الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية
امتحان الفصل الثاني
الشعبة : رياضيات

مديرية التربية لولاية بومرداس
ثانوية أحمد رحمون الثنية
دورة : مارس 2024

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 4 سا

على المترشح اختيار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول :(5.5 نقطة)

1) **أ-** عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7 .

ب- حدد الأعداد الطبيعية n بحيث يكون : $\left(2020^{1962} \times n + 4 \times 1441^{1954}\right) \equiv 0[7]$

2) نعتبر العدد الطبيعي N_p المكتوب في النظام العشري على الشكل : $N_p = \underbrace{\overline{111\ldots1}}_{p \text{ مرة}}$

أ- بين أن : $N_p \equiv p[3]$.

ب- استنتج باقي قسمة العدد N_{2020} على 3 .

ج- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $(3^n - 1)$ قابلا للقسمة على 2.

د- بين أن العدد N_p يقبل القسمة على 7 إذا وفقط إذا كان العدد $(3^p - 1)$ يقبل القسمة على 7

هـ- استنتج باقي قسمة العدد N_{2020} على 7 .

3) **أ-** حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $3x - 7y = 4$.

ب- استنتج الأعداد الصحيحة a التي تحقق الجملة : $\begin{cases} a \equiv 1[3] \\ 2a \equiv 3[7] \end{cases}$.

ج- عين باقي قسمة N_{2020} على 21

4) نعتبر العدد الطبيعي M المكتوب في النظام ذي الاساس 4 على الشكل : $M = \overline{abb2a0}$

أ- عين قيم a و b علما أن : $M - 4 \equiv 0[7]$.

ب- استنتج قيم M مكتوبة في النظام العشري .

التمرين الثاني : (4.5 نقطة)

يحتوي وعاء U على5 كريات حمراء و3 كريات صفراء وكريتين خضراوين . الكريات متماثلة لانفرق بينها باللمس .نسحب عشوائيا ثلاث كريات من الوعاء U في آن واحد . A ، B، C ثلاثة أحداث حيث :

"الحصول على ثلاث كريات حمراء " A ، " الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون " B

" الحصول على ثلاث كريات مختلفة اللون مثنى مثنى" C

1) أحسب $p(A); p(B); p(C)$ احتمال الأحداث A، B، C على الترتيب .

2) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد ألوان الكريات المسحوبة .

- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي .

3) نضيف $(n-5)$ كرية حمراء إلى الوعاء U حيث $n \geq 5$ ، ثم نسحب عشوائيا كريتين على التوالي دون إرجاع . نعتبر الحدثين D و E حيث : "الحصول على كريتين حمراوين" D " الحصول على كريتين مختلفتين في اللون" E

أ- أثبت أن : $p(D) = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$.

ب- أحسب بدلالة n العدد $p(E)$ احتمال الحدث E .

ج- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $p(E) \geq \frac{1}{2}$.

www.ency-education.com

التمرين الثالث : (10 نقاط)

نعتبر من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، الدالة f_n المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بـ :

$$f_n(x) = x^n\, ln(x+1)$$

(C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

I. لتكن h_n الدالة المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بـ :

$$h_n(x) = \frac{x}{x+1} + nln(x+1)$$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة h_n .

2) أحسب $h_n(0)$ ثم استنتج إشارة $h_n(x)$ على المجال $]-1,+\infty[$.

3) نفرض أن $n = 1$

أ- برر قابلية الإشتقاق للدالة $f_1(x)$ ثم أكتب عبارة $f_1{}'(x)$ بدلالة $h_1(x)$.

ب- استنتج اتجاه تغير f_1 على المجال $]-1,+\infty[$.

4) ليكن n عدد طبيعي حيث $n \geq 2$.

أ- أحسب نهايتي f_n عند $+\infty$ و -1

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f_n وشكل جدول تغيراتها (ميز الحالتين n زوجي و n فردي).

5) **أ-** أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن جميع المنحنيات (C_n) تشمل نقطتين ثابتتين A و B يطلب تعيينهما .

ج- أنشئ في نفس المعلم السابق (C_1) و (C_2) .

II. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كمايلي : $u_n = \int_0^1 x^n\, ln(x+1)dx$

1) **أ-** عين الأعداد الحقيقية $a\,;b\,;c$ بحيث من أجل كل x من المجال $[0\,,1]$ فإن : $\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$

ب- استنتج قيمة $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx$ ثم أثبت أن : $u_1 = \frac{1}{4}$.

2) أ- أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم برر تقاربها .

ب- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $0 \leq u_n \leq \frac{ln2}{n+1}$

ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0\,,1]$:

$$s_n = 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k x^k$$

أ- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0\,,1]$:

$$s_n = \frac{1}{x+1} - \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{x+1}$$

ب- استنتج أن :

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k+1} = ln2 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}dx$$

ج- أثبت باستعمال التكامل بالتجزئة أن : $u_n = \frac{ln2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[ln2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right]$

انتهى الموضوع الأول

www.ency-education.com

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (5.5 نقطة)

I. **1) أ-** أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 .

ب- استنتج باقي قسمة العدد $1440^{2019^{2020}}$ على 7 .

2) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $4\left(5^{n-2}+5^{n-3}+\cdots+1\right)\equiv 3[7]$.

3) أ- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $2C_{n+1}^2+A_{n+3}^2=2n^2+6n+6$

ب- عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $(2C_{n+1}^2+A_{n+3}^2)$ مضاعفا للعدد 7.

4) نضع $n=9$.نعتبر x و y عددين صحيحين ولتكن المعادلة : $(E)\ldots 15=C_{10}^2x-A_{12}^2y$

أ- أثبت أن المعادلة (E) تقبل حلا على الأقل في $\mathbb{Z}^2$.

ب- بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $y\equiv 0[5]$ ،ثم حل المعادلة (E).

5) أ- إذا كان x و y عددين طبيعيين ،فماهي القيم الممكنة لـ $pgcd(x;y)=d$.

ب- عين الثنا ئيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) بحيث يكون العددين x و y أوليان فيمابينهما .

II. نعتبر المعادلة $(E')\ldots\ldots 343x-648y=76$ حيث x و y عددين طبيعيين .

1) تحقق أن الثنائية $(4,2)$ حل للمعادلة (E') ثم عين حلولها في $\mathbb{N}^2$.

2) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{\beta 1\alpha\beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7 ويكتب $\overline{\alpha 1\alpha\alpha\beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5 .
جد العددين α و β ثم أكتب λ في نظام التعداد ذي الأساس 6 .

التمرين الثاني : (6.5 نقطة)

❖ لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=\frac{1}{\alpha}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\sqrt[\alpha]{u_n}$
حيث α عدد طبيعي أكبر تماما من 1 .

1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي α أكبر تماما من 1: $\sqrt[\alpha]{\frac{1}{\alpha}}>\frac{1}{\alpha}$.

2) برهن باستعمال البرهان التراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{\alpha}\le u_n<1$

3) أحسب u_1 ثم برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

4) علل لماذا المتتالية (u_n)متقاربة ؟

❖ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=ln(u_n)$.

1) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

2) استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

3) ليكن الجداء $p_n=\sqrt[n]{\frac{1}{u_1}}\times\sqrt[n]{\frac{1}{u_2}}\times\ldots\ldots\times\sqrt[n]{\frac{1}{u_n}}$

أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $p_n=\alpha^{\left(\frac{1-\alpha^{-n}}{(\alpha-1)n}\right)}$

4) أحسب الجداء التالي : $T_n=e^{v_0^2}\times e^{v_1^2}\times\ldots\ldots\times e^{v_n^2}$

www.ency-education.com

☜ فيمايلي نضع $\alpha = 2$

5) تحقق أن : $T_n = e^{-\frac{ln^2(2)(4^{-n}-4)}{3}}$. استنتج أن (T_n) متقاربة يطلب تعيين نهايتها .

6) أحسب بدلالة n المجموع :

$$s_n = \log(e^{v_1}) + \log\left(\frac{e^{v_2}}{2}\right) + \log\left(\frac{e^{v_3}}{3}\right) + \cdots + \log\left(\frac{e^{v_n}}{n}\right)$$

التمرين الثالث : (8 نقاط)

m عدد حقيقي غير معدوم . f_m الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f_m(x) = 2x + 3 - (x+1)e^{mx}$$

(C_m) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I. نضع $m = 1$

1) أحسب $f_1'(x)$ و $f_1''(x)$ ثم أدرس تغيرات الدالة f_1' وشكل جدول تغيراتها .

2) أحسب $f_1'(0)$ ثم استنتج إشارة $f_1'(x)$.

3) أدرس تغيرات الدالة f_1 وشكل جدول تغيراتها .

4) **أ-** بين أن المنحني (C_1) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له .

ب- ادرس وضعية (C_1) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

5) **أ-** بين أن المعادلة $f_1(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث $0.92 < \alpha < 0.93$ و $-1.56 < \beta < -1.55$

ب- جد معادلة المماس (T) للمنحني (C_1) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

ج- أنشئ (T)، (Δ)، (C_1) .

6) **أ-** باستعمال المكاملة بالتجزئة ، احسب بدلالة α المساحة $S(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_1) والمستقيمات التي معادلاتها : $x = 0$; $x = \alpha$; $y = 2x + 3$.

ب- بين أن : $S(\alpha) = \frac{2\alpha^2+3\alpha}{\alpha+1}$ ثم عين حصرا للعدد $S(\alpha)$.

II. نفرض أن m كيفي .

1) بين أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطتين ثابتتين يطلب تعيين إحداثيي كل منهما .

2) بين أن المستقيم (Δ) مقارب مائل لجميع المنحنيات (C_m) عند $-\infty$ ثم ادرس وضعية (C_m) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

3) n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 .

نضع $f_m^{(n)}$ الدالة المشتقة من الرتبة n للدالة f_m .

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 :

$$f_m^{(n)}(x) = -m^{n-1}e^{mx}(mx + m + n)$$

انتهى الموضوع الثاني

تمنياتي لكم النجاح في البكالوريا

www.ency-education.com

تصحيح اختبار الفصل الثاني 3 ر 2024/2023

الموضوع 1

التمرين 1: (5,5 نقاط)

1) أ- بواقي قسمة 3^n على 7

$3^0 \equiv 1[7]$ ، $3^1 \equiv 3[7]$ ، $3^2 \equiv 2[7]$ ، $3^3 \equiv 6[7]$ ، $3^4 \equiv 4[7]$

$3^5 \equiv 5[7]$ ، $3^6 \equiv 1[7]$

ومنه بواقي قسمة 3^n على 7 دورية ودورها 6 (0,5)

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي k لدينا

n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
بواقي قسمة 3^n على 7	1	3	2	6	4	5

ب- تحديد n حتى يكون

$\left(2020^{1962} \times n + 4 \times 1441^{1954}\right) \equiv 0[7]$ ... (1)

لدينا $2020 \equiv -3[7]$ ومنه $2020 \equiv 4[7]$

أي $2020^{1962} \equiv (-3)^{1962}[7]$

ومنه $2020^{1962} \equiv 3^{1962}[7]$

ولدينا $1962 = 6 \times 327$

ومنه $3^{1962} \equiv 1[7]$ (0,5)

إذن $\boxed{2020^{1962} \equiv 1[7]}$

ولدينا $1441 \equiv -1[7]$ ومنه $1441 \equiv 6[7]$

أي $1441^{1954} \equiv (-1)^{1954}[7]$

ومنه $\boxed{1441^{1954} \equiv 1[7]}$

تكافئ (1) $n+4 \equiv [7]$

أي $n \equiv 3[7]$ وبالتالي $n \equiv -4[7]$

ومنه $\boxed{n = 6k+1}$

2) $N_p = \overbrace{111\cdots1}^{p \text{ مرة}}$

أ) إثبات أن $N_p \equiv p[3]$

لدينا $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \cdots + 10 + 10^0$

ومنه $10 \equiv 1[3]$ و (0,5)

$10^{p-1} \equiv 1[3]$ ، $10^{p-2} \equiv 1[3]$ ، ... ، $10 \equiv 1[3]$

إذن $N_p \equiv \underbrace{1+1+\cdots+1}_{p \text{ مرة}}[3]$

ومنه $N_p \equiv p[3]$

ب) استنتاج باقي قسمة N_{2020} على 3

لدينا $2020 \equiv 1[3]$ و $N_{2020} \equiv 2020[3]$

ومنه $N_{2020} \equiv 1[3]$ إذن باقي قسمة N_{2020} على 3 هو 1 (0,25)

ج- إثبات أن $3^n - 1 \equiv 0[2]$

لدينا $3 \equiv 1[2]$ ومنه $3^n \equiv 1[2]$ إذن $3^n - 1 \equiv 0[2]$ (0,25)

د) إثبات أن $(3^p - 1) \equiv 0[7]$ إذا وفقط إذا $N_p \equiv 0[7]$

لدينا $N_p \equiv 0[7]$ تعني $10^{p-1} + 10^{p-2} + \cdots + 10^0 \equiv 0[7]$

ولدينا $10 \equiv 3[7]$ فإن $3^{p-1} + 3^{p-2} + \cdots + 3 + 1 \equiv 0[7]$ (0,75)

لدينا $3^{p-1} + 3^{p-2} + \cdots + 1 = 1 \cdot \frac{3^p - 1}{3 - 1}$ (مجموع حدود متتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول 1)

$= \frac{3^p - 1}{2}$

ومنه $2N_p \equiv (3^p - 1)[7]$

نفرض أن $N_p \equiv 0[7]$ ومنه $N_p = 7\alpha$

أي $\frac{3^p - 1}{2} = 7\alpha$ معناه $3^p - 1 = 14\alpha$

إذن العدد $(3^p - 1)$ يقبل القسمة على 7

نفرض أن $3^p - 1 \equiv 0[7]$ ونعلم أن $(3^p - 1)$ يقبل القسمة على 7

$3^p - 1 = 14\beta$ يقبل القسمة على 14

أي $\frac{3^p - 1}{2} = 7\beta$ ومنه $N_p \equiv 0[7]$

ومنه المطلوب

هـ) استنتاج باقي قسمة N_{2020} على 7

لدينا $N_{2020} \equiv \frac{3^{2020} - 1}{2}[7]$ أي $2N_{2020} \equiv (3^{2020} - 1)[7]$ (0,5)

www.ency-education.com

ولدينا $3^{2020} = 3^{6\times336+4}$

ومنه $3^{2020} \equiv 4[7]$ ومنه q تعني

$2N_{2020} \equiv (4-1)[7]$

أي $2N_{2020} \equiv 3[7]$

أي $8N_{2020} \equiv 12[7]$

وبما أن $8 \equiv 1[7]$ و $12 \equiv 5[7]$ فإن $N_{2020} \equiv 5[7]$

إذن باقي قسمة العدد N_{2020} على 7 هو 5

ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $3x-7y=4$

لدينا $3x-7y=4$ تعني $3x \equiv 4[7]$

ومنه $15x \equiv 20[7]$

وبما أن $15 \equiv 1[7]$ و $20 \equiv 6[7]$ فإن $x \equiv 6[7]$

أي يوجد عدد صحيح k بحيث $x = 7k+6$

وبالتعويض في المعادلة نجد $y = 3k+2$

إذن حلول المعادلة هي $(x,y) = (7k+6, 3k+2) \quad / k \in \mathbb{Z}$

ج) استنتاج الأعداد الصحيحة a التي

$\begin{cases} a \equiv 1[3] \\ 8a \equiv 12[7] \end{cases}$ أي $\begin{cases} a \equiv 1[3] \\ 2a \equiv 3[7] \end{cases}$ كيف

$\begin{cases} a = 3u+1 \\ b = 7v+5 \end{cases}$ أي $\begin{cases} a \equiv 1[3] \\ a \equiv 5[7] \end{cases}$ ومنه

ومنه $3u+1 = 7v+5$

$3u - 7v = 4$

ومنه $u = 7k+6$ و $v = 3k+2$

إذن $a = 3(7k+6)+1$

$\boxed{a = 21k+19} \quad / k \in \mathbb{Z}$

ج) لتعيين باقي قسمة N_{2020} على 21

لدينا $\begin{cases} N_{2020} \equiv 1[3] \\ N_{2020} \equiv 5[7] \end{cases}$ أي $\begin{cases} N_{2020} \equiv 1[3] \\ 2N_{2020} \equiv 10[7] \end{cases}$

ومنه $N_{2020} \equiv 19[21]$ أي باقي قسمة N_{2020} على 21 هو 19

إذن $N_{2020} = 21k+19$

4) (أ) تعيين a و b بحيث $M = \overline{abb2a0}$ يقبل القسمة على 4

$M-4 \equiv 0[7]$ تكافئ

$M = a.4^5 + b.4^4 + b.4^3 + 2.4^2 + a.4$

و $0 < a < 4$ و $0 \leq b < 4$ (0,75)

لدينا $4 \equiv -3[7]$ ومنه

$M-4 \equiv a(-3)^5 + b(-3)^4 + b(-3)^3 + 2(-3)^2 + a(-3) - 4[7]$

$M-4 \equiv -a.3^5 + b.3^4 - b.3^3 + 2.3^2 - 3a - 4[7]$

$3^5 \equiv 5[7]$ ، $3^4 \equiv 4[7]$ ، $3^3 \equiv 6[7]$

$3^2 \equiv 2[7]$ ، $3^1 \equiv 3[7]$

إذن $M-4 \equiv -5a + 4b - 6b + 4 - 3a - 4[7]$

$M-4 \equiv -8a - 2b[7]$

تعني $M-4 \equiv 0[7]$

$-8a - 2b \equiv 0[7]$

$-a - 2b \equiv 0[7]$

$a + 2b \equiv 0[7]$ ومنه

بما أن $0 < a < 4$ فإن $a \in \{1,2,3\}$

من أجل $a=1$ لدينا $1 + 2b \equiv 0[7]$ أي $2b \equiv -1[7]$ أي $2b \equiv 6[7]$ ومنه $b \equiv 3[7]$

وبما أن $0 \leq b < 4$ فإن $\boxed{b=3}$

من أجل $a=2$ لدينا $2 + 2b \equiv 0[7]$ أي $2b \equiv 5[7]$

تعني $8b \equiv 20[7]$

إذن $b \equiv 6[7]$ وبما أن $0 \leq b < 4$ فإنه لا توجد قيمة لـ b

من أجل $a=3$ لدينا $3 + 2b \equiv 0[7]$ أي $2b \equiv 4[7]$

www.ency-education.com

وهذا $b \equiv 2[7]$ و $0 \leq b < 4$ يكافئ $b = 2$

ب) استنتاج M مكتوبة في النظام العشري:

$a=1$ و $b=3$

$M = 133210_{(4)} = 2020$

$a=3$ و $b=2$

$M = 322230_{(4)} = 3756$

التمرين 2: (4,5 نقطة)

$U = 5R + 3J + 2V$

سحب 3 كرات في آن واحد

1) "A" الحصول على 3 كريات حمراء"

$P(A) = \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$ 0,5

"B" الحصول على 3 كريات من نفس اللون"

$P(B) = \frac{C_3^3 + C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{11}{120}$ 0,5

"C" الحصول على 3 كريات مختلفة اللون مثنى مثنى"

$P(C) = \frac{C_5^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$ 0,5

2) X متغير عشوائي يرفق بكل سحبة عدد ألوان الكريات المسحوبة.

• قانون الاحتمال لـ X:

لدينا مجموعة قيم X هي $\{1, 2, 3\}$ 0,25

$P(X=1) = P(B) = \frac{11}{120}$ 0,25

$P(X=2) = \frac{C_5^2 \times (C_3^1 + C_2^1) + C_3^2 (C_5^1 + C_2^1) + C_2^2 (C_5^1 + C_3^1)}{C_{10}^3}$

$= \frac{50 + 21 + 8}{120} = \frac{79}{120}$ 0,25

$P(X=3) = \frac{30}{C_{10}^3} = \frac{1}{4}$ 0,25

ومنه:

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	11/120	79/120	30/120

0,25

حساب الأمل الرياضياتي.

$E(X) = 1 \cdot \frac{11}{120} + 2 \cdot \frac{79}{120} + 3 \cdot \frac{30}{120} = \frac{259}{120}$ 0,25

3) $n+5$ كرة = n حمراء + 3 صفراء + 2 خضراء ($n \geq 5$)

سحب كريتين على التوالي دون إرجاع

"D": الحصول على كريتين حمراوين"

أ) إثبات أن $P(D) = \frac{n(n-1)}{(n+3)(n+4)}$

لدينا عدد الحالات الممكنة هو:

$A_{n+5}^2 = \frac{(n+5)!}{(n+5-2)!} = \frac{(n+5)!}{(n+3)!} = \frac{(n+5)!}{(n+3)!} = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)!}{(n+3)!}$

$= (n+5)(n+4)$ 0,5

$P(D) = \frac{A_n^2}{(n+5)(n+4)} = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$ وهو المطلوب

ب) حساب بدلالة n: $P(E)$

"E" الحصول على كريتين مختلفتين اللون"

$P(E) = \frac{2A_n^1 \times A_3^1 + 2A_n^1 \times A_2^1 + 2 \cdot A_2^1 \times A_3^1}{(n+5)(n+4)}$ 0,5

$= \frac{6n + 4n + 12}{(n+5)(n+4)} = \frac{10n+12}{n^2+9n+20}$

ج) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث:

$P(E) \geq \frac{1}{2}$.

$\frac{10n+12}{n^2+9n+20} \geq \frac{1}{2}$ معناه $P(E) \geq \frac{1}{2}$

أي $\frac{10n+12}{n^2+9n+20} - \frac{1}{2} \geq 0$ 0,5

ومنه $\frac{-n^2+11n+4}{2(n^2+9n+20)} \geq 0$

لدينا n عدد طبيعي و $n \geq 5$ ومنه $n^2+9n+20 > 0$

ومنه $-n^2+11n+4 \geq 0$ لأن $\Delta > 0$

$n \in \left[\frac{11-\sqrt{137}}{2}, \frac{11+\sqrt{137}}{2}\right]$

$n \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ و n طبيعي فإن $n \geq 5$ 0,5

elcy-education.com/exams

التمرين 03 : (10 دقائق)

$f_n(x) = x^n \ln(x+1)$ / $n \in \mathbb{N}^*$

$D_{f_n} =]-1, +\infty[$

I - $n \in \mathbb{N}^*$

$h_n(x) = \frac{x}{x+1} + n\ln(x+1)$ / $D_{h_n} =]-1,+\infty[$

1) دراسة اتجاه تغير h_n

- h_n قابلة للإشتقاق على $]-1,+\infty[$ ، ودالتها المشتقة:

$h_n'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{n}{x+1}$ (0,25)

من أجل $x \in]-1,+\infty[$ لدينا:

$\frac{1}{(x+1)^2} > 0$ و $\frac{1}{x+1} > 0$ (0,25) $\Rightarrow h_n'(x) > 0$

أي h_n متزايدة تماما على $]-1,+\infty[$ (0,25)

2) $h_n(0) = 0$ (0,25)

- إشارة $h_n(x)$:

بما أن h_n متزايدة تماما على $]-1,+\infty[$ و $h_n(0) = 0$ فإن إشارة $h_n(x)$ كالتالي:

x	-1		0		$+\infty$
$h_n(x)$	‖	$-$	0	$+$	

(0,25)

3) نفرض أن $n=1$ أي $f_1(x) = x\ln(x+1)$

أ) الدالة f_1 قابلة للإشتقاق على $]-1,+\infty[$ (0,25)

لأنها جداء دالتين قابلتين للإشتقاق على $]-1,+\infty[$

- عبارة $f_1'(x)$ بدلالة $h_n(x)$

من أجل كل x من $]-1,+\infty[$ لدينا:

$f_1'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} = h_1(x)$ (0,25)

ب) إشارة $f_1'(x)$ من إشارة $h_1(x)$

وبالتالي f_1 متناقصة تماما على $]-1,0]$ ومتزايدة تماما على $[0,+\infty[$ (0,25)

4) $n \geq 2$

أ) حساب نهايات f_n

$\lim_{x \to -1} f_n(x) = \begin{cases} -\infty & : n \text{ زوجي} \\ +\infty & : n \text{ فردي} \end{cases}$ (0,5)

$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ (0,25) / $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ ، $\lim_{x \to +\infty} \ln(x+1) = +\infty$

ب) اثبات أن f_n قابلة للإشتقاق على $]-1,+\infty[$ ودالتها المشتقة:

$f_n'(x) = n x^{n-1} \ln(x+1) + \frac{x^n}{x+1}$

$= x^{n-1}\left(n\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}\right)$

$= x^{n-1} \cdot h_n(x)$ (0,25)

- في حالة n زوجي فإن $(n-1)$ فردي وبالتالي:

x	-1		0		$+\infty$
x^{n-1}		$-$	0	$+$	
$h_n(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n'(x)$		$+$	0	$+$	

(0,25)

(0,25) ومنه f_n متزايدة على $]-1,+\infty[$

- وفي حالة n فردي فإن $(n-1)$ زوجي وبالتالي:

x	-1		0		$+\infty$
x^{n-1}		$+$	0	$+$	
$h_n(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	

(0,25)

ومنه f_n متناقصة تماما على $]-1,0]$ و

(0,25) متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

- جدول التغيرات

(0,25) n فردي.

x	-1		0		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$ ‖	↘	0	↗	$+\infty$

(0,25) n زوجي.

x	-1		0		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$ ‖	↗	0	↗	$+\infty$

www.ency-education.com

5) P

1) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن جميع المنحنيات (C_n) تشمل نقطتين ثابتتين A و B يطلب تعيينهما.

لتكن n و n' عددان طبيعيان غير معدومين ولتكن $M(x;y)$ نقطة من المستوي.

$M \in (C_n) \cap (C_{n'})$ معناه $x \in]-1;+\infty[$ و $M \in (C_n)$ و $M \in (C_{n'})$ (0,5)

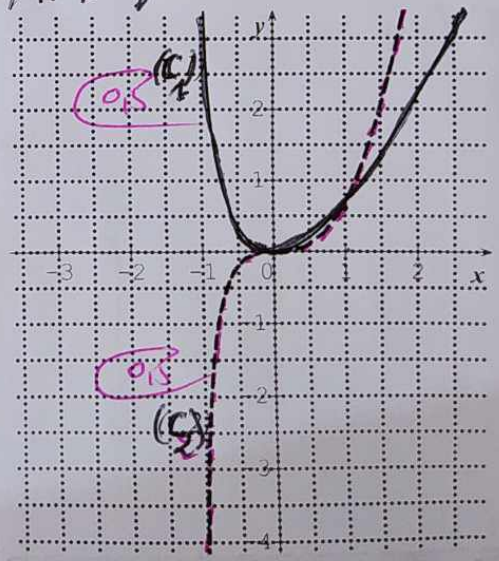
أي $x^n \ln(x+1) = x^{n'} \ln(x+1)$

ومنه $\ln(x+1)(x^n - x^{n'}) = 0$

وبالتالي $\ln(x+1) = 0$ أو $x^n - x^{n'} = 0$

ومنه $x = 0$ أو $x = 1$

إذن جميع المنحنيات (C_n) تشمل نقطتين ثابتتين $A(0;0)$ و $B(1;\ln 2)$



(0,5)

(0,5)

II. (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $U_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx$

1) a) تعيين a, b, c حيث من أجل كل x من $[0;1]$

$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$ (0,25)

باستعمال المطابقة: $a = 1, b = -1, c = 1$

استنتاج قيمة $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$

$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1|\right]_0^1$ (0,5)

$= \frac{1}{2} - 1 + \ln 2 - 0$

$= -\frac{1}{2} + \ln 2$

إثبات أن $U_1 = \frac{1}{4}$.

$U_1 = \int_0^1 x \ln(x+1)\,dx$

نضع $U(x) = \ln(x+1)$ ومنه $U'(x) = \frac{1}{x+1}$

و $V'(x) = x$ ومنه $V(x) = \frac{1}{2}x^2$

وبالتالي (0,5)

$U_1 = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln(x+1)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+1}\,dx$

$= \frac{1}{2}\ln(2) - 0 - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2} + \ln 2\right)$

$= \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{4}$

وهو المطلوب.

2) a) إثبات أن (U_n) متناقصة وتبرير تقاربها.

لدينا $U_{n+1} - U_n = \int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)\,dx - \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx$

$= \int_0^1 x^n(x-1)\ln(x+1)\,dx$ (0,5)

لدينا من أجل $x \in [0;1]$: $x - 1 \leq 0$ و $x^n \geq 0$

و $\ln(x+1) \geq 0$ ومنه $x^n(x-1)\ln(x+1) \leq 0$ وبالتالي

$\int_0^1 x^n(x-1)\ln(x+1)\,dx \leq 0$

ومنه (U_n) متناقصة.

www.ency-education.com

$S_n = 1 \cdot \frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)}$ (0,5)

$= \frac{1-(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} = \frac{1}{x+1} - \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{x+1}$

$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - (-1)\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}dx$ ب) استنتاج

$\int_0^1 S_n dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k dx = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k x^k dx$ لدينا من جهة

$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \left[\frac{1}{k+1}x^{k+1}\right]_0^1$

$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+1}(1-0)$ (0,5)

$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$

ومن جهة أخرى لدينا

$\int_0^1 S_n dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx - \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{x+1}dx$

$= \left[\ln(x+1)\right]_0^1 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}dx$

$= \ln 2 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}dx$

ومنه $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}dx$

ج) استنتاج أن: $U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln 2 - (1 - \ln 2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1})\right]$

$u(x) = \ln(x+1)$ ومنه $u'(x) = \frac{1}{x+1}$

$v'(x) = x^n$ ومنه $v(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$

$U_n = \frac{1}{n+1}\left[x^{n+1}\ln(x+1)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}dx$ ومنه (0,25)

$= \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1}(-1)^{n+1}\left[\ln 2 - \sum_{k=0}^{k=n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right]$ (6)

$= \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left(\ln 2 - (1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1})\right)$ وهو المطلوب

• لدينا من أجل كل x من $[0,1]$:

$x^n \geq 0$ و $\ln(x+1) \geq 0$

معناه $x^n \ln(x+1) \geq 0$ (0,25)

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$\int_0^1 x^n \ln(x+1)dx \geq 0$ أي $U_n \geq 0$

ومنه (U_n) محدودة من الأسفل وبما أنها متناقصة فإنها متقاربة

ب) لنبيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن:

$0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$

لدينا من أجل كل x من $[0,1]$:

$0 \leq x^n \leq 1$ $0 \leq \ln(x+1) \leq \ln 2$

ومنه $0 \leq x^n \ln(x+1) \leq (\ln 2)x^n$ (0,5)

وبالتالي $0 \leq \int_0^1 x^n \ln(x+1)dx \leq \ln 2 \int_0^1 x^n dx$

$0 \leq U_n \leq \ln 2 \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$

$0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$

وهو المطلوب

• استنتاج $\lim_{n\to+\infty} U_n$

لدينا $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln 2}{n+1} = 0$ وبما أن $0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$ فإن $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$ (0,25)

ج) $x \in [0,1]$ و $n \geq 2$

$S_n = 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k x^k$ بيّن أن

$S_n = \frac{1}{x+1} - \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{x+1}$

الموضوع 2

التمرين 1: (5,5 نقط)

I. 1) بواقي قسمة 5^n على 7

$5^0 \equiv 1[7]$ ، $5^1 \equiv 5[7]$ ، $5^2 \equiv 4[7]$ ، $5^3 \equiv 6[7]$ ، $5^4 \equiv 2[7]$

$5^6 \equiv 1[7]$ ، $5^5 \equiv 3[7]$

منه بواقي قسمة 5^n على 7 دورية ودورها 6

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي k:

	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
باقي قسمة 5^n على 7	1	5	4	6	2	3

0,5

2) استنتاج باقي قسمة العدد $1440^{2019^{2020}}$ على 7

لدينا $1440 \equiv 5[7]$ ومنه $1440^{2019^{2020}} \equiv 5^{2019^{2020}}[7]$

0,25 ومن $2019 \equiv 3[6]$ ومنه $2019^{2020} \equiv 3^{2020}[6]$

بما أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $3^n \equiv 3[6]$

فإن $2019^{2020} = 6k+3$ أي $5^{2019^{2020}} \equiv 6[7]$

إذن باقي القسمة هو 6.

3) تعيين العدد الطبيعي n حتى:

$4(5^{n-2}+5^{n-3}+\dots+1) \equiv 3[7]$ ... (1)

لدينا $5^{n-2}+5^{n-3}+\dots+1 = 1.\frac{5^{n-1}-1}{5-1} = \frac{1}{4}(5^{n-1}-1)$

0,5 ومنه (1) تكافئ $5^{n-1}-1 \equiv 3[7]$

أي $5^{n-1} \equiv 4[7]$

وبالتالي $n-1 = 6k+2$ أي $n = 6k+3$

4) البرهان أن $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 = 2n^2+6n+6$

$C_{n+1}^2 = \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2}$

0,5

$A_{n+3}^2 = \frac{(n+3)!}{(n+3-2)!} = \frac{(n+3)!}{(n+1)!} = (n+3)(n+2)$

$2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 = n(n+1)+(n+3)(n+2)$

$= n^2+n+n^2+2n+3n+6$

$= 2n^2+6n+6$ ب.د.و

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $(2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2)$ مضاعف لـ 7

$2n^2+6n+6 \equiv 0[7]$ أي $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 \equiv 0[7]$

0,5

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$6n \equiv$	0	6	5	4	3	2	1	[7]
$2n^2 \equiv$	0	2	1	4	4	1	2	[7]
$2n^2+6n+6 \equiv$	6	0	5	0	6	2	2	[7]

$n = 7a+1$ أو $n = 7a+3$ حيث $a \in \mathbb{N}$ ومنه $2n^2+6n+6 \equiv 0[7]$

ج) إيجاد n حتى يكون $C_{10}^2 x - A_{12}^2 y = 15$ ... (E)

أي $45x - 132y = 15$

1) أ) بين أن المعادلة (E) تقبل حلول في $\mathbb{Z}^2$

$PGCD(45,132) = 3$ لدينا $3 \mid 15$ ، 0,25 ومنه المعادلة (E) تقبل حلول

ب) حل المعادلة (E) في $\mathbb{Z}^2$

$45x - 132y = 15$

$15x - 44y = 5$

$44y = 15x - 5$ ومنه

$44y = 5(3x-1)$

0,25 إذن $44y \equiv 0[5]$ أي

$16y \equiv 0[5]$ ومنه $4y \equiv 0[5]$

$y \equiv 0[5]$ أي

حل المعادلة (E) هو $x_0 = 15$ و $y_0 = 5$ ومنه $y \equiv 0[5]$

0,5 لدينا $\begin{cases} 15x-44y=5 \\ 15(15)-44(5)=5 \end{cases}$

بالطرح نجد $15(x-15) = 44(y-5)$

لدينا $15 \mid 44(y-5)$ و 15 و 44 أوليان فيما بينهما

إذن $15 \mid y-5$ أي $y = 15k+5$

www.ency-education.com

$\lambda = \overline{2\alpha 1\alpha\beta}^5$ ، $\lambda = \overline{\beta 1\alpha\beta}^7$ (2

$0 < \beta \leq 4$ ، $0 < \alpha \leq 4$

$\overline{\beta 1\alpha\beta} = \beta.7^3 + 7^2 + \alpha.7 + \beta$

$\overline{\alpha 1\alpha\beta} = \alpha.5^4 + 5^3 + \alpha.5^2 + \alpha.5 + \beta$

ومنه $625\alpha + 125 + 25\alpha + 5\alpha + \beta = 343\beta + 49 + 7\alpha + \beta$

$648\alpha - 343\beta = -76$ ومنه

$343\beta - 648\alpha = 76$ (0,5)

$\alpha = 343k + 2$ ، $\beta = 648k + 4$ أي

$0 < \beta \leq 4$ ، $0 < \alpha \leq 4$ و

$\beta = 4$ ، $\alpha = 2$ ومنه $k = 0$

λ كتابة في النظام العشري للعدد

$\lambda = \overline{4124}^7$

$= 7^3 \times 4 + 7^2 + 7 \times 2 + 4 = 1439$

1439	6	
5	239	6
	5	39	6
		3	6	6
			0	1	6
				1	0

(0,25)

ومنه $\lambda = \overline{10355}^6$

(تصحيح G_1)

$q \neq 1$ ، $q \in \mathbb{N}^*$ / $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{\alpha} \\ U_{n+1} = \sqrt[q]{U_n} \end{cases}$ *

1- إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$\sqrt[q]{\frac{1}{\alpha}} > \frac{1}{\alpha}$

لدينا $0 < \frac{1}{\alpha} < 1$ ومنه $\alpha > 1$ (0,5)

ومنه $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^q < \frac{1}{\alpha}$ وبالتالي

$x = 44k + 15$ في (E) التعويض في

$(x, y) = (44k + 15, 15k + 5)$ ومنه

6) 15 x و y أوليان فيما بينهما.

$PGCD(x, y)$ تعيين القيم الممكنة لـ

$d = PGCD(x, y)$ نضع

$\begin{cases} d \mid x \\ d \mid y \end{cases}$ ومنه $d \mid 15x - 44y$ (0,25)

أي $d \mid 15$ وبالتالي $d \in \{1, 3, 5, 15\}$

ب) تعيين الثنائيات (x, y) حلول (E) حيث x و y أوليان فيما بينهما.

نبرهن من أجل $d = 5$ أي

$x \equiv 0[5]$ ومنه $44k + 15 \equiv 0[5]$

وبالتالي $4k \equiv 0[5]$

$k \in \mathbb{N} / k = 5\alpha$ ومنه $k \equiv 0[5]$ (0,5)

أذن $d = 5$ و $k = 5\alpha$

وبالتالي $d = 1$ و $k \neq 5\alpha$

أذن $(x, y) = (44k + 15, 15k + 5)$ و $k \neq 5\alpha$

II. (E') $-343x - 648y = 76$

أ) التحقق من أن (4, 2) حل للمعادلة (E')

$343 \times 4 - 648 \times 2$ لدينا

$= 76$

ومنه (4, 2) حل لـ (E') (0,25)

تعيين الحلول في $\mathbb{N}^2$.

$\begin{cases} 343x - 648y = 76 \\ 343(4) - 648(2) = 76 \end{cases}$

بالطرح نجد $343(x - 4) = 648(y - 2)$

$343 \mid 648(y - 2)$ ، $PGCD(343, 648) = 1$ ومنه (0,5)

$343 \mid y - 2$ أذن $y = 343k + 2$

بالتعويض في (E') نجد $x = 648k + 4$

أذن $(x, y) = (648k + 4, 343k + 2)$ / $k \in \mathbb{N}$

www.ency-education.com

$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} > \frac{1}{\alpha}$

أي $\sqrt[\alpha]{\frac{1}{\alpha}} > \frac{1}{\alpha}$ وهو المطلوب

2) إثبات أن $\frac{1}{\alpha} \leq u_n < 1$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = \frac{1}{\alpha}$

$\frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{\alpha} < 1$ ،

أي $\frac{1}{\alpha} \leq u_0 < 1$ إذن الخاصية محققة من أجل $n=0$ (0,75)

نفرض أن $\frac{1}{\alpha} \leq u_n < 1$ ونبرهن أن $\frac{1}{\alpha} \leq u_{n+1} < 1$

لدينا $\frac{1}{\alpha} \leq u_n < 1$ ومنه

$\sqrt[\alpha]{\frac{1}{\alpha}} \leq \sqrt[\alpha]{u_n} < 1$

$\frac{1}{\alpha} \leq \sqrt[\alpha]{\frac{1}{\alpha}} \leq u_{n+1} < 1$

ومنه $\frac{1}{\alpha} \leq u_{n+1} < 1$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n:

$\frac{1}{\alpha} < u_n < 1$

3) حساب u_1 ،

$u_1 = \sqrt[\alpha]{u_0} = \sqrt[\alpha]{\frac{1}{\alpha}}$ (0,25)

إثبات أن (u_n) متزايدة تماما

بالتراجع أنه يثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} > u_n$.

من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = \frac{1}{\alpha}$ و $u_1 = \sqrt[\alpha]{\frac{1}{\alpha}}$ (0,75)

ولدينا $u_1 > u_0$ أي $\sqrt[\alpha]{\frac{1}{\alpha}} > \frac{1}{\alpha}$

إذن الخاصية محققة من أجل $n=0$

نفرض أن $u_{n+1} > u_n$ ونبرهن أن $u_{n+2} > u_{n+1}$

لدينا: $u_{n+1} > u_n$ ومنه $\sqrt[\alpha]{u_{n+1}} > \sqrt[\alpha]{u_n}$

أي $u_{n+2} > u_{n+1}$ ومنه المطلوب

إذن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} > u_n$

أي (u_n) متزايدة تماما

4- لدينا $u_n < 1$ ومنه (u_n) محدودة من الأعلى وبما أنها متزايدة تماما فإنها متقاربة (0,25)

* $v_n = \ln(u_n)$

1) إثبات أن (v_n) هندسية

$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln\left(\sqrt[\alpha]{u_n}\right) = \ln\left(u_n\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\ln u_n$ (1)

$= \frac{1}{\alpha} v_n$

ومنه (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{\alpha}$ وحدها الأول

$v_0 = \ln u_0 = \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

2) عبارة u_n بدلالة n :

$v_n = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n \cdot \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ لدينا

و $u_n = e^{v_n}$ ومنه $u_n = e^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$ (0,25)

$\lim_{n\to+\infty} u_n$.

$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n = 0$ لأن $0 < \frac{1}{\alpha} < 1$ (0,25)

3) $P_n = \sqrt[n]{\frac{1}{u_1}} \times \sqrt[n]{\frac{1}{u_2}} \times \cdots \times \sqrt[n]{\frac{1}{u_n}}$

إثبات أن $P_n = \alpha^{\left(\frac{\alpha^{-n}-1}{(\alpha-1)n}\right)}$

$P_n = \sqrt[n]{\frac{1}{u_1} \times \frac{1}{u_2} \times \cdots \times \frac{1}{u_n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n}}$ (0,5)

$T_n = e^{-\frac{\ln^2(2)(4^{-n}-4)}{3}}$ $\alpha=2$ ζητούμενο

$T_n = e^{4\ln^2(\frac{1}{2})\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^{2n+2}}{2^2-1}}$

$= e^{4\ln^2(2)\cdot\frac{1-2^{-2n-2}}{3}}$

$= e^{-\ln^2(2)\cdot\frac{4^{-n-1}-1}{3}\cdot 4}$ (0.5)

$= e^{-\ln^2(2)\cdot\frac{4^{-n}-4}{3}}$

υπόλοιπο,

α) είναι (T_n) σύγκλιση.

$\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\ln^2(2)\cdot\frac{4^{-n}-4}{3}} = e^{\frac{4\ln^2 2}{3}}$ (0.5)

$\lim\limits_{n\to+\infty} 4^{-n} = 0$ διότι

α) είναι (S_n) αύξ.

Εξετάζουμε (6

$S_n = \log(e^{v_1}) + \log(\frac{e^{v_2}}{2}) + \cdots + \log(\frac{e^{v_n}}{n})$

$= \log\left(e^{v_1}\times\frac{e^{v_2}}{2}\times\cdots\times\frac{e^{v_n}}{n}\right)$

$= \log\left(\frac{e^{v_1}\times e^{v_2}\times\cdots e^{v_n}}{1\times 2\times\cdots\times n}\right)$ (0.5)

$= \log\left(\frac{e^{v_1+v_2+\cdots+v_n}}{n!}\right)$

$= \log\left(\frac{e^{v_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}}}{n!}\right)$ $\Big|\ v_1=\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2})$, $q=\frac{1}{2}$

$= \log\left(\frac{e^{\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2})\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}}}{n!}\right)$ $\left(1-(\frac{1}{2})^n\right)\ln(\frac{1}{2})$

$= \log\left(\frac{e}{n!}\right)$

$= \sqrt[n]{e^{-\ln(\frac{1}{\alpha})\cdot\frac{1-\alpha^{-n}}{\alpha-1}}}$

$= \sqrt[n]{e^{\ln\alpha^{\left(\frac{1-\alpha^{-n}}{\alpha-1}\right)}}}$ $= \sqrt[n]{\alpha^{\frac{1-\alpha^{-n}}{\alpha-1}}}$

$= \alpha^{\frac{1-\alpha^{-n}}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{n}}$ $= \alpha^{\frac{1-\alpha^{-n}}{(\alpha-1)\cdot n}}$

$T_n = e^{v_0^2}\times e^{v_1^2}\times\cdots\times e^{v_n^2}$ ακόμη (4

$= e^{v_0^2+v_1^2+\cdots+v_n^2}$

$= e^{v_0^2\cdot\frac{1-(\frac{1}{\alpha})^{2(n+1)}}{1-(\frac{1}{\alpha})^2}}$ (0.5)

$= e^{\ln^2(\frac{1}{\alpha})\cdot\frac{1-(\frac{1}{\alpha})^{2n+2}}{\alpha^2-1}\cdot\alpha^2}$

$= e^{\alpha^2\ln^2(\frac{1}{\alpha})\cdot\frac{1-(\frac{1}{\alpha})^{2n+2}}{\alpha^2-1}}$

eniyeducation.com/exams

$f_m(x) = 2x+3-(x+1)e^{mx}$ $m \in \mathbb{N}^*$

$m=1$ نضع I

$f_1(x) = 2x+3-(x+1)e^x$ (1

$f_1'(x) = 2-(x+2)e^x$ 0,25

$f_1''(x) = -(x+3)e^x$ 0,25

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f_1''(x)$	$+$	0	$-$

0,25

f_1' متزايدة على $]-\infty;-3]$ و متناقصة على $[-3;+\infty[$ 0,25

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f_1'''(x)$	$+$	0	$-$
$f_1'(x)$	2 ↗	$2+e^{-3}$	↘ $-\infty$

0,25

$\lim_{x\to-\infty} f_1'(x) = 2$ 0,25

$\lim_{x\to+\infty} f_1'(x) = -\infty$ 0,25

$f_1'(0) = 0$ 0,25 (2

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_1'(x)$	$+$	0	$-$

0,25

f_1 تغيرات (3

$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$ 0,25

$\lim_{x\to-\infty}(2x+3) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(x+1)e^x = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[\frac{2x+3}{x+1} - e^x\right]$ 0,25

$= -\infty$

$\lim_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{x+1} = 2$ و $\lim_{x\to+\infty} -e^x = -\infty$

$f_1(x) = 2x+3-(x+1)e^x$ (4

$\lim_{x\to-\infty}(x+1)e^x = 0$ 0,25 و

(Δ) المستقيم الذي معادلته $y = 2x+3$ مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$ و (C_f) يقع تحت (Δ) على $]-\infty;-1[$ و فوقه على $]-1;+\infty[$ (5

$f_1(x) - y = -(x+1)e^x$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f_1(x)-y$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $(-1;0)$	(C_f) تحت (Δ)

0,25

جدول تغيرات f_1 على $]-\infty;+\infty[$ (6

$f_1(0,92) \approx 0,02$ و $f_1(0,93) \approx -0,03$ و $]0,92;0,93[$ على f_1 مستمرة و رتيبة تماما

$f_1(0,92) \times f_1(0,93) < 0$ 0,5 إذن

المعادلة $f_1(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0,92;0,93[$

$f_1(-1,55) \approx 0,02$ و $f_1(-1,56) \approx -0,002$ 0,5 و $]-1,56;-1,55[$ على f_1 مستمرة و رتيبة تماما

المعادلة $f_1(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في $]-1,56;-1,55[$

إذن $f_1(x) \geq 0$ على $]-\infty;\beta]$ و $f_1(x) \leq 0$ على $[\beta;+\infty[$

(C_1) و (Δ) متقاطعان في نقطتين فاصلتاهما α و β (7

mathsmaroc-education.com/exams

1) إثبات أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيينها.

m و m' عددان حقيقيان.

لتكن $M(x;y)$ نقطة من المستوى.

$M \in (C_m) \cap (C_{m'})$ معناه $\begin{cases} y = f_m(x) \\ y = f_{m'}(x) \end{cases}$ (0,5)

ومنه $2x+3-(x+1)e^{mx} = 2x+3-(x+1)e^{m'x}$

$(x+1)e^{m'x} - (x+1)e^{mx} = 0$

$(x+1)(e^{m'x} - e^{mx}) = 0$

$e^{m'x} = e^{mx}$ أو $x+1=0$

$m=m'$ أو $x=-1$

ومنه جميع المنحنيات (C_m) تتقاطع في نقطة وحيدة هي $A(-1;1)$

2) حساب $\lim_{x\to+\infty} f_m(x) - y = \lim_{x\to+\infty} -(x+1)e^{mx} = 0$ (0,25)

ومنه (Δ) مستقيم مقارب لجميع المنحنيات (C_m) بجوار $+\infty$.

الوضع النسبي: (0,25)

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f_m(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	(C_m) فوق (Δ)		(C_m) و (Δ) متقاطعان في $A(-1;1)$		(C_m) تحت (Δ)

3) n عدد طبيعي غير معدوم و $x \in \mathbb{R}$

إثبات أن $f_m^{(n)}(x) = -m^{n-1}e^{mx}(mx+m+n)$ من أجل كل n.

من أجل $n=2$

$f_m^{(2)}(x) = f_m''(x)$

$f_m'(x) = 2 - (1\cdot e^{mx} + me^{mx}(x+1))$ (0,75)

$= 2 - e^{mx}(mx+m+1)$

$f_m''(x) = -me^{mx}(mx+m+1) - me^{mx}$

$= -me^{mx}(mx+m+2)$

ومن أجل $m=2$

$-m^{2-1}e^{mx}(mx+m+2)$ أي $-me^{mx}(mx+m+2)$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n=2$

نفرض أن $f_m^{(n)}(x) = -m^{n-1}e^{mx}(mx+m+n)$ ونبرهن أن

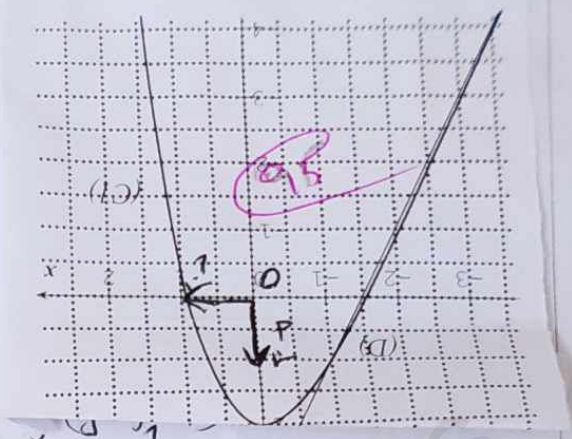
$f_m^{(n+1)}(x) = -m^{n}e^{mx}(mx+m+n+1)$

لدينا $f_m^{(n+1)}(x) = \left(f_m^{(n)}(x)\right)'$ ومنه $f_m^{(n+1)}(x) = -m^{n-1}\cdot m e^{mx}(mx+m+n+1)$

$= -m^{n}e^{mx}(mx+m+n+1)$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n+1$

خلاصة: من أجل كل n غير معدوم $f_m^{(n)}(x) = -m^{n-1}e^{mx}(mx+m+n)$



$S(\alpha) = \int_0^{\alpha} (x+1)e^x dx$ (0,5)

نضع $u(x) = x+1$ ومنه $u'(x) = 1$

$v'(x) = e^x$ ومنه $v(x) = e^x$

ومنه $S(\alpha) = \left[(x+1)e^x\right]_0^{\alpha} - \int_0^{\alpha} e^x dx$ (0,5)

$= (\alpha+1)e^{\alpha} - 1 - e^{\alpha} + 1$

$S(\alpha) = \alpha e^{\alpha}$ (U.a)

ب) إثبات أن $S(\alpha) = \frac{2\alpha^2+3\alpha}{\alpha+1}$

لدينا $f_1(\alpha) = 0$ معناه $2\alpha+3-(\alpha+1)e^{\alpha} = 0$

أي $e^{\alpha} = \frac{2\alpha+3}{\alpha+1}$ (0,25)

ومنه $S(\alpha) = \alpha\cdot\frac{2\alpha+3}{\alpha+1}$ أي $S(\alpha) = \frac{2\alpha^2+3\alpha}{\alpha+1}$

ج) حصر $S(\alpha)$.

لدينا $0,92 < \alpha < 0,93$

$0,92+1 < \alpha+1 < 0,93+1$ (0,25)

$1,92 < (\alpha+1) < 1,93$

$\frac{1}{1,93} < \frac{1}{\alpha+1} < \frac{1}{1,92}$ ... (1)

ولدينا $2(0,92)^2+3(0,92) < 2\alpha^2+3\alpha < 2(0,93)^2+3(0,93)$ ... (2)

من (1) و (2) نجد: $\frac{2(0,92)^2+3(0,92)}{1,93} < \frac{2\alpha^2+3\alpha}{\alpha+1} < \frac{2(0,93)^2+3(0,93)}{1,92}$

$2,31 < S(\alpha) < 2,35$

II نفرض m كيفية