سلسلة الرياضيات السهلة

100 تمرين في المتتاليات العددية

للثالثة علوم تجريبية

آخر تحديث : ديسمبر 2019

1 تمارين تدريبية

التمرين 01

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=\alpha$ (α عدد حقيقي) و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+1009$.

I) عيّن قيم العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

II) نضع : $\alpha=2019$.

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>2018$.

ب- بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة ، ثم استنتج أنها متقاربة .

التمرين 02

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=2u_n-n+1$.

✓ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=n+2^n$.

التمرين 03

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{4u_n-9}{u_n-2}$.

1) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\neq 3$.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{1}{u_n-3}$.

أ- بيّن أن المتتالية (v_n) حسابية ، يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول.

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

التمرين 04

(u_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_{n+2}=\frac{2}{3}u_{n+1}-\frac{1}{9}u_n$ و $u_1=1$ و $u_0=0$.

نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n$ و $w_n=3^n u_n$.

1) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول ، ثم أكتب عبارة v_n بدلالة n .

2) بيّن أن المتتالية (w_n) حسابية .

3) أكتب بدلالة n عبارة u_n.

التمرين 05

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=5$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{4u_n-1}{u_n+2}$.

✓ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{4n+15}{n+3}$.

التمرين 06

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 2n+1$.

1) أحسب u_0، u_1 و u_{1009}.

2) أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r.

3) نضع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = (n+1)^2$.

ب- استنتج قيمة المجموع: $A = 1+2+3+........+2019$.

4) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = e^{-u_n}$.

أ- بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها .

ب- أحسب بدلالة n الجداء P_n بحيث: $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times .... \times v_n$.

جـ- أحسب بدلالة n كلا من المجموعين T_n و T'_n بحيث :

$$T_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n \quad \text{و} \quad T'_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + ... + \frac{1}{v_n}$$

التمرين 07

(u_n) متتالية حسابية متناقصة ، حدها الأول u_0 و أساسها r .

1) عيّن u_0 و r ، علما أن: $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ {u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2 = 35 \end{cases}$.

2) أكتب عبارة u_n بدلالة n .

3) أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

التمرين 08

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = \frac{1}{5}$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = {u_n}^2 + \frac{1}{2}u_n$.

1) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < \frac{1}{4}$.

2) بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة.

3) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \le \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

ب- أحسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين 09

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحيث: $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{n^2 + n}{3}$.

1) أحسب u_0 و u_1 .

2) بيّن أن المتتالية (u_n) حسابية ، ثم أكتب u_n بدلالة n .

التمرين 10

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_0 و أساسها q حيث: $\begin{cases}\ln(u_1)+\ln(u_2)=11\\ u_1+u_2=e^4(1+e^3)\end{cases}$.

1) أحسب u_1 و u_2، ثم استنتج قيمة الأساس q .

2) نضع: $u_1=e^4$ و $q=e^3$.

أ- عبّر عن u_n بدلالة n.

ب- نضع: $S_n=\ln(u_0)+\ln(u_1)+\ln(u_2)+.....+\ln(u_n)$. أحسب S_n بدلالة n .

التمرين 11

(u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0=\frac{1}{2}$ من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{3u_n+4}{u_n+3}$.

1) أ- بيَن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<2$.

ب- بيَن أن المتتالية (u_n) متزايدة ، ثم استنتج أنها متقاربة .

2) أ- بيَن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2-u_{n+1}\le\frac{1}{3}(2-u_n)$.

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2-u_n\le\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

جـ- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين 12

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n=\frac{2-n}{4}+\frac{1}{2^n}$.

✓ أحسب بدلالة n المجموع S_n بحيث: $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$.

التمرين 13

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=5u_n-n+\frac{1}{4}$.

1) أحسب u_1 و u_1 .

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-\frac{n}{4}$.

أ- بيَن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=5$، يطلب تعيين حدها الأول v_0.

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم استنتج u_n بدلالة n .

جـ- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

د- أحسب بدلالة n المجموع S_n بحيث: $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$.

التمرين 14

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n}$.

1) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{n}{n+1}$.

2) أحسب بدلالة n المجموع S_n بحيث: $S_n=\ln u_1+\ln u_2+...+\ln u_n$.

التمرين 15

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\ln u_1+\ln u_5=-12$ و $\ln u_2-\ln u_4=4$.

1) عيّن أساس المتتالية (u_n) و حدها الأول u_0 .

2) أكتب عبارة u_n بدلالة n .

3) أحسب بدلالة n المجموع: $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

4) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=\ln u_n+\ln u_{n+1}$.

أـ بيّن أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تحديد أساسها.

بـ ـ أحسب بدلالة n المجموع T_n حيث: $T_n=v_0+v_1+...+v_n$

التمرين 16

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـحدها الأول: $u_0=\alpha$ (α عدد حقيقي) و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=2u_n-3$.

I) عيّن قيم العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

II) في كل ما يلي: $\alpha=-1$.

1) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-3$.

أـ بيّن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_0.

بـ ـ أكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم استنتج u_n بدلالة n.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=-4\times 2^n$ ، ثم استنتج إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

3) أحسب، بدلالة n، المجموع: $S_n=u_0+u_1+...+u_n$.

التمرين 17

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـحدّها الأول $u_0=2$ من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=u_n(u_n-1)+1$.

1) أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>1$.

2) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

3) (a_n) و (b_n) المتتاليتان المعرفتان من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $a_n=\frac{1}{2^n}\ln(u_n-1)$ و $b_n=\frac{1}{2^n}\ln(u_n)$.

أثبت أن المتتاليتين (a_n) و (b_n) متجاورتان.

التمرين 18

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{1}{2}\sqrt{3+u_n^2}$.

1) أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le u_n<1$.

بـ ـ أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n^2-1$.

أـ بيّن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية، يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول.

بـ ـ أكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم استنتج u_n بدلالة n.

جـ ـ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) أحسب بدلالة n كلا من المجموعين S_n و S'_n بحيث:

$$S_n=v_0+v_1+v_2+........+v_n \quad \text{و} \quad S'_n=u_0^2+u_1^2+u_2^2+........+u_n^2$$

التمرين 19 [باك 2008]

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0=\alpha$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-\frac{8}{9}$.

1) برهن بالتراجع أنه في حالة $\alpha=-\frac{8}{3}$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2) في كل مايلي : $\alpha=2$ ، و نعرف المتتالية العددية (v_n) كمايلي : $v_n=u_n+\frac{8}{3}$

أ- أحسب u_1 و u_2 .

ب- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_0 .

جـ- أكتب عبارة u_n بدلالة n . و أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين 20 [باك 2012]

في بداية جانفي 2008 وضع شخص مبلغا من المال قدره $50000DA$ في صندوق التوفير والإحتياط .

يقدم الصندوق فائدة قدرها 5% سنويا.

يسحب هذا الشخص نهاية كل سنة مبلغا قدره $5000DA$ (بعد حساب الفوائد).

يرمز u_n إلى المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية جانفي من السنة $n+2008$.

1) أ- أحسب كلا من u_0، u_1 و u_2.

ب- هل المتتالية (u_n) هندسية ؟ هل هي حسابية ؟ برّر إجابتك .

جـ- بيّن لماذا من أجل كل عدد طبيعي n لدينا ، $u_{n+1}=1{,}05u_n-5000$.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_n-100000$.

أ- بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية، حدّد أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=-50000\times(1{,}05)^n+100000$.

3) أ- ماهو المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية عام 2015 ؟

ب- ابتداء من أية سنة لا تسمح إدارة الصندوق لهذا الشخص بسحب المبلغ المعتاد على سحبه في نهاية كل سنة؟

التمرين 21 [باك 2013]

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\left(\frac{2a+1}{3}\right)u_n-\frac{2a+4}{3}$ ، حيث a وسيط حقيقي.

1) عيّن قيمة a من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2) نفرض $a\neq\frac{5}{2}$. عيّن قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية ، ثم أحسب عندئذ u_n و مجموع n حدا الأولى من المتتالية.

3) عيّن قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) هندسية ، ثم عين في هذه الحالة كلا من u_{50} و مجموع 50 حدا الأولى منها.

4) نفرض $a=4$. برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن : $u_n=3^n+2$ ، ثم بيّن أن :

$$u_0+u_1+u_2+\dots+u_n=\frac{1}{2}\left(3^{n+1}+4n+3\right)$$

التمرين 22 [باك 2014]

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$.

1) أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > -3$

بـ- بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

جـ- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

2) لتكن (v_n) متتالية هندسية متقاربة أساسها q حيث: $v_0 = 6$ و $\lim_{n\to\infty}(v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n) = 18$

أـ بيّن أن: $\lim_{n\to\infty}(v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n) = \frac{v_0}{1-q}$.

بـ- أحسب الأساس q ثم عيّن عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

جـ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = v_n - 3$ و استنتج عبارة u_n بدلالة n.

التمرين 23 [باك 2015]

بيّنت دراسة أن 5% من عمال إحدى القطاعات الصناعية يحالون على التقاعد سنويا و بالمقابل يوظف 3000 عامل سنويا .

علما أن سنة 2012 كان عدد العمال 50000 .

نعتبر الألف هو الوحدة و نرمز بـ: u_n لعدد العمال سنة $2012+n$ أي $u_0 = 50$.

1) أحسب u_1 و u_2.

2) أـ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 0,95u_n + 3$.

بـ- بيّن أن المتتالية (u_n) ليست حسابية و ليست هندسية.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 60 - u_n$.

أـ بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

بـ- أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

جـ- قدّر عدد العمال سنة 2017 .

د- حدد إتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ه- أحسب نهاية المتتالية (u_n) . هل يمكن أن يصل عدد عمال المصنع إلى 60000 عامل ؟

التمرين 24 [باك 2016]

(v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة و معرّفة على $\mathbb{N}$ بـحدها الأول $v_0 = 18$ و العلاقة: $v_0 + v_1 + v_2 = 38$.

1) بيّن أن أساس المتتالية (v_n) هو $q = \frac{2}{3}$.

2) أـ أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

بـ- أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (v_n) .

جـ- أحسب نهاية (v_n) .

3) نضع: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{n-1}$

أـ أحسب S_n بدلالة n ، ثم استنتج نهاية S_n عندما n يؤول إلى $+\infty$.

بـ- جد العدد الطبيعي n بحيث $S_n = \frac{3510}{81}$.

التمرين 25

[باك 2017]

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدها الأول $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

1) أحسب u_1, u_2 و u_3 ، ثم خمّن إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_{n+1} - u_n$.

أ- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 3 يطلب تعيين حدها الأول .

ب- عيّن v_n بدلالة n ، ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة .

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1}$.

أ- أحسب S_n بدلالة n .

ب- بيّن أن : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = S_n + u_0$ و استنتج عبارة u_n بدلالة n .

التمرين 26

[باك 2017] [الدورة الإستثنائية]

نعتبر المتتالية الهندسية (v_n) ذات الأساس e^2 و الحد الأول v_0 حيث $v_0 = 1$. (e يرمز إلى أساس اللوغاريتم النيبيري)

1) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$.

2) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (w_n) المعرفتين كما يلي :

من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 2n + 4 + e^{2n}$ و $u_n = w_n - v_n$.

بيّن (u_n) متتالية حسابية ، يطلب تعيين أساسها r و حدها الأول u_0 .

3) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4+6+8+\ldots+(2n+4) = (n+1)(n+4)$.

4) إستنتج المجموع T_n بدلالة n حيث : $T_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$

التمرين 27

[باك 2018]

I) لتكن المتتاليتان العدديتان (u_n) و (v_n) المعرّفتان كما يلي :

$u_0 = 50$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 0,7u_n + 6$ و $v_n = u_n - 20$

1) برهن أن (v_n) هندسية أساسها 0,7 يطلب تعيين حدها الأول v_0 ، و كتابة عبارة v_n بدلالة n .

2) أ- أكتب بدلالة n عبارة الحد العام u_n.

ب- عيّن إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثم أحسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

II) تملك جريدة يومية 5000 مشترك سنة 2016 . بعد كل سنة تفقد 30% من المشتركين و تكتسب 600 مشترك جديد .

نعتبر المئة هي الوحدة ، و نرمز بـ u_n لعدد المشتركين سنة $2016+n$ أي $u_0 = 50$

1) ما هو عدد المشتركين في سنة 2017 ؟ ثم في سنة 2018 ؟

2) أ- برّر العبارة: $u_{n+1} = 0,7u_n + 6$.

ب- إبتداءا من أي سنة يصبح عدد المشتركين أقل من 2400 مشترك ؟

التمرين 28

[باك 2019] [م1]

المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ: $u_0=-4$ و من أجل كل عدد طبيعي n يكون $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+2$.

1) أ ـ أحسب كلا من u_1 و u_2 .

بـ ـ برهن بالتراجع أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n<8$.

2) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و استنتج أنها متقاربة.

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n=u_n-\alpha$

أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}=\frac{3}{4}u_n-\frac{1}{4}\alpha+2$

بـ ـ عيّن قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ ، يطلب تعيين حدها الأول v_0 .

جـ ـ نضع $\alpha=8$ ، عبّر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=-12\times\left(\frac{3}{4}\right)^n+8$.

4) أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n=u_1+u_2+...+u_n$.

التمرين 29

[باك 2019] [م2]

(u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_2+2u_5=27 \\ u_1=\frac{9}{2} \end{cases}$.

1) حساب حدها الأول u_0 و أساسها r .

2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3) بيّن أن العدد 2019 حد من حدود المتتالية (u_n) ، ثم أحسب كلا من المجموعين S_1 و S_2 حيث:

$S_1=u_1+u_2+u_3+...+u_{1344}$ و $S_2=u_2+u_4+u_6+...+u_{1344}$

- استنتج حساب المجموع S_3 حيث: $S_3=u_1+u_3+u_5+...+u_{1343}$

4) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=e^{6-2u_n}$ ،

أحسب المجموع $S_n=\frac{1}{v_0}+\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+...+\frac{1}{v_n}$.

التمرين 30

[باك 2008] [م1]

1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[1;2]$ بالعبارة : $f(x)=\frac{x+2}{-x+4}$

أ- بيّن أن الدالة f متزايدة على I.

ب- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I، $f(x)$ ينتمي إلى I .

2) (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي : $u_0=\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I.

ب- أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$.

ب- عيّن النهاية : $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين 31

[باك 2008] [م2]

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0=\frac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+2$

1) أ- أرسم في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ و المنحني (d) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{2}{3}x+2$.

ب- باستعمال الرسم السابق، مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود : u_0,u_1,u_2,u_3 و u_4 .

جـ- ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها .

2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\leq 6$

ب- تحقق أن (u_n) متزايدة .

جـ- هل (u_n) متقاربة ؟ برّر إجابتك.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-6$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب- أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين 32

[باك 2008] [م2]

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_{n+2}=\frac{4}{3}u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n$ و $u_1=2$ و $u_0=1$.

المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=u_{n+1}-u_n$.

1) أحسب v_0 و v_1.

2) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .

3) أ- أحسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n=v_1+v_2+\ldots+v_{n-1}$.

بـ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1$

جـ- بيّن أن (u_n) متقاربة.

التمرين 33

[باك 2009] [م2]

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 و أساسها q حيث : $\begin{cases} u_1+2u_2+u_3=32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$

1) أ- أحسب u_2 و الأساس q لهذه المتتالية و استنتج الحد الأول u_1

بـ- أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

جـ- أحسب S_n حيث : $S_n = u_1+u_2+...+u_n$ بدلالة n ثم عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 728$.

2) (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي : $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$

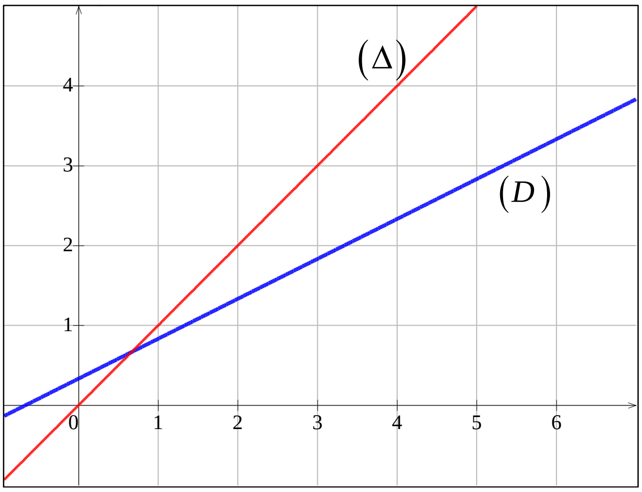
أ- أحسب v_2 ، v_3 .

بـ- نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$ ، بيّن أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

جـ- أكتب w_n بدلالة n ثم إستنتج v_n بدلالة n .

التمرين 34

[باك 2010] [م2]



في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس مثلنا المستقيمين

(Δ) و (D) معادلتيهما على الترتيب : $y = x$ و $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

1) لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$

بـ: $u_0 = 6$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$.

أ- أنقل الشكل ثمّ مثل على محور الفواصل الحدود التالية :

u_0, u_1, u_2, u_3 و u_4 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم

بـ- عين إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D).

جـ- أعط تخمينا حول إتجاه تغيرالمتتالية (u_n).

2) أ- باستعمال الاستدلال بالتراجع ، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq \frac{2}{3}$.

بـ- إستنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

أ- بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدّها الأول .

بـ- أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، و استنتج عبارة u_n بدلالة n .

جـ- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0+v_1+...+v_n$ ، إستنتج المجموع S'_n حيث : $S'_n = u_0+u_1+...+u_n$.

التمرين 35

[باك 2011] [م1]

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

و (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n + \frac{1}{2}$.

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات ، إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حدّدها مع التعليل.

1) المتتالية (v_n) : أـ حسابية. بـ ـ هندسية. جـ ـ لا حسابية ولا هندسية.

2) نهاية المتتالية (u_n) هي : أـ $+\infty$. بـ ـ $-\frac{1}{2}$. جـ ـ $-\infty$.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n=-\frac{1}{2}\left[1+e^{\ln 3}+e^{2\ln 3}+e^{3\ln 3}+\ldots+e^{n\ln 3}\right]$.

أـ $S_n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$ بـ ـ $S_n=\frac{1-3^n}{4}$ جـ ـ $S_n=\frac{1-3^{n+1}}{4}$.

التمرين 36

[باك 2011] [م2]

α عدد حقيقي موجب تماما و يختلف عن 1.

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\alpha u_n+1$.

(v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=u_n+\frac{1}{\alpha-1}$.

1) أـ بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها α .

بـ ـ أكتب بدلالة n و α ، عبارة v_n ثم استنتج بدلالة n و α ، عبارة u_n.

جـ ـ عيّن قيَم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها المتتالية (u_n) متقاربة.

2) نضع: $\alpha=\frac{3}{2}$.

ـ أحسب بدلالة n ، المجموعين S_n و T_n حيث: $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$ و $T_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$.

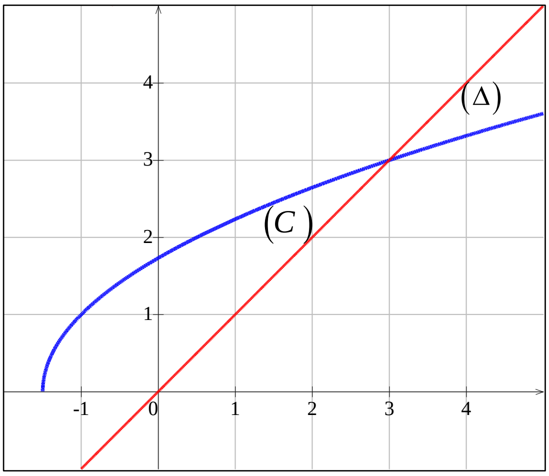
التمرين 37

[باك 2012] [م1]

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3}$

1) لتكن h الدالة المعرفة على المجال $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$ كما يلي: $h(x)=\sqrt{2x+3}$ و (C) تمثيلها البياني

و (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y=x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (أنظر الشكل المقابل).



أـ أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية u_0,u_1,u_2 و u_3 (دون حسابها وموضحا خطوط الإنشاء)

بـ ـ ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر (u_n) و تقاربها .

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<3$

3) أـ أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

بـ ـ إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 38

[باك 2012] [م1]

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=\frac{13}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3+\sqrt{u_n-3}$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3<u_n<4$

2) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^{\,2}+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$. استنتج أن (u_n) متزايدة تماما .

3) برر لماذا (u_n) متقاربة.

4) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n - 3)$.

أ- برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، ثم أحسب حدها الأول.

بـ- أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n، ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

جـ- نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3)\times\ldots\times(u_n - 3)$.

أكتب P_n بدلالة n، ثم بين أن: $\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{16}$.

التمرين 39

[باك 2013] [م1]

I) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$.

1) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول.

2) أحسب $\lim_{n\to\infty} v_n$.

II) المتتالية (u_n) معرّفة بـ: $u_0 = 1$، و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$

1) برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n، $1 \le u_n \le 6$

2) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

3) أ- برهن أنه، من أجل كل عدد طبيعي n: $6 - u_{n+1} \le \frac{5}{6}(6 - u_n)$.

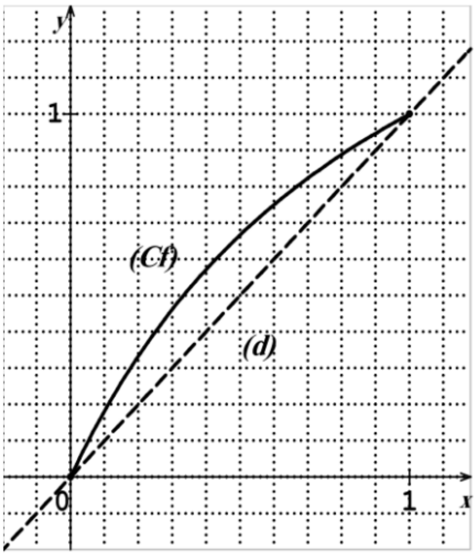
بـ- بيّن أنه، من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \le 6 - u_n \le v_n$. استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 40

[باك 2013] [م2]

في الشكل المقابل، (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{2x}{x+1}$،

و (d) المستقيم ذو المعادلة: $y = x$



1) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول، $u_0 = \frac{1}{2}$

و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- أعد رسم هذا الشكل في ورقة الإجابة، ثم مثل الحدود u_0, u_1, u_2

و u_3 على محور الفواصل دون حسابها، مبرزا خطوط التمثيل.

بـ- ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها.

2) أ- أثبت أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$

بـ- برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n: $0 < u_n < 1$

جـ- أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$.

أ- برهن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، يطلب حساب حدّها الأول v_0.

بـ- أحسب نهاية (u_n).

التمرين 41 [باك 2014] [م1]

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-\frac{4}{3}$

و (v_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=u_n+4$

1) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

2) أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n.

3) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.

4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$

5) لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $w_n=5\left(\frac{1}{v_n+5}-1\right)$.

أ- بيّن أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب- أحسب: $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-w_n)$.

التمرين 42 [باك 2014] [م2]

I) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها العام: $u_n=e^{\frac{1}{2}-n}$ (e هو أساس اللوغاريتم النيبيري)

1) بيّن أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

2) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$، ماذا تستنتج؟

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$

II) نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=\ln(u_n)$ ($\ln$ يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري).

1) عبّر عن v_n بدلالة n، ثم استنتج نوع المتتالية (v_n).

2) أ- أحسب بدلالة n العدد P_n حيث: $P_n=\ln(u_0\times u_1\times u_2\times\ldots\times u_n)$

ب- عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P_n+4n>0$.

التمرين 43 [باك 2015] [م1]

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0=e^2-1$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=(1+u_n)e^{-2}-1$.

1) أحسب: u_1، u_2 و u_3.

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1+u_n>0$.

3) بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة. هل هي متقاربة؟ علل.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=3(1+u_n)$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب- أكتب v_n و u_n بدلالة n، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

جـ- بيّن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\ln v_0+\ln v_1+\ln v_2+\ldots+\ln v_n=(n+1)(-n+2+\ln 3)$

التمرين 44

[باك 2015] [2م]

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I) f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{4x+1}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1) عيّن اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

2) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) ذي المعادلة: $y=x$.

3) مثل (C_f) و (D) على المجال $[0;6]$.

II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases}u_0=2\\ u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$ و $\begin{cases}v_0=5\\ v_{n+1}=f(v_n)\end{cases}$

1) أ ـ أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود u_0,u_1,u_2 و u_3 ، v_0,v_1,v_2 و v_3 دون حسابها.

بـ ـ خمّن اتجاه تغيّر و تقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

2) أ ـ أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $2\le u_n<\alpha$ و $\alpha<v_n\le 5$ حيث: $\alpha=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$

بـ ـ استنتج اتجاه تغيّر كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

3) أ ـ أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{3}(v_n-u_n)$

بـ ـ بيّن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0<v_n-u_n\le\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

جـ ـ استنتج أن: $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ ، ثم حدد نهاية كل من (u_n) و (v_n).

التمرين 45

[باك 2016] [الدورة الأولى] [1م]

I) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{2x+8}$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ ـ أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

بـ ـ أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ثم شكل جدول تغيّراتها.

2) عيّن إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) الذي: $y=x$ معادلة له.

3) أرسم (C) و (Δ).

II) المتتالية (u_n) معرفة بـ: $u_0=0$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

1) مثل في الشكل السابق على محور الفواصل، الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء.

2) ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها.

3) أ ـ برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le u_n<4$

بـ ـ أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

جـ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$.

ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_n\le\frac{1}{2^n}(4-u_0)$.

د ـ استنتج $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين 46
[باك 2016] [الدورة الأولى] [م2]

I) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{5x}{x+2}$.

1) أ ـ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

بـ ـ أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f(x)\geq 0$.

II) المتتالية (u_n) معرّفة بـ: $u_0=1$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{5u_n}{u_n+2}$

1) أ ـ برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\leq u_n\leq 3$

بـ ـ أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

2) (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=1-\dfrac{3}{u_n}$.

أ ـ بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{2}{5}$ يطلب تعيين حدّها الأول.

بـ ـ أكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n.

جـ ـ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=\dfrac{1}{u_0}+\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+....+\dfrac{1}{u_n}$

التمرين 47
[باك 2016] [م1]

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[0;4]$ بـ: $f(x)=\dfrac{13x}{9x+13}$.

1) أ ـ بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I.

بـ ـ بيّن أنه من أجل كل من المجال I ، $f(x)$ ينتمي الى المجال I.

2) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=4$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

أ ـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0\leq u_n\leq 4$

بـ ـ أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

3) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n\neq 0$

4) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=2+\dfrac{13}{u_n}$

أ ـ برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول v_0.

بـ ـ أكتب v_n بدلالة n.

جـ ـ إستنتج أن: $u_n=\dfrac{52}{36n+13}$ و ذلك من أجل كل عدد طبيعي n ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 48
[باك 2016] [م2]

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{2u_n+2}{u_n+3}$

و لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$

1) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

2) أـ عبّر بدلالة n عن الحد العام v_n .

بـ ـ استنتج عبارة الحد u_n العام بدلالة n .

جـ ـ أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

3) أـ أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

بـ ـ تحقق أن: $\frac{1}{u_n+2} = \frac{1}{3}(1-v_n)$ و ذلك من أجل كل عدد طبيعي n .

جـ ـ أحسب بدلالة n المجموع: $S'_n = \frac{1}{u_0+2} + \frac{1}{u_1+2} + ... + \frac{1}{u_n+2}$.

التمرين 49

[باك 2017] [م1]

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرّفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_0 = \frac{1}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n+4}$ و $v_n = \frac{u_n+2}{1-u_n}$.

1) أـ برهن بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$.

بـ ـ بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2) أـ بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ ثم عبر عن حدها العام v_n بدلالة n .

بـ ـ أثبت أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 - \frac{3}{v_n+1}$ ، ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

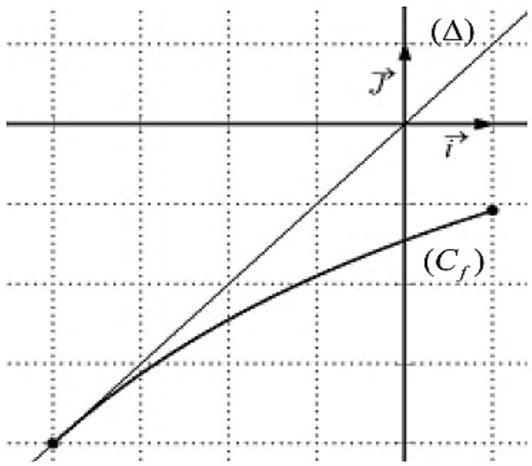
التمرين 50

[باك 2017] [م2]

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و

f الدالة المعرفة على المجال $[-4;1]$ كما يلي: $f(x) = \frac{3x-16}{x+11}$.

و (C_f) المنحنى الممثل لها، (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y = x$.



I) تحقق أن الدالة متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$. ثم بيّن أن:

من أجل $x \in [-4;1]$ فإن $f(x) \in [-4;1]$.

II) (u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = f(u_n)$

1) أـ أنقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 دون حسابها.

ثم ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-4 \le u_n \le 0$

ثم بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$

أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{7}$ ، ثم أحسب المجموع S حيث: $S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + ... + v_{2016} \times u_{2016}$.

التمرين 51

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases}$$

1) أحسب الحدين u_1 و v_1.

2) أ- أكتب $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$.

ب- باستعمال البرهان بالتراجع بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و المتتالية (v_n) متناقصة تماما .

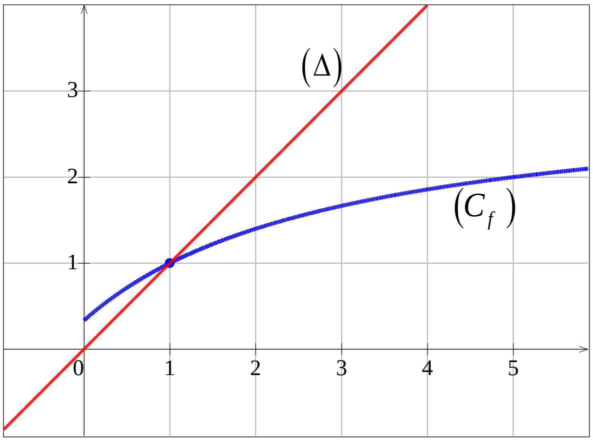
3) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n = u_n - v_n$

برهن أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول w_0 ثم عبر عن w_n بدلالة n.

4) بين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

التمرين 52

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال : $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y = x$



α عدد حقيقي موجب ، (u_n) المتتالية العددية المعرفة على بحدها الأول $u_0 = \alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

1) عين قيم α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

نضع في كل مايلي : $\alpha = 5$

2) أ- أنقل الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 دون حسابها.

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول.

ب- عبر بدلالة n عن v_n و u_n ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

4) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_n + v_{n+1} + ... + v_{n+2016}$.

ثم استنتج بدلالة n المجموع : $S'_n = \frac{1}{u_n+1} + \frac{1}{u_{n+1}+1} + ... + \frac{1}{u_{n+2016}+1}$.

التمرين 53

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول u_0 حيث $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$.

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$.

ب- بين أن (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ و استنتج أنها متقاربة.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$

ـ أثبت أن (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول.

3) عبّر بدلالة n عن v_n و u_n، و أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

4) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_0v_0+u_1v_1+\ldots+u_nv_n=\frac{1}{3}(1-n^2)$

التمرين 54

[باك 2018] [م2]

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=u_n+\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$.

1) أحسب كلا من u_1, u_2 و u_3

2) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{2n+3}{2n+1}>1$ ثم استنتج إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

3) (v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=2n+1$

أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $e^{u_n}=v_n$.

بـ ـ استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

4) أحسب المجموعين S_n و T حيث : $S_n=\ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right)+\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$ و $T=e^{u_{1439}}+e^{u_{1440}}+\ldots+e^{u_{2018}}$

التمرين 55

[باك 2019] [م1]

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=13$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+\frac{4}{5}$.

1) أـ برهن بالتراجع أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>1$.

بـ ـ أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و استنتج أنها متقاربة .

2) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\ln(u_n-1)$.

ـ أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .

3) أكتب v_n بدلالة n، ثم بيّن أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=1+\frac{12}{5^n}$ و أحسب عندئذ $\lim_{n\to\infty} u_n$.

4) بيّن أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $(u_1-1)\times(u_2-1)\times\ldots\times(u_n-1)=\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$.

التمرين 56

[باك 2019] [م2]

نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $[4;7[$ بـ : $f(x)=\sqrt{x+2}+4$

1) أـ بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4;7[$.

بـ ـ استنتج أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ فإن $f(x)\in[4;7[$.

2) برهن أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ فإن $f(x)-x=\frac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}}$.

ثم استنتج أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ فإن $f(x)-x>0$.

3) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : $u_0=4$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$

أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4\le u_n<7$.

بـ ـ استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثم بيّن أنها متقاربة.

4) أـ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $7-u_{n+1}\le\frac{1}{4}(7-u_n)$.

بـ- استنتج أنه : من أجل كل عدد طبيعي n، $0 < 7 - u_n \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$، ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n).

4 تمارين مختارة من بكالوريا تقني رياضي

التمرين 57
[باك 2008] [م1]

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;2]$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$، و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $4cm$)

1) أ- أدرس تغيّرات الدالة f على المجال $[0;2]$.

بـ- أنشئ (C_f).

جـ- برهن أنه إذا كان $x \in [0;2]$ فإن $f(x) \in [0;2]$.

2) نعرّف المتتالية العددية (u_n) على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

أ- برّر وجود المتتالية (u_n)، ثم أحسب u_1 و u_2.

بـ- مثل الحدود u_0، u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل و ذلك بالاستعانة بـ (C_f) و المستقيم (D) ذو المعادلة : $y = x$.

جـ- ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها إنطلاقا من التمثيل السابق.

3) أ- برهن بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي n، $0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$.

بـ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} > u_n$. ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب المتتالية (u_n) ؟

جـ- تحقق أن : $u_{n+1} - \sqrt{3} \leq \frac{2-\sqrt{3}}{u_n + 2}(u_n - \sqrt{3})$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$.

عيّن عددا حقيقيا k من المجال $]0;1[$ بحيث : $|u_{n+1} - \sqrt{3}| \leq k|u_n - \sqrt{3}|$.

بيّن أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $|u_n - \sqrt{3}| \leq k^n |u_0 - \sqrt{3}|$، ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 58
[باك 2008] [م2]

1) f الدالة المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x^2+5}{x+2}$.

و (C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $2cm$)

أ- أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف .

بـ- أدرس اتجاه تغيّر f ثم شكل جدول تغيراتها.

جـ- بيّن أن المستقيم (D) ذي المعادلة : $y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f)، ثم أرسم المنحنى (C_f) و المستقيم (D).

د - بيّن أن صورة المجال $\left[1;\frac{5}{2}\right]$ محتواة في المجال $\left[1;\frac{5}{2}\right]$.

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ- باستخدام (C_f) و المستقيم ذي المعادلة $y = x$ مثل u_0، u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل .

بـ- خمّن إتجاه تغيّر و تقارب المتتالية (u_n).

جـ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1 \le u_n \le \frac{5}{2}$، و أن المتتالية (u_n) متزايدة.

إستنتج أن (u_n) متقاربة، ثم أحسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 59

[باك 2011] [م1]

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $u_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$.

1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$، ثم إستنتج أن $u_n > 1$.

2) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثم بيّن أنها متقاربة، وأحسب نهايتها.

3) ليكن P_n الجداء المعرف كما يلي: $P_n = u_1 \times u_2 \times u_3 \times .... \times u_n$.

أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $P_n = \frac{2n+2}{n+2}$.

4) (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n = \ln u_n$.

عبّر بدلالة P_n عن S_n حيث: $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n$، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

التمرين 60

[باك 2014] [م1]

I) f هي الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x) = x - \ln(x-1)$

1) حدد حسب قيم x، إشارة $f(x) - x$.

2) أ- عيّن إتجاه تغيّر f.

3) بـ- بيّن أنه إذا كان $x \in [2;e+1]$ فإن: $f(x) \in [2;e+1]$.

II) (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = e+1$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n - 1)$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \in [2;e+1]$.

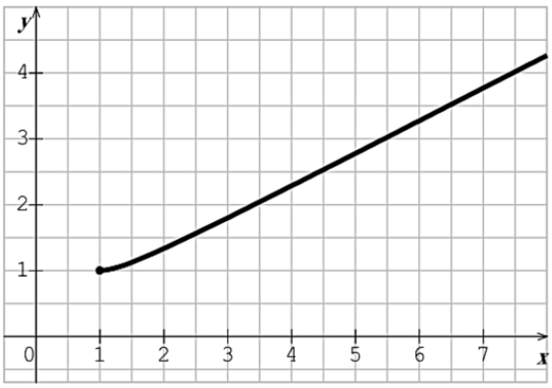
2) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

3) برر تقارب المتتالية (u_n)، ثم أحسب نهايتها.

التمرين 61

[باك 2016] [م2]

نعتبر الدالة f المعرفة على $[1;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$. (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.



1) بيّن أن الدالة f متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

2) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 6$

و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ- أنقل المنحنى المقابل ثم مثل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) على حامل محور الفواصل (دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء.

بـ- أعط تخمينا حول اتجاه تغيّرالمتتالية (u_n) و تقاربها.

جـ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1 \le u_n \le 6$.

د- أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

هـ- برّر تقارب المتتالية (u_n).

3) نعتبر المتتاليتين (v_n) و (w_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ و $w_n = \ln(v_n)$.

أ- برهن أن (w_n) متتالية هندسية أساسها 2، يطلب تعيين حدها الأول.

بـ- أكتب w_n بدلالة n، ثم v_n بدلالة n.

جـ- بيَن أن: $u_n = 1 - \frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}$، ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

4) أحسب بدلالة n المجموع التالي: $S_n = \frac{1}{w_0} + \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + ... + \frac{1}{w_n}$.

التمرين 62

[باك 2017] [الدورة الإستثنائية] [م2]

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_1 = \frac{1}{\alpha}$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_{n+1} = \frac{n+1}{\alpha n} u_n$

حيث α عدد حقيقي أكبر أو يساوي 2.

1) أ- بيَن أن: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_n > 0$.

بـ- بيَن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $v_n = \frac{1}{\alpha n} u_n$.

أ- بيَن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{\alpha}$ و عيَن حدها الأول v_1 بدلالة α.

بـ- جد بدلالة n و α عبارة الحد العام v_n ثم استنتج عبارة u_n و أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

3) أحسب بدلالة n و α المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + ... + \frac{u_n}{n}$.

عيَن قيمة α حيث: $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2016}$.

التمرين 63

[باك 2018] [م1]

f الدالة العددية المعرفة و المتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{2x}{e.x+1}$. (e أساس اللوغاريتم النبيري)

و (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول: $u_0 = \frac{5}{4e}$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) أ- برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > \frac{1}{e}$.

بـ- بيَن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n = \frac{e.u_n\left(\frac{1}{e} - u_n\right)}{e.u_n + 1}$.

ثم إستنتج إتجاه تغيَر المتتالية (u_n) و برر أنها متقاربة.

2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = \frac{e.u_n}{e.u_n - 1}$.

بيَن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2، يطلب تعين حدها الأول v_0 عبارة v_n بدلالة n.

3) أ- تحقق أنه من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}$: $v_n = 1 + \frac{1}{e.u_n - 1}$ و استنتج عبارة u_n ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

بـ- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$.

التمرين 64

[باك 2008] [م1]

لتكن f الدالة المعرفة على $[1;+\infty[$ كمايلي : $f(x)=3+\sqrt{x-1}$ ، و

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $2cm$)

1) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ و فسر النتيجة هندسيا.

- أدرس تغيّرات الدالة f.
- باستعمال منحنى دالة "الجذر التربيعي" أنشئ (C_f) .
- أرسم في نفس المعلم المستقيم (D) الذي معادلته : $y=x$.

2) نعرف المتتالية (u_n) على المجموعة $\mathbb{N}$ كالآتي : $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$.

أ- باستعمال (D) و (C_f) مثل u_0، u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل .

ب- ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها.

3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $2 \le u_0 \le 5$ و $u_{n+1} > u_n$.

ب- استنتج أن (u_n) متقاربة . أحسب $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

التمرين 65

[باك 2008] [م2]

(u_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول $u_0=2$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+1$.

1) أحسب u_0، u_1 و u_2 .

2) (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=u_n+\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

- برهن بالتراجع أن (v_n) ثابتة.
- إستنتج عبارة u_n بدلالة n.
- أحسب $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

3) (w_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\frac{2}{3}n-\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

أحسب المجموع : $S_n=w_0+w_1+w_2+.....+w_n$.

التمرين 66

[باك 2009] [م1]

1) نعرف الدالة f على المجال $[1;5]$ بـ: $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{x}\right)$.

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $3cm$)

أ- أدرس تغيّرات الدالة f.

بـ- أنشئ (C_f) و المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=x$ في نفس المعلم.

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=5$ و بالعبارة : $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{5}{u_n}\right)$.

أ- أحسب u_1 و u_2.

بـ- أ- باستعمال (D) و (C_f) مثل u_0، u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل.

3) أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\geq\sqrt{5}$.

بـ- بيَن أن (u_n) متناقصة تماما، ماذا تستنتج بالنسبة لتقاربها ؟

4) أ- برهن أنه مهما يكن العدد الطبيعي n ، $\left(u_{n+1}-\sqrt{5}\right)\leq\frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{5}\right)$.

بـ- إستنتج أن : $\left(u_n-\sqrt{5}\right)\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(u_0-\sqrt{5}\right)$. ما هي $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

التمرين 67

[باك 2009] [م2]

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3u_n+2n+1$.

(v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n=u_n+\alpha n+\beta$ حيث α و β عددان حقيقيان .

1) عيَن α و β بحيث تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية، يطلب حساب أساسها وحدها الأول .

2) أحسب كلا من v_n و u_n بدلالة n .

3) أحسب المجموعين S_n و S'_n بحيث : $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$ و $S'_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$.

التمرين 68

[Bac Maroc 2003]

I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-2\sqrt{x}+2$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ- أدرس قابلية إشتقاق الدالة على يمين الصفر .

ب- أدرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

II) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=2$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\le u_n\le 2$.

2) بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة .

3) إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم أحسب نهايتها .

التمرين 69

[Bac Maroc 2004]

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=1$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\dfrac{(u_n)^3}{3(u_n)^2+1}$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>0$.

2) بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة ، ثم إستنتج أنها متقاربة .

3) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}<\dfrac{1}{3}u_n$.

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n<\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ ، ثم أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 70

[Bac Maroc 2007]

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول : $u_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\dfrac{1}{5}(u_n-4n-1)$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n+n-1$.

1) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{5}$.

2) أ- أكتب عبارة v_n بدلالة n .

ب- إستنتج u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $T_n=v_0+v_1+v_2+\ldots+v_n$ و $S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$

بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $T_n=\dfrac{1}{4}\left(5-\dfrac{1}{5^n}\right)$ و $S_n=T_n-\dfrac{(n+1)(n-2)}{2}$.

[Bac Maroc 2008]

التمرين 71

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول: $u_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{5u_n}{2u_n+3}$.

1) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>1$.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n}$.

بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{5}$.

3) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=\frac{2}{2-\left(\frac{3}{5}\right)^n}$.

ب- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

[Bac Maroc 2014]

التمرين 72

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول: $u_1=5$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1}=\frac{5u_n-4}{1+u_n}$.

1) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_n>2$.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ: $v_n=\frac{3}{u_n-2}$.

أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1}=\frac{1+u_n}{u_n-2}$، ثم بيّن أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها 1.

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ: $u_n=2+\frac{3}{n}$.

جـ- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

[Bac India 2009]

التمرين 73

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0=e$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\sqrt{u_n}$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=\ln(u_n)$.

1) أ- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول.

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم إستنتج u_n بدلالة n.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n=v_0+v_1+v_2+\ldots+v_n$ و $P_n=u_0\times u_1\times u_2\times\ldots\times u_n$

أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $P_n=e^{S_n}$.

ب- أكتب S_n بدلالة n، ثم إستنتج P_n بدلالة n.

جـ- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$.

[Bac Amérique du sud 2019]

التمرين 74

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0=5$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3-\frac{10}{u_n+4}$.

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 1$.

ب- بيَن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$. استنتج إتجاه تغيَر المتتالية (u_n) .

جـ- برر تقارب المتتالية (u_n) .

2) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}$.

أ- بيَن أن (v_n) متتالية هندسية، يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب- أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

[Bac Antilles-Guyane 2018]

التمرين 75

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=e\times\sqrt{u_n}$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leq u_n \leq e^2$.

2) بيَن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة.

3) نضع: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=\ln(u_n)-2$.

أ- بيَن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب- إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=-\frac{1}{2^{n-1}}$.

جـ- أكتب عبارة u_n بدلالة n ، ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

[Bac Métropole-La Réunion 2016]

التمرين 76

I) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-\ln(x^2+1)$.

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x)=x$.

2) أ- بيَن أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

ب- بيَن أنه إذا كان $x\in[0;1]$ فإن $f(x)\in[0;1]$.

II) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=u_n-\ln(u_n^2+1)$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\in[0;1]$.

2) أدرس إتجاه تغيَر المتتالية (u_n) .

3) برر تقارب المتتالية (u_n) ، ثم أحسب نهايتها.

التمرين 77 [Bac Métropole 2013]

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1) أحسب: u_1 ، u_2 و u_3 .

2) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq n+3$.

ب- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$. استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - n$

أ- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$.

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4) أ- أحسب بدلالة n المجموعين S_n و T_n بحيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ و $T_n = \frac{S_n}{n^2}$.

ب- استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$.

التمرين 78 [Bac Liban 2013]

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n}$.

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 < u_n < 3$.

ب- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{(3-u_n)^2}{6-u_n}$. استنتج أن (u_n) متزايدة تماما.

جـ- برّر تقارب المتتالية (u_n) .

2) المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$.

أ- بيّن أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $-\frac{1}{3}$ ، ثم أحسب حدها الأول.

ب- أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين 79 [Bac Antilles-Guyane 2012]

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_1 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right)u_n$.

1) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > 0$.

ب- بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة .

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n = \frac{u_n}{n}$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_1.

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن: $u_n = \frac{n}{2^n}$.

3) لتكن الدالة f المعرّفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x) = \ln x - x\ln 2$.

أ- عيّن نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ب- استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين 80 [Bac Pondichéry 2010]

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+n-2$.

1) أحسب u_1 ، u_2 و u_3 .

2) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 4$: $u_n\geq 0$.

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 5$: $u_n\geq n-3$.

جـ- ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

3) نضع : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=-2u_n+3n-\frac{21}{2}$.

أ- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب- إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}$.

جـ- أحسب ، بدلالة n ، المجموع S_n بحيث : $S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$.

التمرين 81 [Bac Antilles-Guyane 2010]

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_{n+2}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n$ و $u_1=\frac{1}{2}$ و $u_0=-1$.

1) أحسب u_2 ، ثم استنتج أن المتتالية (u_n) لا هي حسابية و لا هي هندسية.

2) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$

بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول ، ثم أكتب عبارة v_n بدلالة n .

3) نعرف المتتالية (w_n) بـ : من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n=\frac{u_n}{v_n}$

بيّن أن المتتالية (w_n) حسابية ، ثم أكتب w_n بدلالة n .

4) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=\frac{2n-1}{2^n}$

5) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots.+u_n$.

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n=2-\frac{2n+3}{2^n}$.

التمرين 82 [Bac Antilles-Guyane 2010]

I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-x\ln x$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2) أدرس تغيّرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيّراتها .

II) نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n=\frac{e^n}{n^n}$ و $v_n=\ln(u_n)$.

أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $v_n=n-n\ln n$.

ب- إعتمادا على الجزء الأول عيّن إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثم استنتج إتجاه تغيّر المتتالية (v_n) .

جـ- بيّن أن المتتالية (u_n) محدودة .

د - بيّن أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم حدد نهايتها .

التمرين 83

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n يكون $6u_{n+1} = 5u_n + 4$.

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، يكون $u_n < 4$.

ب- بيَن أن المتتالية (u_n) متزايدة، ثم استنتج أنها متقاربة.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 4$.

أ- بيَن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{5}{6}$، يطلب تعيين حدها الأول v_0.

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم استنتج u_n بدلالة n.

جـ- أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

د- بيَن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_0 + u_1 + ... + u_n = 15\left(\frac{5}{6}\right)^n + 4n - 14$.

التمرين 84

(u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1}$.

1) أ- بيَن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 < u_n < 2$.

ب- أدرس إتجاه تغيَر المتتالية (u_n).

جـ- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

2) أ- بيَن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)$.

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $2 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

جـ- أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين 85

(u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0 = -\frac{3}{2}$ من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = (2 + u_n)^2 - 2$.

1) أ- بيَن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $-2 < u_n < -1$.

ب- أدرس إتجاه تغيَر المتتالية (u_n)، ثم استنتج أنهامتقاربة.

2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \ln(u_n + 2)$.

أ- بيَن أن (v_n) متتالية هندسية، يطلب تعيين أساسها حدها الأول.

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم استنتج u_n بدلالة n.

جـ- أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3) أ- أحسب بدلالة n كلا من المجموع S_n بحيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$

ب- إستنتج الجداء T_n بدلالة n حيث: $T_n = (u_0 + 2) \times (u_1 + 2) \times .... \times (u_n + 2)$

التمرين 86

(u_n) متتالية معرفة بحدها الأول u_0 من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\dfrac{7u_n+2}{u_n+8}$.

1) عيّن قيم u_0 التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2) نفرض أن: $u_0=0$.

أ- أحسب u_1 و u_2.

بـ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le u_n\le 1$ ، ثم أدرس أتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=\dfrac{u_n+2}{u_n-1}$.

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

بـ- عبّر عن u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

جـ- أحسب بدلالة n كلا من S_n و P_n حيث: $S_n=v_0+v_1+v_2+........+v_n$ و $P_n=v_0\times v_1\times v_2+\times.....\times v_n$.

التمرين 87

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان بـ: $u_0=1$ و $v_0=2$، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{u_n+2v_n}{3}$ و $v_{n+1}=\dfrac{u_n+4v_n}{5}$.

1) (w_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $w_n=u_n-v_n$.

أ- بيّن أن (w_n) متتالية هندسية ، يطلب تعيين أساسها حدها الأول .

بـ- أكتب عبارة w_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n$.

2) أ- عبّر عن $u_{n+1}-u_n$ و $v_{n+1}-v_n$ بدلالة w_n .

بـ- استنتج إتجاه تغير كلا من المتتاليتين (u_n) و (v_n) ، ثم بيّن أنهما متجاورتين .

3) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $t_n=3u_n+10v_n$.

أ- بيّن أن المتتالية (t_n) ثابتة ، ثم أحسب نهايتها .

بـ- استنتج النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n).

التمرين 88

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=\dfrac{3}{2}$ من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=1+\sqrt{u_n-1}$.

1) أ - بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1<u_n<2$.

بـ- أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنهامتقاربة .

2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=\ln(u_n-1)$.

أ- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{2}$، يطلب تعيين حدها الأول .

بـ- أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

جـ- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

3) أحسب بدلالة n الجداء π_n بحيث: $\pi_n=(u_0-1)\times(u_1-1)\times........\times(u_n-1)$

التمرين 89

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول : $u_0=-2$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=2u_n+3$.

I) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n+\alpha$، حيث α عدد حقيقي غير معدوم.

عيّن قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 .

II) نعتبر في كل ما يلي : $\alpha=3$.

1) أكتب v_n و u_n بدلالة n .

2) أحسب بدلالة n المجموعين S_n و T_n بحيث :

$$S_n=v_0+v_1+v_2+........+v_n \quad \text{و} \quad T_n=\frac{1}{u_0+3}+\frac{1}{u_1+3}+\frac{1}{u_2+3}+........+\frac{1}{u_n+3}$$

3) لتكن المتتالية (w_n) المعرفة بـ : من أجل كل عدد طبيعي n، $w_n=\ln(v_n)$.

4) أ- بيّن أن المتتالية (w_n) حسابية، يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .

بـ- أحسب بدلالة n الجداء P_n حيث : $P_n=v_0\times v_1\times v_2+\times.....\times v_n$.

التمرين 90

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=4$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\sqrt{5+\frac{1}{2}u_n^{\,2}}$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>\sqrt{10}$.

2) بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة.

3) (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\beta-u_n^{\,2}$، حيث β عدد حقيقي.

عيّن قيمة β التي تكون من أجلها المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

4) نضع : $\beta=10$.

أ- أكتب عبارة u_n بدلالة n، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

بـ- أحسب بدلالة n المجموع S_n بحيث : $S_n=u_0^{\,2}+u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+........+u_n^{\,2}$.

التمرين 91

(u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0=1$ من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=6-\frac{7}{u_n+2}$.

1) أ - بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1\le u_n\le 5$.

بـ- أدرس أتجاه تغيّر المتتالية (u_n) . هل هي متقاربة.

2) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\frac{u_n-5}{u_n+1}$.

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{7}$، يطلب تعيين حدّها الأول.

بـ- أكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم استنتج u_n بدلالة n.

جـ- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) أحسب بدلالة n كلا من المجموعين S_n و T_n بحيث :

$$S_n=v_0+v_1+v_2+........+v_n \quad \text{و} \quad T_n=\frac{1}{u_0+1}+\frac{1}{u_1+1}+\frac{1}{u_2+1}+........+\frac{1}{u_n+1}$$

التمرين 92

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 4$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 4}{2u_n}$.

1) أ- بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 2$.

2) بـ- أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة ، ثم استنتج أنها متقاربة .

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln\left(\frac{u_n - 2}{u_n + 2}\right)$.

أ- بيّن أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

بـ- أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

جـ- أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين 93

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{(3n+3)u_n - 8n - 12}{n} \end{cases}$.

1) بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ فإن : $u_n \leq 0$.

2) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n = \frac{4 - u_n}{n}$.

أ- بيّن أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

بـ- أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

جـ- أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين 94

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 0$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{8}\left(1 + \sqrt[3]{u_n}\right)^3$.

1) أحسب u_1 و u_2.

2) بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n < 1$.

3) أ - بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة . (إرشاد: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$)

بـ- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \sqrt[3]{u_n} - 1$.

أ- بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$.

بـ- أكتب v_n و u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

5) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \sqrt[3]{u_0} + \sqrt[3]{u_1} + \sqrt[3]{u_2} + ... + \sqrt[3]{u_n}$.

التمرين 95

I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1) أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=x$.

3) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left[1;\sqrt{3}\right]$ فإن : $f(x)\in\left[1;\sqrt{3}\right]$.

II) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=1$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

1) أ- بيّن من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\le u_n<\sqrt{3}$.

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

جـ- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم أحسب نهايتها .

2) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=\frac{(u_n)^2}{3-(u_n)^2}$

أ- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية تعيين أساسها و حدها الأول .

ب- أكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n .

جـ- أحسب من جديد $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

3) أحسب بدلالة n المجموعين S_n و S'_n حيث : $S_n=\frac{1}{v_0}+\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\ldots+\frac{1}{v_n}$ و $S'_n=\frac{1}{{u_0}^2}+\frac{1}{{u_1}^2}+\frac{1}{{u_2}^2}+\ldots+\frac{1}{{u_n}^2}$

التمرين 96

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $\begin{cases}u_1=\frac{1}{3}\\ u_{n+1}=\frac{n+3+2nu_n}{3(n+1)}\end{cases}$.

1) بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $u_n\le 1$.

2) بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة ، ثم استنتج أنها متقاربة .

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n=n(1-u_n)$.

أ- بيّن أن المتتالية (w_n) هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$.

ب- أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

جـ- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=u_1+2u_2+3u_3+\ldots.+nu_n$.

التمرين 97

(D) مستقيم مزود بمعلم $(O;\vec{i})$.

لتكن A_n متتالية النقط من المستقيم (D) ، بحيث :

- A_0 هي النقطة O .
- A_1 هي النقطة ذات الفاصلة 1 .
- من أجل كل عدد طبيعي n ، النقطة A_{n+2} هي منتصف قطعة المستقيم $[A_nA_{n+1}]$.

1) أ ـ أرسم مستقيما (D) ، ثم علم النقط A_0 ، A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 ، A_5 و A_6 . (الوحدة $10cm$)

بـ ـ من أجل كل عدد طبيعي n ، نسمي a_n فاصلة النقطة A_n .

أحسب a_2 ، a_3 ، a_4 ، a_5 و a_6 .

جـ ـ من أجل كل عدد طبيعي n ، برر المساواة : $a_{n+2}=\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n+1$.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=a_n-\dfrac{2}{3}$.

أ ـ بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=-\dfrac{1}{2}$.

بـ ـ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

التمرين 98

a عدد حقيقي موجب تماما ، (u_n) المتتالية المعرفة بـ : $\begin{cases} u_0=E(\sqrt{a})+1 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{a}{u_n}\right) \end{cases}$.

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{a}{x}\right)$.

1) أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم : $f'(x)=\dfrac{(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})}{2x^2}$.

بـ ـ استنتج إتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكل جدول تغيّراتها .

2) أ ـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\sqrt{a}<u_{n+1}<u_n\le u_0$.

بـ ـ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

3) أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-\sqrt{a}<\dfrac{1}{2}(u_n-\sqrt{a})$.

بـ ـ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n-\sqrt{a}\le\dfrac{1}{2^n}(u_0-\sqrt{a})$.

جـ ـ استنتج $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

التمرين 99

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=(1-2x)e^{2x}$.

نسمي $f^{(n)}$ المشتق من الرتبة n للدالة f .

1) أحسب : $f'(x)$ ، $f''(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$.

3) نسمي (C_n) المنحنى الممثل للدالة $f^{(n)}$ في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

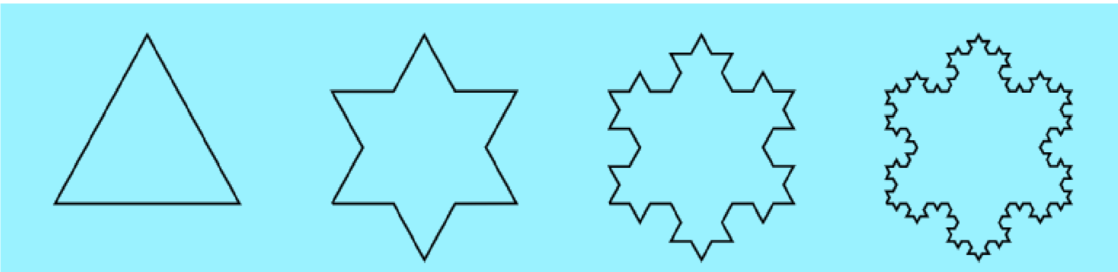
$M_n(x_n;y_n)$ النقطة من المنحنى (C_n) و التي يقبل عندها (C_n) مماسا يوازي حامل محور الفواصل .

أ- أحسب x_n و y_n بدلالة n ، ثم بيّن أن M_n تنتمي إلى منحنى يطلب تعيين معادلته .

جـ- بيّن أن (x_n) متتالية حسابية و أن (y_n) متتالية هندسية ، عيّن الأساس و الحد الأول لكل منهما و أحسب نهاية (y_n) .

التمرين 100

ننطلق من مثلث متقايس الأضلاع $(n=0)$ طول ضلعه 1 ، نقوم بحذف الثلث الأوسط لكل ضلع و نعوضه بضلعين يقايسانه فنتحصل على الشكل الثاني كما هو موضح في الشكل المقابل $(n=1)$ ، ثم نعيد نفس العملية على الشكل الثاني (نحذف الثلث الأوسط لكل ضلع و نعوضه بضلعين يقايسانه) فنتحصل على الشكل الثالث $(n=2)$.



$(n=0)$ $(n=1)$ $(n=2)$

نرمز بـ S_n لمساحة الشكل الناتج في المرحلة n ، و نرمز بـ P_n لمحيط الشكل الناتج في المرحلة n . (n عدد طبيعي)

1) أحسب : S_0 ، S_1 ، P_0 و P_1 .

2) أكتب S_{n+1} بدلالة S_n .

3) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n=\frac{3\sqrt{3}}{20}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]+\frac{\sqrt{3}}{4}$.

4) أكتب P_{n+1} بدلالة P_n .

5) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $P_n=3\left(\frac{4}{3}\right)^n$.

6) أدرس تقارب المتتاليتين (S_n) و (P_n) . علق على النتائج .