قيم المتغير العشوائي X

$$\Omega = \{BB; BR; RB; RR\} \Rightarrow \boxed{X = \{0; 1; 2\}}$$

ب. بيان أن: $P(X = 1) = \frac{27}{50}$

$$P(X = 1) = P(B \cap R) + P(R \cap B) = \left(\frac{3}{5} \times \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}\right) = \boxed{\frac{27}{50}}$$

تعريف قانون احتمال المتغير العشوائي X.

$$P(X = 0) = P(B \cap B) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \boxed{\frac{9}{25}}$$

$$P(X = 2) = P(R \cap R) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{10}}$$

X_i	0	1	2
$P(X = X_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{27}{50}$	$\frac{1}{10}$

ج. حساب $E(X)$ الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X.

$$E(X) = \frac{27}{50} + \frac{2}{10} = \boxed{\frac{37}{50}}$$

التمرين 92. (بكالوريا 2020 ت ر)

③③②②②②②

$$n = 7 \; ; p = 2 \; ; \; C_7^2 = 21$$

1) A : "الحصول على كريتين تحملان نفس الرقم" و B "الحصول على كريتين مختلفتين في اللون".

أ. حساب احتمال كل من الحدثين A وB.

$$P(A) = \frac{C_5^2 + C_2^2}{C_7^2} = \boxed{\frac{11}{21}} \; ; \; P(B) = \frac{C_4^1 \times C_3^1}{C_7^2} = \boxed{\frac{4}{7}}$$

ب. بيان أن احتمال الحصول على كريتين تحملان نفس الرقم ومختلفتين في اللون يساوي $\frac{4}{21}$.

$$P(A \cap B) = \frac{C_4^1 \times C_1^1}{C_7^2} = \boxed{\frac{4}{21}}$$

ج. استنتاج احتمال الحصول على كريتين تحملان نفس الرقم أو مختلفتين في اللون.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{11}{21} + \frac{4}{7} - \frac{4}{21} = \boxed{\frac{19}{21}}$$

2) تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

$$\Omega = \{22; 23; 33\} \Rightarrow \boxed{X = \{4; 6; 9\}}$$

$$P(X = 4) = \frac{C_5^2}{C_7^2} = \boxed{\frac{10}{21}} \; ; \; P(X = 6) = \frac{C_5^1 \times C_2^1}{C_7^2} = \boxed{\frac{10}{21}} \; ;$$

$$P(X = 9) = \frac{C_2^2}{C_7^2} = \boxed{\frac{1}{21}}$$

X_i	4	6	9
$P(X = X_i)$	$\frac{10}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{1}{21}$

3) تعيين قيمة كل من x و y حتى تكون هذه اللعبة عادلة.

ليكن Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب الربح الجبري الذي يحققه اللاعب.
تعريف قانون احتمال Y يكون كالتالي:

Y_i	x^2	$-y^2$	-130
$P(Y = Y_i)$	$\frac{10}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{1}{21}$

$$E(Y) = x^2\left(\frac{10}{21}\right) - y^2\left(\frac{10}{21}\right) - 130\left(\frac{1}{21}\right) = \boxed{\frac{10x^2 - 10y^2 - 130}{21}}$$

$$E(Y) = 0 \Rightarrow 10x^2 - 10y^2 - 130 = 0 \Rightarrow 10(x^2 - y^2) = 130$$
$$\Rightarrow x^2 - y^2 = 13 \Rightarrow (x - y)(x + y) = 13$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 13 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 7 \\ y = 6 \end{cases}}$$

التمرين 93. (بكالوريا 2020 ت ر)

④③③②②②①②①

I) $n = 9$; $p = 3$; $C_9^3 = 84$

1) حساب احتمال كل من الحدثين A و B

$$P(A) = \frac{C_3^3 + C_4^3}{C_9^3} = \boxed{\frac{5}{84}} \; ; \; P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{C_5^3}{C_9^3} = \boxed{\frac{37}{42}}$$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب أكبر الأرقام المحصل عليها.

أ. بيان أن: $P(X = 3) = \frac{3}{7}$ وتعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.

$$P(X = 3) = P(\{113\}) + P(\{123\}) + P(\{133\}) + P(\{223\}) + P(\{233\})$$
$$= \frac{(C_2^2 \times C_2^1) + (C_2^1 \times C_4^1 \times C_2^1) + (C_2^1 \times C_2^2) + (C_4^2 \times C_2^1) + (C_4^1 \times C_2^2)}{C_9^3}$$
$$= \frac{2 + 16 + 2 + 12 + 4}{84} = \frac{36}{84} = \boxed{\frac{3}{7}}$$

ب. حساب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X.

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} 112 & 113 & 223 & 114 & 224 \\ 122 & ; 123 & 233 & ; 124 & 234 \\ \underbrace{222}_{X=2} & \underbrace{133}_{X=3} & & \underbrace{134}_{X=4} & \underbrace{334}_{X=4} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \boxed{X = \{2; 3; 4\}}$$

$$P(X = 2) = P(\{112\}) + P(\{122\}) + P(\{222\})$$
$$= \frac{(C_2^2 \times C_4^1) + (C_2^1 \times C_4^2) + C_4^3}{C_9^3} = \boxed{\frac{5}{21}}$$

$$P(X=4)=1-\frac{C_8^3}{C_9^3}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

X_i	2	3	4
$P(X=X_i)$	$\frac{5}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{3}$

$$E(X)=2\left(\frac{5}{21}\right)+3\left(\frac{3}{7}\right)+4\left(\frac{1}{3}\right)=\boxed{\frac{65}{21}}$$

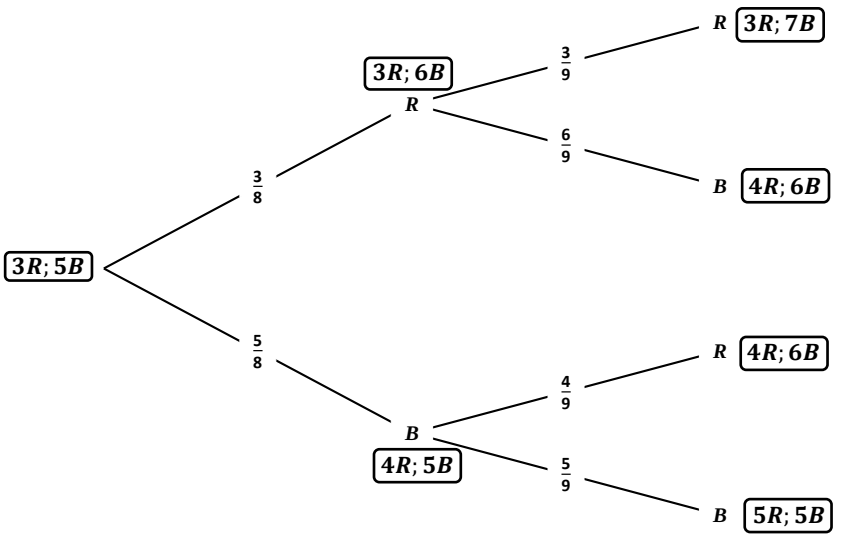
II) حساب احتمال C.

نحصل على 3 أرقام جداؤها عدد زوجي إذا سحبنا على الأقل كرية واحدة تحمل رقما زوجيا، وحادثتها العكسية هي سحب 3 كريات تحمل أرقاما فردية.

$$P(C)=1-P(\bar{C})=1-\frac{A_4^3}{A_9^3}=\boxed{\frac{20}{21}}$$

التمرين 94. (بكالوريا 2020 ر)

1) اكمال شجرة الاحتمالات.



2) بيان أن احتمال أن يوجد في الصندوق 7 كريات بيضاء هو $\frac{1}{8}$.

يكون في الصندوق 7 كريات بيضاء إذا سحبنا في كل مرة كرية حمراء.

$$P(R \cap R) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

3) حساب احتمال أن يوجد في الصندوق 4 كريات حمراء على الأقل.

نسمي A الحادثة: " وجود 4 كريات حمراء على الأقل في الصندوق"

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{8} = \boxed{\frac{7}{8}}$$

4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ كقيمة عدد الكريات البيضاء الموجودة في الصندوق بعد العملية الثانية.

أ. تبرير أن قيم المتغير العشوائي X هي: 5، 6 و7.

$$\boxed{X = \{5; 6; 7\}}$$

ب. تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X وحساب $E(X)$.

$$P(X = 5) = P(B \cap B) = \frac{5}{8} \times \frac{5}{9} = \boxed{\frac{25}{72}}$$

$$P(X = 6) = P(R \cap B) + P(B \cap R) = \left(\frac{3}{8} \times \frac{6}{9}\right) + \left(\frac{5}{8} \times \frac{4}{9}\right) = \boxed{\frac{19}{36}}$$

$$P(X = 7) = P(R \cap R) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

X_i	5	6	7
$P(X = X_i)$	$\frac{25}{72}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X) = 5\left(\frac{25}{72}\right) + 6\left(\frac{19}{36}\right) + 7\left(\frac{1}{8}\right) = \boxed{\frac{52}{9}}$$

التمرين 95. (بكالوريا 2020 ر)

$\underbrace{\boxed{\pi}\boxed{\pi}\boxed{\pi}\ldots\boxed{\pi}}_{n}\ \boxed{\pi}\ \boxed{\frac{\pi}{2}}\ \boxed{\frac{\pi}{2}}\ \boxed{\frac{\pi}{3}}\ \boxed{\frac{\pi}{2}}\ \boxed{\frac{\pi}{3}}$

$$C_{n+6}^2 = \frac{(n+6)!}{2!\,(n+4)!} = \frac{(n+6)(n+5)(n+4)!}{2!\,(n+4)!} = \boxed{\frac{(n+6)(n+5)}{2}}$$

1. أ. حساب احتمال كل من A و B:

$$P(A) = \frac{C_n^2 + C_4^2 + C_2^2}{C_{n+6}^2} = \frac{\frac{n!}{2!\,(n-2)!} + 7}{\frac{(n+6)(n+5)}{2}} = \frac{\frac{n(n-1)+14}{2}}{\frac{(n+6)(n+5)}{2}}$$

$$= \boxed{\frac{n^2 - n + 14}{n^2 + 11n + 30}}$$

نسمي C الحادثة: "سحب كريتين تحملان نفس العدد"

$$P(B) = P_A(C) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{\frac{C_n^2 + C_2^2}{C_{n+6}^2}}{\frac{C_n^2 + C_4^2 + C_2^2}{C_{n+6}^2}} = \frac{C_n^2 + C_2^2}{C_n^2 + C_4^2 + C_2^2}$$

$$= \frac{\frac{n!}{2!\,(n-2)!} + 1}{\frac{n!}{2!\,(n-2)!} + 7} = \frac{\frac{n(n-1)+2}{2}}{\frac{n(n-1)+14}{2}} = \boxed{\frac{n^2 - n + 2}{n^2 - n + 14}}$$

ب. تعيين العدد الطبيعي n حتى يكون: $P(A) = \frac{17}{55}$.

$$P(A) = \frac{17}{55} \Rightarrow \frac{n^2 - n + 14}{n^2 + 11n + 30} = \frac{17}{55}$$

$$\Rightarrow 55(n^2 - n + 14) = 17(n^2 + 11n + 30)$$

$$\Rightarrow 38n^2 - 242n + 260 = 0 \Rightarrow \boxed{n = 5}$$

2. $n = 5$. نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب العدد $\cos(\alpha)\cos(\beta)$.

أ. تبرير أن قيم المتغير العشوائي X هي : $-\frac{1}{2}$ ، 0 ، $\frac{1}{4}$ ، 1.

$$\Omega = \left\{ \underbrace{\{\pi;\pi\}}_{1};\underbrace{\{\pi;\frac{\pi}{2}\}}_{0};\underbrace{\{\pi;\frac{\pi}{3}\}}_{-\frac{1}{2}};\underbrace{\{\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\}}_{0};\underbrace{\{\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3}\}}_{0};\underbrace{\{\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\}}_{\frac{1}{4}} \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{X = \left\{-\frac{1}{2};0;\frac{1}{4};1\right\}}$$

ب. بيان أنّ: $P(X=0)=\frac{27}{55}$.

لاحظ أنّ انعدام X يكون بسحب **كرية واحدة على الأقل** تحمل العدد $\frac{\pi}{2}$.

$$P(X=0)=\frac{C_3^2+(C_3^1\times C_8^1)}{C_{11}^2}=\boxed{\frac{27}{55}}$$

ج. تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X وحساب $E(X)$.

$$P\left(X=-\frac{1}{2}\right)=\frac{C_6^1\times C_2^1}{C_{11}^2}=\boxed{\frac{12}{55}}\ ;\ P\left(X=\frac{1}{4}\right)=\frac{C_2^2}{C_{11}^2}=\boxed{\frac{1}{55}}$$

$$P(X=1)=\frac{C_6^2}{C_{11}^2}=\boxed{\frac{15}{55}}$$

X_i	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	1
$P(X=X_i)$	$\frac{12}{55}$	$\frac{27}{55}$	$\frac{1}{55}$	$\frac{15}{55}$

$$E(X)=-\frac{1}{2}\left(\frac{12}{55}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{55}\right)+\left(\frac{15}{55}\right)=\boxed{\frac{37}{220}}$$

التمرين 96. (بكالوريا 2021 ع ت)

1) $n=5\ ;p=2\ ;\ C_5^2=10$

أ. حساب $P(A)$ و$P(B)$.

$$P(A) = \frac{C_3^2 + C_2^2}{C_5^2} = \boxed{\frac{2}{5}} \; ; \; P(B) = P(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{5} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

ب. بيان أن $P(C)$ احتمال الحدث C : "H_1 عضو في اللجنة" يساوي $\frac{2}{5}$.

$$P(C) = \frac{C_1^1 \times C_4^1}{C_5^2} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

2) المتغير العشوائي X يرفق بكل إمكانية اختيار لعضوين عدد الرجال في اللجنة.

أ. تبرير أن مجموعة قيم X هي $\{0; 1; 2\}$.

$\Omega = \{$رجلان ، رجل وامرأة ، امرأتان$\} \Rightarrow \boxed{X = \{0; 1; 2\}}$

ب. تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X وحساب أمله الرياضياتي $E(X)$.

$$P(X = 0) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \boxed{\frac{1}{10}} \; ; \; P(X = 1) = P(B) = \boxed{\frac{6}{10}}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \boxed{\frac{3}{10}}$$

X_i	0	1	2
$P(X = X_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

$$E(X) = \frac{6}{10} + \frac{6}{10} = \boxed{\frac{6}{5}}$$

التمرين 97. (بكالوريا 2021 ع ت)

1) حساب $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$.

$$P(A) = \boxed{\frac{3}{9}} \; ; \; P(B) = \boxed{\frac{2}{9}} \; ; \; P(C) = \boxed{\frac{2}{9}}$$

2) حساب احتمال سحب سؤال رقمه مختلف عن 1.

نسمي D الحادثة: "سحب سؤال رقمه مختلف عن 1"

$$P(D) = \boxed{\frac{6}{9}}$$

3) المتغير العشوائي X يرفق بكل بطاقة مسحوبة رقم السؤال المسجل عليها.

أ. تبرير أن مجموعة قيم X هي $\{1; 2; 3; 4\}$.

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4\} \Rightarrow \boxed{X = \{1; 2; 3; 4\}}$$

ب. تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X وحساب $E(X)$.

$$P(X = 1) = \boxed{\frac{3}{9}}; P(X = 2) = \boxed{\frac{3}{9}}; P(X = 3) = \boxed{\frac{2}{9}}; P(X = 4) = \boxed{\frac{1}{9}}$$

X_i	1	2	3	4
$P(X = X_i)$	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

$$E(X) = \frac{3}{9} + \frac{6}{9} + \frac{6}{9} + \frac{4}{9} = \boxed{\frac{19}{9}}$$

جـ. استنتج قيمة $E(2021X + 1442)$.

$$E(2021X + 1142) = 2021\left(\frac{19}{9}\right) + 1442 = \boxed{\frac{51377}{9}}$$

التمرين 98. (بكالوريا 2021 ر)

$P_1 = \frac{1}{3}$ ، $P_2 = \frac{1}{6}$ ، $P_3 = \frac{1}{4}$ و $P_4 = \frac{1}{4}$.

1. توزيع الكريات الاثنتي عشرة حسب الأرقام 1، 2، 3، 4

$$P_1 = \frac{1}{3} = \boxed{\frac{4}{12}} \text{ ، } P_2 = \frac{1}{6} = \boxed{\frac{2}{12}} \text{ ، } P_3 = \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{12}} \text{ و } P_4 = \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{12}}$$

أي يوجد في الكيس 4 كريات تحمل الرقم 1، كريتان تحمل الرقم 2 ، 3 كريات تحمل الرقم 3 و3 كريات تحمل الرقم 4.

2. حساب احتمال الحوادث A ، B و C.

$$P(A) = P_1 + P_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{7}{12}}$$

$$P(B) = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

$$2^x = x^2 \Rightarrow x \in \{2; 4\} \Rightarrow P(C) = P_2 + P_4 = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{5}{12}}$$

3. تعيين مجموعة قيم المتغير العشوائي X وحساب $E(X)$.

$$X = \{1; 2; 3; 4\}$$

$$E(X) = P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + 1 = \boxed{\frac{29}{12}}$$

التمرين 99. (بكالوريا 2021 ر)

1. بيان أن عدد اللجان التي يمكن تشكيلها هو 42.

$$n = 7 \; ; p = 2 \; ; \; \boxed{A_7^2 = 42}$$

2.

أ. حساب $P(A)$ واستنتاج $P(B)$

$$P(A) = \frac{A_3^2 + A_4^2}{A_7^2} = \boxed{\frac{3}{7}} \; ; P(B) = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{7} = \boxed{\frac{4}{7}}$$

ب. حساب $P(C)$ و $P(E)$

لحساب $P(C)$ نختار نائبا من بين الأعضاء الستة المتبقين (بعد عزل H_1)، ولحساب $P(E)$ نختار عضوين من بين الأعضاء الخمسة المتبقين (بعد عزل H_1 وF_1) مع احتساب معامل الترتيب (قد يكون الأول رئيسا والآخر نائبا أو العكس).

$$P(C) = \frac{A_1^1 \times A_6^1}{A_7^2} = \boxed{\frac{1}{7}} \; ; \; P(E) = \frac{2A_5^2}{A_7^2} = \boxed{\frac{20}{21}}$$

3. تعيين قانون احتمال X وحساب $E(X)$.

$\Omega = \{$رجلان ، رجل وامرأة ، امرأتان$\} \Rightarrow \boxed{X = \{0; 1; 2\}}$

$$P(X=0)=\frac{A_4^2}{A_7^2}=\boxed{\frac{2}{7}}\ ;\ P(X=1)=\frac{2A_3^1\times A_4^1}{A_7^2}=\boxed{\frac{4}{7}}$$

$$P(X=2)=\frac{A_3^2}{A_7^2}=\boxed{\frac{1}{7}}$$

X_i	0	1	2
$P(X=X_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

$$E(X)=\frac{4}{7}+\frac{2}{7}=\boxed{\frac{6}{7}}$$

بالعلم والعقل لا بالمال والذهب
يزداد رفع الفتى قدرا بلا طلب
كم يرفع العلم أشخاصا إلى رتب
ويخفض الجهل أشرافا بلا أدب

فهرس

الجزء الأول: المتتاليات	قواعد أساسية في المتتاليات	7
	مواضيع المتتاليات في البكالوريا	15
	شعبة الآداب	17
	شعبة تسيير واقتصاد	25
	شعبة العلوم التجريبية	34
	شعبة تقني رياضي	46
	شعبة الرياضيات	54
	40 تمرين نموذجي	63
	حلول مواضيع المتتاليات في البكالوريا	80
	شعبة الآداب	82
	شعبة تسيير واقتصاد	99
	شعبة العلوم التجريبية	122
	شعبة تقني رياضي	159
	شعبة الرياضيات	182
	حلول التمارين النموذجية	203
الجزء الثاني: الاحتمالات	قواعد أساسية في الاحتمالات	259
	69 تمرين نموذجي	275
	مواضيع الاحتمالات في البكالوريا	308
	حلول التمارين النموذجية	325
	حلول مواضيع الاحتمالات في البكالوريا	398

أتمنى لكم التوفيق والنجاح في البكالوريا

بقلم الكرامة والعزة

أرحب بجميع استفساراتكم

أو ملاحظاتكم أو تصويباتكم

على العنوان التالي

ouailmaths@gmail.com

0668 177 233