



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (4 نقاط)

I نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.- برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) ثابتة .II نعتبر الآن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.(1) أملء الجدول التالي (تعطى النتائج مقربة إلى 10^{-3}) .أذكر تخميننا يتعلق باتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .(2) أ- برهن بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن $0 < u_n \leq 2$.ب - استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة .(3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي $v_n = \ln(u_n) - \ln 2$.أ- برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.ب- أكتب v_n ثم u_n بدلالة n ثم عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.(4) أحسب، بدلالة n ، المجموع : $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \dots + \ln(u_n)$ ثم استنتج الجداء : $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$

التمرين الثاني : (4 نقاط)

كيس يحتوي على 9 كريات لا نفرق بينها عند اللمس موزعة كما يلي:

خمس كريات حمراء مرقمة بـ : 1،1،2،2،2 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ : 3، 2، -3 و كرية بيضاء تحمل الرقم -1 .

(1) نسحب عشوائيا أربع كريات و في آن واحد. أحسب احتمال الأحداث التالية:

A : " الحصول على أربع كريات تحمل نفس اللون " .

B : " الحصول على كرية بيضاء على الأكثر " .

C : " الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم " .

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس .(أ) عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله .(ب) أحسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .(ج) أحسب احتمال الحدث : " $X^2 - X > 0$ "

التمرين الثالث : (5 نقاط)

- 1/ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E) \quad 3x - 2y = 1$
- 2/ ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم.
أ/ بين ان الثنائية $(14n + 3; 21n + 4)$ حل للمعادلة (E) .
ب/ استنتج ان العددين $14n + 3$ و $21n + 4$ اوليان فيما بينهما.
- 3/ ليكن d هو القاسم المشترك الاكبر للعددين $21n + 4$ و $2n + 1$.
أ/ عين قيم d .
ب/ بين ان $n \equiv 6[13]$ يكافئ $d = 13$.
- 4/ من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ نضع $a = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$ و $b = 21n^2 - 17n - 4$.
أ/ بين ان a و b مضاعفان للعدد $(n - 1)$.
ب/ عين حسب قيم n القاسم المشترك الاكبر للعددين a و b .

التمرين الرابع : (7 نقاط)

- 1 **g** الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 1 - xe^{1-x}$
(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .
(2) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x اشارة $g(x)$.
- 2 **f** نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x + (x + 1)e^{1-x}$
وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
(1) أ / بين ان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
ب / بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ $f'(x) = g(x)$ ، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
ج / استنتج ان للمنحنى (C_f) نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيتها.
- (2) أ / بين ان المستقيم (Δ) المعروف بالمعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .
ب / ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) .
- (3) (T) المستقيم الذي معادلته $y = x + e$. بين ان (T) مماس للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيين احداثيتها.
- (4) أ / بين ان المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-0.9 < \alpha < -0.8$.
ب / أنشئ (Δ) و (T) ثم (C_f) .
ج / ناقش بيانها وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة $(x + 1)e^{1-x} = |m|$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (4 نقاط)

(1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 128$

(أ) بين أن $P(z)$ يكتب على الشكل $P(z) = (z - 8)(\alpha z^2 + \beta z + \gamma)$ ، حيث α ، β ، γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

(ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ، نعتبر النقاط A ، B ، C التي لواحقها على الترتيب هي :

$$z_C = 8 , z_B = 2 + 2\sqrt{3}i , z_A = 2 - 2\sqrt{3}i$$

(أ) أحسب طويلة وعمدة العدد المركب $z_A = 2 - 2\sqrt{3}i$ ، علم النقاط A ، B ، C .

(ب) أحسب $Z = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ ثم عين طويلة وعمدة Z ، واستنتج طبيعة المثلث ABC .

التمرين الثاني : (5 نقاط)

يحتوي صندوق على 4 كرات خضراء ثلاثة منها تحمل العدد 1 و واحدة تحمل العدد 2 وكرتين حمراوين تحملان العددين 0 و 1- . كل الكرات متماثلة لا نفرق بينها في اللمس .

1/ نسحب عشوائيا من الصندوق كرتين على التوالي بالارجاع.

أ/ ما احتمال A " الحصول على كرتين جداء رقميهما سالب تماما " .

ب/ ما احتمال B " الحصول على كرة حمراء في السحب الثاني " .

2/ نقوم باستبدال الكرات الحمراء بـ n كرة بيضاء تحمل العدد 2 حيث $n > 1$ و نسحب من الصندوق عشوائيا كرتين على التوالي بدون ارجاع.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع العددين المسجلين على الكرتين .

أ/ عين قيم المتغير العشوائي ثم عرف قانون احتماله.

ب/ بين ان الامل الرياضي $E(X) = \frac{4n+10}{n+4}$.

ج/ عين اصغر قيمة للعدد الطبيعي n حيث يكون $E(X) > \frac{39}{10}$.

التمرين الثالث : (4 نقاط)

نعتبر في المجموعة Z^2 المعادلة : $5x - 6y = 3$ (E)

(1) أ- أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3 .

ب- استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ، ثم حل في Z^2 المعادلة (E) .

ج- استنتج حلول الجملة (S) : $\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$

د- حل الجملة (S) بطريقة أخرى ليست استنتاجية.

(2) عين كل الثنائيات (x,y) حلول المعادلة (E) التي تحقق : $x^2 - y^2 \leq 56$

(3) a و b عدنان طبيعيا حيث : $a = \overline{1\alpha 0\alpha 00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b = \overline{\alpha\beta 0\alpha}$ في النظام ذو الأساس 5 .

- عين α و β حتى تكون الثنائية (a,b) حلا للمعادلة (E).

التمرين الرابع : (7 نقاط)

1. g الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{2x}{x+1} - \ln(x+1)$.

(1) بين أن : $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$ ، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

(2) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α يحقق : $3.9 < \alpha < 4$.

(4) عين اشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II. f الدالة المعرفة بـ $f(0) = 0$ ومن أجل كل عدد حقيقي x على المجال $]-1; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{(\ln(x+1))^2}{x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- بين أن : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب- بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ج- أحسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا.

(2) بين أنه من أجل كل x على المجال $]-1; +\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2} g(x)$

أ- عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ب- بين أن : $f(\alpha) = \frac{4\alpha}{(\alpha+1)^2}$ ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$.

ج) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند مبدأ المعلم.

د) أرسم المنحنى (C_f) و المماس (T) .

بالتوفيق في شهادة البكالوريا 2021



على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرفة بحدّها الأول $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{4}{3}$.

أ/ احسب كل من u_1 ، u_2 و u_3 .

ب/ أعط تخميناً حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

(2) المتتالية العددية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \alpha u_n - 4(\alpha + 1)$ ، حيث α عدد حقيقي.

أ/ جد العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ ، ثم احسب حدّها الأول.

ب/ بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

- ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) أكتب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + \frac{4}{3}v_1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 v_2 + \dots + \left(\frac{4}{3}\right)^n v_n$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 كريات متماثلة لا تُفرّق بينها عند اللمس، منها أربع كريات بيضاء مرقمة بـ: 1؛ 1؛ 2؛ 2؛ 2؛ ثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 0؛ 1؛ 2 وكريتان خضراوان مرقمتان بـ: 0؛ 1 وكريّة وسوداء مرقمة بـ: 0. نسحب عشوائياً وفي آن واحد أربع كريات من هذا الصندوق.

نعتبر الأحداث A : "الكرات المسحوبة من ألوان مختلفة"، و B : "الكرات المسحوبة تحمل لونين فقط"، و C : "الكرات المسحوبة تحمل على الأقل رقم زوجي".

(1) بيّن أنّ $P(B) = \frac{29}{105}$ ، ثم احسب $P(A)$ و $P(C)$.

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الألوان المحصل عليها.

- عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي $E(X)$.

(3) نسحب الآن عشوائياً على التوالي ودون إرجاع أربع كريات من هذا الصندوق.

نعتبر الحدث D : "الكرات المسحوبة تحمل الأرقام والتي تُشكّل العدد 2021 بهذا الترتيب"، احسب $P(D)$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

- (1) أ. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على 10.
 ب. استنتج رقم أحاد العدد 1994^{1414} .
 (2) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة بحدّها العام $u_n = 2^n$.
 أ. تحقّق من أنّ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية.
 نضع لكل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n = 5 + 2^1 + 5 + 2^2 + \dots + 5 + 2^n$.
 ب. أوجد قيم n الطبيعية التي يكون من أجلها S_n قابلا القسمة على 10.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- I- لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^x + x + 1$.
 (1) احسب نهايتي الدالة g عند $+\infty$ وعند $-\infty$.
 (2) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ثم شكّل جدول تغيّراتها.
 (3) أثبت أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,28 < \alpha < -1,27$.
 (4) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.
 II- لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$.
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (وحدة الطول 4 cm)
 (1) أثبت أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x \cdot g(x)}{(e^x + 1)^2}$.
 (2) أ- أثبت أنّ: $f(\alpha) = \alpha + 1$.
 ب- استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.
 (3) أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 ب- بيّن أنّ المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ مستقيم مُقارب مائل للمنحنى (C_f) .
 ج- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) .
 (4) أ- شكّل جدول تغيّرات الدالة f .
 ب- ارسم (D) و (C_f) .



الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

1) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، مثلث المستقيم (Δ) و (D) اللذين معادلتيهما على الترتيب: $y = x$ و $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$.

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}$.
أ- مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 (مُبرزا خطوط الانشاء دون حسابها).

ب- عيّن احداثي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D) .

ج- أعط تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $v_n = u_n + \alpha$ ، حيث α عدد حقيقي.
أ- جد العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب- نضع $\alpha = \frac{2}{3}$ ، أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج- بيّن أنّ $u_{n+1} - u_n = -5 \left(\frac{1}{4}\right)^n$ ، ثم استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

د- احسب بدلالة n المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، ثم استنتج المجموع $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 8 كريات، أربعة منها تحمل الرقم 1 وثلاثة منها تحمل الرقم 2 وكرية واحدة تحمل الرقم 5. نسحب عشوائيا من هذا الكيس كريتين في آن واحد.

1/ احسب احتمال سحب كريتين رقم كل منهما عدد أولي.

2/ احسب احتمال سحب كريتين مجموع رقميهما عدد فردي.

3/ ليكن X المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل عملية سحب العدد $|x - y|$ حيث x و y رقما الكريتين المسحوبتين.
أ) ما هي قيم المتغير العشوائي X ؟

ب) عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X ، ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر المعادلة: $(E) \dots 2002 = 4862x - 1430y$ حيث x و y عدadan صحيحان.

1) أحسب القاسم المشترك الأكبر للأعداد: 4862، 1430 و 2002.

2) أ. بيّن أنّ (E) تقبل حولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب. حل المعادلة (E) .

3) a و b عدadan طبيعيان حيث $(a; b)$ حل للمعادلة (E) ، نضع: $d = PGCD(a; b)$.
أ. عيّن القيم الممكنة لـ d .

ب. عيّن الثنائيات $(a; b)$ عندما $d = 7$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)**الجزء الأول:**

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.

(1) ادرس تغيّرات الدالة g على $]0; +\infty[$.

(2) احسب $g(1)$ ثم استنتج، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{x} - x + 2$.

نسمي (C) المنحنى المُمثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (وحدة الطول 2 cm).

(1) أ- احسب نهاية الدالة f عند 0 ، فسّر هندسيا هذه النتيجة.

ب- احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ج- بيّن أنّ المستقيم (D) الذي معادلته $y = -x + 2$ هو مستقيم مُقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$.

د- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (D) .

(2) أ- أثبت أنّه، من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

ب- استنتج اتجاه تغيّر الدالة f وشكّل جدول تغيّراتها.

(3) أ- عيّن إحداثيي النقطة A من (C) التي يكون المماس عندها مُوازيا للمستقيم (D) .

ب- اكتب معادلة للمستقيم (T) ، مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة e . (تذكّر أنّ e هو العدد الذي

يُحقق $\ln e = 1$)

(4) أثبت أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]0; 1[$.

(5) ارسم المستقيمين (D) ، (T) والمنحنى (C) .

انتهى الموضوع الثاني

التصحيح المفصل للبكالوريا التجريبية/ مادة الرياضيات/ ثالثة تقني رياضي 2021

دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ لدينا:

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{(n+1)-1}\right) - \left(\frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)$$

$$= \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{16}{3} + \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} - 1\right)$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{4}{3} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n > 0$$

إذن: (u_n) متزايدة تماماً.

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

لدينا: $u_n = \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

وبما: $0 < \frac{3}{4} < 1$ فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 0$

ومنه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{16}{3}$

(3) كتابة بدالة n المجموع S_n حيث،

لدينا: $S_n = v_0 + \frac{4}{3}v_1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 v_2 + \dots + \left(\frac{4}{3}\right)^n v_n$

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$:

لدينا: $S_n = v_0 + \frac{4}{3}v_1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 v_2 + \dots + \left(\frac{4}{3}\right)^n v_n$

$$= \left(\frac{4}{3}\right)^0 v_0 + \left(\frac{4}{3}\right)^1 v_1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 v_2 + \dots + \left(\frac{4}{3}\right)^n v_n$$

$$= \left(\frac{4}{3}\right)^0 \times -4 \left(\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{4}{3}\right)^1 \times -4 \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times -4 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{3}\right)^n \times -4 \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$= -4(1^0 + 1^1 + 1^2 + \dots + 1^n)$$

$$= -4[1(n - 0 + 1)]$$

$$= -4n - 4$$

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-4n - 4) = +\infty$

حل التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 كريات متماثلة لا تُفرق بينها عند اللمس، منها أربع كريات بيضاء مرقمة بـ: 1؛ 1؛ 2؛ 2 وثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 0؛ 1؛ 2 وكرتان خضراوان مرقمتان بـ: 0؛ 1 وكرية وسوداء مرقمة بـ: 0. عدد الحالات الممكنة لسحب أربع كريات في آن واحد من هذا

الصندوق هو: $C_{10}^4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = 210$

نعتبر الأحداث A : "الكرات المسحوبة من ألوان مختلفة"، و B : "الكرات المسحوبة تحمل لونين فقط"، و C : "الكرات المسحوبة تحمل على الأقل رقم زوجي".

(1) تبيان أن $P(B) = \frac{29}{105}$ ، ثم حساب $P(A)$ و $P(C)$:

لدينا:

حل الموضوع الأول

حل التمرين الأول: (05 نقاط)

لدينا: $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{4}{3} \end{cases}$

(1) حساب كل من u_1 ، u_2 و u_3 :

لدينا: $u_1 = \frac{3}{4}u_0 + \frac{4}{3} = \frac{3}{4}(4) + \frac{4}{3} = \frac{9+4}{3} = \frac{13}{3}$

و $u_2 = \frac{3}{4}u_1 + \frac{4}{3} = \frac{3}{4}\left(\frac{13}{3}\right) + \frac{4}{3} = \frac{13}{4} + \frac{4}{3} = \frac{39+16}{12} = \frac{55}{12}$

و $u_3 = \frac{3}{4}u_2 + \frac{4}{3} = \frac{3}{4}\left(\frac{55}{12}\right) + \frac{4}{3} = \frac{55}{16} + \frac{4}{3} = \frac{165+64}{48} = \frac{229}{48}$

ب/ إعطاء تخميننا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

نلاحظ أن: $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ ، فتخميني حول اتجاه

تغير المتتالية (u_n) فهي متزايدة تماماً.

(2) المتتالية العددية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n

ب: $v_n = \alpha u_n - 4(\alpha + 1)$ ، حيث α عدد حقيقي.

أ/ إيجاد العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية

أساسها $\frac{3}{4}$ ، ثم حساب حدّها الأول:

(v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ ، معناه: $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$

$\alpha u_{n+1} - 4(\alpha + 1) = \frac{3}{4}v_n$ ، تكافئ: $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$

ومنه: $\alpha \left(\frac{3}{4}u_n + \frac{4}{3}\right) - 4(\alpha + 1) = \frac{3}{4}(\alpha u_n - 4(\alpha + 1))$

وعليه: $\frac{3}{4}\alpha u_n + \frac{4}{3}\alpha - 4\alpha - 4 = \frac{3}{4}\alpha u_n - 3\alpha - 3$

ومنه: $\frac{4}{3}\alpha - 4\alpha - 4 = -3\alpha - 3$

وعليه: $4\alpha - 12\alpha - 12 = -9\alpha - 9$

ويكون: $-8\alpha + 9\alpha = 12 - 9$

وبالتالي: $\alpha = 3$ ، (بالتعويض نجد: $v_n = 3u_n - 16$)

حساب الحد الأول:

$v_n = 3u_n - 16 = 3(4) - 16 = 12 - 16 = -4$

ب/ تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$u_n = \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

لدينا: $\begin{cases} v_n = v_0 \times q^n = -4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \\ v_n = 3u_n - 16 \end{cases}$

ومنه: $u_n = \frac{v_n + 16}{3}$

$= \frac{v_n}{3} + \frac{16}{3}$

$= \frac{16}{3} + \frac{-4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n}{3}$

$= \frac{16}{3} - \frac{3^{-1}}{4^{-1}} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$= \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$= \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

نعتبر الحدث D : "الكريات المسحوبة تحمل الأرقام والتي تُشكل العدد 2021 بهذا الترتيب"،

حساب $P(D)$:

$$P(D) = \frac{4 \times 3 \times 3 \times 2}{5040} = \frac{72}{5040} = \frac{1}{70}$$

حل التمرين الثالث: (04 نقاط)

1. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد

2^n على 10:

$$2^0 \equiv 1[10]$$

$$2^1 \equiv 2[10]$$

$$2^2 \equiv 4[10]$$

$$2^3 \equiv 8[10]$$

$$2^4 \equiv 6[10]$$

$$2^5 \equiv 2[10]$$

ومنه: بواقي قسمة 2^n على 10 تُشكل متتالية دورية، دورها 5 وبالتالي:

$n =$	$5k$	$5k + 1$	$5k + 2$	$5k + 3$	$k \in \mathbb{N}^*$
$2^n \equiv$	2	4	8	6	[10]

ب. استنتاج رقم أحاد العدد 1994^{1414} :

$$1994 \equiv 2^2[10] \text{ أي: } 1994 \equiv 4[10]$$

$$1994^{1414} \equiv 2^{2828}[10] \text{ ومنه:}$$

$$\text{وبمأن: } 2828 = 5(565) + 3 \text{، فإن:}$$

$$1994^{1414} \equiv 6[10]$$

إذن: رقم أحاد العدد 1994^{1414} هو 6.

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ المتتالية المعرفة بحدّها العام } u_n = 2^n$$

أ. التحقق من أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية:

$$\text{لدينا: } u_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2u_n$$

إذن: (u_n) متتالية هندسية.

ب. لدينا: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$S_n = 5 + 2^1 + 5 + 2^2 + \dots + 5 + 2^n$$

إيجاد قيم n الطبيعية التي يكون من أجلها S_n قابلاً للقسمة

على 10:

أولاً نكتب S_n بدلالة n :

$$S_n = (5 + 2^1) + (5 + 2^2) + \dots + (5 + 2^n)$$

$$= 5(n - 1 + 1) + (u_1 + u_2 + \dots + u_n)$$

$$= 5n + u_1 \left(\frac{1 - 2^{n-1+1}}{1-2} \right)$$

$$= 5n + 2 \left(\frac{1 - 2^n}{-1} \right)$$

$$= 5n + 2(2^n - 1)$$

$$S_n \equiv 0[10] \text{، معناه: } 10 \mid S_n$$

$$5n + 2(2^n - 1) \equiv 0[10] \text{ أي:}$$

$n =$	$5k$	$5k + 1$	$5k + 2$	$5k + 3$	$k \in \mathbb{N}^*$
$2^n \equiv$	2	4	8	6	[10]
$5n \equiv$	5	0	5	0	[10]
$S_n \equiv$	7	6	9	0	[10]

إذن: $[n = 5k + 3]$ ، (حيث $k \in \mathbb{N}^*$)

$$P(B) = \frac{C_4^1 \times C_3^3 + C_4^2 \times C_3^2 + C_4^3 \times C_3^1 + C_4^4 \times C_3^0}{C_{10}^4} = \frac{4 \times 1 + 6 \times 3 + 4 \times 3 + 1 \times 1}{210} = \frac{58}{210} = \frac{29}{105}$$

حساب $P(A)$ و $P(C)$:

$$P(A) = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{C_{10}^4} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{210} = \frac{24}{210} = \frac{4}{35}$$

$$P(C) = \frac{C_6^1 \times C_4^3 + C_6^2 \times C_4^2 + C_6^3 \times C_4^1 + C_6^4}{C_{10}^4} = \frac{6 \times 4 + 15 \times 6 + 20 \times 4 + 15}{210} = \frac{205}{210} = \frac{201}{210} = \frac{41}{57}$$

(2) لدينا: X المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الألوان المحصل عليها.

تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X وحساب أمّله

الرياضياتي $E(X)$:

قيم المتغير العشوائي X هي: 1، 2، 3، 4.

معناه: $X = 1$ "الكريات المسحوبة تحمل نفس اللون"

$$\text{ومنه: } P(X = 1) = \frac{C_4^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{210}$$

معناه: $X = 2$ "الكريات المسحوبة تحمل لونين فقط"

$$\text{ومنه: } P(X = 2) = P(B) = \frac{58}{210}$$

معناه: $X = 4$ "الكريات المسحوبة من ألوان مختلفة"

$$\text{ومنه: } P(X = 4) = P(A) = \frac{24}{210}$$

معناه: $X = 3$ "الكريات المسحوبة تحمل ثلاث ألوان مختلفة"

$$\text{ومنه: } P(X = 3) = 1 - \left(\frac{1}{210} + \frac{58}{210} + \frac{24}{210} \right) = \frac{127}{210}$$

لخص النتائج في الجدول التالي:

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{210}$	$\frac{58}{210}$	$\frac{127}{210}$	$\frac{24}{210}$

حساب الأمل الرياضي $E(X)$:

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{210} + 2 \times \frac{58}{210} + 3 \times \frac{127}{210} + 4 \times \frac{24}{210} = \frac{1 + 116 + 381 + 96}{210} = \frac{594}{210} = \frac{99}{35}$$

(3) عدد الحالات الممكنة لسحب أربع كريات على التوالي ودون إرجاع من هذا الصندوق هو:

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 5040$$

حل التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^x + x + 1$.

(1) حساب نهايتي الدالة g عند $+\infty$ وعند $-\infty$:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ ومنه: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها:

g معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا:

$$[g'(x) = e^x + 1 > 0]$$

ومنه: الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ، ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(3) إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,28 < \alpha < -1,27$:

g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-1,28; -1,27[$ (لأنها: متزايدة تماما على $\mathbb{R}$)

ولدينا: $g(-1,28) \simeq -0,56$ ، $g(-1,27) \simeq +0,01$ ، أي: $g(-1,28) \times g(-1,27) < 0$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,28 < \alpha < -1,27$.

(4) استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

بما أن: g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $g(\alpha) = 0$ ، فإن:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

II- دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (وحدة الطول 4 cm)

(1) إثبات أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = \frac{e^x \cdot g(x)}{(e^x + 1)^2}$

f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(xe^x)'(e^x + 1) - (e^x + 1)'(xe^x)}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{(1 \times e^x + e^x \times x)(e^x + 1) - e^x(xe^x)}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x(x+1)(e^x + 1) - e^x(xe^x)}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x(xe^x + x + e^x + 1 - xe^x)}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

(2) أ- إثبات أن $f(\alpha) = \alpha + 1$

لدينا: من السؤال (3-I)، $g(\alpha) = 0$

أي: $e^\alpha + \alpha + 1 = 0$ ومنه: $e^\alpha = -\alpha - 1$ وبالتعويض نجد:

$$f(\alpha) = \frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha + 1} = \frac{\alpha(-\alpha - 1)}{-\alpha - 1 + 1} = \frac{-\alpha(\alpha + 1)}{-\alpha} = \alpha + 1$$

ب- استنتاج حصر العدد $f(\alpha)$:

لدينا: $-1,28 < \alpha < -1,27$

ومنه: $-0,28 < \alpha + 1 < -0,27$

إذن: $-0,28 < f(\alpha) < -0,27$

(3) أ- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ ومنه: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 1) = 1$

حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

لدينا: $f(x) = \frac{x e^x}{e^x + 1} = \frac{x e^x}{e^x(1 + \frac{1}{e^x})} = \frac{x}{1 + \frac{1}{e^x}}$

نعلم أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ وبالتالي: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{1 + \frac{1}{e^x}} \right) = +\infty$ نستنتج أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x} \right) = 1$

إذن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ب- تبيان أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ مستقيم

مُقارب مائل للمنحنى (C_f):

لدينا: $f(x) - x = \frac{-x}{e^x + 1} = \frac{-x}{x(\frac{e^x + 1}{x})} = \frac{-1}{\frac{e^x + 1}{x}}$

وبما أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ فإن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{\frac{e^x + 1}{x}} \right) = 0$$

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x}{e^x + 1} \right) = +\infty$

نستنتج أن: المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ مستقيم مُقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ج- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D):

ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$.

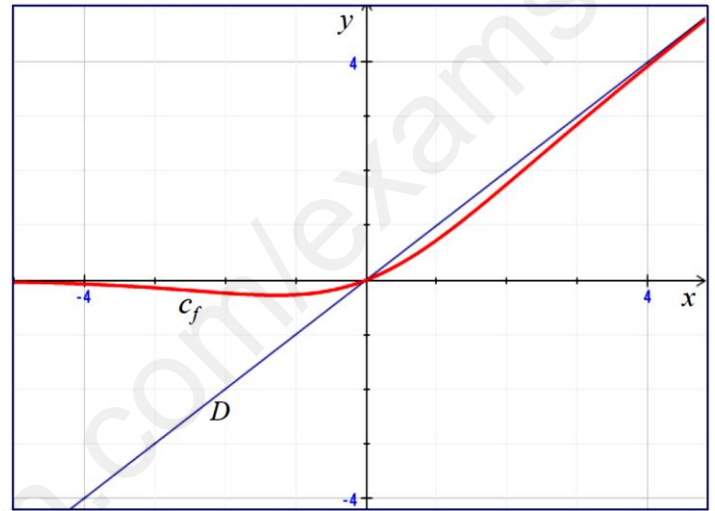
لدينا: $f(x) - x = \frac{-x}{e^x + 1}$ ومنه: إشارة الفرق $f(x) - x$ من إشارة $(-x)$ على $\mathbb{R}$ ، وعليه:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x$	+	0	-
$f(x) - x$	+	0	-
الوضع النسبي	(C_f) يقع فوق (D)	(C_f) يقطع (D)	(C_f) يقع تحت (D)

4أ- تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\alpha + 1$	$+\infty$

ب- رسم (D) و (C_f) :

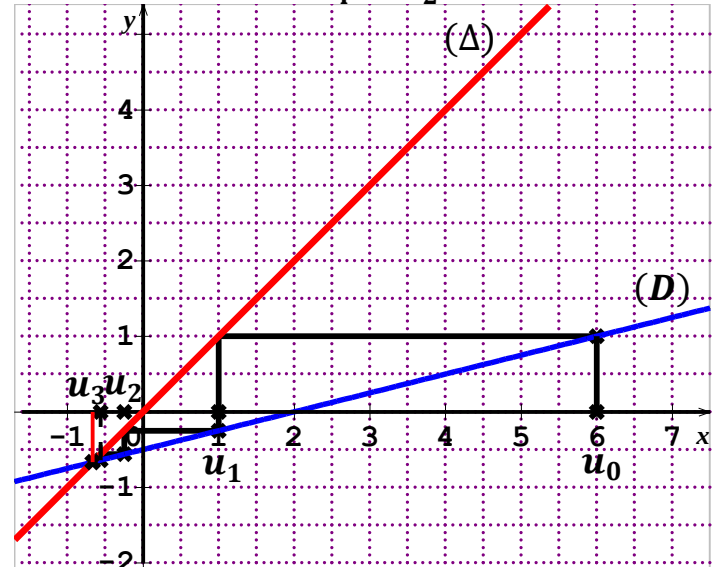


حل الموضوع الثاني

حل التمرين الأول: (05 نقاط)

1) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، تمثيل المستقيم (Δ) و (D) اللذين معادلتيهما

$$y = x \text{ و } y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$$



$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2} \end{cases} \text{ لدينا:}$$

أ- تمثيل على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 (مُبرزا خطوط الانشاء دون حسابها):

ب- تعيين احداثي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D) :

$$\text{نحل المعادلة } 4x = x - 2 \text{ ومنه: } x = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$$

$$\text{وعليه: } x = -\frac{2}{3}$$

إذن: (Δ) و (D) يتقاطعان في نقطة إحداثيها $(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3})$.

ج- إعطاء تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها:

نلاحظ أن: $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$ ، فتخميني حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها فهي متناقصة تماما وتتقارب نحو العدد $-\frac{2}{3}$.

(2) لدينا: (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n

بالعلاقة $v_n = u_n + \alpha$ ، حيث α عدد حقيقي.

أ- إيجاد العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

$$\text{لدينا: } v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha$$

$$= \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2} + \alpha$$

$$= \frac{1}{4}(v_n - \alpha) - \frac{1}{2} + \alpha$$

$$= \frac{1}{4}v_n - \frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{2} + \alpha$$

تكون (v_n) متتالية هندسية،

$$-\frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{2} + \alpha = 0 \text{ إذا وفقط إذا كان:}$$

$$\text{ومنه: } -\alpha - 2 + 4\alpha = 0$$

$$\text{وعليه: } 3\alpha = 2$$

$$\text{وبالتالي: } \alpha = \frac{2}{3} \text{ (بالتعويض نجد: } v_n = u_n + \frac{2}{3})$$

إذن: في حالة $\alpha = \frac{2}{3}$ ، تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$

$$\text{وحدها الأول } v_0 = u_0 + \frac{2}{3} = 6 + \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$$

ب- نضع $\alpha = \frac{2}{3}$ كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

$$\text{لدينا: } v_n = v_0 \times q^n = \frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\text{ومنه: } u_n = v_n - \frac{2}{3} = \frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{2}{3}$$

ج- تبين أن $u_{n+1} - u_n = -5 \left(\frac{1}{4}\right)^n$ ثم استنتاج اتجاه

تغير المتتالية (u_n) وحساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\text{لدينا: } u_{n+1} - u_n = \left[\frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - \frac{2}{3} \right] - \left[\frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{2}{3} \right]$$

$$= \frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \left(\frac{1}{4}\right) - \frac{2}{3} - \frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{1}{4} - 1\right)$$

$$= \frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$= -5 \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$\text{بما أن: } u_{n+1} - u_n = -5 \left(\frac{1}{4}\right)^n < 0$$

فإن: (u_n) متناقصة تماماً.

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$u_n = \frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{2}{3} \quad \text{لدينا:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \quad \text{فإن: } -1 < \frac{1}{4} < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{2}{3} \quad \text{ومنه:}$$

د-حساب بدلالة n المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$
لدينا:

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 + \dots + v_n \\ &= v_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) \\ &= \frac{20}{3} \left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} \right) \\ &= \frac{20}{3} \times \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right) \\ &= \frac{80}{9} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right) \end{aligned}$$

استنتاج المجموع $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$\begin{aligned} S'_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ &= \left(v_0 - \frac{2}{3}\right) + \left(v_1 - \frac{2}{3}\right) + \dots + \left(v_n - \frac{2}{3}\right) \\ &= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) - \frac{2}{3}(n - 0 + 1) \\ &= S_n - \frac{2}{3}(n + 1) \\ &= \frac{80}{9} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right) - \frac{2}{3}(n + 1) \end{aligned}$$

حل التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 8 كريات، أربعة منها تحمل الرقم 1 وثلاثة منها تحمل الرقم 2 وكرية واحدة تحمل الرقم 5.
عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين في آن واحد من هذا

$$\text{الكيس هو: } C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28$$

1/ حساب احتمال سحب كرتين رقم كل منهما عدد أولي:

ليكن الحدث A: "سحب كرتين رقم كل منهما عدد أولي"

$$\text{ومنه: } P(A) = \frac{C_4^2}{C_8^2} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$

2/ حساب احتمال سحب كرتين مجموع رقميهما عدد فردي:

ليكن الحدث B: "سحب كرتين مجموع رقميهما عدد فردي"

$$\text{ومنه: } P(B) = \frac{C_3^1 \times C_5^1}{C_8^2} = \frac{15}{28}$$

3/ لدينا: X المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل عملية سحب العدد $|x - y|$ حيث x و y رقما الكرتين المسحوبتين.

(أ) قيم المتغير العشوائي X هي: 0، 1، 3، و 4.

(ب) تعريف قانون احتمال المتغير العشوائي X ، ثم حساب أمله الرياضي $E(X)$:

• $X = 0$ معناه: "سحب كرتين تحملان نفس الرقم" (الكرتين تحملان الرقم 1 أو تحملان الرقم 2)

$$P(X = 0) = \frac{C_4^2 + C_3^2}{C_8^2} = \frac{6+3}{28} = \frac{9}{28} \quad \text{ومنه:}$$

$X = 1$ معناه: "سحب كرتين إحداهما تحمل الرقم 1 والأخرى تحمل الرقم 2"

$$P(X = 1) = \frac{C_4^1 \times C_3^1}{C_8^2} = \frac{4 \times 3}{28} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7} \quad \text{ومنه:}$$

$X = 3$ معناه: "سحب كرتين إحداهما تحمل الرقم 2 والأخرى تحمل الرقم 5"

$$P(X = 3) = \frac{C_3^1 \times C_1^1}{C_8^2} = \frac{3 \times 1}{28} = \frac{3}{28} \quad \text{ومنه:}$$

$X = 4$ معناه: "سحب كرتين إحداهما تحمل الرقم 1 والأخرى تحمل الرقم 5"

$$P(X = 4) = \frac{C_4^1 \times C_1^1}{C_8^2} = \frac{4 \times 1}{28} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7} \quad \text{ومنه:}$$

نُلخص النتائج في الجدول التالي:

x_i	0	1	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{4}{28}$

حساب الأمل الرياضي $E(X)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \frac{9}{28} + 1 \times \frac{12}{28} + 3 \times \frac{3}{28} + 4 \times \frac{4}{28} \\ &= \frac{0+12+9+16}{28} \\ &= \frac{37}{28} \end{aligned}$$

حل التمرين الثالث: (04 نقاط)

لدينا المعادلة: $4862x - 1430y = 2002 \dots (E)$
حيث x و y عدadan صحيحان.

1) حساب القاسم المشترك الأكبر لأعداد 4862، 1430 و 2002:

$$\begin{cases} 4862 = 2 \times 11 \times 13 \times 17 \\ 1430 = 2 \times 5 \times 11 \times 13 \\ 2002 = 2 \times 7 \times 11 \times 13 \end{cases} \quad \text{لدينا: ومنه:}$$

$$PGCD(4862; 1430; 2002) = 2 \times 11 \times 13 = 286$$

2) أ. تبين أن (E) تقبل حلاً في $\mathbb{Z}^2$:

$$\text{• } (E) \text{ تكافئ: } 17x - 5y = 7$$

• بمأن: 17 أولي مع 5،

فإنه: توجد ثنائية $(x; y)$ من $\mathbb{Z}^2$ تحقق $17x - 5y = 1$ ، وبضرب الطرفين في 7، نجد:

$$17X - 5Y = 7 \quad (\text{حيث } X = 7x \text{ و } Y = 7y)$$

إذن: (E) تقبل حلاً في $\mathbb{Z}^2$.

ب. حل المعادلة (E) :

إيجاد حل خاص لـ (E) :

نلاحظ أن: $7 = 17 \times \mathbf{1} - 5 \times \mathbf{2}$ ، إذن: الثنائية $(1; 2)$

حل خاص لـ (E) .

حل المعادلة (E) :

$$\begin{cases} 17x - 5y = 7 & \dots (1) \\ 17(\mathbf{1}) - 5(\mathbf{2}) = 7 & \dots (2) \end{cases} \quad \text{لدينا:}$$

بطرح (2) من (1) نجد: $17(x - 1) - 5(y - 2) = 0$

$$17(x - 1) = 5(y - 2) \quad \text{وعليه:}$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} - x + 2$$

(C) المنحنى المُمثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (وحدة الطول 2 cm).
1أ- حساب نهاية الدالة f عند 0، وتفسير هندسيا النتيجة:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{ولدينا:} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+ \end{cases}$$

وتفسيرها الهندسي هو: المنحنى (C) يقبل محور الترتيب كمُقارب له.

ب- حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{ولدينا:} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 2) = -\infty \end{cases}$$

ج- تبيان أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = -x + 2$ هو مستقيم مُقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x + 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{ولدينا:}$$

نستنتج أن: المستقيم (D) الذي معادلته $y = -x + 2$ مستقيم مُقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$.

د- دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (D):

ندرس إشارة الفرق $f(x) - (-x + 2)$.

$$\text{ولدينا:} \quad f(x) - (-x + 2) = \frac{\ln x}{x} \quad \text{ولدينا: إشارة الفرق من إشارة } \ln x \text{ على }]0; +\infty[\text{، وعليه:}$$

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+
$f(x) - (-x + 2)$	-	0	+
الوضع النسبي	(C) يقع تحت	(C _f) يقطع (D)	(C) يقع فوق (D)

2أ- إثبات أنه، من أجل كل x من $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

f معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ، ولدينا:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} - 1 = \frac{1 - \ln x}{x^2} - 1 = \frac{1 - \ln x - x^2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

على المجال $]0; +\infty[$ ، $x^2 > 0$ ، إذن إشارة $f'(x)$ هي من إشارة البسط $g(x)$.

وبالتالي: f متزايدة تماما على المجال $]0; 1[$ ومتناقصة

تماما على المجال $[1; +\infty[$ ، ويكون جدول تغيراتها

كالتالي:

ومنه: 5 يقسم $17(x - 1)$ و 5 أولي مع 17

إذن: حسب مبرهنة غوص؛ 5 يقسم $(x - 1)$

أي: يوجد عدد صحيح k ، حيث $x - 1 = 5k$

وبالتالي: $x = 5k + 1$

بالتعويض نجد: $y = 17k + 2$

إذن: $(x; y) = (5k + 1; 17k + 2)$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$)

3) a و b عددان طبيعيين حيث $(a; b)$ حل للمعادلة (E)،

نضع: $d = \text{PGCD}(a; b)$

أ. تعيين القيم الممكنة لـ d :

ولدينا: $d = \text{PGCD}(a; b)$ ، ومنه: $d|a$ و $d|b$

وعليه: $d|17a - 5b$

أي: $d|7$

وهذا يعني أن: $d \in D_7$

إذن: $d \in \{1; 7\}$

ب. تعيين الثنائيات $(a; b)$ عندما $d = 7$:

(حيث $k \in \mathbb{N}$) $(a; b) = (35k + 7; 119k + 14)$

حل التمرين الرابع: (07 نقاط)

الجزء الأول:

ولدينا: g دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = 1 - x^2 - \ln x$$

1) دراسة تغيرات الدالة g على $]0; +\infty[$:

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty \quad \text{ولدينا:} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x^2) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \quad \text{ولدينا:} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x^2) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$$

اتجاه التغير:

g معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ، ولدينا:

$$g'(x) = -2x - \frac{1}{x} = -\frac{2x^2 + 1}{x} < 0$$

ومنه: الدالة g متناقصة تماما على $]0; +\infty[$.

ج. جدول التغيرات:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$+\infty$		$-\infty$

2) حساب $g(1)$ ثم استنتاج، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$:

$$\text{ولدينا: } g(1) = 1 - (1)^2 - \ln 1 = 0$$

وبما أن: g متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$ ، فإن:

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	$+$	$\bigcirc$	$-$

الجزء الثاني:

ولدينا: f دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

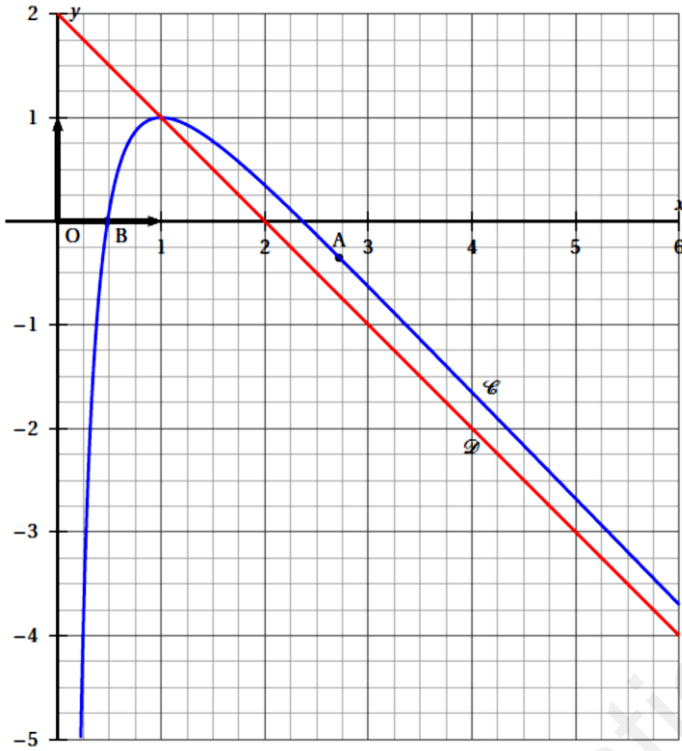
(4) إثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]0; 1[$:

f مستمرة ومنتزعة تماما على المجال $]0; 1[$

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ أي: $0 \in]-\infty; 1[$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]0; 1[$.

(5) رسم المستقيمين (D) ، (T) والمنحنى (C) :



x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	1	$-\infty$

(3) أ- تعيين إحداثيي النقطة A من (C) التي يكون المماس عندها موازيا للمستقيم (D) :

$$\text{نضع: } f'(x) = -1 \text{ نجد: } \frac{1 - \ln x - x^2}{x^2} = -1$$

$$\text{ومنه: } 1 - \ln x - x^2 = -x^2$$

$$\text{وعليه: } 1 - \ln x = 0$$

$$\text{ومنه: } \ln x = 1$$

$$\text{وبالتالي: } x = e$$

$$\text{وبمأن: } f(e) = \frac{\ln e}{e} - e + 2 = \frac{1}{e} + 2 - e$$

$$\text{فإن: } A\left(e; \frac{1}{e} + 2 - e\right)$$

ب- كتابة معادلة للمستقيم (T) ، مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة e :

$$\text{معادلة } (T) \text{ من الشكل } y = f'(e)(x - e) + f(e)$$

$$\text{ومنه: } y = -(x - e) + \frac{1}{e} + 2 - e$$

$$\text{نجد: } (T): y = -x + \frac{1}{e} + 2$$

انتهى ————— محبكم في الله أستاذ المادة ————— بالتوفيق في بكالوريا دورة جوان 2021.

تمرين محلول 12 : (Bac Métropole juin 2007)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

(c) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) احسب $f'(x)$ لكل x من $]-1; +\infty[$.

(2) من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، نضع: $g(x) = (x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)$

- تحقق أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$.

- احسب $g(0)$. استنتج اتجاه تغير الدالة f .

(3) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (D) الذي معادلته $y = x$.

(4) ارسم المستقيم (D) والمنحنى (C) .

الحل:

$$(1) \text{ حساب } f'(x): f'(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

من أجل كل x من $]-1; +\infty[$:

$$f'(x) = (x)' - \frac{[\ln(x+1)]' \times (x+1) - (x+1)' \times \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$\text{إذن: } f'(x) = \frac{(x+1)^2 + 1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

(2) التحقق أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$:

$$\text{من أجل كل } x \text{ من }]-1; +\infty[: g'(x) = 2(x+1) + \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)^2 + 1}{x+1}$$

إذا كان $x \in]-1; +\infty[$ فإن $x+1 > 0$ و $(x+1)^2 > 0$

$$\text{وبالتالي: } g'(x) > 0 : \text{ أي } \frac{2(x+1)^2 + 1}{x+1} > 0$$

إذن: الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$.

$$\bullet \text{ حساب } g(0): g(0) = (0+1)^2 - 1 + \ln(0+1) = 0$$

• استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

لدينا: الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$ و $g(0) = 0$

نستنتج أن: $[g(x) = 0]$ يكافئ $[x = 0]$

$[g(x) > 0]$ يكافئ $[x \in]0; +\infty[$

$[f(x) < 0]$ يكافئ $[x \in]-1; 0[$

$$\text{لكن: } f'(x) = \frac{(x+1)^2 + 1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

وبالتالي فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ومنه النتيجة التالية:

الدالة f متناقصة على المجال $]-1; 0[$ ومنتزعة على المجال $]0; +\infty[$

(3) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (D) :

$$\text{من أجل كل } x \text{ من }]-1; +\infty[: f(x) - x = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

إذا كان $x \in]-1; +\infty[$ فإن $x+1 > 0$ وبالتالي فإن إشارة الفرق $f(x) - x$

من إشارة $-\ln(x+1)$.

تذكير : إذا كان : f مستمرة على المجال $[a; b]$ ؛
 f رتيبة تماما على المجال $[a; b]$ ؛
 $f(a) \cdot f(b) < 0$.

فإنه ، حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[a; b]$.

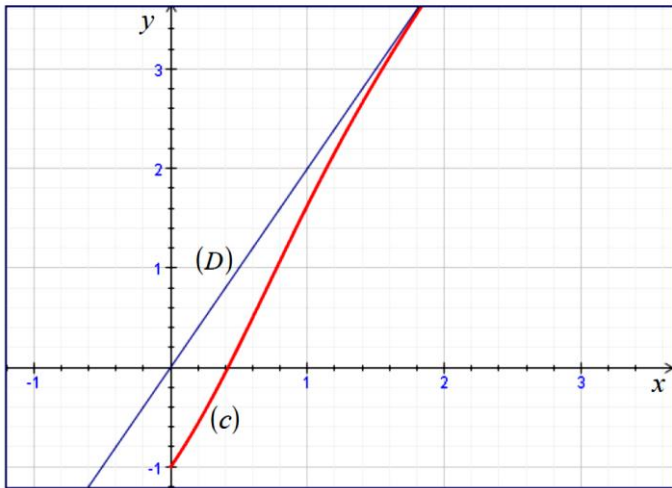
- من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أنها مستمرة ومتزايدة تماما على $[0; +\infty[$ وبالتالي فهي مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0; 1]$.
 - زيادة على ذلك ، نتحقق بسهولة أن : $f(0) \times f(1) < 0$.

من هذه الحالات الثلاثة (الاستمرارية ، الرتابة والجداء سالب) وحسب مبرهنة القيم المتوسطة نستنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α مع $0 < \alpha < 1$.

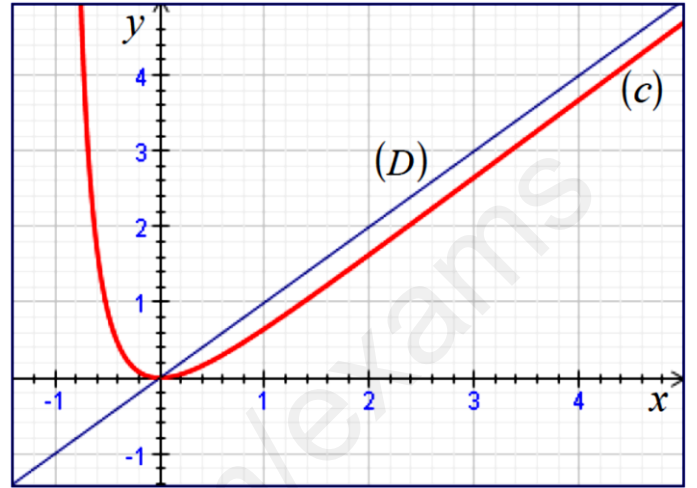
- دراسة إشارة $f(x)$ على المجال $[0; 1]$: $[f(x) = 0]$: يكافئ $[x = \alpha]$
 $[f(x) > 0]$: يكافئ $[x \in]\alpha; 1[$ و $[f(x) < 0]$: يكافئ $[x \in]0; \alpha[$

x	0	α	$+\infty$
$f(x)$		0	+

(2) رسم المستقيم (D) والمنحنى (c) :



• $[-\ln(x+1) = 0]$ يكافئ $[\ln(x+1) = 0]$ ومنه : $\ln(x+1) = \ln 1$
 وبالتالي : $(x+1) = 1$ إذن : $x = 0$
 في هذه الحالة : المستقيم (D) يقطع المنحنى (c) في النقطة $O(0; 0)$.
 • $[-\ln(x+1) > 0]$ يكافئ $[\ln(x+1) < 0]$ ومنه : $\ln(x+1) < \ln 1$
 وبالتالي : $(x+1) < 1$ إذن : $x < 0$ أي : $x \in]-1; 0[$
 في هذه الحالة : المنحنى (c) يقع فوق المستقيم (D) .
 • $[-\ln(x+1) < 0]$ يكافئ $[x \in]0; +\infty[$
 في هذه الحالة : المنحنى (c) يقع تحت المستقيم (D) .
 (4) رسم المستقيم (D) والمنحنى (c) :



تمرين محلول 13 : (بكالوريا المغرب 2008 الشعبة : رياضيات الدورة العادية)

لكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ :

$f(x) = 2x - e^{-x^2}$ ، (c) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم

المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- احسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$ ثم فسّر هذه النتيجة هندسيا .

ب- احسب $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

ج- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0 < \alpha < 1$.

د- ادرس إشارة $f(x)$ على المجال $[0; 1]$.

(2) أنشئ المنحنى (c) . (نأخذ : $\alpha \approx 0.4$)

الحل :

(1) أ- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-x^2}) = 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 0$

• التفسير الهندسي :

تذكير : إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ فإن المستقيم الذي معادلته

$y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى الممثل للدالة f عند $+\infty$.

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 0$ نستنتج أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = 2x$

مستقيم مقارب مائل للمنحنى (c) عند $+\infty$.

ب- حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ و $f'(x) = 2 + 2xe^{-x^2}$

ومن أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) > 0$ ،

• جدول تغيرات الدالة f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	-1	$+\infty$

$f(0) = -1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ج- تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0 < \alpha < 1$:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	-	○	+	○	-
$f(x)$	$+\infty$				$-\infty$

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$		○	+
$f(x) - (-x + 2)$		○	+
الوضع النسبي		(C) يقع تحت (D)	(C) يقع فوق (D)

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$		○	-

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$+\infty$	○	$-\infty$

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: 04 نقاط

I. f الدالة المعرفة على المجال $I = [0; 1]$ بـ: $f(x) = xe^{1-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. بين أن الدالة f متزايدة على المجال I .

2. بين أنه من أجل $x \in I$ فإن $f(x) \in I$.

II. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = \frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

في الوثيقة المرفقة (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f و (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y = x$.

1. باستعمال الوثيقة المرفقة مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم ثم

ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2. أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثاني: 04 نقاط

يحتوي كيس على 8 كريات لا نفرق بينها باللمس منها ثلاث كريات بيضاء مرقمة بـ: 2، 2، 4 و ثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 0، 2، 2 و كريتين خضراوين مرقمتين بـ: 0، 1.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الكيس ونعتبر الحادثتين A و B حيث A : سحب ثلاث كريات مختلفة اللون مثنى مثنى و B : سحب ثلاث كريات مجموع أرقامها يساوي 4.

1. أحسب $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B على الترتيب:

2. بين أن $P(A \cap B) = \frac{5}{56}$ ثم استنتج $P(A \cup B)$.

3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب جداء أرقام الكريات المسحوبة.

✓ عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

1. أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على العدد 9.

ب) بين أن العدد $8^{1954} + 1441^{1962} + 5 \times 2^{2021}$ مضاعف للعدد 9.

ج) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $2018^{6n+4} + 2n + 3 \equiv 0 [9]$.

2. من أجل كل عدد طبيعي n نعتبر العدد الطبيعي a_n حيث $a_n = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^n$

أ) بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$ $a_n = 2^{n+1} - 1$ ثم عين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون: $a_n \equiv 0 [9]$.

ب) بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ثم استنتج أن a_n و a_{n+1} أوليان فيما بينهما.

التمرين الرابع: 07 نقاط

I. g الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $g(x) = \frac{x}{x+1} + \ln(2) - \ln(x+1)$ و جدول تغيراتها المقابل.

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	$\ln(2)$	$-\infty$

1. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث

$$-0,7 < \alpha < -0,6 \text{ و } 3,2 < \beta < 3,4$$

2. استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II. f الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب: $f(x) = (2 + \ln 2)x - (x + 2)\ln(x + 1)$ و (C_f) تمثيلها البياني

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

ب) بين أنه من أجل $x \in]-1; +\infty[$ $f'(x) = g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

2. بين أن $f(\beta) = \beta - 2\ln(2) - 1 + \frac{1}{\beta + 1}$ ثم اعط حصر لـ $f(\beta)$.

3. أ) بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف Ω يطلب تعيين إحداثيها.

ب) أكتب معادلة للمماس (Δ) لـ (C_f) في النقطة Ω .

4. أ) أرسم كلامن (Δ) و (C_f) يعطى $\{(0;0), (7,26;0), (-0,88;0)\}$ و $(C_f) \cap (xx') = \{(0;0), (7,26;0), (-0,88;0)\}$

$$\begin{cases} \beta = 3,31 \\ f(\beta) = 1,16 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -0,63 \\ f(\alpha) = -0,33 \end{cases}$$

ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x) = |m|x$ ثلاث حلول متمايضة.

ج) وضح كيف يمكن رسم (C_h) التمثيل البياني للدالة h المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب: $h(x) = -f(x)$

انطلاقاً من (C_f) ثم أرسمه في نفس المعلم السابق.

انتهى الموضوع الأول

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) التالية: $5x - 7y = 13$ حيث x و y عدنان صحيحان.

1. بين أنه إذا كان العدد الطبيعي d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y فإن $d = 1$ أو $d = 13$.
2. أجد الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E) حيث $x_0 - y_0 = 13$.
(ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .
3. عين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق $PGCD(x; y) = 13$.
4. ليكن N عددا طبيعيا يكتب $56\beta 5$ في النظام ذي الأساس 7 ويكتب $310\alpha 1$ في النظام ذي الأساس 5 حيث α و β عدنان طبيعيان.
✓ جد العددين α و β ثم أكتب العدد N في النظام العشري.

$$(u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ: } \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \end{cases}$$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = n^2$.
2. ليكن المجموع S_n حيث $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
✓ برهن بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $u_{n+1} \equiv u_n [5]$.
4. نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = e^{u_{n+1} - u_n}$.
أ) بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها e^2 يطلب حساب حدها الأول ثم أكتب v_n بدلالة n .
ب) أحسب بدلالة n المجموع S'_n حيث $S'_n = \ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_{n-1}$ ثم استنتج مرة أخرى أن $u_n = n^2$.

1. عين العددين المركبين α و β حيث $\begin{cases} 2\alpha - \sqrt{3}\beta = 3\sqrt{3} - i \\ \alpha i - \beta = 0 \end{cases}$.
- II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقاط A , B و C التي لاحتقاتها على الترتيب: $z_A = \sqrt{3} + i$, $z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $z_C = -1 + \sqrt{3}i$.
1. أكتب كلا من z_A , z_B و z_C على الشكل الأسّي ثم عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها z_A^n حقيقي سالب تماما.
2. أكتب z_B على الشكل المثلثي والجبري ثم استنتج القيم المضبوطة لـ $\cos \frac{5\pi}{12}$ و $\sin \frac{5\pi}{12}$.

3. أ) بين أن $\frac{z_C}{z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ وحدد طبيعة المثلث OAC ثم عين لاحقة النقطة I مركز الدائرة المحيطة بالمثلث OAC .

ب) استنتج طبيعة التحويل النقطي الذي يحول النقطة A إلى النقطة C محددا عناصره المميزة.

ج) بين أن النقطة B هي صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OC}$ ثم استنتج أن الرباعي $OABC$ مربع.

4. عين طبيعة المجموعة (S) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\arg\left(\frac{z_A - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi$ مع k

عدد صحيح.

التمرين الرابع: 07 نقاط

1. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $g(x) = 2e^x - ex - e$.

1. أدرس تغيرات الدالة g .

2. أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما 1 والآخر α حيث $-0,6 < \alpha < -0,58$.

ب) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II. f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = -2e^{-x} + \frac{1}{2}ex^2 - ex$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى

المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. أ) بين أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = g(-x)$.

ب) استنتج أن الدالة f متزايدة على المجالين $]-\infty; -1]$ و $[-\alpha; +\infty[$ ومتناقصة على المجال $[-1; -\alpha]$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3. عين دون حساب $\lim_{x \rightarrow -\alpha} \frac{f(x) - f(-\alpha)}{x + \alpha}$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

4. h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - ex$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

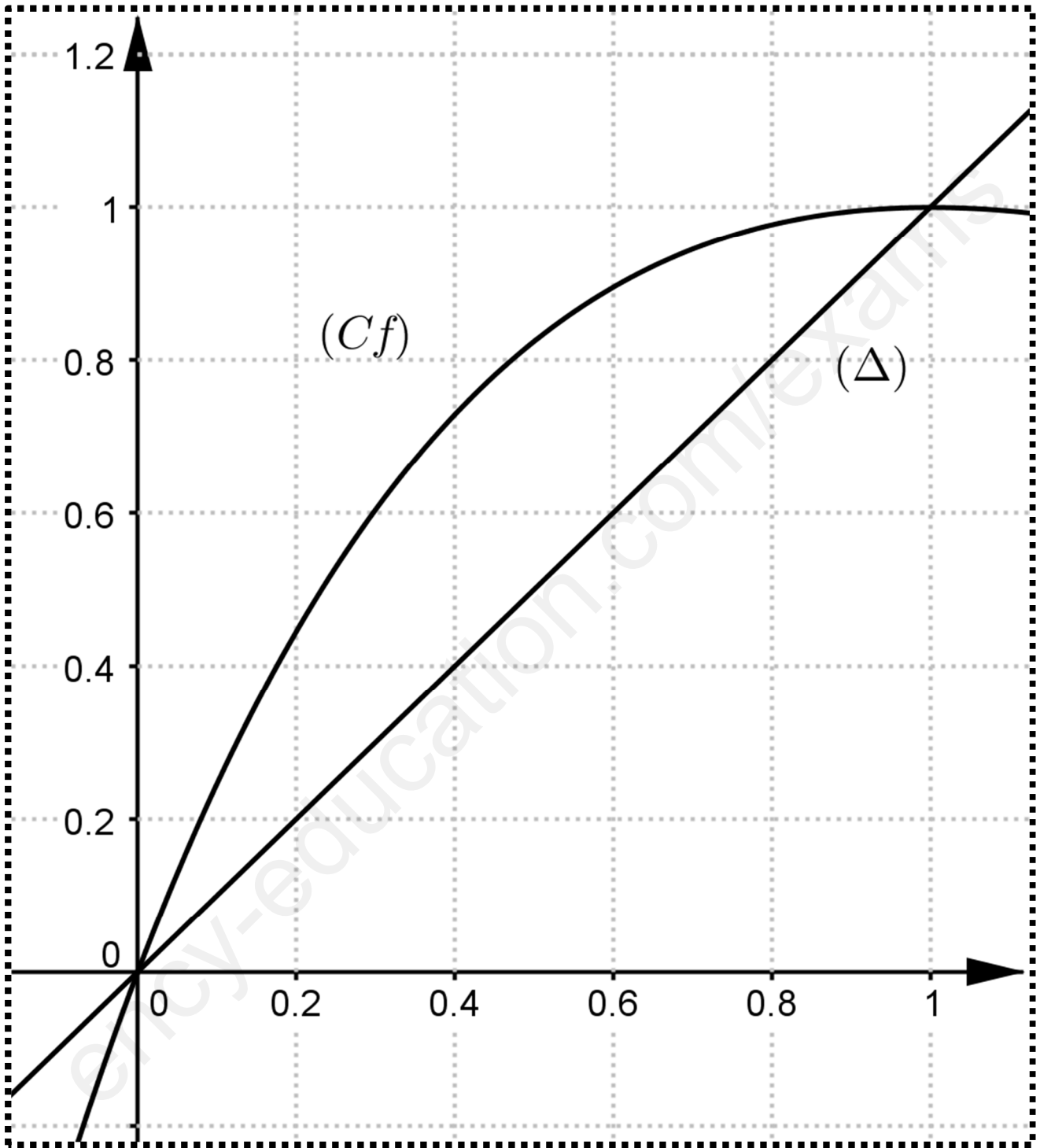
أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)]$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب) أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_h) .

5. أ) أحسب $f(0)$ ثم أرسم (C_f) . نقبل أن $\begin{cases} (C_f) \cap (xx') = \{(2, 1; 0)\} \\ f(-\alpha) = -2,24 \end{cases}$

ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x) = m$ حلين موجبين وحل سالب.

انتهى الموضوع الثاني



الدَّهْجُ لَمْ يَكُنْ لِحَبِّهَا لَمْ يَكُنْ لِحَبِّهَا لِحَبِّهَا لِحَبِّهَا
حَادَّةٌ لِحَابِئَاتٍ

المسئولة: 3 تر

الموضوع: الفصل

حل المسئلة:

(018)

(I) نبيان أن الدالة f متزايدة على I :

(1) لدينا الدالة f قابلة للتفاضل على I حيث

$$f'(x) = e^{1-x} - x e^{1-x} = (1-x) e^{1-x}$$

لدينا $f'(x) = 0$ تحاف $x = 1$ لأن $e^{1-x} \neq 0$
ومنه $f'(x) > 0$ عند $x < 1$ و $f'(x) < 0$ عند $x > 1$

وعليه عند أجل $x \in I$ فإن $f'(x) > 0$ وبالمثل، الدالة f متزايدة على I .

(018)

(2) نبيان أنه عند أجل $x \in I$ فإن $f(x) \in I$

لدينا $x \in I$ معناه $x \in [0, 1]$ ومنه $f(x) \in [f(0); f(1)]$

لأن الدالة f متزايدة على I .

$$f(1) = 1$$

$$f(0) = 0$$

$$f(x) \in I$$

ومنه عند أجل $x \in I$ فإن

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{5} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \text{(II) لدينا}$$

(1) تمثيل الحدود $u_0, u_1, u_2, \dots$ ولا على حامل محور أفقي

(018)

وهو تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(018)

نبيان أن $u_0 < u_1 < u_2 < \dots$ وعليه يبدو أن (u_n) متزايدة

لأنها على N ، ومقابلة لـ x واحد N (فائدة فائدة تقارب (u_n) و (v_n)).

0, 28

(2) البرهان بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $0 < U_n < 1$

نصرد $P(n)$ للخاتمة $0 < U_n < 1$

لدينا $P(0)$ صحيحة لأن $U_0 = \frac{1}{5}$ و

$0 < \frac{1}{5} < 1$
نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل $n \in \mathbb{N}$ أي

$0 < U_{n+1} < 1$ $P(n+1)$ صحيحة أي لنبرهن أن

لدينا $0 < U_n < 1$ ولما أن f متزايدة على I فإن $f(1) < f(U_n) < f(0)$

أي $0 < U_{n+1} < 1$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة.

وبالتالي حسب مبدأ التدرج بالتراجع نستنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < U_n < 1$$

0, 28

(3) نبيان أن (U_n) متزايدة لها نهاية

$$U_{n+1} - U_n = U_n e^{1-U_n} - U_n = U_n (e^{1-U_n} - 1)$$

لدينا من قبل $0 < U_n < 1$ ومنه $0 < -U_n < -1$ ومنه

$$1 - U_n < 1 \text{ أي } e^{1-U_n} < e$$

$$0 < e^{1-U_n} - 1 < e - 1$$

$$U_{n+1} - U_n > 0 \text{ وعليه } e^{1-U_n} - 1 > 0 \text{ وبالتالى}$$

ومن الدال على التزايدية (U_n) متزايدة لها نهاية.

0, 28

استنتاج أن (U_n) متقاربة

لدينا (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى ومنه فهي متقاربة.

0, 8

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$$

(4) حساب

لما أن (U_n) متقاربة فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ / $l \in \mathbb{R}$ حيث $f(l) = l$

$$l(e^{1-l} - 1) = 0 \text{ لدينا } f(l) = l \text{ كافى } l e^{1-l} = l \text{ ومنه } l = 0 \text{ أو } l = 1$$

$$l = 1 \text{ ومنه } e^{1-l} = e^0 = 1$$

ولما أن $0 < U_n < 1$ متزايدة لها نهاية فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$

حل المسألة الثانية:

B_2	R_0	V_0
B_2	R_2	V_2
B_4	R_2	

(1) حساب $P(A)$ و $P(B)$:

$$P(A) = \frac{C_3^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_8^3} = \frac{18}{56} = \frac{9}{28}$$

$$P(B) = \frac{C_1^1 \times C_2^2 + C_4^2 \times C_2^1}{56} = \frac{1 + 12}{56} = \frac{13}{56}$$

(2) بيان أن:

$$P(A \cap B) = \frac{5}{56}$$

$$P(A \cap B) = \frac{C_1^1 \times C_1^1 \times C_1^1 + C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{56} = \frac{5}{56}$$

(3)

$P(A \cup B)$

الاستنتاج
لدينا

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{18}{56} + \frac{13}{56} - \frac{5}{56} = \frac{26}{56} = \frac{13}{28}$$

(3) اختبار قانون المقال للصيغة X احسنها X

x_i	0	4	8	16
p_i	$\frac{9}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{28}$

$$P(X=0) = \frac{C_2^2 \times C_6^1}{56} = \frac{6+30}{56} = \frac{36}{56} = \frac{9}{14}$$

$$P(X=4) = \frac{C_1^1 \times C_4^2}{56} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}, \quad P(X=8) = \frac{C_1^1 \times C_4^1 \times C_1^1 + C_4^3}{56} = \frac{1}{7}$$

$$P(X=16) = \frac{C_4^2 \times C_1^1}{56} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

$$E(X) = \frac{12 + 32 + 48}{28} = \frac{92}{28} = \frac{23}{7}$$

حساب $E(X)$

(3)

وعليه $n \equiv 4 \pmod{2}$ أي $n = 4k$ حيث $k \in \mathbb{N}$

فيما بينها ومنه

$$a_n = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^n$$

(2) لدينا متماثل $n \in \mathbb{N}$

1/ بيان أنه متماثل $n \in \mathbb{N}$

لدينا

$$a_n = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1$$

(0,8)

لأن $n \rightarrow \infty$ متتالية a_n أساسها 2 وهرها 2^k ذو دليل 0

(0,8)

تحقق الشرط $a_n = 0 \pmod{2}$ أي $a_n \equiv 0 \pmod{2}$

لدينا $a_n \equiv 0 \pmod{2}$ معناه $a_n \equiv 0 \pmod{2}$ و $a_{n+1} \equiv 1 \pmod{2}$

وعليه $n+1 = 6k$ ومنه $n \equiv 5 \pmod{6}$ حيث $k \in \mathbb{N}$

(0,8)

(3) بيان أنه متماثل $n \in \mathbb{N}$

لدينا

$$a_{n+1} = 2^{n+1+1} - 1 = 2 \times 2^{n+1} - 2 + 1$$

$$a_{n+1} = 2(2^{n+1} - 1) + 1$$

ومنه

$$a_{n+1} = 2a_n + 1$$

وعليه

(0,8)

استنتاج أن a_n و a_{n+1} أوليان فيما بينهما

لدينا $a_{n+1} = 2a_n + 1$ أي $a_{n+1} - 2a_n = 1$ وعليه

حسب مبرهن فيرما نجد أن a_n و a_{n+1} أوليان فيما بينهما

حل لمعزني الرابع

$$D_g =]-1; +\infty[$$

$$g(x) = \frac{x}{x+1} + \ln 2 - \ln(x+1) \quad (I)$$

1/ ثبات أن لمعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلي α و β حيث

$$3,2 < \beta < 3,4 \quad \text{و} \quad -0,8 < \alpha < -0,6$$

لدينا الدالة g مستمرة وبتيعة على $] -0,8; -0,6[$ و $] 3,2; 3,4[$

$$g(3,2) \times g(3,4) < 0 \quad \text{و} \quad g(-0,8) \times g(-0,6) < 0$$

$$\begin{cases} g(3,2) > 0 \\ g(3,4) > 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} g(-0,8) < 0 \\ g(-0,6) < 0 \end{cases}$$

و عند حساب مبرهنه لفيق، متوسط لثبات ان لمعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلي α و β حيث $-0,8 < \alpha < -0,6$ و $3,2 < \beta < 3,4$

2/ استنتاج من مبرهنه لفيق، إشارة $g(x)$

x	-1	α	β	$+\infty$
$g(x)$		-	+	-

(II) لدينا $g(x) = (2 + \ln 2)x - (x+2)\ln(x+1)$

1/ ثبات أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ حساب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

0,8 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \left(\frac{(2+\ln 2)x}{x+2} - \ln(x+1) \right) = -\infty$

0,28 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x+2) \left((2+\ln 2)x - (x+2)\ln(x+1) \right) = +\infty$

0,8 ن ثبات أن له حد أجل $x \in]-1; +\infty[$: لدينا حد أجل $x \in]-1; +\infty[$ فان

$$g'(x) = 2 + \ln 2 - \left(\ln(x+1) + \frac{x+2}{x+1} \right) = 2 + \ln 2 - \ln(x+1) - \frac{x+2}{x+1}$$

$$g'(x) = \frac{2x+2-x-2}{x+1} + \ln 2 - \ln(x+1)$$

$$g'(x) = \frac{x}{x+1} + \ln 2 - \ln(x+1) = g(x) \quad \text{و منه}$$

نَسْجَلْ حَرَجَل رَآخِرَآتْ لِدَالَة ٢٠١٨

٠١٨

x	-1	2	3	4
$f(x)$	-	+	+	-
$g(x)$	∞	$f(2)$	$f(3)$	∞

(٢) بَيَانِ أَنْ $f(B) = B - 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{B+1}$

لَدُنَا $f(B) = (2 + \ln 2)B - (B+2)\ln(B+1)$
 وَلَدُنَا $g(B) = 0$ حَالَة $\ln(B+1) = \frac{B}{B+1} + \ln 2$

وَمِنْ $f(B) = 2B + B\ln 2 - (B+2)\left(\frac{B}{B+1} + \ln 2\right)$

٠١٨

$= 2B + B\ln 2 - \frac{B^2 + 2B}{B+1} - B\ln 2 - 2\ln 2$

$= 2B - \frac{B^2 + B + B}{B+1} - 2\ln 2 = 2B - B - \frac{B}{B+1} - 2\ln 2$

$= B - 2\ln 2 - \frac{B+1-1}{B+1} = B - 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{B+1}$

$f(B) = B - 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{B+1}$ وَعَلَيْهِ

$f(B)$

اَعْطَا حَرَجَل

لَدُنَا $3.2 < B < 3.4$ وَمِنْ $4.2 < B+1 < 4.4$ نَدِينَا

٠١٨

$0.81 < B - 2\ln 2 - 1 < 1.01$ وَلَدُنَا $0.23 < \frac{1}{B+1} < 0.24$

$1.04 < f(B) < 1.25$

وَعَلَيْهِ

(٣) بَيَانِ أَنْ (١) يَجِبُ تَقْلِيدُ الْخَطَافِ ٢. يَطْلُبُ بَعْضُ الْفَرَسِيَّةِ

٠١٨

لَدُنَا مِنْ أَجْلِ $x \in [-1, +\infty)$: $f'(x) = g'(x)$ وَمِنْ $f''(x) = g''(x)$

وَعَلَيْهِ انْفِرَاقًا مِنْ حَرَجَل آخِرَآتْ لِدَالَة ٢٠١٨ نَلَا حَالَةَ أَنْ $f'(x) = g'(x)$ نَلَا حَالَةَ أَنْ $f''(x) = g''(x)$

أَجْلِ $x=0$ وَآخِرَآتْ نَلَا حَالَةَ أَنْ $f'(0) = g'(0)$ لَدُنَا $(0,0)$ لَدُنَا الْخَطَافِ (١)

(٢) مُتَابَعَةُ صَادِقَةِ الْعَالَمِ (١) لَدُنَا $f'(x) = g'(x)$ حَالَةَ أَنْ $f''(x) = g''(x)$

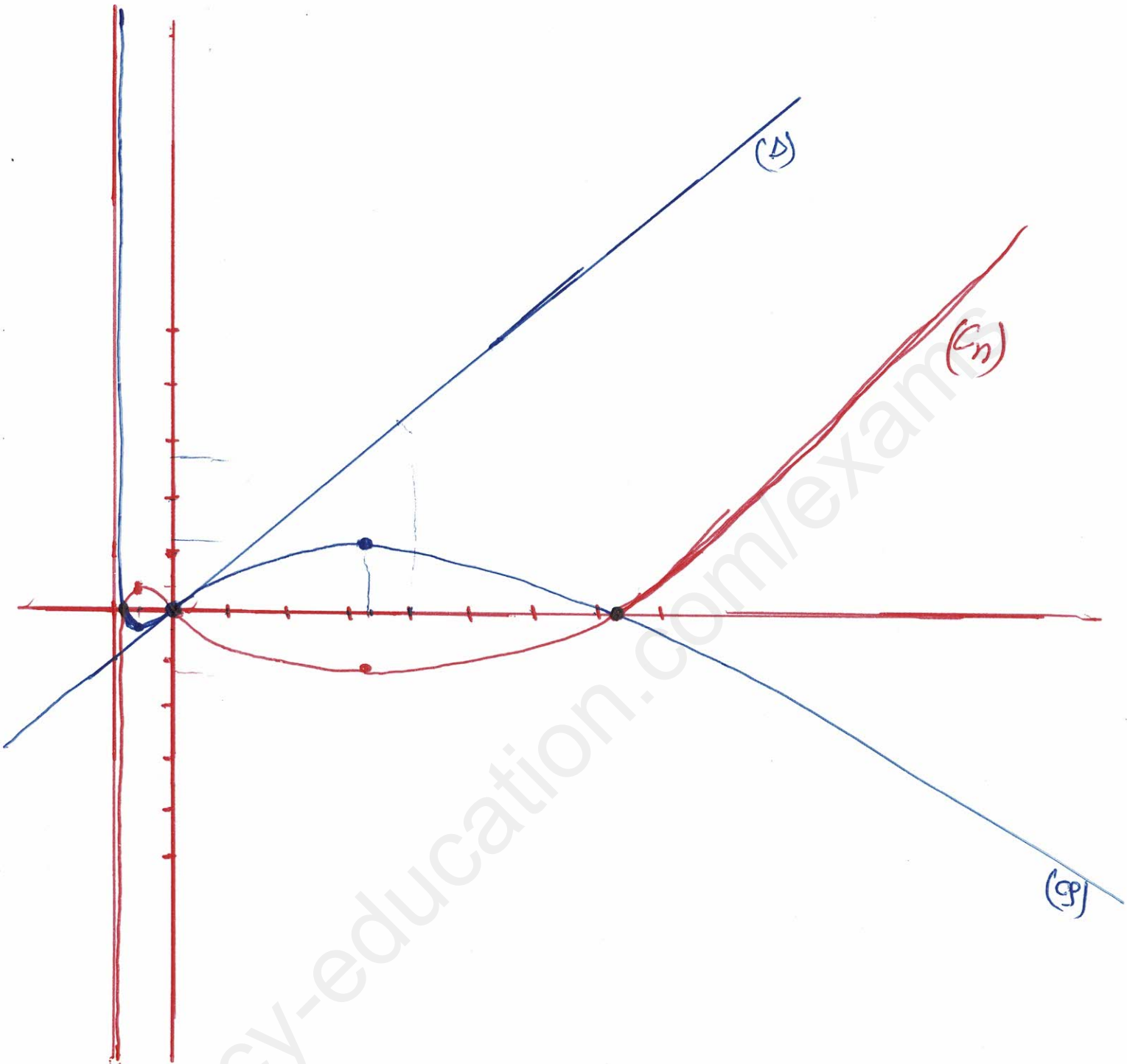
٠١٨

لَدُنَا $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ وَمِنْ $y = \ln(x)x$



078

(4) ادرس لامة (د) و (ق):



ن) اُعيين قيو لو صيط جديقي m التي تقبل عند اُجلها المعادلة
 ثلاث حلول متمايزة
 الدنا من اجل $[g(a); g(b)]$ أي $g(m) \in$
 لدنا من اجل $0 \leq |m| < \ln 2$ أي من اجل $|m| < \ln 2$ و $|m| \geq 0$
 ومنه من اجل $\ln 2 \leq m \leq -\ln 2$ فإن المعادلة $g(x) = |m|x$ تقبل
 ثلاث حلول متمايزة

018

(ج) لو تم منح كيفية، لسطر (C_n) الدخيل البيان للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ٥.٨
 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^2 - 2x + 1$ إذ طلاقة (٥) f ، لسطر f نفسه لمعلم
 السابق.
 فبان $f(x) = -f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ فإن (C_n) دغلي (٥) فالبسطة f لا حامل موحى العواهل

الموضوع الثاني :

حل أمثلة الأول :

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) التالية $5x - 7y = 13$
 (1) نبيان أنه إذا كان $\text{PGCD}(x, y) = d$ فإن $d \mid 13$ أو $d \mid 1$:

لدينا $d \mid x$ و $d \mid y$ ومنه $d \mid 5x - 7y$ أي $d \mid 13$
 ولذا فإن 13 عدد أولي فإن $d \mid 13$ أو $d \mid 1$

(2) إيجاد الحل الخاص للمعادلة (E) حيث $x_0 - y_0 = 13$

لدينا $\begin{cases} 5x_0 - 7y_0 = 13 \\ x_0 - y_0 = 13 \end{cases}$ ومنه $y_0 = x_0 - 13$ ومنه $5x_0 - 7(x_0 - 13) = 13$

ومنه $2x_0 = 78$ إذن $x_0 = 39$
 وعليه $y_0 = 39 - 13 = 26$ ومنه الحل الخاص للمعادلة (E) حيث $x_0 - y_0 = 13$ هو $(39; 26)$

(3) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) :

لدينا $\begin{cases} 5x - 7y = 13 \\ 5 \times 39 - 7 \times 26 = 13 \end{cases}$ ومنه $5(x - 39) - 7(y - 26) = 0$

أي $5(x - 39) = 7(y - 26)$ ولذا فإن $5 \mid 7(y - 26)$ أوليان فيما يليهما فإن حسب

حسب $\begin{cases} x = 39 + 7k \\ y = 26 + 5k \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} y - 26 = 5k \\ x - 39 = 7k \end{cases}$ أي $\begin{cases} 5 \mid y - 26 \\ 7 \mid x - 39 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x = 39 + 7k \\ y = 26 + 5k \end{cases}$ حيث k عدد صحيح.

ومنه حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(7k + 39; 5k + 26)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

لدينا $5x - 7y = 13$ ومنه $5x = 7y + 13$ أي $5x \equiv 13[7]$

ومنه $5x \equiv 20[7]$ أي $5x \equiv 5 \times 4[7]$ ومنه $x \equiv 4[7]$

لذا 5 و 7 أوليان فيما يليهما. ومنه $x = 4 + 7k$

ولدينا $7y = 5x - 13$ أي $7y \equiv 5 \times 4 - 13[5]$ ومنه $7y \equiv 7[5]$

أي $7y \equiv 7[5]$ ومنه $y \equiv 1[5]$ ومنه $y = 1 + 5k$

وعليه حلول المعادلة هي الثنائيات $(7k + 4; 5k + 1) \mid k \in \mathbb{Z}$

(3) احسب الشائيات (x, y) حلول المعادلة (E) التي تحقق $PGCD(x, y) = 13$ ومنه $\begin{cases} x \equiv 0 [13] \\ y \equiv 0 [13] \end{cases}$ و $\begin{cases} 13 | x \\ 13 | y \end{cases}$ و $PGCD(x, y) = 13$ كما في

$$\begin{cases} \exists k \equiv 35 [13] \\ S_k \equiv 25 [13] \end{cases} \text{ و } \begin{cases} \exists k \equiv 9 [13] \\ S_k \equiv 12 [13] \end{cases} \text{ و } \begin{cases} \exists k+4 \equiv 0 [13] \\ S_{k+1} \equiv 0 [13] \end{cases}$$

ومنه $\begin{cases} k \equiv 5 [13] \\ k \equiv 5 [13] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \exists k \equiv 7 \times 5 [13] \\ S_k \equiv 5 \times 5 [13] \end{cases}$

لكن $PGCD(5, 13) = 1$ و $PGCD(7, 13) = 1$ و $PGCD(5, 13) = 1$

$P \in \mathbb{Z}$ حيث $k = 13P + 5$ وعليه

ومنه $\begin{cases} x = 91P + 39 \\ y = 65P + 26 \end{cases}$ و $\begin{cases} x = 7(13P + 5) + 4 \\ y = 5(13P + 5) + 4 \end{cases}$

وعليه الشائيات (x, y) حلول المعادلة (E) التي تحقق $PGCD(x, y) = 13$

$P \in \mathbb{Z}$ حيث $(91P + 39, 65P + 26)$ و $N = 310 \alpha 15$ و $N = 56 \beta 5$ (4) لنفرض

احد α و β و $N = 5 \times 7^3 + 6 \times 7^2 + 7\beta + 5 = 7\beta + 2014$ لنفرض $0 \leq \alpha \leq 4$

$N = 3 \times 5^4 + 5^3 + 5\alpha + 1 = 5\alpha + 2001$ و $0 \leq \beta \leq 4$

(1) $5\alpha - 7\beta = 13$ و $5\alpha + 2001 = 7\beta + 2014$ ومنه

وعليه الخاطئة مع المعادلة (E) فإن $\begin{cases} d = 7k + 4 \\ \beta = 5k + 1 \end{cases}$ و $\begin{cases} d = x \\ \beta = y \end{cases}$

ومنه $d = 4$ و $\beta = 1$ و $0 \leq \alpha \leq 4$ و $0 \leq \beta \leq 4$

كتابة N في النظام العشري لنفرض

(0, 85) $\begin{cases} N = 2014 + 7 \times 1 = 2021 \\ N = 2001 + 5 \times 4 = 2021 \end{cases}$ و

حل تمرين الثاني :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = U_n + 2n + 1 \end{cases}$$

لدينا

(0, 1, 8)

(1) البرهان بالتراجع أنه صدق لكل $n \in \mathbb{N}$ $U_n = n^2$

نحضر د. $P(n)$ للاختام

لدينا $P(0)$ صحيحة لأن

نفرضه أن $P(n)$ صحيحة صدق لكل $n \in \mathbb{N}$ $U_n = n^2$ ولنبين أنه أن $P(n+1)$ صحيحة أي $U_{n+1} = (n+1)^2$

لدينا

$$U_{n+1} = U_n + 2n + 1$$

$$U_{n+1} = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

ولها أن $U_n = n^2$ فإن

وهذا $P(n+1)$ صحيحة لأن حسب مبدأ الـ $\square$ $U_n = n^2$ صدق لكل $n \in \mathbb{N}$

(2) لدينا

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$$

البرهان بالتراجع أنه صدق لكل $n \in \mathbb{N}$ $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

نحضر د. $P(n)$ للاختام

لدينا $P(0)$ صحيحة لأن

نفرضه أن $P(n)$ صحيحة صدق لكل $n \in \mathbb{N}$ ولنبين أنه أن $P(n+1)$ صحيحة أي $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

لدينا

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + U_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

ولها أن

فإن

$$(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

وعليه $P(n+1)$ صحيحة وبذلك صدق لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(0,8)

$$U_{n+1} \equiv U_n [5] \quad \text{أحيى في أحد الجوانب الخلفية}$$

$$\text{لدينا } U_{n+1} \equiv U_n [5] \text{ كافياً } U_{n+1} - U_n \equiv 0 [5]$$

$$2n \equiv 4 [5] \text{ و } 2n \equiv -1 [5] \text{ ومنه } 2n+1 \equiv 0 [5]$$

$$\text{ومنه } 2n \equiv 2 \times 2 [5] \text{ أي } n \equiv 2 [5] \text{ أي } n=2, 7, 12, \dots$$

$$\text{ومنه } n=5k+2 \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{لدينا } n \in \mathbb{N}$$

١٩ تبيان أن (V_n) متناقص حيث e^2 أساساً e^2 $V_{n+1} - V_n = 2n+1$

(0,78)

$$V_{n+1} e^{2n+2+1} = e^2 \times e^{2n+1} = e^2 V_n$$

وعلى (V_n) متناقص حيث e^2 أساساً e^2 $V_{n+1} - V_n = 2n+1$

$$V_{n+1} e^{2n+2} - V_n e^{2n+1} = e^{2n+1} (V_{n+1} e - V_n) = e^{2n+1} (2n+1)$$

$$= e^{2n+1} (2n+1) = e^{2n+1} (2n+1) = e^{2n+1} (2n+1)$$

$$V_n = V_0 \times q^n = e \times (e^2)^n = e^{2n+1}$$

$$S'_n = \ln V_0 + \ln V_1 + \dots + \ln V_{n-1} = S'_n$$

٢٠ حساب S'_n $\ln V_n = 2n+1$ $\ln V_n = 2n+1$ $\ln V_n = 2n+1$

(0,78)

$$S'_n = \frac{n}{2} (1 + 2(n-1) + 1) = \frac{n}{2} (2 + 2n - 2) = n^2$$

$$S'_n = \ln(V_0 \times V_1 \times \dots \times V_{n-1}) = \ln(V_0 \times V_0 \times q \times \dots \times V_0 \times q^{n-1})$$

$$= \ln(V_0^n \times q^{1+2+\dots+n-1}) = \ln V_0^n + \ln q^{1+2+\dots+n-1}$$

$$S'_n = n \ln V_0 + \frac{n-1}{2} (n) \times \ln q = n + (n-1)n = n(n-1+1) = n^2$$

$$S'_n = U_1 - U_0 + U_2 - U_1 + \dots + U_n - U_{n-1}$$

$$S'_n = U_n - U_0$$

(0,8)

$$U_n = S'_n + U_0 = n^2 + 0 = n^2$$

ومن

حل لتمرين الطالب ٤

(18)
$$\begin{cases} 2\alpha - \sqrt{3}\beta = 3\sqrt{3} - 2 & \text{--- (1)} \\ \alpha^2 - \beta = 0 & \text{--- (2)} \end{cases}$$

لوفيا حذافه $\beta 2 d 2$ ومده 1 حذافه

$$q(2 - \sqrt{3}i) = 3\sqrt{3} - i \quad \text{59} \quad 2q - \sqrt{3}q i = 3\sqrt{3} - i$$

$$a_2 \frac{3\sqrt{3} - i}{2 - \sqrt{3}i} = \frac{(3\sqrt{3} - i)(2 + \sqrt{3}i)}{\cancel{4 - 3i^2}} = \frac{6\sqrt{3} + 9i - 2i + \sqrt{3}}{\cancel{4 - 3(-1)}} = \frac{7\sqrt{3} + 7i}{\cancel{7}} = \sqrt{3} + i$$

$$B_2 (\sqrt{2} + i)^2 = -1 + \sqrt{2}i$$

$$\beta_2 = -1 + \sqrt{3}i$$

$$E_{C2} = 1 + \sqrt{3} \quad , \quad E_{B2} = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}} Z_A$$

$$q_2 \sqrt{3} + 2$$

$$E_A = \sqrt{3} + 2^c$$

(II) لنفعل

١) كتابة لاصق E_A و E_B و E_C على شكل النسبة $\frac{8}{3}$

$$Z_A = \sqrt{1 + 2} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) = 2 e^{i \frac{\pi}{6}}$$

$$E_B = \sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}} \quad E_A = 2\sqrt{2} e^{\frac{i5\pi}{12}}$$

$$Z_{C2} = 1 + \sqrt{3}i = 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2e$$

28) $\epsilon_2 = 1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

$$\text{Arg}(z_A^n) = n + 2k\pi$$

$$\frac{n\pi}{6} \leq 2\pi(1+2k) \quad \text{and} \quad n\pi \leq 2\pi(2+2k) \quad \text{and} \quad n\pi \leq 2\pi(1+2k) \quad \text{and} \quad n\pi \leq 2\pi(2+2k)$$

(2) كتابة B على الشكل التالي وطبري 6

$$\textcircled{928} E_B = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$$

$$(9.28) \quad \varepsilon_B = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \times (\sqrt{3} + i) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) (\sqrt{3} + i)$$

$$z(1+i)(\sqrt{3}+i) = \sqrt{3} + i + \sqrt{3}i - 1 = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3}+1)i$$

$$\text{Am } \frac{SN}{12}$$

$$9 \cos \frac{5\pi}{10}$$

استنباط لغوی موضوعات

ناجحة لينة، لينة لينة، لينة لينة

$$\text{59} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x-1}{x^2} = \sqrt{3} - 1$$

$$\left(2\sqrt{2} \right) \sin \frac{5\pi}{12} = \sqrt{3} + 1$$

$\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$
 $\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

5

(3) إثبات أن $\frac{Z_C}{Z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

0.28

$$\frac{Z_C}{Z_A} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6})} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

0.18

تحدد مجموعة المثلث θ_{AC}

$$\frac{Z_C - Z_0}{Z_A - Z_0} = e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ كما في } \frac{Z_C}{Z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_C = \theta_A \\ (\vec{\theta_A}; \vec{\theta_C}) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \text{ وعليه المثلث } \theta_{AC} \text{ قائم في } \theta \text{ ومتساوي الساقين.}$$

أخيرًا، لاحظ أن نقطة I مركز الدائرة المحيطة بالمثلث θ_{AC}

لأن المثلث θ_{AC} قائم في θ ومتساوي الساقين فإن I منتصف القطعة [AC]

$$\text{وعليه } Z_I = \frac{Z_A + Z_C}{2} = \frac{\sqrt{3} + i - 1 + \sqrt{3}i}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + \frac{\sqrt{3} + 1}{2}i$$

(د) استنتاج مجموعة التحويل لنقطة التي تحول C إلى A من تحديد عناصر المجموعة

0.18

$$\frac{Z_C - Z_0}{Z_A - Z_0} = e^{i\frac{\pi}{2}} (Z_A - Z_0) \text{ كما في } \frac{Z_C}{Z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ومن ثم C هو A بالدوران الذي مركزه θ وزاوية $\frac{\pi}{2}$

0.18

(ج) إثبات أن B هو A بالانعكاس الذي لمركزه θ

B هو A بالانعكاس الذي لمركزه θ معناه $\vec{\theta_A} = \vec{\theta_C}$

$$\left. \begin{array}{l} Z_{AB} = Z_B - Z_A = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i - \sqrt{3} - i = -1 + \sqrt{3}i \\ Z_{AC} = Z_C - Z_0 = Z_C = -1 + \sqrt{3}i \end{array} \right\} Z_{AB} = Z_{AC}$$

$$Z_{\theta_C} = Z_C - Z_0 = Z_C = -1 + \sqrt{3}i$$

ومن ثم B هو A بالانعكاس الذي لمركزه θ

0.28

الاستنتاج أن الرباعي θ_{ABC} مربع

$$(\vec{\theta_A}; \vec{\theta_C}) = \frac{\pi}{2} \text{ و } \theta_C = \theta_A \text{ و } \vec{\theta_A} = \vec{AB}$$

فإن الرباعي θ_{ABC} مربع

(4) أخيرًا، لاحظ أن المجموعة (S) التي تحقّق $Az\left(\frac{Z_A - Z}{Z_C - Z}\right) = \bar{\pi} + 2k\pi$

$$Az\left(\frac{Z_A - Z}{Z_C - Z}\right) = \bar{\pi} + 2k\pi \text{ معناه } (MC; MA) = \bar{\pi} + 2k\pi \text{ وعليه المجموعة (S)}$$

0.18

هي القطعة [AC] خارج النقطة A و C

(I) لنبدأ $g(x) = 2e^x - ex - e$ حيث

$$Dg \subset \mathbb{R}$$

118

(١) د. امّك أخير اتلالة

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(2 - \frac{e^x}{e^x} - \frac{e^x}{e^x} \right) = +\infty$$
$$\|g'(x)\| \leq \text{const}$$
$$g'(x) = 2e^x - e$$

لشهادت آقا
ع. خ. ع. ر.

$$e^x = \frac{e}{x} \quad \text{if } 2e^x - e \geq 0 \text{ and } g'(x) \geq 0 \text{ for } g(x) \geq 0, \text{ then } x \geq 0 \text{ and } x \leq 0 \text{ are possible.}$$
$$x_2 \ln \frac{e}{2}$$

x	$-\infty$	$\ln \frac{x}{2} = 4 \cdot \ln 2$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

وحدة، الدالة متناظرة على مجال $[1-p_2, 1-p_2]$ وحتى p_2 على مجال $[1-p_2, +\infty]$
 فنشغل بمجال آخر، الدالة g

x	$-\infty$	0	$1 - \ln 2$	1	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$				$+\infty$

$(\ln 2 - 1)e = -0.83$

$$g(1 - \ln x) = e - e(1 - \ln x) - x = (\ln(x) - 1)e$$

$g(n - \ln n)_2 \leq e(n - \ln n) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\ln(n) - 1)e$
 ١٩٤ تبين أن الحد $g(20)$ يصل حيلته أمدها (محدود) ولا يمر

$$-0.6 < q < -0.58 \quad \text{in } d$$

لرضا

① $\rightarrow g(1) = 2e - e - e = 0$

ولفيا الدالة وحسرة مؤنسية عليه، لحال ٩٨١-٩٨٠-٩٧٩-٩٧٨-٩٧٧-٩٧٦-٩٧٥-٩٧٤-٩٧٣-٩٧٢-٩٧١-٩٧٠-٩٦٩-٩٦٨-٩٦٧-٩٦٦-٩٦٥-٩٦٤-٩٦٣-٩٦٢-٩٦١-٩٦٠-٩٥٩-٩٥٨-٩٥٧-٩٥٦-٩٥٥-٩٥٤-٩٥٣-٩٥٢-٩٥١-٩٥٠-٩٤٩-٩٤٨-٩٤٧-٩٤٦-٩٤٥-٩٤٤-٩٤٣-٩٤٢-٩٤١-٩٤٠-٩٣٩-٩٣٨-٩٣٧-٩٣٦-٩٣٥-٩٣٤-٩٣٣-٩٣٢-٩٣١-٩٣٠-٩٢٩-٩٢٨-٩٢٧-٩٢٦-٩٢٥-٩٢٤-٩٢٣-٩٢٢-٩٢١-٩٢٠-٩١٩-٩١٨-٩١٧-٩١٦-٩١٥-٩١٤-٩١٣-٩١٢-٩١١-٩١٠-٩٠٩-٩٠٨-٩٠٧-٩٠٦-٩٠٥-٩٠٤-٩٠٣-٩٠٢-٩٠١-٩٠٠-٨٩٩-٨٩٨-٨٩٧-٨٩٦-٨٩٥-٨٩٤-٨٩٣-٨٩٢-٨٩١-٨٩٠-٨٨٩-٨٨٨-٨٨٧-٨٨٦-٨٨٥-٨٨٤-٨٨٣-٨٨٢-٨٨١-٨٨٠-٨٧٩-٨٧٨-٨٧٧-٨٧٦-٨٧٥-٨٧٤-٨٧٣-٨٧٢-٨٧١-٨٧٠-٨٦٩-٨٦٨-٨٦٧-٨٦٦-٨٦٥-٨٦٤-٨٦٣-٨٦٢-٨٦١-٨٦٠-٨٥٩-٨٥٨-٨٥٧-٨٥٦-٨٥٥-٨٥٤-٨٥٣-٨٥٢-٨٥١-٨٥٠-٨٤٩-٨٤٨-٨٤٧-٨٤٦-٨٤٥-٨٤٤-٨٤٣-٨٤٢-٨٤١-٨٤٠-٨٣٩-٨٣٨-٨٣٧-٨٣٦-٨٣٥-٨٣٤-٨٣٣-٨٣٢-٨٣١-٨٣٠-٨٢٩-٨٢٨-٨٢٧-٨٢٦-٨٢٥-٨٢٤-٨٢٣-٨٢٢-٨٢١-٨٢٠-٨١٩-٨١٨-٨١٧-٨١٦-٨١٥-٨١٤-٨١٣-٨١٢-٨١١-٨١٠-٨٠٩-٨٠٨-٨٠٧-٨٠٦-٨٠٥-٨٠٤-٨٠٣-٨٠٢-٨٠١-٨٠٠-٧٩٩-٧٩٨-٧٩٧-٧٩٦-٧٩٥-٧٩٤-٧٩٣-٧٩٢-٧٩١-٧٩٠-٧٨٩-٧٨٨-٧٨٧-٧٨٦-٧٨٥-٧٨٤-٧٨٣-٧٨٢-٧٨١-٧٨٠-٧٧٩-٧٧٨-٧٧٧-٧٧٦-٧٧٥-٧٧٤-٧٧٣-٧٧٢-٧٧١-٧٧٠-٧٦٩-٧٦٨-٧٦٧-٧٦٦-٧٦٥-٧٦٤-٧٦٣-٧٦٢-٧٦١-٧٦٠-٧٥٩-٧٥٨-٧٥٧-٧٥٦-٧٥٥-٧٥٤-٧٥٣-٧٥٢-٧٥١-٧٥٠-٧٤٩-٧٤٨-٧٤٧-٧٤٦-٧٤٥-٧٤٤-٧٤٣-٧٤٢-٧٤١-٧٤٠-٧٣٩-٧٣٨-٧٣٧-٧٣٦-٧٣٥-٧٣٤-٧٣٣-٧٣٢-٧٣١-٧٣٠-٧٢٩-٧٢٨-٧٢٧-٧٢٦-٧٢٥-٧٢٤-٧٢٣-٧٢٢-٧٢١-٧٢٠-٧١٩-٧١٨-٧١٧-٧١٦-٧١٥-٧١٤-٧١٣-٧١٢-٧١١-٧١٠-٧٠٩-٧٠٨-٧٠٧-٧٠٦-٧٠٥-٧٠٤-٧٠٣-٧٠٢-٧٠١-٧٠٠-٦٩٩-٦٩٨-٦٩٧-٦٩٦-٦٩٥-٦٩٤-٦٩٣-٦٩٢-٦٩١-٦٩٠-٦٨٩-٦٨٨-٦٨٧-٦٨٦-٦٨٥-٦٨٤-٦٨٣-٦٨٢-٦٨١-٦٨٠-٦٧٩-٦٧٨-٦٧٧-٦٧٦-٦٧٥-٦٧٤-٦٧٣-٦٧٢-٦٧١-٦٧٠-٦٦٩-٦٦٨-٦٦٧-٦٦٦-٦٦٥-٦٦٤-٦٦٣-٦٦٢-٦٦١-٦٦٠-٦٥٩-٦٥٨-٦٥٧-٦٥٦-٦٥٥-٦٥٤-٦٥٣-٦٥٢-٦٥١-٦٥٠-٦٤٩-٦٤٨-٦٤٧-٦٤٦-٦٤٥-٦٤٤-٦٤٣-٦٤٢-٦٤١-٦٤٠-٦٣٩-٦٣٨-٦٣٧-٦٣٦-٦٣٥-٦٣٤-٦٣٣-٦٣٢-٦٣١-٦٣٠-٦٢٩-٦٢٨-٦٢٧-٦٢٦-٦٢٥-٦٢٤-٦٢٣-٦٢٢-٦٢١-٦٢٠-٦١٩-٦١٨-٦١٧-٦١٦-٦١٥-٦١٤-٦١٣-٦١٢-٦١١-٦١٠-٦٠٩-٦٠٨-٦٠٧-٦٠٦-٦٠٥-٦٠٤-٦٠٣-٦٠٢-٦٠١-٦٠٠-٥٩٩-٥٩٨-٥٩٧-٥٩٦-٥٩٥-٥٩٤-٥٩٣-٥٩٢-٥٩١-٥٩٠-٥٨٩-٥٨٨-٥٨٧-٥٨٦-٥٨٥-٥٨٤-٥٨٣-٥٨٢-٥٨١-٥٨٠-٥٧٩-٥٧٨-٥٧٧-٥٧٦-٥٧٥-٥٧٤-٥٧٣-٥٧٢-٥٧١-٥٧٠-٥٦٩-٥٦٨-٥٦٧-٥٦٦-٥٦٥-٥٦٤-٥٦٣-٥٦٢-٥٦١-٥٦٠-٥٥٩-٥٥٨-٥٥٧-٥٥٦-٥٥٥-٥٥٤-٥٥٣-٥٥٢-٥٥١-٥٥٠-٥٤٩-٥٤٨-٥٤٧-٥٤٦-٥٤٥-٥٤٤-٥٤٣-٥٤٢-٥٤١-٥٤٠-٥٣٩-٥٣٨-٥٣٧-٥٣٦-٥٣٥-٥٣٤-٥٣٣-٥٣٢-٥٣١-٥٣٠-٥٢٩-٥٢٨-٥٢٧-٥٢٦-٥٢٥-٥٢٤-٥٢٣-٥٢٢-٥٢١-٥٢٠-٥١٩-٥١٨-٥١٧-٥١٦-٥١٥-٥١٤-٥١٣-٥١٢-٥١١-٥١٠-٥٠٩-٥٠٨-٥٠٧-٥٠٦-٥٠٥-٥٠٤-٥٠٣-٥٠٢-٥٠١-٥٠٠-٤٩٩-٤٩٨-٤٩٧-٤٩٦-٤٩٥-٤٩٤-٤٩٣-٤٩٢-٤٩١-٤٩٠-٤٨٩-٤٨٨-٤٨٧-٤٨٦-٤٨٥-٤٨٤-٤٨٣-٤٨٢-٤٨١-٤٨٠-٤٧٩-٤٧٨-٤٧٧-٤٧٦-٤٧٥-٤٧٤-٤٧٣-٤٧٢-٤٧١-٤٧٠-٤٦٩-٤٦٨-٤٦٧-٤٦٦-٤٦٥-٤٦٤-٤٦٣-٤٦٢-٤٦١-٤٦٠-٤٥٩-٤٥٨-٤٥٧-٤٥٦-٤٥٥-٤٥٤-٤٥٣-٤٥٢-٤٥١-٤٥٠-٤٤٩-٤٤٨-٤٤٧-٤٤٦-٤٤٥-٤٤٤-٤٤٣-٤٤٢-٤٤١-٤٤٠-٤٣٩-٤٣٨-٤٣٧-٤٣٦-٤٣٥-٤٣٤-٤٣٣-٤٣٢-٤٣١-٤٣٠-٤٢٩-٤٢٨-٤٢٧-٤٢٦-٤٢٥-٤٢٤-٤٢٣-٤٢٢-٤٢١-٤٢٠-٤١٩-٤١٨-٤١٧-٤١٦-٤١٥-٤١٤-٤١٣-٤١٢-٤١١-٤١٠-٤٠٩-٤٠٨-٤٠٧-٤٠٦-٤٠٥-٤٠٤-٤٠٣-٤٠٢-٤٠١-٤٠٠-٣٩

$$\therefore g(-0,6) \times g(-0,58) < 0$$

$$\int g(-0,6) \approx 0,01$$

$$g(-0,58) \approx -0,02$$

١٨) $g(-0.58) < g(-0.6) < g(0.1)$ وحده حسب مبرهنة
 $\begin{cases} g(0.1) < g(-0.58) \\ g(-0.58) < g(-0.6) \end{cases}$
 القيمة المتوسطة لحاطة $g(0.1) < g(0.2)$ و $g(0.2) < g(-0.58)$ و $g(-0.58) < g(-0.6)$
 هذه $\textcircled{2}$ نستنتج أن لحاطة $g(0.1) < g(0.2) < g(-0.58) < g(-0.6)$ و $g(-0.6) < g(-0.58)$

$$-0,6 < x < -0,58$$

استنتاج: $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$

x	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$
$g(x)$		+	-	+	

Pp2 IR

$$f(x) = 2 - 2e^{-x} + \frac{1}{2}e^{x^2} - ex$$

(II)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

(1) حساب

$$\textcircled{0,28} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \left(-2 + \frac{1}{2}e^{x^2}e^x - ex e^x \right) = -\infty$$

$$\textcircled{0,28} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{-2}{x^2 e^x} + \frac{1}{2}e - \frac{e}{x} \right) = +\infty$$

(2) ا ب ي ا ن ا ن ه ح ا ب ل : $x \in \mathbb{R}$ ل ر ض ا م ا ب ل
 $f'(x) = g(-x)$: $x \in \mathbb{R}$ ل ر ض ا م ا ب ل

$$f'(x) = 2e^{-x} + ex - e$$

$$= 2e^{-x} - e(-x) - e = g(-x)$$

(3) ا م ت ت ا ج ا ن ل د ا ل د ا ل ح ت ر ا ل د ا ل ح ا ل ل : $[-\infty; +\infty]$ و $]-\infty; -1]$

و ح ت ا ق م ا ل ح ا ل : $[-1; -\infty]$
 ل د ا ل : $g(x) = 0$ ك ا ف ا : $g(-x) = 0$ ا ف : $\begin{cases} -x \geq 1 \\ -x \leq -1 \end{cases}$ و م ن : $\begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 1 \end{cases}$

ل د ا ل : $g(-x) > 0$ ك ا ف ا : $-x \in]-\infty; 1[$ و $x \in]-\infty; -1[$

$x \in]-\infty; -1[$ و $x \in]-\infty; -1[$

و م ن : $g(-x) < 0$ ك ا ف ا : $-x \in]1; +\infty[$ و $x \in]-1; -\infty[$

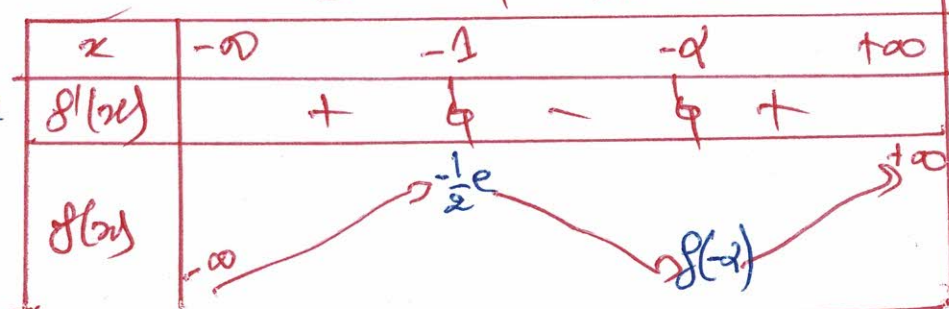
و ع ل ي ه ك ا م ا : $f'(x)$ ك ا ن ك ا م ا

x	$-\infty$	-1	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+

و م ا ل ل د ا ل ح ت ا ق م ا ل ح ا ل : $]-1; -\infty[$ و ح ت ر ا ل د ا ل ح ا ل : $]-\infty; -1]$

ن س ا ل ح ا ل ح ا ل : $]-\infty; -1]$ و $]-1; +\infty[$
 ن س ا ل ح ا ل ح ا ل : $]-\infty; -1]$ و $]-1; +\infty[$

$$f(-1) = -2e + \frac{1}{2}e + e = -e + \frac{1}{2}e = -\frac{1}{2}e$$



$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

(و) أحسب دون حساب

0.28 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = g(a) = 0$

تفسير النتيجة بياناً

نقول أن (C) أفضل مما سأموزنا لحاصل محو الفواصل في الدالة ذات القاطعة

(4) بيان (C) أفضل نقطة الخفاف يطلب أحسن ابدأ بها

لدينا $g'(x) = f'(x)$ ومنه $f''(x) = g''(x)$

لدينا $f''(x) = g''(x)$ تكافئ $g'(x) = 0$ أي $x = 1 - \ln 2$ أي $x = \ln 2 - 1$

لدينا $f''(x) > 0$ تكافئ $g''(x) > 0$ أي $g'(-x) < 0$

ومن $x \in]-\infty, 1 - \ln 2]$ ومن $x \in]\ln 2 - 1, +\infty[$

وعليه إشارة $f''(x)$ تكون كالآلة

طالع

x	$-\infty$	$\ln 2 - 1$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

لأن f'' اخدمت عند $x = \ln 2 - 1$ وعند $x = \ln 2 - 1$ فإن لنقطة

$\Omega(\ln 2 - 1; f(\ln 2 - 1))$ أي $\Omega(\ln 2 - 1; \frac{1}{2}e(\ln \frac{2}{e})^2 - e \ln 2)$

لكن $f(\ln 2 - 1) = -2e + \frac{1}{2}e(\ln 2 - 1)^2 - e(\ln 2 - 1)$

$= -e + \frac{1}{2}e(\ln \frac{2}{e})^2 - e \ln 2 + e$

$= \frac{1}{2}e(\ln \frac{2}{e})^2 - e \ln 2$

$D_R = \mathbb{R}$

$h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - ex$ (E)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)]$ إذا حساب

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2e^{-x} = 0$

تفسير النتيجة بياناً

نقول أن (C) و (C_n) صقاران عند

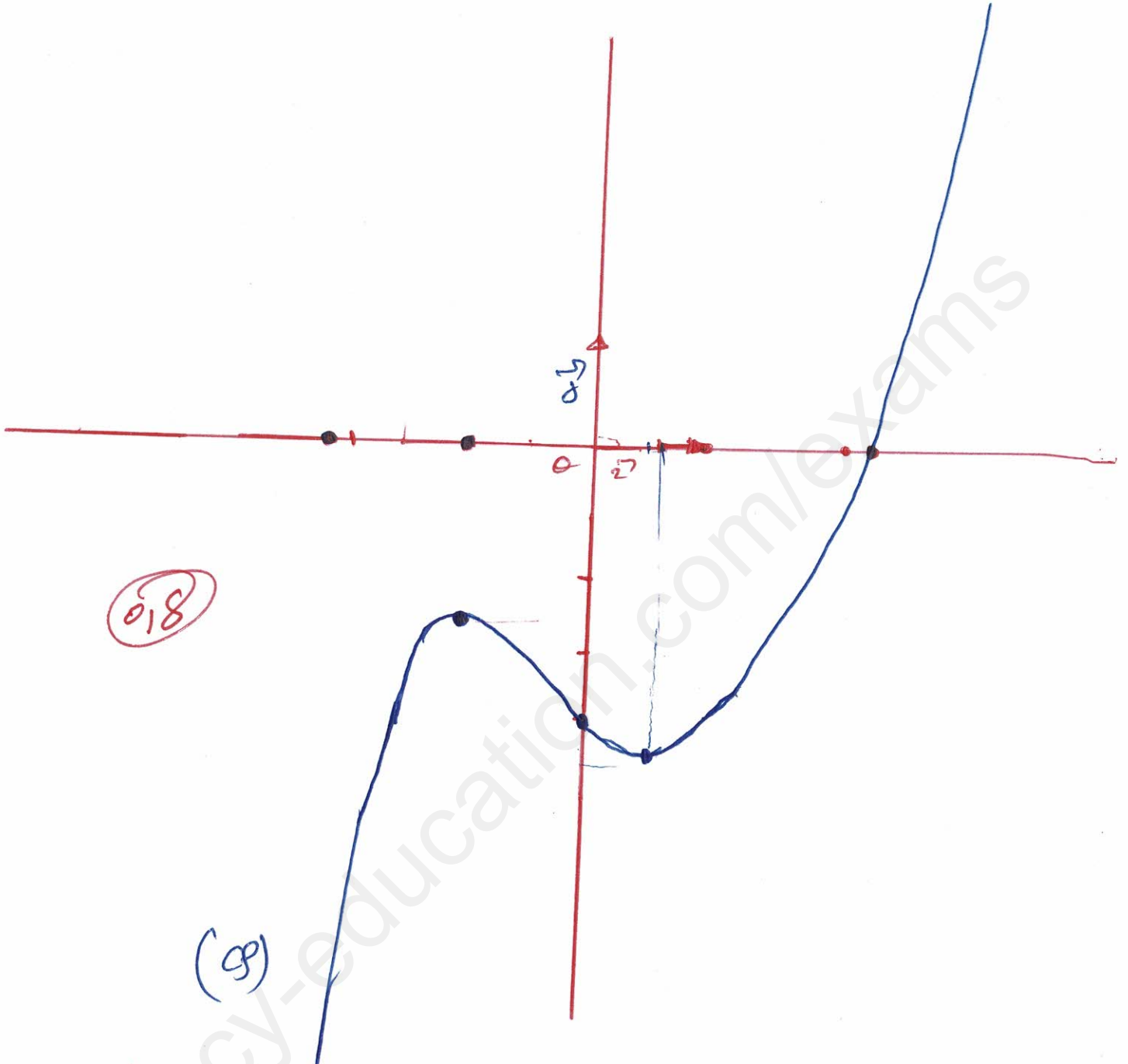
(د) أصوات المخرج لـ (C) و (C_n)

لأن $f(x) - h(x) = -2e^{-x}$ فإن

0.18 $x \in \mathbb{R}$ (C_n) لـ (C)

(5) أحسب $f(0)$ و $f'(0)$:
 لدينا $8(0)^2 - 2$

(0,28)



(0,8)

(9)

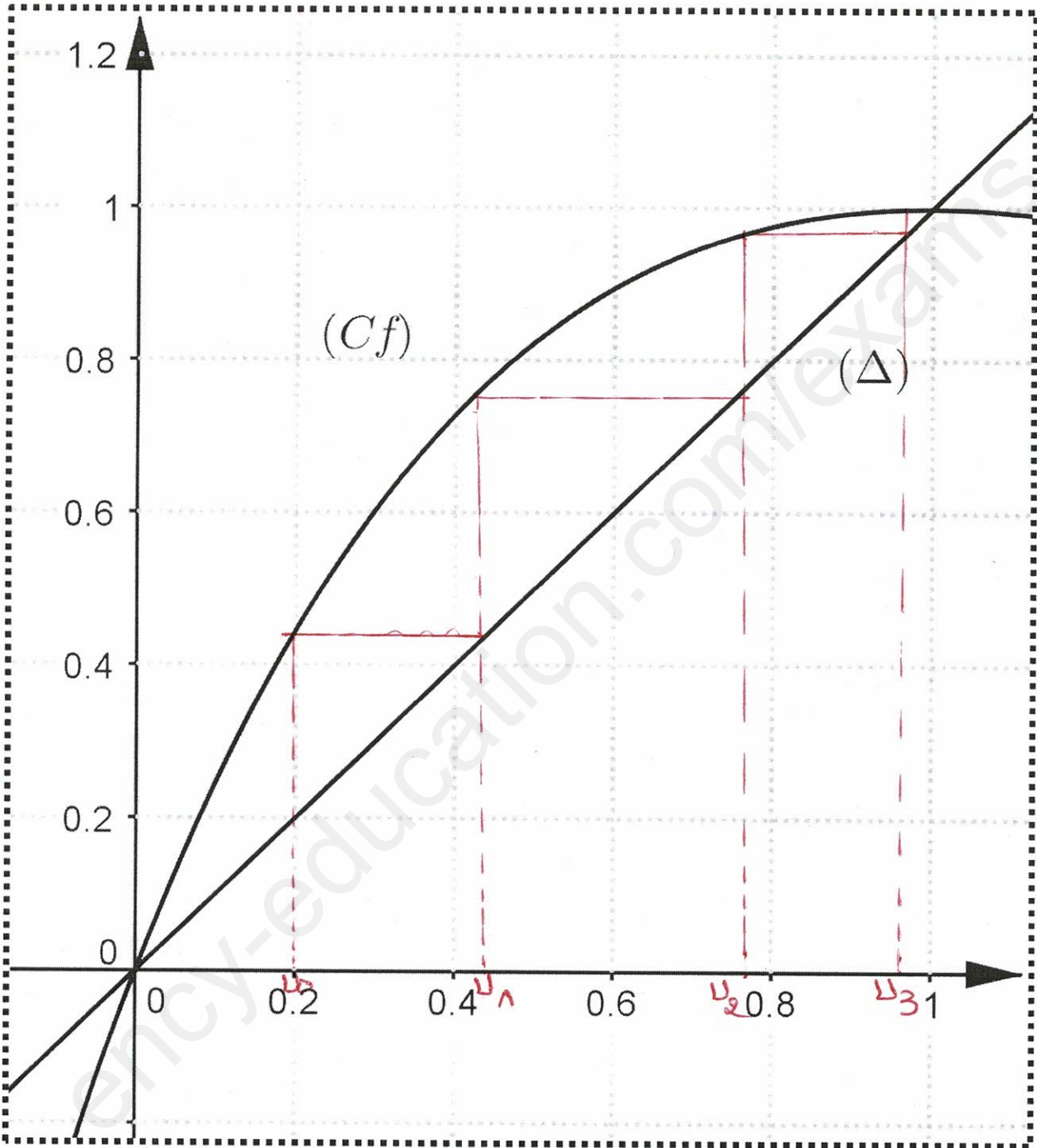
ب) أحييني بياناً وضح أن $f(x) = 8x^3 - 2x^2$ التي تقبل من أجلها المعادلة $8x^3 - 2x^2 = m$

حلياً موجيباً وحل سالباً

لدينا من أجل $m \in]-2, 8[$ فإن المعادلة تقبل حلياً موجيباً

(0,28)

وحل سالباً





على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{4u_n}{1+u_n}$.

1 - أحسب u_1 و u_2 ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$

2 - لتكن (v_n) متتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$

أ - بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$

ب - أكتب v_n ثم u_n بدلالة n ثم احسب نهاية المتتالية (u_n) .

3 - (w_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = \frac{3}{u_n}$ ، نضع $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$.

أ. تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 1 - v_n$

ب. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = n + 1 + \frac{8}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right)$

ج. أحسب نهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

يحتوي كيس على ست كرات بيضاء تحمل الارقام 0 ، 0 ، 0 ، 1 ، 1 ، 2 و كرتين سوداوين تحملان الرقمين 0

، 1 (الكرات لانفرق بينها باللمس) نسحب عشوائيا في آن واحد كرتين من الكيس

1. أحسب احتمال الحوادث A ، B ، C حيث :

A " الكرتين المسحوبتين من نفس اللون " B " الكرتين تحملان رقمين جداؤهما معدوم "

C " كرتين بلونين مختلفين و رقمين جداؤهما معدوم "

2. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب مجموع الرقمين المسحوبين

أ. عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي

ب. أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X

التمرين الثالث : (05 نقاط)

1. عين العددين المركبين α و β حيث :
$$\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ 2\bar{\alpha} + \beta = 6i \end{cases}$$
2. المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط I و A و B لواحقها على الترتيب $z_I = 1$ و $z_A = 1 - 2i$ و $z_B = -2 + 2i$.
أ - أنشئ النقط I و A و B
ب عين z_w لاحقة النقطة w مركز الدائرة (C) ذات القطر $[AB]$
3. D نقطة لاحقتها $z_D = \frac{3+9i}{4+2i}$ أكتب z_D على شكل الجبري ثم بين أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة (C) .
4. E نقطة من الدائرة (C) لاحقتها z_E حيث $z_E = e^{i\frac{\pi}{4}} z_I + \left(1 - e^{i\frac{\pi}{4}}\right) z_w$

أ - أكتب العدد $z_E + \frac{1}{2}$ على الشكل الآسي .

ب استنتج أن $z_E = \frac{3\sqrt{2}-2}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{4}i$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

- I) نعتبر الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ ب : $h(x) = x^2 - 1 + \ln x$.
 1. احسب نهايات الدالة h عند 0 وعند $+\infty$.
 2. ادرس اتجاه تغير الدالة h على $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.
 3. احسب $h(1)$ ثم استنتج إشارة $h(x)$ على $]0; +\infty[$.
- II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ ب : $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

 1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا .
 2. بين انهم من اجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيرات.
 3. أ) بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$.
ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
 4. بين ان المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x - 1 - e^{-1}$ يمس المنحني (C_f) في نقطة A يطلب تعيين احداثياتها
 5. ارسم (Δ) و (d) و (C_f) .
 6. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $-1 - \frac{\ln(x)}{x} = m$.

انتهى الموضوع الأول



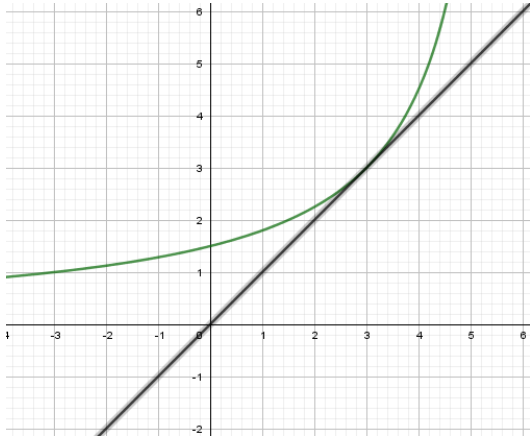
الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty, 6[$ بـ : $f(x) = \frac{9}{6-x}$.

ولتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

في الرسم المقابل، (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذي المعادلة $y = x$



1. أ- بلستعمال الرسم السابق مثل على حامل محور الفواصل وبدون

حساب الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 .

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها.

2. أ- برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n < 3$

ب- استنتج اتجاه تغير (u_n) . هل (u_n) متقاربة ؟ برر

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$

أ- برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تحديد أساسها r وحدها الاول v_0

ب- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

هـ- احسب بدلالة n المجموعين : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $S'_n = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \dots + v_n \times u_n$.

التمرين الثاني : (05 نقاط)

أذكر إن كانت الجملة التالية صحيحة أم خاطئة مبّررا الإجابة .

(1) من أجل كل عدد طبيعي n ، 3 يقسم العدد $2^{2n} - 1$.

(2) إذا كان x عددا صحيحا حلا للمعادلة $x^2 - x \equiv 0[6]$ فإن $x \equiv 0[6]$.

(3) إذا كان $x^2 \equiv y^2[17]$ فإن $x \equiv y[17]$.

(4) مجموعة حلول المعادلة $12x - 5y = 3$ المعرفة في $\mathbb{Z}^2$ ، هي مجموعة الثنائيات (x, y) من الشكل

$(4 + 10k; 9 + 24k)$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

(5) M و N عدنان طبيعيان كتابتهما في النظام العشري هي : $\overline{abc}$ و $\overline{bca}$ على الترتيب .

إذا كان M يقبل القسمة على 27 فإن $M - N$ يقبل القسمة على 27 .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

صندوق يحتوي على n كرية بيضاء حيث $n \geq 2$ و أربع كرات حمراء و ثلاث كرات خضراء . نسحب في آن واحد كرتين من الصندوق .

1. ما احتمال سحب كرتين بيضاوين

2. نسمي $P(n)$ احتمال سحب كرتين من نفس اللون .

$$أ - \text{بين أن } P(n) = \frac{n^2 - n + 18}{(n+7)(n+6)} .$$

ب أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(n)$ ثم فسر النتيجة المحصل عليها .

3. فيما يلي نأخذ $n=5$ و نعتبر اللعبة التالية : يدفع اللاعب 30DA ويسحب في آن واحد كرتان من الصندوق

. عند سحب كرة بيضاء يتحصل على 40DA وعند سحب كرة حمراء يتحصل على 10DA و عند سحب

كرة خضراء يخسر ما دفعه . X المتغير العشوائي الذي يمثل الربح الجبري للاعب .

أ. عين قيم المتغير العشوائي X .

ب. عين قانون الاحتمال العشوائي للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = -x + 1 + e^{-x}$.

(1) احسب نهايات الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيد α حيث $1.27 < \alpha < 1.28$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (e^x - 1)(2 - x)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) - احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

(2) أ- بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = -2$ استنتج أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب تعيين معادلته

ب- ادرس الوضع النسبي بالنسبة لـ (C_f) والمستقيم (Δ) معادلته $y = x - 2$.

(3) بين ان $f'(x) = e^x \cdot g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ و شكل جدول تغيراتها.

(4) بين ان $f(\alpha) = \frac{(2-\alpha)^2}{\alpha-1}$ ثم استنتج حصر لـ $f(\alpha)$.

(5) ارسم (Δ) و (C_f) .

انتهى الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{4u_n}{1+u_n}$.

1. أ- حساب u_1 و u_2 : $u_1 = \frac{4u_0}{1+u_0} = \frac{4}{2} = 2$ و $u_2 = \frac{4u_1}{1+u_1} = \frac{4 \times 2}{1+2} = \frac{8}{3}$

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$: لدينا $0 < u_0 < 3$ محققة .

نفرض أن $0 < u_n < 3$ صحيحة و نبهن أن $0 < u_{n+1} < 3$ صحيحة

لدينا $u_{n+1} = \frac{4u_n}{1+u_n}$ يعني أن $u_{n+1} = 4 - \frac{4}{1+u_n}$

$0 < u_n < 3$ بإضافة 1 نجد $1 < 1+u_n < 4$ بالقلب نجد $\frac{1}{4} > \frac{1}{1+u_n} > 1$ بالضرب في -4 نجد

$-4 < -\frac{4}{1+u_n} < -1$ بإضافة 4 نجد $0 < 4 - \frac{4}{1+u_n} < 3$ إذن $0 < u_{n+1} < 3$ محققة

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$

2. لتكن (v_n) متتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$

أ - إثبات أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$: $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1}} = \frac{\left(\frac{4u_n}{1+u_n}\right) - 3}{\left(\frac{4u_n}{1+u_n}\right)} = \frac{u_n - 3}{u_n} = v_n$ أي أن

$v_{n+1} = \frac{4u_n - 3 - 3u_n}{4u_n} = \frac{u_n - 3}{u_n} = v_n$ إذن $v_{n+1} = \frac{1}{4} v_n$ و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ و

حدها الأول $v_0 = \frac{u_0 - 3}{u_0} = -2$ أي

ب كتبت v_n ثم u_n بدلالة n : $v_n = v_0 \cdot q^n$ أي $v_n = -2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$ و لدينا $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$ يعني

$v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$ و منه $v_n - 1 = -\frac{3}{u_n}$ أي أن $\frac{1}{v_n - 1} = -\frac{u_n}{3}$ إذن $u_n = -\frac{3}{v_n - 1}$ بالتعويض نجد

$u_n = -\frac{3}{\left(\frac{-2}{4^n}\right) - 1}$ أي أن $u_n = \frac{3 \times 4^n}{2 + 4^n}$.

حساب نهاية المتتالية (u_n) : $\lim u_n = \lim \left(\frac{3 \times 4^n}{2 + 4^n}\right) = 3$.

3. المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = \frac{3}{u_n}$ نضع

$$S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$$

أ. التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 1 - v_n$ لدينا $w_n = \frac{3}{u_n}$ و لدينا $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$ يعني

$$v_n = 1 - \frac{3}{u_n} \text{ بالجمع نجد } w_n + v_n = 1 \text{ و منه } w_n = 1 - v_n \text{ و هو المطلوب .}$$

ب. إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = n + 1 + \frac{8}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right)$

$$S_n \text{ هو مجموعة متتالية هندسية و متتالية ثابتة إذن } S_n = (n+1) - v_0 \cdot \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} \right]$$

$$S_n = (n+1) + \frac{8}{3} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right]$$

$$\text{ح. حساب نهاية . } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{(n+1)}{n} + \frac{8}{3n} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right] \right] = 1$$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

يحتوي كيس على ست كرات بيضاء تحمل الارقام 0 ، 0 ، 0 ، 1 ، 1 ، 2 و كرتين سوداوين تحملان الرقمين 0 ، 1 (الكرات لانفرق بينها باللمس) نسحب عشوائيا في آن واحد كرتين من الكيس

1. أحسب احتمال الحوادث A ، B ، C حيث :

A " الكرتين المسحوبتين من نفس اللون " B " الكرتين تحملان رقمين جداؤهما معدوم " C " كرتين بلونين مختلفين و رقمين جداؤهما معدوم "

$$P(A) = \frac{C_6^2 + C_2^2}{C_8^2} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7} \text{ و } P(B) = \frac{C_4^1 \times C_4^1 + C_4^2}{C_8^2} = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}$$

$$P(C) = \frac{C_6^1 \times C_1^1 + C_3^1 \times C_2^1}{C_8^2} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$$

3. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب مجموع الرقمين المسحوبين

أ. قانون الاحتمال للمتغير العشوائي :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{C_4^2}{C_8^2} = \frac{6}{28}$	$\frac{C_3^1 \times C_4^1}{C_8^2} = \frac{12}{28}$	$\frac{C_1^1 \times C_4^1 + C_3^2}{C_8^2} = \frac{7}{28}$	$\frac{C_1^1 \times C_3^1}{C_8^2} = \frac{3}{28}$

ب. حساب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X :

$$E(X)=1,25 \text{ إذن } E(X)=\frac{0 \times 6 + 1 \times 12 + 2 \times 7 + 3 \times 3}{28} = \frac{35}{28} = \frac{5}{4}$$

التمرين الثالث : (05 نقاط)

1. نعين العددين المركبين α و β حيث :
$$\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ 2\bar{\alpha} + \beta = 6i \end{cases}$$
 يكافئ أن $2\bar{\alpha} - \alpha = 1 + 6i$ بوضع

$\alpha = x + iy$ نجد $x - 3iy = 1 + 6i$ و منه $\begin{cases} x = 1 \\ -3y = 6 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ و منه $\alpha = 1 - 2i$ بالتعويض

في معادلة من معادلتين الجملتين نجد $1 - 2i + \beta = -1$ إذن $\beta = -2 + 2i$

2. المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط I و A و B لواقعها على

الترتيب $z_B = -2 + 2i$ و $z_A = 1 - 2i$ و $z_I = 1$

أ- أنشاء النقط I و A و B

ب- نعين z_w لاحقة النقطة w مركز الدائرة

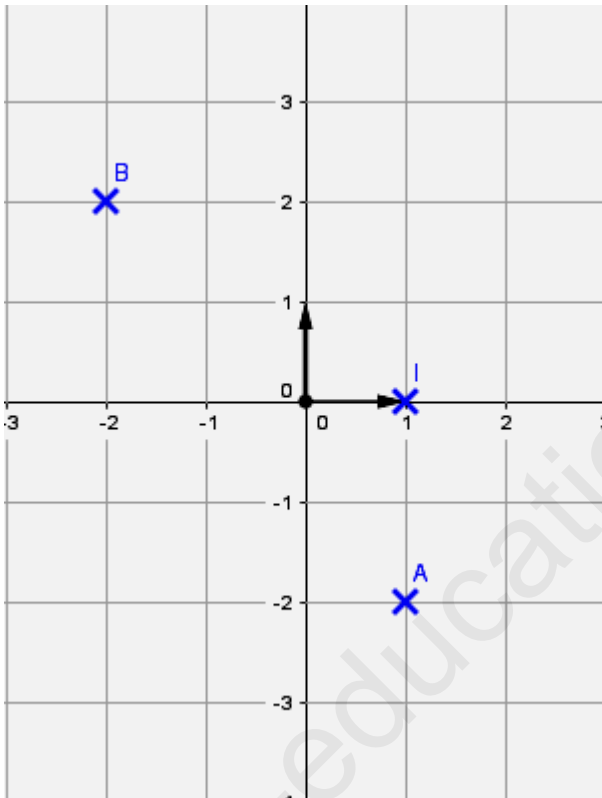
(C) ذات القطر $[AB]$: المركز هو منتصف

القطعة $[AB]$ أي أن

$$z_w = \frac{z_A + z_B}{2} = -\frac{1}{2}$$

3. $z_D = \frac{3+9i}{4+2i}$ نقطة لاحقها

كنسب z_D على شكل الجبري :



$$z_D = \frac{3+9i}{4+2i} = \frac{(3+9i)(4-2i)}{16+4} = \frac{30+30i}{20} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$$

إثبات أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة (C) : $|z_D - z_w| = \left| \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| = \left| \frac{4}{2} + \frac{3}{2}i \right| = \frac{5}{2}$ و $|z_A - z_w| = \left| \frac{3}{2} - 2i - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| = \left| \frac{3}{2} - 2i \right| = \frac{5}{2}$ و منه محقة

4. $z_E = e^{i\frac{\pi}{4}} z_I + \left(1 - e^{i\frac{\pi}{4}}\right) z_w$ حيث z_E لاحقها (C) الدائرة

أ -كتب العدد $z_E + \frac{1}{2}$ على الشكل الآسي : $z_E + \frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}$

يعني أن $z_E + \frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right)$ و منه $z_E + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ إذن

$$z_E + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ هو المطلوب .}$$

ب استنتج أن $z_E = \frac{3\sqrt{2}-2}{4} + i \frac{3\sqrt{2}}{4}$ لدينا $z_E + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ و منه $z_E + \frac{1}{2} = \left(\frac{3\sqrt{2}}{4} + i \frac{3\sqrt{2}}{4} \right)$ و

$$z_E = \left(\frac{3\sqrt{2}-2}{4} + i \frac{3\sqrt{2}}{4} \right) \text{ منه}$$

التمرين الرابع : (07 نقاط) :

I - نعتبر الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ ب : $h(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

1. حساب النهايات الدالة h عند 0 وعند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [x^2 - 1 + \ln(x)] = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

دراسة اتجاه تغير الدالة h على $]0; +\infty[$: $h'(x) = 2x + \frac{1}{x}$ موجبة إذن الدالة h متزايدة على $]0; +\infty[$

جدول تغيرات:

x	0	$+\infty$
$h(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2. حساب $h(1) = 1^2 - 1 + \ln(1) = 0$:

استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x على المجال $]0; +\infty[$: بما أن الدالة h متزايدة على $]0; +\infty[$ و تتعدم عند 1 فإن $h(x)$ موجبة على المجال $[1; +\infty[$ و سالبة على المجال $]0; 1]$.

II - نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ ب : $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ بالتزايد المقارن

حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$: حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$

يفرعي النتيجة بيانيا المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب له معادلة من الشكل $x = 0$.

2. بين انهم من اجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$:

$$f'(x) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{x} \right) \cdot x - \ln(x)}{x^2} \text{ و منه } f'(x) = \frac{x^2 - 1 + \ln(x)}{x^2} \text{ إذن } f'(x) = \frac{h(x)}{x^2} \text{ محققة}$$

استنتج اتجاه تغير الدالة f : f متزايدة على المجال $[1; +\infty[$ و متناقصة على المجال $]0; 1]$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

جدول تغيرات الدالة f :

3. أ) إثبات أن (Δ) المستقيم الذي معادلته

من الشكل $y = x - 1$ مقارب للمنحنى

$$(C_f) : \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\ln(x)}{x} \right] = 0 \text{ و منه محققة.}$$

ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ندرس إشارة الفرق $[f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\ln(x)}{x} \right]$

و هو موجب على المجال على المجال $]0; 1[$ أي أن (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على هذا المجال .

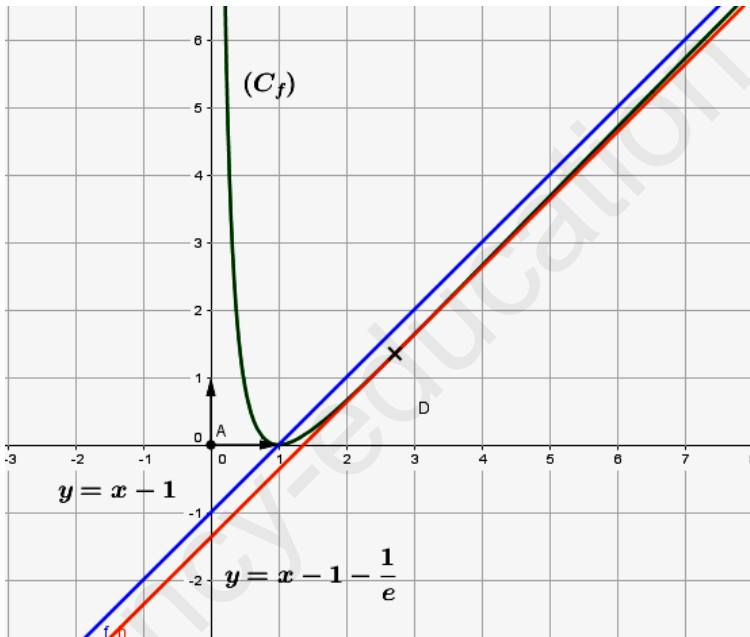
و سالب على المجال على المجال $[1; +\infty[$ أي أن (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) على هذا المجال.

1. إثبات أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x - 1 - e^{-1}$ يمس المنحنى (C_f) في نقطة A يطلب تعيين

أحداثها : معامل توجيهه هو $f'(x) = 1$ يعني أن تكافئ $\frac{g(x)}{x^2} = 1$ يعني أن $g(x) = x^2$ يكافئ أن

$$\ln(x) = 1 \text{ يكافئ أن } x = e \text{ و منه ف } A(e; f(e)) \text{ أي أن } A\left(e; e - 1 - \frac{1}{e}\right)$$

4. ارسم (Δ) و (d) و (C_f) .



5. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $-1 - \frac{\ln(x)}{x} = m$.

يعني أن $x - 1 - \frac{\ln(x)}{x} = x + m$ أي أن $f(x) = x + m$ حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم

$$(\Delta_m): y = x + m$$

لما $m \in \left] -\infty; -1 - \frac{1}{e} \right[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول

لما $m = -1 - \frac{1}{e}$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة واحدة و منه للمعادلة حل وحيد

لما $m \in \left] -1 - \frac{1}{e}; -1 \right[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتان و منه للمعادلة حلين

لما $m \in [-1; +\infty[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة حل وحيد

انتهى الموضوع الأول

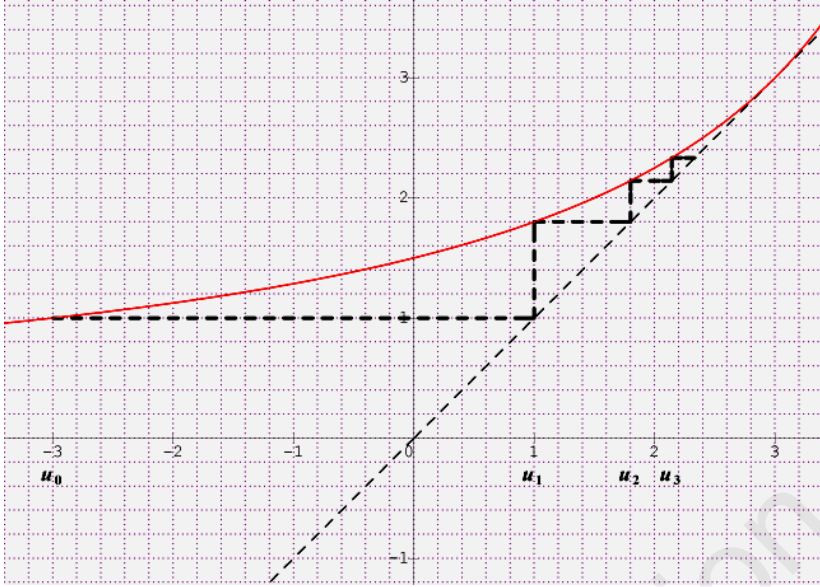
التمرين الأول : (04 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $] -\infty ; 6[$ بـ : $f(x) = \frac{9}{6-x}$.

ولتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

في الرسم المقابل، (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذي

المعادلة $y = x$



1. أـ بلستعمال الرسم السابق نقطي على حامل

محور الفواصل في الشكل المقابل
ب ـ التخمين حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها :

(u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد
3 فاصلة نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و (C_f)

فهي متقاربة

2. أـ البرهان بالتراجع أن من أجل كل عدد

طبيعي $n : u_n < 3$:

$u_0 < 3$ محققة

نفرض أن $u_n < 3$ صحيحة و نبرهن صحة $u_{n+1} < 3$

$u_n < 3$ بالضرب في (-1) نجد $-u_n > -3$ بإضافة 6 نجد $6 - u_n > 3$ بالقلب نجد $\frac{1}{6 - u_n} < \frac{1}{3}$ بالضرب في

9 نجد $\frac{9}{6 - u_n} < 3$ أي أن $u_{n+1} < 3$ صحيحة

ومنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n < 3$.

بـ استنتج اتجاه تغير (u_n) : $u_{n+1} - u_n = \frac{9}{6 - u_n} - u_n$ أي أن $u_{n+1} - u_n = \frac{9 - 6u_n + u_n^2}{6 - u_n}$ يعني أن

$u_{n+1} - u_n = \frac{(3 - u_n)^2}{6 - u_n}$ بما أن $u_n < 3$ فإن الفرق موجب إذن المتتالية (u_n) متزايدة .

(u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى هي متقاربة .

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\square$ كمايلي : $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$

أ - البرهان أن المتتالية (v_n) حسابية : $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}-3} = \frac{1}{\frac{9}{6-u_n}-3}$ أي أن $v_{n+1} = \frac{6-u_n}{9-18+3u_n}$ و منه

$$v_{n+1} - v_n = \frac{6-u_n}{3u_n-9} - \frac{1}{u_n-3} \text{ نجد } v_{n+1} = \frac{6-u_n}{3u_n-9}$$

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{3} \text{ إذن } v_{n+1} - v_n = \frac{6-u_n-3}{3u_n-9} = -\frac{(3-u_n)}{3(3-u_n)}$$

$$v_0 = \frac{1}{u_0-3} = -\frac{1}{6} \text{ و حدها الأول } -\frac{1}{3}$$

ب - لتتحقق عبارة v_n بدلالة n : $v_n = v_0 + n.r$ أي $v_n = -\frac{1}{6} - \frac{1}{3}n$

$$u_n = 3 + \frac{1}{-\frac{1}{6} - \frac{1}{3}n} \text{ أي أن } u_n = 3 + \frac{1}{v_n} \text{ و منه } u_n - 3 = \frac{1}{v_n} \text{ يعني أن } v_n = \frac{1}{u_n-3}$$

$$u_n = \frac{3-6n}{-1-2n} \text{ إذن } u_n = 3 + \frac{6}{-1-2n} \text{ و منه } u_n = \frac{3-6n}{-1-2n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-6n}{-2n} \right) = 3 : \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n \text{ حساب}$$

هـ - حساب بدلالة n المجموعين :

$$S_n = \frac{(n+1) \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}n \right)}{2} \text{ أي } S_n = \frac{(n+1)(v_0 + v_n)}{2} \text{ أي } S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n \text{ : المجموع الأول و منه}$$

$$S_n = -\frac{(n+1)^2}{6} \text{ إذن } S_n = \frac{(n+1)(-1-n)}{6}$$

و المجموع الثاني : $S'_n = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \dots + v_n \times u_n$ لدينا $u_n = 3 + \frac{1}{v_n}$ و منه $u_n \times v_n = 3v_n + 1$

منه S'_n هو مجموع حدود متتابعة لمتتاليتين متتالية حسابية و متتالية ثابتة إذن $S'_n = 3S_n + (n+1)$ أي أن

$$S'_n = -\frac{1}{2}(1-n).(n+1) \text{ أي } S'_n = \left[-\frac{(n+1)}{2} + 1 \right] (n+1) \text{ إذن } S'_n = -3\frac{(n+1)^2}{6} + (n+1)$$

التمرين الثاني : (05 نقاط)

أذكر إن كانت الجمل التالية صحيحة أم خاطئة مبرراً الإجابة .

(1) من أجل كل عدد طبيعي n ، 3 يقسم العدد $2^{2n} - 1$ لدينا $2^2 \equiv 1 [3]$ بالرفع الى قوى n نجد $2^{2n} \equiv 1 [3]$ و منه $2^{2n} - 1 \equiv 0 [3]$ و منه **صحيحة**.

(2) إذا كان x عددا صحيحا حلا للمعادلة $x^2 - x \equiv 0 [6]$ فإن $x \equiv 0 [6]$:

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	[6]
$x^2 - x \equiv$	0	0	2	0	0	2	[6]

و منه **خاطئة**

(3) إذا كان $x^2 \equiv y^2 [17]$ فإن $x \equiv y [17]$.

$x^2 \equiv y^2 [17]$ يعني إن $x^2 - y^2 \equiv 0 [17]$ يكافئ أن $x^2 - y^2$ مضاعف للعدد 17 و 17 عدد أولي و
 $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$ إذن 17 قاسم $(x+y)$ أو 17 قاسم للعدد $(x-y)$ أي أن $x \equiv y [17]$ أو $x \equiv -y [17]$ و
 منه **خاطئة .**

(4) مجموعة حلول المعادلة $12x - 5y = 3$ المعرفة في Z^2 ، هي مجموعة الثنائيات (x, y) من الشكل
 $(4 + 10k ; 9 + 24k)$ مع $k \in Z$: $12(4 + 10k) - 5(9 + 24) = 12 \times 4 + 120k - 5 \times 9 - 120k = 12 \times 4 - 5 \times 9 = 3$
 إذن محققة و منه **صحيحة**

(5) M و N عدنان طبيعيين كتابتهما في النظام العشري هي : $\overline{abc}$ و $\overline{bca}$ على الترتيب .
 إذا كان M يقبل القسمة على 27 فإن $M - N$ يقبل القسمة على 27 .

إذا كان M يقبل القسمة على 27 يعني $M \equiv 0 [27]$ أي أن $100a + 10b + c \equiv 0 [27]$ أي أن

$$M - N \equiv -N [27] \text{ أي أن } M - N \equiv -100b - 10c - a [27]$$

$$M - N \equiv -1000a - 100b - 10c [27] \text{ أي أن } M - N \equiv -a - 100b - 10c [27] \text{ و } -999 \equiv 0 [27]$$

$$\text{أي } M - N \equiv -10(100a + 10b + c) [27] \text{ أي أن } M - N \equiv -10M [27] \text{ و } M \equiv 0 [27] \text{ إذن}$$

$$M - N \equiv 0 [27] \text{ صحيحة}$$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

صندوق يحتوي على n كرية بيضاء حيث $n \geq 2$ و أربع كرات حمراء و ثلاث كرات خضراء . نسحب في آن واحد كرتين من الصندوق .

$$1. \text{ احتمال سحب كرتين بيضاوين : } P(A) = \frac{C_n^2}{C_{n+7}^2} = \frac{\frac{n!}{2(n-2)!}}{\frac{(n+7)!}{2(n+5)!}} = \frac{n(n-1)}{(n+7)(n+6)}$$

2. نسمى $P(n)$ احتمال سحب كرتين من نفس اللون .

$$\text{أ - بين أن } P(n) = \frac{C_n^2 + C_4^2 + C_3^2}{C_{n+7}^2} = \frac{\frac{n(n-1)}{2} + 6 + 3}{\frac{(n+7)(n+6)}{2}} \therefore P(n) = \frac{n^2 - n + 18}{(n+7)(n+6)}$$

$$P(n) = \frac{n^2 - n + 18}{(n+7)(n+6)}$$

$$\text{ب حساب } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2}{n^2} \right) = 1 : \lim_{n \rightarrow +\infty} P(n)$$

تفسير النتيجة المحصل عليها : كلما كان عدد الكرات البيضاء أكبر فإن احتمال سحب كرتين من نفس اللون يقترب احتمالها من 1 .

3. فيما يلي نأخذ $n=5$ و نعتبر اللعبة التالية : يدفع اللاعب 30DA ويسحب في آن واحد كرتان من الصندوق . عند سحب كرة بيضاء يتحصل على 40DA وعند سحب كرة حمراء يتحصل على 10DA و عند سحب كرة خضراء يخسر ما دفعه . X المتغير العشوائي الذي يمثل الربح الجبري للاعب .
أ. قيم المتغير العشوائي X هي -60 , -20 , -10 , 10 , 20 , 50 .

n كرة بيضاء حيث $n \geq 2$ و أربع كرات حمراء و ثلاث كرات خضراء

ب. بتعين قانون الاحتمال العشوائي للمتغير العشوائي X :

x_i	-60	-20	-10	10	20	50
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{66}$	$\frac{12}{66}$	$\frac{6}{66}$	$\frac{15}{66}$	$\frac{20}{66}$	$\frac{10}{66}$

$$E(X) = \frac{-60 \times 3 - 20 \times 12 - 10 \times 6 + 10 \times 15 + 20 \times 20 + 50 \times 10}{66} = \frac{570}{66} = \frac{95}{11}$$

حساب أمله الرياضياتي:

التمرين الرابع : (07 نقاط)

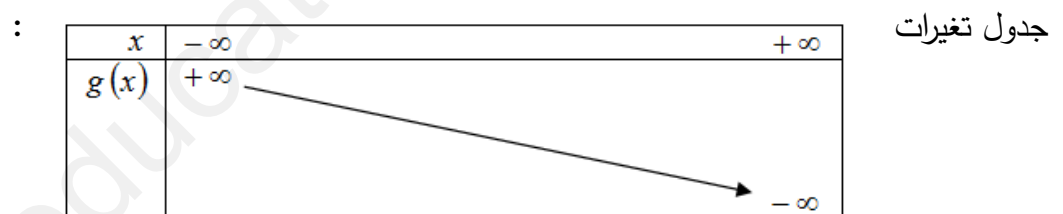
I - نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = -x + 1 + e^{-x}$.

1. حساب نهايات الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ بالتزايد المقارن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$$

2. دراسة اتجاه تغير الدالة g : $g'(x) = -1 - e^{-x}$ سالبة تماماً

و منه الدالة g متناقصة على المجال $\mathbb{R}$.



3. إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $1.27 < \alpha < 1.28$: $g(1.27) = 0,010$ و

$g(1.28) = -0,0001$ بما أن الدالة g مستمرة و متناقصة تماماً على $\mathbb{R}$ حسب مبرهن القيم المتوسطة فإن

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث $1.27 < \alpha < 1.28$

استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
إشارة $g(x)$	+	0	-

II - نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (e^x - 1)(2 - x)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. حساب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-(2-x)] = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x.e^x = -\infty$$

2. أ-إثبات أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)-x] = -2$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x.(2-x)-2] = -2$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)-x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x.(2-x)-2] = -2$:
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x.(2-x)] = 0$ التزايد المقارن .

استنتج أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب تعيين معادلته : بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)-x] = -2$

فإن $y = x - 2$ معادلة نصف مستقيم المقارب المائل جهة $-\infty$.

ب- دراسة الوضع النسبي بالنسبة لـ (C_f) والمستقيم (Δ) معادلته $y = x - 2$:

$$[f(x) - x + 2] = e^x(2-x) \text{ إشارة الفرق من إشارة } (2-x)$$

و المستقيم (Δ) و (C_f) المنحني يتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة 2

x	$-\infty$	2	$+\infty$
إشارة $f(x) - y$	+	0	-
الوضع:	(C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) يتقاطعان (Δ) و (C_f)		

3. إثبات إن $f'(x) = e^x.g(x)$: $f(x) = (e^x - 1)(2-x)$ يعني أن $f'(x) = e^x(2-x) - (e^x - 1)$ أي

أن $f'(x) = e^x[(2-x) - (1 - e^{-x})]$ و $f'(x) = e^x[-x + 1 + e^{-x}]$ إذن $f'(x) = e^x.g(x)$ منه

استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^x.g(x)$ إشارتها من إشارة $g(x)$ و منه f متزايدة

على $]-\infty; \alpha]$ و متزايدة على المجال $[\alpha; +\infty[$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$

جدول تغيرات :

4. إثبات أن $f(\alpha) = \frac{(2-\alpha)^2}{\alpha-1}$: $g(\alpha) = 0$ يعني $-\alpha + 1 + e^{-\alpha} = 0$ يعني أن $e^{-\alpha} = \alpha - 1$ أي

$e^{\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$ و $f(\alpha) = (e^{\alpha} - 1)(2-\alpha)$ بالتعويض نجد $f(\alpha) = \left(\frac{1}{\alpha-1} - 1\right).(2-\alpha)$ و منه

$$f(\alpha) = \frac{(2-\alpha)^2}{\alpha-1} \text{ إذن } f(\alpha) = \frac{(2-\alpha).(2-\alpha)}{\alpha-1}$$

استنتج حصرًا لـ $f(\alpha)$: $1,27 < \alpha < 1,28$ و منه $0,27 < \alpha - 1 < 0,28$ بالقلب نجد

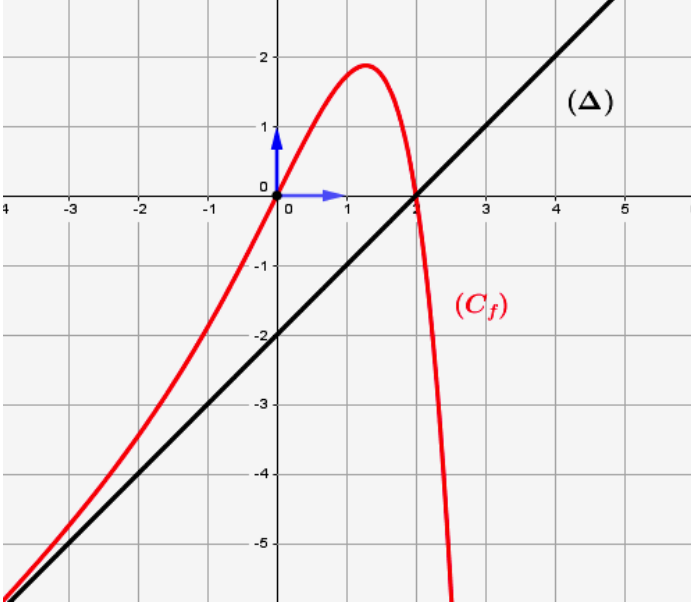
$$\frac{1}{0,28} < \frac{1}{\alpha-1} < \frac{1}{0,27} \dots\dots\dots(1)$$

و $1,27 < \alpha < 1,28$ بإضافة -2 يعني $-0,72 < \alpha - 2 < -0,73$ بالتربيع نجد

$$0,72^2 < (\alpha - 2)^2 < 0,73^2 \dots\dots\dots (2)$$

بضرب (1) و (2) نجد $\frac{0,72^2}{0,28} < \frac{(\alpha - 2)^2}{\alpha - 1} < \frac{0,73^2}{0,27}$ أي أن $1,85 < f(\alpha) \leq 1,97$

5. رسم (Δ) و (C_f) :



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول (4,5 ن):

- لتكن المعادلة (E_n) ذات المجهولين الصحيحين x و y التالية: $645x - 195y = 13^n - 54n - 1$ حيث $n \in \mathbb{N}$
- (1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 13^n على 15
 - (2) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها المعادلة (E_n) تقبل حلول في $\mathbb{Z}^2$.
 - (3) جد الحل الخاص (x_0, y_0) للمعادلة (E_2) بحيث: $x_0 + y_0 = 4$ ثم حل المعادلة (E_2) في $\mathbb{Z}^2$.
 - (4) N عدد طبيعي يكتب $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}$ في النظام ذي الأساس 6 ويكتب $\overline{\beta 0444}$ في النظام ذي الأساس 5 عين قيمة العددين الطبيعيين α و β ثم أكتب N في النظام العشري.

التمرين الثاني (04 ن)

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = \frac{1}{4}$

$$v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n} \quad \text{و} \quad u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n + 4} : n \text{ عدد طبيعي}$$

(1) أ) برهن بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$.

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

(2) أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$.

ب) عبر عن v_n بدلالة n .

ج) اوجد عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim u_n$.

$$(3) \text{ أحسب بدلالة } n \text{ المجموع } S_n \text{ حيث: } S_n = \frac{3}{1-u_{2021}} + \frac{3}{1-u_{2022}} + \dots + \frac{3}{1-u_{2021+n}}$$

التمرين الثالث: (4,5 ن)

يحتوي كيس على 9 كريات لا نفرق بينها عند اللمس منها ثلاثة حمراء تحمل الأرقام 1, 0, 1- وأربعة بيضاء تحمل الأرقام 1, 0, 1, 1- وكرتين خضراء تحمل الأرقام 0, 1- نسحب على التوالي وبدون ارجاع ثلاث كرات من الكيس.

(1) أحسب احتمال الحوادث التالية:

A : سحب ثلاث كرات من نفس اللون.

B : سحب ثلاث كرات مجموع أرقامها معدوم.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب العدد الأصغر من بين الأعداد المسحوبة.

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X

(ب) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

(ج) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

التمرين الرابع (07 ن)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (-x^2 - x + 1)e^{-x} - 1$

(1) أدرس تغيرات الدالة g .

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل على $\square$ حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث $-1; 6 < \alpha < -1; 5$

(3) حدد إشارة $g(x)$ على $\square$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$.

(1) (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

أحسب نهاية الدالة f $+\infty$ و عند $-\infty$.

(2) تحقق أنه من أجل $x \in \square$: $f'(x) = g(x)$ واستنتج اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ هو مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ثم أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) .

(4) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثيتهما.

(5) أنشئ على المجال $[-2; 5; +\infty[$ كل من (Δ) و (C_f) (تعطى $f(\alpha) = 0; 3$)

(6) نعتبر الدالة h المعرفة على $\square$ بـ : $h(x) = |x| + (x^2 - 3|x| + 2)e^{|x|}$ وليكن (C_h) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب

إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(أ) برهن أن h دالة زوجية.

(ب) اشرح كيفية انشاء المنحنى (C_h) انطلاقاً من (C_f) ثم ارسمه في نفس المعلم السابق.

انتهى الموضوع الأول

التمرين الاول (05 ن):

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 2$

$$u_{n+1} = 3u_n + 4n - 4 : n \text{ طبيعي}$$

(1) هل المتتالية (u_n) حسابية؟ أم هندسية؟ برر اجابتك

(2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية $\square$ ب: $v_n = u_n + \alpha n + \beta$ حيث α و β عددين حقيقيين عين العددين الحقيقيين α و β حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 يطلب تعيين حدها الأول.

(3) نأخذ $\alpha = 2$ و $\beta = -1$ أحسب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

(4) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 13 ثم استنتج باقي القسمة الاقليدية للعدد S_{2029} على 13.

(5) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد: $A = 2014^{2018} + 2015^{1919} + 2016^{2020} + 2018^{2021}$ على 13

التمرين الثاني: (4ن):

توجد اجابة صحيحة واحدة من بين الأجوبة المقترحة في كل حالة من الحالات التالية, اختر الاجابة الصحيحة مبررا اختيارك .

(1) يحتوي كيس على n كرة حمراء و 4 كرات بيضاء الكرات لا نفرق بينها عند اللمس نسحب من الكيس n كرة على التوالي مع اعادة الكرة المسحوبة الى الكيس بعد كل سحبة احتمال الحصول على كرة حمراء على الاقل هو:

$$\left(1 - \left(\frac{4}{4+n}\right)^n\right) \quad \text{(أ)} \quad \left(\frac{4}{4+n}\right)^n \quad \text{(ب)} \quad \left(\frac{n}{n+4}\right)^n \quad \text{(ج)}$$

(2) Z عدد مركب حيث: $Z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ العدد المركب Z^{2021} يساوي:

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{(أ)} \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{(ب)} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{(ج)}$$

(3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقاط A, B, C ،

التي لواحقها على الترتيب: $z_A = 3 - 2i$ ، $z_B = 3 + 2i$ ، $z_C = 4i$ طبيعة الرباعي $OABC$ هي:

(أ) مستطيل (ب) معين (ج) متوازي أضلاع.

(4) حلول المتراجحة: $2\ln(-x+1) - 2 \leq 0$ في المجال $]-\infty; 1[$ هي:

$$[e-1; 1] \quad \text{(أ)} \quad]-\infty; -e+1] \quad \text{(ب)} \quad]-\infty; 1] \quad \text{(ج)}$$

التمرين الثالث (4ن):

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس منها أربعة بيضاء تحمل الأرقام 1,1,2,3 وثلاثة حمراء تحمل الأرقام 1,2,3 وثلاثة خضراء تحمل الأرقام 1,1,3. نسحب عشوائيا وفي أن واحد ثلاث كرات من الكيس.

(1) أحسب احتمال الحوادث التالية:

A : الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون
 B : الحصول على ثلاث كرات تحمل رقم فردي
 C : الحصول على ثلاث كرات تحمل ألوان العلم الوطني.

(2) بين أن: $P(A \cap B) = \frac{1}{60}$ ثم احسب $P(A \cup B)$

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكريات التي تحمل الرقم الفردي .

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X

(ب) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

(ج) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

التمرين الرابع (07 ن)

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ: $g(x) = (x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)$

(1) ادرس اتجاه تغيرات الدالة g على $]-1; +\infty[$.

(2) أحسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب

الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) بين أنه من أجل كل x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

(3) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه 1 يطلب كتابة معادلته.

(4) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$ وماذا تستنتج بيانيا؟

(5) (Δ) مستقيم معادلته $y = x$ أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة الى (Δ) .

(6) أرسم (Δ) و (T) و (C_f) .

(7) m وسيط حقيقي ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $m(x+1) + \ln(x+1) = 0$

انتهى الموضوع الثاني



على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (4 نقاط)

نعتبر في المجموعة z^2 المعادلة : $(E): 5x - 6y = 3$

1- أ) أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3.

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ثم حل في z^2 المعادلة (E) .

ج) استنتج حلول الجملة (S) : $\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$

2- a و b عدنان طبيعيان حيث :

$a = \overline{1\alpha 0\alpha 00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b = \overline{\alpha\beta 0\alpha}$ في النظام ذو الأساس 5.

• عين α و β حتى تكون الثنائية $(a; b)$ حلا للمعادلة (E)

التمرين الثاني: (4 نقاط)

يحتوي صندوق على ثلاث كريات بيضاء مرقمة من 1 إلى 3 ، و خمس كريات سوداء مرقمة من 1 إلى 5 لانفرق بينها عند اللمس. نسحب كريتين على التوالي و بدون إعادة الكرة المسحوبة إلى الصندوق.

1) نعتبر الحوادث التالية: A " سحب كريتين من نفس اللون "

B " سحب كريتين تحملان نفس الرقم " ، C " سحب كريتين مجموع رقميهما يساوي 7 "

أ - بين أن $p(A) = \frac{13}{28}$ ثم احسب: $p(B)$ و $p(C)$.

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الأرقام الزوجية المسحوبة.

أ - عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

ب - احسب الأمل الرياضي $E(X)$ ثم التباين $v(X)$.

التمرين الثالث: (4.5 نقاط)

(u_n) متتالية معرفة على N بـ: $u_0 = \frac{3}{2}$ ومن أجل كل n من N : $u_{n+1} = \frac{6u_n - 2}{u_n + 3}$

(1) أ - بين أنه من أجل كل n من N : $u_{n+1} = 6 - \frac{20}{u_n + 3}$

ب - برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من N : $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$

ج - بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

(2) أ - بين أنه من أجل كل n من N : $0 \leq 2 - u_{n+1} \leq \frac{8}{9}(2 - u_n)$

ب - استنتج أنه من أجل كل n من N : $0 \leq 2 - u_n \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{8}{9}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الرابع: (7.50 نقاط)

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ: $g(x) = \frac{x}{2} + (x+1) \ln(x+1)$.

(1) ادرس تغيرات الدالة g على $]-1; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) احسب $g(0)$ و استنتج إشارة $g(x)$ تبعا لقيم x .

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = x^2 \ln(x+1)$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو

منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

(2) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2xg(x)}{x+1}$.

(3) ادرس تغيرات الدالة ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) عين معادلة ل (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

(5) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تحديدها.

(6) احسب $f(1)$, $f(2)$ و أنشئ كلا من (C_f) و (T) .

I. الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x) = (x^2 - 2|x| + 1) \ln|x|$.

(1) احسب $h(-x) - h(x)$ ماذا تستنتج؟

(2) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$: $h(x) = f(|x| - 1)$.

(3) اشرح طريقة إنشاء التمثيل البياني (C_h) للدالة h انطلاقا من التمثيل البياني (C_f) ثم ارسمه.



الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقاط)

- (1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 3^n على 5 ثم بواقي قسمة 3^n على 11 .
- (2) حل في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة : $11x - 5y = 2 \dots (E)$.
- (3) حل في مجموعة الأعداد الطبيعية المعادلة : $6 + 3^{11n+1} \equiv 0 [11]$.
- (4) عين باقي قسمة 58^{145} على 55 .
- (5) بفرض $(x; y)$ هو حل من حلول المعادلة (E) حيث $y > 0$ و $x + 2 > 0$ عين الثنائيات $(x; y)$ التي من أجلها يكون : $\text{PGCD}(y; x + 2) = 12$.

التمرين الثاني: (4.50 نقاط)

الشكل المقابل هو التمثيل البياني (C) للدالة f المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) بقراءة بيانية عين اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0, +\infty[$.

ب) بين أنه إذا كان $x \in [1, \sqrt{3}]$ فإن $f(x) \in [1, \sqrt{3}]$.

(2) نعرف المتتالية (u_n) كما يلي : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي

$$u_{n+1} = f(u_n), \quad n$$

أ) باستعمال التمثيل البياني (C) والمستقيم (Δ) مثل الحدود u_0, u_1 و u_2 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل ، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n) .

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < \sqrt{3}$.

ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(2 - \sqrt{u_n^2 + 1})}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n) .

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$.

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

اقلب الصفحة

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n . و أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

$$4) \text{ أحسب } p_n \text{ بدلالة } n \text{ حيث : } p_n = \frac{(u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n)^2}{(3-u_0^2)(3-u_1^2) \dots (3-u_n^2)}$$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

كيس يحوي 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس موزعة كما يلي: خمس كريات حمراء مرقمة

ب: 1، 1، 0، 2، 2 و خمس كريات خضراء مرقمة ب: 0، 0، 1، 2، 2. نسحب عشوائيا 4 كريات في آن واحد.

1) أحسب احتمال الأحداث التالية:

A " الحصول على أربع كريات من نفس اللون. " B " الحصول على أربع كريات أرقاما يمكن أن تشكل العدد 2020."

C " الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها 4."

2) المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل نتيجة سحب الرقم الأصغر من بين الأربع أرقام التي تحملها الكرات المسحوبة

أ) عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عرّف قانون احتماله.

ب) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

ج) أحسب احتمال الحدث " $|X - 1| \leq 1$ "

التمرين الرابع: (7.50 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $R - \{0\}$ بـ : $f(x) = 2x + \frac{1}{e^x - 1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) حل في R المعادلة: $2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$ ثم ادرس إشارة $2e^{2x} - 5e^x + 2$

2) أ - احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ مع التفسير البياني.

ب - بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ج - بين أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = -1$ ثم استنتج معادلة للمستقيم (Δ') المقارب المائل الثاني لـ (C_f) .

د - ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لكل من (Δ) و (Δ') .

3) أ - بين أنه من أجل كل x من $R - \{0\}$: $f'(x) = \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2}$

ب - حدد اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) بين أن النقطة $A\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

5) أنشئ (Δ) ، (Δ') والمنحنى (C_f) .

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي عدد حلول المعادلة: $f(x) = 2x + m$. انتهى الموضوع الثاني.



على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (4 نقاط)

نعتبر في المجموعة z^2 المعادلة : $(E): 5x - 6y = 3$

1- أ) أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3.

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ثم حل في z^2 المعادلة (E) .

ج) استنتج حلول الجملة (S) : $\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$

2- a و b عدنان طبيعيان حيث :

$a = \overline{1\alpha 0\alpha 0\alpha}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b = \overline{\alpha\beta 0\alpha}$ في النظام ذو الأساس 5.

• عين α و β حتى تكون الثنائية $(a; b)$ حلا للمعادلة (E)

التمرين الثاني: (4 نقاط)

يحتوي صندوق على ثلاث كريات بيضاء مرقمة من 1 إلى 3 ، و خمس كريات سوداء مرقمة من 1 إلى 5 لانفرق بينها عند اللمس. نسحب كريتين على التوالي و بدون إعادة الكرة المسحوبة إلى الصندوق.

1) نعتبر الحوادث التالية: A " سحب كريتين من نفس اللون "

B " سحب كريتين تحملان نفس الرقم " ، C " سحب كريتين مجموع رقميهما يساوي 7 "

أ - بين أن $p(A) = \frac{13}{28}$ ثم احسب: $p(B)$ و $p(C)$.

ب - ما احتمال سحب كريتين تحملان نفس الرقم علما أنهما من نفس اللون؟

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الأرقام الزوجية المسحوبة.

أ - عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

ب - احسب الأمل الرياضي $E(X)$ ثم التباين $v(X)$.

التمرين الثالث: (4.5 نقاط)

(u_n) متتالية معرفة على N بـ: $u_0 = \frac{3}{2}$ ومن أجل كل n من N : $u_{n+1} = \frac{6u_n - 2}{u_n + 3}$

(1) أ - بين أنه من أجل كل n من N : $u_{n+1} = 6 - \frac{20}{u_n + 3}$

ب - برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من N : $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$

ج - بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

(2) أ - بين أنه من أجل كل n من N : $0 \leq 2 - u_{n+1} \leq \frac{8}{9}(2 - u_n)$

ب - استنتج أنه من أجل كل n من N : $0 \leq 2 - u_n \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{8}{9}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الرابع: (7.50 نقاط)

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ: $g(x) = \frac{x}{2} + (x+1) \ln(x+1)$.

(1) ادرس تغيرات الدالة g على $]-1; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) احسب $g(0)$ و استنتج إشارة $g(x)$ تبعا لقيم x .

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = x^2 \ln(x+1)$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو

منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

(2) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2xg(x)}{x+1}$.

(3) ادرس تغيرات الدالة ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) عين معادلة ل (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

(5) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تحديدها.

(6) احسب $f(1)$, $f(2)$ و أنشئ كلا من (C_f) و (T) .

I. الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x) = (x^2 - 2|x| + 1) \ln|x|$.

(1) احسب $h(-x) - h(x)$ ماذا تستنتج؟

(2) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$: $h(x) = f(|x| - 1)$.

(3) اشرح طريقة إنشاء التمثيل البياني (C_h) للدالة h انطلاقا من التمثيل البياني (C_f) ثم ارسمه.



الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقاط)

- (1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 3^n على 5 ثم بواقي قسمة 3^n على 11 .
- (2) حل في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة : $11x - 5y = 2 \dots (E)$.
- (3) حل في مجموعة الأعداد الطبيعية المعادلة : $6 + 3^{11n+1} \equiv 0 [11]$.
- (4) عين باقي قسمة 58^{145} على 55 .
- (5) بفرض $(x; y)$ هو حل من حلول المعادلة (E) حيث $y > 0$ و $x + 2 > 0$ عين الثنائيات $(x; y)$ التي من أجلها يكون : $\text{PGCD}(y; x + 2) = 12$.

التمرين الثاني: (4.50 نقاط)

الشكل المقابل هو التمثيل البياني (C) للدالة f المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) بقراءة بيانية عين اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0, +\infty[$.

ب) بين أنه إذا كان $x \in [1, \sqrt{3}]$ فإن $f(x) \in [1, \sqrt{3}]$.

(2) نعرف المتتالية (u_n) كما يلي : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي

$$u_{n+1} = f(u_n), \quad n$$

أ) باستعمال التمثيل البياني (C) والمستقيم (Δ) مثل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل ، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n) .

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < \sqrt{3}$.

ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(2 - \sqrt{u_n^2 + 1})}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n) .

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$.

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

اقلب الصفحة

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n . أو أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

$$4) \text{ أحسب } p_n \text{ بدلالة } n \text{ حيث : } p_n = \frac{(u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n)^2}{(3-u_0^2)(3-u_1^2) \dots (3-u_n^2)}$$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

كيس يحوي 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس موزعة كما يلي: خمس كريات حمراء مرقمة

ب: 1، 1، 0، 2، 2 و خمس كريات خضراء مرقمة ب: 0، 0، 1، 2، 2. نسحب عشوائيا 4 كريات في آن واحد.

1) أحسب احتمال الأحداث التالية:

A " الحصول على أربع كريات من نفس اللون. " B " الحصول على أربع كريات أرقاما يمكن أن تشكل العدد 2020."

C " الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها 4. "

2) المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل نتيجة سحب الرقم الأصغر من بين الأربع أرقام التي تحملها الكرات المسحوبة

أ) عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عرّف قانون احتماله.

ب) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

ج) أحسب احتمال الحدث " $|X - 1| \leq 1$ "

التمرين الرابع: (7.50 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $R - \{0\}$ بـ : $f(x) = 2x + \frac{1}{e^x - 1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) حل في R المعادلة: $2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$ ثم ادرس إشارة $2e^{2x} - 5e^x + 2$

2) أ - احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ مع التفسير البياني.

ب - بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ج - بين أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = -1$ ثم استنتج معادلة للمستقيم (Δ') المقارب المائل الثاني لـ (C_f) .

د - ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لكل من (Δ) و (Δ') .

3) أ - بين أنه من أجل كل x من $R - \{0\}$: $f'(x) = \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2}$

ب - حدد اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) بين أن النقطة $A\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

5) أنشئ (Δ) ، (Δ') والمنحنى (C_f) .

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي عدد حلول المعادلة: $f(x) = 2x + m$. انتهى الموضوع الثاني.

القسم : 3 تقني
المدة: 4 ساعات ونصف

متقن الرائد مقراني السعيد+ثانوية احمد الكفيف الإختبار التجريبي في
مادة الرياضيات العام الدراسي: 2020/ 2021

الموضوع - 1-

التمرين 1: (4 ن)

كيس به 3 كريات بيضاء مرقمة 2,2,3 وكرتان صفراوان مرقمة 2,2
و 5 كريات حمراء مرقمة 3,3,2,2,2. نسحب عشوائيا 3 كريات في آن واحد.

(1) احسب احتمال الحوادث الآتية :-

"A" الكريات من نفس اللون

"B" الكريات من نفس الرقم

"C" الكريات من نفس اللون ونفس الرقم

"D" الكريات من نفس اللون أو نفس الرقم

(2) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة القاسم المشترك الأكبر للارقام المستحبة

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X (ب) عين قانون احتماله ثم احسب أمله الرياضي.

(3) نسحب الآن على التوالي باراجاع 3 كريات.

بين أن احتمال الحصول على كرتين بيضاوين بالضبط هو 0, 189.

التمرين 2: (5 ن)

f دالة معرفة على المجال $[0, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$

يعطى (C) التمثيل البياني للدالة f و (d) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (الشكل)

$$\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = f(V_n) \end{cases} \quad \begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases} \quad (V_n) \text{ و } (U_n) \text{ متتاليتين معرفتين على } \mathbb{N}$$

(1) اعد رسم الشكل على ورقة الإجابة ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود $V_2, V_1, V_0, U_2, U_1, U_0$ مع تخمين

اتجاه تغير و تقارب كلا من المتتاليتين (V_n) و (U_n)

(2) (أ) بين أن f متزايدة تماما على المجال $[0, +\infty[$.

(ب) برهن من اجل كل $n \in \mathbb{N}$: $1 < U_n < \frac{1}{2}$ و $2 < V_n < 1$.

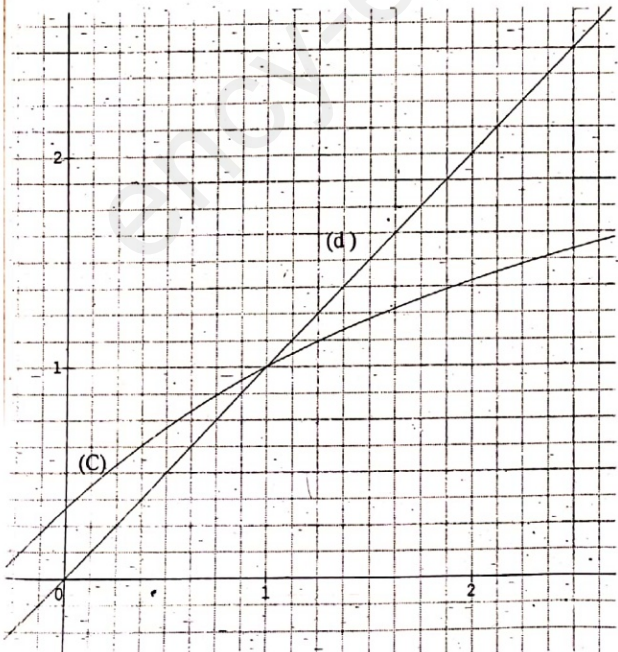
(ج) ادرس اتجاه تغير المتتاليتين (V_n) و (U_n) .

$$(3) (أ) اثبت من اجل كل $n \in \mathbb{N}$: $V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{8(V_n - U_n)}{(V_n + 3)(U_n + 3)}$$$

$$(ب) استنتج من اجل كل $n \in \mathbb{N}$: $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{4}{7}(V_n - U_n)$$$

$$(ج) اثبت من اجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 < V_n - U_n \leq \left(\frac{4}{7}\right)^n \left(\frac{3}{2}\right)$$$

$$(د) استنتج $\lim(V_n - U_n)$$$



التمرين 3: (4ن)

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) $5x - 9y = 19$

- (1) (أ) بين أن المعادلة (1) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$.
- (ب) بين أنه إذا كان $(x; y)$ حلاً للمعادلة (1) فإن $x \equiv 2[9]$ ثم استنتج حلول المعادلة (1).
- (2) عين الثنائيات (x, y) من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (1) بحيث $x + y \equiv 3[9]$.
- (3) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 7^n على 9.
- (4) لتكن الثنائية (x, y) من $\mathbb{N}^2$ حلاً للمعادلة (1)
- (أ) أوجد القيم الممكنة لـ $\text{pgcd}(x; y)$.

- (ب) استنتج الثنائيات (x, y) من $\mathbb{N}^2$ حتى يكون x أولي مع 9.
- (5) عين الثنائيات (x, y) من $\mathbb{N}^2$ حلول المعادلة (1) بحيث $7^x + 7^y \equiv 2[9]$.

التمرين 4: (7ن)

الجزء 1: g دالة معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x - 1 - \ln x$.

- (1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها.
- (2) (أ) ادرس إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.
- (ب) استنتج من أجل كل $x > 0$: $\ln\left(\frac{x}{2}\right) \leq \frac{x}{2} - 1$.

الجزء 2:

دالة معرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = -x^2 + 2 + 2x \ln x$ لما $x > 0$ و $f(0) = 2$.

(C) تمثيلها البياني في مستو منسوب لمعلم متعامد متجانس $(O; i; j)$.

(1) (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ماذا تستنتج؟

(ب) بين أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-2}{x} = -\infty$ ماذا تستنتج؟ فسر هندسيا النتيجة؟

(ج) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

(2) (أ) بين من أجل كل $x > 0$: $f'(x) = -2g(x)$.

(ب) ادرس إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات f . مستنتجا أن (C) يقبل نقطة انعطاف $A(1; 1)$.

(3) (أ) بين أن معادلة المماس (T) لـ (C) عند النقطة فاصلتها 2 هي: $y = -2(1 - \ln 2)x + 2$.

(ب) تحقق من أجل كل $x > 0$: $f(x) + 2(1 - \ln 2)x - 2 = 2x \left[-\frac{x}{2} + 1 + \ln\left(\frac{x}{2}\right) \right]$.

واستنتج الوضع النسبي للمنحني (C) و المماس (T).

(4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $2,7 < \alpha < 2,8$ ثم أنشئ (C) و المماس (T).

(5) h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = x^2 - 2 - |x| \ln x^2$ لما $x \neq 0$ و $h(0) = 2$.

(أ) بين أن الدالة h زوجية ..

(ب) أنشئ التمثيل البياني للدالة h اعتماداً على (C) في نفس المعلم. " انتهى الموضوع -1-

التمرين 1: (4ن)

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(Z^2 - 2Z + 2)(\sqrt{2}Z - 2i) = 0$

(2) نعتبر في المستوى المنسوب لمعلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقاط A, B, C, D لواحقتها :

$$Z_A = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}; Z_B = \overline{Z_A}; Z_C = \sqrt{2} i; Z_D = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

(أ) تحقق أن $Z_L = -\sqrt{2}$

(ب) احسب كلا من $|Z_L|, |Z_C|, |Z_B|$ مستنتجا أن النقاط A, B, C, D تنتمي لنفس الدائرة يطلب مركزها ونصف قطر

$$(3) \text{ أ بين أن } \frac{Z_A - Z_L}{Z_B - Z_L} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

(ب) استنتج أنه يوجد تحويل نقطي يحول B إلى A مركزه L يطلب عناصره المميزة .

(ج) حدد عندئذ طبيعة المثلث ABL .

$$(د) \text{ عين قيم العدد الطبيعي } n \text{ حتى يكون: } \left(\frac{\sqrt{2}Z_D}{Z_C}\right)^n = i$$

التمرين 2: (5ن)

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) $5x - 6y = 3$

(1) أ) أوجد الحل الخاص (x_0, y_0) من $\mathbb{Z}^2$ للمعادلة (1) حيث: $x_0 - y_0 = 1$

(ب) حل عندئذ المعادلة (1)

(ج) استنتج العدد الصحيح a حيث: $\begin{cases} a \equiv -1[6] \\ a \equiv -4[5] \end{cases}$ ثم عين باقي قسمة a على 30

(2) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 9.

(ب) بين أنه إذا كان $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن $1442x^{-1} - 2^{6y} + 3 \times 2^{2021}$ مضاعف لـ 9

(3) ليكن العددين الطبيعيين A يكتب في النظام ذي الأساس 3 $A = 1\alpha 0\alpha 00$ و B يكتب في النظام ذي الأساس 5 $B = \alpha\beta 0\alpha$

(أ) عين قيم α و β حتى تكون الثانية $(A; B)$ حلا للمعادلة (1) ثم استنتج الثانية (β, α) حلول للمعادلة (1)

(ب) اكتب عندئذ A و B في نظام التعداد العشري.

التمرين 3: (3)

(U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحددها الأول $U_1 = \frac{1}{a}$ و $U_{n+1} = \frac{n+1}{a n} U_n$ حيث $a \in [2; +\infty[$

(1) ا) بره من اجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $U_n > 0$

ب) بين (U_n) ان متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$ مستنتجا انها متقاربة.

(2) نعتبر (V_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $V_n = \frac{1}{a n} U_n$

ا) بين ان المتتالية (V_n) هندسية اساسها $\frac{1}{a}$ يطلب حددها الاول بدلالة a

ب) اكتب U_n بدلالة n و a ثم تحقق ان $U_n = \frac{n}{e^{n \ln a}}$ واحسب نهاية U_n

ج) احسب S_n و a المجموع $S_n = U_1 + \frac{1}{2} U_2 + \frac{1}{3} U_3 + \dots + \frac{1}{n} U_n$

د) عين قيمة a حتى يكون $\lim S_n = \frac{1}{2020}$

التمرين 4: (3)

الجزء 1: g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^{-x} - x + 1$

(1) احسب النهايات عند $+\infty$ و $-\infty$ للدالة g

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها

(3) بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $1,2 < \alpha < 1,3$

(4) حدد إشارة $g(x)$ و استنتج إشارة $g(-x)$ على المجالين $[-\alpha, +\infty[$ و $]-\infty, -\alpha]$

الجزء 2:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{x e^x}{e^x + 1}$

(C) تمثيلها الفعلي في مستو منسوب لمعلم متعامد متجانس $(O; I; J)$. (الوحدة 4cm)

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ وفسر هندسيا النتيجة ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) ا) بره من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{e^x g(-x)}{(e^x + 1)^2}$

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ وانجز جدول التغيرات

(3) بين ان $f(-\alpha) = 1 - \alpha$ ثم استنتج حصرا $f(-\alpha)$

(4) اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C) عند المبدأ ثم ادرس الوضع النسبي لـ (C) و المماس (T)

(5) بين ان المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب لـ (C) بجوار $(+\infty)$

(6) أنشئ (C) و المستقيمين (d) و (T)

(7) نلقي بـ m قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $\frac{e^x}{e^x + 1} = m$



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين :

الموضوع الأول

التمرين الأول :

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_1 = 3$ و $3u_{n+1} - u_n = 12$

(1) أثبت بالتراجع أن من كل عدد طبيعي غير معدوم $n : u_n < 6$

(2) استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة .

(3) نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $V_n = u_n - 6$

(أ) بين أن (V_n) متتالية هندسية ، يطلب تعيين أساسها و حدها الأول ، ثم اكتب u_n بدلالة n .

(ب) بين أن (u_n) متتالية متقاربة نحو عدد حقيقي يطلب تعيينه .

(ج) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

(د) احسب قيمة الجداء P حيث : $P = v_1 \times v_2 \times \dots \times v_{100}$

التمرين الثاني :

(1) أ- حل في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (E) التالية : $8x - 5y = 3$
ب- ليكن m عددا صحيحا ولتكن الثنائية $(p ; q)$ من الأعداد الصحيحة حيث : $m = 5q + 4$ و $m = 5p + 1$

■ بين أن الثنائية $(p ; q)$ حل للمعادلة (E) و استنتج أن : $m \equiv 0[9]$
ج - أوجد أصغر عدد صحيح m أكبر من أو يساوي 2000.

(2) أ- برهن أن من أجل كل عدد طبيعي k فإن : $2^{3k} \equiv 1[7]$
ب- أوجد باقي قسمة العدد 2^{2021} على 7.

(3) ليكن a و b عدنان طبيعيان كلا منهما أقل أو يساوي 9 حيث $a \neq 0$ ، نعتبر العدد الطبيعي N المكتوب بالشكل : $N = \overline{a00b}$ في النظام العشري .

(أ) تحقق أن $10^3 \equiv -1[7]$

(ب) استنتج كل الأعداد الطبيعية N التي تقبل القسمة على 7.

التمرين الثالث :

كيس يحتوي على 9 كريات لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي :

خمس كريات حمراء مرقمة بـ : 1,1,2,2,3 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ : 3,2,-3 وكريه بيضاء مرقمة بـ : 1-
نسحب عشوائيا 4 كريات في آن واحد .

- (1) أحسب احتمال الحوادث التالية : A : " الحصول على أربع كريات من نفس اللون " .
B : " الحصول على كرية بيضاء على الأكثر " ، C : " الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم " .
- (2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس .
أ. عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عرف قانون احتماله .
ب. احسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير X و التباين $V(X)$.
ت. احسب احتمال الحادثة : $\langle\langle X^2 - X > 0 \rangle\rangle$.

التمرين الرابع :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعلاقة : $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ وفسر هندسيا النتيجة .
- (2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .
- (3) أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب : $y = x$ و $y = x + 1$
ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة الى كل من (Δ) و (Δ') .
- (4) أثبت أن النقطة $w(0, \frac{1}{2})$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .
- (5) أ- بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما على الترتيب α و β حيث : $\ln 2 < \alpha < 1$ و $-1,3 < \beta < -1,4$
ب- هل توجد مماسات لـ : (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟
ج- ارسم كل من (Δ) و (Δ') و المنحنى (C_f) ؟
- د- ناقش بيانيا حسب قيمة الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة : $(m - 1)e^{-x} = m$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

- (1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على 5.
- (2) u_0 و r عدنان طبيعيان غير معدومين ، (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r .
أ. عين u_0 و r علما أن : u_0 و r أوليان فيما بينهما و $u_0^2 = u_{10} - u_1$
- (3) نفرض أن : $u_0 = 3$ و $r = 1$: نضع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$
أ. أحسب كلا من S_n و P_n بدلالة n .
- ب. عين العدد الطبيعي q حيث : $2P_q = (2010)!$ ، ثم تحقق أن : $3^q \equiv 2[5]$
- ت. عين العدد الطبيعي n بحيث : $2S_n + 2 \equiv 3^q[5]$

التمرين الثاني :

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 5$ و $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

- (1) أ- أنشئ في معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ كل من المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ و المنحنى (C) الممثل للدالة f ، المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ بالعبارة : $f(x) = \sqrt{x + 2}$
ب- أنشئ على محور الفواصل الحدود : u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 دون حسابها، مع إبراز خطوط الرسم .
ج - ما تخمينك حول اتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n) ؟
- (2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n \geq 2$
ب- بين أن (u_n) متناقصة ، ثم استنتج أنها متقاربة .
ج - بين أن النهاية ℓ للمتتالية (u_n) تحقق : $\ell \geq 2$ و $\ell = \sqrt{\ell + 2}$
د - استنتج قيمة ℓ .

التمرين الثالث :

- I. C_1 و C_2 حجرا نرد متوازنان تحمل أوجه المكعب C_1 الأعداد :
 $0, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ وتحمل أوجه المكعب C_2 الأعداد : $0, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$
- نرمي الحجرين في آن واحد و نسجل العددين الظاهرين على الوجهين العلويين لـ : C_1 و C_2 حيث نرمز لهذين العددين بـ α و β .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية العدد $\sin(\alpha + \beta)$

- (1) ما هي القيم الممكنة للمتغير X ، (يمكن تنظيم النتائج في جدول) .
- (2) عرف قانون احتمال المتغير X ، ثم احسب الأمل الرياضي $E(X)$ و الإنحراف المعياري $\sigma(X)$

- II. نجري الآن اللعبة الآتية : يربح شخص $100 DA$ عندما نرمي حجري النرد ويتحصل على $\sin(\alpha + \beta) = 1$ أو $\sin(\alpha + \beta) = -1$ ، و يخسر $50 DA$ في باقي الحالات .
وليكن y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية الربح أو الخسارة .
(1) عين قانون احتمال المتغير y .
(2) نرمي حجري النرد 5 مرات ، ما احتمال أن يربح اللاعب ثلاث مرات ؟ .

التمرين الرابع :

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة : $f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) أ- أحسب نهايات الدالة f
ب- أدرس اتجاه تغيرات الدالة f ، وشكل جدول تغيراتها .
- (2) أ- أثبت أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما $y = x$: (D)
ب- أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و المستقيم (D) .
- (3) أ- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث $1,3 < x_0 < 1,4$ ، ثم استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$.
ب- عين معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع محور الترتيب .
- ج - أنشئ (Δ) و (C_f) .

- (4) نعرف على المجال $]-1; +\infty[$ الدالة g ب : $g(x) = |f(x)|$ و (C_g) بيانها في المعلم السابق .
■ اشرح كيفية انشاء المنحنى (C_g) ثم أرسمه في المعلم السابق .
- (5) ناقش بيانها حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $g(x) = m^2$.

أستاذ المادة يتمنى لكم التوفيق والسداد في شهادة البكالوريا

انتهى الموضوع الثاني



على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (4 نقاط)

تحتوي علبة على تسع بطاقات لا يمكن التمييز بينها. بطاقتان بيضاوان تحملان الرقم 1 و ثلاث بطاقات حمراء تحمل الأرقام 1، 1، 2 و أربع بطاقات سوداء تحمل الأرقام 1، 2، 3. نسحب عشوائيا من العلبة بطاقتين على التوالي و بدون إرجاع ، نعتبر الحادثتين التاليتين:

" A البطاقتان المسحوبتان من نفس اللون " ، " B البطاقتان المسحوبتان تحملان نفس الرقم "

(1) بين أن: $p(A) = \frac{5}{18}$ ثم احسب $p(B)$.

(2) أ - احسب احتمال سحب بطاقتين من نفس اللون وتحملان نفس الرقم.

ب - استنتج $p(A \cup B)$.

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب المضاعف المشترك الأصغر للرقمين المسحوبين.

أ - عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب الأمل الرياضي $E(X)$.

ب - احسب التباين $V(X)$ ثم استنتج $V(-3X)$.

التمرين الثاني: (4 نقاط)

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = -1$ ، $u_1 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

و لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على بـ: $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

(1) أ - اثبت أن (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول v_0 .

ب - اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n .

ج - احسب بدلالة n الجداء: $p_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$ ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

(2) نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

أ - اثبت أن (w_n) متتالية حسابية أساسها 2 يطلب حساب حدها الأول w_0 .

ب - اكتب بدلالة n عبارة الحد العام w_n ثم عين أصغر عدد طبيعي n الذي يحقق: $10^{w_n} > 2021$

ج - احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + 2u_1 + 2^2u_2 + \dots + 2^nu_n$

التمرين الثالث: (4 نقاط)

من بين الإجابات المقترحة اختر الإجابة الوحيدة الصحيحة مع التعليل.

- (1) باقي القسمة الإقليدية للعدد 1954^{2020} على 5 هو: أ - 1 ب - 2 ج - 3
- (2) في مجموعة الأعداد الصحيحة حلول المعادلة التالية $12x + 17y = 1$ هي الثنائيات $(x; y)$ حيث:
 - أ - $(17k - 7; 5 - 12k)$ ب - $(-7k; 5k)$ ج - $(17k - 5; 7 - 12k)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$
- (3) a عدد طبيعي حيث: $a = \overline{421}$ في النظام ذي الأساس 5. a يكتب في النظام ذي الأساس 6 على الشكل:
 - أ - $a = \overline{111}$ ب - $a = \overline{303}$ ج - $a = \overline{222}$
- (4) في مجموعة الأعداد الصحيحة، المعادلة ذات المجهول x التالية $x^2 - 4x - 2 \equiv 0[5]$:
 - أ - لا تقبل حولا ب - حلولا تحقق: $x \equiv -3[5]$ ج - حلولا تحقق: $x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 3[5]$

التمرين الرابع: (8 نقاط)

- f دالة عددية معرفة على $[-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = 1 + xe^{-x}$
- (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.
 - (2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
 - (3) أ - (T) هو المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة $J(0; 1)$. اكتب معادلة للمماس (T) .
 ب - اكتب معادلة للمستقيم (T') الموازي للمماس (T) ويشمل النقطة ذات الفاصلة $A(-1; 1 - e)$.
 - (4) أ - برهن أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $\alpha \geq -1$.
 ب - بين أن: $e^\alpha = -\alpha$ ثم استنتج طريقة لإنشاء نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل بدقة.
 - (5) أنشئ المستقيم (T') ، المماس (T) والمنحنى (C_f) .
 - (6) m وسيط حقيقي. نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $\frac{1-m}{x} = 1 - e^{-x}$ (E)
 أ - بين أن كل حل للمعادلة (E) هو فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم: $y = x + m$: (T_m) .
 ب - ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة (E).
 - (7) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = \ln[f(n) - 1]$
 - اكتب بدلالة n عبارة المجموع S_n المعروف بـ: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$
 - (8) لتكن الدالة k المعرفة على $[-1; 1]$ بـ: $k(x) = f(x^2)$
 أ - عين الدالة المشتقة k' بدلالة f' .
 ب - ادرس اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها.



الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقاط)

يحتوي صندوق على ثماني كرات متميزة لا نفرق بينها عند اللمس، منها كرتان حمراوان تحملان الرقم 0 و ثلاثة كرات بيضاء تحمل الرقم 2 و ثلاثة كرات خضراء تحمل الأرقام 1, 2, 4.

أ. نسحب عشوائيا و في أن واحد ثلاث كرات من الصندوق

(1) احسب احتمال الحدثين التاليين :

A : "الكرات المسحوبة لا تحمل الرقم 0". B : "جاء الأعداد الظاهرة على الكرات المسحوبة يساوي 8".

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة جاء الأعداد الظاهرة على الكرات المسحوبة.

أ - عين قيم المتغير العشوائي X و حدد قانون احتماله.

ب - احسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X و انحرافه المعياري.

II. في هذه المرحلة نعوض الكرات الثلاثة البيضاء ب n كرة بيضاء حيث n عدد طبيعي و $n > 2$, ثم نسحب

عشوائيا كرتين على التوالي مع إرجاع الكرة المسحوبة الأولى إلى الصندوق.

نعتبر الحدثين التاليين: E : "الكرتان المسحوبتان بيضاوان" F : "الكرتان المسحوبتان لهما نفس اللون".

أ - احسب $p(E)$ بدلالة n.

ب - بين أن $p(D) = \frac{n^2 + 13}{n^2 + 10n + 25}$ ثم عين اصغر قيمة ل n حتى يكون $p(D) > \frac{1}{2}$.

التمرين الثاني: (4.5 نقاط)

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ ب $u_0 = 11$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2 + \sqrt{u_n - 2}$.

(1) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 \leq u_n \leq 11$.

(2) أ- تحقق انه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 2}(1 - \sqrt{u_n - 2})$.

ب- اثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة ثم استنتج أنها متقاربة.

(3) أ- برهن انه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{2}(u_n - 3)$.

ب- استنتج انه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 \leq u_n - 3 \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و احسب نهاية المتتالية (u_n).

(4) لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ ب $v_n = \ln(u_n - 2)$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول.

ب- اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ مرة ثانية.

(5) احسب الجداء $P_n = (u_{1442} - 2) \times (u_{1443} - 2) \times \dots \times (u_{2021} - 2)$

التمرين الثالث: (4 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير:

(1) (u_n) متتالية حسابية حيث $u_3 = 25$ و $u_8 = 3$ - أساس المتتالية (u_n) هو:

أ - $\frac{-22}{5}$ ب - $\frac{22}{5}$ ج - $\frac{-3}{8}$

(2) نعتبر المعادلة ذات المجهول x التالية $-2e^{2x} + 4e^x - 4 = 0$

- حلول هذه المعادلة هي S حيث: أ - $S = \{0;1\}$ ب - $S = \{0\}$ ج - $S = \emptyset$

(3) ليكن X المتغير العشوائي وقانون احتماله معرف بالجدول المقابل:

$X = x_i$	1	2	3
$P(X = x_i)$	α	2α	3α

قيمة العدد الحقيقي α هي:

أ - $\frac{1}{9}$ ب - $\frac{1}{3}$ ج - $\frac{1}{6}$

(4) قسم دراسي يتكون من 3 ذكور و 25 إناث، يراد تشكيل لجنة تتكون من: رئيس و نائب رئيس و عضوين

عدد الطرق الممكنة لتشكيل لجنة من نفس الجنس هو:

أ - 303600 ب - 390000 ج - 151800

التمرين الرابع: (7.5 نقاط)

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]-1; +\infty[$ ب: $g(x) = \frac{x}{2} + (x+1)\ln(x+1)$.

(1) ادرس تغيرات الدالة g على $]-1; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) احسب $g(0)$ و استنتج إشارة $g(x)$ تبعا لقيم x .

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1; +\infty[$ ب: $f(x) = x^2 \ln(x+1)$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستوى

منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

(2) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2xg(x)}{x+1}$.

(3) ادرس تغيرات الدالة ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) عين معادلة ل (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

(5) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تحديدها.

(6) احسب $f(1)$, $f(2)$ و أنشئ كلا من (C_f) و (T) .

III. h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ ب: $h(x) = (x^2 - 2|x| + 1)\ln|x|$.

(1) احسب $h(-x) - h(x)$ ماذا تستنتج؟

(2) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$: $h(x) = f(|x| - 1)$.

(3) اشرح طريقة إنشاء التمثيل البياني (C_h) للدالة h انطلاقا من التمثيل البياني (C_f) ثم ارسمه.

انتهى الموضوع الثاني

اختر احد الموضوعين الاتيين
الموضوع الاول

التمرين الأول (4.5 نقاط)

$$\begin{cases} \ln V_0 + \ln V_2 = 2 \ln 2 \\ e^{V_0} \times e^{V_1} = e^6 \end{cases}$$

1/ (V_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما خدها الأول V_0 و أساسها q حيث

(أ) احسب V_0 و V_1 ثم استنتج قيمة الأساس q

(ب) نضع $V_0 = 4$ و $q = \frac{1}{2}$ عبر عن V_n بدلالة n ثم احسب $\lim V_n$

(ج) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = \ln V_0 + \ln V_1 + \dots + \ln V_n$

2/ نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة $\mathbb{N}$ على : $U_0 = 6$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \sqrt{9U_n + 10}$

(أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $6 \leq U_n \leq 10$

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج انها متقاربة

(ج) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $10 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(10 - U_n)$

(د) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 10 - U_n \leq V_n$

(هـ) استنتج نهاية المتتالية (U_n)

التمرين الثاني (4 نقاط)

اختر الاقتراح الوحيد الصحيح من بين الاقتراحات الثلاثة مع التبرير في كل حالة من الحالات الاتية

1/ - صندوق U_1 يحتوي على 6 كريات حمراء و 4 سوداء و صندوق U_2 يحتوي على 3 كريات حمراء و 1 كرية زرقاء

جميع الكرات متماثلة. نسحب عشوائيا كرية واحد من الصندوق U_1 و كرية واحدة من الصندوق U_2

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات السوداء المسحوبة فان امله الرياضي هو :

(أ) $\frac{3}{5}$ (ب) $\frac{2}{5}$ (ج) 1

- نضيف n كرية سوداء الى الصندوق U_1 و n كرية حمراء الى الصندوق U_2

ونسحب كرية من الصندوق U_1 و كرية من الصندوق U_2

فان قيمة n بحيث يكون احتمال الحصول على كرتين من لونين مختلفين $\frac{7}{12}$ هي

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3

2/ - الشكل الاسي للعدد المركب $Z = \sin \theta + i \cos \theta$ هو

(أ) $e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$ (ب) $2e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$ (ج) $e^{i(\pi - \theta)}$

- العدد : $(1 + i)^{1442}$ يساوي

(أ) 2^{721} (ب) $i 2^{721}$ (ج) $2^{721}(1 + i)$

1/ نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهول (x, y) التالية (E) $2021x - 2020y = 5$

(ا) بين ان العددين 2020 و 2021 اوليان فيما بينهما و استنتج ان المعادلة (E) تقبل حولا

(ب) بين انه اذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (E) فان $x \equiv 0[5]$

(ج) استنتج حلا خاصا (x_0, y_0) حيث $2022 \leq x_0 \leq 2027$ ثم حل المعادلة (E)

2/ عين الاعداد الصحيحة النسبية a بحيث : $\begin{cases} a \equiv 5 [2020] \\ a \equiv 0 [2021] \end{cases}$

3/ (ا) ادرس و حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 9

(ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $2021^{1962n+1954} + 1442^{1440n+12} + 4 \equiv 0[9]$

(ج) عين الثنائيات (x, y) من $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ حلول المعادلة (E) بحيث : $5^{y-x} \equiv 8[9]$

التمرين الرابع (7 نقاط)

I - g الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = x + 1 - (2x + 1)\ln x$

1/ (ا) احسب $g'(x)$ ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g'

(ب) بين انه من اجل كل x من $]0; +\infty[$: $g'(x) < 0$

(ج) احسب نهايتي الدالة g عند كل من $+\infty$ و 0 ثم شكل جدول تغيراتها

2/ بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.83 < \alpha < 1.84$

3/ حدد إشارة $g(x)$ حسب قيم x

II - f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(o, \vec{i}; \vec{j})$ وحدة الطول

(على محور الفواصل 1cm و على محور الترتيب 4cm)

1/ احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا

2/ (ا) بين انه من اجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2g(x)}{(x^2+x)^2}$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

3/ بين ان $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ و استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$

4/ اكتب معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1

5/ أنشئ المماس (T) و المنحنى (C_f)

6/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx - m$

7/ نعتبر الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $h(x) = [f(x)]^2$

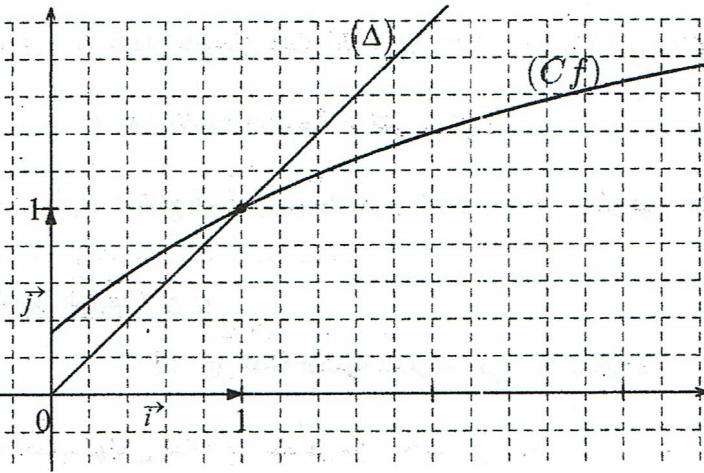
ادرس اتجاه تغير الدالة h و شكل جدول تغيراتها

التمرين الأول (4,5 ن):

$$f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$$

f الدالة العددية المعرفة و المتزايدة تماما على $[0; +\infty[$ بالعلاقة :

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعظم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$



و المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$.

α عدد حقيقي موجب . (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول u_0

حيث $u_0 = \alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(I) عين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة

(II) نضع في كل ما يلي $\alpha = 0$

(1) أ) انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود

u_0, u_1, u_2, u_3 (دون حساب الحدود)

ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

(2) أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < 1$

ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً ، ثم برر تقاربها

(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حددها الأول

ب) عبر بدلالة n عن v_n ، ثم استنتج بدلالة n . احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = 1 + \frac{v_{2021}}{v_{2020}} + \dots + \frac{v_{n+2019}}{v_{2020}}$

(5) احسب بدلالة n المجموع T حيث : $T = \ln(|v_n|) + \ln(|v_{n+1}|) + \dots + \ln(|v_{n+2019}|)$

التمرين الثاني (4 ن):

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي :

و 5 كريات خضراء مرقمة كما يلي : 2 ، 2 ، 1 ، 0 ، 0

5 كريات حمراء مرقمة كما يلي : 2 ، 2 ، 1 ، 1 ، 0

نسحب عشوائياً من الكيس 4 كريات في آن واحد

(1) احسب احتمال كلا من الأحداث التالية :

A : الحصول على 4 كريات من نفس اللون

B : الحصول على 4 كريات أرقامها يمكن أن تشكل العدد 2020

C : الحصول على 4 كريات مجموع أرقامها يساوي 4

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب 4 كريات الرقم الأكبر من بين الأرقام الأربعة

أ) عين قيم X الممكنة ، ثم عرف قانون احتماله

ب) احسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X

ج) احسب احتمال الحدث : $|X - 1| = 1$

التمرين الثالث (4,5 ن):

- (1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5
- (2) عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $(2017^{4n+3} - 2 \times 2016^{8n} + 2014^{2n+1})$ على 5
- (3) بين أن العدد 131 أولي

(4) a و b عدنان طبيعيان حيث $m = PPCM(a, b)$ و $d = PGCD(a, b)$

$$\begin{cases} 3m + 7d = 2^n - 48 \\ a \times b = 5m \end{cases}$$

(أ) عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق :

(ب) استنتج قيمة n بحيث يكون $7 < n < 15$ ؛ ثم عين الثنائيات (a, b)

التمرين الرابع (7 ن):

$$g(x) = 1 - (1 + 2x)e^{2x}$$

(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة :

- (1) أحسب نهايتي الدالة g عند كل من $-\infty$ و $+\infty$
- (2) أدرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها
- (3) أحسب $g(0)$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

$$f(x) = x + 3 - xe^{2x}$$

(II) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة :

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- (1) أحسب نهايتي الدالة f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$
- (2) أ- بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له
ب- أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم (Δ)
- (3) أ- بين أن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x) = g(x)$
ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها
- (4) أ- بين أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاها على الترتيب α و β حيث:
 $-3,05 < \alpha < -3$ و $0,75 < \beta < 0,8$
ب- بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له
ج- أنشئ (T) ؛ (Δ) و (C_f)

(5) ناقش بيانها و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $f(x) = x + m$

$$h(x) = \frac{1 + 3x - e^{\frac{2}{x}}}{x}$$

(6) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعلاقة :

أ- بين أن من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x لدينا: $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

ب- أحسب $h'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة h و شكل جدول تغيراتها (دون حساب عبارة الدالة h')

$$(1+i)^{1402} = 2^{21} \left(e^{i \frac{1402\pi}{4}} \right)$$

$$= 2^{21} (C_n(200\pi + \frac{\pi}{2}) + i \sin(200\pi + \frac{\pi}{2}))$$

$$= 2^{21} (0 + i) = i 2^{21}$$

النتيجه 4.5

(E) $2021n - 2020y = 5$

$2020 = 2^5 \times 5 \times 101$

$2020 = 43 \times 47$

$P_6(2020, 2021) = 2$

اذن 2021، 2020

التي هي 2

$2021x - 2020y = 5$

حل (ن.ج) 4.5

$2021x = 2020y + 5$

$2021x \equiv 5 \pmod{2020}$

$5 \leq x \leq 2021$

$x \equiv 5 \pmod{2020}$

وهذا $x \equiv 5 \pmod{2020}$

$2022 \leq x_0 \leq 2027$

$x \equiv 5 \pmod{2020}$

$2022 \leq x_0 \leq 2027$

$2021(2021 - 2020y) = 5$

$2021(2021 - 2020y) = 5$

$2021(2021 - 2020y) = 5$

$2021(2021 - 2020y) = 5$

$2021(2021 - 2020y) = 5$

$2021(2021 - 2020y) = 5$

$E(X) = 0 \times \frac{24}{40} + 1 \times \frac{16}{40} = \frac{2}{5}$

$E(X) = 0 \times \frac{24}{40} + 1 \times \frac{16}{40} = \frac{2}{5}$

$E(X) = 0 \times \frac{24}{40} + 1 \times \frac{16}{40} = \frac{2}{5}$

$C_1 \times C_1 = \frac{1}{n+10} \times \frac{1}{n+4}$

$C_1 \times C_1 = \frac{1}{n+10} \times \frac{1}{n+4}$

$C_1 \times C_1 = \frac{1}{n+10} \times \frac{1}{n+4}$

$P(A) = \frac{C_1 \times C_1 + C_2 \times C_2}{n+14n+40}$

$P(A) = \frac{C_1 \times C_1 + C_2 \times C_2}{n+14n+40}$

$P(A) = \frac{C_1 \times C_1 + C_2 \times C_2}{n+14n+40}$

$\frac{n^2 + 8n + 22}{n^2 + 14n + 40} = \frac{7}{12}$

$\frac{n^2 + 8n + 22}{n^2 + 14n + 40} = \frac{7}{12}$

$\frac{n^2 + 8n + 22}{n^2 + 14n + 40} = \frac{7}{12}$

$5n^2 - 2n - 16 = 0$

$5n^2 - 2n - 16 = 0$

$5n^2 - 2n - 16 = 0$

$Z = e^{i(\frac{\pi}{2} + \pi)}$

$Z = e^{i(\frac{\pi}{2} + \pi)}$

$Z = e^{i(\frac{\pi}{2} + \pi)}$

$(1+i)^{1402} = i 2^{21}$

$(1+i)^{1402} = i 2^{21}$

$(1+i)^{1402} = i 2^{21}$

$(1+i)^{1402} = i 2^{21}$

$(1+i)^{1402} = i 2^{21}$

$(1+i)^{1402} = i 2^{21}$

$10 - u_n \leq v_n$

$10 - u_n \leq v_n$

$10 - u_n \leq v_n$

$10 - u_n \leq v_n$

$10 - u_n \leq v_n$

$10 - u_n \leq v_n$

$10 - u_n \leq v_n$

$10 - u_n \leq v_n$

$10 - u_n \leq v_n$

$10 - u_n \leq v_n$

$10 - u_n \leq v_n$

$10 - u_n \leq v_n$

$10 - u_n \leq v_n$

$10 - u_n \leq v_n$

$10 - u_n \leq v_n$

$10 - u_n \leq v_n$

$10 - u_n \leq v_n$

$10 - u_n \leq v_n$

$10 - u_n \leq v_n$

$10 - u_n \leq v_n$

$10 - u_n \leq v_n$

$10 - u_n \leq v_n$

$10 - u_n \leq v_n$

$10 - u_n \leq v_n$

$10 - u_n \leq v_n$

$10 - u_n \leq v_n$

$10 - u_n \leq v_n$

النتيجه 4.5

النتيجه 4.5

النتيجه 4.5

النتيجه 4.5

النتيجه 4.5

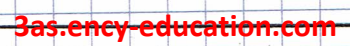
النتيجه 4.5

النتيجه 4.5

النتيجه 4.5

النتيجه 4.5

النتيجه 4.5



$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

[illegible]

KEY -

$$\begin{aligned} 1962n + 1954 &= 5^{1962n+1954} \\ &= 5^{1962n+1954} \times 5^{1954} \\ &= 5^{1962n+1954+1954} \\ &= 5^{1962n+3908} \end{aligned}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n < \infty$

$$T_n = \ln(|V_n|) + \ln(|V_{n+1}|) + \ln(|V_{n+2}|) + \dots + \ln(|V_{n+100}|)$$
$$P(X=2) = 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14}$$
$$\begin{cases} 3m+7 \leq 2^n-48 \\ a \times b \leq 5m \end{cases}$$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية : مولود قاسم - مــــــزلوق
من فكر الأستاذ: عبد السلام صلاح الدين
الشعبة: علوم تجريبية ، تقني رياضي

مديرية التربية لولاية سطيف
أرواح بـ كالوريا تجريبية جزائرية
السنة الدراسية : G_{101}

المدة : 3 سا و 30 د + 1 سالت ر

اختبار في مادة الرياضيات

اختر أحد الموضوعين الآتيين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

□ $n \in$ و $2 \leq n \leq 2019$ في ثانوية مولود قاسم - مزلق - عين ارنات - يدرس 2021 تلميذ من بينهم n إناث والباقي ذكور ، يحوي قسم تقني رياضي (MT) على 101 تلميذ نريد تشكيل لجنة للثانوية تتكون من تلميذين

(1) ما احتمال الحادثتين التاليتين: A "اللجنة تحوي على الأكثر ذكر"
 B "إذا حضر تلميذ من (MT) في اللجنة لا يحضر آخر من نفس الشعبة "

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل لجنة عدد الذكور فيها
(أ) اكتب قانون احتمال X

(ب) اكتب $E(X)$ بدلالة n وما هي قيمة n التي تجعل $E(X)$ أعظمي

(3) ما هي أصغر قيمة للعدد n حتى يكون $P(A) \geq 0.918$

التمرين الثاني : (04 نقاط) (خاص بالعلمي)

u و v متتالیتان معرفتان علی $\square$ ب: $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \frac{42}{43}u_n + 47$ ، $v_n = \ln(a - u_n)$ حیث $a \in \square$ و $u_n \leq a$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = 47 \left(\frac{42}{43} \right)^n$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية u

(2) عين a حتى تكون v متتالية حسابية أساسها $\ln \frac{42}{43}$

(3) في كل ما يأتي نضع $a = 2021$, اكتب v_n و u_n بدلالة n

(4) اكتب بدلالة n العبارتين $s_n = \frac{1}{43}(e^{v_0} + e^{v_1} + \dots + e^{v_{n-1}})$; $s'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$ **ثم احسب** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s'_n}{n}$

التمرين الثاني : (04 نقاط) (خاص بالتقني رياضي)

المستوي منسوب الى معلم م وم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، نقطة من المستوي حيث $(x ; y) \in \mathbb{R}^2$ نعتبر المستقيم

$(u; v) \in \mathbb{Z}^2$ حيث (D) نقطة من $P(u; v)$ لتكن $(D'): 2021x - y = 10098$ والمستقيم $(D): 120x + 11y = 667$

(1) عيّن احداثيتي Q نقطة تقاطع (D) مع (D') ثم عين مجموعة النقط P .

(2) عيّن مجموعة النقط P التي تنتمي الى القرص الذي مركزه O و نصف قطره 128

(3) $n \in \mathbb{N}$ ، ادرس بواقى قسمة 5^n على 9 ثم عين باقى قسمة العدد $1442^{2021} + 2021^{1442}$ على 9

(4) عدد طبيعي يكتب بالشكل $\overline{1ab8}^{11}$ و بالشكل $\overline{268a}^9$ ، جد a و b ثم اكتب n في النظام العشري

التمرين الثالث : (05 نقاط)

- نعتبر النقط A, B, C, D, E حيث : $Z_A = i$; $Z_B = -7$; $Z_C = -2 - 5i$; $Z_D = 5 - 4i$; $Z_E = 1 + 2i$
- (1) قارن بين $Z_A + Z_C$ و $Z_B + Z_D$ ، أكتب $\frac{Z_D - Z_B}{Z_C - Z_A}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$
- (2) (E_1) مجموعة النقط $M(Z)$ حيث : $\bar{Z} + i - re^{-i\frac{\pi}{4}} = 0$ مع $r \in \mathbb{R}_+$ ، تحقق أن $E \in (E_1)$ ثم عيّن (E_1)
- (3) لتكن G_α مرجح الجملة $\{(A; -6\alpha - 1), (B; 3\alpha), (C; 2\alpha), (D; \alpha)\}$ حيث : $\alpha \in \mathbb{R}_+$
- أ) عيّن لاحقة G_α بدلالة α ثم بيّن أن $G_\alpha \in (E_1)$
- ب) عيّن (E_α) مجموعة النقط $M(Z)$ حيث : $\|(-6\alpha - 1)\vec{MA} + 3\alpha\vec{MB} + 2\alpha\vec{MC} + \alpha\vec{MD}\| = \sqrt{2}$
- ج) من أجل $\alpha = 101$ عيّن لاحقة G_{101} ثم عيّن $(E_1) \cap (E_{101})$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

- f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = x^4 e^{-x-1}$
- (1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة الأخيرة بيانيا
- (2) احسب $f'(x)$ ثم شكّل جدول تغيرات f
- (3) احسب $f''(x)$ ثم عيّن إحداثيات نقط انعطاف المنحنى (C_f)
- (4) بيّن أن (C_f) مماسين (T_1) و (T_2) يشملان المبدأ ثم اكتب معادلتين لهما (حيث (T_2) معامل توجيهه موجب تماما)
- (5) انشئ (T_2) ثم (C_f)
- (6) ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = m x$
- (7) دالة معرفة بـ : $g = 0.2 f^{-2021} - 1.2$ ، اكتب g' بدلالة f و f' ثم أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_g) عند $x = -1$

مهما كان مستواك من التحضيرى إلى فلسفة الدكتوراه ستجد في

أروع بكالوريا تجريبية جزائرية

ملا عين رأت ولا أذن سمعت ولا يد نقلت ولا خطر على قلب بشر

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

- f دالة مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[-3; +\infty[$ معرفة بـ : $f(x) = \frac{2068x}{x+47}$
- u و v متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 47$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ ، $v_n = 1 - \frac{2021}{u_n}$
- (1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n $47 \leq u_n < 2021$ وادرس اتجاه تغير u ثم استنتج أنها متقاربة
- (2) بين أن v متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{44}$ ثم اكتب v_n و u_n بدلالة n و احسب $\lim u_n$
- (3) اكتب بدلالة n العبارة : $S_n = 2021 \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} + \dots + \frac{1}{u_{n+2020}} \right)$ و احسب $\lim S_n$

التمرين الثاني : (04 نقاط) (خاص بالعلمي)

- كيس به 3 كريات بيضاء مرقمة بـ 1، 1، 2 و 4 حمراء مرقمة بـ 2، 2، 2، 1 نسحب عشوائيا في آن واحد كريتين
- (1) ما احتمال الحادثتين : A "الكريتان المسحوبتان تحملان رقم فردي" ، B "الكريتان المسحوبتان ذات لونين مختلفين"
- (2) احسب $p(A \cap B)$ و استنتج $p(A \cup B)$.
- (3) جد قانون احتمال X حيث X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة
- (4) $x \in \mathbb{N}^*$ ، في لعبة يقوم لاعب بسحب كريتين في آن واحد، فإذا تحصل على كريتين بيضاوين يخسر $7x^2$ دينار، وإذا تحصل على كريتين مختلفتين في اللون يربح $7070x$ دينار، وإذا تحصل على كريتين حمراوين يخسر 14274326.5 دينار
- (أ) عين قيم x حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب
- (ب) ماهي قيمة x التي من أجلها يكون متوسط الربح أعظميا ، احسب قيمته عندئذ

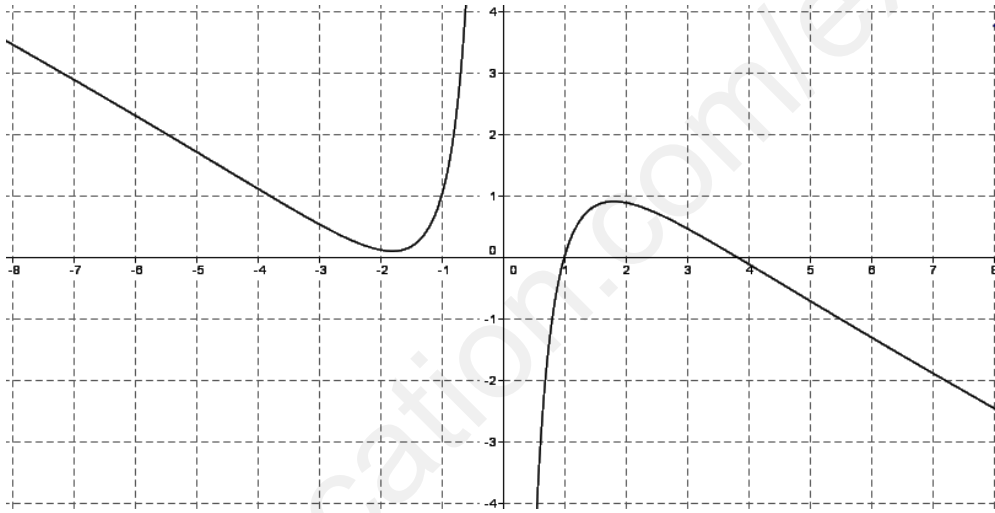
التمرين الثاني : (04 نقاط) (خاص بالتقني رياضي)

- (1) لتكن المعادلة $(E) : 2021x - 1442y = 11 \dots$ حيث x, y عدنان صحيحان
- بالاستعانة بخوارزمية إقليدس عين $\text{PGCD}(2021; 1442)$ ، جد حلا خاصا لـ (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)
- (2) $n \in \mathbb{N}$ يكتب بالشكل $1abc^{11}$ حيث تشكل الأعداد $a, b, c+1$ بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية حسابية
- و (a, b) حل لـ (E) ، جد الأعداد الطبيعية a, b, c ثم اكتب n في النظام العشري
- (3) $n \in \mathbb{N}$ ، ادرس بواقي قسمة 2^n على 3 ثم عين قيم n حيث $2[3] \equiv 1442n + 2021^n$ و $1437 < n < 1443$

التمرين الثالث : (05 نقاط)

- (1) حل في $\square$ المعادلة $z^2 + 4 = 0$ ثم استنتج حلول المعادلة $z^4 + 4 = 0$
- (2) نعتبر النقط: F, E, D, C, B, A حيث: $z_A = 2i$; $z_B = 1+i$; $z_C = \overline{z_B}$; $z_D = \overline{z_A}$; $z_E = 1$; $z_F = -z_B$;
 - اكتب على الشكل الآسي العددين z_A , z_B ثم اكتب على الشكل الجبري العدد $(8^{-0.5} z_A z_B)^{2020}$
- (3) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $(z_A)^n = ai$ مع $a \in \square_+^*$ و $2017 < n < 2025$
- (4) احسب $\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_D - z_A}\right)$, $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_D}\right|$ و قارن بين $z_A + z_C$ و $z_B + z_D$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$
- (5) أ) عيّن (E_1) مجموعة النقط $M(Z)$ حيث $\bar{z} - 1 - 2020\sqrt{2}e^{-i\theta} = 0$ مع $\theta \in \square$
 ب) عيّن (E_2) مجموعة النقط $M(Z)$ حيث $\left|\frac{z+2i}{z-1-i}\right| = 1$ ثم عيّن $(E_1) \cap (E_2)$

التمرين الرابع : (07 نقاط)



- f دالة معرفة على $\square^*$ كما يلي $f(x) = 2(\ln|x|)^2 - \frac{1}{4}(x-1)^2$ يعطى (C_f) في الشكل أعلاه ويعطى
- $a \square -0.57$; $b \square 1.81$; $c \square 3.81$; $d \square 6.13$ حيث $f(a) = f(d) = f'(c) = f'(1) = f''(b) = 0$ $f(c) \square 1.60$
- (I) بيّن أن $f(-x) = f(x) - x$ ثم استنتج العبارتين : $f'(-x) = 1 - f'(x)$; $f''(-x) = f''(x)$
- (II) بقراءة بيانية واستغلال المعطيات والسؤال السابق : (لا يطلب حساب $f'(x)$ و $f''(x)$)
- (1) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم شكّل جدولي تغيرات f و اشارة $f''(x)$ مستنتجا فواصل نقط انعطاف (C_f)
- (2) $\alpha \in \square^*$ ، بين أن (C_f) يقبل مماسين معامل توجيههما 1 عند نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما ثم اكتب بدلالة α ، $f(\alpha)$ ،
 معادلة للمماس $(T_{-\alpha})$ لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$ واستنتج معادلتَي (T_{-1}) ، (T_{-c})
- (3) شكّل جدول إشارة $f(x)$ على $\square^*$ ثم استنتج جدول إشارة $f(-x)$ على $\square^*$ والوضع النسبي لـ (C_f) مع (T_{-1})
- (4) انشئ (T_{-1}) ، (T_{-c}) ثم (C_f)
- (5) ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = x + m$
- (6) g دالة معرفة بـ $g = f^{-2020}$ ، اكتب g' بدلالة f و f' ثم اكتب معادلة للمماس (T) للمنحني (C_g) عند $x = -1$

انتهى الموضوع الثاني