



امتحان البكالوريا التجريبي

المدرسة العليا للأستاذة بورقلة
مصلحة النشاطات الثقافية والرياضية
دورة أفريل 2024
الشعبة: رياضيات
المادة: الرياضيات
المدة: 4 ساعات و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتين:
الموضوع الأول

التمرين الأول (4 ن)

نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (E) المعرفة كما يلي

$$(E) : 650x - 732y = 486$$

1. أ. أحسب $PGCD(650; 732)$ ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل حولا في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

ب. تحقق أن الثنائية (3; 2) حل للمعادلة (E) ثم استنتج مجموعة حلولها.

2. نعتبر L عددا طبيعيا يكتب $\alpha 0 \alpha \beta \beta$ في نظام التعداد الذي أساسه 5 ويكتب $\beta 6 \beta 0$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث α و β عدنان طبيعيان.

• عين كلاً من α و β ثم أكتب L في النظام العشري.

3. حل العدد 1962 إلى جداء عوامل أولية ثم استنتج قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $1962 \equiv 0 [n^2]$

4. نضع : $PGCD(a; b) = d$ و $PPCM(a; b) = m$ حيث $(a; b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

• عين كل الثنائيات $(a; b)$ التي تحقق

$$\begin{cases} m - 91d = 0 \\ a^2 + b^2 = 1962 \end{cases}$$

التمرين الثاني (4 ن)

المتتالية العددية (U_n) معرفة بـ $U_0 = 0$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{3}{\sqrt{6 - U_n^2}}$

I 1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_n < \sqrt{3}$

2. أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}^2 - U_n^2 = \frac{(U_n^2 - 3)^2}{6 - U_n^2}$

ب. بين أن المتتالية (U_n) متزايدة على $\mathbb{N}$ ثم استنتج أنها متقاربة.

II المتتالية العددية (V_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $V_n = \frac{U_n^2}{3 - U_n^2}$

1. أ. بين أن المتتالية (V_n) حسابية أساسها 1 ويطلب تعيين حدّها الأول V_0

ب. بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $U_n = \sqrt{\frac{3n}{n+1}}$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

2. من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $S_n = \frac{2024}{n + \sqrt{V_1}} + \frac{2024}{n + \sqrt{V_2}} + \dots + \frac{2024}{n + \sqrt{V_n}}$

أ. بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $\frac{2024n}{n + \sqrt{n}} \leq S_n \leq \frac{2024n}{n+1}$

ب. استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

التمرين الثالث (5 ن)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الآتية مع التبرير

1. حل المعادلة التفاضلية $y'' = \pi^2 e^{\pi x + \pi}$ الذي يحقق $y(0) = e^\pi$ و $y'(-1) = \pi$ هو الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي

أ $h(x) = e^{\pi x + \pi}$ (أ) ب $h(x) = \pi x + e^\pi$ (ب) ج $h(x) = e^{\pi x + \pi} + \pi x$ (ج)

2. عدد الإمكانيات لتشكيل عدد مضاعف للعدد 5 ومكوّن من ثلاثة أرقام متميزة مثنى مثنى باستخدام مجموعة الأرقام $\{0; 1; 9; 5; 4\}$ هو

أ 5 (أ) ب 24 (ب) ج 21 (ج)

3. إذا كان n عددا من $\mathbb{N}^*$ فإن المجموع : $\int_1^2 \frac{\log x}{x} dx + \int_2^3 \frac{\log x}{x} dx + \dots + \int_n^{n+1} \frac{\log x}{x} dx$ يساوي

أ $\frac{[\log(n+1)]^2}{2 \ln 10}$ (أ) ب $\frac{\log(n+1)}{\ln 100}$ (ب) ج $\frac{\ln(n+1) \times \log(n+1)}{2}$ (ج)

4. إذا كان z عددا مركّبا حيث $z = \sin \frac{\pi}{8} + i \cos \frac{\pi}{8}$ فإن

أ $\arg(z) \equiv \frac{3\pi}{8} [2\pi]$ (أ) ب $\arg(z) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$ (ب) ج $\arg(z) \equiv \frac{5\pi}{8} [2\pi]$ (ج)

5. مجموعة حلول المتراجحة $4^x + 2^{x+1} \leq 3$ ذات المجهول الحقيقي x هي المجال

أ $[0; +\infty[$ (أ) ب $]-\infty; 0]$ (ب) ج $[-3; 1]$ (ج)

التمرين الرابع (7 ن)

I الدالة العددية g معرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = xe^{x-1} - 1$

1. بين أن الدالة g متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$

2. أ. بين أن المعادلة $g(x) = 1$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $1, 3 < \alpha < 4$

ب. استنتج حسب قيم x من المجال $]0; +\infty[$ إشارة العبارة : $g(x) - 1$

II الدالة العددية f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب : $f(x) = e^{x-1} - 2 \ln x - 1$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{j}\| = 1cm$

1. أ. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وفسر النتيجة هندسياً ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x) - 1}{x}$

ج. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها

2. أ. أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها 1

ب. أنشئ كلاً من (T) و (C_f) . (تُعطى: $f(\alpha) \approx -0,2$).

ج. ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $e^x + e^{m+1}(x - 1) = e(\ln x^2 + 1)$

3. نعتبر λ عدداً حقيقياً حيث $0 < \lambda < 1$

أ. أكتب بدلالة λ العدد $\mathcal{A}(\lambda)$ المعروف بـ: $\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f(t)dt$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

ب. بين أن $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{A}(\lambda) = (2 - e^{-1}) cm^2$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4 ن)

صندوق به 6 بطاقات متماثلة لا نفرّق بينها عند اللّمس، منها ثلاث بطاقات حمراء، بطاقتين خضراوين وبطاقة بيضاء. البطاقات الحمراء تحمل الحروف: E ، N و N ، البطاقتين الخضراوين تحملان الحرفين: N و S ، أما البيضاء تحمل الحرف S نسحب عشوائيا من الصندوق ثلاث بطاقات في آن واحد.

(I) 1. أحسب احتمال كلّ من الحدثين الآتيين

أ. A : "الحصول على بطاقتين من نفس اللون بالضبط".

ب. B : "الحصول على ثلاث بطاقات يُمكن أن تشكّل كلمة ENS ".

2. أ. بين أنّ $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ ، ثمّ استنتج أنّ الحدثين A و B ليسا مستقلّين.

ب. أحسب $P_A(\bar{B})$ (احتمال الحدث $\bar{B}$ علما أنّ الحدث A محقّق)

(II) نضيف إلى الصندوق n بطاقة تحمل الحرف E حيث $n \in \mathbb{N}^*$ ، ونسحب عشوائيا من الصندوق بطاقتين على التوالي

وبإرجاع، وليكن X المتغيّر العشوائي الذي يُرفق بكل سحب لبطاقتين عدد مرّات ظهور الحرف S

1. أ. برّر أنّ مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X هي $\{0; 1; 2\}$

ب. عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X

2. عيّن قيمة العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $P\left(\int_0^x te^t dt = 1\right) = \frac{3}{8}$

التمرين الثاني (4 ن)

(I) حلّ في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(2iz + \sqrt{3} + i)(z^2 + 2z + 2) = 0$

(II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لاحتقاتها

z_A ، z_B ، z_C و z_D على الترتيب حيث: $z_A = -1 + i$ ، $z_B = \bar{z}_A$ ، $2z_C = z_A \times (1 + i\sqrt{3})$ و $z_A + z_D = 0$

1. أ. أكتب z_A على الشكل المثلثي ثمّ استنتج كتابة z_C على الشكل المثلثي.

ب. أكتب z_C على الشكل الجبري ثمّ استنتج القيمة المضبوطة لكلّ من $\sin \frac{13\pi}{12}$ و $\cos \frac{13\pi}{12}$

2. بين أنّ العدد المركّب $\frac{z_B - z_D}{z_B - z_A}$ تخيليّ صرف ثمّ استنتج طبيعة المثلث ADB

3. عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاّحة z حيث: $\frac{\bar{z} - z_B}{\bar{z} - z_A} \times \frac{z - z_A}{z - z_B} = 1$

التمرين الثالث (5 ن)

المتتالية العددية (U_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي

$$\begin{cases} U_0 = 0 ; U_1 = 1 \\ U_{n+2} = 3U_{n+1} - 2U_n \end{cases}$$

1. من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ نضع: $V_n = U_{n+1} - U_n$

أ. بين أنّ المتتالية (V_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل

- ب. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = 2^n - 1$
- ج. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $PGCD(U_n; U_{n+1}) = 1$
2. من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $L_n = 3^n + (U_n + 1)^{2024} + U_n$
- أ. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2^n و 3^n على 5
- ب. بين أن العدد L_n يقبل القسمة على 5 إذا وفقط إذا كان العدد الطبيعي n فردياً.
3. أ. بين أنه من أجل كل n و p من $\mathbb{N}$ حيث $n \geq p$: $U_n = 2^p \times U_{n-p} + U_p$
- ب. استنتج أن $PGCD(U_{1962}; U_{1954}) = 3$

التمرين الرابع (7 ن)

I الدالة العددية g معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$

- أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-1; +\infty[$
 - أحسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$
- II الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{2 \ln(e^x + 1)}{e^x} - 1$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- أ. أحسب كلاً من $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ مفسراً النتيجة هندسياً.
- ب. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = 2e^{-x} \times g(e^x)$
- ج. استنتج أن الدالة f متناقصة تماماً على $\mathbb{R}$ ثم شكّل جدول تغيراتها.
- أ. بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0,9 < \alpha < 1$
- ب. أنشئ المنحنى (C_f)
- أ. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) + f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$
- ب. استنتج دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$

III المتتالية العددية (β_n) معرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $\beta_n = 2 \int_0^1 e^{-\frac{x}{n}} \ln(1 + e^x) dx$

- أ. أحسب β_1 ثم فسّر النتيجة هندسياً.
- ب. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\beta_n \leq 2 \ln(1 + e)$
- ج. بين أن المتتالية (β_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}^*$ ثم استنتج أنها متقاربة نحو عدد حقيقي l
- أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $(1 - e^{-\frac{1}{n}}) \ln 4^n \leq \beta_n \leq (1 - e^{-\frac{1}{n}}) \ln(1 + e)^{2n}$
- ب. استنتج حصراً للعدد l

انتهى الموضوع الثاني

الإختبار التجريبي رقم 4 (Bac 2024)

التمرين 01 (4 نقاط)

يحتوي كيس على أربع كريات بيضاء و ثلاث كريات سوداء كل الكريات متماثلة وغير متميزة عند اللمس
نسحب من الصندوق أربع كريات في آن واحد

1 أحسب احتمال الحدث A : "الحصول على الأقل على كرية بيضاء "

2 ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب العدد $ax + y$

حيث x يمثل عدد الكريات البيضاء و y يمثل عدد الكريات السوداء و a عدد حقيقي
أ/ عين قيم المتغير العشوائي X

ب/ عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$ بدلالة a

ج/ عين قيمة العدد الحقيقي a حتى يكون $E(X) = \frac{32396}{7}$

3 نسحب الآن من هذا الكيس أربع كريات على التوالي بالإرجاع

أحسب احتمال الحدث B : "الحصول على الأقل على كرية بيضاء "

التمرين 02 (4 نقاط)

(I) لتكن في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 - (3 + i)z + 4 = 0 \dots (E)$

1 عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب $-8 + 6i$

2 حل المعادلة (E) نرمز إلى الحلين بـ z_1 و z_2 حيث $|z_1| < |z_2|$

(II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B ، C التي

لواحقها على الترتيب i ، z_1 و z_2

1 أكتب العدد المركب $L = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي

2 بين أن النقطة C هي صورة النقطة B بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيين عناصره المميزة

3 استنتج طبيعة المثلث ABC

التمرين 03 (5 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ : $u_1 = \frac{1}{2}$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right) u_n$

1 أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n \geq 0$

ب/ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة ، ثم عين نهاية المتتالية (u_n)

2 نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $v_n = \frac{u_n}{n}$

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_1

ب/ أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

3 نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $w_n = \ln(v_n)$

أ/ أثبت أن المتتالية (w_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول w_1

ب/ أحسب بدلالة n كل من P_n و S_n حيث : $P_n = \frac{u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n}{n!}$ و $S_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n$

التمرين 04 (7 نقاط)

-I f هي الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) + 1$; $x \in]0; +\infty[$
 $f(0) = 1$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة 2cm)

1 أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، فسر بيانها النتيجة المحصل عليها ، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2 أدرس قابلية الاشتقاق لـ f عند $x_0 = 0$

ب/ أثبت أن f قابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$

3 أحسب $f'(x)$ على المجال $[0; +\infty[$ ، ثم استنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4 بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيدا α حيث $4,6 < \alpha < 4,7$

5 أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

-II g هي الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ : $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

1 أحسب $g'(x)$ و $g''(x)$ ، ثم أدرس إتجاه تغير الدالة g'

2 استنتج إشارة $g'(x)$ على المجال $[0; +\infty[$

3 أدرس إتجاه تغير الدالة g

4 استنتج الوضع النسبي بين (C_f) و (T)

5 أحسب $f(6)$ ثم أنشئ كلا من (C_f) و (T) .

6 بإستعمال التكامل بالتجزئة أحسب بدلالة n : $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 \ln x \, dx$ حيث n عدد طبيعي

7 استنتج بدلالة n المساحة $A(n)$ بـ cm^2 للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمماس (T)

والمستقيمين اللذين معادلتيهما : $x = 1$ و $x = \frac{1}{n}$ ،

بالتوفيق إن شاء الله

إذا أدار الله سفينتك لليمين فتأذيت وتألمت ، فاعلم ان
 اليسار كان موتك المحتم ، فاحمد الله دائما



1 عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب $-8 + 6i$

نضع $w = x + iy$ حيث $w^2 = -8 + 6i$ ومنه

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \dots (1) \\ x^2 - y^2 = -8 \dots (2) \\ 2xy = 6 \dots (3) \end{cases} \text{ لدينا } \begin{cases} x = 1 \\ \text{أو} \\ x = -1 \end{cases} \text{ نجد } 2x^2 = 2 \text{ ومنه } y = 3 \text{ أو } y = -3$$

بالتعويض في (3) نجد

✓ إذا كان $x = 1$ ، فإن $2y = 6$ ، أي أن

$y = 3$ ، ومنه نستنتج أن : $w = 1 + 3i$

✓ إذا كان $x = -1$ ، فإن $2y = 6$ ، أي أن

$y = -3$ ، ومنه نستنتج أن : $w = -1 - 3i$

2 حل المعادلة (E)

لدينا : $\Delta = -8 + 6i$ ، ومنه $\Delta = (1 + 3i)^2$

ومن المعادلة (E) تقبل حلان هما

$$z_1 = \frac{3 + i + 1 + 3i}{2} = 2 + 2i$$

$$z_2 = \frac{3 + i - 1 - 3i}{2} = 1 - i$$

(II) 1 أكتب العدد المركب $L = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي

$$L = \frac{1 - i - i}{2 + 2i - i} = \frac{1 - 2i}{2 + i} \times \frac{2 - i}{2 - i} = -i$$

$$L = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

2 بين أن النقطة C هي صورة النقطة B

لدينا $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-\frac{\pi}{2}i}$ ، ومنه $z_C - z_A = e^{-\frac{\pi}{2}i}(z_B - z_A)$

ومنه نستنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بدوران

مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

3 استنتج طبيعة المثلث ABC

$$\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1 \Rightarrow \frac{AC}{AB} = 1 \Rightarrow AC = AB$$

$$\arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$$

ومنه نستنتج أن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في A

الحل المفصل لإختبار رقم 04

عدد الحالات الممكنة : $C_4^4 = 35$

1 حساب $P(A)$

$$P(A) = \frac{C_4^1 C_3^3 + C_4^2 C_3^2 + C_4^3 C_3^1 + C_4^4 C_3^0}{35} = \frac{35}{35} = 1$$

2 أ/ عين قيم المتغير العشوائي X

$$\begin{cases} a(1) + 3 = a + 3 \\ a(2) + 2 = 2a + 2 \\ a(3) + 1 = 3a + 1 \\ a(4) + 0 = 4a \end{cases} \text{ عند سحب أربع كرات نميز مايلي :}$$

ومن قيم المتغير العشوائي X هي

$$\{a + 3; 2a + 2; 3a + 1; 4a\}$$

ب/ عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X

$$P(X = a + 3) = \frac{C_4^1 C_3^3}{35} = \frac{4}{35}$$

$$P(X = 2a + 2) = \frac{C_4^2 C_3^2}{35} = \frac{18}{35}$$

$$P(X = 3a + 1) = \frac{C_4^3 C_3^1}{35} = \frac{12}{35}$$

$$P(X = 4a) = \frac{C_4^4 C_3^0}{35} = \frac{1}{35}$$

x_i	$a + 3$	$2a + 2$	$3a + 1$	$4a$
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

❖ أحسب أمله الرياضي $E(X)$

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i P_i = \frac{4(a + 3) + 18(2a + 2) + 12(3a + 1) + 4a(1)}{35}$$

$$E(X) = \frac{80a + 60}{35} = \frac{16a + 12}{7}$$

ج/ عين قيمة العدد الحقيقي a حتى يكون $E(X) = \frac{32396}{7}$

$$\frac{16a + 12}{7} = \frac{32396}{7} \Rightarrow 16a + 12 = 32396$$

ومنه $16a + 12 = 32396$ ، ومنه $a = 2024$

3 نسحب الآن من هذا الكيس أربع كرات على التوالي بالإرجاع

أحسب احتمال الحدث B : " الحصول على الأقل على

كرية بيضاء "

$$P(B) = \frac{4(4^1 \times 3^3) + 6(4^2 \times 3^2) + 4(4^3 \times 3^1) + 4^4}{7^4} = \frac{2320}{2401}$$

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه $u_n \geq 0$

نسمي الخاصية $p(n) : u_n \geq 0$

من أجل $n = 1$ ، لدينا $u_1 = \frac{1}{2} \geq 0$ ، ومنه $u_1 = \frac{1}{2} \geq 0$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n = 1$

نفرض صحة $p(n)$ من أجل n كفي حيث $n \geq 1$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ أن $u_{n+1} \geq 0$

لدينا $u_n \geq 0$ ، ومنه $\left(\frac{n+1}{2n}\right) u_n \geq 0$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n+1$

ومنه نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

فإن $u_n \geq 0$

ب/ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{n+1}{2n}\right) u_n - u_n = u_n \left[\frac{n+1}{2n} - 1\right]$$

$$u_{n+1} - u_n = u_n \left[\frac{-n+1}{2n}\right]$$

من أجل كل $n \geq 1$ فإن $-n+1 \leq 0$

ومنه $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ، ومنه نستنتج أن (u_n) متناقصة

❖ استنتج أنها متقاربة : بما أن (u_n) متناقصة

ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي متقاربة

❖ تعيين نهاية المتتالية (u_n)

بما أن (u_n) متقاربة والدالة f المعرفة بـ $f(x) = x$

مستمرة من أجل كل $x \geq 1$ فإن نهاية (u_n) تحقق

$$l = \frac{1}{2}l$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{n+1}{2n}\right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{n}{2n}\right] = \frac{1}{2}$$

لدينا $l = \frac{1}{2}l$ معناه $l - \frac{1}{2}l = 0$ معناه $\frac{1}{2}l = 0$ ، ومنه

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \text{ ، ومنه } l = 0$$

2/ أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{\left(\frac{n+1}{2n}\right) u_n}{n+1} = \frac{u_n}{2n} = \frac{1}{2} v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

حدها الأول $v_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{1}{2}$

ب/ أكتب عبارة v_n بدلالة n

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$$

❖ استنتج عبارة u_n بدلالة n

بما أن $v_n = \frac{u_n}{n}$ فإن $u_n = n \times v_n$ ، ومنه $u_n = \frac{n}{2^n}$

3/ أ/ أثبت أن المتتالية (w_n) حسابية

$$w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln\left(\frac{1}{2} v_n\right) = \ln \frac{1}{2} + \ln(v_n)$$

$$w_{n+1} = \ln \frac{1}{2} + w_n$$

ومنه (w_n) متتالية حسابية أساسها $r = \ln \frac{1}{2}$

حدها الأول $w_1 = \ln(v_1) = \ln \frac{1}{2}$

عبارة w_n بدلالة n

$$w_n = w_1 + (n-1)r$$

$$w_n = \ln \frac{1}{2} + (n-1) \ln \frac{1}{2} = n \ln \frac{1}{2}$$

ب/ أحسب بدلالة n كل من S_n و P_n

$$S_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n$$

نلاحظ أن S_n هي حدود متتابعة لمتتالية حسابية ومنه

$$S_n = \frac{n}{2} \left(\ln \frac{1}{2} + n \ln \frac{1}{2} \right) = \frac{n}{2} \left[(n+1) \ln \frac{1}{2} \right]$$

$$P_n = \frac{u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n}{n!}$$

$$P_n = \frac{u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n}{1 \times 2 \times \dots \times n} = \frac{u_1}{1} \times \frac{u_2}{2} \times \dots \times \frac{u_n}{n}$$

$$P_n = v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$$

$$P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \dots \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+\dots+n}$$

$$P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

1/ أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3}{2} x^2 - x^2 \ln x + 1 \right] = 1$$

فسر بيانيا النتيجة المحصل عليها

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$ فإن الدالة f

مستمرة عند $x_0 = 0$

$$(T): y = 2(x - 1) + \frac{5}{2}$$

$$(T): y = 2x + \frac{1}{2}$$

g-II دالة معرفة بـ: $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

① أحسب $g'(x)$ و $g''(x)$ ، ثم أدرس إتجاه تغير الدالة g'

$$g'(x) = f'(x) - 2$$

$$g''(x) = f''(x) = 2(1 - \ln x) - \frac{1}{x} \times 2x$$

$$g''(x) = -2 \ln x$$

x	0	1	$+\infty$
$g''(x)$		+	-
$g'(x)$	-2	0	$-\infty$

ومنه الدالة g' متزايدة تماما على المجال $]0; 1[$

ومتناقصة تماما على المجال $]1; +\infty[$

② إستنتج إشارة $g'(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

بما أن الدالة g' تقبل قيمة حدية عظمى هي 0 عند $x = 1$ ومنه نستنتج أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$

$$g'(x) \leq 0$$

③ أدرس إتجاه تغير الدالة g

الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	-
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	0	$-\infty$

④ إستنتج الوضع النسبي بين (T) و (C_f)

ندرس إشارة الفرق $f(x) - 2x - \frac{1}{2} = g(x)$

لما $x \in]0; 1[$ فإن (C_f) يقع فوق (T)

لما $x \in]1; +\infty[$ فإن (C_f) يقع تحت (T)

لما $x = 1$ فإن (C_f) يخترق (T) في $(1; \frac{5}{2})$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} x^2 (3 - 2 \ln x) + 1 \right] = -\infty$$

② أ/ أدرس قابلية الإستنتاج لـ f عند $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3}{2} x - x \ln x \right] = 0$$

ومنه f قابلة للإشتقاق عند $x_0 = 0$

ب/ أثبت أن f قابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$

لدينا من جهة f قابلة للإشتقاق عند $x_0 = 0$

ومن جهة أخرى f هي عبارة عن جداء ومجموع

دوال قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$

ومنه نستنتج أن f قابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$

③ أحسب $f'(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

$$f'(x) = x(3 - 2 \ln x) - \frac{2}{x} \times \frac{x^2}{2}$$

$$f'(x) = 3x - 2x \ln x - x = 2x(1 - \ln x)$$

❖ إستنتج إتجاه تغير الدالة f

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 1 - \ln x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = e \end{cases}$$

x	0	e	$+\infty$
$2x$		+	+
$1 - \ln x$		+	-
$f'(x)$		+	-

ومنه f متزايدة تماما على المجال $]0; e[$ ومتناقصة

تماما على المجال $]e; +\infty[$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	1	$\approx 4,7$	$-\infty$

④ بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيدا α

f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[4,6; 4,7]$

$$\begin{cases} f(4,6) = 0,44 \\ f(4,7) = -0,05 \end{cases} \Rightarrow f(4,6) \times f(4,7) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة

$$f(x) = 0 \text{ تقبل حل وحيدا } \alpha \text{ حيث } 4,6 < \alpha < 4,7$$

⑤ أكتب معادلة المماس (T) عند الفاصلة 1

$$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$A(n) = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(f(x) - 2x - \frac{1}{2} \right) dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 g(x) dx$$

$$A(n) = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - x^2 \ln x + 1 - 2x - \frac{1}{2} \right) dx$$

$$A(n) = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - 2x - x^2 \ln x + \frac{1}{2} \right) dx$$

$$A(n) = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right) dx - I_n$$

$$A(n) = \left[\frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{x}{2} \right]_{\frac{1}{n}}^1 - I_n = \left[\frac{x^3 - 2x^2 + x}{2} \right]_{\frac{1}{n}}^1 - I_n$$

$$A(n) = - \left(\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}}{2} \right) - I_n$$

$$A(n) = - \left(\frac{\frac{1}{n^3} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n}}{2} \right) - I_n$$

$$A(n) = - \left(\frac{\frac{1-2n+n^2}{n^3}}{2} \right) - I_n = - \frac{1-2n+n^2}{2n^3} - I_n$$

$$A(n) = \frac{-n^2+2n-1}{2n^3} - \frac{\ln n}{3n^3} - \frac{1}{9n^3} + \frac{1}{9}$$

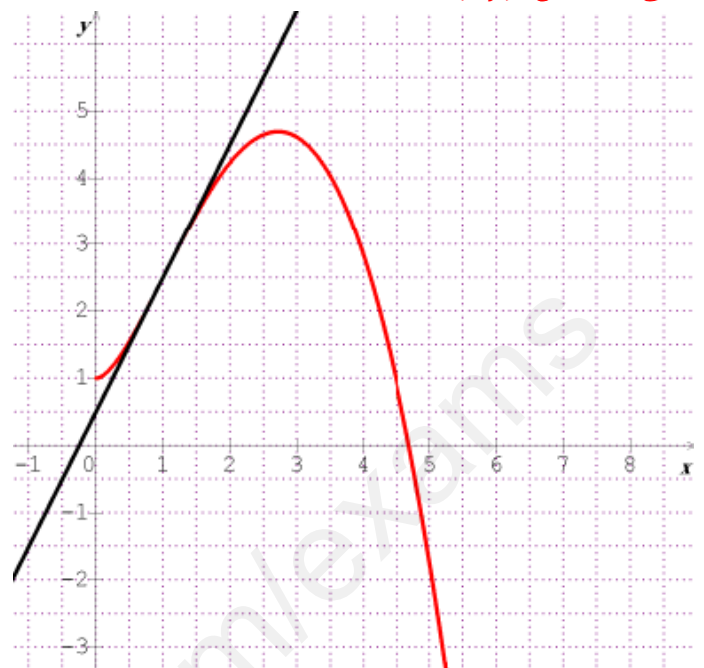
$$A(n) = \frac{-9n^2+18n-9-6\ln n-2+2n^3}{18n^3}$$

$$A(n) = \left(\frac{2n^3-9n^2+18n-11-6\ln n}{18n^3} \right) \times 4 \text{ (u.a)}$$

5 أحسب $f(6)$

$$f(6) = -9,5$$

أنشئ كلا من (C_f) و (T)



6 أحسب بدلالة n : $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 \ln x dx$

$u(x) = \ln x$	$u'(x) = \frac{1}{x}$
$v(x) = \frac{x^3}{3}$	$v'(x) = x^2$

$$I_n = \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_{\frac{1}{n}}^1 - \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 dx$$

$$I_n = \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_{\frac{1}{n}}^1 - \left[\frac{x^3}{9} \right]_{\frac{1}{n}}^1 =$$

$$I_n = - \left(\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{3} \ln \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{9} - \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{9} \right)$$

$$I_n = - \left(\frac{1}{3n^3} (-\ln n) \right) - \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9n^3} \right)$$

$$I_n = \frac{\ln n}{3n^3} + \frac{1}{9n^3} - \frac{1}{9}$$

7 إستنتج المساحة $A(n)$ بـ cm^2 لحيز المستوي

المحدد بالمنحني (C_f) والمماس (T) والمستقيمين

الذين معادليهما : $x = \frac{1}{n}$ و $x = 1$

بما أن $0 < \frac{1}{n} \leq x \leq 1$ أي أن $0 \leq x \leq 1$

ومنه (C_f) يقع فوق (T) في المجال $[0; 1]$ ومنه



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04,5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = \alpha 2^n + \beta (-3)^n$ حيث α و β عدنان صحيحان.

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2} + u_{n+1} - 6u_n = 0$

(2) أ- باستعمال خوارزمية إقليدس، أوجد ثنائية $(\alpha; \beta)$ حل للمعادلة $8\alpha - 27\beta = -11$

ب- أوجد العدد الصحيح k حتى تكون الثنائية $(110 + 27k; 33 + 8k)$ حلا للمعادلة $4\alpha + 9\beta = 17$

ج- استنتج قيمتي α و β بحيث يكون $u_2 = 17$ و $u_3 = -11$

(3) أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \equiv 3 \cdot 2^n [5]$

ب- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد u_n على 5

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n = 2^{n+1} + (-3)^n$ و $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

أ- برهن أن: $S_n \equiv 2 - 4 \times 2^n [5]$

ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد S_{2024} على 5

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي وعاء على 12 بطاقة منها 4 بطاقات تحمل العدد 1 وبطاعتان تحملان العدد e و 6 بطاقات تحمل العدد $\frac{1}{e}$

كل البطاقات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس.

نسحب على التوالي بطاقتين من الوعاء مع إرجاع البطاقة المسحوبة إلى الوعاء في كل مرة.

ليكن x الرقم المسجل على البطاقة المسحوبة أولا و y الرقم المسجل على البطاقة المسحوبة ثانيا.

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقطة M ذات اللاحقة z حيث:

$z = \ln x + i \ln y$ ونعتبر الأحداث التالية:

A : " M نقطة من حامل محور الفواصل "

B : "قيس الزاوية الموجهة $(\vec{OM}; \vec{u})$ هو $-\frac{\pi}{4}$ "

C : " M نقطة من الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1 "

(1) أحسب $p(A)$ و $p(B)$

(2) بين أن $p(C) = \frac{4}{9}$

(3) علما أن النقطة M من حامل محور الفواصل، ما احتمال أن تكون من الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1؟

(4) المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين المسافة OM

أ- برر أن قيم المتغير العشوائي X هي: 0، 1 و $\sqrt{2}$

ب- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي $E(X)$

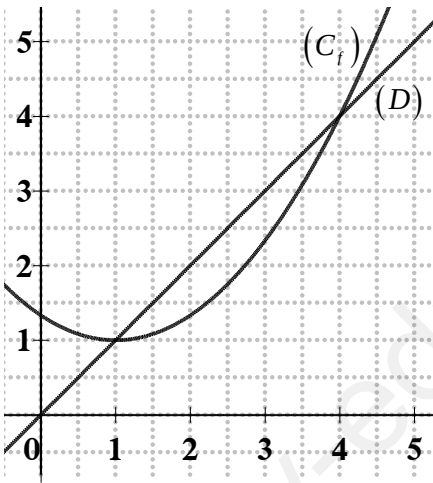
التمرين الثالث: (04,5 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1)^2$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$ و (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) أ- أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 مبرزاً خطوط الإنشاء.



ب- ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 4$

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(u_n - 1)(u_n - 4)$

استنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة.

ج- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln\left(\frac{u_n - 1}{3}\right)$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 يطلب تعيين حدها الأول.

ب- عبر عن v_n بدلالة n

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $w_n = \left(\frac{(u_0 - 1)(u_1 - 1)(u_2 - 1) \dots (u_{n-1} - 1)}{3^n}\right)$

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\frac{1}{2^n} \ln(w_n) = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

ب- استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \ln(w_n)$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ: $g(x) = \frac{x}{x-1} - \ln|x-1|$

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$ (يمكن وضع: $t = x - 1$)

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $4 < \alpha < 5$

(4) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R} - \{1\}$

(II) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln|x-1|}{x} & ; x > 0 \\ f(x) = \frac{-6e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} & ; x \leq 0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$ (وحدة الطول 2cm)

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجةين بيانيا.

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ثم فسر النتيجةين بيانيا.

(2) أ- بين أن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{6}$

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ (إرشاد: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + x}{x^2} = -\frac{1}{2}$)

ج- فسر النتيجةين بيانيا.

(3) بين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$

(4) أ- أحسب $f'(x)$

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(5) أحسب $f(-1)$ ، $f(0)$ ، $f(2)$ و $f(5)$ ثم أنشئ (C_f) (نأخذ $\alpha \approx 4,5$)

(6) أ- أوجد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل $x \neq -1$ و $x \neq -2$ ، $\frac{-6x}{x^2 + 3x + 2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+1}$

ب- استنتج أن: $\frac{-6e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} = \frac{-12e^{-x}}{1 + 2e^{-x}} + \frac{6e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

ج- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين $x = -\ln 2$ و

$x = 0$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

- x عدد طبيعي أكبر أو يساوي 5
- M و N عدنان طبيعيين يكتبان على الترتيب $\overline{100x}$ و $\overline{x001}$ في نظام التعداد الذي أساسه $x+1$
- (1) أكتب كلا من M و N في النظام الذي أساسه x
 - (2) أ- أكتب $M+N$ في النظام الذي أساسه $x+1$
ب- استنتج أن $M+N=k(x+1)$ حيث k عدد طبيعي يطلب تعيينه بدلالة x
ج- أكتب k في النظام الذي أساسه x
 - (3) برهن أنه يوجد عددين طبيعيين غير معدومين a و b يحققان: $\overline{ab}^x \times \overline{aaa}^x = k$
 - (4) أوجد جميع الثنائيات $(\alpha; \beta)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة التي تحقق: $d+m=\beta+9$
حيث: $d = PGCD(\alpha; \beta)$ و $m = PPCM(\alpha; \beta)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- (I_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$
- (1) أ- تحقق أن: $I_0 = 1 - \frac{1}{e}$
ب- باستعمال المكاملة بالتجزئة، برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $I_{n+1} = (n+1)I_n - e^{-1}$
 - (2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{1}{(n+1)e} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ ثم استنتج نهاية المتتالية (I_n)
 - (3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{1}{n!} I_n$
أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = -\frac{e^{-1}}{(n+1)!}$
ب- استنتج أن: $e(1-u_n) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- (1) عين العددين المركبين α و β حيث:
$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\bar{\alpha} + \bar{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$$
 مع $\bar{\alpha}$ مرافق α و $\bar{\beta}$ مرافق β
- (2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$
 A ، B و C النقط التي لواحقتها $z_A = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_B = \bar{z}_A$ و $z_C = z_A e^{i\frac{\pi}{3}}$ على الترتيب.
أ- أكتب z_A و z_C على الشكل الأسّي.

ب- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{Z_A}{Z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا.

ج- تحقق أن العدد المركب $2\left(\frac{Z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2024} + \left(\frac{Z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{Z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1445}$ تخيلي صرف.

(3) D النقطة ذات اللاحقة $1+i$

أ- حدد نسبة وزاوية التشابه المباشر S الذي مركزه O ويحول D إلى A

ب- أكتب $\frac{Z_A}{Z_D}$ على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

(4) عين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $z = k(1+i)e^{i\frac{7\pi}{12}}$ حيث k يمسح $\mathbb{R}^+$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) n عدد طبيعي غير معدوم.

f_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_n(x) = x^n e^{1-x}$

(C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$

(2) بين أن جميع المنحنيات (C_n) تمرّ من نقطتين ثابتتين يطلب تعيين إحداثيتهما.

(3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'_n(x) = (n-x)f_{n-1}(x)$

(4) أ- أدرس حسب شفعية n اتجاه تغير الدالة f_n ثم شكل جدول تغيراتها.

ب- أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1})

ج- أنشئ في نفس المعلم المنحنيات (C_1) ، (C_2) و (C_3)

(II) (I_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $I_0 = \int_0^1 e^{1-x} dx$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$

(1) أحسب I_0 و I_1

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$

ب- استنتج I_2

(III) A_n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) والمستقيمين $x=0$ و $x=1$

عبر عن A_n بدلالة n و I_n

(2) α عدد حقيقي أكبر تماما من 1

$S(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_1) و (C_2) والمستقيمين $x=0$ و $x=\alpha$

أ- برهن أن $S(\alpha) = 24 - 4e - 4(\alpha^2 + \alpha + 1)e^{1-\alpha}$

ب- بين أن $[2A_1 = S(\alpha)]$ تكافئ $[e^\alpha = \alpha^2 + \alpha + 1]$ ثم استنتج وجود وحدانية للعدد α

انتهى الموضوع الثاني

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع الأول على 3 صفحات

التمرين الأول (04 نقاط) :

1. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_1 = \frac{1}{2}$ وبالعلاقة التراجعية: $u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}$

ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل $n \geq 1$ بـ: $v_n = u_n - \frac{2}{5}$

(أ) بين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها.

(ب) استنتج عبارة v_n بدلالة n ثم عبارة u_n بدلالة n .

2. نعتبر نردين A و B غير مزيفين بحيث : النرد A به ثلاث اوجه حمراء وثلاث اوجه بيضاء ، اما النرد B به اربع اوجه حمراء ووجهين بيضاوين.

نختار عشوائيا نردا ونرميه : إذا ظهر اللون الأحمر نحتفظ بهذا النرد ، اما اذا ظهر اللون الأبيض نغير النرد. ثم نرمي هذا النرد وهكذا دواليك.

نرمز بـ A_n الى الحدث : "رمي النرد A مرة n و بـ $\overline{A_n}$ الى الحدث العكسي للحدث A_n .

R_n الى الحدث : "ظهور اللون الأحمر في الرمية n " و بـ $\overline{R_n}$ الى الحدث العكسي للحدث R_n .

ونرمز بـ a_n الى احتمال الحدث A_n و r_n الى احتمال الحدث R_n

(أ) عين a_1

(ب) اكمل الشجرة ثم عين r_1

(ج) بملاحظة أنه من اجل كل $n \geq 1$

$$R_n = (R_n \cap A_n) \cup (R_n \cap \overline{A_n})$$

$$r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}$$

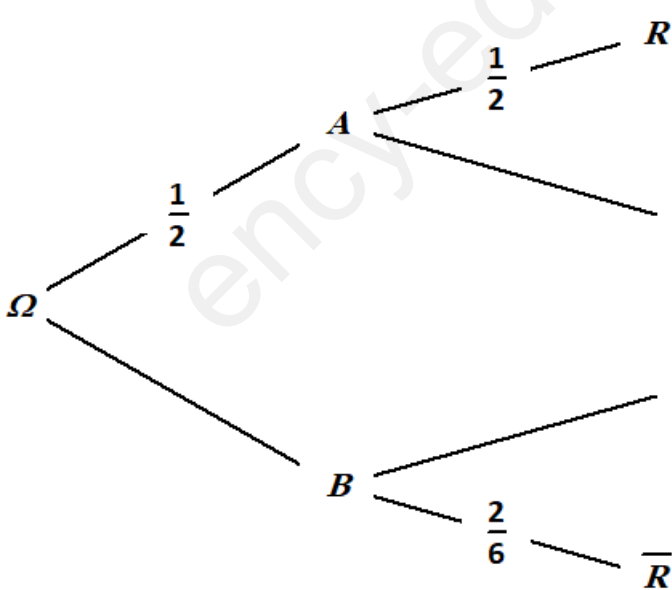
(د) بين أنه من أجل كل $n \geq 1$:

$$A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$$

(هـ) استنتج أنه من أجل كل $n \geq 1$:

$$a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$$

(و) استنتج عبارة r_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$



التمرين الثاني (04.5 نقاط) :

(1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $\bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0$.. $\bar{z} (E)$ هو مرافق العدد المركب z .

أ/ بين أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة : $(\bar{z} + 1) (\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7) = 0$.
 ب/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

(2) في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقاط A, B, C و D لواحقتها

على الترتيب: $z_D = 3$ ، $z_C = \bar{z}_B$ ، $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ ، $z_A = -1$.
 أ/ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا.
 ب/ عين طبيعة المثلث ABC .

(3) أ/ أكتب العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسّي، ثم استنتج أن النقطة A صورة D بتحويل نقطي يطلب تعيينه.
 ب/ أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD .

(4) (Γ) مجموعة النقاط M من المستوى لاحقها z تحقق: $z + 1 = 2\sqrt{3} \cdot k \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$ حيث k يمسح المجال $]0; +\infty[$.
 ✓ عين قياسا للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overrightarrow{AB})$ ، ثم استنتج مجموعة النقاط (Γ) .

(5) أ/ عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث يكون: $-\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} + \alpha\overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

ب/ عين (E) مجموعة النقاط M من المستوى حيث: $\|-\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} - 3\overrightarrow{DM}\| \leq 2\|\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\|$.
 ج/ استنتج مجموعة نقاط تقاطع (E) و (Γ) .

التمرين الثالث (04.5 نقاط) :

(1) من أجل كل عدد حقيقي t وكل عدد طبيعي n ، أنشرو بسط العبارة $(t - 6)(t^2 + 1)$
 ثم أدرس حسب قيم n بواقي قسمة 3^n على 7

(2) a ، b و c أعداد طبيعية تكتب في نظام التعداد ذي الأساس p كمايلي: $a = \overline{102}$ ، $b = \overline{125}$ و $c = \overline{13154}$
 أ/ علما أن: $a \times b = c$ جد قيمة العدد p

ب/ أكتب كلا من a ، b و c في النظام العشري

(3) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: (1) $38x - 53y = 15$

أ/ يبين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن $x \equiv 52[53]$

ب/ استنتج حلول المعادلة (1)

(4) نعتبر الآن x و y عددان طبيعيتان ونسمي d قاسمهما المشترك الأكبر

أ/ عين القيم الممكنة لـ d

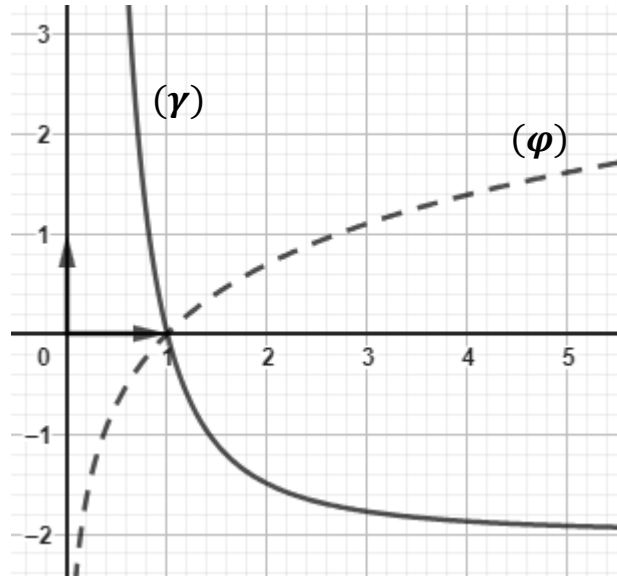
ب/ جد كل الثنائيات $(x; y)$ بحيث يكون $d = 15$

(5) يحتوي كيس على 10 قريصات مرقمة من 0 إلى 9 "لا نفرق بينها عند اللمس"، نسحب في آن واحد قريصتين من الكيس

✓ أحسب احتمال كي يكون مجموع رقمي القريصتين المسحوبتين من بواقي قسمة 3^n على 7

التمرين الرابع (07 نقاط) :

الجزء الأول:



(γ) و (ϕ) التمثيلان البيانيان للدالتين المعرفتين على $]0; +\infty[$ و $x \mapsto 2\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)$ و $x \mapsto \ln x$ على الترتيب في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}; \vec{j}$)

(γ) و (ϕ) يتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة 1 كما هو موضح في الشكل المقابل:

الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{2}{x^2} - \ln x - 2$ بـ

✓ بقراءة بيانية حدد وضعية (γ) بالنسبة إلى (ϕ) على $]0; +\infty[$ ،

ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{2x^2 + x - \ln x + 1}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}; \vec{j}$) .

(1) أحسب: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. فسّر النتائج هندسيا

(2) أ / أثبت أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(\frac{1}{x})}{x^2}$.

ب/ عين دون حساب: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - f(1+h)}{h}$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا .

ج/ أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ / أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x]$ ، ماذا تستنتج

ب/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$

(4) أرسم كلا من (Δ) و (C_f) .

(5) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x) - (2x + 1)) dx$

أ / أحسب U_n بدلالة n ثم استنتج طبيعة المتتالية (U_n)

ب/ لتكن A مساحة حيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) وبالمستقيمين

اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = e^2$ ، تحقق من أن: $A = (U_0 - U_1) u_a$

(6) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ، بالعلاقة: $h(x) = x^2(1 + \ln x) - 3x + 2$

أ / أثبت أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ فإن: $\frac{h(x)}{x} = f\left(\frac{1}{x}\right) - 4$ ثم استنتج أن $h(x) \geq 0$

ب/ عين x بحيث يكون $h(x) = 0$

انتهى الموضوع الأول

العلامة	التمرين الاول(04 نقاط)	العلامة	التمرين الرابع (07 نقاط)
0.5	(أ) بين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها.	0.5	الجزء الاول:
0.25+0.25	(ب) استنتج عبارة v_n بدلالة n ثم عبارة u_n بدلالة n .	0.25	تحديد وضعية (γ) بالنسبة إلى (φ) - اشارة $g(x)$
0.25	(2) (أ) عين a_1	0.25+0.25	الجزء الثاني:
0.25+0.5	(ب) اكمل الشجرة ثم عين r_1	0.25	(1) حساب نهايتي الدالة f عند 0 و $+\infty$ التفسير
0.5	(ج) تبين أن: $r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}$	0.5	(2) أ/ اثبات انه من أجل كل x من D_f $f'(x) = \frac{g(\frac{1}{x})}{x^2}$ ب/ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4-f(1+h)}{h} = -f'(1) = 0$ التفسير
0.5	(د) تبين أنه من أجل كل $n \geq 1$:	0.25	ج/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f : * جدول تغيرات الدالة f :
0.25	$A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$	0.25	(3) أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x]$ الاستنتاج
0.25	$a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$	0.5	ب/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (Δ) :
0.25	ثم عبارة a_n بدلالة n :	0.25	(4) رسم كلا من (Δ) و (C_f) .
0.25+0.25	(و) استنتاج عبارة r_n بدلالة n ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$	0.5	(5) أ/ حساب U_n بدلالة n ثم استنتاج طبيعة المتتالية (U_n) ب/ التحقق من أن: $A = (U_0 - U_1)ua$
العلامة	التمرين الثاني(04 نقاط)	0.25	(6) أ/ إثبات أن: $\frac{h(x)}{x} = f\left(\frac{1}{x}\right) - 4$ استنتاج أن $h(x) \geq 0$ ب/ تعيين x بحيث يكون $h(x) = 0$
0.25	(1) أ/ نبين أن المعادلة (E) تكافئ...	0.5	*** انتهى ***
0.5	ب/ نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) :	0.25+0.25	
0.5	(2) أ/ تعيين قيم العدد الطبيعي n	0.25+0.5	
0.5	ب/ تعيين طبيعة المثلث ABC	0.25	
0.25	(3) أ/ كتابة العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسّي:	0.25	
0.25	* / استنتاج طبيعة التحويل الذي يحول A إلى D وعناصره المميزة:	0.5	
0.25	ب/ تعيين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD	0.25	
0.5	(4) عين قياسا للزاوية الموجبة $(\vec{u}; \vec{AB})$.	0.5	
0.5	ثم استنتاج مجموعة النقط (Γ) .	0.5	
0.5	(5) أ/ عين قيمة العدد الحقيقي α	0.25	
0.25	ب/ تعيين (E) مجموعة النقط M		
	ج/ استنتاج مجموعة نقط تقاطع (E) و (Γ) .		
0.25	التمرين الثالث(05 نقاط)		
0.5	(1) نشر وتبسيط العبارة:		
0.5	دراسة حسب قيم n بواقي قسمة 3^n على 7		
0.5	(2) أ/ إيجاد قيمة العدد p		
0.5	ب/ كتابة كلا من a ، b و c في النظام العشري		
0.5	(3) أ/ تبين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (1)		
0.5	فإن $x \equiv 52[53]$		
0.5	ب/ استنتاج حلول المعادلة (1)		
0.75	(4) أ/ عين القيم الممكنة لـ d		
0.5	ب/ إيجاد كل الثنائيات $(x; y)$ بحيث يكون $d = 15$		
	(5) حساب احتمال كي يكون مجموع رقمي القريصتين		
	المسحوبتين من بواقي قسمة 3^n على 7		

التصحيح المفصل للموضوع الأول

تصحيح التمرين الأول :

(1) أ) تبين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها.

$$v_{n+1} = \frac{1}{6} v_n$$

أي (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{6}$

(ب) عبارة v_n بدلالة n : $v_n = \frac{1}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$ ، عبارة u_n بدلالة n : $u_n = \frac{1}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$

(2) أ) $a_1 = \frac{1}{2}$

(ب) إكمال الشجرة

$$r_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{6} = \frac{7}{12}$$

(ج) تبين أن: $r_n = -\frac{1}{6} a_n + \frac{2}{3}$

لدينا:

$$R_n = (R_n \cap A_n) \cup (R_n \cap \overline{A_n})$$

أي: $r_n = \frac{1}{2} a_n + \frac{4}{6} (1 - a_n) = -\frac{1}{6} a_n + \frac{2}{3}$

(د) تبين أنه من أجل كل $n \geq 1$:

$$A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$$

من أجل الرمية $(n+1)$ بالنرد A :

يلعب الرمية n ويتحصل على اللون الأحمر R_n أو يلعب الرمية n

بالنرد B ويتحصل على اللون الأبيض $\overline{R_n}$

أي: $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$

(هـ) استنتاج أنه من أجل كل $n \geq 1$: $a_{n+1} = \frac{1}{6} a_n + \frac{1}{3}$

لدينا: $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$ أي:

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = \frac{1}{2} a_n + \frac{2}{6} (1 - a_n) = \frac{1}{6} a_n + \frac{1}{3}$$

عبارة a_n بدلالة n :

بما أن: $u_{n+1} = \frac{1}{6} u_n + \frac{1}{3}$ إذن: $u_n = \frac{1}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$

(و) استنتاج عبارة r_n بدلالة n ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$:

لدينا: $r_n = -\frac{1}{6} a_n + \frac{2}{3}$ أي: $r_n = -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5} \right) + \frac{2}{3}$

ومنه $r_n = -\frac{1}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{3}{5}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{3}{5} \right] = \frac{3}{5} \quad \checkmark$$

تصحيح التمرين الثاني:

(1) / نبين أن المعادلة (E) تكافئ $(\bar{z} + 1)(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7) = 0$ لدينا :

$$(\bar{z} + 1)(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7) = 0 \quad (E) \dots \bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0$$

$$\bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0 \quad \text{يكافئ} \quad \bar{z}^3 - 4\bar{z}^2 + 7\bar{z} + \bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7 = 0$$

ب/ نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) :

$$(E) \text{ تكافئ } (\bar{z} + 1)(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7) = 0$$

$$(\bar{z} + 1)(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7) = 0 \quad \text{يكافئ} \quad (z + 1)(z^2 - 4z + 7) = 0$$

$$\Delta = -12 = (2\sqrt{3}i)^2, \quad \begin{cases} z = -1 \\ z^2 - 4z + 7 = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$z_2 = 2 + \sqrt{3}i \quad \text{و} \quad z_1 = 2 - \sqrt{3}i$$

$$S = \{-1; 2 - \sqrt{3}i; 2 + \sqrt{3}i\} \quad \text{ومنه}$$

(2) / تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد المركب $(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا: لدينا

$$(z_B - z_A)^n = (2 + \sqrt{3}i + 1)^n = (3 + \sqrt{3}i)^n$$

$$(z_B - z_A)^n = (2\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{6}} \quad \text{ومنه}$$

$$\frac{n\pi}{6} = \pi + 2k\pi \quad \text{ومنه} \quad \arg(z_B - z_A)^n = \pi + 2k\pi \quad \text{عددا حقيقيا سالبا معناه:}$$

$$n = 12k + 6 ; k \in \mathbb{N} \quad \text{إذن}$$

ب/ تعيين طبيعة المثلث ABC

$$AC = |z_C - z_A| = |3 - i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3} \quad AB = |z_B - z_A| = |3 + i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |z_C - z_B| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

بما ان $AB = AC = BC$ فإن المثلث ABC متقايس الأضلاع

(3) / كتابة العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسّي:

$$\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \frac{-1 - 2 + i\sqrt{3}}{3 - 2 + i\sqrt{3}} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

*/ استنتاج طبيعة التحويل الذي يحول A إلى D وعناصره المميزة:

$$z_A - z_C = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_D - z_C) \quad \text{معناه} \quad \frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

معناه النقطة A صورة النقطة D بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة C ونسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ب/ تعيين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD

$$\begin{cases} \left| \frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} \right| = \sqrt{3} \\ (\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{لدينا:} \quad \frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{معناه}$$

إذن المثلث ACD قائم في C ومنه مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ACD هو النقطة I منتصف الوتر [AD]

$$z_I = \frac{z_A + z_D}{2} = \frac{3}{2} - i\frac{1}{2} \quad \text{لاحقتها}$$

(4) / تعيين قيس للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overrightarrow{AB})$:

$$(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \quad \text{لدينا}$$

***/ استنتاج (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ حيث :**

$$\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB} \text{ معناه } z - z_A = k(z_B - z_A) \text{ معناه } z + 1 = 2\sqrt{3}ke^{i\frac{\pi}{6}}$$

ومنه : من أجل k يمسح المجال $+\infty; 0$] المجموعة (Γ) هي نصف مستقيم مبدؤه النقطه A وشعاع توجيهه

$$\overrightarrow{AB} \text{ لاحفته : } 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = 3 + i\sqrt{3}$$

(5) */ تعيين قيمة العدد α حيث $-\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} + \alpha\overrightarrow{CD} = \vec{0}$

$$-\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} + \alpha\overrightarrow{CD} = \vec{0} \text{ معناه النقطه } C \text{ هي مرجح الجملة } \{(A; -1), (B; 2), (D; \alpha)\}$$

$$\alpha = -3 \text{ ومنه } \begin{cases} 2 = \frac{1+4+3\alpha}{1+\alpha} \\ -\sqrt{3} = \frac{0+2\sqrt{3}+0\cdot\alpha}{1+\alpha} \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x_C = \frac{-x_A+2x_B+\alpha x_D}{-1+2+\alpha} \\ y_C = \frac{-y_A+2y_B+\alpha y_D}{-1+2+\alpha} \end{cases}$$

ب) */ تعيين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث :

$$(*) \dots \|\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} - 3\overrightarrow{DM}\| \leq 2\|\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\|$$

$$\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MD}\| \leq 2\|\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}\| \text{ تكافئ } (*)$$

$$\|-(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MD})\| \leq 2\|\overrightarrow{BC}\| \text{ تكافئ } (*)$$

$$CM \leq BC \text{ تكافئ } \|(-1 + 2 - 3)\overrightarrow{CM}\| \leq 2BC \text{ تكافئ } (*)$$

ومنه مجموعة النقط (E) هي قرص مركزه النقطه C ونصف قطره هو : $BC = 2\sqrt{3}$

ج) */ استنتاج مجموعة نقط تقاطع القرص (E) ونصف المستقيم (AB) : لدينا القرص (E) مركزه C ونصف قطره

$$AC = 2\sqrt{3} \text{ و } BC = 2\sqrt{3} \text{ معناه } A \text{ تنتمي إلى القرص } (E)$$

ومنه تقاطع القرص (E) ونصف المستقيم (AB) هو القطعة المستقيمة $[AB]$.

تصحيح التمرين الثالث :

$$(1) \text{ نشر وتبسيط العبارة : } (t-6)(t^2+1) = t^3 - 6t^2 + t - 6$$

دراسة حسب قيم n بواقي قسمة 3^n على 7

$$\text{لدينا : } 3^6 \equiv 1[7], 3^5 \equiv 5[7], 3^4 \equiv 4[7], 3^3 \equiv 6[7], 3^2 \equiv 2[7], 3^1 \equiv 3[7], 3^0 \equiv 1[7]$$

$$\text{وعليه من أجل } \beta \in \mathbb{N} : 3^{6\beta} \equiv 1[7], 3^{6\beta+1} \equiv 3[7], 3^{6\beta+2} \equiv 2[7], 3^{6\beta+3} \equiv 6[7], 3^{6\beta+4} \equiv 4[7], 3^{6\beta+5} \equiv 5[7]$$

(2) أ/ إيجاد قيمة العدد p

$$\text{لدينا : } a = 2 \times p^0 + 0 \times p^1 + p^2 = 2 + p^2$$

$$b = 5 \times p^0 + 2 \times p^1 + p^2 = 5 + 2p + p^2$$

$$c = 4 \times p^0 + 5 \times p^2 + p^2 + 3 \times p^3 + p^4 = 4 + 5p + p^2 + 3p^3 + p^4$$

$$(2 + p^2)(5 + 2p + p^2) = 4 + 5p + p^2 + 3p^3 + p^4 \text{ معناه } a \times b = c$$

$$\text{يكافئ } p^3 - 6p^2 + p - 6 = 0 \text{ أي } (p-6)(p^2+1) = 0 \text{ ومنه } p = 6$$

ب / كتابة كلام من a ، b و c في النظام العشري

$$c = 4 + 5.6 + 6^2 + 3.6^3 + 6^4 = 2014, b = 5 + 2.6 + 6^2 = 53, a = 2 + 6^2 = 38$$

(3) / تبين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (1) فإن $x \equiv 52[53]$

$$\text{لدينا: } 38x - 53y = 15 \text{ يكافئ } 38x = 15 + 53y \text{ أي } 38x \equiv 15[53]$$

$$\text{ولدينا } 38 \equiv -15[53] \text{ ومنه } -15x \equiv 15[53] \text{ أي } x \equiv -1[53] \text{ وعليه } x \equiv 52[53]$$

ب / استنتاج حلول المعادلة (1)

$$\text{لدينا: } x = 53k + 52 \text{ حيث } k \in \mathbb{Z} \text{ وبالتعويض في (1) نجد } y = 38k + 37$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $(x; y)$ من الشكل $(53k + 52; 38k + 37)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

(4) / عين القيم الممكنة لـ d

$$\text{لدينا } d / x \text{ و } d / y \text{ اذن } d / 38x - 53y \text{ أي } d / 15 \text{ وبالتالي } d \in \{1; 3; 5; 15\}$$

ب / إيجاد كل الثنائيات $(x; y)$ بحيث يكون $d = 15$

$$\text{نضع } x = 15x' \text{ و } y = 15y' \text{ حيث } x' \text{ و } y' \text{ أوليان فيما بينهما}$$

$$\text{نحصل على } 38x' - 53y' = 1 \text{ أي } 38 \times 15x' - 53 \times 15y' = 15$$

$$\text{لدينا الثنائية } (7; 5) \text{ حلاً خاصاً للمعادلة ومنه } \begin{cases} 38x' - 53y' = 1 \\ 38(7) - 53(5) = 1 \end{cases} \text{ بالطرح نجد:}$$

$$38(x' - 7) = 53(y' - 5)$$

$$\text{لدينا: } 53 / 38(x' - 7) \text{ و } PGCD(38; 53) = 1 \text{ اذن حسب مبرهنة "غوص" } 53 / (x' - 7)$$

$$\text{ومنه } x' - 7 = 53\alpha \text{ أي } x' = 53\alpha + 7 \text{ حيث } \alpha \in \mathbb{N} \text{ وبالتعويض نجد } y' = 38\alpha + 5$$

$$\text{وبالتالي: } x = 15(53\alpha + 7) = 795\alpha + 105 \text{ و } y = 15(38\alpha + 5) = 570\alpha + 75$$

$$\text{حيث } \alpha \in \mathbb{N}$$

(5) حساب احتمال كي يكون مجموع رقمي القريصتين المسحوبتين من بواقي قسمة 3^n على 7

$$\text{عدد طرق السحب هو: } C_{10}^2 = 45 \text{ وعدد الحالات الملائمة: } 12 \text{ وهي}$$

$$\{(0; 1), (0; 2), (0; 3), (0; 4), (0; 5), (0; 6), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (2; 3), (2; 4)\}$$

$$\text{اذن الاحتمال المطلوب هو: } \frac{12}{45} = \frac{4}{15}$$

تصحيح التمرين الرابع:

الجزء الأول: تحديد وضعية (γ) بالنسبة إلى (φ) على $]0; +\infty[$:
على المجال: $]0; 1[$ (γ) فوق (φ) ، وعلى المجال: $]1; +\infty[$ (γ) تحت (φ)

- اشارة $g(x)$

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

الجزء الثاني:

(1) حساب نهايتي الدالة f عند 0 و $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

التفسير: المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب لـ (C_f)

(2) / أثبات انه من أجل كل x من D_f : $f'(x) = \frac{g(\frac{1}{x})}{x^2}$ الدالة f قابلة الاشتقاق على D_f ودالتها المشتقة f' حيث :

$$f'(x) = \frac{x(4x - \frac{1}{x} + 1) - 2x^2 - x + \ln x - 1}{x^2} = \frac{2x^2 - 2 + \ln x}{x^2} = \frac{g(\frac{1}{x})}{x^2}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - f(1+h)}{h} = -f'(1) = 0 \text{ بـ}$$

التفسير: (C_f) يقبل مماسا عند 1 يوازي حامل محور الفواصل

ج/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f : من أجل كل x من D_f

لدينا : إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $g(\frac{1}{x})$ وهي :

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0; 1[$ ومتزايدة تماما على المجال $]1; +\infty[$

* جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	4	$+\infty$

(3) / حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 1 \quad \text{نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة: } y = 2x + 1 \text{ مقارب مائل لـ } (C_f) \text{ جوار } +\infty$$

ب/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (Δ) :

لدينا $[f(x) - (2x + 1)] = \frac{1 - \ln x}{x}$ ومنه إشارة الفرق هي من إشارة $(1 - \ln x)$ وهي :

إذن: (C_f) يقع فوق (Δ) على $]e; +\infty[$ وتحت (Δ) على المجال $]0; e[$ و (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الإحداثيات $(e; 2e + 1)$.

(4) رسم كلا من (Δ) و (C_f) .

(5) من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x) - (2x + 1))dx$ / حساب U_n بدلالة n ثم استنتاج طبيعة المتتالية (U_n)

$$U_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x) - (2x + 1))dx = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{1 - \ln x}{x} dx$$

$$= \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{1}{x} dx - \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln x}{x} dx = -n + \frac{1}{2}$$

ومنه (U_n) حسابية أساسها $r = -1$ وحدها الأول $U_0 = \frac{1}{2}$

ب/ التحقق من أن: $A = (U_0 - U_1) ua$

لدينا: "باستعمال علاقة شال"

$$A = \int_1^e (f(x) - (2x + 1))dx - \int_e^{e^2} (f(x) - (2x + 1))dx = (U_0 - U_1) ua$$

(6) / إثبات أن: $\frac{h(x)}{x} = f\left(\frac{1}{x}\right) - 4$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) - 4 = 2 \times \frac{1}{x} + 1 + \frac{1 - \ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} - 4 = \frac{x^2(1 + \ln x) - 3x + 2}{x} = \frac{h(x)}{x}$$

✓ استنتاج أن $h(x) \geq 0$

لدينا: من جدول التغيرات $f(x) \geq 4$ تكافئ $f(x) \geq f(1)$ ومنه $f\left(\frac{1}{x}\right) \geq 4$ أي $f\left(\frac{1}{x}\right) - 4 \geq 0$

وبالتالي $h(x) \geq 0$

ب/ تعيين x بحيث يكون $h(x) = 0$

$$h(x) = 0 \text{ تكافئ } f\left(\frac{1}{x}\right) - 4 = 0 \text{ أي } f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1) \text{ ومنه } \frac{1}{x} = 1 \text{ وبالتالي } x = 1$$

انتهى بحمد الله وبفضله تصحيح الموضوع الأول من البكالوريا التجريبي دورة 2024

مادة الرياضيات للأقسام النهائية شعبة الرياضيات

لاتنسونا من صالح دعائكم



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(I) يحتوي صندوق U_1 على ثلاث كريات تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 3. ويحتوي صندوق U_2 على أربع كريات تحمل الأرقام 4 ، 5 ، 8 ، 8. جميع الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس.

نسحب عشوائيا كرية واحدة من الصندوق U_1 .

- إذا كانت الكرية المسحوبة من U_1 تحمل الرقم 0 نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الصندوق U_2

- إذا كانت الكرية المسحوبة من U_1 لا تحمل الرقم 0 نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من الصندوق U_2

نعتبر الحادثتين التاليتين: A : " الكرية المسحوبة من الصندوق U_1 تحمل الرقم 0 "

S : " مجموع أرقام الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 عدد زوجي "

(1) أ) أنجز شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه التجربة.

ب) احسب $P_A(S)$ و $P(A \cap S)$.

ج) تحقق أن: $P(\bar{A} \cap S) = \frac{1}{6}$ ثم استنتج $P(S)$.

(2) علماً أن مجموع الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 زوجي ما احتمال أن تكون الكرية المسحوبة من U_1 لا تحمل الرقم 0.

(II) نضع محتوي الصندوقين في صندوق جديد U_3 ثم نسحب عشوائيا على التوالي بدون إرجاع 3 كريات.

(1) احسب احتمال الحادثة C : " الحصول على كرية واحدة فقط تحمل رقما أوليا ".

(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات من U_3 عدد الكريات التي تحمل رقما زوجيا.

أ) عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم استنتج $P(|X - 1| < 1)$.

ب) احسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(1) نعتبر المعادلة $4x - 5y = 33 \dots (E)$ ذات المجهول $(x; y)$ حيث x و y عدنان صحيحان.

أ) عيّن الأعداد الصحيحة x بحيث: $4x \equiv 33[5]$

ب) استنتج حلا خاصا $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E) بحيث: $2 < x_0 < 10$ ثم حل المعادلة (E) .

ج) عيّن الثنائية الوحيدة $(a; b)$ من $\mathbb{N}^2$ حلا للمعادلة (E) بحيث: $PGCD(a; b) = 3$ و $PPCM(a; b) = 135$.

(2) عيّن الأعداد الصحيحة α حلول الجملة $\begin{cases} \alpha \equiv 55[5] \\ \alpha \equiv 22[4] \end{cases}$.

(3 أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 11.

(ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد: $10^{10n} + 16^{5n+4} + 38^{20n+1}$ على 11.

$$\begin{cases} n - 5^n \equiv 0 [11] \\ n \equiv 2 [5] \end{cases} \quad \text{(ج) عيّن قيم العدد الطبيعي } n \text{ بحيث :}$$

(4) N العدد الطبيعي الذي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس أربعة كما يلي: $\overline{abbaba}^4$.

- عيّن a و b حتى يقبل العدد N القسمة على 33 ثم اكتب N في النظام العشري.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

α عدد حقيقي يختلف عن -2.

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = \alpha + 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{(\alpha + 2)u_n}{u_n + 2 - \alpha}$

$$, v_n = \frac{u_n}{u_n - 2\alpha} \quad \text{بـ: } \mathbb{N} \quad \text{المتتالية العددية المعرفة على}$$

(I) نضع $\alpha = 1$:

$$(1) \quad \text{أ) تحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي } n: u_{n+1} = 3 - \frac{3}{u_n + 1}.$$

(ب) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 < u_n < 4$.

(ج) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n). هل المتتالية (u_n) متقاربة؟ برّر إجابتك.

$$(2) \quad \text{أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي } n: u_n = \frac{6}{3 - 3^{-n}} \quad \text{ثم احسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

(ب) استنتج عبارة v_n بدلالة n ثم عيّن أصغر عدد طبيعي n يحقق: $v_n \geq e^{66}$.

$$(3) \quad \text{احسب بدلالة } n \text{ المجموع } S_n \text{ بحيث: } S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}.$$

(II) نفرض أن: $-2 < \alpha < 0$

$$(1) \quad \text{أ) بيّن أنّ المتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } \frac{2 + \alpha}{2 - \alpha} \text{ يطلب تعيين حدّها الأوّل.}$$

(ب) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة α و n . هل المتتالية (v_n) متقاربة؟ برّر إجابتك.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالتين العدديتين g و h المعرفتين على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x - 1 - \ln x$ و $h(x) = x + (x - 2)\ln x$

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة g .

(ب) احسب $g(1)$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

- (2) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $h(x) = 1 + g(x) + (x-1)\ln x$.
 ب) بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $(x-1)\ln x \geq 0$ ، ثم استنتج أن : $h(x) > 0$ على المجال $]0; +\infty[$.
 II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = 1 + x \ln x - (\ln x)^2$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (وحدة الطول $2cm$) .

(1) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f(x) = 1 + x \ln x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ثم فسّر النتيجة الثانية هندسياً .

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{x}$.

(3) استنتج مما سبق اتجاه تغير الدالة f على $]0; +\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها .

(4) أ) اكتب معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها 1 .

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f(x) - x = (-1 + \ln x)g(x)$.

ج) ادرس إشارة $[f(x) - x]$ على المجال $]0; +\infty[$ ، ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) .

(5) عيّن العدد الحقيقي β من المجال $]1; +\infty[$ والذي يحقق $h(\beta) = \beta$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل مماساً (T') يوازي (T) يطلب تعيين معادلة له .

(6) برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث : $0,4 < \alpha < 0,5$.

(7) أنشئ في المعلم السابق المماسين (T) و (T') والمنحنى (C_f) .

(8) باستعمال المنحنى (C_f) ، عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x) = x + m$ ثلاثة حلول مختلفة .

الموضوع الثاني (شعبة رياضيات)

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدّها الأول u_1 .

$$(1) \text{ أ) تحقق أن: } u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = (u_1 - u_2 + u_3)(u_1 + u_2 + u_3)$$

$$\text{ب) عيّن الحدود } u_1, u_2, u_3 \text{ علماً أن: } \begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 2275 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 65 \end{cases}$$

ج) استنتج أساس المتتالية (u_n) ثم بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n = 5 \times 3^{n-1}$.

(2) أ) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 8.

ب) بيّن أنّ العدد $u_{2024} - u_{1445} - 2$ يقبل القسمة على 8

(3) x و y عدنان صحيحان، نعتبر المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية: $u_2 = 7u_1x - u_3y$ (E)

أ) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

ب) عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلا المعادلة (E) بحيث: $y < x < 10$

(4) نفرض أنّ x و y عدنان طبيعيين. نضع: $d = PGCD(x; y)$ بحيث، $(x; y)$ حلا لـ (E)

أ) عيّن القيم الممكنة لـ d .

ب) عيّن الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الطبيعية حلا لـ (E) بحيث: $d = 3$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 12 كرية متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها α كرية بيضاء و β كرية سوداء، حيث α و β عدنان طبيعيين غير معدومان.

(1) نسحب من الصندوق وبصفة عشوائية كرتين على التوالي دون إرجاع.

نعتبر الحادثة E : "الحصول على كرتين من لونين مختلفين".

$$- \text{ عيّن الثنائيتين } (\alpha; \beta) \text{ من الأعداد الطبيعية إذا علمنا أن: } P(E) = \frac{16}{33}.$$

(2) نضع: $\alpha = 8$ و $\beta = 4$

نسحب الآن من الصندوق ثلاث كريات على التوالي مع إرجاع الكرية المسحوبة إلى الصندوق قبل السحب الموالي.

احسب احتمال الحوادث التالية: A: "من بين الكريات المسحوبة، الأولى فقط بيضاء"

B: "من بين الكريات الثلاث المسحوبة، واحدة بالضبط بيضاء"

C: "من بين الكريات الثلاث المسحوبة توجد واحدة على الأقل بيضاء وواحدة على الأقل سوداء"

- (3) نقترح اللعبة التالية للمشاركة يدفع اللاعب $200DA$ ثم يسحب في آن واحد ثلاث كريات من الصندوق. يربح اللاعب $100DA$ عن كل كرية بيضاء تحصل عليها خلال السحب.
- نسمي X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات الربح الصافي أو خسارة اللاعب.
- (أ) عيّن القيم الممكنة للمتغير العشوائي X .
- (ب) عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي $E(X)$. هل اللعبة عادلة ؟
- التمرين الثالث: (05 نقاط)**

(1) (أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 - 6z + 10 = 0$.

(ب) استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول z التالية: $(\bar{z} + 2)^2 - 6(\bar{z} + 2) + 10 = 0$.

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C, D

التي لاحتقاتها على الترتيب: $z_A = 3 - i$ ، $z_B = 3 + i$ ، $z_C = 1 + i$ و $z_D = 1 - i$

(أ) أكتب على الشكل الأسّي العدد المركب $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$.

(ب) بيّن أنّ النقطة D هي صورة النقطة B بدوران R يطلب تعيين عناصره المميزة.

(3) E النقطة التي لاحتقتها $z_E = 7 - 3i$ و F صورتها بالدوران R .

(أ) تحقق أنّ لاحقة F هي: $z_F = 5 + 3i$

(ب) عيّن لاحقة النقطة H صورة F بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{AE}$

(ج) استنتج بدقة طبيعة الرباعي $AEHF$

(4) عيّن المجموعة (Γ) للنقط M ذات اللاحقة z حيث: $z = 1 - i + ke^{-i\frac{\pi}{4}}$ وذلك عندما k يسمح $\mathbb{R}_+$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - 2(x^2 - x)e^{2x}$

(1) (أ) بيّن أنّ: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$ ثمّ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

(ب) بيّن أنّ: $g'(x) = 2(1 - 2x^2)e^{2x}$ ثمّ استنتج اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$

(2) (أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1,05 < \alpha < 1,06$

(ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x ، إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - 1 + (x + 1)^2 e^{-2x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(ب) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

(ج) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

(2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(-x)$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$.

ب) حدّد اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم شكّل جدول تغيراتها

(3) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها 0.

(4) نضع: $-2,1 \approx f(-\alpha)$ ، أحسب $f(-2)$ ثم أرسم (Δ) و (T) و المنحنى (C_f)

(5) عيّن قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة : $e^m - (x+1)^2 e^{-2x} = 0$ ذات المجهول الحقيقي x ثلاثة حلول.

(6) الدالة h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = (x+1)e^{-2x}$

أ) بيّن أنّ: $2h(x) + h'(x) - e^{-2x} = 0$ ثم أحسب $\int_{-1}^{\lambda} h(x)dx$ حيث λ عدد حقيقي أكبر تماماً من -1

ب) باستعمال المكاملة بالتجزئة ونتيجة السؤال 6. أ)، أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى

(C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = -1$ و $x = \lambda$.

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :
الموضوع الأول :

التعريف الأول : (04 نقاط)

نعتبر في Z^2 المعادلة : $5x - 6y = 3 \dots (E)$

(1) أ) أثبت أنه إذا كانت التثنية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف لـ 3 .

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ثم حل في Z^2 للمعادلة (E) .

ج) استنتج حلول المعادلة (S) :
$$\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$$

(2) عين كل التثنيات $(x; y)$ حلول للمعادلة (E) التي تحقق : $x^2 - y^2 \leq 56$.

(3) a و b عددين طبيعيين حيث : $a = \overline{1a0a00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b = \overline{a50a}$ في النظام ذو الأساس 5

عين a و b حتى تكون التثنية $(a; b)$ حلا للمعادلة (E) .

التعريف الثاني : (04 نقاط)

يحتوي كيس على 5 كريات حمراء تحمل الأرقام : 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 و كريتين بيضاوين تحملان الرقمين : 1 ، 3

و كريتين خضراوين تحملان الرقمين : 2 ، 3 . كل الكريات متماثلة لا يمكن التمييز بينها باللمس

(I) ن سحب عشوائيا ثلاث كريات في آن واحد من الكيس

(1) أحسب احتمال كل حدث من الأحداث التالية :

A : "الكريات المسحوبة تحمل نفس الرقم" B : "الكريات المسحوبة مختلفة اللون مثلي مثلي"

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب بالـ أكبر الأرقام مسجلة على الكريات المسحوبة .

أ) ماهي قيم X الممكنة ؟

ب) أكتب قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب $E(X)$.

(II) نزع الآن الكريات الحمراء من الكيس ثم نقوم بسحبات على التوالي لكرية واحدة مع الإرجاع

و ليكن عند هذه السحبات B . أحسب احتمال كل من الحدثين

D : "كل الكريات المسحوبة بيضاء" E : "يوجد على الأقل كرية خضراء"

$$\begin{array}{r} C_1^3 \times C_2^3 + C_2^3 \times C_1^3 + C_3^3 \\ \hline C_3^3 \end{array} \quad \begin{array}{r} C_3^3 \\ \hline C_3^3 \end{array}$$

$$\frac{U_{n+1}}{V_n}$$

الختبار في مادة : رياضيات / الشعبة : 03 تقني رياضي + رياضيات

التمرين الثالث : (05 نقاط)

(U_n) متتالية عددية معرفة على N بـ : $U_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $U_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{4-U_n^2}}$.

(1) أ) برهن بقولك أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_n \leq \sqrt{2}$.

ب) بين أن : $U_{n+1}^2 - U_n^2 = \frac{(2-U_n^2)^2}{4-U_n^2}$. استنتج أن المتتالية (U_n) متزايدة.

(2) بين أن المتتالية (U_n) متقاربة.

(3) لكن المتتالية (V_n) المعرفة على N بـ : $V_n = \frac{U_n^2}{2-U_n^2}$.

أ) بين أن (V_n) متتالية حسابية أساسها 1.

ب) نكتب V_n و U_n بدلالة n ، ثم نكتب $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$.

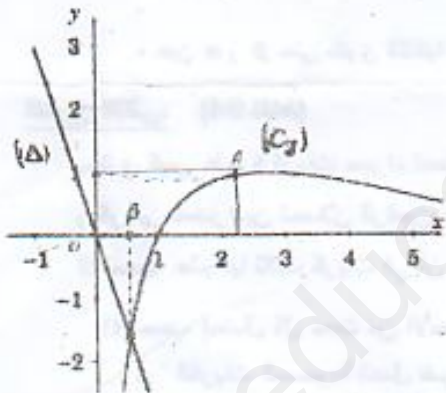
(4) نعتبر المتتالية (W_n) المعرفة على N^* كما يلي : $W_n = \ln\left(\frac{U_n}{2}\right)$.

أكتب بدلالة n المجموع : $S_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

(I) g دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = a \ln^2(x) + b \ln(x)$ حيث a و b ثوابت حقيقية و (C_g) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$) و (Δ) مستقيم معادلته $y = -3x$.

β فاصلة نقطة تقاطع (Δ) مع (C_g) (كما في الشكل المقابل). النقطة $A(e; 1)$ نقطة حدية (ذروة) لـ (C_g).



(1) أ) عين $g'(x)$ بدلالة a و b .

ب) تأكد من المعطيات السابقة أن $a = -1$ و $b = 2$.

(2) عين بياناً وضعياً (C_g) و (Δ) ثم استنتج إشارة $h(x)$.

حيث : $h(x) = g(x) + 3x$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = 3 \ln x + \frac{(\ln x)^2}{x}$.

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم

المتعامد المتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$)

(1) بين أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ واسر النتيجة هندسياً. ثم أكتب $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

(2) أ) بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ يكون : $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير دالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما 1 و الآخر a حيث : $0.3 < a < 0.4 < \beta$.

ب) تأكد أن : $\ln(a) = -3a$.

(4) أُنشئ (C_f) على المجال $]0; 5[$ نأخذ $\beta = 0.5$ و $f(\beta) = -1.2$ و $f(5) = 5.3$.

(5) أ) باستعمال المكالمة بالمتجزئة عين دالة الأصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ و التي تتعلم من أجل $x = e$.

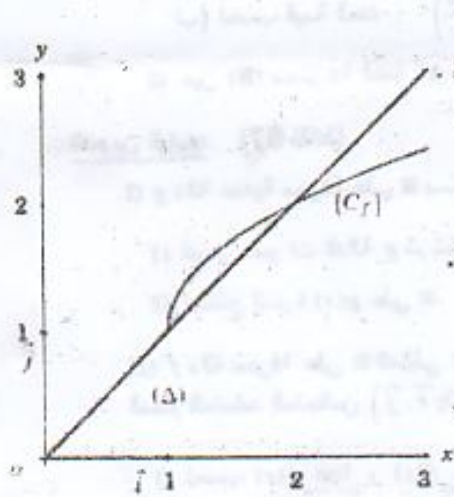
ب) بين أن مساحة الحيز المستوي A_n المحدد بـ (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها $x = 1$ و $x = a$ و $y = 0$ هي :

$A_n = (-9a^3 - 9a^2 - 3a + 3)u.a$.

الموضوع الثاني :

التمرين الأول: (05 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $[1; +\infty[$ بـ: $f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذي المعادلة $y=x$ كما هو موضح في الشكل المقابل .
نعبر المتتالية (U_n) المعرفة على N بحدها الأول $U_0 = \frac{5}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$.



- (1) أ) نقل الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور القواصل دون حساب الحدود U_0, U_1, U_2 و U_3 .
ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) و تقاربها .
- (2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < U_n < 2$.
ب) ارسم اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج أنها متقاربة .
- (3) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة بحدها العام من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n = e^{-\frac{1}{2} + 2n}$.
أ) بين أن (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
- (4) أ) أصب بـ دلالة n المجموعتين : $T_n = V_0^2 + V_1^2 + \dots + V_n^2$ و $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$.
ب) استنتج قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{1-e^2} (1 - e^{4048})$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- (1) عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n ، برفلي للقسم الإقليدية للعدد 4^n على 7 .
- (2) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2023^n - 2022^{2n} + 2024^n \equiv 0[7]$.
- (3) عين قيم n التي من أجلها يكون : $2020^{6n+5} + 1441^{5n+6} - 2023^n - 2022^{2n} + 2024^n + 5n \equiv 0[7]$.
- (4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = 1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{n-1}$.
أ) بين أن : S_n مضاعف للعدد 7 إذا و فقط إذا كان $4^n - 1 \equiv 0[7]$.
ب) استنتج قيم n التي من أجلها يكون S_n قابل للقسم على 7 .
- (5) عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق : $\begin{cases} 4^n + n + 2023 \equiv 0[7] \\ n^2 + 2n + 7 \equiv 0[3] \end{cases}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لنقط A, B, C التي لواحظها $z_A = 2 + 2i, z_B = 2\sqrt{3} - 2i$ و $z_C = \bar{z}_B$ على الترتيب

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C للمعادلة ذات المجهول z : $(z - 2i - 2)(z^2 - 4z + 16) = 0$:

(2) أ) أكتب العدد المركب $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل المثلثي والأسّي .

ب) إستنتج القيمة المضبوطة لـ : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

(3) أكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ على الشكل الأسّي . ثم إستنتج طبيعة المثلث ABC .

(4) أ) n عدد طبيعي . عين قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا .

ب) أكتب قيمة العدد $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^{3023}$.

(5) عين (E) مجموعة النقط M من المستوى ذات اللاحقة z التي من أجلها يكون $z = z_A + 2e^{i\theta}$ حيث $\theta \in \mathbb{R}$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

(I) g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 - x + e^x$.

(1) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب في

المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أكتب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 1$ مغارِب للمنحنى (C_f) بجزء $+\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى

(C_f) و المستقيم (Δ) .

(3) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^{-x} g(x)$.

ب) إستنتج اتجاه تغير دالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(4) بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-0.5 < \alpha < -0.4$.

(5) أ) أكتب ممثلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات التماسلة 0 .

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المماس (T) .

(6) أنشئ (Δ) ، (T) و (C_f) في نفس المعلم .

(7) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx + 1$.

(III) H دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $H(x) = (ax + b)e^{-x}$ حيث a و b عددين حقيقيين .

(1) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$ المعرفة كما يلي : $h(x) = xe^{-x}$.

(2) أكتب بوحدة المساحة $a.a$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المماس (T) و المستقيمين اللذين

مماثلتيهما : $x = 1$ و $x = 3$.

البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات

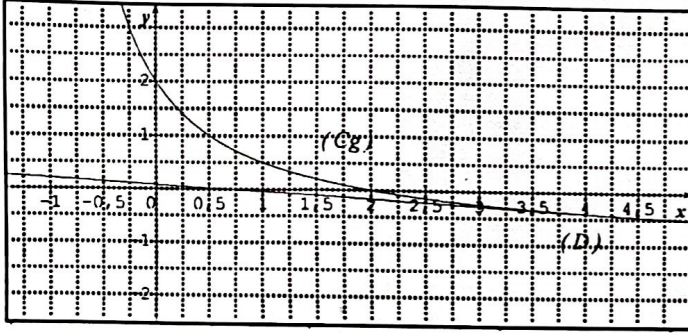
على المترشح اختيار احد الموضوعين

الموضوع الأول

الأستاذ الياس

التمرين الأول [100ن]:

لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]-1, +\infty[$. (C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(0, \vec{i}, \vec{j})$



الوثيقة

← الوثيقة التالية تمثل تغيرات الدالة g على Dg

← حيث : $A(4, -\frac{2}{5})$ و $B(\frac{7}{10}, 0)$

و المستقيم ذو (Δ) مماس ل (C_g) في

الفصلة $x = 4$ و (C_g) يقبل مقارب افقي

عند $+\infty$ معادلته $y = -1$.

المطلوب :

1. من منحنى الدالة g حدد النهايات التالية مع التبرير :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{g(4\sqrt{\frac{x+2}{x+4}} + g(\frac{1}{4} + \frac{x-1}{4x+2}) - 1) - \frac{1}{6}} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x + g(\frac{2x+1}{e^x})}{x - g(\frac{2x+1}{e^{-x}})} \right) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^{xg(\frac{x+2}{2x+1}) - x + 2}}{1 + \frac{1}{x}}$$

- في مايلي نعرف الدالة f بمايلي : $f(x) = \ln \left(-g \left(2 + \frac{1}{x} \right) + \alpha \right) + x + \frac{1}{\alpha}$ مع $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

2. حدد مجال تعريف الدالة f . مع التعليل موضحا الطريقة .

3. جد عبارة المشتقة $f'(x)$.

4. بين ان : $f(x) > x$.

5. جد قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون : $f'(\frac{1}{2}) = \frac{73}{85}$.

نضع $\alpha = 3$. علل صحة العبارات التالية :

- أ. (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x - \frac{1}{3} + \ln(3)$ عند $+\infty$.

- ب. f متناقصة تماما على المجال $]-\frac{1}{3}, 0[$ و متزايدة تماما لما $x > 0$.

- ت. $f'(0) = \frac{1}{4}$.

6. في مايلي نعرف المتتالية (u_n) كمايلي : $\begin{cases} u_0 = f(\frac{1}{2}) \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}f(u_n) \end{cases}$

- أ. تحقق ان : $2(u_{n+1} - u_n) = f(u_n) - u_n$.

- ب. استنتج تغيرات المتتالية u_n .

- ت. برهن بالتراجع ان : $1 < u_n < \frac{3}{2}$.

- ث. علل على تقارب المتتالية (u_n) . ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

- ج. نعتبر الجداء التالي : $p_n = \frac{2u_1}{\sqrt{5}} \times \frac{2u_2}{\sqrt{5}} \times \dots \times \frac{2u_n}{\sqrt{5}}$.

- جد حصرا لجداء p_n . ثم حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

التمرين الثاني : [110 ن]

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث $u_0 = -u_1 = \frac{1}{2}$ $u_n = e^{4+\frac{u_n}{n}}$ ب $\mathbb{N}^*$ المعرفة على $\mathbb{N}^*$

1. اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$ فان : $u_{n+1} - u_n = -(-1)^n$
2. احسب الحدود u_4, u_3, u_2
3. جد عبارة المتتالية (u_n) بدلالة n
- أ) ناقش حسب قيم العدد الطبيعي n رتبة المتتالية (u_n)
- ب) هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ علل اجابتك
4. برهن باستعمال مبدأ التراجع انه من اجل كل $n \in \mathbb{N}$ فان : $\cos(\pi n + \theta) = (-1)^n \cos(\theta)$
- أ) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n = \cos(\pi n + \theta)$. يطلب تعيين θ
- ب) تحقق ان المتتالية (u_n) هندسية . يطلب تعيين أساسها وحدها الأول
- ت) بين ان : $u_{n+1} \times u_{n+3} = (u_{2n})^2$
5. ليكن المجموع التالي : $s_n = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots + u_n$
- برهن ان : $s_n = \frac{1}{2}(u_n + u_{2n})$
6. احسب المجموع التالي : $s'_n = C_n^0 U_0 - C_n^1 U_1 + C_n^2 U_2 - C_n^3 U_3 + \dots + C_n^n U_n$
7. جد حصرا للمتتالية v_n . ثم اثبت انها متقاربة نحو نهاية يطلب تعيينها
- لتكن المتتاليتين (T_n) و (p_n) المعرفتان على $\mathbb{N}(n \geq 2)$ كمايلي :
$$T_n = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{n}\right) + \dots + \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

$$p_n = \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) \times \cos\left(\frac{2\pi}{2n}\right) \times \cos\left(\frac{3\pi}{2n}\right) \times \dots \times \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)$$
1. ليكن مجموع k_n كمايلي : $k_n = \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cos(3\theta) + \dots + \cos(n\theta)$
- أ) برهن ان : $k_n = \frac{\sin(\frac{\theta}{2}) \times \cos(\frac{(n+1)\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}$
- ب) استنتج T_n . ماذا تلاحظ ؟
2. برهن بالتراجع انه من اجل عدد طبيعي $n \geq 2$ فان : $P_n = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$
- أ) حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} (p_n)^{2n}$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$
- ب) جد قيمة الاعداد الطبيعية (α, β, γ) حتى يكون : $p_\alpha \times p_\beta \times p_\gamma = 9 \times 2^{-153}$
3. هل p_n و T_n متجاورتان ؟ علل اجابتك
- جزء هذا مستقل عن الأول . ليكن z عدد حقيقي بحيث : $z \not\equiv 0[2\pi]$
- من اجل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}^*$ نضع المجموع (s_n) حيث : $s_n = 1 + e^{iz} + e^{2iz} + \dots + e^{inz}$
1. اثبت ان : $\{\theta \in \mathbb{N}^*\}$ فان : $1 - e^{i\theta} = \left(-2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$
2. اثبت انه من اجل عدد طبيعي غير معدوم فان : $s_n = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)z}{2}\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)} \times e^{i\frac{nz}{2}}$
3. ناخذ في هذا الجزء ان : $Z = \frac{\pi}{n}$ ($n \geq 2$)
- نعتبر العددين A_n و B_n حيث :
$$\begin{cases} A_n = 1 + \cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{2\pi}{n} + \dots + \cos\frac{(n-1)\pi}{n} \\ B_n = \sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \dots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n} \end{cases}$$

4. تحقق ان : $s_{n-1} = A_n + iB_n$. ثم استنتج ان : $B_n = \frac{1}{\tan(\frac{1}{2}z)}$

التمرين الثالث [11²] :

لدنيا n من الصناديق التي يمكن ان تحتوي على 0 الى n من الكرات . مرقمة من 1 الى n .
← نضع الكرات n بصفة عشوائية في الصناديق n .

(1) نرمز ب P_n الى احتمال وجود كرية واحدة بالضبط في كل صندوق .

(أ) بين ان : $p_n = \frac{n!}{n^n}$

(ب) بطريقتين مختلفتين احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$

(2) بين ان : $\frac{p_n}{p_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. استنتج انه من اجل $n \in \mathbb{N}^*$ فان : $\frac{p_n}{p_{n+1}} \leq e \leq \frac{p_{n+1}}{p_{n+2}}$

(3) برهن بالتراجع انه من اجل كل $n \in \mathbb{N}$ فان : $(1+x)^n \geq 1+nx$

(4) بين ان : $\frac{p_n}{p_{n+1}} \geq 2$

(5) استنتج ان : $p_n \leq \sqrt{\frac{n}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{4}} \times \sqrt{\frac{n}{8}} \times \dots \times \sqrt{\frac{n}{2^n}}$

(6) جد مرة أخرى $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$

التمرين الرابع [11²] :

نعتبر الدالة g_n المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $\begin{cases} g_n(x) = x + x \ln(|x|^n) & x \neq 0 \\ g(0) = 0, x = 0 \end{cases}$ حيث $(n \in \mathbb{N}^*)$

1. برهن ان جميع المنحنيات (c_{g_n}) تمر من ثلاث نقاط ثابتة يطلب تعيينهم .

2. ادرس شفيعة الدالة g_n . ثم فسر النتيجة هندسيا .

3. عين نهايات الدالة g_n .

4. بين انه من اجل كل $(x \in Dg)$ فان : $g'_n(x) = \ln(|x|^n) + n + 1$

أ. ادرس تغيرات الدالة g_n . ثم شكل جدول التغيرات .

ب. ناقش حسب قيم $(m, n) \in \mathbb{N}^*$ حلول المعادلة : $\ln\left(\frac{m(1+\ln|x|^n)}{x}\right) = \ln(1 + e^{\ln(n)+\ln(\ln|m|)})$

5. اثبت ان المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبلين حلين هما α_n و β_n حيث $0 < \alpha_n < 1$ و الاخر استنتج حصرا له

6. تحقق ان $\alpha_1 = e^{-1}$, ثم بين ان $n \geq 2$ فان $\ln(\alpha_n) + \frac{1}{n} = 0$

أ. استنتج تغيرات المتتالية α_n , ثم علل على تقاربها .

ب. احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \alpha_n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

ت. اكتب معادلة المماس (Δ) عند الفاصلة α_n .

ث. استنتج إشارة الدالة g_n .

7. باستعمال المكاملة بالتجزئة جد اصلية $t \ln|t|^n$ و التي تنعدم عند القيمة 1 .

8. نعرف المتتالية u_n و v_n كمايلي : $u_n = \int_1^e g_n(x) dx$, $v_n = e^{u_n}$

أ. اثبت ان من خلال المكاملة بالتجزئة ان $u_1 = \frac{3e^2-1}{4}$. ثم جد عبارة u_n بدلالة n

ب. بين ان مساحة جميع المنحنيات $(c_{g_{n+1}})$ و (c_{g_n}) و المستقيمت $x = 1$ هي $\frac{e^2+1}{4}$

ت. اثبت ان v_n هندسية أساسها $q = \sqrt[4]{e^{e^2+5}}$ و يطلب تعيين حدها الأول .

ث. احسب المجموع التالي : $s_n = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + \dots + v_{n-1} u_{n-1}$

• نعرف الدالة f على $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ بالعلاقة التالية :

$$f(x) = \ln \left(|\cos(x)|^{\sin(x)} \times \sqrt{\frac{\sin(x) + 1}{1 - \sin(x)}} \right)$$

1. اثبت ان الدالة f مستمرة على D_f .
 2. اثبت ان الدالة f فردية.
 3. تحقق ان الدالة f دورية دورها $T = 2\pi$.
 4. برهن ان : $|f(x)| < \ln(2)$.
 5. بين ان كل $x \in D_f$ فان : $f'(x) = g_1(\cos(x))$.
- أ. استنتج تغيرات الدالة f على المجال $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.
- ب. شكل جدول التغيرات الدالة f على نفس المجال السابق.
- ت. استنتج الوضع النسبي لكل من (c_f) و منحنى الدالة $\ln|\cos(x)|^{\sin(x)}$.

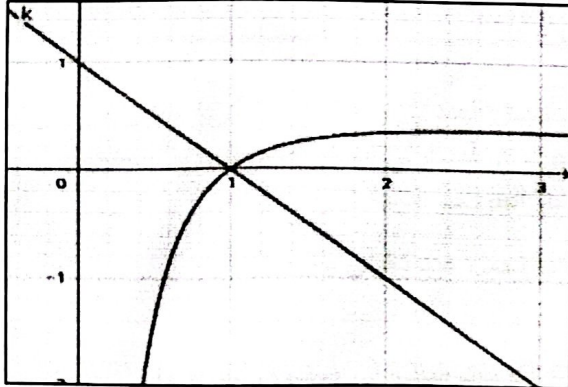
بالتوفيق لكم

أتمنى لكم النجاح الدائم في مسيرتكم المتبقية
لو النجاح كان ساهل لكانت كل الناس ناجحة

الموضوع الثاني :

التمرين الرابع :

(1) لتكن الدالتين h و k المعرفتين على $]0, +\infty[$ بـ $h(x) = \ln^2 x$ و $k(x) = 1 - x$.



الوثيقة المقابلة تمثل تغيرات كل من h و k .

• نعتبر الدالة $g(x) = k(x) - h(x)$.

(1) استنتج تبعا لقيم x إشارة $g(x)$ على نفس المجال.

(2) ليكن α عدد حقيقي $\alpha \in]0,1[$ وليكن $A(\alpha)$ حيث

$$A(\alpha) = \int_{\alpha}^1 g(x) dx$$

جد $A(\alpha)$ بدلالة α ثم فسر ذلك هندسيا.

• نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \sqrt{x - \ln(x)}$.

(1) عين مجموعة تعريف الدالة f .

(2) احسب النهايات عند اطراف مجال التعريف. ثم فسر النتائج هندسيا.

(3) بين ان المعادلة $e^{\sqrt{x - \ln(x)} - 1} - e = 0$ تقبل حلين احدهما β حيث : $5,7 < \beta < 5,8$.

(4) بين ان : $f'(x) = -\frac{k(x)}{2xf(x)}$.

(أ) استنتج اتجاه تغير الدالة f . ثم شكل جدول تغيرات.

(ب) بين ان من اجل كل $x \in Df$: $x \geq 1 + \ln(x)$.

(5) استنتج ان : $f(\beta) = 2$.

(6) بين ان : $f(x) - x = \frac{g(x)}{f(x)+x}$. ثم استنتج ال وضع النسبي لكل من (c_f) و $y = x$.

(7) ارسم كل من (c_f) و $y = x$.

(8) اثبت انه من اجل $1 \leq x \leq e$ فان : $\ln(x+1) \leq f(x) \leq x$.

(أ) استنتج حصرا لـ $A = \int_1^e f(x) dx$.

• في مايلى نعرف المتتالية (u_n) العددية كمايلي : $\begin{cases} u_0 = e \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

(1) مثل اربع حدود الاولى دون جسابها ميرزا خطوط الانشاء.

(2) برهن بالتراجع انه من اجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq \ln(u_n) \leq 1$.

(3) استنتج تغيرات المتتالية (u_n) . ثم علل على تقارب (u_n) .

(4) بين ان : $|1 - u_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |1 - u_n|$.

(5) استنتج انه : $|1 - u_n| \leq \frac{e-1}{2^n}$.

(6) حدد : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(7) نعتبر الجداء : $p_n = \sqrt[3]{\frac{2}{u_2^2 + \ln(u_1)}} \times \sqrt[9]{\frac{4}{u_3^2 + \ln(u_2)}} \times \sqrt[27]{\frac{8}{u_4^2 + \ln(u_3)}} \times \dots \times \sqrt[3^n]{\frac{2^n}{u_{n+1}^2 + \ln(u_n)}}$.

جد حصرا للجداء P_n .

حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

التمرين الثاني :

ليكن z_1 و z_2 و z_3 اعداد مركبة حلا للمعادلة $z^3 + 64e^{i\frac{\pi}{2}} = 0$. حيث ان : $z_3 + \bar{z}_2 = 0$.
 $\text{Re}(z_2) < 0$

- (1) جد كل من z_1 و z_2 و z_3 . ثم اكتبهم على الشكل الاسي .
- (2) استنتج طبيعة المثلث الناتج موضحا الخطوات .
- في مايلي نعتبر صندوق (φ) يحتوي على (n) كرية حمراء تحمل العدد z_1 و $(n+1)$ كرية خضراء تحمل العدد z_2 و $(n+2)$ كرية بيضاء تحمل العدد z_3 . حيث n عدد اولي اصغر تماما من 10 . نسحب من الصندوق (φ) 3 كريات على التوالي دون ارجاع و نعتبر الحوادث التالية :

A « سحب على الأقل كرية حمراء » B « الكرية الثانية تحمل عدد تخيلي صرف »

- (1) جد $p(A \cap B)$ بدلالة n .
- في مايلي نسحب الكريات البيضاء من الصندوق (φ) و نفرغ الكريات الباقية في صندوق اخر (ζ) و نسحب على التوالي كرتين دون ارجاع . نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل $\arg(\alpha) + \arg(\beta)$ حيث α و β العددين الظاهرين على الكرية المسحوبة .
- (أ) جد قيم المتغير العشوائي . ثم عرف قانون احتماله .
- (ب) عين مايلي: $p(X < \int_e^{e+1} \frac{1}{x \ln(x)} dx + \int_{e+1}^{e+2} \frac{1}{x \ln(x)} dx + \dots + \int_{e+2023}^{e+2024} \frac{1}{x \ln(x)} dx)$ و $p(X \leq \int_{\pi}^{\pi^2} te^{-t} dt)$

التمرين الثالث :

- (1) برهن انه مهما كان $n \in \mathbb{N}$ فان : $4^{3n} \equiv 3^{6n} [7]$.
- (2) استنتج باقي قسمة العدد $9999^{2026^{2024}}$ على 7 .
- (3) ليكن العدد $A(n) = 9999^{2026^n} + 2025^{2n} + 199^n + 2 \times 2026^n$.
(أ) جد قيم العدد الطبيعي n حتي يكون $A(n) \equiv 0 [7]$.
(ب) هل العدد $A(2024^{1962})$ مضاعف ل 7 ؟
(ت) استنتج باقي قسمة العدد $A(2024)$ على 77 .
- (4) نعتبر المجموعين التاليين :
 $\begin{cases} S_n = 36 + 288 + 1728 + \dots + 9n \cdot 4^n \\ S'_n = 12 + 72 + 324 + \dots + 4n \cdot 3^n \end{cases}$
(أ) برهن بالتراجع انه : $S_n - S'_n = (3 - 6n) \cdot 3^n + (12n - 4) \cdot 4^n + 1$
(ب) بين ان : $S_{1954} \equiv S'_{1954} [7]$.
(ت) جد باقي قسمة العدد $(S_{2024} - S'_{2024})^{2005^{2024}}$ على 7 .
(ث) جد قيم العدد الطبيعي n حتي يكون $S_n \equiv S'_n [7]$.
- نضع العددين الطبيعيين الغير معدومين χ و γ المكتوبان في نظام ذي الأساس n .
حيث : $\chi = 4343^n$ و $\gamma = 50601^n$ و نضع ان $\text{PGCD}(\chi, \gamma) = d$.
- (1) استنتج القيم الممكنة ل d .
- (2) جد قيم العدد الطبيعي n حتي يكون : $d = 50$ و $d = 101$.
- (3) هل توجد قيم للعدد الطبيعي n حتي يكون $d = 2024$. علل اجابتك .
- (4) تحقق انه اذا كان d/x و d/y فان : $d/2c_n^2 + n - 1$.
- (5) استنتج قيمة d في حالة $n = 2024^{2023}$.
- (6) نضع ان $n = 9$ تحقق ان العدد $y^{2027} - 2025^x - 2024^{2023} + y - 6$ مضاعف ل 7 .

التمرين الأول :

لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بالعلاقة : $g(x) = \frac{\ln(2)\sqrt{x}}{x}$ يعطى جدول تغيراتها :
(1) انطلاقا من جدول التغيرات حدد إشارة $g(x)$.

x	0	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	0

• في ما يلي نعرف المتتاليتين (u_n) و (w_n) على $\mathbb{N}^*$ كمايلي :

$$w_n = \frac{eu_n}{(e-1)} \text{ و } u_n = \int_1^e \frac{n}{x} \ln\left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt[n]{x}}\right) dx$$

(1) بين ان : $u_1 = \ln(2)(2\sqrt{e} - 2) - \frac{1}{2}$. ثم استنتج w_1 .

(2) اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $u_{n+1} - u_n = \int_1^e g(x) dx$.
استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) بين انه $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{n}{e} \ln\left(\frac{2}{\sqrt[n]{e}}\right)(e-1) \leq u_n \leq n \ln(2\sqrt{e})(e-1)$.

(أ) استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. ماذا تستنتج .

(ب) جد حصرا لمتتالية w_n . ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.

(4) نعتبر الجداء p_n حيث : $p_n = \sqrt[n]{e^{w_1}} \times \sqrt[n]{e^{w_2}} \times \sqrt[n]{e^{w_3}} \times \dots \times \sqrt[n]{e^{w_n}}$

(أ) بين انه من اجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ فان : $\frac{1}{e} \sqrt{2^{n+1}} \leq p_n \leq \sqrt{2^{(n+1)\sqrt{e}}}$

(ب) استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{p_n}$

(5) بين انه من اجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = \ln(2)(2\sqrt{e} - 2)$. ثم استنتج طبيعة المتتالية (u_n)

• في ما يلي نضع : $v_n = e^{u_n}$ و نضع ان $u_0 = -\frac{1}{2}$.

(1) بين ان v_n هندسية أساسها $q = 4\sqrt{e}-1$ يطلب تعيين حدها الأول وعبارتها .

(2) جد مرة اخرى عبارة u_n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) نضع المجموع التالي :

$$s_n = c_{2n}^0 \frac{1}{v_0} + c_{2n}^1 \frac{2^{2\sqrt{e}-2}}{v_1} + c_{2n}^2 \frac{2^{4\sqrt{e}-4}}{v_2} + \dots + c_{2n}^{2n} \frac{(2^{2\sqrt{e}-2})^{2n}}{v_n}$$

(أ) برهن انه من اجل كل عدد طبعين k و n : $0 < k \leq n$ فان : $Kc_n^k = nc_{n-1}^{k-1}$.

(ب) احسب s_n بدلالة n . ثم بين انه مهما كان n فان : $s_n = \sqrt{e} 4^n$.

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (نقاط 4,5)

نعتبر (U_n) متتالية عددية معرفة ب : $u_0 = 1$ و $u_1 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$u_{n+1} = 2\alpha u_n + 3\alpha^2 u_{n-1} - 1; \alpha \in]-1; 1[\setminus \{0\}$$

نضع ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_n = u_{n+1} - 3\alpha u_n$$

- (1) أثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول بدلالة α .
- (2) هل المتتالية (V_n) متقاربة ؟
- (3) أحسب بدلالة n و α المجموع S_n ، حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$
- (4) عين قيمة العدد الحقيقي α علما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{4}$.
- استنتج عندئذ U_n بدلالة n ثم بين أن (U_n) متقاربة.
- (5) في كل مايلي نضع $\alpha = -\frac{1}{3}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $p_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

أ - بين أن : $p_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$

ب - عين أصغر عدد طبيعي n حتى يكون $p_n \leq 3^{-44}$.

التمرين الثاني (4,5 نقاط)

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث : $7x - 3y = 6$

- (1) أ - أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x, y) من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن : $y \equiv 5[7]$
- ب- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

- (2) حل في $\mathbb{Z}^2$ الجملة : $\begin{cases} 7x - 3y = 6 \\ PGCD(x, y) = 3 \end{cases}$

- أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 11.
- ب - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $5^{2n} - 3^n \equiv 0[11]$.

- ج- حل في N^2 الجملة : $\begin{cases} 7x - 3y = 6 \\ 2(2018)^{2x} + (2016)^{5y} \equiv 0[11] \end{cases}$

التمرين الثالث : (5 نقاط)

المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

- (1) أوجد العددين z_1 و z_2 الجذران التربيعيان للعدد المركب $L = 2 - 2i\sqrt{3}$ ثم أكتبهما على الشكل الأسّي .

(2) نعتبر النقط C, B, A ذات اللوح $z_C = \sqrt{3} - i, z_B = \sqrt{3} + i, z_A = 2i$
 أ- بين أن $\overline{AB} = \overline{OC}$ و عين قيمة للزاوية الموجهة $(\overline{OB}; \overline{AC})$
 ب- استنتج طبيعة الرباعي $OABC$.

(3) أ- أكتب العبارة المركبة للتشابه S الذي يحول A إلى O و يحول C إلى B محددا عناصره المميزة .

ب - تحقق أن SoS تشابه مباشر نسبته $\frac{1}{3}$ و أحد أقياسه زاويته π .

ج- نضع $T = \underbrace{SoSo \dots SoS}_{n \text{ مرة}}$ التحويل النقطي المعروف بـ :

4- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون T تحاكيا نسبته سالبة.

التمرين الرابع : (6 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(0) = 1$ و من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) + 1$$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (الوحدة 2 cm)

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) أ- أدرس قابلية الاشتقاق لـ f عند 0 .

ب- أثبت أن f قابلية للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ثم أحسب $f'(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

ج- استنتج اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها

(3) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$, تحقق أن : $4,6 < \alpha < 4,7$

(4) أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

(5) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

أ- أحسب $g'(x)$ و $g''(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة g' , استنتج إشارة $g'(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة g , استنتج وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T)

ج- أحسب $f(6)$ ثم أنشئ (C_f) و (T)

(6) عدد طبيعي غير معدوم باستعمال التكامل بالتجزئة

أ- أحسب $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 \ln x \, dx$ بدلالة n .

ب- استنتج بدلالة n المساحة $A(n)$ بـ cm^2 للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المماس (T) و

المستقيمين ذا المعادلتين $x = 1$ و $x = \frac{1}{n}$ ثم

- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(n)$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقاط)

يحتوي صندوق على 4 كرات تحمل رقم a و 5 كرات تحمل الرقم $(a-1)$ ، $a \in \mathbb{R}$.
 لسحب عشوائيا في آن واحد 3 كرات من الصندوق .

(1) احسب احتمال الحوادث التالية:

A : سحب 3 كرات تحمل نفس العدد .

B : سحب 3 كرات منها كرتين بالضبط تحملان نفس العدد .

(2) ليكن X المتغير العشوائي المرتبط بمجموع الأعداد المسجلة على الكرات المسحوبة لكل سحب .

أ- حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X .

ب- حدد قانون الاحتمال X .

ج- احسب الأمل الرياضي بدلالة a و حدد a من أجل $E(x) = 0$

التمرين الثاني: (4 نقاط)

(1) أوجد D_{119} مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 119 .

ب) عين الثنائيات $(a; b)$ من $(\mathbb{N}^*)^2$ حيث :

$$\begin{cases} PGCD(a; b) = 17 \\ PPCM(a; b) = 2023 \end{cases}$$

(2) لتكن في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E) : 289x - 34y = 2023$.

أ) أوجد $PGCD(289; 34)$ ثم استنتج ان المعادلة (E) تقبل حولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب) بين انه اذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فان y مضاعف للعدد 17 . ثم استنتج في $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (E)

ج) أوجد الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق : $x^2 - y \leq 52$.

4) n عدد طبيعي فردي ، باقي قسمته على 17 هو 16 فما هو باقي قسمته على 34 .

التمرين الثالث: (5 نقاط)

نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقط A, B, C التي لواحقها على الترتيب

$$Z_C = -4 + i, \quad Z_A = -i, \quad Z_B = 2 + 3i$$

(1) أ) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$

ب) عين طول و عمدة العدد المركب $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(2) نعتبر التحويل النقطي (T) في ' سنوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث:

$$Z' = iZ - 1 - i$$

(أ) عين طبيعة التحويل T و عناصره المميزة.

(ب) ماهي صورة النقطة B بالتحويل T .

(3) لتكن D النقطة ذات اللاحقة $Z_D = -6 + 2i$.

(أ) بين أن النقط A, B, C على استقامة.

(ب) عين نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحول النقطة C الى النقطة D .

(ج) عين العناصر المميزة للتشابه S الذي مركزه A و يحول B الى D .

التمرين الرابع: (7 نقاط)

* لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل: $g(x) = 1 + x + e^x$

(1) ادرس تغيرات الدالة g

(2) برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α . تحقق أن α من المجال $[-1.3; -1.2]$

(3) حدد تبعا لقيم x إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(-x)$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = \frac{xe^x}{1+e^x}$ نسمي (Γ) المنحنى البياني لها

(1) أ) اكتب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ ثم ادرس تغيرات الدالة f . (ب) برهن أن $f(\alpha) = 1 + \alpha$.

(ج) برهن أن المنحنى (Γ) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) بجوار $+\infty$ معادلته: $y = x$.

(د) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (Γ) عند النقطة O مبدأ المعلم، ثم ادرس وضعية المنحنى (Γ) بالنسبة للمماس (T) .

(هـ) ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ المنحنى (Γ) و (Δ) (تؤخذ $2cm$ كوحدة).

(H2) نقطة فاصلتها x (حيث $x > 0$) وترتيبها معدوم، المستقيم الموازي للمحور (y') والمار من H يقطع (Γ) في

النقطة M ويقطع المقارب (Δ) في النقطة N ، نضع $\varphi(x) = MN$.

(أ) بين أن $\varphi(x) = \frac{x}{1+e^x}$.

(ب) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $\varphi'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \cdot g(-x)$.

واستنتج أن MN يكون أكبر ما يمكن عندما $x = -\alpha$.

(ج) برهن أن $f(-\alpha) = 1$.

(د) برهن أن المماس للمنحنى (Γ) عند النقطة A ذات الفاصلة $(-\alpha)$ يوازي المستقيم (Δ) . اكتب معادلته ثم ارسمه في نفس المعلم السابق.

(3) ناقش بيانها وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة التالية: $me^x + m + x = 0$

(4) أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \geq 1$ لدينا: $\frac{e^x}{1+e^x} \leq f(x) \leq x$.

(ب) استنتج باستعمال المتباينة السابقة حصرا لمساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (Γ) والمستقيمات التي معادلاتها:

$$x = -\alpha \text{ و } x = 1, y = 0$$

انتهى الموضوع الثاني



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين :
الموضوع الأول

التمرين الأول : (05 نقاط):

p عدد طبيعي غير معدوم و n عدد طبيعي غير معدوم و يختلف عن 1.

a و b عدنان طبيعيان حيث: $a = pn$ و $b = p(n-1)$

(1) بين أن : $p \gcd(a, b) = a - b$.

(2) بين أنه إذا كان a و b عدنان طبيعيان غير معدومين حيث: $p \gcd(a, b) = a - b$ فإنه يوجد عدنان طبيعيان α و β

أوليان فيما بينهما يحققان: $a = p\alpha$ و $b = p\beta$

(3) x و y عدنان طبيعيان غير معدومين.

نضع: $a = 40x(3y + 2)$ و $b = 15x(8y + 5)$ و $c = 24x(5y + 3)$.

عين $p \gcd(a, b)$ و $p \gcd(b, c)$ ثم استنتج $p \gcd(a, b, c)$.

التمرين الثاني (04 نقاط) :

يحتوي صندوق على ثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام: 0 ، 1 ، 1 و ثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام: 1 ، 2 ، 2 كريتين سوداوين

تحتلان الرقمين : 0 ، 2 (الكرات كلها متماثلة و لا نفرق بينها عند اللمس)

نسحب من الصندوق ثلاث كريات الواحدة تلو الأخرى دون إعادة الكرة المسحوبة في كل مرة إلى الصندوق .

(1) ما احتمال الأحداث التالية

A : الكريات المسحوبة من نفس اللون

B: ظهور الرقم 1 مرة واحدة فقط في السحبات الثلاث .

C: ظهور الرقم 1 مرتين فقط في السحبات الثلاث.

D: الكرة المسحوبة ثانيا حمراء .

(2) بين أن $P(A \cap B) = \frac{17}{84}$

(3) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بالسحبات الثلاث عدد الكريات السوداء المتبقية في الصندوق .

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X واكتب قانون احتماله .

(ب) احسب الأمل الرياضي $E(X)$

(4) ننزع الآن من الصندوق الكرتان السوداء و نبقى فيه ثلاث كريات بيضاء و ثلاث كريات حمراء.

نسحب من الصندوق كرة واحدة n مرة على التوالي مع الإرجاع في كل مرة .

(أ) عبر بدلالة n عن احتمال أن تكون كل الكريات المسحوبة من نفس اللون .

(ت) احسب احتمال أن تكون في كل السحبات كرة واحدة حمراء على الأقل .

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

(-1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب Z التالية : $(Z - 1 + i)(\bar{Z} - 7 + \frac{7}{2}i) = 0$
نرمز بـ $\bar{Z}$ الى مرافق العدد المركب Z .

(-2) لتكن النقطتين A و B لاحتقيهما : $Z_A = 1 - i$ ، $Z_B = 7 + \frac{7}{2}i$.

(أ) أحسب الطول AB .

(ب) عين النسبة و زاوية التشابه المستوي المباشر الذي مركزه النقطة A و يحول النقطة B إلى النقطة $E(-2 + 3i)$.
(ج) ليكن S التحويل النقطي للمستوي في نفسه و الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات

$$Z' = \frac{2}{3}iZ + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i$$

(ب) عين صورة النقطة A بالتحويل النقطي S ثم عين الطبيعة الهندسية و العناصر المميزة للتحويل S .

(-3) نسمي B_1 صورة النقطة B بالتحويل S ، و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نسمي B_{n+1} صورة النقطة B_n بالتحويل S .

(أ) أحسب الطول AB_{n+1} بدلالة الطول AB_n ؛ ثم استنتج AB_n بدلالة العدد n .

(ب) ابتداء من أي رتبة n_0 تنتمي النقطة B_n إلى القرص الذي مركزه النقطة A و نصف قطره 10^{-2} ؟

(ج) عين مجموعة قيم n التي من أجلها تكون النقط : A ، B_1 و B_n في إستقامة.

التمرين الرابع : (07 نقاط):

(I) الجزء الأول : نعتبر الدالة g المعرفة على $]0 + \infty[$: $g(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{x+4}{x+2}$.

(-1) أحسب نهاية الدالة g عند $+\infty$ و عند 0 بقيم كبرى ، ثم فسر النتائج هندسياً.

(-2) أدرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها.

(-3) بين أن المعادلة : $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α ينتمي إلى المجال $[0.37; 0.38]$.

(-4) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0 + \infty[$.

(II) الجزء الثاني : نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0 + \infty[$ كما يلي :

$$f(x) = x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - x \quad \text{من أجل } x > 0 \quad \text{و } f(0) = 0$$

(-1) (أ) أدرس استمرارية الدالة f عند القيمة 0 من اليمين.

(ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة 0 من اليمين و فسر هندسياً النتيجة.

(-2) (أ) نذكر أن : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ (يمكن وضع : $\frac{2}{x} = h$)

(ب) استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

(ج) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = -x + 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

(-3) (أ) بين أنه من أجل كل $x \in]0 + \infty[$ تكون : $f'(x) = g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

(ب) بين أن : $f(\alpha) = 2$. $\frac{\alpha}{\alpha+2}$ ثم أعط حصراً للعدد $f(\alpha)$.

(ج) عين القيمة المضبوطة x_0 لفاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل.

(-4) أنشئ (Δ) و المنحنى (C_f) في المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (نقبل أن (C_f) يقع أسفل (Δ) في المجال $]0 + \infty[$)

(-5) F هي الدالة المعرفة على المجال $]0 + \infty[$: $F(x) = \left(\frac{x^2}{2} - 2\right) \ln(x+2) - \frac{x^2 \ln x}{2} + x - \frac{x^2}{2}$.

(ب) برر أن الدالة F أصلية للدالة f على $]0 + \infty[$.

(-6) أحسب بدلالة x_0 المساحة $\mathcal{A}(x_0)$ للحيز المستوي المحصور بالمنحنى (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتهما

$$x = x_0 \quad \text{و} \quad x = 2.$$

انتهى الموضوع الأول.

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $A(1;3;3)$ ، $B(4;1;3)$ و $C(4;3;-2)$.

الجزء 1 أ) أثبت أن النقط A ، B و C تشكل مستويا (Q) .

ب) عين شعاعا نظاميا للمستوي (Q) .

ج) تأكد أن $10x + 15y + 6z = 73$ هي معادلة ديكرتية للمستوي (Q) .

الجزء 2 لتكن x ، y و z أعداد طبيعية حيث $10x + 15y + 6z = 73$.

1- أ) أثبت أن y فردي.

ب) أثبت أن $x \equiv 1[3]$ و $z \equiv 3[5]$.

2. نضع $x = 3m + 1$ ، $y = 2n + 1$ و $z = 5p + 3$ حيث m ، n و p أعداد طبيعية.

أ) أثبت أن النقطة $M(x; y; z)$ تنتمي للمستوي (Q) إذا وفقط إذا كان $m + n + p = 1$.

ب) استنتج أنه توجد ثلاثة نقط بالضبط ذات إحداثيات أعداد طبيعية تنتمي للمستوي (Q) . ثم حدد إحداثياتها.

التمرين الثاني: (03,5 نقاط)

لتكن (I_n) المتتالية المعرفة بحددها الأول $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$ ومن أجل كل طبيعي n : $I_n = \int_0^1 \frac{e^n}{1+e^x} dx$.

1. احسب $I_0 + I_1$ و I_1 ثم استنتج قيمة I_0 .

2. احسب $I_n + I_{n+1}$ بدلالة n حيث n طبيعي غير معنوم.

3. قارن بين e^n و $e^{(n+1)}$ حيث x ينتمي للمجال $[0;1]$ ثم استنتج دون حساب I_n أن المتتالية (I_n) متزايدة.

4. أ) أثبت من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;1]$ أن: $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}$.

ب) استنتج حصرا للمتتالية (I_n) .

ج) ما هي نهاية المتتالية (I_n) ؟

التمرين الثالث: (04 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

يحتوي صندوق على ثلاث كريات لا نفرق بينها عند اللمس، تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3

نسحب من الصندوق كرية واحدة ونسمي a الرقم الظاهر عليها ثم نسحب كرية ثانية دون إرجاع الأولى إلى الصندوق ونسمي b الرقم الذي نحمله.

بكل نتيجة (a, b) لهذه التجربة نرفق التحويل النقطي $T_{(a,b)}$ الذي يحول كل نقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z'

حيث: $z' = \alpha z$ مع $\alpha = \frac{a}{2} e^{ib\frac{\pi}{3}}$

1. ما هي النتائج (a, b) لهذه التجربة؟ ما هي قيم α المرتبطة بها؟

2. لتكن A النقطة ذات اللاحقة $z_0 = \sqrt{3} + i$ و A' النقطة ذات اللاحقة $z'_0 = \alpha z_0$ صورة A بواسطة التحويل $T_{(a,b)}$.

(أ) اكتب العدد المركب z_0 على شكله الأسّي.

(ب) حدد الطويلة و عمدة للعدد المركب z'_0 حسب قيم (a,b) .

1. (أ) احسب احتمال الحدث E_1 : "النقطة O, A و A' في استقامة".

(ب) احسب احتمال الحدث E_2 : "العدد z'_0 تخيلي صرف".

التمرين الرابع: (08 نقاط)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{1+\frac{1}{x}}}{x} & ; x < 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ x^2 \ln x - x & ; x > 0 \end{cases}$$

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي

و نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (أ) أثبت أن الدالة f مستمرة عند الصفر.

(ب) هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند الصفر؟ فسر النتائج هندسياً.

2. (أ) أثبت أنه من أجل كل x من المجال $]-\infty; 0[$ $f'(x) = -e^{1+\frac{1}{x}} \frac{(x+1)}{x^3}$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty; 0[$.

3. (أ) ادرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 2x \ln x + x - 1$

(ب) أنجز جدول تغيرات الدالة g .

(ج) احسب $g(1)$ واستنتج إشارة الدالة g على المجال $]0; +\infty[$.

4. (أ) استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم انجز جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

5. (أ) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $x_0 = -\frac{1}{2}$.

(ب) أكتب معادلة للمماس (T') للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $x_1 = e^{-1}$.

6. (أ) أنشئ (T) و (T') و (C_f)

(ب) ناقش بياناً و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $f(x) = mx$.

انتهى الموضوع الثاني



التصحيح النموذجي لامتحان البكالوريا التجريبي -الموضوع الاول

حل التمرين الاول (04 نقاط) :

من المعطيات : $a = pn$ و $b = p(n-1)$ و $n \in \mathbb{N}^*$ و $n > 1$ و $p \in \mathbb{N}^*$

$$PGCD(a;b) = PGCD(pn;p(n-1)) \quad (1)$$

$$PGCD(a;b) = p * PGCD(n;n-1) \quad \text{اي}$$

بما ان $n > 1$ فان العددين n و $n-1$ اوليان فيما بينهما (عددين طبيعيين غير معدومين متتابعان)

$$\text{و منه : } PGCD(a;b) = p \times 1 = p$$

$$\text{علما ان } b = pn - p \text{ اي } b = p \times n - p \text{ اي } p = a - b \text{ و بالتالي } PGCD(a,b) = a - b$$

$$(2) \text{ بفرض } a \in \mathbb{N}^* \text{ و } b \in \mathbb{N}^* \text{ حيث : } PGCD(a,b) = a - b$$

و هذا يعني وجود عددين طبيعيين غير معدومين α و β بحيث يكون :

$$\begin{cases} a = p \times \alpha \\ b = p \times \beta \end{cases} \text{ من المعطيات و بالتالي } \begin{cases} a = (a-b)\alpha \\ b = (a-b)\beta \end{cases} \text{ اي } \begin{cases} a = d \times \alpha \\ b = d \times \beta \end{cases}$$

$$\text{حيث } PGCD(a,b) = a - b \text{ اي } PGCD(p\alpha, p\beta) = p \text{ اي } PGCD(\alpha, \beta) = 1$$

$$(3) \text{ نضع : } x \in \mathbb{N}^* \text{ و } y \in \mathbb{N}^* \text{ و } a = 40x(3y+2) \text{ و } b = 15x(8y+5) \text{ و } c = 24x(5y+3)$$

$$(1) \text{ نعم ان } PGCD(a;b) = a - b \text{ حيث } a - b = 5x$$

$$\text{و بالتالي } PGCD(a;b) = 5x$$

$$(ب) \text{ لدينا : } b - c = 3x \text{ . نضع } p = 3x$$

$$\text{و لدينا } b = 3x(20y+25) \text{ و } c = 3x(40y+24)$$

$$\text{بوضع } n = 40y + 25 \text{ فان } n - 1 = 40y + 24 \text{ (عددين طبيعيين متتابعان)}$$

$$\text{و هذا يعني ان } \begin{cases} b = p \times n \\ c = p(n-1) \end{cases} \text{ و بالتالي حسب الجواب (1) } PGCD(b;c) = b - c$$

$$\text{اي } PGCD(b;c) = 3x$$

$$PGCD(a;b;c) = PGCD(a-b;b-c)$$

$$PGCD(a;b;c) = PGCD(5x;3x)$$

$$PGCD(a;b;c) = xPGCD(5;3)$$

$$PGCD(a;b;c) = x \times 1$$

$$PGCD(a;b;c) = x$$

حل التمرين الثاني(05 نقاط) :

عدد الحالات الممكنة للسحب من الصندوق هي : $A_8^3 = 336$

(1) حساب احتمال الاحداث التالية :

$$(*) \text{ احتمال سحب كرات من نفس اللون اي : } P(A) = \frac{A_3^3 + A_3^3}{336} = \frac{6+6}{336} + \frac{12}{336} \text{ و منه : } P(A) = \frac{1}{28}$$

0.25 (*) احتمال سحب كرة واحدة تحمل الرقم 1 : $P(B) = \frac{(A_3^1 \times A_5^2) \times 3}{336} = \frac{60 \times 3}{336} = \frac{180}{336}$ ومنه : $P(B) = \frac{15}{28}$

0.25 (*) احتمال ظهور الرقم 1 مرتين فقط : $P(C) = \frac{(A_3^1 \times A_5^1) \times 3}{336} = \frac{30 \times 3}{336} = \frac{90}{336}$ ومنه : $P(C) = \frac{15}{56}$

0.25 (*) احتمال ان تكون الكرة الثانية في السحب حمراء : $P(D) = \frac{A_3^1 \times A_7^2}{336} = \frac{3 \times 42}{336} = \frac{126}{336}$ ومنه : $P(D) = \frac{3}{8}$

(2) لنبين ان : $P(B \cap D) = \frac{17}{84}$

0.25 الحدث $(B \cap D)$: كرة واحدة تحمل الرقم 1 و الكرة المسحوبة ثانيا حمراء هي :

$P(B \cap D) = \frac{(A_5^1 \times A_1^1 \times A_4^1) + (A_3^1 \times A_2^1 \times A_4^1) \times 2}{336} = \frac{20 + 48}{336} = \frac{68}{336}$ ومنه :

$P(B \cap D) = \frac{17}{84}$ و هو المطلوب .

0.25 الجدول التالي يوضح الوضعية اكثر :

1 ^{er}	2 ^{eme}	3 ^{eme}
5 التي لا تحمل الرقم 1	R_1	4 كرات التي لا تحمل الرقم 1
3 كرات تحمل الرقم 1	R_2 (حالتان)	4 كرات لا تحمل الرقم 1 وليست R_2

0.25 (2) ا) قيم المتغير العشوائي X هي : 0 و 1 و 2 .

- لنعين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X :

0.25 (*) $X = 0$ معناه ان الكراتان السوداوين موجودتان في السحب : $P(X = 0) = \frac{(A_2^2 \times A_6^1) \times 3}{336} = \frac{12 \times 3}{336} = \frac{36}{336}$

0.25 (*) $X = 1$ معناه في السحب الثلاث توجد كرة واحدة سوداء : $P(X = 1) = \frac{(A_2^1 \times A_6^2) \times 3}{336} = \frac{60 \times 3}{336} = \frac{180}{336}$

0.25 (*) $X = 2$ معناه لا يوجد في السحب كرات سوداء : $P(X = 3) = \frac{A_6^3}{336} = \frac{120}{336}$

نلخص القانون في الجدول التالي :

X_i	0	1	2
$P(X_i)$	$\frac{36}{336}$	$\frac{180}{336}$	$\frac{120}{336}$

(3)

حساب الامل الرياضي :

0.25 لدينا : $E(X) = \frac{0 + 180 + 240}{336} = \frac{420}{336}$ ومنه : $E(X) = \frac{5}{4}$

0.5 (4) لدينا في الصندوق 3 كرات بيضاء . 3 كرات حمراء و السحب لكرة واحدة n مرة على التوالي مع الارجاع .

0.5 (ا) p_1 هو احتمال ان تكون الكرات المسحوبة من نفس اللون اي : $p_1 = (\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{2})^n = 2 \times (\frac{1}{2})^n = \frac{1}{2^{n-1}}$

0.5 (ب) p_2 هو احتمال ان تكون في السحب على الاقل كرة حمراء

(*) نعلم ان : احتمال ان تكون الكرات المسحوبة كلها بيضاء هو : $(\frac{1}{2})^n$

ومنه يكون : $p_2 = 1 - (\frac{1}{2})^n = 1 - \frac{1}{2^n}$

حل التمرين الثالث (04 نقاط) :

0.5 (1) نجد ان $Z = 1 + i$ او $Z = 7 + \frac{7}{2}i$

0.5 (2) (ا) $AB = |Z_B - Z_A| = |7 + \frac{7}{2}i - 1 + i|$ اي $AB = |6 + \frac{9}{2}i|$ نجد $AB = \frac{15}{2}$

(ب) لدينا : $Z_E - Z_A = Ke^{i\theta} (Z_B - Z_A)$ نضع $a = ke^{i\theta}$

0.5 حيث $a = \frac{Z_E - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{-2 + 3i - 1 + i}{7 + \frac{7}{2}i - 1 + i} = \frac{2}{3}i$

ومنه النسبة $k = \frac{2}{3}$ و الزاوية $\theta \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

ج) لدينا : $Z' = \frac{2}{3}iz + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i$

نضع $A' = S(A)$ ومنه $Z_{A'} = \frac{2}{3}iZ_A + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i$

نجد $Z_{A'} = 1 - i = Z_A$ (A نقطة صامدة)

$|a| = \frac{2}{3}$ و $\arg(a) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ -

اذن S هو التشابه المباشر الذي نسبته $k = \frac{2}{3}$ و زاويته $\theta \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ و مركزه النقطة $A(1; -1)$

3) نضع $B_1 = S(B)$ و $B_{n+1} = S(B_n)$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

ا) بما ان $AB_{n+1} = \frac{2}{3}AB$ (لان S تشابه مركزه A ونسبته $k = \frac{2}{3}$)

الاستنتاج : لدينا $AB_1 = \frac{2}{3}AB$ و $AB_2 = (\frac{2}{3})^2 AB$ بالتراجع نجد من اجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

..... $AB_n = (\frac{2}{3})^n AB$

علما ان $AB = \frac{15}{2}$ وبالتالي $n \in \mathbb{N}^*$ $AB_n = \frac{15}{2} (\frac{2}{3})^n$

ب) معناه $AB_n < r$ اي $\frac{15}{2} (\frac{2}{3})^n < 10^{-2}$

نجد $n \geq 16.3$ و n عدد طبيعي

اذن ابتداء من الرتبة $n_0 = 17$ تنتمي B_1 الى القرص الذي مركزه A ونصف قطره r

ج) بما ان $B_1 = S(B)$ فان $B_2 = S(B_1)$ و $B_3 = (SoS)(B_1)$ اي $B_3 = S^2(B_1)$

بالتراجع B_n هي صورة B_1 بالتشابه الذي مركزه A ونسبته $(\frac{2}{3})^{n-1}$ وزاويته $(n-1)\frac{\pi}{2}$

اذن النقط : A و B_1 و B_n في استقامية معناه : $k(n-1)\frac{\pi}{2} = k\pi$ k عدد صحيح موجب

اي $n = 2k + 1$ مع k عدد طبيعي

حل التمرين الرابع (07 نقاط) :

الجزء الاول :

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -1$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$

(2) من اجل كل $x \in]0; +\infty[$ $g'(x) = \frac{-4}{x(x+2)^2}$

اذن من اجل كل $x \in]0; +\infty[$ $g'(x) < 0$

و هذا يعني ان الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة g

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$	$+\infty$	-1

(3) الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$ و بالخص على المجال $]0.37; 0.38[$

وبما ان $\begin{cases} g(0.37) = 0.01326 \\ g(0.38) = -0.00565 \end{cases}$ اي $g(0.36) \times g(0.38) < 0$

فانه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.37 < \alpha < 0.38$

(4) اشارة $g(x)$ كما يلي :

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

الجزء الثاني:

اذن f مستمرة عند 0 من اليمين $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln(x+2) - x \ln x - x] = 0$ (1)

اذن الدالة f غير قابلة للاستنتاج $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - 1 \right] = +\infty$ (ب)

عند 0 من اليمين

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس منطبق على محور الترتيب في النقطة $O(0;0)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h} \ln(1+h)$ (2) بوضع $h = \frac{2}{x}$ اي $x = \frac{2}{h}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 2$ اذن $= \lim_{h \rightarrow 0} 2 \frac{\ln(1+h)}{h} = 2$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - x \right] = -\infty$ (ب)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x + 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - 2 \right] = 0$ (ج) (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) .

(3) من اجل كل $x \in]0; +\infty[$ $f'(x) = \ln(x+2) + \frac{x}{x+2} - (1 \times \ln x + \frac{1}{x}) - 1$ اي

$$f'(x) = \ln(x+2) + \frac{x}{x+2} - \ln(x) - 2$$

اي $f'(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{x+4}{x+2}$ اي $f'(x) = g(x)$

اذن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0; \alpha]$ و f متناقصة تماماً على المجال $[\alpha; +\infty[$

- جدول تغيرات الدالة f

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	-1

(ب) نعلم ان $g(\alpha) = 0$ معناه: $\ln\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right) = \frac{\alpha+4}{\alpha+2}$

و $f(\alpha) = \alpha \ln\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right) - \alpha$ اي $f(\alpha) = \alpha \left(\frac{\alpha+4}{\alpha+2} \right) - \alpha$ نجد $f(\alpha) = 2 \frac{\alpha}{\alpha+2}$

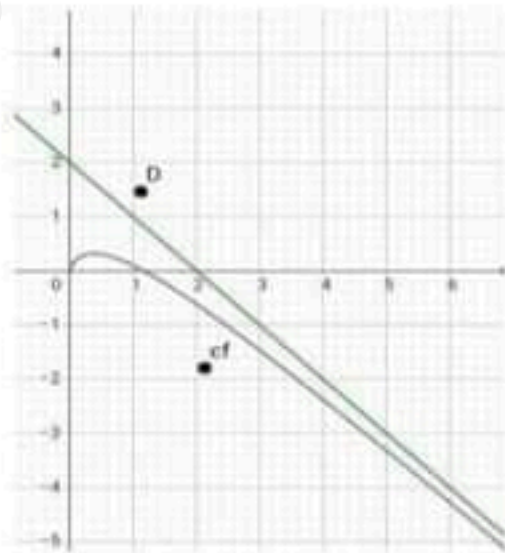
بما ان $0.36 < \alpha < 0.38$ نجد: $0.30 < f(\alpha) < 0.32$

(ج) نحل المعادلة: $f(x) = 0$ اي $x \left[\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - 1 \right] = 0$ مع $x_0 > 0$

اي $\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 1$ اي $\frac{x+2}{x} = e^1$ اي $x+2 = xe^1$ اي $x(e^1 - 1) = 2$

اي $x_0 = \frac{2}{e^1 - 1}$

(3) رسم المنحنى (C_f) و (Δ)



0.25

0.25

(5) من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ نجد : $F'(x) = f(x)$ إذن F دالة أصلية لـ f على المجال $]0; +\infty[$ (6) الدالة f

مستمرة و سالبة على المجال $[x_0; 2]$ وبالتالي : $A(x_0) = -\int_{x_0}^2 f(x) \times dx$ u a

$$A(x_0) = F(x_0) - F(2) \text{ u a} \quad A(x_0) = -[F(x)]_{x_0}^2 = -(F(2) \times F(x_0))$$

$$A(x_0) = ((\frac{x_0^2}{2} - 2) \ln(x_0 + 2) - \frac{x_0^2 \times \ln x_0}{2} + x_0 - \frac{x_0^2}{2} - 2 \ln 2) \text{ u a}$$

انتهى تصحيح الموضوع الاول

العلامة	
	التمرين الأول: (04,5 نقاط)
0,25x3	I 1. $\vec{AC} = k\vec{AB}$ بفرض $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ و $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ نصل إلى تناقض ومنه النقطة تشكل مستويا.
0,25x2	2. $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي للمستوي (Q) معناه $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} 3a - 2b = 0 \\ 3a - 5c = 0 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} b = \frac{3}{2}a \\ c = \frac{3}{5}a \end{cases}$ ومنه كل شعاع
0,25	$\vec{n}(10;15;6)$ نجد $a=10$ بأخذ $a=10$ نجد $\vec{n}(10;15;6)$
0,5	ب) $M(x;y;z) \in (Q)$ يعني $10x+15y+6z=73$ بأي طريقة
	II
	1. $y=2k$ يعني زوجي $y=2k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ إذن المعادلة $10x+15y+6z=73$ تكافئ $10x+30k+6z=73$
0,25	تكافئ $2(5x+15k+3)=73$ وهذا تناقض لأن 2 لا يقسم 73 ومنه y فردي.
0,5	ب) لدينا $10x \equiv 0[5]$ و $15y \equiv 0[5]$ و $73 \equiv 3[5]$ إذن المعادلة $10x+15y+6z \equiv 73$ تصبح $6z \equiv 3[5]$ لدينا $6z \equiv 0[3]$ و $15y \equiv 0[3]$ و $73 \equiv 1[3]$ إذن المعادلة $10x+15y+6z \equiv 73$ تصبح $10x \equiv 1[3]$ أي $x \equiv 1[3]$
0,5	2. $10x+15y+6z \equiv 73$ تكافئ $10(3m+1)+15(2n+1)+6(5p+3)=73$ تكافئ $30m+10+30n+15+30p+18=73$ تكافئ $30(m+n+p)=30$ تكافئ $m+n+p=1$
0,25	بما أن m, n و p أعداد طبيعية فإن المعادلة $m+n+p=1$ تقبل ثلاثة حلول بالضبط وهي $(0;0;1)$ و $(0;1;0)$ و $(1;0;0)$
0,5	نجد ثلاث نقط هي: $A(4;1;3)$ و $B(1;3;3)$ و $C(1;1;8)$.
	التمرين الثاني: (03,5 نقاط)
0,5	1. $I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{1+e^x}{1+e^x} dx = \int_0^1 1 dx = 1$
0,5	$I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = \left[\ln(1+e^x) \right]_0^1 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$
0,25	و منه $I_0 = I_1 - 1 = \ln e - \ln(1+e) + \ln 2 = \ln\left(\frac{2e}{1+e}\right)$
0,5	2. $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 e^{nx} \frac{1+e^x}{1+e^x} dx = \int_0^1 e^{nx} dx = \left[\frac{1}{n} e^{nx} \right]_0^1 = \frac{e^n - 1}{n}$

0,25

3. من أجل كل x من المجال $[0;1]$ و كل طبيعي n لدينا $(n+1)x \geq nx$ إذن $e^{(n+1)x} \geq e^{nx}$

0,5

إذن $\int_0^1 \frac{e^{(n+1)x}}{1+e^x} dx \geq \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx$ يعني $I_{n+1} \geq I_n$ و منه المتتالية (I_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.

0,25

4. (أ) $0 \leq x \leq 1$ يكافئ $1 \leq e^x \leq e$ يكافئ $2 \leq 1+e^x \leq e+1 \leq 4$ يكافئ $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}$

0,25

(ب) من أجل كل x من المجال $[0;1]$ $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}$ يكافئ $\frac{e^{nx}}{4} \leq \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leq \frac{e^{nx}}{2}$

يكافئ $\frac{1}{4} \int_0^1 e^{nx} dx \leq \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 e^{nx} dx$

0,5

يعني $\frac{e^n - 1}{4n} \leq I_n \leq \frac{e^n - 1}{2}$

0,5

(ج) و بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n - 1}{4n} = +\infty$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

0,5

$(a;b)$	$(1;2)$	$(1;3)$	$(2;1)$	$(2;3)$	$(3;1)$	$(3;2)$
α	$\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$\frac{1}{2}e^{i\pi}$	$e^{i\frac{\pi}{3}}$	$e^{i\pi}$	$\frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$	$\frac{3}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$
z_0	$2e^{i\frac{\pi}{6}}$					
$z_0' = \alpha z_0$	$e^{i\frac{5\pi}{6}}$	$e^{i\frac{7\pi}{6}}$	$2e^{i\frac{\pi}{2}}$	$2e^{i\frac{7\pi}{6}}$	$3e^{i\frac{\pi}{2}}$	$3e^{i\frac{5\pi}{6}}$
$ z_0' $	1	1	2	2	3	3
$\arg(z_0')$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$

0,5

0,75

0,25

3. (أ) $A \neq O$ و A' في استقامية إذا و فقط إذا $\arg(z_0') = \arg(z_0) + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

0,75

يعني $\arg(z_0') = \frac{\pi}{6} + k\pi$ يعني $\arg(z_0') = \frac{\pi}{6}$ أو $\arg(z_0') = \frac{7\pi}{6}$

0,75

من الجدول نجد $p(E_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

0,25

(ب) العدد المركب z_0' تخيلي صرف يعني $\arg(z_0') = \frac{\pi}{2} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

يعني $\arg(z_0') = \frac{\pi}{2}$ أو $\arg(z_0') = \frac{3\pi}{2}$

0,25

من الجدول نجد $p(E_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

0,25

1. (أ) بوضع $\frac{1}{x} = t$ نحصل على $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e \times t e^t = 0 = f(0)$

0,25

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x - x = 0 = f(0)$

بما أن f مستمرة على يمين و على يسار الصفر فإنها مستمرة عند الصفر.

0,5

(ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e \times t^2 e^t = 0 = f'_g(0)$ و منه f قابلة للاشتقاق على يسار الصفر.

0,25

و منه f قابلة للاشتقاق على يمين الصفر $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \ln x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x - 1 = -1 = f'_d(0)$

0,25

بما أن $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند الصفر.

التفسير البياني: مبدأ المعلم O نقطة زاوية و (C_f) يقبل نصف مماسين عندها.

0,25

2. (أ) من أجل كل x من $]-\infty; 0[$ $f'(x) = e \left(\frac{-\frac{1}{x^2} x e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \right) = e \left(\frac{-e^{\frac{1}{x}} - x e^{\frac{1}{x}}}{x^3} \right) = -e^{\frac{1}{x}} \frac{(x+1)}{x^3}$

0,25

0,25

(ب) إشارة $f'(x)$ على $]-\infty; 0[$ من إشارة $-\frac{x+1}{x^3}$

ومنه f متناقصة تماما على $]-\infty; -1[$ و متزايدة تماما على $]-1; 0[$.

0,25

3. (أ) من أجل كل x من $]0; +\infty[$ $g'(x) = 2 \ln x + 3$

0,5

$g'(x) \geq 0$ يعني $x \geq e^{-\frac{3}{2}}$ و منه g متناقصة تماما على $]0; e^{-\frac{3}{2}}[$ و متزايدة تماما على $[e^{-\frac{3}{2}}; +\infty[$

0,25

(ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -1$

0,25

$e^{-\frac{3}{2}} \approx 0,22$
 $-2e^{-\frac{3}{2}} - 1 \approx -1,45$

x	0	$e^{-\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$g(x)$	-1	$-2e^{-\frac{3}{2}} - 1$	$+\infty$

0,25

0,25

(ج) بما أن $g(1) = 0$ فإن

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

2x0,25

4. (أ) من أجل كل x من $]0; +\infty[$ $f'(x) = g'(x)$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على $[1; +\infty[$ و متناقصة تماما على $[0; 1]$.

0,25

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	0	-1	0	-1	$+\infty$

(ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x \ln x - 1) = +\infty$

و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 0$

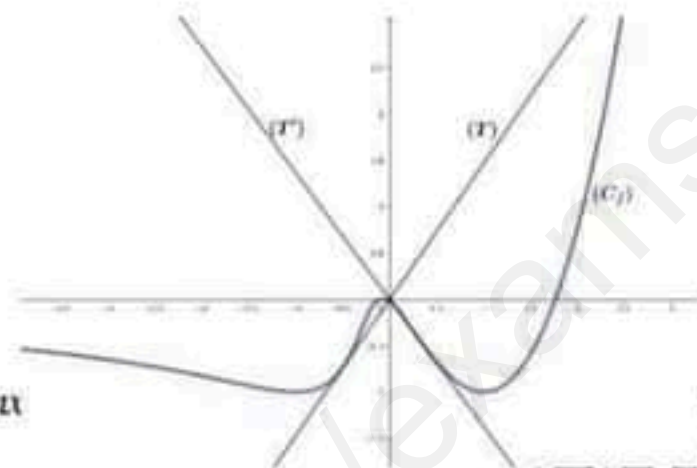
0,25

5. (أ) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2e^{-1}$ و $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 4e^{-1}$ ومنه $(T): y = 4e^{-1}x$

0,25

(ب) $f(e^{-1}) = -e^{-2} - e^{-1}$ و $f'(e) = -e^{-1} - 1$ ومنه $(T'): y = (-1 - e^{-1})x$

0,25



2x0,25

0,25

□ $(\Delta_m): y = mx$ حيث m يسمح

المناقشة:

حلول المعادلة n لما $m=0$ المعاد - من -لما $0 < m < 4e^{-1}$ المعادلة تقبل أربعة حلول.لما $m = 4e^{-1}$ المعادلة تقبل ثلاثة حلول.لما $m > 4e^{-1}$ المعادلة تقبل حلين.لما $-1 - \frac{1}{e} < m < 0$ المعادلة تقبل حلين.لما $m = -1 - \frac{1}{e}$ المعادلة تقبل حلين هما $-\frac{1}{2}$ و e^{-1} .لما $m < -1 - \frac{1}{e}$ المعادلة تقبل حل واحد هو 0.

0,25

0,25

3x0,25

انتهى تصحيح الموضوع الثاني

4x0,25



بكالوريا تجريبية

المدة: 04 سا و30د



الشعبة: رياضيات



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع الأول على صفتين (الصفحة 1 من 5 والصفحة 2 من 5)

التمرين الأول

04.25 نقطة

كيس يحتوي على: خمس كريات حمراء تحمل الأعداد: 1، e ، e^2 و ثلاث كريات سوداء تحمل الأعداد: e ، e^2 و ثلاث كريات خضراء تحمل الأعداد 1، $\frac{1}{e}$ و $\frac{1}{e^2}$ (الكرات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس) نسحب بطريقة عشوائية من هذا الكيس كرتان في آن واحد نعتبر الأحداث A ، B و C حيث: A : "سحب كرتان مختلفتان في اللون" B : "سحب كرتان لهما نفس العدد"

1 / احسب $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(A \cup B)$

ب / ما احتمال سحب كرتان مختلفتان في اللون علما أن لهما نفس العدد؟

2 / نسمي α و β العددين الظاهريين على الكرتين المسحوبتين،ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب العدد $\ln(\alpha\beta)$ أ / عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ب / احسب احتمال الحادثة " $X^2 > 4$ "

3 / نسحب الآن من هذا الكيس ثلاث كريات على التوالي بدون ارجاع بحيث نرتبها ترتيبا تصاعديا عند ظهورها

نعتبر الحدثان C ، D حيث: C : "سحب كرية واحدة فقط حمراء والكرة الأولى سوداء" D : "سحب ثلاث كريات تحمل أعداد تشكل حدودا متتابعة من متتالية هندسية"- احسب $P(C)$ و $P(D)$

التمرين الثاني

04.25 نقطة

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_n = 2^n$ ، وليكن S_n المجموع المعروف بـ $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ 1 / اكتب S_n بدلالة n ، ثم استنتج أن S_n و U_n أوليان فيما بينهما2 / أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية لـ U_n على 7ب / نعتبر العدد A حيث $A = (U_{2024} + U_{1962} - S_{1445})^{1954} - 2 \times 6^{2022}$ - بيّن أن A يقبل مضاعف لـ 7ج / عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها S_{2n} مضاعفا لـ 73 / نعتبر المعادلة $4x - 7y = 3$ (E): ذات المجهولين الصحيحين x و y أ / بيّن أن الثنائية $(S_1; S_2)$ حل لـ (E)، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)ب / نضع $D = \text{PGCD}(x; y)$ ، عيّن القيم الممكنة لـ D 4 / ليكن P العدد الطبيعي الذي يكتب $1\alpha\alpha220$ في النظام ذا الأساس 4، بحيث α عدد طبيعي- جد قيمة α حتى يكون $(P - 1)$ مضاعفا لـ 7، ثم اكتب P في النظام العشري

(I) نعتبر العدد المركب $L = 2 + \sqrt{3} + i$

1 / بين أن طويـلة L هي $2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

2 / تحقق من أن: $L = 2 \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] + 2i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

3 / أ / بين أن: $1 + \cos(2\theta) = 2 \cos^2(\theta)$

ب / بين أن: $L = 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + 4i \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (تذكر أن: $\sin(2\theta) = 2 \cos(\theta) \sin(\theta)$)

ج / اكتب العدد المركب L على شكله الأسّي

د / بين أن: $L^6 = (8 + 4\sqrt{3})^3 i$

(II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، النقطتين Ω و P اللتين لاحقتهما $\omega = \sqrt{3}$ و L على

الترتيب، وليكن h التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته 2

1 / بين أن d لاحقة النقطة D صورة النقطة P بالتحاكي h هي $(4 + \sqrt{3}) + 2i$

2 / حدد (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث: $|\bar{z} - 4 - \sqrt{3} + 2i| = |L|$

(I) لتكن الدالة العددية f_α المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_\alpha(x) = e^{2x} - 2\alpha e^x + 3$ ، حيث α وسيط حقيقي

وليكن (C_α) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 / احسب f'_α الدالة المشتقة للدالة f_α ، ثم عيّن حسب قيم الوسيط الحقيقي α القيم الحدية للدالة f_α

2 / نسمي Ω_α النقطة الحدية لـ (C_α) في حالة وجودها

أ / عيّن بدلالة α إحداثيي النقطة Ω_α

ب / عيّن مجموعة النقط Ω_α لما α يسمح $\mathbb{R}_+^*$

(II) نعتبر الدالة f_1 حيث (C_1) تمثيلها البياني

1 / أ / عيّن المستقيـمات المقاربة للمنحنى (C_1)

ب / ادرس تغيرات الدالة f_1 ، ثم شكل جدول تغيراتها

2 / عيّن معادلة المماس (T) لـ (C_1) عند النقطة ذات الترتيبة 3

3 / ارسم كلا من (T) و (C_1)

4 / لتكن (Δ_m) عائلة المستقيـمات المعرفة بـ: $y = mx + 3 - m \ln 2$ ، حيث m وسيط حقيقي

أ / بين أن المستقيـمات (Δ_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثيها

ب / ناقش بيانها حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $e^x(e^x - 2) = m(x - \ln 2)$

(III) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = -e^{2x} + 2e^x + 3$ و (C') تمثيلها البياني

1 / اكتب $g(x)$ بدلالة $f_1(x)$ ، ثم بين أن (C') و (C_1) متناظران بالنسبة إلى المستقيم (D) الذي يطلب تعيين معادلته

2 / ارسم (C')

3 / بين أن $A = 1u$ ، حيث A هي مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_1) و (C') والمستقيمان ذوو المعادلتان $x = \ln 2$ و $x = 0$

الموضوع الثاني

يحتوي الموضوع الثاني على ثلاث صفحات (من الصفحة 3 من 5 إلى الصفحة 5 من 5)

التمرين الأول

04.00
نقطة

- ① ادرس حسب قيم بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 13
- ② نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $(E_n) = 286x - 247y = 4^n - 25$ حيث n عدد طبيعي
- عيّن قيم n التي من أجلها المعادلة (E_n) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$
- ③ نضع: $n = 3$
أ/ بيّن أن (E_3) تكافئ المعادلة $(E'): 22x - 19y = 3$ ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E')
ب/ ما هي القيم الممكنة لـ $\text{PGCD}(x; y)$ حيث $(x; y)$ حلول المعادلة (E')
ج/ عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E') بحيث يكون $\text{PGCD}(x; y) = 3$
د/ عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E') التي تحقق $|2x - y| < 17$

التمرين الثاني

04.00
نقطة

$$\begin{cases} \alpha + \bar{\alpha} = 2\sqrt{2 + \sqrt{2}} \\ \alpha \bar{\alpha} = 4 \\ \text{Im}(\alpha) > 0 \end{cases} \quad \text{I} \quad \text{في المستوى المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس } (O; \vec{u}, \vec{v}), \text{ نعتبر } \alpha \text{ عدد مركب حيث:}$$

- ① أ/ اكتب العدد α على الشكل الجبري
ب/ اكتب العدد α^2 على الشكل الأسّي
- ② أ/ بين أن $\alpha = 2e^{\frac{\pi i}{8}}$
ب/ استنتج القيمة المضبوطة لـ $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$
- II من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $L_n = \alpha^n$
- ① عيّن قيم n التي من أجلها العدد L_{4n} تخيلي صرف
- ② المتتالية العددية (U_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_n = \arg(L_n)$
أ/ بيّن أن (U_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول
ب/ احسب بدلالة n عبارة S_n حيث: $S_n = \arg(\overline{L_0} \times \overline{L_1} \times \dots \times \overline{L_n})$
- ③ عيّن (E_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق $z = L_1(L_2 - e^{i\theta})$ حيث: $\theta \in \mathbb{R}$
- ④ عيّن (E_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق $\arg\left[(iz + i\overline{L_2})^2\right] = \frac{3\pi}{4} + 4k\pi$ حيث: $k \in \mathbb{Z}$

التمرين الثالث

04.50
نقطة

زهرة نرد ذو ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6، p_k هو احتمال الحصول على الرقم k حيث $(1 \leq k \leq 6)$
هذه الزهرة مغشوشة بحيث:

- الأعداد p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 و p_6 تشكل بهذا الترتيب متتالية حسابية أساسها r
- والأعداد: p_1, p_2, p_4 تشكل بهذا الترتيب متتالية هندسية أساسها q

- ① اثبت أن $p_k = \frac{k}{21}$ من أجل $1 \leq k \leq 6$

② نرمي هذه الزهرة مرة واحدة، ونعتبر الحوادث التالية:

A : "العدد المحصل عليه زوجي"

B : "العدد المحصل عليه أكبر أو يساوي 3"

C : "العدد المحصل عليه 3 أو 4"

أ/ احسب احتمال كل من الحوادث A ، B و C

ب/ احسب احتمال الحصول على عدد أكبر من أو يساوي 3، علماً أنه زوجي

ج/ هل الحادثتان A و B مستقلتان؟

③ نستعمل الآن هذه الزهرة لإجراء اللعبة التالية:

لدينا صندوق U_1 يحتوي على كرة حمراء و ثلاث كرات سوداء، وصندوق U_2 يحتوي على كرتين حمراوين وكرة سوداء واحدة، يأتي لاعب ويرمي الزهرة:

– إذا حصل على رقم زوجي يسحب عشوائياً كرة واحدة من الصندوق U_1

– إذا حصل على رقم فردي يسحب عشوائياً كرة واحدة من الصندوق U_2

اللاعب يعتبر رابحاً إذا سحب كرة حمراء، ونسمي G الحادثة: "اللاعب رابح"

أ/ عيّن احتمال الحادثة $A \cap G$ ، ثم احتمال الحادثة G

ب/ علماً أن اللاعب رابح، عيّن احتمال أن يكون حصل على عدد زوجي.

07.50 التمرين الرابع

نقطة

n عدد طبيعي غير معدوم

(I) $h_n(x) = x^2 - n + n \ln x$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بـ:

① أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} h_n(x)$

ب/ ادرس اتجاه تغير h_n ، ثم شكل جدول تغيراتها

② أ/ بيّن أن المعادلة $h_n(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α_n بحيث $1 \leq \alpha_n < e$

ب/ استنتج إشارة $h_n(x)$ على $\mathbb{R}_+^*$

(II) نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بـ: $f_n(x) = x - n - \frac{n \ln x}{x}$

و (C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (الوحدة $2cm$)

① احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$ وفسّر النتيجة هندسياً، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_n(x)$

② أ/ بيّن أن المستقيم (Δ_n) ذو المعادلة $y = x - n$ مقارب مائل لـ (C_n)

ب/ ادرس وضعية (C_n) بالنسبة إلى (Δ_n)

③ أ/ بيّن أنه من أجل كل $x > 0$: $f_n'(x) = \frac{h_n(x)}{x^2}$

ب/ استنتج اتجاه تغير f_n ، ثم شكل جدول تغيراتها

④ تحقق أن $f_n(\alpha_n) = 2\alpha_n - n - \frac{n}{\alpha_n}$

⑤ بيّن أنه يوجد مماس (T_n) للمنحنى (C_n) يوازي (Δ_n) ثم اكتب معادلة له

⑥ أ/ تحقق أن $t = 1$ هو الحل الوحيد للمعادلة $1 - t = 2 \ln t$

ب/ بيّن أنه يوجد مماس وحيد (D_n) للمنحنى (C_n) يشمل مبدأ المعلم، ثم اكتب معادلة له

(III) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ كما يلي: $g(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$

① ادرس تغيرات الدالة g

② بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β بحيث $0.5 < \beta < 0.6$

③ استنتج الوضع النسبي للمنحنين (C_n) و (C_{n+1})

④ بيّن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $f_n(\beta) = \beta$ ، ماذا تستنتج؟

(IV)

① ارسم (C_2) (نأخذ $1.2 < \alpha_2 < 1.3$ و $f(\alpha_2) \approx -1.1$)

② عيّن قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها المعادلة $f_2(x) = mx$ حلين مختلفين



﴿بالتوفيق والنجاح لجموع التلاميذ الشرفاء﴾

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

وزارة التربية الوطنية

امتحان: شهادة البكالوريا

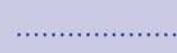
دورة: جوان 2024

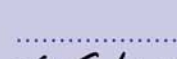
الشعبة: رياضيات

اختبار مادة: الرياضيات

يوم: 10 جوان 2024

امضاء المترشح (ة): 

اللقب: 

الاسم: 

تاريخ ومكان الميلاد: 5 - 5 - 1996 / أكلفه

رقم التسجيل: 

اسم ولقب وتوقيع الحراس

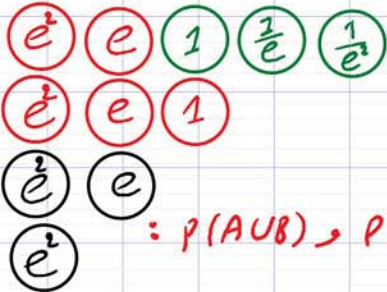
1. 2. 3.

لا بد من ملأ أعلى هذه الوثيقة - ويمنع التوقيع في آخر ورقة الاختبار

اختبار مادة: الرياضيات

الموضوع الأول

المترشح الأول



1. حساب $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ و $P(A \cup B)$:

$$P(A) = 1 - \frac{C_5^0 + C_3^2 + C_3^2}{C_n^2} = \frac{39}{55}$$

$$P(B) = \frac{C_4^2 + C_3^2 + C_2^2}{C_n^2} = \frac{10}{55} = \frac{2}{11}$$

$$P(A \cap B) = \frac{C_2^1 C_2^1 + C_2^1 C_1^1 + C_1^1 C_1^1}{C_n^2} = \frac{7}{55}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{34}{55}$$

ب/ حسب احتمال سحب كرتين مختلفتين في اللون حلما أثبت لهما

نفس العدد :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{7}{55}}{\frac{10}{55}} = \frac{7}{10}$$

② أ/ قانون احتمال X:

لدينا $X(\Omega) = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ حيث

$$P(X = -3) = \frac{C_1^1 C_1^1}{C_{55}^2} = \frac{1}{55} \quad \text{ز} \left\{ \frac{1}{e} \times \frac{1}{e} = e^{-3} \right\}$$

$$P(X = -2) = \frac{C_2^1 \cdot C_1^1}{C_{55}^2} = \frac{2}{55} \quad \text{ز} \left\{ \frac{1}{e} \times 1 = e^{-2} \right\}$$

$$P(X = -1) = \frac{C_1^1 C_4^1 + C_4^1 C_1^1}{C_{55}^2} = \frac{6}{55} \quad \text{ز} \left\{ \frac{1}{e^2} \times e = \frac{1}{e} \times 1 = e^{-2} \right\}$$

$$P(X = 0) = \frac{C_2^2 + C_3^1 C_1^1 + C_4^1 C_1^1}{C_{55}^2} = \frac{8}{55} \quad \text{ز} \left\{ 1 \times 1 = \frac{1}{e} \times e^2 = \frac{1}{e} \times e = 1 \right\}$$

$$P(X = 1) = \frac{C_2^1 C_3^1 + C_4^1 C_1^1}{C_{55}^2} = \frac{10}{55} \quad \text{ز} \left\{ 1 \times e = e^2 \times \frac{1}{e} = e \right\}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_2^1 C_4^1 + C_3^2}{C_{55}^2} = \frac{11}{55} \quad \text{ز} \left\{ 1 \times e^2 = e \times e = e^2 \right\}$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^1 \cdot C_3^1}{C_{11}^2} = \frac{12}{55} ; \{e^2 \times e = e^3\}$$

$$P(X=4) = \frac{C_3^2}{C_{11}^2} = \frac{3}{55} ; \{e^2 \times e^2 = e^4\}$$

= محلي

$X = x_i$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{55}$	$\frac{2}{55}$	$\frac{6}{55}$	$\frac{8}{55}$	$\frac{10}{55}$	$\frac{11}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{3}{55}$

$$P(X^2 > 4) = P(|X| > 2)$$

$$= P(X < -2) + P(X > 2)$$

$$= P(X = -3) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$= \frac{16}{55}$$

③ حساب $P(0)$, $P(1)$:

$$P(1) = \frac{2 A_5^1 A_3^2 A_5^1}{A_{11}^3} = \frac{150}{990} = \frac{5}{33}$$

$$P(0) = \frac{A_2^1 A_3^1 A_4^1 + A_1^1 A_4^1 A_2^1 + A_1^1 A_2^1 A_4^1}{A_{11}^3} = \frac{34}{990} = \frac{17}{495}$$

المعمري الثاني

١) كتابة u_n بدلالة n :

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا :

$$\begin{aligned} S_n &= U_0 + U_1 + \dots + U_n \\ &= 2^0 + 2^1 + \dots + 2^n \\ &= 2 \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \\ &= 2^{n+2} - 1 \end{aligned}$$

٢) استنتاج $u_n \wedge S_n = 1$:

$$\begin{aligned} S_n &= 2^{n+2} - 1 \quad \text{لدينا} \\ S_n &= 2^n + 2 - 1 \\ 2(2)^n - S_n &= 1 \\ 2U_n - S_n &= 1 \end{aligned}$$

توجد ثنائية $(u, v) = (2, -1)$ تحقق $uU_n + vS_n = 1$

ومن هنا حسب مبرهنة بيزو فإن $U_n \wedge S_n = 1$

(٣) ١- بواني قسمته u على f :

$$U_0 = 2^0 \equiv 1 [7] \quad \text{لدينا}$$

$$U_1 = 2^1 \equiv 2 [7]$$

$$U_2 = 2^2 \equiv 4 [7]$$

$$U_3 = 2^3 \equiv 1 [7]$$

ومنه بواني ممتد U_n عدد 7 ناختها في الجدل التالي :

$n =$	3α	$3\alpha+1$	$3\alpha+2$	$\alpha \in \mathbb{N}$
$U_n \equiv$	1	2	4	$[7]$

ب/ لتبين أن A مضاعف 7 :

$$\begin{aligned}
 A &= (U_{2024} + U_{1962} - S_{1445})^{1954} - 2(6)^{2022} [7] \\
 &= (2^{2024} + 2^{1962} - 2^{1445+1} + 1)^{1954} - 2(6)^{2022} [7] \\
 &= (2^{3\alpha+2} + 2^{3\alpha} - 2^{3\alpha} + 1)^{1954} - 2(-1)^{2022} [7] \\
 &= (4 + 1 - 1 + 1)^{1954} - 2 [7] \\
 &= 5^{1954} - 2 [7] \\
 &= (-2)^{1954} - 2 [7] \\
 &= 2^{1954} - 2 [7] \\
 &= 2^{3\alpha+1} - 2 [7] \\
 &= 2 - 2 [7] \\
 &= 0 [7]
 \end{aligned}$$

ومنه : $A \equiv 0 [7]$

ج/ لتبين قيم n التي من أجلها S_n مضاعف 7 :

لدينا : $S_n \equiv 0 [7]$

معناه : $2^{2n+2} - 1 \equiv 0 [7]$

$$2^{2n+1} = 1[7] : \text{ومن}$$

$$\alpha \in \mathbb{N}^*$$

$$2^{2n+1} = 3\alpha : \text{ومن}$$

$$2^{2n+1} \equiv 0[3] : \text{ومن}$$

$$2^n \equiv 2[3] : \text{ومن}$$

$$n \equiv 1[3] : \text{ومن}$$

$$(3 \wedge 2 = 1 : \text{ع}^{\text{ع}})$$

$$k \in \mathbb{N} \text{ حيث}$$

$$n = 3k + 1$$

③ ١/ تبيين أن (S_1, S_2) حل لـ (E) :

$$\begin{aligned} 4(S_2 - 1) - 7S_1 &= 4(2^{2+2} - 2 - 1) - 7(2^{1+1} - 1) \\ &= 4(6) - 7(3) \\ &= 3 \end{aligned}$$

ومن النتيجة (S_1, S_2) حل لـ (E)

٢/ حل في $\mathbb{Z}^*$ المعادلة (E) :

$$\begin{cases} 4n - 7y = 3 \\ 4(6) - 7(3) = 3 \end{cases} \text{ لدينا}$$

نطرح المعادلتين من بعضهما البعض نحصل على :

$$4(n - 6) - 7(y - 3) = 0 : \text{ومن}$$

$$4 \mid 7(y - 3) \text{ و } 7 \mid 4(n - 6) : \text{ومن}$$

$$4 \wedge 7 = 1 \text{ عا}^{\text{ع}}$$

$$4 \mid y - 3 \text{ و } 7 \mid n - 6 \text{ لدينا (حسب خصوص)}$$

$$k \in \mathbb{Z} \text{ حيث } \begin{cases} n - 6 = 7k \\ y - 3 = 4k \end{cases} : \text{ومن}$$

$$\begin{cases} x = 7k + 6 \\ y = 4k + 3 \end{cases} \text{ ومنه :}$$

اذن حلول المعادلة (E) هي الثنائيات (x, y) من $\mathbb{Z}^2$ حيث :

$$(x, y) \in \{(7k+6, 4k+3) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

④ تعيين الثمر الممكنة لـ D :

$$D = x \wedge y \text{ لدينا}$$

$$D \mid y \text{ و } D \mid x \text{ ومنه :}$$

$$D \mid 4x - 3y \text{ ومنه}$$

$$D \mid 3 \text{ ومنه}$$

$$D \in \{1, 3\} \text{ اذن}$$

④ تعيين قيمة α :

$$P = \overline{1\alpha\alpha 220}^4$$

$$= 0(4)^0 + 2(4)^1 + 2(4)^2 + \alpha(4)^3 + \alpha(4)^4 + 1(4)^5$$

$$= 320\alpha + 1064$$

$$P - 1 \equiv 0 [7] \text{ لدينا}$$

$$320\alpha + 1064 - 1 \equiv 0 [7] \text{ صفاً}$$

$$5\alpha + 6 \equiv 0 [7] \text{ ومنه}$$

$$5\alpha \equiv 1 [7] \text{ ومنه}$$

$$15\alpha \equiv 3 [7] \text{ ومنه}$$

$$\alpha \equiv 3 [7] \text{ ومنه}$$

حيث $k \in \mathbb{N}$

$$\alpha = 7k + 3 \text{ ومنه}$$

$$0 \leq \alpha < 4 \text{ ولدينا}$$

$$\alpha = 3 \text{ ومنه}$$

$$P = \overline{133 220}^4 = 2024 \text{ وحليته :}$$

(1) $1 = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

لدينا $|L| = |2 + \sqrt{3} + i|$

$$= \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + (1)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 3 + 4\sqrt{3} + 1}$$

$$= \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{4(2 + 2\sqrt{3})}$$

$$= 2\sqrt{2 + 2\sqrt{3}}$$

(2) التحقق آتية $L = 2\left[1 + \cos \frac{\pi}{6}\right] + 2i \sin \frac{\pi}{6}$

لدينا =

$$L = 2 + \sqrt{3} + i$$

$$= 2\left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right] + 2i \frac{1}{2}$$

$$= 2\left[1 + \cos \frac{\pi}{6}\right] + 2i \sin \frac{\pi}{6}$$

(3) $1 = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

لدينا =

$$\cos^2 \theta = \left[\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right]^2$$

$$= \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2}{4}$$

$$= \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{4} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2} + 1 \right]$$

$$= \frac{1}{2} [\cos(2\theta) + 1]$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} [\cos 2\theta + 1]$$

ومنه =

$$1 + \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta$$

ومنه =

ب/ تبیین آتے = $L = 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + 4i \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$$L = 2 \left[1 + \cos \frac{\pi}{6} \right] + 2i \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= 2 \left[1 + \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{12} \right) \right] + 2i \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{12} \right)$$

$$= 2 \left[2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{12} \right) \right] + 2i 2 \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) \sin \left(\frac{\pi}{12} \right)$$

$$= 4 \cos^2 \frac{\pi}{12} + 4i \cos \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12}$$

ج/ کتابت L حلقہ الشکل دکھائی =

$$L = 4 \cos^2 \frac{\pi}{12} + 4i \cos \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12}$$

$$= 4 \cos \frac{\pi}{12} \left[\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right]$$

$$= 4 \cos \frac{\pi}{12} e^{i \frac{\pi}{12}}$$

$$= 2\sqrt{2+\sqrt{3}} e^{i \frac{\pi}{12}}$$

د/ تبیین آتے = $L^6 = (8+4\sqrt{3})^3 i$

لہذا =

$$L^6 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}} e^{i \frac{\pi}{12}} \right)^6$$

$$= \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}} \right)^6 e^{i \frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}} \right)^2 \right]^3 i$$

$$= \left[4(2+\sqrt{3}) \right]^3 i$$

$$= (8+4\sqrt{3})^3 i$$

h: $z - \omega = 2(z - \omega)$

لہذا (I) (II)

d - $\omega = 2(L - \omega)$

حل ہے

ومنہ =

$$\begin{aligned}
 d &= 2(L - w) + w \\
 &= 2(2 + \sqrt{3} + i - \sqrt{3}) + \sqrt{3} \\
 &= 2(2 + i) + \sqrt{3} \\
 &= 4 + \sqrt{3} + 2i
 \end{aligned}$$

② تحديد صليبية (5) :

$$|\bar{z} - 4 - \sqrt{3} + 2i| = |L|$$

لدينا :

$$|\bar{z} - 4 - \sqrt{3} + 2i| = |L|$$

$$|z - 4 - \sqrt{3} - 2i| = |L|$$

$$|z - (4 + \sqrt{3} + 2i)| = |L|$$

$$|z - d| = |L|$$

$$DM = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

ومنه (5) هي الدائرة التي مركزها d ونصف قطرها $2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

المبحث الرابع

(I) ① صاب f'_α :

لدينا f'_α قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$\begin{aligned}
 f'_\alpha(x) &= 2e^{2x} - 2\alpha e^x \\
 &= (e - \alpha)2e^x
 \end{aligned}$$

$\neq$ نعين القيمة الحدية لـ f'_α :

$$2e^x > 0 \quad \text{لدينا} \quad ,$$

$$e^x = \alpha \quad \text{لدينا} \quad : \quad e - \alpha = 0 \quad \text{معناه} \quad e^x = \alpha$$

$$x = \ln \alpha \quad : \quad \alpha \leq 0 \quad \text{معناه} \quad x = \ln \alpha \quad (\text{وهذا مستحيل})$$

ومنه لا توجد أي قيمة حدية لـ f'_α على $\mathbb{R}$ ، $\alpha \leq 0$

$$x = \ln \alpha \quad : \quad \alpha > 0 \quad \text{معناه} \quad x = \ln \alpha$$

اذن f'_α كثر قيمة حدية عند $x = \ln \alpha$.

② / ١٢ / تعيين احد اثني Ω_α :

١٢ $\alpha > 0$ لدينا :

$$\begin{aligned} f_\alpha(h\alpha) &= e^{2h\alpha} - 2\alpha e^{h\alpha} + 3 \\ &= e^{h\alpha^2} - 2\alpha\alpha + 3 \\ &= \alpha^2 - 2\alpha^2 + 3 = 3 - \alpha^2 \end{aligned}$$

ومنه :

$$\Omega_\alpha(h\alpha; 3 - \alpha^2)$$

ب / تعيين مجموعة، لنقط Ω_α ، $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\Omega_\alpha(h\alpha; 3 - \alpha^2) = \text{لدينا}$$

$$\begin{cases} \alpha = e^x \\ y = 3 - (e^x)^2 \end{cases} \text{ ومما، } \begin{cases} x = h\alpha \\ y = 3 - \alpha^2 \end{cases} \text{ لدينا}$$

$$y = 3 - e^{2x}$$

ومما

اذ $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ ، Ω_α ، $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ هي Ω_α $\alpha \mapsto 3 - e^{2\alpha}$

II ① / ١٢ / تعيين لمستقيمات المقاربة ل (١) :

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - 2e^x + 3) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x(e^x - 2) + 3] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ لا يت}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ((e^x)^2 - 2e^x + 3) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ لا يت}$$

ومنه (C_1) يقبل مقارب $y=3$ معادلته

ب/ تغيرات f_n :

لينا: $f_n'(x) = (e^x - 1)2e^x$

بحالتج 170

فالتج (C_1) يقبل قيمة حدية عند $(1^2; 3-1)$

أي عند: $\Omega_n(0; 2)$

وعليه 2

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	$+$

لينا f_n متزايدة تمامًا على $[0, +\infty[$

ومتناهية تمامًا على $] -\infty, 0]$

جدول تغيرات f_n :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	$+$
$f_n(x)$	3	2	$+\infty$

② معادلة المماس (T)

لينا: $f_n(x) = 3$

معناه $e^{2x} - 2e^x + 3 = 3$

ومنه $e^x(e^x - 2) = 0$

ومنه: $e^x - 2 = 0$ (لأن $e^x \neq 0$)

ومنه: $e^x = 2$

ومنه $x = \ln 2$

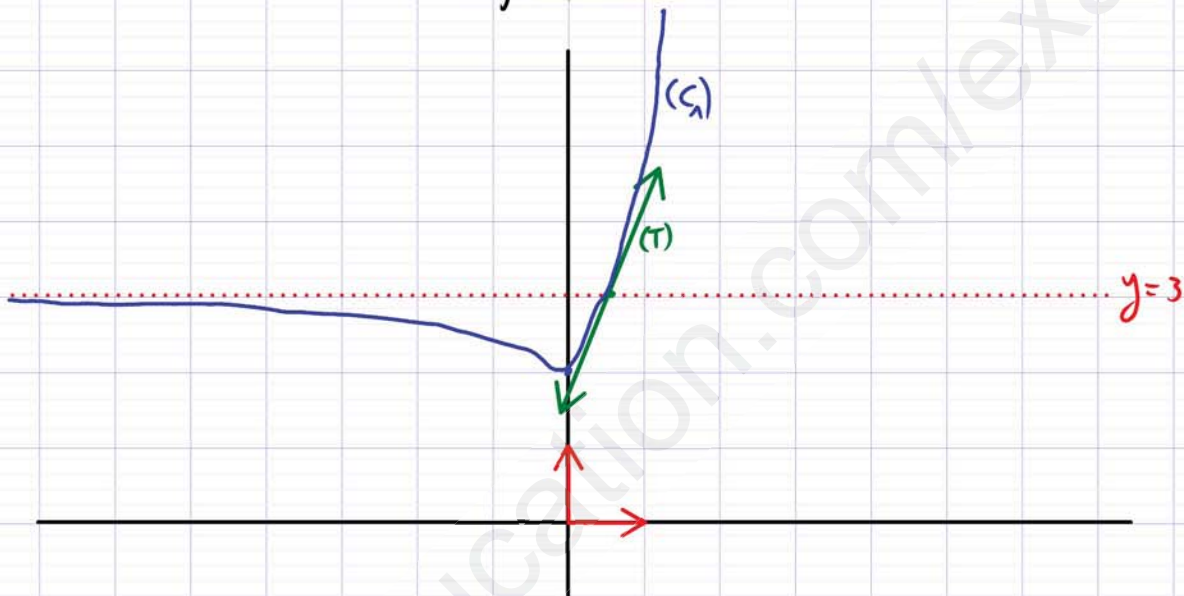
ومنه (T) مماس ل (C_1) في النقطة $A(\ln 2, 3)$

اذن :

$$\begin{aligned} (T) : y &= f_n(p_2)(n - p_2) + f_n(p_2) \\ &= 4(n - p_2) + 3 \\ &= 4n - p_2 + 3 \end{aligned}$$

③ رسم (T) و (C₁)

$$\begin{cases} f(1) \approx 4.95 \\ f(2) \approx 42.82 \end{cases} \quad \text{لدينا} =$$



④ / تبين ان (Δ_m) تمثل نقطة ثابتة :

$$(\Delta_m) : y = mx + 3 - mp_2 \quad \text{لدينا}$$

$$mx + 3 - mp_2 - y = 0 \quad \text{ومنه} =$$

$$(n - p_2)m + 3 - y = 0 \quad \text{ومنه} =$$

$$\begin{cases} n - p_2 = 0 \\ 3 - y = 0 \end{cases} \quad \text{ومنه} =$$

$$\begin{cases} n = p_2 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{ومنه} =$$

اذن جميع المستقيمات (Δ_m) تدور حول A(p₂, 3)

ب/ المناقشة، لبيانتي

$$e^n(e^n - 2) = m(n - p_2) \quad \text{لدينا}$$

$$e^{2n} - 2e^n + 3 = mn - mp_2 + 3 \quad \text{ومن}$$

$$(E) \dots f_n(n) = \gamma(\Delta_n) \quad \text{ومن}$$

وعليه حلول (E) هي عوامل نقط تقاطع (C) مع المستقيمة (Δ_n)
برسي:

$$\bullet \text{ لـ } m \leq 0 : \text{ للمعادلة (E) حل وحيد}$$

$$\bullet \text{ لـ } 0 < m < 4 : \text{ للمعادلة (E) حلان}$$

$$\bullet \text{ لـ } m = 4 : \text{ للمعادلة (E) حل وحيد (مضاعف)}$$

$$\bullet \text{ لـ } m > 4 : \text{ للمعادلة (E) حلان}$$

(III) ① كتابة g(n) بدلالة f_n(n) :

من أجل كل $x \in \mathbb{Q}$ ، لدينا :

$$\begin{aligned} g(n) &= -e^{2n} + 2e^n + 3 \\ &= -(e^{2n} - 2e^n + 3) + 6 \\ &= -f_n(n) + 6 \end{aligned}$$

$$\text{ومن} \quad g(n) = 6 - f_n(n)$$

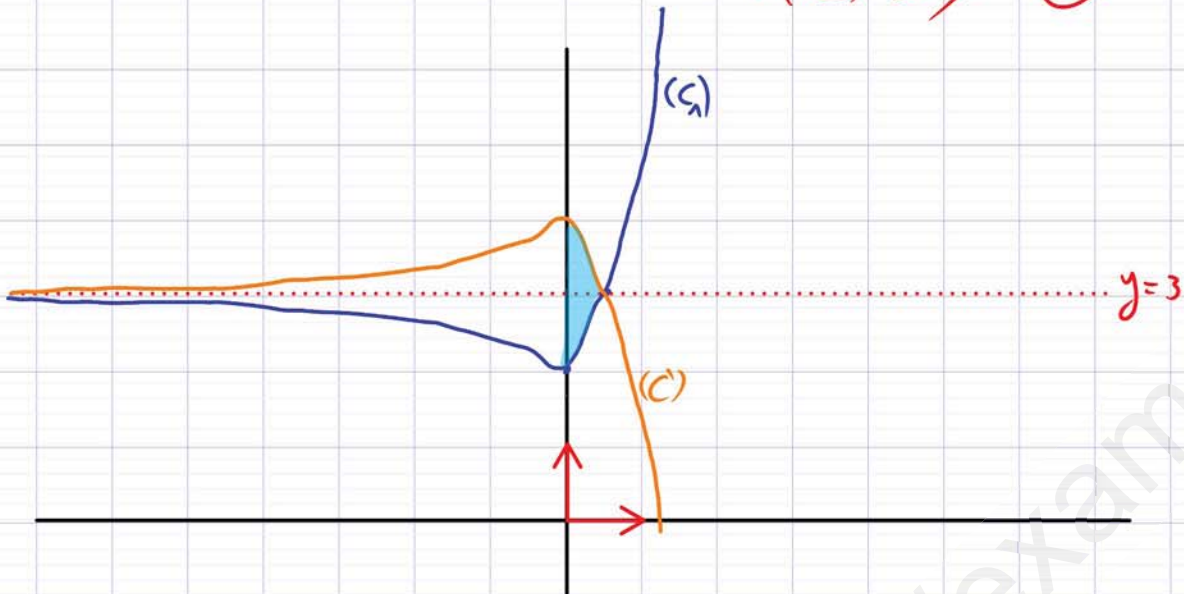
تذكير
(f) و (g) متماثلان بالنسبة للمستقيم ذو
المعادلة $y = a$ معناه : $f(n) + g(n) = 2a$

$$\text{لدينا} \quad g(n) = -f_n(n) + 6$$

$$\text{ومن} \quad g(n) + f_n(n) = 2(3)$$

ومن (C₁) و (C') متماثلان بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y = 3$

② رسم (C) :



③ تبيين $A=1$:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{\ln 2} (g(x) - f_1(x)) dx \\
 &= \int_0^{\ln 2} (-e^{2x} + 2e^x + 3 - e^{2x} + 2e^x - 3) dx \\
 &= \int_0^{\ln 2} (-2e^{2x} + 4e^x) dx \\
 &= -e^{2x} + 4e^x \Big|_0^{\ln 2} \\
 &= -e^{2\ln 2} + 4e^{\ln 2} + e^{2(0)} - 4e^0 \\
 &= -4 + 8 + 1 - 4 = \boxed{1 \text{ u.a}}
 \end{aligned}$$



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

إمتحان البكالوريا التجريبي
دورة: ماي 2024 م
الشعبة: رياضيات



وزارة التربية الوطنية
مديرية التربية لولاية جيجل
المقاطعة الأولى - جيجل

المدة: 4 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:
الموضوع الأول:

التمرين الأول: (05 نقاط)

- I/ في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C و D لواحقتها على الترتيب: $Z_A = 1 + i$ ، $Z_B = \overline{Z_A}$ ، $Z_C = -1 + i$ ، $Z_D = -Z_A$.
- 1/ أكتب كلا من العددين Z_A و Z_C على الشكل الأسّي ثم استنتج الشكل الأسّي لكل من Z_B و Z_D .
- ب/ استنتج أن النقط A و B و C و D تنتمي إلى نفس الدائرة (Γ) معينا عناصرها المميزة.
- 2/ أكتب العدد $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$ على الشكل الأسّي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .
- ب/ عين صورة B بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{AC}$ ، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABDC$.
- 3/ بين أن مجموعة النقط M ذات اللاحة Z التي تحقق: $\bar{Z} = Z_A e^{i\theta}$ بحيث θ عدد حقيقي يسمح $\mathbb{R}$ هي نفسها الدائرة (Γ) .

II/ نضع في وعاء عشرة كريات متماثلة لا يمكن التمييز بينها باللمس، مرقمة بالأعداد المركبة:

$$Z_A, Z_B, Z_C, Z_D, 3i, -3i, 2, -2, \sqrt{5}, -\sqrt{5} .$$

نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد من هذا الوعاء.

- 1/ أحسب احتمال الحدثين: E «الكرتان المسحوبتان تحمل كل منهما عددا حقيقيا صرفا»
 F «الكرتان المسحوبتان تحمل كل منهما عددا مركبا له عمدة θ حيث: $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ »
- 2/ أ/ أحسب $P_F(E)$.
ب/ هل الحدثان E و F مستقلان؟ برّر إجابتك.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

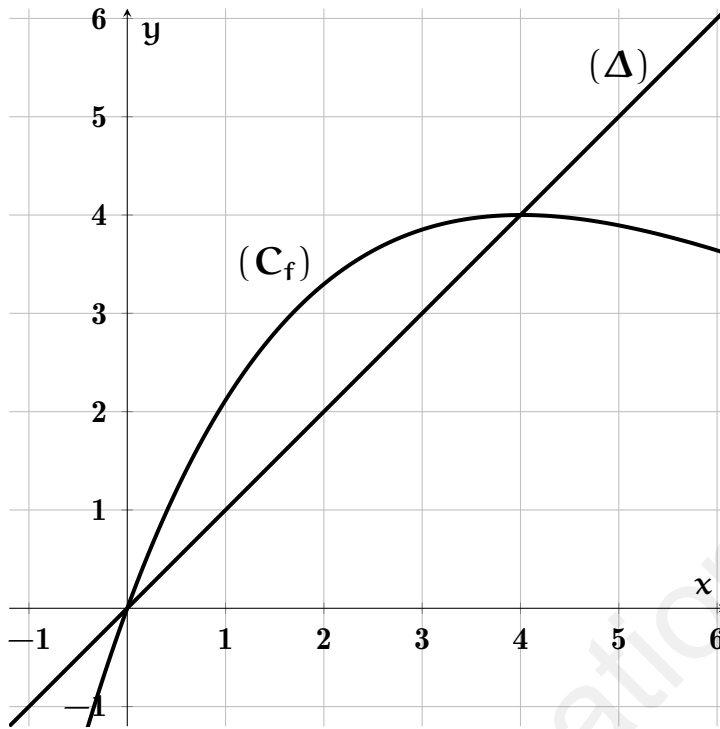
- 1/ عين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n التي من أجلها يكون العدد: $M_n = 4C_{n+1}^2 - A_{n+3}^2 + 2$ مضاعفا للعدد 7 . (لاحظ أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $n^2 + 4n + 3 = (n + 2)^2 - 1$)
- 2/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 .
- 3/ ليكن العدد الطبيعي T_n الذي يُكتب في نظام العد ذو الأساس خمسة بالشكل: $T_n = \overbrace{111 \dots 1}^{(n+1) \text{ رقمًا}}$.
- أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4T_n = 5^{n+1} - 1$ ، ثم استنتج أن: $\text{PGCD}(T_n; 5^n) = 1$.
- ب/ ليكن m عددا طبيعيا. بين أن: $(4T_n \equiv m [7])$ يكافئ $(T_n \equiv 2m [7])$.



ج/ استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد: $N = T_{2024} + 2T_{1445}$ على 7 .

4/ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $5^n x + T_n y = 1$. (E_n) .
• بين أن المعادلة (E_n) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$ ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E_2) .

التمرين الثالث: (04 نقاط)



لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n e^{1-\frac{1}{4}u_n}$.

في الشكل المقابل المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث:

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
 $f(x) = x e^{1-\frac{1}{4}x}$ ،

و (Δ) هو المستقيم ذو معادلة $y = x$.

1/ ا/ بقراءة بيانية، بين أنه من أجل كل x من المجال $[0; 4]$ فإن: $f(x) \in [0; 4]$.

ب/ أنقل الشكل المقابل، ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) .

(دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء)

ج/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ ا/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n \leq 4$.

ب/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

3/ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

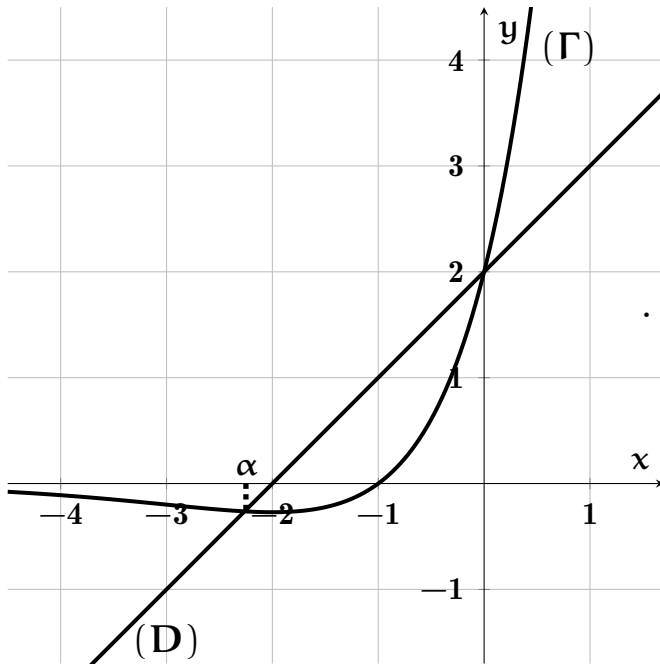
4/ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نعتبر: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$.

ا/ أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $u_n = e^{n-\frac{1}{4}S_n}$.

ب/ بين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = 4$.



التمرين الرابع: (07 نقاط)



I/ في الشكل المقابل: (Γ) هو التمثيل البياني للدالة

المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $x \mapsto (2x + 2)e^x$

و (D) هو المستقيم ذو معادلة $y = x + 2$.

(Γ) و (D) يتقاطعان في نقطتين فاصلتيهما 0 و α

حيث $-2.3 < \alpha < -2.2$.

1/ بقراءة بيانية، حدد وضعية (Γ) بالنسبة إلى (D) .

2/ استنتج حسب قيم x من $\mathbb{R}$ إشارة:

$$g(x) = -x - 2 + 2(x + 1)e^x$$

II/ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة:

$$f(x) = x(e^x - 1)^2$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب

إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

ج/ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

2/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $x(e^x - 1) \geq 0$ ، ثم استنتج أن الدالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ وشكل جدول تغيراتها.

3/ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f''(x) = 2e^x g(x)$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف معينتا فاصلتيهما.

4/ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0، ثم أثبت أنه المماس الوحيد الذي يمر من المبدأ.

5/ أ/ أنشئ (Δ) و (C_f) بدقة. (الوحدة: 2cm)

ب/ عين قيم العدد الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = mx$ ثلاثة حلول مختلفة.

6/ أ/ باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن: $\int_0^{\ln 2} x \cdot e^x (e^x - 2) dx = \frac{1}{4}(5 - 8 \ln 2)$

ب/ استنتج بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين: $x = 0$ و $x = \ln 2$

و $y = x$.

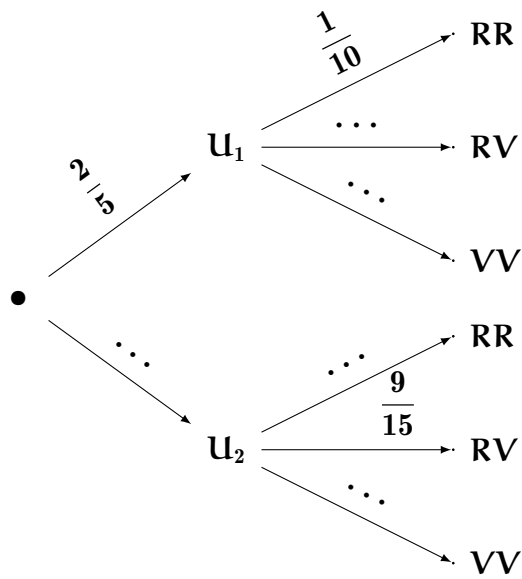
انتهى الموضوع الأول.



الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 كرتين حمراوين وثلاث كريات خضراء، ويحتوي صندوق U_2 ثلاث كريات حمراء و كرتين خضراوين؛ بحيث كل الكريات متماثلة، لا يمكن التفريق بينها باللمس. نسحب ثلاث كريات كما يلي: نسحب كرية واحدة من الصندوق U_1 ونسجل لونها؛ فإذا كانت حمراء نعيدها إلى الصندوق U_1 ثم نسحب كرتين في آن واحد من U_1 ، وإذا كانت خضراء نضعها داخل الصندوق U_2 ثم نسحب كرتين في آن واحد من U_2 .



1/ أنقل ثم أتمم شجرة الاحتمالات المقابلة:

(نرمز للكرات الحمراء بـ R وللخضراء بـ V)

2/ أحسب احتمال الحدثين التاليين:

A «الكرات الثلاث المسحوبة من نفس اللون»

B «الحصول على كرية حمراء على الأقل»

3/ بيّن أن: $P_A(U_2) = \frac{3}{4}$.

4/ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات عدد الكريات الخضراء المتبقية في الصندوق U_1 .

ا/ برّر أن قيم المتغير العشوائي X هي: 1 ، 2 و 3 .

ب/ عيّّن قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله

الرياضياتي $E(X)$.

ج/ أحسب الاحتمال: $P(C_3^X = 3)$.

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

I/ في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ؛ نعتبر النقط A ، I و C لواحقها على الترتيب: $Z_A = -2$ ، $Z_I = -1$ و $Z_C = i$.

(γ) الدائرة التي مركزها I ونصف قطرها 1 ، و B نقطة من (γ) حيث: $(\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{8}$.

1/ علّم النقط A و I و C ، ثم أنشئ الدائرة (γ) . (الوحدة 2cm)

2/ استنتج طويلة العدد المركب $Z_B + 1$ وبين أن عمدة له هي: $\frac{\pi}{4}$ ، ثم استنتج الشكل الجبري لـ Z_B .

3/ أثبت أن العدد $\frac{Z_B + 1}{i + 1}$ حقيقي. ماذا تستنتج؟

II/ نرفق بكل نقطة M تختلف عن I ذات اللاقطة Z النقطة M' ذات اللاقطة Z' حيث: $Z' = \frac{i(Z + 2)}{Z + 1}$.

1/ ا/ أثبت أن $\arg(Z') = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MI}; \overrightarrow{MA})$.

ب/ عين مجموعة النقط M بحيث يكون Z' تخيليا صرفا.



2/ / أ/ أثبت أن $Z' - i = \frac{i}{Z+1}$.

ب/ نضع $Z = -1 + e^{i\theta}$ حيث $\theta \in]-\pi; \pi]$.

• استنتج أنه عندما تمسح النقطة M الدائرة (γ) فإن النقطة M' تمسح دائرة (γ') يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

1/ / أ/ عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 2009^2 على 16.

ب/ استنتج أن: $2009^{8001} \equiv 2009 [16]$.

2/ / نعرف المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$ كالتالي:

$$\begin{cases} u_0 = 2009^2 - 1 \\ u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1 \end{cases}$$

أ/ بين أن u_0 يقبل القسمة على 5.

ب/ بين باستعمال دستور ثنائي الحد أن: $u_{n+1} = u_n [u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)]$.

ج/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن u_n مضاعف لـ 5^{n+1} .

3/ / أ/ تحقق أن: $u_3 = 2009^{250} - 1$.

ب/ استنتج أن: $2009^{250} \equiv 1 [625]$ و $2009^{8001} \equiv 2009 [625]$.

4/ / أ/ لتكن a و b و c أعدادا صحيحة غير معدومة.

برهن أنه إذا كان a مضاعفا لـ b و c وكان $\text{PGCD}(b; c) = 1$ فإن a مضاعف للجداء bc .

ب/ بين أن: $2009^{8001} - 2009$ يقبل القسمة على 10000.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I/ / نعتبر g الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$.

1/ / أدرس تغيرات الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها.

2/ / استنتج أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ يكون: $g(x) > 0$.

II/ / لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x + 1 ; & x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ / أ/ بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 1$ ، ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.



- 2/ 1/ أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين 0 ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.
 ب/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ يكون: $f'(x) = g(x) + 1$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
- 3/ أحسب $f(1)$ ، ثم أنشئ (Δ) و (C_f) بدقة. (الوحدة: 2cm)
- 4/ 1/ بين أن الدالة F المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بالعلاقة: $F(x) = \frac{1}{2}xf(x) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + x$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$.
 ب/ استنتج بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين: $x = 1$ و $x = \frac{1}{2}$ و $y = 0$.
- 5/ لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
 1/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون: $u_n = e^{f(n)-n-1}$.
 ب/ أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً. [يمكنك الاستفادة من نتيجة السؤال (II / 2 / ب)]
 ج/ بين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$ ، ماذا تستنتج؟

انتهى الموضوع الثاني.

رابط الإطلاع على الموضوع إلكترونياً، مع الإجابة النموذجية وسلم التنقيط:
 (تُرفع الإجابة النموذجية بعد انتهاء فترة الإختبار مباشرة)



☺☺ بالتوفيق للجميع في شهادة البكالوريا ☺☺

الإجابة النموذجية للبكالوريا التجريبية - ماي 2024 - في مادة الرياضيات (شعبة الرياضيات):

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (05 نقاط)

1/I

ا/ كتابة الأعداد على الشكل الأسّي:

لدينا: $|Z_A| = \sqrt{2}$ و $\arg(Z_A) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ إذن:

$$\bullet Z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

ولدينا: $|Z_C| = \sqrt{2}$ و بوضع $\arg(Z_C) = \theta$ فإن:

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{وبالتالي:} \quad \begin{cases} \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

إذن:

$$\bullet Z_C = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

$$\bullet Z_B = \overline{Z_A} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = Z_B.$$

الإستنتاج:

$$\bullet Z_D = -Z_A = e^{i\pi}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i(\pi+\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = Z_D$$

ب/ الإستنتاج:

لدينا: $|Z_A| = |Z_B| = |Z_C| = |Z_D| = \sqrt{2}$ ،

إذن: النقط A و B و C و D تنتمي إلى نفس الدائرة (Γ) التي مركزها المبدأ O ونصف قطرها $r = \sqrt{2}$.

2 /ا/ كتابة العدد على الشكل الأسّي:

$$\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = \frac{1 - i - 1 - i}{-1 + i - 1 - i} = \frac{-2i}{-2} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

طبيعة المثلث ABC :

من الشكل الأسّي نستنتج أن: $k \in \mathbb{Z}$; $\arg(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ، إذن المثلث ABC هو مثلث قائم في A ومتساوي الساقين.

ب/ صورة النقط B بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$:

ولتكن M ذات اللاحقة Z ، وذلك معناه أن: $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC}$

وعليه: $Z - Z_B = Z_C - Z_A$ إذن:

$$Z = Z_C - Z_A + Z_B = -1 + i - 1 - i + 1 - i = -1 - i = Z_D$$

إذن صورة النقط B بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ هي النقط D .

الإستنتاج:

لدينا $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ فالرباعي ABDC متوازي أضلاع،

وبما أن المثلث ABC هو مثلث قائم في A ومتساوي الساقين،

إذن الرباعي ABDC مربع.

3 /مجموعة النقط:

لدينا: $\overline{Z} = Z_A e^{i\theta} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\theta} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\theta)}$

ومنه: $Z = \sqrt{2}e^{-i(\frac{\pi}{4}+\theta)} = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4}-\theta)} = \sqrt{2}e^{i\theta'}$; $\theta' = -\frac{\pi}{4} - \theta$

لما θ يمسح $\mathbb{R}$ فإن θ' يمسح $\mathbb{R}$ كذلك، وعليه تُصبح العلاقة:

$Z = \sqrt{2}e^{i\theta'}$; $\theta' \in \mathbb{R}$ وذلك معناه أن: $|Z| = \sqrt{2}$ أي: $OM = \sqrt{2}$

إذن مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها المبدأ O ونصف قطرها $\sqrt{2}$ وهي نفسها الدائرة (Γ) .

II/ وعاء به عشر كريات ونسحب عشوائيا منه كريتين في آن واحد،

إذن عدد الحالات الكلية للسحب هو: $C_{10}^2 = 45$.

1 /حساب الاحتمالات:

الحدث E : عدد الأرقام الحقيقية الصرفة في الوعاء هو 4 إذن:

$$\bullet P(E) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}.$$

الحدث F : عدد مركب له عمدة تنتمي إلى المجال: $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ معناه

جزؤه الحقيقي موجب، وعددها في الكيس هو 6 إذن:

إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $4T_n = 5^{n+1} - 1$.
الإستنتاج: لدينا $4T_n = 5^{n+1} - 1$ ومنه $5 \times 5^n - 4 \times T_n = 1$ ،
 إذن حسب مبرهنة بيزو: $\text{PGCD}(5^n; T_n) = 1$.

ب/ **إثبات التكافؤ:** ليكن m عددا طبيعيا:

$$T_n \equiv m [7] \iff 4T_n \equiv 4m [7] \iff 8T_n \equiv 2m [7] \iff 8T_n \equiv 2m [7] \iff T_n \equiv 2m [7] \text{ يكافئ}$$

ج/ **استنتاج باقي قسمة العدد N على 7 :**

لدينا: $4T_{2024} = 5^{2025} - 1$ وبما أن: $2025 = 337(6) + 3$
 فإن: $5^{2025} \equiv 6 [7]$ وبالتالي: $4T_{2024} \equiv 5 [7]$ إذن: $T_{2024} \equiv 10 [7]$
 أي: $T_{2024} \equiv 3 [7] \dots (1)$

ولدينا: $4T_{1445} = 5^{1446} - 1$ وبما أن $1446 = 241(6)$
 فإن: $5^{1446} \equiv 1 [7]$ وبالتالي: $4T_{1445} \equiv 0 [7]$ إذن: $T_{1445} \equiv 0 [7]$
 ومنه: $2T_{1445} \equiv 0 [7] \dots (2)$

من (1) و (2) نجد: $N \equiv 3 [7]$ إذن باقي قسمة N على 7 هو 3 .

4/ تبيان أن المعادلة $5^n x + T_n y = 1$ تقبل حولا:

لدينا $\text{PGCD}(5^n; T_n) = 1$ إذن المعادلة (E_n) تقبل حلا على الأقل في $\mathbb{Z}^2$.

حل المعادلة (E_2) : لدينا: $5^2 = 25$ ولدينا: $T_2 = \frac{1}{4}(5^3 - 1) = 31$

لدينا حسب السؤال 3/أ : $\begin{cases} 5^2 x + T_2 y = 1 \\ 5^2(5) + T_2(-4) = 1 \end{cases}$ بالطرح نجد:

$$5^2(x-5) + T_2(y+4) = 0 \text{ ومنه: } 5^2(x-5) = -T_2(y+4) \dots (*)$$

T_2 يقسم $5^2(x-5)$ وبما أن: $\text{PGCD}(5^2; T_2) = 1$ فإن: T_2 يقسم $x-5$

$$\text{أي: } x-5 = T_2.k ; k \in \mathbb{Z} \text{ إذن: } x = 31k + 5 ; k \in \mathbb{Z}$$

بالتعويض في (*) نجد: $5^2.31k = -31(y+4)$ ومنه: $5^2.k = -y-4$

إذن: $y = -25k - 4 ; k \in \mathbb{Z}$ إذن حلول المعادلة (E_2) هي الثنائيات:

$$(x; y) = (31k + 5 ; -25k - 4) \text{ بحيث } k \in \mathbb{Z} .$$

$$\bullet P(F) = \frac{C_6^2}{45} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3} .$$

$$\bullet P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{C_2^2}{15} = \frac{1}{15} .$$

2/ / الإحتمال الشرطي:

ب/ الحدثان E و F غير مستقلين، لأن: $P_F(E) \neq P(E)$

$$(P(E) \times P(F) = \frac{2}{45} \neq P(E \cap F)) \text{ أو نقول لأن: } P(E \cap F) \neq P(E) \times P(F)$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1/ تعيين قيم n من $\mathbb{N}^*$ بحيث يكون العدد M_n مضاعفا لـ 7 :

$$\bullet M_n = 4C_{n+1}^2 - A_{n+3}^2 + 2 = 4 \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} - \frac{(n+3)!}{(n+1)!} + 2$$

$$= 2(n+1)n - (n+3)(n+2) + 2$$

$$= 2n^2 + 2n - n^2 - 3n - 2n - 6 + 2 = n^2 - 3n - 4 = M_n$$

M_n مضاعف للعدد 7 معناه $M_n \equiv 0 [7]$ ومنه: $n^2 - 3n - 4 \equiv 0 [7]$

$$\text{وبالتالي: } n^2 + 4n + 3 \equiv 0 [7] \text{ أي: } (n+2)^2 - 1 \equiv 0 [7]$$

ومنه: $(n+1)(n+3) \equiv 0 [7]$ وبما أن 7 عدد أولي، فإن:

$$n+1 \equiv 0 [7] \text{ أو } n+3 \equiv 0 [7] \text{ ومنه: } n \equiv -1 [7] \text{ أو } n \equiv -3 [7]$$

$$\text{أي: } n \equiv 6 [7] \text{ أو } n \equiv 4 [7] \text{ إذن: } n \in \{7k+4; 7k+6 / k \in \mathbb{N}\} .$$

2/ دراسة بواقي القسمة الإقليدية:

$$\text{لدينا: } 5^0 \equiv 1 [7] \text{ و } 5^1 \equiv 5 [7] \text{ و } 5^2 \equiv 4 [7] \text{ و } 5^3 \equiv 6 [7] \text{ و } 5^4 \equiv 2 [7]$$

$$\text{و } 5^5 \equiv 3 [7] \text{ و } 5^6 \equiv 1 [7] \text{ وعليه:}$$

$n =$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	$k \in \mathbb{N}$
$5^n \equiv$	1	5	4	6	2	3	[7]

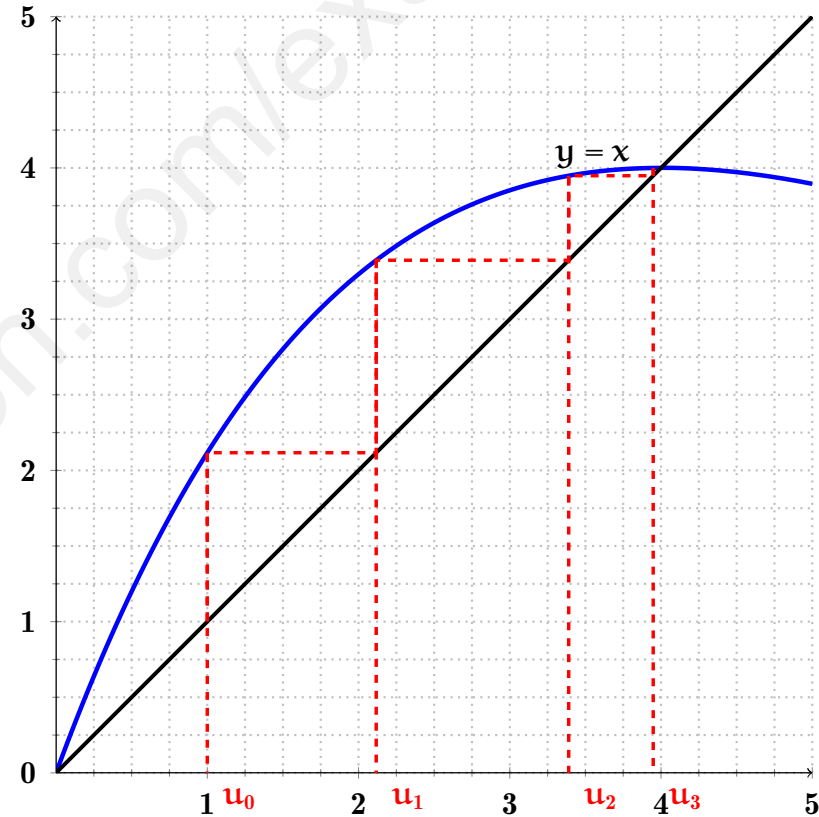
3/ / **الإثبات أن $4T_n = 5^{n+1} - 1$:**

$$\bullet T_n = 5^0 + 5^1 + \dots + 5^n = 5^0 \left(\frac{5^{n+1} - 1}{5 - 1} \right) = \frac{1}{4} (5^{n+1} - 1)$$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1/ من خلال التمثيل البياني: الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; 4]$ ومنه من أجل كل x من هذا المجال فإن: $f(0) \leq f(x) \leq f(4)$ أي $0 \leq f(x) \leq 4$ إذن: $f(x) \in [0; 4]$.

ب/ تمثيل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) :



ج/ التخمين:

من خلال التمثيل نعلم أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة نحو 4.

2/ البرهان بالتراجع: نسمي الخاصية $0 < u_n \leq 4$: $P(n)$. ولنثبت صحتها من أجل كل عدد طبيعي n .

- لدينا من أجل $n = 0$: $u_0 = 1$ أي: $0 < u_0 \leq 4$ أي: $P(0)$ صحيحة.
- لنفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $0 < u_n \leq 4$ ومنه: $0 < f(u_n) \leq 4$ أي: $0 < u_{n+1} \leq 4$.
إذن إذا كانت $P(n)$ صحيحة فإن $P(n+1)$ صحيحة.
• إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n \leq 4$.

ب/ تبين أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{1-\frac{1}{4}u_n}$ وبما أن: $0 < u_n \leq 4$ ومنه: $1 > 1 - \frac{1}{4}u_n \geq 0$ فإن: $e^{1-\frac{1}{4}u_n} \geq 1$ أي: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

استنتاج اتجاه التغير:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ وبما أن u_n ذات حدود موجبة، فإن المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

3/ استنتاج أن (u_n) متقاربة:

لدينا المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى، إذن هي متقاربة.
حساب النهاية:

المتتالية (u_n) متقاربة معناه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ حيث a عدد حقيقي.
ومنه: $a = a e^{1-\frac{1}{4}a}$ وبالتالي: $1 = e^{1-\frac{1}{4}a}$ ومنه: $1 - \frac{1}{4}a = 0$ إذن: $a = 4$ إذن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.

4/ $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$

ا/ إثبات عبارة الحد العام:

الطريقة 1: لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{1-\frac{1}{4}u_n}$

- (D) و (Γ) يتقاطعان في نقطتين فاصلتيهما: 0 و α .
 - (Γ) يقع فوق (D) على كل من المجالين: α[-∞ و]0; +∞[.
 - (Γ) يقع تحت (D) على المجال:]α; 0[.

/2 إستنتاج إشارة g(x): $g(x) = -x - 2 + 2(x+1)e^x$
 من خلال الوضعية النسبية لـ (D) و (Γ) نجد:

x	-∞	α	0	+∞
g(x)		+	0	-

/1/II حساب النهايات: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^x - 1)^2 = -\infty$

(لأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1)^2 = 1$)

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^x - 1)^2 = +\infty$

(لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1)^2 = +\infty$)

ب/ المستقيم المقارب المائل:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x(e^{2x} - 2e^x + 1) - x)$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{2x} - 2e^x)$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{1}{2}2xe^{2x} - 2e^x) = 0$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند -∞.

ج/ دراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ):

لذلك ندرس إشارة:

$$f(x) - x = x(e^x - 1)^2 - x = x((e^x - 1)^2 - 1)$$

$$= x(e^x - 1 - 1)(e^x - 1 + 1) = xe^x(e^x - 2) = f(x) - x$$

وعليه:

x	-∞	0	ln 2	+∞
x		-	0	+
e ^x - 2		-	0	+
f(x) - x		+	0	-

ومنه: $1 - \frac{1}{4}u_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ إذن: $u_n = 4 - 4 \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$
 وبالتالي:
 $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$
 $= 4 - 4 \ln\left(\frac{u_1}{u_0}\right) + 4 - 4 \ln\left(\frac{u_2}{u_1}\right) + \dots + 4 - 4 \ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)$
 $= (4 + 4 + \dots + 4) - 4 \left(\ln\left(\frac{u_1}{u_0}\right) + \ln\left(\frac{u_2}{u_1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right) \right)$
 $= 4n - 4 \ln\left(\frac{u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n}{u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}}\right)$
 $= 4n - 4 \ln(u_n)$

وعليه: $4n - S_n = 4 \ln(u_n)$ إذن: $u_n = e^{n - \frac{1}{4}S_n}$

الطريقة 2: (البرهان بالتراجع)

نسمي الخاصية: $u_n = e^{n - \frac{1}{4}S_n}$: P(n).

ولنثبت صحتها من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n.

- من أجل n = 1 : لدينا من جهة: $u_1 = u_0 e^{1 - \frac{1}{4}u_0} = e^{\frac{3}{4}}$

ومن جهة أخرى: $e^{1 - \frac{1}{4}S_1} = e^{1 - \frac{1}{4}u_0} = e^{\frac{3}{4}}$ إذن: P(1) صحيحة.

- نفرض صحة P(n) من أجل n من $\mathbb{N}^*$ ، أي: $u_n = e^{n - \frac{1}{4}S_n}$

لدينا: $u_{n+1} = u_n e^{1 - \frac{1}{4}u_n} = e^{n - \frac{1}{4}S_n} e^{1 - \frac{1}{4}u_n} = e^{n+1 - \frac{1}{4}(S_n + u_n)}$

إذن: $u_{n+1} = e^{(n+1) - \frac{1}{4}S_{n+1}}$ وبالتالي: P(n+1) صحيحة.

نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = e^{n - \frac{1}{4}S_n}$

ب/ حساب النهاية:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n - 4 \ln(u_n)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4 - 4 \frac{\ln(u_n)}{n} \right) = 4$$

لأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$ ومنه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = \ln 4$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(D) : $y = x + 2$ و (Γ) : $y = (2x + 2)e^x$ / I

/1 الوضعية النسبية: بقراءة بيانية نجد:

من إشارة $g(x)$ ، وعليه $f''(x)$ تنعدم عند كل من 0 و α وتغير إشارتها في جوارهما، إذن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف فاصلتيهما 0 و α

4/ معادلة المماس (T) : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

وبما أن: $f(0) = 0$ و $f'(0) = (1 - 1)^2 + 0 = 0$ فإن: $(T) : y = 0$

إثبات وحدانية المماس الذي يمر من المبدأ:

لذلك نحل المعادلة: $0 = f'(a)(0 - a) + f(a)$

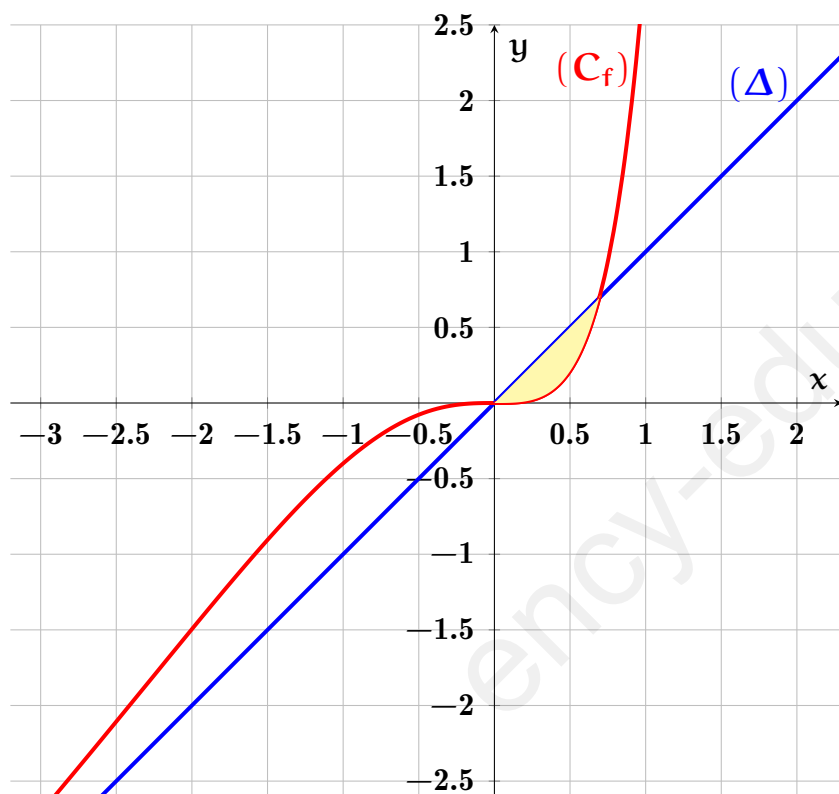
أي المعادلة: $-a[(e^a - 1)^2 + 2a(e^a - 1)] + a(e^a - 1)^2 = 0$

تكافئ: $a(e^a - 1)(-e^a + 1 - 2a + e^a - 1) = 0$

تكافئ: $-2a^2(e^a - 1) = 0$ معناه: $a = 0$

إذن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا يشمل المبدأ هو نفسه المماس (T).

5/ 1/ الإنشاء:



إذن: - (C_f) يقع فوق (Δ) على المجالين: $]-\infty; 0[$ و $]\ln 2; +\infty[$.

- (C_f) يقع تحت (Δ) على المجال: $]0; \ln 2[$.

- (C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطتين: $O(0; 0)$ و $A(\ln 2; \ln 2)$.

2/ تبيان أن: $x(e^x - 1) \geq 0$ لدينا:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$e^x - 1$	-	0	+
$x(e^x - 1)$	+	0	+

إذن من أجل كل عدد حقيقي $x : x(e^x - 1) \geq 0$.

إتجاه تغير الدالة f :

لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x : f'(x) = (e^x - 1)^2 + 2xe^x(e^x - 1)$

بما أنه من أجل كل عدد حقيقي $x : 2e^x(e^x - 1)x \geq 0$ وكذلك

$(e^x - 1)^2 \geq 0$ ، فإنه من أجل كل عدد حقيقي $x : f'(x) \geq 0$.

إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

3/ إثبات عبارة المشتق الثاني: لدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f''(x) = 2e^x(e^x - 1) + (2e^x + 2xe^x)(e^x - 1) + 2xe^xe^x$$

$$= 2e^x(e^x - 1 + (1 + x)(e^x - 1) + xe^x)$$

$$= 2e^x(e^x - 1 + e^x - 1 + xe^x - x + xe^x)$$

$$= 2e^x(-x - 2 + e^x(2x + 2)) = 2e^x g(x) = f''(x)$$

استنتاج نقاط الإنعطاف: لدينا: $f''(x) = 2e^x g(x)$ ومنه إشارة $f''(x)$

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

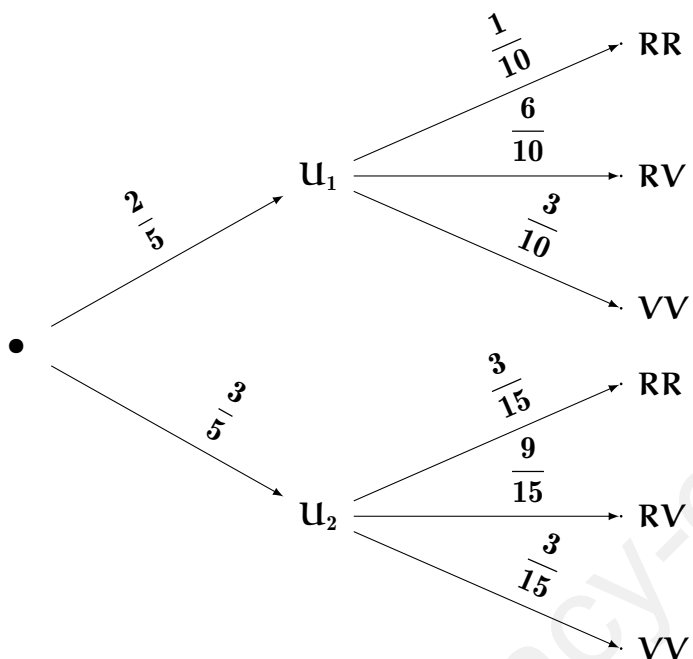
1/ إتمام شجرة الإحتمالات: لدينا:

$$P(U_2) = 1 - P(U_1) = \frac{3}{5}$$

$$P_{U_1}(RV) = \frac{C_3^1 \cdot C_2^1}{C_5^2} = \frac{6}{10} \quad (= 1 - \frac{1}{10} - \frac{3}{10}) \quad P_{U_1}(VV) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$$

$$P_{U_1}(VV) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15} \quad (= 1 - \frac{3}{15} - \frac{9}{15}) \quad P_{U_2}(RR) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15}$$

وعليه:



2/ حساب إحصائي الحدثين:

- الحدث A : الأولى حمراء والأخرتين حمراوين، أو الأولى خضراء والأخرتين خضراوين:

ب/ تعيين قيم العدد الحقيقي m : بقراءة بيانية:

تقبل المعادلة $f(x) = mx$ ثلاثة حلول مختلفة لما $m \in]0; 1[$.

$$6/ \text{المكاملة بالتجزئة: لتبين أن: } \int_0^{\ln 2} x e^x (e^x - 2) dx = \frac{5 - 8 \ln 2}{4}$$

$$\text{نعتبر: } \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x (e^x - 2) \end{cases} \text{ ومنه: } \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{1}{2} (e^x - 2)^2 \end{cases}$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} x e^x (e^x - 2) dx &= \left[\frac{1}{2} x (e^x - 2)^2 \right]_0^{\ln 2} - \frac{1}{2} \int_0^{\ln 2} (e^x - 2)^2 dx \\ &= \left(\frac{\ln 2}{2} (e^{\ln 2} - 2)^2 - 0 \right) - \frac{1}{2} \int_0^{\ln 2} (e^{2x} - 4e^x + 4) dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2x} - 4e^x + 4x \right]_0^{\ln 2} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} e^{2 \ln 2} - 4e^{\ln 2} + 4 \ln 2 - \frac{1}{2} + 4 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{4}{2} - 4 \times 2 + 4 \ln 2 - \frac{1}{2} + 4 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(-2 + 4 \ln 2 - \frac{1}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) (4 - 8 \ln 2 + 1) \end{aligned}$$

$$\int_0^{\ln 2} x e^x (e^x - 2) dx = \frac{1}{4} (5 - 8 \ln 2)$$

ب/ استنتاج المساحة: بما أن المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) على

المجال $[0; \ln 2]$ فإن مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f)

والمستقيم (Δ) على هذا المجال هي:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\ln 2} (x - f(x)) dx = - \int_0^{\ln 2} x e^x (e^x - 2) dx \\ &= -\frac{1}{4} (5 - 8 \ln 2) \quad \text{u.a} = \frac{1}{4} (-5 + 8 \ln 2) \times 4 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$A = -5 + 8 \ln 2 \text{ cm}^2$$

حساب الامل الرياضي للمتغير العشوائي X :

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i P(X = x_i) = 1 \times \frac{3}{25} + 2 \times \frac{21}{25} + 3 \times \frac{1}{25} = \frac{48}{25}$$

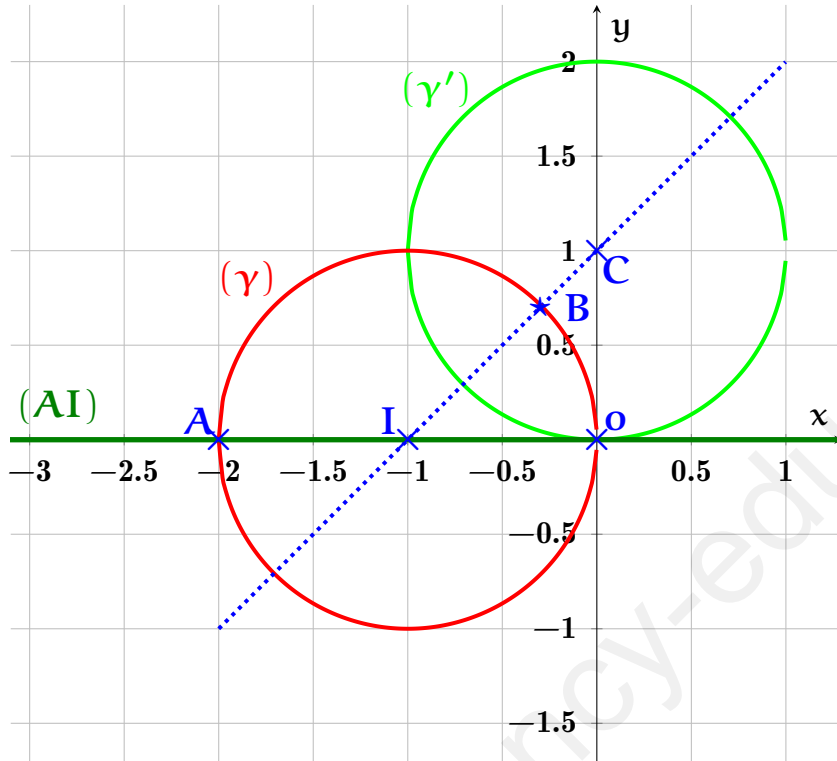
$$E(X) = 1.92$$

ج/ حساب الاحتمال:

$$P(C_3^X = 3) = P([X = 1] \cup [X = 2]) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{24}{25}$$

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

1/ إنشاء:



2/ استنتاج الطويلة وعمدة للعدد $Z_B + 1$:

$$\bullet |Z_B + 1| = |Z_B - Z_I| = IB = 1$$

$$\bullet \arg(Z_B + 1) = \arg(Z_B - Z_I) = (\vec{u}; \vec{IB}) = (\vec{IO}; \vec{IB})$$

$$P(A) = P(U_1)P_{U_1}(RR) + P(U_2)P_{U_2}(VV) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{15}$$

$$P(A) = \frac{4}{25}$$

- الحدث B : الأولى حمراء، أو الأولى خضراء والأخرتين واحدة حمراء والأخرى خضراء أو الأولى خضراء والأخرتين حمراوين.
(أو يمكن القول أنه الحدث العكسي لثلاث كريات خضراء-الأولى خضراء والأخرتين حمراوين)

$$P(B) = P(U_1) + P(U_2) (P_{U_2}(RV) + P_{U_2}(RR)) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \left(\frac{9}{15} + \frac{3}{15} \right)$$

$$P(B) = \frac{22}{25} \quad \left(P(B) = 1 - \frac{3}{5} \times \frac{3}{15} = 1 - \frac{3}{25} = \frac{22}{25} \right)$$

3/ حساب الاحتمال الشرطي:

$$\bullet P_A(U_2) = \frac{P(U_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{3}{15}}{\frac{4}{25}} = \frac{\frac{3}{25}}{\frac{4}{25}} = \frac{3}{4} = P_A(U_2)$$

4/ ا/ قيم المتغير العشوائي X نلخصها كما يلي:

في حالة سحب الأولى حمراء (حالة سحب كرتين من U_1): نميز ثلاث حالات: إما: $U_1 - RR \rightarrow X = 3$ وإما: $U_1 - RV \rightarrow X = 2$ وإما: $U_1 - VV \rightarrow X = 1$

في حالة سحب الأولى خضراء (حالة سحب كرتين من U_2):
بقي في الصندوق U_1 كرتان خضراوان، أي: $X = 2$.
إذن قيم المتغير العشوائي X هي: 1 و 2 و 3.

ب/ قانون احتمال المتغير العشوائي X :

$$\bullet P(X = 1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{25}$$

$$\bullet P(X = 2) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{6}{10} = \frac{21}{25}$$

$X = x_i$	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{25}$	$\frac{21}{25}$	$\frac{1}{25}$

$$\bullet P(X = 3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{25} \quad \text{وعليه:}$$

2/ إثبات العلاقة:

$$\bullet Z' - i = \frac{i(Z+2)}{Z+1} - i = \frac{i(Z+2)}{Z+1} - \frac{i(Z+1)}{Z+1} = \frac{i(Z+2-Z-1)}{Z+1} = \frac{i}{Z+1} = Z' - i$$

ب/ لدينا: $Z = -1 + e^{i\theta}$ أي: $Z - Z_I = +e^{i\theta}$ وبالتالي:

$$\begin{cases} IM = 1 \\ (\vec{IO}; \vec{IM}) = \theta \end{cases} \text{ معناه: } \begin{cases} |Z - Z_I| = 1 \\ \arg(Z - Z_I) = \theta \end{cases}$$

لما θ تلمس المجال $[-\pi; \pi]$ فإن: M تلمس الدائرة (γ) ، وعندئذ بالتعويض في العلاقة في السؤال السابق نجد:

$$Z' - i = \frac{i}{e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\theta}} = e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$$

$$\text{أي: } Z' - Z_C = e^{i\theta'} \quad \text{حيث: } \theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\begin{cases} CM' = 1 \\ (\vec{u}; \vec{CM'}) = \theta' \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} |Z' - Z_C| = 1 \\ \arg(Z' - Z_C) = \theta' \end{cases} \text{ وذلك معناه:}$$

وبالتالي لما M تلمس الدائرة (γ) أي لما θ تلمس المجال $[-\pi; \pi]$ فإن θ' تلمس المجال $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ وعندئذ النقطة M' تلمس دائرة (γ') مركزها النقطة C ونصف قطرها 1.

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

1/ تعيين باقي القسمة الإقليدية: لدينا: $2009 = 16(125) + 9$ ومنه:

$2009 \equiv 9 \pmod{16}$ ومنه: $2009^2 \equiv 81 \pmod{16}$ أي: $2009^2 \equiv 1 \pmod{16}$ إذن باقي قسمة العدد 2009^2 على 16 هو 1.

ب/ الإستنتاج:

لدينا: $2009^2 \equiv 1 \pmod{16}$ ومنه: $(2009^2)^{4000} \equiv 1 \pmod{16}$ أي:

$$2009^{8000} \equiv 1 \pmod{16} \quad \text{وبما أن: } 2009 \equiv 9 \pmod{16}$$

لدينا الزاوية الموجهة $(\vec{IO}; \vec{IB})$ هي زاوية مركزية في الدائرة (γ) ، زاويتها المحيطية هي: $(\vec{AO}; \vec{AB})$ إذن:

$$(\vec{IO}; \vec{IB}) = 2(\vec{AO}; \vec{AB}) = 2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

إذن: $\frac{\pi}{4}$ هي عمدة للعدد المركب $Z_B + 1$.

الشكل الجبري لـ Z_B : لدينا: $Z_B + 1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ ومنه:

$$Z_B = -1 + \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = Z_B$$

3/ إثبات أن العدد حقيقي:

$$\bullet \frac{Z_B + 1}{i + 1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + i} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)}{1 + i} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

إذن العدد $\frac{Z_B - Z_I}{Z_C - Z_I}$ حقيقي.

الإستنتاج: لدينا العدد $\frac{Z_B - Z_I}{Z_C - Z_I}$ حقيقي موجب معناه:

$$\arg \left(\frac{Z_B - Z_I}{Z_C - Z_I} \right) = 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}$$

إذن النقط: I و B و C على استقامة واحدة.

1/II / إثبات:

$$\begin{aligned} \arg(Z') &= \arg \left(\frac{i(Z+2)}{Z+1} \right) = \arg(i) + \arg \left(\frac{Z+2}{Z+1} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} + \arg \left(\frac{Z - Z_A}{Z - Z_I} \right) = \left[\frac{\pi}{2} + (\vec{MI}; \vec{MA}) \right] = \arg(Z') \end{aligned}$$

ب/ تعيين مجموعة النقط M بحيث Z' تخلي صرف:

$$\arg(Z') = \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{معناه:}$$

بالتعويض في العلاقة السابقة نجد: $\frac{\pi}{2} + (\vec{MI}; \vec{MA}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\text{أي: } (\vec{MI}; \vec{MA}) = k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}$$

إذن مجموعة النقط M في هذه الحالة هي المستقيم (AI) وهو منطبق على حامل محور الفواصل.

فإن: $2009 \equiv 4 [5]$ أي: $2009 \equiv -1 [5]$ ومنه: $2009^2 \equiv 1 [5]$ وبالتالي: $2009^2 - 1 \equiv 0 [5]$ إذن: u_0 يقبل القسمة على 5 .

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} u_0 = 2009^2 - 1 \\ u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1 \end{cases}$$

/ تبيان أن u_0 يقبل القسمة على 5 :

لدينا: $2009 \equiv 4 [5]$ أي: $2009 \equiv -1 [5]$ ومنه: $2009^2 \equiv 1 [5]$ وبالتالي: $2009^2 - 1 \equiv 0 [5]$ إذن: u_0 يقبل القسمة على 5 .

ب/ إثبات العلاقة التراجعية:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (u_n + 1)^5 - 1 = -1 + \sum_{p=0}^5 C_5^p (u_n)^{5-p} (1)^p \\ &= -1 + C_5^0 u_n^5 + C_5^1 u_n^4 + C_5^2 u_n^3 + C_5^3 u_n^2 + C_5^4 u_n + C_5^5 u_n^0 \\ &= u_n^5 + 5u_n^4 + 10u_n^3 + 10u_n^2 + 5u_n + 1 - 1 \\ &= u_n (u_n^4 + 5u_n^3 + 10u_n^2 + 10u_n + 5) \\ u_{n+1} &= u_n [u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)] \end{aligned}$$

ج/ البرهان بالتراجع: نسمي الخاصية: " u_n مضاعف لـ 5^{n+1} ": $P(n)$. ولنثبت صحتها من أجل كل عدد طبيعي n .

- من أجل $n = 0$:

لدينا u_0 يقبل القسمة على 5 أي u_0 مضاعف لـ 5 إذن $P(0)$ صحيحة.

- ليكن n عددا طبيعيا. لنفرض صحة $P(n)$ أي: u_n مضاعف لـ 5^{n+1} ومنه: u_n^4 مضاعف لـ مضاعف لـ 5^{n+1} أي أنه مضاعف لـ 5 ، وكذلك $5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)$ مضاعف لـ 5

إذن $u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)$ مضاعف لـ 5

أي: $u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1) = 5k$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$

ولدينا u_n مضاعف لـ 5^{n+1} معناه: $u_n = 5^{n+1}q$ بحيث $q \in \mathbb{Z}$

وبالتالي: $u_n [u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)] = 5^{n+1}q5k = 5^{n+2}qk$ وبالتالي: u_{n+1} مضاعف لـ 5^{n+2} ، إذن $P(n+1)$ صحيحة.

نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : u_n مضاعف لـ 5^{n+1} .

3/ ا/ التحقق: لدينا:

$$u_1 = (u_0 + 1)^5 - 1 = 2009^{10} - 1$$

$$u_2 = (u_1 + 1)^5 - 1 = 2009^{50} - 1$$

$$u_3 = (u_2 + 1)^5 - 1 = 2009^{250} - 1$$

ب/ الإستنتاج:

مما سبق نستنتج أن u_3 مضاعف لـ 5^4 أي أن u_3 مضاعف لـ 625

$$2009^{250} - 1 \equiv 0 [625] \quad \text{إذن:} \quad 2009^{250} \equiv 1 [625]$$

ومنه: $(2009^{250})^{32} \equiv 1 [625]$ أي: $2009^{8000} \equiv 1 [625]$ إذن:

$$2009^{8001} \equiv 2009 [625]$$

4/ ا/ البرهان:

لتكن a و b و c أعدادا صحيحة غير معدومة، بحيث: a مضاعف لكل من b و c ، و b و c أوليان فيما بينهما.

الطريقة 1:

a مضاعف لـ b معناه: $a = b.k$; $K \in \mathbb{Z}$ (*)

وبما أن a مضاعف لـ c فإن c يقسم a أي c يقسم $b.k$

وبما أن b و c أوليان فيما بينهما فإن: c يقسم k ، أي $k = c.q$; $q \in \mathbb{Z}$

بالتعويض في (*) نجد: $a = b.c.q$ إذن a مضاعف للجداء bc .

الطريقة 2:

a مضاعف لـ b معناه: b يقسم a ،

و a مضاعف لـ c معناه: c يقسم a ،

ومنه الجداء bc يقسم a لأن b و c أوليان فيما بينهما،

أي: a مضاعف للجداء bc .

ب/ تبيان قابلية قسمة العدد $2009^{8001} - 2009$ على 10000 :

لدينا: $2009^{8001} \equiv 2009 [16]$ أي: $2009^{8001} - 2009 \equiv 0 [16]$

إذن العدد $2009^{8001} - 2009$ مضاعف لـ 16 .

2/ الإستنتاج: بقراءة جدول التغيرات للدالة g نستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما $x : g(x) > 0$

II/ من أجل $x > 0$: $f(x) = x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) + x + 1$ و $f(0) = 1$

1/ / تبيان النهاية:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln(1+t)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) + x + 1 \right] = +\infty$$

ب/ تبيان أن $y = x + 2$: (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) - 1 \right] = 0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو معادلة $y = x + 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

2/ / دراسة قابلية الاشتقاق عن 0 :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) + 1 = +\infty$$

إذن الدالة غير قابلة للاشتقاق على يمين 0.

التفسير الهندسي:

المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس مواز لحامل محور الترتيب معادلته: $x = 0$.

ب/ تبيان عبارة المشتقة:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :

$$f'(x) = \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) + x \cdot \frac{\left(\frac{x+1}{x} \right)'}{\left(\frac{x+1}{x} \right)} + 1$$

$$= \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) + x \left(\frac{x - x - 1}{x^2} \right) \left(\frac{x}{x+1} \right) + 1$$

ولدينا: $2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{625}$ أي: $2009^{8001} - 2009 \equiv 0 \pmod{625}$
إذن العدد $2009^{8001} - 2009$ مضاعف لـ 625.

ولدينا: $16 = 2^4$ وكذلك: $625 = 5^4$ إذن: $\text{PGCD}(16; 625) = 1$ ؛
نستنتج أن العدد $2009^{8001} - 2009$ مضاعف للجداء: $10000 = 16 \times 625$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I/1/ دراسة تغيرات الدالة g :

$$\bullet \text{ النهايات: } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(\frac{x+1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} \right) = 0$$

(لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ و $\ln 1 = 0$ ، وكذلك: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln \left(\frac{x+1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} \right) = +\infty$$

(لأن: $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x} = +\infty$ وكذلك: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1$)

• اتجاه التغير: لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :

$$g'(x) = \left(\frac{x+1}{x} \right)' + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x - x - 1}{x^2} \times \frac{x}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-x - 1 + x}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2} = g'(x)$$

نلاحظ أن $g'(x) < 0$ من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما،

إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

• جدول التغيرات:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$+\infty$	0

4/ /1 تبيان أن الدالة F أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}xf'(x) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right) + 1 \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x) + x(g(x) + 1) - \frac{1}{x+1} + 2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x) + x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{x}{x+1} + x - \frac{1}{x+1} + 2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x) + x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{x+1}{x+1} + x + 2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x) + x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x + 1\right) = \frac{1}{2}(2f(x)) \end{aligned}$$

$$F'(x) = f(x)$$

إذن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

ب/ استنتاج مساحة الحيز:

مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين: $y = 0$ و $x = \frac{1}{2}$ و $x = 1$ هي:

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = [F(x)]_{\frac{1}{2}}^1 = F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(9 + \ln\left(\frac{27}{16}\right)\right) \text{ u.a} = \frac{1}{8}\left(9 + \ln\left(\frac{27}{16}\right)\right) \times 4 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{2}\left(9 + \ln\left(\frac{27}{16}\right)\right) \text{ cm}^2$$

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ; n \in \mathbb{N}^* \quad /5$$

/1 إثبات عبارة الحد العام:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$e^{f(n)-n-1} = e^{n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = u_n$$

ب/ إثبات أن المتتالية u_n متزايدة تماما:

نعتبر الدالة المرفقة بعبارة الحد العام للمتتالية (u_n) .

$$= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} + 1$$

$$f'(x) = g(x) + 1$$

إتجاه التغير:

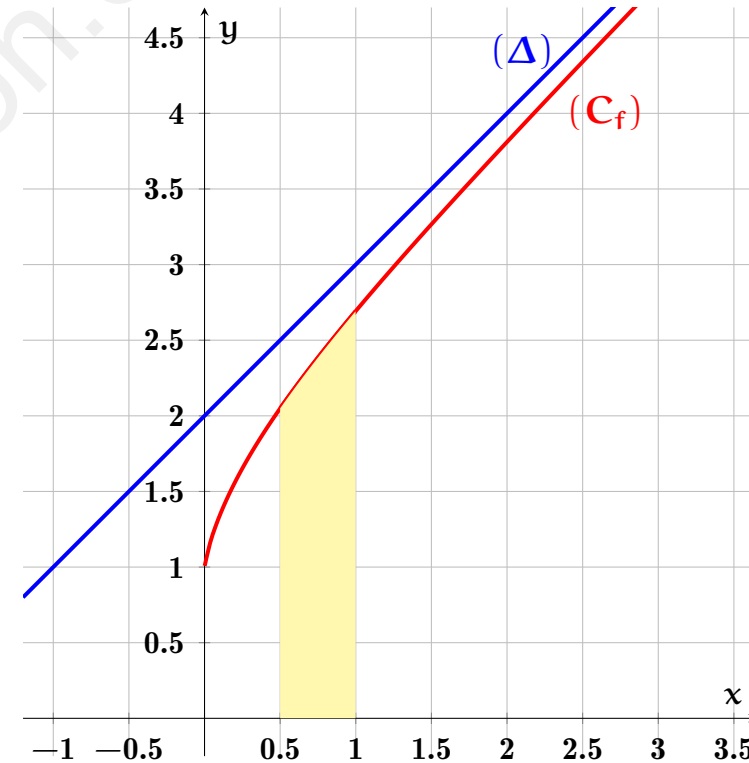
لدينا مما سبق من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $g(x) > 0$ ومنه: $f'(x) > 0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

جدول التغيرات:

x	0	$+\infty$
f'(x)		+
f(x)	1	$+\infty$

$$f(1) = 2 + \ln 2 \approx 2.7$$

3/ الإنشاء:



الدالة h معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بالعلاقة: $h(x) = e^{f(x)-x-1}$
لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :

$$h'(x) = (f'(x) - 1)e^{f(x)-x-1} = g(x)e^{f(x)-x-1}$$

بما أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $g(x) > 0$
فإن: $h'(x) > 0$ وبالتالي الدالة h متزايدة تماما على $]0; +\infty[$ ؛
إذن: المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}^*$.

ج/ تبين النهاية:

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{f(n)-n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)} = e.$$

$$(\text{لأن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) = 1).$$

الإستنتاج:

نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد e .

أجب على أحد الموضوعين التاليين على الخيار
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على ثلاث كريات تحمل الأرقام 0، 1 و 3 ويحتوي صندوق U_2 على أربع كريات تحمل الأرقام 4، 5، 8 و 8، نسحب عشوائيا كرية واحدة من الصندوق U_1 .

فإذا كانت تحمل الرقم 0 نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من U_2 وإذا كانت لا تحمل الرقم 0 نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من U_2 .

ليكن A "الكريّة المسحوبة من U_1 تحمل الرقم 0" و B "مجموع أرقام الكريات المسحوبة من U_2 عدد زوجي".

(1) أحسب الاحتمالين: $P_A(B)$ و $P(A \cap B)$ ثم بين أن $P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{6}$ ثم أحسب $P(B)$.

(2) علما أن مجموع الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 زوجي، ما احتمال أن تكون الكرية المسحوبة من الصندوق U_1 لا تحمل الرقم 0.

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب جداء الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة من U_1 و U_2 .

(أ) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X ، ثم استنتج قيمة $P(X \leq 160)$.

(ب) أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X

التمرين الثاني: (05 نقاط)

(1) جد العددين المركبين Z_1 و Z_2 حيث:
$$\begin{cases} 2Z_1 + iZ_2 = 1 + i\sqrt{3} \\ (\sqrt{3} + 2i)Z_1 - Z_2 = (1 - \sqrt{3})i \end{cases}$$

(2) في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين

$$Z_A = 1 - i \text{ و } Z_B = 2 + \sqrt{3} + i$$

(أ) أكتب z_A على الشكل الأسّي. (ب) بين أن $\frac{Z_B}{Z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ ثم استنتج الشكل الأسّي للعدد Z_B .

(ج) هل توجد قيم لعدد الطيعي n حتى تكون صورة العدد $\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right)^n$ تنتمي إلى المنصف الأول؟

(3) أوجد لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه النقطة O و زاويته $-\frac{\pi}{6}$.

$$Z_D = (1 + \sqrt{3}) - i$$

(أ) أحسب مساحة الدائرة (δ) التي قطرها $[BD]$. (مقدرة بوحدة المساحة)

(ب) عين مجموعة النقط $M(Z)$ من المستوي حيث: $\arg[(Z - Z_B)^2] = \arg(Z_B) - \arg(Z_D)$.

(ج) عين Z_C لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $ADBC$ مستطيلا، ثم أوجد Z_I لاحقة مركز ثقله I .

- (5) نعتبر المجموعة (Δ) للنقط M ذات اللاحقات Z من المستوي بحيث: $Z - \sqrt{3} = \lambda e^{\frac{-2\pi i}{3}}$ و λ عدد حقيقي موجب تماما .
تحقق من أن النقطة E ذات اللاحقة $Z_E = -3i$ تنتمي إلى (Δ) . ثم عين المجموعة (Δ) .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين معرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي بـ :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) \end{cases}$$

من أجل كل عدد طبيعي نعرف المتتالية (w_n) بـ $w_n = u_n - v_n$:

- (1) أ- بين أن المتتالية (w_n) هندسية ، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .
ب- أكتب عبارة w_n بدلالة n هل المتتالية (w_n) متقاربة ؟
- (2) أدرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .
ب) استنتج أن (u_n) و (v_n) متجاورتان .
- (3) لتكن l النهاية المشتركة لهما ونعرف المتتالية (t_n) على $\mathbb{N}$ بـ $t_n = u_n + v_n$.
بين أن (t_n) ثابتة ثم استنتج قيمة l .
- (4) أحسب المجموع $T = S_n + S'_n$ بدلالة n حيث : $S_n = v_0 u_0 - v_0^2 + v_1 u_1 - v_1^2 + \dots + v_n u_n - v_n^2$.
و $S'_n = u_0^2 - u_0 v_0 + u_1^2 - u_1 v_1 - \dots + u_n^2 - u_n v_n$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نعرف الدالة f_n على المجال $[0; +\infty[$ بـ :

$$\begin{cases} f_n(x) = x(1 - \ln x)^n & ; x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

(C_n) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$

(I) 1) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_1 عند 0 من اليمين ثم فسّر النتيجة بيانياً .

ب) جد كل من: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$.

(2) 1) أدرس اتجاه تغير الدالة f_1 ثم شكّل جدول تغيراتها . ب) استنتج دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$.

(3) 1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً x : $f'_2(x) = (1 + \ln x)(-1 + \ln x)$.

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f_2 ثم شكّل جدول تغيراتها .

(4) بين أن المنحنى (C_2) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها .

(5) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) ثم أرسم كلا منهما في المعلم السابق .

(II) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نعرف العدد الحقيقي I_n كما يلي : $I_n = \int_1^e f_n(x) dx$

(1) أحسب I_1 ثم فسّر النتيجة هندسياً .

(2) بين أن المتتالية (I_n) متناقصة ثم استنتج تقاربها .

(3) باستعمال التكامل بالتجزئة، بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $I_{n+1} = \frac{n+1}{2} I_n - \frac{1}{2}$

أحسب بـ cm^2 مساحة حيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C_1) ، (C_2) و المستقيمين اللذين معادلتين لهما: $x = e$ ، $x = 1$

تعطى المعادلة: (E) . . $2024x - 1444y = 24$ حيث x و y عدنان صحيحان.

(1) أحسب $PGCD(2024; 1444)$ ثم بين أن المعادلة (E) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(2) جد الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E) علماً أن $y_0 - x_0 = 4$: ثم حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (E).

(3) جد القيم الممكنة لـ $PGCD(x; y)$ حيث $(x; y)$ حل المعادلة (E) ثم جد الثنائيات $(x; y)$ من $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ حلول المعادلة (E) بحيث $PGCD(x; y) = 6$.

(4) نضع : $u_n = 361n + 16$ و $v_n = 506n + 10$ حيث $n \in \mathbb{N}$ ، عين الحدود المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) .

(5 أ) حلل العدد 2025 إلى جداء عوامل أولية واستنتج قواسم 2025 التي مربعاتها قواسم لـ 2025.

(ب) جد العددين الطبيعيين a و b حيث $4m^2 - 171d^2 = 2025$ حيث $d = PGCD(a; b)$ و $m = PGCD(a; b)$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ : $u_0 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n^2}$.

(1) في مايلى المنحنى البياني الممثل لدالتها المرفقة f حيث $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

مثل الحدود الأربعة الأولى على حامل محور الفواصل أعط تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

(2 أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$.

(ب) حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n) . بين أن (u_n) متقاربة، أحسب نهايتها.

(3 أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < 1 - u_{n+1} \leq \frac{2}{5}(1 - u_n)$.

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < 1 - u_n \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

(ج) استنتج نهاية المتتالية (u_n) مرة أخرى.

(4) نعرف المتتالية (v_n) على كماليلي : $v_n = 1 - u_n$. ونضع $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < S_n \leq \frac{5}{6} \times \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$.

التمرين الثالث : (05 نقاط)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-2)(z^2-2z+4)=0$.

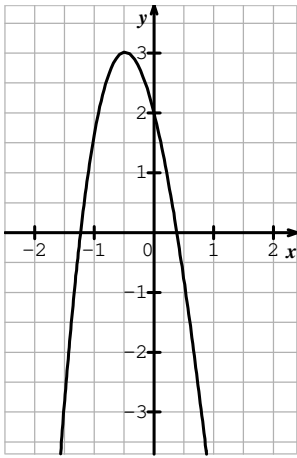
(2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B و C التي لاحقاتها

z_A ، z_B و z_C على الترتيب حيث $z_A = 2$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.
 أ) أكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي ثم أنشئ النقط A ، B و C (يطلب ترك أثر الإنشاء).

(3) أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\left(\frac{2}{z_C}\right)^{2024}$ ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث تكون النقطة H صورة العدد $(z_B)^n$ تنتمي الى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x\sqrt{3}$.

(4) مجموعة النقط M ذات اللاحقات z حيث $\arg(\bar{z} - 2) = \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi$ و k عدد صحيح.
 أ) تحقق أن $B \in (\Gamma)$ ثم عين طبيعة (Γ) .
 ب) بين أن النقطة C هي صورة النقطة B بدوران مركزه A يطلب تعيين زاويته .

التمرين الرابع : (07 نقاط)



(I) m عدد طبيعي معطى نعتبر الدالة f_m و المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_m(x) = (x^3 - mx)e^{-x} + x + 1$.

(C_m) هو المنحنى الممثل لها في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x)$.

ب) بين أن للمنحنيات (C_m) مستقيما مقاربا مائلا في جوار $+\infty$ يطلب كتابة معادلته.

(2) بين أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثانية يطلب تعيينها .

(II) نضع $m=3$ ونعرف الدالة f على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = f_3(x)$.

(1) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 3 - e^x$. فيما يلي المنحنى الممثل لها في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

أ) برر وجود حلين α و β للمعادلة $g(x) = 0$ في $\mathbb{R}$ حيث $-1.23 < \alpha < -1.22$ ، $0.38 < \beta < 0.39$.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(2) أ) بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = -e^{-x}g(x)$.

ب) حدد إشارة $f'(x)$ ثم أدرس اتجاهات تغير الدالة f و أنجز جدول تغيراتها .

(3) حدد الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x + 1$.

(4) أكتب معادلة المماس (T) في النقطة ذات الفاصلة 0 ثم المماس (T') في النقطة ذات الفاصلة 3 .

تحقق من أن (T) و (T') يشعلان النقطة $A(0;1)$.

(5) أرسم كلا من (T) ، (T') و (Δ) و المنحنى (C_3) .

(6) أ) نبين أن جميع المستقيمت (Δ_p) التي معادلاتها $y = px + 1$ تشمل النقطة $A(0;1)$. (حيث عدد حقيقي) .

ب) ناقش بياننا حسب قيم p عدد إشارة حلول المعادلة $f(x) = px + 1$.

(7) نعتبر الدالة h المعرفة بـ $h(x) = (x^3 - 3x)e^{-x}$.

أ) جد الأعداد الحقيقية a ، b ، c ، d بحيث تكون الدالة H المعرفة بـ $H(x) = (-x^3 + ax^2 + bx + c)e^{-x}$ دالة أصلية لـ h .

ب) أحسب مساحة الحيز من المستوي المحدد من المستوي (C_f) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = \sqrt{2}$ و $x = 0$.



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة التالية: (I) $325x - 238y = 7$

(1) بين أنه إذا كان $(x; y)$ حلا للمعادلة (I) فإن x مضاعف للعدد 7.

(2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (I).

(3) ليكن $d = \text{pgcd}(x, y)$ حيث $(x; y)$ حلا للمعادلة (I).

عين القيم الممكنة للعدد d ثم عين قيم x و y حتى يكون $d = 7$

(4) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية لكل من 2^n و 3^n على 7.

(5) بين أن: $2022^{1954} + 2021^{1962} + 2020^{1444} + 1 \equiv 0[7]$

(6) عين قيم العددين الطبيعيين x و y حتى يكون: $2018^x + 2019^y \equiv 0[7]$ حيث $(x; y)$ حلا

للمعادلة (I).

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(I) 1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

2. نعتبر في $\mathbb{C}$ كثير الحدود $p(z) = z^3 + (-2\sqrt{3} + i)z^2 + (4 - 2i\sqrt{3})z + 4i$.

أ- بين أن $z_0 = -i$ جذر ل $p(z)$.

ب- عين العددين الحقيقيين b و c حيث: $p(z) = (z + i)(z^2 + bz + c)$.

ج- استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة $p(z) = 0$ ، z_0 ، z_1 و z_2 حيث z_1 العدد المركب الذي جزؤه التخيلي

موجب.

د- اكتب العدد المركب L على الشكل الأسّي حيث $L = \frac{z_1}{z_2}$.

هـ- عين قيم العدد الصحيح n حيث يكون L^n عدد حقيقي موجب تماما.

(II) في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C

التي لواحقها على الترتيب: $z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = \sqrt{3} - i$ ، $z_C = -i$

1. مثل النقط A ، B و C مبينا كيفية الإنشاء هندسيا.

2. احسب $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

3. عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل النقطي S حيث: $S(A) = C$ و $S(B) = B$.

4. لتكن G مرجح الجملة $\{(A, 6), (B, -4), (C, 3)\}$ ، عين مجموعة النقط M من المستوي التي

تحقق: $\|3\vec{MA} - 2\vec{MB} + \frac{3}{2}\vec{MC}\| = 5$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية (u_n) المعرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}\left(u_n^2 - u_n + \frac{1}{2}\right)}$$

1. أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{8}$

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 1$.

2. أ- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-u_n)}{2\sqrt{\frac{1}{2}(u_n^2 - u_n + \frac{1}{2})} + 2u_n - 1}$

ب- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

3. المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = u_n^2 - u_n$

(أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

(ب) اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{8}{2^n}}$

(ج) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4. احسب بدلالة n المجموع حيث:

$$S_n = (u_0 - u_0^2) + (u_1 - u_1^2 + 1) + (u_2 - u_2^2 + 2) + \dots + (u_n - u_n^2 + n)$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^4 - 18x^2 + 1$

1- شكل جدول تغيرات الدالة g على المجال $]1; +\infty[$.

2- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يحقق $4,23 < \alpha < 4,24$ ، استنتج إشارة $g(x)$ لما $x > 1$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - 4 + \frac{8e^{2x}}{e^{2x}-1}$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد $(\vec{i}; \vec{j})$.

1- أ) أثبت أن: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(e^x)}{(e^{2x}-1)^2}$

ب) بين أن: إذا كان $x \geq \ln \alpha$ فإن $f'(x) \geq 0$ وإذا كان $0 < x \leq \ln \alpha$ فإن $f'(x) \leq 0$.

2- أ) أثبت أن: من أجل كل x من المجال $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ ، الدالة f فردية. ماذا يمكن قوله عن (C_f) ؟

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

ج) شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

3- أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y = x - 4$ بجوار $-\infty$.

ب) استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ') بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

ج) ارسم المستقيمين المقاربين المائلين (Δ) و (Δ') ، والمنحنى (C_f) . نأخذ $f(\ln \alpha) \approx 5,9$.

4- n عدد طبيعي أكبر تماما من 1. لتكن $A(n)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم

ذي المعادلة $y = x + 4$ ، والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = \ln \sqrt{n}$ و $x = \ln \sqrt{n+1}$

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1، فإن $A(n) = 4 \ln \left(\frac{n^2}{n^2-1} \right)$ ثم احسب

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A(n)$$

ب) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1، نضع: $S_n = A(2) + A(3) + \dots + A(n)$.

بين أن: $S_n = 4 \ln \left(\frac{2n}{n+1} \right)$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

I. نعتبر صندوقين متماثلين U_1 و U_2 بحيث: U_1 يحتوي على خمس كرات حمراء تحمل الأرقام $\{-1, 0, 1, 1, 1\}$ وثلاث كرات خضراء تحمل الأرقام $\{0, 1, 1\}$ و U_2 يحتوي على أربع كرات حمراء تحمل الأرقام $\{0, 1, 1, 1\}$ وكرتين خضراوين تحملان الرقمين $\{0, 1\}$.
نختار عشوائيا أحد الصناديق فإذا كان U_1 نسحب منه ثلاث كرات على التوالي دون إرجاع وبطريقة عشوائية وإذا كان U_2 نسحب منه ثلاث كرات في آن واحد وبطريقة عشوائية كذلك.

1) احسب احتمال الأحداث التالية:

B : " سحب ثلاث كرات تحمل نفس الرقم". A : "سحب ثلاث كرات من نفس اللون".

D : " سحب ثلاث كرات جداء أرقامهما معدوم". C : " سحب كرة خضراء على الأقل".

E : "سحب ثلاث كرات مجموع أرقامهما معدوم".

2) بين أن: $P(A \cap B) = \frac{89}{3360}$ ثم استنتج $P(\overline{A \cup B})$ ، هل الحادثتان A و B مستقلتان؟ علل جوابك.

II. نأخذ الكرات الموجودة في الصندوقين U_1 و U_2 ونضعها جميعها في صندوق واحد U_3 ثم نسحب عشوائيا منه كرتين في آن واحد وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة جداء الرقمين اللذان تحملهما الكرتين المسحوبتين.

أ) عين القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي X وعرف قانون احتمالها.

ب) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

I. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; 2]$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

1. ادرس اتجاه تغير الدالة f .

2. بين أنه من أجل كل $x \in [1; 2]$ فإن: $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{4}{5}$

II. a عدد حقيقي، نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1} \end{cases}$$

1. جد قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

- في كل ما يلي نأخذ: $a = 1$.
- 2. أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $0 < u_n < 2$.
- ب- ادرس اتجاه تغير (u_n) ، ثم برر لماذا من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $1 \leq u_n < 2$ ؟
- ج- برر لماذا (u_n) متقاربة؟
- 3. أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $2 - u_{n+1} = f(u_n)(2 - u_n)$
- ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)$
- ج- استنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $0 < 2 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ ، ثم احسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

- 1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10.
 - 2) استنتج باقي قسمة العدد A_n على 108: حيث: $A_n = 2023^{16n+6} - 2 \times 39^{2n+3} + 108$.
 - 3) نعتبر العدد الطبيعي B_n حيث: $B_n = (3n + 4) \times 39^n + 2027^{2n+1}$ حيث n عدد طبيعي.
 - أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $B_n = (3n + 1) \times 3^{2n} [10]$.
 - ب- استنتج قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون B_n مضاعف للعدد 10.
 - 4) N عدد طبيعي يكتب على الشكل $\overline{\alpha\alpha 0 \alpha \alpha 0 2}$ في نظام التعداد ذي الأساس 3، ويكتب على الشكل $\overline{\beta 6 1 2}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7.
- أوجد العددين α و β ، ثم اكتب $(N + 5)$ في النظام العشري.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ ب: $h(x) = 1 + \ln x \times \ln(\ln x)$.

- 1) احسب $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.
- 2) أ- اثبت أنه من أجل $x \in]1; +\infty[$: $h'(x) = \frac{1 + \ln(\ln x)}{x}$

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) استنتج أنه من أجل $x \in]1; +\infty[$: $h(x) > 0$

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $]1; +\infty[$ ب: $f(x) = e^{x \ln(\ln x)}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- (1) عين نهاية الدالة f عند أطراف مجال تعريفها.
 - (2) أ- اثبت أن من أجل كل $x \in]1; +\infty[$ فإن: $f'(x) = \frac{h(x) \times f(x)}{\ln x}$
ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.
 - (3) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة e .
 - (4) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 1$.
 - (5) أنشئ (C_f) والمماس (T) .
- III.** لتكن الدالة K المعرفة على $]1; +\infty[$ كما يلي: $K(x) = \frac{e^{[f(x)]^2}}{[e^{f(x)}]^2}$.
- (1) احسب $K'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$.
 - (2) شكل جدول تغيرات الدالة K .

الموسم الدراسي: 1445 هـ / 23 - 2024 م



البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات
للسنة الثالثة ثانوي شعبة رياضيات
أستاذ المادة: مزروح يوسف

التاريخ : 2024/05/13

المدة: 4 ساعات ونصف

على المترشح إختيار احد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: 04 نقاط

تكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 1} + 1$ في الشكل المقابل المنحنى (C_f) الممثل للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) والمعرفة بالعلاقة $f(x) = \sqrt{x-1} + 1$ والمنصف الأول ذي المعادلة $y = x$

1 (أ) أعد رسم الشكل ثم مثل الحدود $u_0 ; u_1 ; u_2$

(ب) ماهو تخمينك حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 < u_n \leq 6$

3 تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

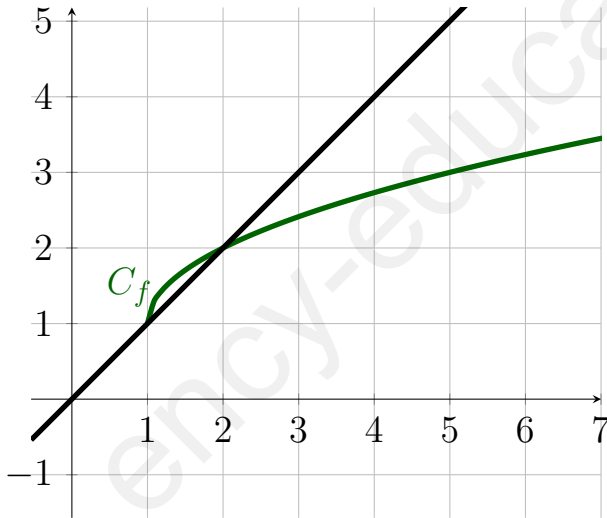
$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 1}(1 - \sqrt{u_n - 1})$$

4 إستنتج أن (u_n) متناقصة ثم بين انها متقاربة وعين نهايتها.

5 (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$0 \leq u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{2}(u_n - 2)$$

(ب) إستنتج أن $0 \leq u_n - 2 \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم عين نهاية (u_n)



التمرين الثاني: 05 نقاط

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط $D; C; B; A$ حيث : $z_D = 5$ و $z_C = \bar{z}_B$ ، $z_B = 4 + i\sqrt{3}$ ، $z_A = 1$

1 حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(\bar{z} - 1)(\bar{z}^2 - 8\bar{z} + 19) = 0$

2 (أ) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_A - z_B)^n$ عددا تخيليا صرفا جزؤه التخيلي سالب

(ب) عين طبيعة المثلث ABC

3 (أ) أكتب العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسّي ثم إستنتج أن A صورة D بتحويل نقطي يطلب تعيين عناصره.

(ب) عين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD

4 (أ) عين قيمة العدد الحقيقي α حتى يكون $\vec{AB} + \vec{AC} + \alpha \vec{AD} = \vec{0}$

(ب) إستنتج مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\|2\vec{MB} + 2\vec{MC} - 3\vec{MD}\| = \|\vec{MA} - \vec{MD}\|$

التمرين الثالث: 04 نقاط

نعتبر المعادلة $2024x - 1445y = 289 \dots (E)$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

1 بين أن $x \equiv 0 [17^2]$

2 عين الحل الخاص والذي يحقق $y_0 - x_0 = 463$ ثم إستنتج حلول المعادلة (E)

3 إستنتج قيم الأعداد الصحيحة α والتي تحقق الجملة :
$$\begin{cases} \alpha \equiv -149 [2024] \\ \alpha \equiv 140 [1445] \end{cases}$$

4 أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7

5 عين الثنائيات $(x; y)$ من $\mathbb{N}^2$ التي هي حلول للمعادلة (E) وتحقق $5^{4x} + 5^y \equiv 3 [7]$

التمرين الرابع: 07 نقاط

-I g_m دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g_m(x) = m(e^x + e^{-x}) - 2m + 1$ حيث m عدد حقيقي غير معدوم.

1 أدرس إتجاه تغير الدالة g_m . (ناقش حسب قيم m)

2 أحسب $g_m(0)$ ثم إستنتج إشارة $g_m(x)$. (في حالة $m > 0$ فقط)

-II f_m دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ ب: $f_m(x) = \frac{mxe^x - mx - 1}{e^x - 1}$. في بقية التمرين نفرض $m > 0$
(C_m) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 أحسب نهايات الدالة f_m عند أطراف مجموعة تعريفها.

2 (أ) بين أن $f'_m(x) = \frac{e^x \times g_m(x)}{(e^x - 1)^2}$ ثم أدرس إتجاه تغير الدالة f_m .

(ب) شكل جدول تغيرات الدالة f_m

3 (أ) بين أن المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = mx$ مقارب مائل لـ (C_m) بجوار $+\infty$.

(ب) أدرس الوضع النسبي لـ (C_m) و (Δ_m)

(ج) بين أن المستقيم (Δ'_m) ذو المعادلة $y = mx + 1$ مقارب مائل لـ (C_m) بجوار $-\infty$.

4 بين أن $f_m(-x) + f_m(x) = 1$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

5 (أ) ارسم (Δ_2) ، (Δ'_2) و (C_2) . (يعطى $f(0,6)^2 + f(-0,86)^2 = 0$)

(ب) بين أن جميع المستقيمات ذي المعادلات $y = nx + \frac{1}{2}$ تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيينها. حيث $(n \in \mathbb{R})$

(ج) ناقش بياننا وحسب قيم الوسيط الحقيقي n عدد وإشارة حلول المعادلة $f_2(x) = nx + \frac{1}{2}$

6 (أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم: $f_m(x) = mx - \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$

(ب) S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_m) و (Δ_m) والمستقيمات $x = 1$ و $x = 2$

بين أنه مهما تغير m فإن المساحة S ثابتة وتساوي $S = (\ln(e+1) - 1)u.a$

إنتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: 05 نقاط

I- يحتوي كيس على 10 كرات بيضاء و 10 كرات سوداء، كل الكرات متجانسة لانفرق بينها باللمس. ن سحب من الكيس n كرة على التوالي مع إرجاع الكرة المسحوبة بعد كل سحبة ($n \geq 2$)
نعتبر الحوادث التالية :

A : "الحصول على كرات من نفس اللون" B : "الحصول على كرة بيضاء واحدة فقط"
 C : "الحصول على كرات من اللونين" D : "الحصول على كرة بيضاء واحدة على الأكثر"

1 أحسب $P(A)$ و $P(B)$

2 بين أن $P(C) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$ و $P(C \cap D) = \frac{n}{2^n}$ و $P(D) = \frac{n+1}{2^n}$

3 بين أن الحدثان C و D مستقلان تكافئ $2^{n-1} = n+1$

II- نريد تعيين قيم n حتى يكون الحدثان C و D مستقلان
نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = 2^{x-1} - (x+1)$

1 بين أن f متزايدة تماما على $\left[\frac{\ln 2 - \ln(\ln(2))}{\ln 2}; +\infty \right[$ ومتناقصة تماما على $\left[0; \frac{\ln 2 - \ln(\ln(2))}{\ln 2} \right]$

2 شكل جدول تغيرات الدالة f ثم أحسب $f(3)$

3 إستنتج قيمة n حتى يكون الحدثان C و D مستقلان

III- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 2^{n-1} - (n+1)$
بين أن: $u_0 + u_1 + \dots + u_n = 2^n - \frac{n^2 + 3n + 3}{2}$

التمرين الثاني: 04 نقاط

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط $F; B; A$
حيث: $z_A = 1 - i$ ، $z_B = 2 + \sqrt{3} + i$ ، و $z_F = \frac{z_B}{z_A}$

1 حل في المجموعة $\mathbb{C}$ الجملة: $\begin{cases} (1+i)z_1 - z_2 = -(\sqrt{3} + i) \\ \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = 3 + \sqrt{3} \end{cases}$

2 (أ) اكتب z_A على الشكل الأسّي

(ب) بين أن : $z_F = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ ثم إستنتج الشكل الأسّي لـ z_B

(ج) هل توجد قيم للعدد الطبيعي n حتى تكون صورة $(z_F)^n$ تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2024$

3 (أ) اوجد لاحقة النقطة B' صورة B بالدوران r الذي مركزه النقطة O وزاويته $-\frac{\pi}{6}$

(ب) أحسب مساحة الدائرة (λ) ذات القطر $[BB']$

(ج) عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $\arg[(z - z_B)^2] = \arg(z_B) - \arg(z_{B'})$

4 عين مجموعة النقط M من المستوي والتي تحقق $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

التمرين الثالث: 04 نقاط

1 (أ) حلل كل من 1672 و 2024 إلى جداء عوامل أولية.

(ب) عين الأعداد الطبيعية n والتي تحقق $n^2 + 2n + 10 \equiv 0[n + 1]$

(ج) عين القيم الممكنة لـ $\text{pgcd}(n^2 + 2n + 10; n + 1)$

(د) إستنتج قيم العدد الطبيعي n بحيث : $\text{pgcd}(n^2 + 2n + 10; n + 1) = 3$

2 a, b و c أعداد طبيعية غير معدومة، حيث a اولي مع كل من b و c .

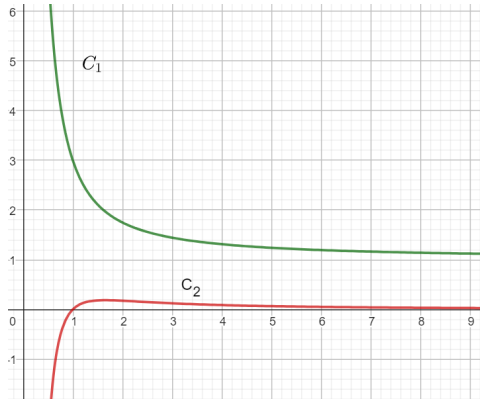
(أ) بإستعمال مبرهنة بيزو بين أن $\text{pgcd}(a; bc) = 1$

(ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ($n \geq 1$) فإن $\text{pgcd}(a; b^n) = 1$

(ج) إستنتج $\text{pgcd}(2024^{1672}; 1672^{2024})$

التمرين الرابع: 07 نقاط

-I h و w دالتان معرفتان على المجال $]0; +\infty[$ بـ $h(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ و $w(x) = \frac{\ln x}{x^2}$
تمثيلهما البياني في الشكل المقابل.



1 أنسب كل دالة لمنحنائها مع التعليل .

2 g دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{-\ln x + x^2 + x + 1}{x^2}$ إستنتج إشارة $g(x)$

-II f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{\ln x}{x} + \ln x + x + 1$ وحدة الطول $2cm$ (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس .

1 أحسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة تعريفها.

2 بين أن $f'(x) = g(x)$

3 أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4 بين أن المعادلة $x + \ln x = 0$ تقبل حل وحيد α يحقق $0.56 < \alpha < 0.57$

5 انشئ (C_f)

6 تحقق أن $f(x) = (\ln x + x)\left(\frac{1}{x} + 1\right)$ ثم عين الدالة الأصلية لـ f والتي تنعدم عند 1

7 S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات $y = 0$ ، $x = 1$ و $x = e$

بين أن $S = 2e(e + 2)cm^2$

8 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ :

$$u_n = \frac{1}{2} \int_1^n \left[\frac{f(x)}{\ln x + x} - 1 \right] dx$$

(أ) بين أن u_n متزايدة تماما على $\mathbb{N}^*$

(ب) بين أن $u_1 + u_2 + \dots + u_n = \ln \sqrt{n}!$

إنتهى الموضوع الثاني



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية



السنة الدراسية: 2023 / 2024
دورة: ماي 2024

ثانوية المجاهد قنطاس علي بني عمران
ثانوية علال العيشاوي اولاد هدا ج
امتحان بكالوريا التجريبي للتعليم الثانوي
الشعبة: رياضيات

المدة : 04 سا و 30 د

اختبار في مادة : الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول (04 نقاط):

- يحتوي كيس غير شفاف على 9 كريات متماثلة لا نفرق بينهما باللمس ، منها 4 سوداء تحمل الرقم α و ثلاث كريات صفراء تحمل الرقم $(\alpha - 1)$ (حيث α عدد طبيعي غير معدوم) و كريتين بيضاوين تحملان الرقم 1 .
نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريات في آن واحد .
(1) - أحسب احتمال الحوادث التالية :
A : " سحب على الأكثر كرية بيضاء " ، B : " سحب ثلاث كريات تحمل نفس العدد " C : " سحب كريتين بالضبط تحملان الرقم $(\alpha - 1)$ "
(2) - ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الأرقام المسجلة على الكريات السوداء المسحوبة و الذي يأخذ القيمة 0 إذا كانت كل الكريات ليست سوداء .
أ - عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X . ج - أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ بدلالة α .
ب - عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X . د - عين قيم α بحيث يكون $|E(X) - 1| \leq 2$.

التمرين الثاني (04 نقاط):

- (1) - نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول (x, y) : $2023x - 1444y = 7$ حيث x و y عدنان صحيحان .
أ - أثبت أن العددين 2023 و 1444 أوليان فيما بينهما ، ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولا في Z^2 .
ب - باستعمال خوارزمية إقليدس ، عين حلا خاصا (x_0, y_0) للمعادلة (E) ، ثم حل المعادلة (E) .
(2) - أ - أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لـ 2^n على 7 .
ب - جد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2025^{1444^{2021}}$ على 7 .
ج - عين قيم العدد الطبيعي n حيث يكون : $2021^n + 2022^n + 2023^n + 2024^n + 2025^n \equiv 0 [7]$.
(3) - (u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما ، حدها الأول u_0 و الثنائية $(u_0; u_1)$ حل للمعادلة (E) .
و ليكن N عدد طبيعي يكتب $u_0 0 u_1 0 u_2$ في نظام التعداد الذي أساسه 8 .
أ - عين u_0 ، u_1 و u_2 . ثم أكتب العدد N في النظام العشري .
ب - هل العدد N حد من حدود المتتالية (u_n) .

التمرين الثالث (05 نقاط):

- I - دالة معرفة على $]-\infty; 1]$ بـ : $f(x) = -1 - \sqrt{1-x}$ و تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
(1) - أ - أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
ب - عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .
(2) - عين إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$.
(3) - ارسم (C_f) و (Δ) .

- II- (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.
- (1) - مثل في الشكل السابق على محور الفواصل الحدود : u_0 ، u_1 و u_2 (دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء .
- (2) - ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .
- (3) - (أ) - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-3 \leq u_n \leq 0$.
 (ب) - ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
 (ج) - استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .
- (4) - (أ) - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-3; 0]$: $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$.
 (ب) - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{4}(u_n + 3) \leq u_{n+1} + 3 \leq \frac{1}{2}(u_n + 3)$.
 (ج) - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3 \leq u_n \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3$.
 (د) - استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

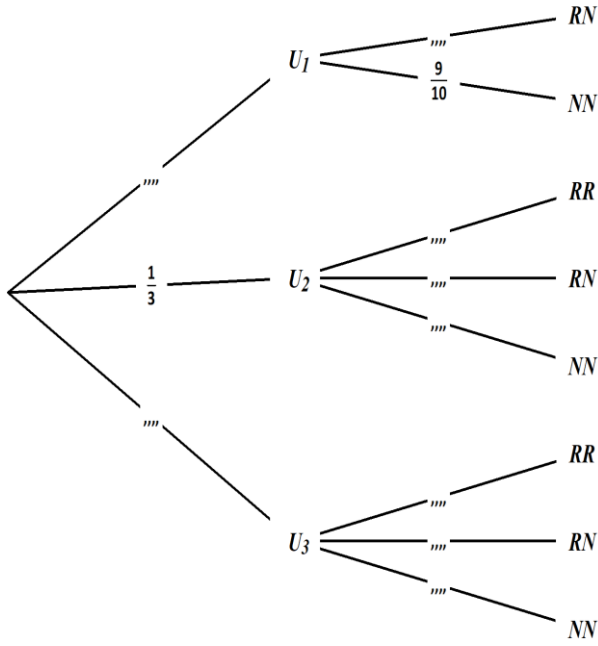
التمرين الرابع (07 نقاط):

- نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - e + \ln[1 + 2e^{-2(x-e)}]$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) - (أ) - تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -x + e + \ln[2 + e^{2(x-e)}]$.
 (ب) - احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 (ج) - ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .
- (2) - (أ) - بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين متقاربين (D) و (D') يطلب تعيين معادلتاهما .
 (ب) - ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيمين المقاربين (D) و (D') .
 (ج) - بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $x = \frac{1}{2} \ln 2 + e$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f) .
- (3) - ارسم (Δ) ، (D) ، (D') و (C_f) .
- (4) - ليكن المستقيم (D_m) الذي معادلته : $y = mx - m\left(e + \frac{\ln 2}{2}\right) + \frac{\ln 2}{2}$ حيث m وسيط حقيقي .
 (أ) - بين أن جميع المستقيمات (D_m) تشمل نقطة ثابتة A يطلب تعيين إحداثياتها .
 (ب) - ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقاط تقاطع المستقيم (D_m) و المنحنى (C_f) .
- (5) - نضع : $I = \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} [f(x) - (x - e)] dx$ ، $I_n = \int_0^1 \ln(1 + x^n) dx$ ، n عدد طبيعي غير معدوم
 (أ) - فسر هندسيا العدد I و احسب العدد I_1 . (ب) - بين أن : $0 \leq I_n \leq \ln 2$.
 (ج) - عين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتج أنها متقاربة .
- (6) - باستعمال $\ln(1 + x) \leq x$ من أجل كل : $x \in]0; +\infty[$
 (أ) - استنتج أن : $\int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$ ، $0 \leq I + I_1 \leq$ (ب) - اعط حصرا للعدد $I + I_1$.



الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)



نعتبر الصناديق الثلاثة U_1 ، U_2 و U_3 حيث:

الصندوق U_1 يحتوي على كرية حمراء واحدة و 19

كرية سوداء والصندوق U_2 على كرتين حمراوين و 18

كرية سوداء، والصندوق U_3 يحتوي على 3 كريات

حمراء و 17 كرية سوداء.

- نختار عشوائيا صندوقا من الصناديق الثلاثة ثم نسحب منه كرتين في آن واحد.

يرمز RR إلى الحدث "الحصول على كرتين حمراوين"

و NN "الحصول على كرتين سوداوين"

و RN "الحصول على كرتين مختلفتين في اللون".

(1) احسب احتمال الاحداث التالية:

A: "يكون السحب من الصندوق U_1 ".

B: "الحصول على كرتين سوداوين علما اننا سحبنا

الصندوق U_2 ".

C: "الحصول على كرتين مختلفتين في اللون".

(2) - أ- انقل ثم اكمل شجرة الاحتمالات "الشكل المقابل".

ب- علما اننا حصلنا على كرتين حمراوين، ما احتمال ان يكون السحب من الصندوق U_3 .

(3) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة.

أ- عين قيم المتغير العشوائي X .

ب- اوجد قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم احسب أمله الرياضي.

(4) احسب احتمال الحدث D: " $\frac{X^2 + 1}{\ln(X - 1)}$ ".

التمرين الثاني: (04 نقاط)

$$\begin{cases} 2z_1 + iz_2 = 1 + i\sqrt{3} \\ (\sqrt{3} + 2i)z_1 - z_2 = (1 - \sqrt{3})i \end{cases}$$

(1) - عين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث:

(2) - في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين

$$z_A = 1 - i \quad \text{و} \quad z_B = 2 + \sqrt{3} + i$$

أ- اكتب z_A على الشكل الأسّي. ب- بين أن: $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ ثم استنتج الشكل الاسي للعدد z_B .

ج- هل توجد قيم للعدد الطبيعي n حتى تكون صورة العدد $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$ تنتمي الى النصف الأول؟

(3)- أ- اوجد لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه النقطة O وزاويته $-\frac{\pi}{6}$.

ب- احسب مساحة الدائرة (C) التي قطرها [BD] مقدرة بوحدة المساحة.

(4)- عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $\text{Arg}\left[(z - z_B)^2\right] = \text{Arg}(z_B) - \text{Arg}(z_D)$

(5)- لتكن النقطة C ذات اللاحقة $z_C = 1 + i$ ، - عين طبيعة المثلث ABC ثم استنتج بدقة الرباعي ACBD



التمرين الثالث: (05 نقاط)

- $\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = 3y_n + 8 \end{cases}$ و $\begin{cases} x_0 = 5 \\ x_{n+1} = 3x_n - 2 \end{cases}$: (x_n) ، (y_n) متتايتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ :
- (1) - (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = x_n - 1$.
 (أ) - بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
 (ب) - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $x_n = 4 \times 3^n + 1$.
- (2) - بين أن $\text{PGCD}(x_n; x_{n+1}) = 1$: $\text{PGCD}(x_n; x_{n+1})$ يقسم العدد 2 ثم استنتج أن : $\text{PGCD}(x_n; x_{n+1}) = 1$.
- (3) - (أ) - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $5x_n - 4y_n = 21$.
 (ب) - استنتج عبارة y_n بدلالة n ثم أوجد القيم الممكنة لـ $\text{PGCD}(x_n; y_n)$.
- (4) - (أ) - عين بواقي قسمة العدد 3^n على 7 من أجل كل عدد طبيعي n .
 (ب) - بين أنه إذا كان $n \equiv 5[6]$ فإن $\text{PGCD}(x_n; y_n) = 7$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (1 - 2x)e^{2x}$
- نسمي المنحنى (C_f) الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 2cm)
- (I) - (1) - أحسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.
 (2) - أحسب عبارة $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .
 (3) - شكل جدول تغيرات الدالة f .
 (4) - حل المعادلة $f(x) = 0$ ثم استنتج نقاط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل .
 (5) - أحسب $f(1)$ ثم أرسم (C_f) .
 (6) - ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي m التالية :
 $f(x) = f(m) \dots (E)$
- (7) - (أ) - عين العددين الحقيقيين a ، b بحيث تكون الدالة F المعرفة بـ : $F(x) = (ax + b)e^{2x}$ دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.
 (ب) - أحسب بـ cm^2 و بدلالة λ المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمت التي معادلاتها $y = 0$ ، $x = \frac{1}{2}$ و $x = \lambda$ حيث $\lambda < \frac{1}{2}$ ثم احسب $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} S(\lambda)$.
- (II) - نسمي $f^{(1)} = f'$ ، $f^{(2)} = f''$ ، $f^{(3)} = f'''$ ، ، $f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة f .
- (1) - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $f^{(n)} = 2^n (1 - n - 2x)$.
- (2) - من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n المنحنى $(C_{f^{(n)}})$ الممثل للدالة $f^{(n)}$ حيث $f^{(n)}$ الدالة المشتقة من الرتبة n للدالة f يقبل مماسا يوازي حامل محور الفواصل في النقطة $M(x_n; y_n)$.
 - أحسب بدلالة كلا من x_n و y_n .

بالتوفيق في شهادة البكالوريا