مطابق للمنهاج الجديد
لوزارة التربية الوطنية
**الجيل الثاني**

# الدليـــــــل في مــادة
# الرياضيـــــــــــات
# لمترشح
# شهادة التعليم المتوسط

**حوليات شهادة التعليم المتوسط**
**من 2007 إلى 2020**
**مع حلولها المفصلة**

**+**

**أكثر من 150 تمرين و مسألة نموذجية**

**معاملات المواد و مدة الاختبار**
**في امتحان شهادة التعليم المتوسط**

| المـــــــــادة | مدة الامتحان | المعامل |
|---|---|---|
| اللغة العربية | 2 ساعة | 5 |
| اللغة الفرنسية ( اللغة الأجنبية الأولى) | 2 ساعة | 3 |
| اللغة الإنجليزية ( اللغة الأجنبية الثانية) | ساعة و نصف | 2 |
| اللغة الأمازيغية | ساعة و نصف | 2 |
| الرياضيات | 2 ساعة | 4 |
| التربية الإسلامية | 1 ساعة | 2 |
| التاريخ و الجغرافيا | 1 ساعة و نصف | 3 |
| التربية المدنية | ساعة | 1 |
| علوم الطبيعة و الحياة | 1 ساعة و نصف | 2 |
| علوم فيزيائية و تكنولوجيا | 1 ساعة و نصف | 2 |
| التربية البدنية و الرياضة | | 1 |

**جدول سير اختبارات**
**امتحان شهادة التعليم المتوسط**

| الأيام / التوقيت | اليوم الأول | اليوم الثاني | اليوم الثالث |
|---|---|---|---|
| **من : 08:30 إلى :10:30** | **اللغة العربية** | **الرياضيات** | **الغة الفرنسية** |
| **من : 11:00 إلى :12:30** | **علوم فيزيائية و تكنولوجيا** | **اللغة الإنجليزية** | **علوم الطبيعة و الحياة** |
| | | | |
| **من : 14:30 إلى :15:30** | **التربية الإسلامية** | | |
| **من : 14:30 إلى :16:00** | | **التاريخ و الجغرافيا** | **اللغة الأمازيغية** |
| **من : 16:00 إلى :17:00** | **التربية المدنية** | | |

# التدريج السنوي لمادة الرياضيات – السنة الرابعة متوسط

## 2021 – 2020

**الحجم الساعي الأسبوعي :**
**5 ساعات للتلميذ**
**6 ساعات للأستاذ**

**( لم يتم تغيير هذا التدريج حسب الإجراءات الصحية التي اتخذت لمكافحة جائحة كورونا)**

| | | |
|---|---|---|
| | **الفصل الأول** ( 12 أسبوع) | |
| **الحجم الساعي** | **رقم الباب** | **الأبـــــــــــواب** |
| 33 ساعة | 01 | الأعداد الطبيعية و الأعداد الناطقة و ( القاسم المشترك الأكبر) |
| | 02 | الحساب على الجذور |
| | 09 | خاصية طالس |
| 15 ساعة | 03 | الحساب الحرفي : ( النشر و التحليل و المتطابقات الشهيرة ) |
| 12 ساعة | 10 | حساب المثلثات في مثلث قائم و (نظرية فيثاغورث) |
| | **الفصل الثاني** ( 10 أسابيع) | |
| **الحجم الساعي** | **رقم الباب** | **الأبـــــــــــواب** |
| 28 ساعة | 04 | المعادلات و المتراجحات |
| | 11 | الأشعة و الانسحاب |
| | 12 | الأشعة في معلم |
| 22 ساعة | 05 | جملة معادلتين بمجهولين |
| | 06 | الدالة الخطية و التناسبية |
| | 07 | الدالة التآلفية |
| | **الفصل الثالث** ( 06 أسابيع) | |
| **الحجم الساعي** | **رقم الباب** | **الأبـــــــــــواب** |
| 12 ساعة | 08 | الإحصاء |
| 18 ساعة | 13 | الدوران - الزوايا - المضلعات المنتظمة |
| | 14 | الهندسة في الفضاء |

| الحوليات : | الدروس المعالجة خلال الحوليات من 2007 إلى 2020 | الصفحة |
|---|---|---|
| **جوان 2007** | | |
| التمرين 1 | الحساب على الجذور | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين 2 | الحساب الحرفي* | **14** |
| التمرين 3 | جملة معادلتين | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين 4 | نظرية طالس + نظرية فيتاغورث | **65** |
| المسألة | الدالة الخطية - الدالة التآلفية | **50** |
| **جوان 2008** | | |
| التمرين 1 | القاسم المشترك الأكبر | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين 2 | الحساب الحرفي*+ الحساب على الجذور | **21** |
| التمرين 3 | حساب المثلثات + نظرية طالس + نظرية فيثاغورث | **74** |
| التمرين 4 | الدالة الخطية - الدالة التآلفية | **22** |
| المسألة | جملة معادلتين بمجهولين | **غير متوفر حاليا** |
| **جوان 2009** | | |
| التمرين 1 | الحساب على الجذور | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين 2 | الحساب الحرفي* | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين 3 | الدوران | **عن قريب** |
| التمرين 4 | جملة معادلتين | **غير متوفر حاليا** |
| المسألة | الدالة الخطية - الدالة التآلفية | **59** |
| **جوان 2010** | | |
| التمرين 1 | جملة معادلتين | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين 2 | القاسم المشترك الأكبر | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين 3 | الدوران + الأشعة و الانسحاب - الأشعة في معلم | **عن قريب** |
| التمرين 4 | نظرية طالس | **64** |
| المسألة | حساب المثلثات + جملة معادلتين | **76** |
| **جوان 2011** | | |
| التمرين 1 | الحساب الحرفي* | **13** |
| التمرين 2 | الحساب على الجذور | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين 3 | حساب المثلثات | **68** |
| التمرين 4 | الدوران | **عن قريب** |
| المسألة | الدالة الخطية - الدالة التآلفية | **34** |
| **جوان 2012** | | |
| التمرين 1 | الحساب على الجذور | **9** |
| التمرين 2 | الحساب الحرفي* | **17** |
| التمرين 3 | الدوران | **عن قريب** |
| التمرين 4 | الأشعة و الانسحاب - الأشعة في معلم | **86** |
| المسألة | الدالة الخطية - الدالة التآلفية | **36** |
| **جوان 2013** | | |
| التمرين 1 | الحساب على الجذور | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين 2 | الحساب الحرفي* | **19** |
| التمرين 3 | حساب المثلثات + نظرية طالس | **73** |
| التمرين 4 | الأشعة و الانسحاب - الأشعة في معلم | **78** |
| المسألة | الدالة الخطية - الدالة التآلفية | **47** |
| **جوان 2014** | | |
| التمرين 1 | الحساب على الجذور | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين 2 | الحساب الحرفي* | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين 3 | حساب المثلثات | **69** |
| التمرين 4 | الأشعة و الانسحاب - الأشعة في معلم + فيثاغورث | **83** |
| المسألة | الدالة الخطية - الدالة التآلفية | **39** |

| | | |
|---|---|---|
| **جوان 2015** | | |
| التمرين 1 | القاسم المشترك الأكبر | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين 2 | الحساب الحرفي+ الحساب على الجذور | **20** |
| التمرين 3 | الدوران | **عن قريب** |
| التمرين 4 | نظرية طالس + نظرية فيتاغورث | **66** |
| المسألة | الدالة الخطية - الدالة التآلفية | **53** |
| **جوان 2016** | | |
| التمرين 1 | القاسم المشترك الأكبر + الحساب على الجذور | **11** |
| التمرين 2 | الحساب الحرفي+ الحساب على الجذور | **18** |
| التمرين 3 | الدالة الخطية - الدالة التآلفية | **28** |
| التمرين 4 | الأشعة و الانسحاب | **89** |
| المسألة | الدوران + حساب المثلثات + نظرية طالس | **عن قريب** |
| **جوان 2017** | | |
| التمرين 1 | الحساب على الجذور+ المتطابقات الشهيرة | **12** |
| التمرين 2 | الحساب الحرفي* | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين 3 | الدوران | **عن قريب** |
| التمرين 4 | حساب المثلثات + نظرية طالس | **71** |
| المسألة | الدالة الخطية - الدالة التآلفية | **56** |
| **جوان 2018** | | |
| التمرين 1 | الحساب على الجذور | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين 2 | الحساب الحرفي* | **15** |
| التمرين 3 | حساب المثلثات + نظرية طالس + نظرية فيثاغورث | **72** |
| التمرين 4 | نظرية فيثاغورث | **غير متوفر حاليا** |
| المسألة | الدالة الخطية - الدالة التآلفية | **42** |
| **جوان 2019** | | |
| التمرين 1 | الحساب على الجذور | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين 2 | الحساب الحرفي* | **16** |
| التمرين 3 | حساب المثلثات + نظرية طالس + نظرية فيثاغورث | **75** |
| التمرين 4 | الدوران - الزوايا - المضلعات المنتظمة | **عن قريب** |
| المسألة | الدالة الخطية و الدالة التآلفية | **45** |
| **سبتمبر 2020** | | |
| التمرين 1 | الحساب على الجذور | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين 2 | الحساب الحرفي* | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين 3 | الدوران - الزوايا - المضلعات المنتظمة + حساب المثلثات | **عن قريب** |
| التمرين 4 | الأشعة و الانسحاب - الأشعة في معلم | **81** |
| المسألة | القاسم المشترك الأكبر + النسب المؤوية | **غير متوفر حاليا** |

# قائمة الدروس المعالجة في حوليات إ.ش.ت.م من 2007 إلى 2020

مرتبة من الأسهل إلى الأصعب


| رقم التمرين | السنة | الأبـــــــــواب | الصفحة |
|---|---|---|---|
| **الباب: 01** | | **الأعداد الطبيعية و الأعداد الناطقة و ( القاسم المشترك الأكبر)** | |
| التمرين الأول | 2015 | القاسم المشترك الأكبر | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين الأول | 2008 | القاسم المشترك الأكبر | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين الثاني | 2010 | القاسم المشترك الأكبر | **غير متوفر حاليا** |
| مسألة | 2020 | القاسم المشترك الأكبر + النسب المؤوية | **غير متوفر حاليا** |
| **الباب: 02** | | **الحساب على الجذور** | |
| التمرين الأول | 2020 | الحساب على الجذور | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين الأول | 2014 | الحساب على الجذور | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين الثاني | 2011 | الحساب على الجذور | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين الأول | 2018 | الحساب على الجذور | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين الأول | 2013 | الحساب على الجذور | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين الأول | 2012 | الحساب على الجذور | **9** |
| التمرين الأول | 2009 | الحساب على الجذور | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين الأول | 2019 | الحساب على الجذور | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين الأول | 2007 | الحساب على الجذور | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين الأول | 2016 | الحساب على الجذور + القاسم المشترك الأكبر | **11** |
| التمرين الأول | 2017 | الحساب على الجذور+ المتطابقات الشهيرة | **12** |
| **الباب: 03+04** | | **الحساب الحرفي* : ( النشر و التحليل و المتطابقات الشهيرة ) + المعادلات و المتراجحات** | |
| التمرين الثاني | 2014 | الحساب الحرفي* | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين الثاني | 2017 | الحساب الحرفي* | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين الثاني | 2009 | الحساب الحرفي* | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين الثاني | 2020 | الحساب الحرفي* | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين الأول | 2011 | الحساب الحرفي* | **13** |
| التمرين الثاني | 2007 | الحساب الحرفي* | **14** |
| التمرين الثاني | 2018 | الحساب الحرفي* | **15** |
| التمرين الثاني | 2019 | الحساب الحرفي* | **16** |
| التمرين الثاني | 2012 | الحساب الحرفي* | **17** |
| التمرين الثاني | 2016 | الحساب الحرفي* | **18** |
| التمرين الثاني | 2013 | الحساب الحرفي* | **19** |
| التمرين الثاني | 2015 | الحساب الحرفي* + الحساب على الجذور* | **20** |
| التمرين الثاني | 2008 | الحساب الحرفي* + الحساب على الجذور* | **21** |
| **الباب: 05** | | **جملة معادلتين بمجهولين** | |
| التمرين الأول | 2010 | جملة معادلتين بمجهولين | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين الثالث | 2007 | جملة معادلتين بمجهولين | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين الرابع | 2009 | جملة معادلتين بمجهولين | **غير متوفر حاليا** |
| مسألة | 2008 | جملة معادلتين بمجهولين | **غير متوفر حاليا** |
| **الباب: 06+07** | | **الدالة الخطية و التناسبية - الدالة التآلفية** | |
| التمرين الرابع | 2008 | الدالة الخطية و التناسبية - الدالة التآلفية | **22** |
| التمرين الثالث | 2016 | الدالة الخطية و التناسبية - الدالة التآلفية | **28** |
| مسألة | 2011 | الدالة الخطية و التناسبية - الدالة التآلفية | **34** |
| مسألة | 2012 | الدالة الخطية و التناسبية - الدالة التآلفية | **36** |
| مسألة | 2014 | الدالة الخطية و التناسبية - الدالة التآلفية | **39** |
| مسألة | 2018 | الدالة الخطية و التناسبية - الدالة التآلفية | **42** |
| مسألة | 2019 | الدالة الخطية و التناسبية - الدالة التآلفية | **45** |

| | السنة | الأبـــــــــواب | الصفحة |
|---|---|---|---|
| **الباب: 06+07** | | **الدالة الخطية و التناسبية - الدالة التآلفية** | |
| مسألة | 2013 | الدالة الخطية و التناسبية - الدالة التآلفية | **47** |
| مسألة | 2007 | الدالة الخطية و التناسبية - الدالة التآلفية | **50** |
| مسألة | 2015 | الدالة الخطية و التناسبية - الدالة التآلفية | **53** |
| مسألة | 2017 | الدالة الخطية و التناسبية - الدالة التآلفية | **56** |
| مسألة | 2009 | الدالة الخطية و التناسبية - الدالة التآلفية | **59** |
| **الباب: 08** | | **الإحصاء** | |
| **ملاحظة** : لم تتم معالجة درس "الإحصاء" خلال حوليات إ.ش.ت.م من 2007 إلى 2020 | | | |
| **الباب: 09** | | **خاصية طالس** | |
| تمارين تطبيقية | | نظرية طالس | **62** |
| تمارين تطبيقية | | نظرية طالس العكسية | **63** |
| التمرين الرابع | 2010 | نظرية طالس | **64** |
| التمرين الرابع | 2007 | نظرية طالس + نظرية فيثاغورث | **65** |
| التمرين الرابع | 2015 | نظرية طالس + نظرية فيثاغورث | **66** |
| **الباب: 10** | | **حساب المثلثات في مثلث قائم و (نظرية فيثاغورث)** | |
| تمارين تطبيقية | | حساب المثلثات | **67** |
| التمرين الرابع | 2018 | نظرية فيثاغورث | **غير متوفر حاليا** |
| التمرين الثالث | 2011 | حساب المثلثات | **68** |
| التمرين الثالث | 2014 | حساب المثلثات | **69** |
| التمرين الرابع | 2017 | حساب المثلثات + نظرية طالس | **71** |
| التمرين الثالث | 2018 | حساب المثلثات + نظرية طالس + نظرية فيثاغورث | **72** |
| التمرين الثالث | 2013 | حساب المثلثات + نظرية طالس | **73** |
| التمرين الثالث | 2008 | حساب المثلثات + نظرية طالس + نظرية فيثاغورث | **74** |
| التمرين الثالث | 2019 | حساب المثلثات + نظرية طالس + نظرية فيثاغورث | **75** |
| مسألة | 2010 | حساب المثلثات + جملة معادلتين | **76** |
| **الباب:11 + 12** | | **الأشعة و الانسحاب - الأشعة في معلم** | |
| التمرين الرابع | 2013 | الأشعة و الانسحاب - الأشعة في معلم | **78** |
| التمرين الرابع | 2020 | الأشعة و الانسحاب - الأشعة في معلم | **81** |
| التمرين الرابع | 2014 | الأشعة و الانسحاب - الأشعة في معلم+ نظرية فيثاغورث | **83** |
| التمرين الرابع | 2012 | الأشعة و الانسحاب - الأشعة في معلم | **86** |
| التمرين الرابع | 2016 | الأشعة و الانسحاب | **89** |
| **الباب: 13** | | **الدوران - الزوايا - المضلعات المنتظمة** | |
| التمرين الثالث | 2009 | الدوران - الزوايا - المضلعات المنتظمة | **عن قريب** |
| التمرين الثالث | 2010 | الدوران - الزوايا - المضلعات المنتظمة | **عن قريب** |
| التمرين الرابع | 2011 | الدوران - الزوايا - المضلعات المنتظمة | **عن قريب** |
| التمرين الثالث | 2017 | الدوران - الزوايا - المضلعات المنتظمة | **عن قريب** |
| التمرين الثالث | 2012 | الدوران - الزوايا - المضلعات المنتظمة | **عن قريب** |
| التمرين الثالث | 2015 | الدوران - الزوايا - المضلعات المنتظمة | **عن قريب** |
| مسألة | 2016 | الدوران - الزوايا - المضلعات المنتظمة | **عن قريب** |
| التمرين الرابع | 2019 | الدوران - الزوايا - المضلعات المنتظمة | **عن قريب** |
| التمرين الثالث | 2020 | الدوران - الزوايا - المضلعات المنتظمة | **عن قريب** |
| **الباب: 14** | | **الهندسة في الفضاء** | |
| **ملاحظة** : لم تتم معالجة درس **"الهندسة في الفضاء"** خلال حوليات إ.ش.ت.م من 2007 إلى 2020 و إن تمت معالجة جزء **"المساحات و الأحجام"** في مسألة 2009 | | | |

**التمرين الأول :** (3 نقط)
امتحان شهادة التعليم المتوسط (2012)
ليكن العددان الحقيقيان m و n حيث :
$n = (\sqrt{7}+3)(4-\sqrt{7})$ ,
$m = \sqrt{112} - 3\sqrt{28} + 3\sqrt{7} - \sqrt{25}$
1) اكتب كلا من العددين m و n على الشكل $a\sqrt{7}+b$ بحيث a و b عددان نسبيان.
2) بيّن أنّ الجداء m x n عدد ناطق.
3) اجعل مقام النسبة $\frac{\sqrt{7}-5}{\sqrt{7}}$ عددا ناطقا.

**التمرين الأول :** (حسب نموذج 2012)
ليكن العددان الحقيقيان m و n حيث :
$n = (-4+\sqrt{12})(\sqrt{12}+5)$
$m = \sqrt{432} - \sqrt{108} - \sqrt{48} + \sqrt{64}$
1) اكتب كلا من العددين m و n على الشكل $a\sqrt{12}+b$ بحيث a و b عددان نسبيان.
2) بيّن أنّ الجداء m x n عدد ناطق.
3) اجعل مقام النسبة $\frac{\sqrt{12}+8}{\sqrt{12}}$ عددا ناطقا.

**التمرين الثاني :** (حسب نموذج 2012)
ليكن العددان الحقيقيان m و n حيث :
$n = (\sqrt{6}+4)(\sqrt{6}-3)$
$m = 2\sqrt{150} - \sqrt{54} - 3\sqrt{24} + \sqrt{36}$
1) اكتب كلا من العددين m و n على الشكل $a\sqrt{6}+b$ بحيث a و b عددان نسبيان.
2) بيّن أنّ الجداء m x n عدد ناطق.
3) اجعل مقام النسبة $\frac{\sqrt{6}+6}{\sqrt{6}}$ عددا ناطقا.

**التمرين الثالث :** (حسب نموذج 2012)

ليكن العددان الحقيقيان m و n حيث :
$n = (\sqrt{5}-2)(3+\sqrt{5})$
$m = 2\sqrt{80} - \sqrt{125} - \sqrt{20} + \sqrt{1}$
1) اكتب كلا من العددين m و n على الشكل $a\sqrt{5}+b$ بحيث a و b عددان نسبيان.
2) بيّن أنّ الجداء m x n عدد ناطق.
3) اجعل مقام النسبة $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}$ عددا ناطقا.

**حل التمرين الأول لامتحان شهادة التعليم المتوسط :**
**1) كتابة m و n على شكل $a\sqrt{7}+b$ :**
$m = \sqrt{112} - 3\sqrt{28} + 3\sqrt{7} - \sqrt{25}$
$m = \sqrt{16x7} - 3\sqrt{4x7} + 3\sqrt{7} - 5$
$\mathbf{m = \sqrt{7} - 5}$
$n = (\sqrt{7}+3)(4-\sqrt{7})$
$n = 4\sqrt{7} - 7 + 12 - 3\sqrt{7}$
$\mathbf{n = \sqrt{7} + 5}$

**2) حساب m x n :**
$\mathbf{m \times n} = (\sqrt{7}-5)(\sqrt{7}+5)$
$= \sqrt{7}^2 - 5^2 = 7 - 25 = \mathbf{-18}$

**3) جعل مقام النسبة $\frac{\sqrt{7}-5}{\sqrt{7}}$ ناطق :**
$\frac{\sqrt{7}-5}{\sqrt{7}} = \frac{(\sqrt{7}-5)\sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{7-5\sqrt{7}}{7}$

**التمرين الرابع :** (حسب نموذج 2012)
ليكن العددان الحقيقيان m و n حيث :
$n = (\sqrt{8}+3)(-2+\sqrt{8})$
$m = \sqrt{968} - 2\sqrt{72} - 2\sqrt{32} - \sqrt{4}$
1) اكتب كلا من العددين m و n على الشكل $a\sqrt{8}+b$ بحيث a و b عددان نسبيان.
2) بيّن أنّ الجداء m x n عدد ناطق.
3) اجعل مقام النسبة $\frac{\sqrt{8}-2}{\sqrt{8}}$ عددا ناطقا.

**التمرين الخامس :** (حسب نموذج 2012)
ليكن العددان الحقيقيان m و n حيث :
$n = (\sqrt{5}-3)(4+\sqrt{5})$
$m = \sqrt{500} - \sqrt{245} - \sqrt{20} + \sqrt{49}$
1) اكتب كلا من العددين m و n على الشكل $a\sqrt{5}+b$ بحيث a و b عددان نسبيان.
2) بيّن أنّ الجداء m x n عدد ناطق.
3) اجعل مقام النسبة $\frac{\sqrt{5}+7}{\sqrt{5}}$ عددا ناطقا.

**التمرين السادس :** (حسب نموذج 2012)
ليكن العددان الحقيقيان m و n حيث :
$n = (\sqrt{7}+2)(-1+\sqrt{7})$
$m = \sqrt{1183} - \sqrt{343} - \sqrt{175} - \sqrt{25}$
1) اكتب كلا من العددين m و n على الشكل $a\sqrt{7}+b$ بحيث a و b عددان نسبيان.
2) بيّن أنّ الجداء m x n عدد ناطق.
3) اجعل مقام النسبة $\frac{\sqrt{7}-5}{\sqrt{7}}$ عددا ناطقا.

## حلـــــــــــــــول نماذج التمرين الأول (دورة 2012) :

**التمرين الأول :**

1) كتابة m و n على شكل $a\sqrt{12}+b$ :

$n=(-4+\sqrt{12})(\sqrt{12}+5)$

$n=-4\sqrt{12}+12-20+5\sqrt{12}$

**$n=\sqrt{12}-8$**

$m=\sqrt{432}\quad -\sqrt{108}\quad -\sqrt{48}\quad +\sqrt{64}$

$m=\sqrt{36x12}\quad -\sqrt{9x12}\quad -\sqrt{4x12}\quad +\sqrt{64}$

$m=\sqrt{36}\,x\sqrt{12}\quad -\sqrt{9}\,x\sqrt{12}\quad -\sqrt{4}\,x\sqrt{12}\quad +8$

$m=6\sqrt{12}\quad -3\sqrt{12}\quad -2\sqrt{12}\quad +8$

$m=6\sqrt{12}\quad -5\sqrt{12}\quad +8$

**$m=\sqrt{12}+8$**

**2) حساب m x n :**

$m\times n=(\sqrt{12}+8)(\sqrt{12}-8)$

$=\sqrt{12}^2-8^2=12-64=-52$ , $m\times n=$ **-52**

**3) جعل مقام النسبة $\frac{\sqrt{12}+8}{\sqrt{12}}$ ناطق :**

$\frac{\sqrt{12}-5}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{12}x(\sqrt{12}+8)}{\sqrt{12}x\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{12}^2+8\sqrt{12}}{\sqrt{12}^2}=\frac{12+8\sqrt{12}}{12}$

**التمرين الثاني :**

1) كتابة m و n على شكل $a\sqrt{6}+b$ :

$n=(\sqrt{6}-3)(\sqrt{6}+4)$

$n=6-3\sqrt{6}+4\sqrt{6}-12$

**$n=\sqrt{6}-6$**

$m=2\sqrt{150}\quad -\sqrt{54}\quad -3\sqrt{24}\quad +\sqrt{36}$

$m=2\sqrt{25x6}\quad -\sqrt{9x6}\quad -3\sqrt{4x6}\quad +6$

$m=2\sqrt{25}\,x\sqrt{6}\quad -\sqrt{9}\,x\sqrt{6}\quad -3\sqrt{4}\,x\sqrt{6}\quad +6$

$m=10\sqrt{6}\quad -3\sqrt{6}\quad -6\sqrt{6}\quad +6$

$m=10\sqrt{6}\quad -9\sqrt{6}\quad +6$

**$m=\sqrt{6}+6$**

**2) حساب m x n :**

$m\times n=(\sqrt{6}+6)(\sqrt{6}-6)$

$=\sqrt{6}^2-6^2=6-36=-30$ , $m\times n=$ **-30**

**3) جعل مقام النسبة $\frac{\sqrt{6}+6}{\sqrt{6}}$ ناطق :**

$\frac{\sqrt{6}+6}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}x(\sqrt{6}+6)}{\sqrt{6}x\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6^2}+6\sqrt{6}}{\sqrt{6^2}}=\frac{6+6\sqrt{6}}{6}$

**التمرين الثالث :**

1) كتابة m و n على شكل $a\sqrt{5}+b$ :

$n=(\sqrt{5}-2)(3+\sqrt{5})$

$n=3\sqrt{5}-6+5-2\sqrt{5}$

**$n=\sqrt{5}-1$**

$m=2\sqrt{80}\quad -\sqrt{125}\quad -\sqrt{20}\quad +\sqrt{1}$

$m=2\sqrt{16}\,x\sqrt{5}\quad -\sqrt{25}\,x\sqrt{5}\quad -\sqrt{4}\,x\sqrt{5}\quad +1$

$m=8\sqrt{5}\quad -5\sqrt{5}\quad -2\sqrt{5}\quad +1$

$m=8\sqrt{5}\quad -7\sqrt{5}\quad +1$

**$m=\sqrt{5}+1$**

**2) حساب m x n :**

$m\times n=(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)$

$=\sqrt{5}^2-1^2=5-1=4$ , $m\times n=$ **4**

**3) جعل مقام النسبة $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}$ ناطق :**

$=\frac{\sqrt{5}x(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}x\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{5+\sqrt{5}}{5}\quad \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}$

**التمرين الرابع :**

1) كتابة m و n على شكل $a\sqrt{8}+b$ :

$n=(\sqrt{8}+3)(-2+\sqrt{8})$

$n=-2\sqrt{8}-6+8+3\sqrt{8}$

**$n=\sqrt{8}+2$**

$m=\sqrt{968}\quad -2\sqrt{72}\quad -2\sqrt{32}\quad -\sqrt{4}$

$m=\sqrt{121x8}\quad -2\sqrt{9x8}\quad -2\sqrt{4x8}\quad -\sqrt{4}$

$m=\sqrt{121}\,x\sqrt{8}\quad -2\sqrt{9}\,x\sqrt{8}\quad -2\sqrt{4}\,x\sqrt{8}\quad -2$

$m=11\sqrt{8}\quad -6\sqrt{8}\quad -4\sqrt{8}\quad -2$

$m=11\sqrt{8}\quad -10\sqrt{8}\quad -2$

**$m=\sqrt{8}-2$**

**2) حساب m x n :**

$m\times n=(\sqrt{8}-2)(\sqrt{8}+2)$

$=\sqrt{8}^2-2^2=8-4=4$ , $m\times n=$ **4**

**3) جعل مقام النسبة $\frac{\sqrt{8}-2}{\sqrt{8}}$ ناطق :**

$\frac{\sqrt{8}-2}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{8}x(\sqrt{8}-2)}{\sqrt{8}x\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{8}^2-2\sqrt{8}}{\sqrt{8}^2}=\frac{8-2\sqrt{8}}{8}$

**التمرين خامس :**

1) كتابة m و n على شكل $a\sqrt{5}+b$ :

$n=(\sqrt{5}-3)(4+\sqrt{5})$

$n=4\sqrt{5}-12+5-3\sqrt{5}$

**$n=\sqrt{5}-7$**

$m=\sqrt{500}\quad -\sqrt{245}\quad -\sqrt{20}\quad +\sqrt{49}$

$m=\sqrt{100x5}\quad -\sqrt{49x5}\quad -\sqrt{4x5}\quad +\sqrt{49}$

$m=\sqrt{100}\,x\sqrt{5}\quad -\sqrt{49}\,x\sqrt{5}\quad -\sqrt{4}\,x\sqrt{5}\quad +7$

$m=10\sqrt{5}\quad -7\sqrt{5}\quad -2\sqrt{5}\quad +7$

$m=10\sqrt{5}\quad -9\sqrt{5}\quad +7$

**$m=\sqrt{5}+7$**

**2) حساب m x n :**

$m\times n=(\sqrt{5}+7)(\sqrt{5}-7)$

$=\sqrt{5}^2-7^2=5-49=-44$ , $m\times n=$ **-44**

**3) جعل مقام النسبة $\frac{\sqrt{5}+7}{\sqrt{5}}$ ناطق :**

$\frac{\sqrt{5}+7}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}x(\sqrt{5}+7)}{\sqrt{5}x\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}^2+7\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2}=\frac{5+7\sqrt{5}}{5}$

**التمرين السادس :**

1) كتابة m و n على شكل $a\sqrt{7}+b$ :

$n=(\sqrt{7}+2)(-1+\sqrt{7})$

$n=-\sqrt{7}-2+7+2\sqrt{7}$

**$n=\sqrt{7}+5$**

$m=\sqrt{1183}\quad -\sqrt{343}\quad -\sqrt{175}\quad -\sqrt{25}$

$m=\sqrt{169\,x\,7}\quad -\sqrt{49\,x\,7}\quad -\sqrt{25\,x\,7}\quad -\sqrt{25}$

$m=\sqrt{169}\,x\sqrt{7}\quad -\sqrt{49}\,x\sqrt{7}\quad -\sqrt{25}\,x\sqrt{7}\quad -5$

$m=13\sqrt{7}\quad -7\sqrt{7}\quad -5\sqrt{7}\quad -5$

$m=13\sqrt{7}\quad -12\sqrt{7}\quad -5$

**$m=\sqrt{7}-5$**

**2) حساب m x n :**

$m\times n=(\sqrt{7}-5)(\sqrt{7}+5)$

$=\sqrt{7}^2-5^2=7-25=-18$ , $m\times n=$ **-18**

**3) جعل مقام النسبة $\frac{\sqrt{7}-5}{\sqrt{7}}$ ناطق :**

$\frac{\sqrt{7}-5}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}x(\sqrt{7}-5)}{\sqrt{7}x\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}^2-5\sqrt{7}}{\sqrt{7}^2}=\frac{7-5\sqrt{7}}{7}$

**تمرين يشمل** :**درس:** القاسم المشترك الأكبر **+ درس:** الجذور التربيعية

**التمرين الأول :** (3 نقاط) امتحان شهادة التعليم المتوسط (2016)

1)احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 1053 و 832

2)اكتب الكسر $\frac{1053}{832}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال

3)اكتب العدد $A = \sqrt{1053} + 2\sqrt{832} - 8\sqrt{117}$ على شكل $a\sqrt{13}$ حيث a عدد طبيعي يطلب تعيينه.

**التمرين الأول :** (حسب نموذج 2016)

1)احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 294 و 486

2)اكتب الكسر $\frac{486}{294}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال

3)اكتب $A = \sqrt{486} - 3\sqrt{294} + 4\sqrt{150}$ على شكل $a\sqrt{6}$ حيث a عدد طبيعي يطلب تعيينه.

**التمرين الثاني :** (حسب نموذج 2016)

1)احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 350 و 896

2)اكتب الكسر $\frac{896}{350}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال

3)اكتب $A = 2\sqrt{896} - \sqrt{350} + 3\sqrt{126}$ على شكل $a\sqrt{14}$ حيث a عدد طبيعي يطلب تعيينه.

**التمرين الثالث :** (حسب نموذج 2016)

1)احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 539 و 396

2)اكتب الكسر $\frac{539}{396}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال

3)اكتب $A = -\sqrt{539} - 2\sqrt{396} + 2\sqrt{44}$ على شكل $a\sqrt{11}$ حيث a عدد نسبي يطلب تعيينه.

**التمرين الرابع :** (حسب نموذج 2016)

1)احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 1377 و 1088

2)اكتب الكسر $\frac{1377}{1088}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال

3)اكتب $A = 4\sqrt{1377} - 3\sqrt{1088} + \sqrt{612}$ على شكل $a\sqrt{17}$ حيث a عدد طبيعي يطلب تعيينه.

**التمرين الخامس :** (حسب نموذج 2016)

1)احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 2160 و 735

2)اكتب الكسر $\frac{2160}{735}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال

3)اكتب $A = 2\sqrt{2160} - \sqrt{735} + \sqrt{375}$ على شكل $a\sqrt{15}$ حيث a عدد طبيعي يطلب تعيينه.

حل التمرين الأول امتحان لشهادة التعليم المتوسط (2016 )

**1) حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 1053 و 832**

1053 = 832 x 1 + 221

832 = 221 x 3 + 169

221 = 169 x 1 + 52

169 = 52 x 3 + 13

52 = 13 x 4 + 0

آخر باقي غير معدوم هو 13 إذن

PGCD (1053, 832) = 13

**2) كتابة الكسر $\frac{1053}{832}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال:**

$$\frac{1053}{832} = \frac{1053 \div 13}{832 \div 13} = \frac{81}{64}$$

**3) كتابة : $A= \sqrt{1053} + 2\sqrt{832} - 8\sqrt{117}$ على شكل $a\sqrt{13}$ :**

$A = \sqrt{1053} + 2\sqrt{832} - 8\sqrt{117}$

$A = \sqrt{81 \text{ x } 13} + 2\sqrt{64 \text{ x } 13} - 8\sqrt{9 \text{ x } 13}$

$A = \sqrt{81}\text{ x}\sqrt{13} + 2\sqrt{64}\text{ x}\sqrt{13} - 8\sqrt{9}\text{ x }\sqrt{13}$

$A = 9\sqrt{13} + 2 \text{ x } 8\sqrt{13} - 8 \text{ x } 3\sqrt{13}$

$A = (9 +16 -24)\sqrt{13}$

$A = \sqrt{13}$

حيث : **a = 1**

**التمرين السادس :** (حسب نموذج 2016)

1)احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 1863 و 1472

2)اكتب الكسر $\frac{1863}{1472}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال

3)اكتب $A = 2\sqrt{1863} - \sqrt{1472} + \sqrt{575}$

على شكل $a\sqrt{23}$ حيث a عدد طبيعي يطلب تعيينه

**الحلـــــــــــــول :**

| | | |
|---|---|---|
| **التمرين الأول :** القاسم المشترك الأكبر : **6**<br>الكسر : $\frac{81}{49}$<br>$A= (9-21+20)\sqrt{6}$<br>$A= 8\sqrt{6}$ a= **8** | **التمرين الثاني :** القاسم المشترك الأكبر : **14**<br>الكسر : $\frac{64}{25}$<br>$A= (16-5+9)\sqrt{14}$<br>$A= 20\sqrt{14}$ a=**20** | **التمرين الثالث :** القاسم المشترك الأكبر : **11**<br>الكسر : $\frac{49}{36}$<br>$A= (-7-12+4)\sqrt{11}$<br>$A= -15\sqrt{11}$ a= **-15** |
| **التمرين الرابع :** القاسم المشترك الأكبر : **17**<br>الكسر : $\frac{81}{64}$<br>$A= (36-24+6)\sqrt{17}$<br>$A= 18\sqrt{17}$ a= **18** | **التمرين الخامس** : القاسم المشترك الأكبر : **15**<br>الكسر : $\frac{144}{49}$<br>$A= (24-7+5)\sqrt{15}$<br>$A= 22\sqrt{15}$ a= **22** | **التمرين السادس :** القاسم المشترك الأكبر : **23**<br>الكسر : $\frac{81}{64}$<br>$A= (18-8+5)\sqrt{23}$<br>$A= 15\sqrt{23}$ a=**15** |

**تمرين حول**: الجذور التربيعية

**التمرين الأول :** (3 نقاط) امتحان شهادة التعليم المتوسط (2017)

A , B عددان حقيقيان حيث: $A= \sqrt{108} - \sqrt{12}$ , $B = \frac{3}{2\sqrt{3}}$

اكتب العدد A على شكل $a\sqrt{3}$ حيث a عدد طبيعي .

اكتب العدد B على شكل نسبة مقامها عدد ناطق.

بين أن C هو عدد طبيعي حيث : $C = (A + 1) (8B - 1)$

**التمرين الأول :** (حسب نموذج 2017)

A , B عددان حقيقيان حيث: $A= \sqrt{175} - \sqrt{63}$ , $B = \frac{14}{\sqrt{7}}$

اكتب العدد A على شكل $a\sqrt{7}$ حيث a عدد طبيعي .

اكتب العدد B على شكل نسبة مقامها عدد ناطق.

بين أن C هو عدد طبيعي حيث : $C = (A + 2) (B - 2)$

**التمرين الثاني :** (حسب نموذج 2017)

B, A عددان حقيقيان حيث: $A= -2\sqrt{20} + \sqrt{500}$ , $B = \frac{5}{2\sqrt{5}}$

اكتب العدد A على شكل $a\sqrt{5}$ حيث a عدد طبيعي .

اكتب العدد B على شكل نسبة مقامها عدد ناطق.

بين أن C هو عدد طبيعي حيث : $C = (A + 3) (12B - 3)$

**التمرين الثالث :** (حسب نموذج 2017)

A , B عددان حقيقيان حيث: $A= \sqrt{396} + \sqrt{44}$ , $B = \frac{11}{4\sqrt{11}}$

اكتب العدد A على شكل $a\sqrt{11}$ حيث a عدد طبيعي .

اكتب العدد B على شكل نسبة مقامها عدد ناطق.

بين أن C هو عدد طبيعي حيث : $C = (A + 4) (32B - 4)$

**التمرين الرابع :** (حسب نموذج 2017)

A , B عددان حقيقيان حيث: $A= \sqrt{648} - \sqrt{200}$ , $B = \frac{8}{2\sqrt{8}}$

اكتب العدد A على شكل $a\sqrt{8}$ حيث a عدد طبيعي .

اكتب العدد B على شكل نسبة مقامها عدد ناطق.

بين أن C هو عدد طبيعي حيث : $C = (A + 2) (8B - 2)$

**التمرين الخامس :** (حسب نموذج 2017)

A , B عددان حقيقيان حيث: $A= \sqrt{98} + \sqrt{18}$ , $B = \frac{2}{5\sqrt{2}}$

اكتب العدد A على شكل $a\sqrt{2}$ حيث a عدد طبيعي .

اكتب العدد B على شكل نسبة مقامها عدد ناطق.

بين أن C هو عدد طبيعي حيث : $C = (A + 2) (-2+50B)$

**حل التمرين الأول لامتحان شهادة التعليم المتوسط (2017)**

**1) كتابة العدد A على شكل $a\sqrt{3}$ حيث a عدد طبيعي :**

$A= \sqrt{108} - \sqrt{12}$

$A= \sqrt{36x3} - \sqrt{4x3}$

$A= \sqrt{36} \times \sqrt{3} - \sqrt{4} \times \sqrt{3}$

$A= 6 \times \sqrt{3} - 2 \times \sqrt{3}$

$A= (6-2) \times \sqrt{3}$

**$A= 4\sqrt{3}$**

**2) كتابة العدد B على شكل نسبة مقامها عدد ناطق:**

$B = \frac{3}{2\sqrt{3}}$

$B = \frac{\sqrt{3} \times 3}{\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}}$

$B = \frac{3\sqrt{3}}{2x\sqrt{3^2}}$

$B = \frac{3\sqrt{3}}{2x3}$

$B = \frac{3\sqrt{3}}{2x3}$

**$B = \frac{\sqrt{3}}{2}$**

(طريقة أخرى : نعوّض 3 بـ $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$: ثم نبسّط)

**3) بيان أن C هو عدد طبيعي حيث : $C = (A + 1) (8B - 1)$**

$C = ( A + 1 ) ( 8 B - 1 )$

$C = (4\sqrt{3} + 1 ) ( 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1)$

$C = (4\sqrt{3} + 1) (4\sqrt{3} - 1)$

$C= (4\sqrt{3} )^2 - 1^2$

$C= 16x3 -1 = 48-1 = 47$

$C = 47$ ( إذن C عدد طبيعي )

**التمرين السادس :** (حسب نموذج 2017)

A , B عددان حقيقيان حيث: $A= \sqrt{486} - \sqrt{54}$ , $B = \frac{6}{3\sqrt{6}}$

اكتب العدد A على شكل $a\sqrt{6}$ حيث a عدد طبيعي .

اكتب العدد B على شكل نسبة مقامها عدد ناطق.

بين أن C هو عدد طبيعي حيث : $C = (A + 9) (18B - 9)$

**الحلـــــــــــــــول :**

| | | |
|---|---|---|
| **التمرين الأول :**<br>$A= (5-3)\sqrt{7}$ $A = \mathbf{2\sqrt{7}}$ $B= \frac{\mathbf{14\sqrt{7}}}{\mathbf{7}}$<br>$C = 28-4 =$ **24** | **التمرين الثاني :**<br>$A= (-4+10)\sqrt{5}$ $A = \mathbf{6\sqrt{5}}$ $B= \frac{\sqrt{5}}{2}$<br>$C = 36x5-9=$ **171** | **التمرين الثالث :**<br>$A= (6+2)\sqrt{11}$ $A = \mathbf{8\sqrt{11}}$ $B= \frac{\sqrt{11}}{4}$<br>$C = 64x11-16 =$**688** |
| **التمرين الرابع :**<br>$A= (9-5)\sqrt{8}$ $A = \mathbf{4\sqrt{8}}$ $B= \frac{\sqrt{\mathbf{8}}}{\mathbf{2}}$<br>$C = 16x8-4=$ **124** | **التمرين خامس :**<br>$A= (7+3)\sqrt{2}$ $A = \mathbf{10\sqrt{2}}$ $B= \frac{\sqrt{2}}{5}$<br>$C = 100X2-4=$ **196** | **التمرين السادس :**<br>$A= (9-3)\sqrt{6}$ $A = \mathbf{6\sqrt{6}}$ $B= \frac{\sqrt{6}}{3}$<br>$C = 36x6-81=$ **135** |

**تمرين حول:** الحساب الحرفي : (النشر و التحليل و المتطابقات الشهيرة)

**التمرين الأول :** (3 نقاط) امتحان شهادة التعليم المتوسط دورة 2011

1) تحقق بالنّشر من أنّ : $(2x-1)(x-3) = 2x^2 - 7x + 3$

2) لتكن العبارة A حيث :

$A = 2x^2 - 7x + 3 + (2x-1)(3x+2)$

- حلّل A إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

3) حل المعادلة : $(2x-1)(4x-1) = 0$

**التمرين الأول :** (حسب نموذج 2011)

1) تحقق بالنّشر من أنّ : $(7x-3)(4x+3) = 28x^2 + 9x - 9$

2) لتكن العبارة A حيث :

$A = 28x^2 + 9x - 9 + (4x+3)(x+1)$

- حلّل A إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

3) حل المعادلة : $(4x+3)(8x-2) = 0$

**التمرين الثاني :** (حسب نموذج 2011)

1) تحقق بالنّشر من أنّ : $(2x+1)(x+3) = 2x^2 + 7x + 3$

2) لتكن العبارة A حيث :

$A = 2x^2 + 7x + 3 + (2x+1)(x+5)$

- حلّل A إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

3) حل المعادلة : $(2x+1)(2x+8) = 0$

**حل التمرين الثاني لامتحان شهادة التعليم المتوسط دورة 2011**

**1) التحقق بالنشر :**

$(2x-1)(x-3)$

$= 2x^2 - x - 6x + 3$

$= 2x^2 - 7x + 3$

ومنه : $\mathbf{(2x-1)(x-3) = 2x^2-7x+3}$

**2) التحليل :**

**بما أن** $\mathbf{2x^2 - 7x + 3} = (2x-1)(x-3)$ مما سبق فإن:

$A = \mathbf{2x^2 - 7x + 3} + (2x-1)(3x+2)$

$A = (2x-1)(x-3) + (2x-1)(3x+2)$

$A = (2x-1)\ [\ (x-3)+(3x+2)\ ]$

$A = (2x-1)(x-3+3x+2)$

$A = (2x-1)(4x-1)$

**3) حل المعادلة : $\mathbf{(2x-1)(4x-1) = 0}$**

$(2x-1)(4x-1) = 0$ معناه إما : $2x-1=0$ أو : $4x-1=0$

إما : $x = \frac{1}{2}$ **أو :** $\mathbf{x = \frac{1}{4}}$

للمعادلة حلان و هما $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$.

**حلول نماذج التمرين الأول ( دورة 2011) :**

**حل التمرين الأول :**

**1) التحقق بالنشر :**

$(7x-3)(4x+3)$

$= 28x^2 - 12x + 21x - 9$

$= 28x^2 + 9x - 9$

ومنه : $\mathbf{(7x-3)(4x+3) = 28x^2 + 9x - 9}$

**2) التحليل :**

**بما أن** $\mathbf{28x^2 + 9x - 9} = (7x-3)(4x+3)$ **مما سبق فإن:**

$A = \mathbf{28x^2 + 9x - 9} + (4x+3)(x+1)$

$A = (7x-3)(4x+3) + (4x+3)(x+1)$

$A = (4x+3)\ [\ (7x-3)+(x+1)\ ]$

$A = (4x+3)(7x-3+x+1)$

$A = (4x+3)(8x-2)$

**3) حل المعادلة : $\mathbf{(4x+3)(8x-2) = 0}$**

**$(4x+3)(8x-2) = 0$ معناه إما : $4x+3=0$**

**أو : $8x-2=0$**

إما : $x = -\frac{3}{4}$ أو : $\mathbf{x = \frac{1}{4}}$

للمعادلة حلان و هما $-\frac{3}{4}$ و $\frac{1}{4}$.

**حل التمرين الثاني :**

**1) التحقق بالنشر :**

$(2x+1)(x+3)$

$= 2x^2 + x + 6x + 3$

$= 2x^2 + 7x + 3$

ومنه : $\mathbf{(2x+1)(x+3) = 2x^2 + 7x + 3}$

**2) التحليل :**

**بما أن** $\mathbf{2x^2 + 7x + 3} = (2x+1)(x+3)$ **مما سبق فإن:**

$A = \mathbf{2x^2 + 7x + 3} + (2x+1)(x+5)$

$A = (2x+1)(x+3) + (2x+1)(x+5)$

$A = (2x+1)\ [\ (x+3)+(x+5)\ ]$

$A = (2x+1)(x+3+x+5)$

$A = (2x+1)(2x+8)$

**3) حل المعادلة : $\mathbf{(2x+1)(2x+8) = 0}$**

**$(2x+1)(2x+8) = 0$ معناه إما : $2x+1=0$**

**أو : $2x+8=0$**

إما : $x = -\frac{1}{2}$ أو : $\mathbf{x = -4}$

للمعادلة حلان و هما $-\frac{1}{2}$ و -4.

**تمرين حول:** الحساب الحرفي : (النشر و التحليل و المتطابقات الشهيرة)

**التمرين الثاني :** (3 نقط) امتحان شهادة التعليم المتوسط دورة 2007

لتكن العبارة الجبرية E حيث :

$E = 10^2 - (x-2)^2 - (x+8)$

1- انشر ثم بسط E .

2- حلّل العبارة $10^2 - (x-2)^2$ ، ثم استنتج تحليل العبارة الجبرية E.

3- حل المعادلة : $(11-x)(8+x) = 0$

**التمرين الأول :** (حسب نموذج 2007)

لتكن العبارة الجبرية E حيث :

$E = 5^2 - (7x-4)^2 - (7x+1)$

1- انشر ثم بسط E .

2- حلّل العبارة $5^2 - (7x-4)^2$ ، ثم استنتج تحليل العبارة الجبرية E.

3- حل المعادلة : $(1+7x)(8+7x-) = 0(7x$

**التمرين الثاني :** (حسب نموذج 2007)

لتكن العبارة الجبرية E حيث :

$E = 8^2 - (5x-1)^2 - (5x+7)$

1- انشر ثم بسط E .

2- حلّل العبارة $8^2 - (5x-1)^2$ ، ثم استنتج تحليل العبارة الجبرية E.

3- حل المعادلة : $(7+5x)(8+5x-) = 0(5x$

**حل التمرين الثاني لامتحان شهادة التعليم المتوسط (دورة 2007)**

**1) النشر و التبسيط :**

$E = 10^2 - (x-2)^2 - (x+8)$

$E = 10^2 - [(x)^2 + (2)^2 - (2)x(x)x(2)] - (x+8)$

$E = 10^2 - (x^2 + 4 - 4x) - (x+8)$

$E = 10^2 - x^2 + 4 - 4x - x - 8$

$E = 10^2 - x^2 + 3x - 12$

$E = -x^2 + 3x - 12 + 100$

$E = -x^2 + 3x + 88$

**2) تحليل العبارة $10^2 - (x-2)^2$**

$10^2 - (x-2)^2$

$= (10 - x + 2)(10 + x - 2)$

$= (-x + 12)(x + 8)$

**متطابقة شهيرة:**

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a = 10 , b = x - 2$

**استنتاج تحليل E**

**بما أن** $(8+x)(-x+12) = $ **$10^2 - (x-2)^2$** فإن :

$E =$ **$10^2 - (x-2)^2$** $- (x+8)$

$E = (-x+12)(x+8) - (x+8)$

$E = (x+8)(12 - x - 1)$

$E = (x+8)(-x+11)$

**3) حل المعادلة : $(11-x)(x+8) = 0$**

لدينا : $(11-x)(x+8) = 0$ معناه $(x+8) = 0$ أو $(11-x) = 0$

أي $x =$ **$-8$** أو $x =$ **$11$**

و منه للمعادلة حلاّن و هما : **$-8$** و **$11$**

**حلول نماذج التمرين الثاني ( دورة 2007) :**

**حل التمرين الأول :**

**1) النشر و التبسيط :**

$E = 5^2 - (7x-4)^2 - (7x+1)$

$E = 5^2 - [(7x)^2 + (4)^2 - (2)x(7x)x(4)] - (7x+1)$

$E = 5^2 - (49x^2 + 16 - 56x) - (7x+1)$

$E = 5^2 - (49x^2 - 56x + 16) - (7x+1)$

$E = 5^2 - (49x^2 - 56x + 16) - (7x+1)$

$E = 25 - 49x^2 + 56x - 16 - 7x - 1$

$E = -49x^2 + 49x + 8$

**2) تحليل العبارة $5^2 - (7x-4)^2$**

$5^2 - (7x-4)^2$

$= (5 + 7x - 4)(5 - 7x + 4)$

$= (7x+1)(-7x+9)$

**متطابقة شهيرة :**

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a = 5 , b = 7x - 4$

**استنتاج تحليل E**

**بما أن** $(7x+1)(-7x+9) = $ **$5^2 - (7x-4)^2$** فإن :

$E =$ **$5^2 - (7x-4)^2$** $- (7x+1)$

$E = (7x+1)(-7x+9) - (7x+1)$

$E = (7x+1)(-7x+9-1)$

$E = (7x+1)(-7x+8)$

**3) حل المعادلة : $(1+7x)(8+7x-) = 0$**

لدينا: $(1+7x)(8+7x-) = 0$ معناه إما: $(1+7x) = 0$ أو $(8+7x-) = 0$

أي $x = -\frac{1}{7}$ أو $x = \frac{8}{7}$

و منه للمعادلة حلاّن و هما : $-\frac{1}{7}$ و $\frac{8}{7}$

**حل التمرين الثاني :**

**1) النشر و التبسيط :**

$E = 8^2 - (5x-1)^2 - (5x+7)$

$E = 8^2 - [(5x)^2 + (1)^2 - (2)x(5x)x(1)] - (5x+7)$

$E = 8^2 - (25x^2 + 1 - 10x) - (5x+7)$

$E = 8^2 - (25x^2 - 10x + 1) - (5x+7)$

$E = 8^2 - 25x^2 + 10x - 1 - 5x - 7$

$E = 64 - 25x^2 + 5x - 8$

$E = -25x^2 + 5x + 56$

**2) تحليل العبارة $8^2 - (5x-1)^2$**

$8^2 - (5x-1)^2$

$= (8 + 5x - 1)(8 - 5x + 1)$

$= (5x+7)(-5x+9)$

**متطابقة شهيرة :**

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a = 8 , b = 5x - 1$

**استنتاج تحليل E:**

بما أن $(7+5x)(9-5x-) = $ **$8^2 - (5x-1)^2$** فإن :

$E =$ **$8^2 - (5x-1)^2$** $- (5x+7)$

$E = (5x+7)(-5x+9) - (5x+7)$

$E = (5x+7)[(-5x+9) - 1]$

$E = (5x+7)(-5x+8)$

**3) حل المعادلة : $(7+5x)(8+5x-) = 0$**

لدينا: $(7+5x)(8+5x-) = 0$ معناه إما: $(7+5x) = 0$ أو $(8+5x-) = 0$

أي $x = -\frac{7}{5}$ أو $x = \frac{8}{5}$

و منه للمعادلة حلاّن و هما : $-\frac{7}{5}$ و $\frac{8}{5}$

**تمرين حول:** الحساب الحرفي : (النشر و التحليل و المتطابقات الشهيرة)

**التمرين الثاني :** (3 نقاط) امتحان شهادة التعليم المتوسط دورة 2018

1) تحقّق من المساواة الآتية :
$(3x+1)(x-4) = 3x^2 - 11x - 4$
2) حلّل إلى جداء عاملين العبارة :
$E = 3x^2 - 11x - 4 + (3x+1)^2$
3) حل المتراجحة : $(3x+1)(x-4) \leq 3x^2 + 7$

**التمرين الأول :** (حسب نموذج 2018)
1) تحقّق من المساواة الآتية :
$(5x+3)(3x-3) = 15x^2 - 6x - 9$
2) حلّل إلى جداء عاملين العبارة :
$E = 15x^2 - 6x - 9 + (5x+3)^2$
3) حل المتراجحة : $(5x+3)(3x-3) \leq 15x^2 + 3$

**التمرين الثاني :** (حسب نموذج 2018)
1) تحقّق من المساواة الآتية :
$(6x-4)(x-2) = 6x^2 - 16x + 8$
2) حلّل إلى جداء عاملين العبارة :
$E = 6x^2 - 16x + 8 + (x-2)^2$
3) حل المتراجحة : $(6x-4)(x-2) > 6x^2 - 4x + 2$

**حل التمرين الثاني لامتحان شهادة التعليم المتوسط (دورة 2018)**

**1) التحقق بالنشر :**
$(3x+1)(x-4)$
$= 3x^2 - 12x + x - 4$
$= 3x^2 - 11x - 4$

**2) تحليل العبارة E إلى جداء عاملين :**
بما أن : $3x^2 - 11x - 4 = (3x+1)(x-4)$ مما سبق فإن :
$E = \mathbf{3x^2 - 11x - 4} + (3x+1)^2$
$E = (3x+1)(x-4) + (3x+1)^2$
$E = (3x+1)(x-4) + (3x+1)(3x+1)$
$E = (3x+1)[(x-4) + (3x+1)]$
$E = (3x+1)(x-4+3x+1)$
$E = (3x+1)(4x-3)$

**3) حل المتراجحة :**
$(3x+1)(x-4) \leq 3x^2 + 7$
$3x^2 - 11x - 4 \leq 3x^2 + 7$
$3x^2 - 3x^2 - 11x \leq 7 + 4$
$-11x \leq 11$
$11x \geq -11$
$\geq -\frac{11}{11}x$
$\geq -1x$

نعكس الإشارة من $\leq$ إلى $\geq$ لأننا ضربنا طرفي المتراجحة في عدد سالب و هو : -1

حلول المتراجحة هي الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي -1

**حلول نماذج التمرين الثاني ( دورة 2018) :**

**حل التمرين الأول :**

**1) التحقق بالنشر :**
$(5x+3)(3x-3) = 15x^2 + 9x - 15x - 9$
$(5x+3)(3x-3) = 15x^2 - 6x - 9$

**2) تحليل العبارة E إلى جداء عاملين :**
**بما أن:** $(5x+3)(3x-3) = \mathbf{15x^2 - 6x - 9}$ **مما سبق فإن:**

$E = \mathbf{15x^2 - 6x - 9} + (5x+3)^2$
$E = (5x+3)(3x-3) + (5x+3)^2$
$E = (5x+3)(3x-3) + (5x+3)(5x+3)$
$E = (5x+3)[(3x-3) + (5x+3)]$
$E = (5x+3)(3x-3+5x+3)$
$E = (5x+3)(8x)$

**3) حل المتراجحة :**
$(5x+3)(3x-3) \leq 15x^2 + 3$
$15x^2 - 6x - 9 \leq 15x^2 + 3$
$-6x \leq +12$
$6x \geq -12$
$\geq -\frac{12}{6}x$
$\geq -2x$

نعكس الإشارة من $\leq$ إلى $\geq$ لأننا ضربنا طرفي المتراجحة في عدد سالب و هو : -1

حلول المتراجحة هي الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي -2

**حل التمرين الثاني :**

**1) التحقق بالنشر :**
$(6x-4)(x-2) = 6x^2 - 4x - 12x + 8$
$(6x-4)(x-2) = 6x^2 - 16x + 8$

**2) تحليل العبارة E إلى جداء عاملين :**
**بما أن:** $(6x-4)(x-2) = \mathbf{6x^2 - 16x + 8}$ **مما سبق فإن:**

$E = \mathbf{6x^2 - 16x + 8} + (x-2)^2$
$E = (6x-4)(x-2) + (x-2)^2$
$E = (6x-4)(x-2) + (x-2)(x-2)$
$E = (x-2)[(6x-4) + (x-2)]$
$E = (x-2)(6x-4+x-2)$
$E = (x-2)(7x-6)$

**3) حل المتراجحة :**
$(6x-4)(x-2) > 6x^2 - 4x + 2$
$6x^2 - 16x + 8 > 6x^2 - 4x + 2$
$-16x + 8 > -4x + 2$
$-12x > -6$
$12x < 6$
$< \frac{6}{12}x$
$< \frac{1}{2}x$

نعكس الإشارة من $>$ إلى $<$ لأننا ضربنا طرفي المتراجحة في عدد سالب و هو : -1

حلول المتراجحة هي الأعداد الحقيقية الأصغر من $\frac{1}{2}$

**تمرين حول:** الحساب الحرفي : (النشر و التحليل و المتطابقات الشهيرة)

**التمرين الثاني :** (3 نقاط) امتحان شهادة التعليم المتوسط دورة 2019

لتكن العبارة E حيث :

$E = (x+1)^2 - (x+1)(2x-3)$

1) أنشر ثم بسط العبارة E

2) حلل العبارة E إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

3) حل المتراجحة : $3x + 4 \geq 6x - 2$

**التمرين الأول :** (حسب نموذج 2019)

لتكن العبارة E حيث :

$E = (x-3)^2 - (2x-2)(x-3)$

1) أنشر ثم بسط العبارة E

2) حلل العبارة E إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

3) حل المتراجحة : $2x + 2x \leq -3$

**التمرين الثاني :** (حسب نموذج 2019)

لتكن العبارة E حيث :

$E = (2x+5)^2 - (2x+5)(3x-3)$

1) أنشر ثم بسط العبارة E

2) حلل العبارة E إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

3) حل المتراجحة : $2x + 12x + 5 > 3x$

**حل التمرين الثاني لامتحان شهادة التعليم المتوسط (دورة 2019)**

**1) نشر و تبسيط العبارة E :**

$E = (x+1)^2 - [(x+1)(2x-3)]$

$E = (x)^2 + (1)^2 + (2)x(x)x(1) - [(x+1)(2x-3)]$

$E = x^2 + 1 + 2x - (2x^2 + 2x - 3x - 3)$

$E = x^2 + 2x + 1 - (2x^2 - x - 3)$

$E = x^2 + 2x + 1 - 2x^2 + x + 3$

$E = -x^2 + 3x + 4$

**2) تحليل العبارة E :**

$E = (x+1)^2 - [(x+1)(2x-3)]$

$E = (x+1)(x+1) - [(x+1)(2x-3)]$

$E = (x+1) \times [(x+1) - (2x-3)]$

$E = (x+1) \times (x+1-2x+3)$

$E = (x+1) \times (-x+4)$

**3) حل المتراجحة :**

$3x + 4 \geq 6x - 2$

$3x - 6x \geq -2 - 4$

$-3x \geq -6$

$3x \leq 6$

$\frac{6}{3}x \leq 2x$

نعكس الإشارة من $\geq$ إلى $\leq$ لأننا ضربنا طرفي المتراجحة في عدد سالب و هو : -1

حلول المتراجحة هي كل الأعداد الحقيقية الأصغر من أو تساوي 2

**حلول نماذج التمرين الثاني ( دورة 2019) :**

**حل التمرين الأول :**

**1) نشر و تبسيط العبارة E :**

$E = (x-3)^2 - [(2x-2)(x-3)]$

$E = (x)^2 + (3)^2 - (2)x(x)x(3) - [(2x-2)(x-3)]$

$E = x^2 + 9 - 6x - [2x^2 - 2x - 6x + 6)]$

$E = x^2 - 6x + 9 - (2x^2 - 8x + 6)$

$E = x^2 - 6x + 9 - 2x^2 + 8x - 6$

$E = -x^2 - 2x + 3$

**2) تحليل العبارة E :**

$E = (x-3)^2 - (2x-2)(x-3)$

$E = (x-3)(x-3) - (2x-2)(x-3)$

$E = (x-3) \times [(x-3) - (2x-2)]$

$E = (x-3) \times (x-3-2x+2)$

$E = (x-3) \times (-x-1)$

**3) حل المتراجحة :**

$-3 \leq 2x + 2x$

$-2x \leq 2 + 3x$

$\leq -x \quad 5$

$\geq x \quad -5$

نعكس الإشارة من $\leq$ إلى $\geq$ لأننا ضربنا طرفي المتراجحة في عدد سالب و هو : -1

حلول المتراجحة هي كل الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 5 -

**حل التمرين الثاني :**

**1) نشر و تبسيط العبارة E :**

$E = (2x+5)^2 - (2x+5)(3x-3)$

$E = (2x)^2 + (5)^2 + (2)x(2x)x(5) - [(2x+5)(3x-3)]$

$E = 4x^2 + 25 + 20x - [6x^2 + 15x - 6x - 15)]$

$E = 4x^2 + 25 + 20x - (6x^2 + 9x - 15)]$

$E = 4x^2 + 25 + 20x - 6x^2 - 9x + 15$

$E = -2x^2 + 11x + 40$

**2) تحليل العبارة E :**

$E = (2x+5)^2 - (2x+5)(3x-3)$

$E = (2x+5)(2x+5) - (2x+5)(3x-3)$

$E = (2x+5) \times [(2x+5) - (3x-3)]$

$E = (2x+5) \times (2x+5-3x+3)$

$E = (2x+5) \times (-x+8)$

**3) حل المتراجحة :**

$2x + 5 > 3x + 1$

$-3x > 1 - 5 - 2x$

$-x > 1 - 5$

$-x > -4$

$x < 4$

نعكس الإشارة من $>$ إلى $<$ لأننا ضربنا طرفي المتراجحة في عدد سالب و هو : -1

حلول المتراجحة هي كل الأعداد الحقيقية الأصغر تماما من 4

**تمرين حول:** الحساب الحرفي : (النشر و التحليل و المتطابقات الشهيرة)

**التمرين الثاني :** (3 نقاط) امتحان شهادة التعليم المتوسط دورة 2012

لتكن العبارة E حيث :

$E = (4x-1)^2 - (3x+2)(4x-1)$

1) انشر و بسّط العبارة E

2) حلّل العبارة E إلى جداء عاملين.

3) حل المعادلة : $(4x-1)(x-3) = 0$

4) حل المتراجحة : $4x^2 - 13x + 3 \leq 4x^2 + 29$

**التمرين الأول :** (حسب نموذج 2012)

لتكن العبارة E حيث :

$E = (3x+1)^2 - (3x+1)(2x-3)$

1) انشر و بسّط العبارة E

2) حلّل العبارة E إلى جداء عاملين.

3) حل المعادلة : $(3x+1)(x+4) = 0$

4) حل المتراجحة : $3x^2 + 13x + 4 > 3x^2 + 6$

**التمرين الثاني :** (حسب نموذج 2012)

لتكن العبارة E حيث :

$E = (5x+3)^2 - (5x+3)(2x-4)$

1) انشر و بسّط العبارة E

2) حلّل العبارة E إلى جداء عاملين.

3) حل المعادلة : $(5x+3)(3x+7) = 0$

4) حل المتراجحة : $15x^2 + 44x + 21 > 15x^2 + 40x + 5$

**حل التمرين الثاني لامتحان شهادة التعليم المتوسط (دورة 2012)**

**1) نشر العبارة E :**

$E = (4x-1)^2 - (3x+2)(4x-1)$

$E = (16x^2 + 1 - 8x) - (12x^2 - 3x + 8x - 2)$

$E = 16x^2 + 1 - 8x - 12x^2 - 5x + 2$

$E = 4x^2 - 13x + 3$

**2) تحليل العبارة E :**

$E = (4x-1)^2 - (3x+2)(4x-1)$

$E = (4x-1)[(4x-1) - (3x+2)]$

$E = (4x-1)(4x-1-3x-2)$

$E = (4x-1)(x-3)$

**3) حل المعادلة $(4x-1)(x-3) = 0$ :**

$(4x-1)(x-3) = 0$ معناه $4x-1 = 0$ أو $x-3=0$

و منه $x = \frac{1}{4}$ أو $x = 3$

**4) حل المتراجحة :**

$4x^2 - 13x + 3 \leq 4x^2 + 29$

$-13x \leq 26$

$13x \geqslant -26$

$x \geqslant -\frac{26}{13}$

$x \geqslant -2$

نعكس الإشارة من $\leq$ إلى $\geqslant$ لأننا ضربنا طرفي المتراجحة في عدد سالب و هو : -1

حلول المتراجحة هي كل الأعداد الأكبر من أو تساوي -2.

**حلـــــــــــــــول نماذج التمرين الثاني ( دورة 2012) :**

**التمرين الأول :**

**1) نشر و تبسيط العبارة E :**

$E = (3x+1)^2 - (3x+1)(2x-3)$

$E = (3x)^2 + (1)^2 + (2)(3x)(1) - (6x^2 + 2x - 9x - 3)$

$E = 9x^2 + 1 + 6x - (6x^2 - 7x - 3)$

$E = 3x^2 + 13x + 4$

**2) تحليل العبارة E إلى جداء عاملين :**

$E = (3x+1)^2 - (3x+1)(2x-3)$

$E = (3x+1)(3x+1) - (3x+1)(2x-3)$

$E = (3x+1)[(3x+1) - (2x-3)]$

$E = (3x+1)(3x+1-2x+3)$

$E = (3x+1)(x+4)$

**3) حل المعادلة : $(3x+1)(x+4) = 0$**

$(3x+1)(x+4) = 0$

معناه إما : $(x+4) = 0$ أو : $(3x+1) = 0$

أي : $x = -4$ أو $x = -\frac{1}{3}$

للمعادلة حلين هما : $x = -4$ أو $x = -\frac{1}{3}$

**4) حل المتراجحة : $3x^2 + 13x + 4 > 3x^2 + 6$**

$3x^2 + 13x + 4 > 3x^2 + 6$

$13x + 4 > +6$

$13x > 2$

$x > 6.5$

حلول المتراجحة هي كل الأعداد الأكبر من 6.5.

**التمرين الثاني :**

**1) ) نشر و تبسيط العبارة E :**

$E = (5x+3)^2 - (5x+3)(2x-4)$

$E = (5x)^2 + (3)^2 + (2)(5x)(3) - (10x^2 + 6x - 20x - 12)$

$E = 25x^2 + 9 + 30x - (10x^2 - 14x - 12)$

$E = 15x^2 + 44x + 21$

**2) تحليل العبارة إلى جداء عاملين :**

$E = (5x+3)^2 - (5x+3)(2x-4)$

$E = (5x+3)(5x+3) - (5x+3)(2x-4)$

$E = (5x+3)[(5x+3) - (2x-4)]$

$E = (5x+3)(5x+3-2x+4)$

$E = (5x+3)(3x+7)$

**3) حل المعادلة : $(5x+3)(3x+7) = 0$**

$(5x+3)(3x+7) = 0$

معناه إما : $(3x+7) = 0$ أو : $(5x+3) = 0$

أي : $x = -\frac{7}{3}$ أو : $x = -\frac{3}{5}$

للمعادلة حلين هما : $x = -\frac{7}{3}$ أو $x = -\frac{3}{5}$

**4) حل المتراجحة :** $15x^2 + 44x + 21 > 15x^2 + 40x + 5$

$15x^2 + 44x + 21 > 15x^2 + 40x + 5$

$44x + 21 > 40x + 5$

$4x + 21 > 5$

$4x > -16$

$x > -4$

حلول المتراجحة هي كل الأعداد الأكبر من - 4.

**تمرين حول:** الحساب الحرفي : (النشر و التحليل و المتطابقات الشهيرة)

**التمرين الثاني :** (3 نقاط) امتحان شهادة التعليم المتوسط دورة 2016

1) تحقق من صحة المساواة التالية :

$5(2x+1)(2x-1) = 20x^2 - 5$

2) حلل العبارة A بحيث :

$A = (2x+1)(3x-7) - (20x^2 - 5)$

3) حل المتراجحة :

$-14x^2 - 11x - 2 < 2(10 - 7x^2)$

- مثل حلولها بيانيا.

**التمرين الأول :** (حسب نموذج 2016)

1) تحقق من صحة المساواة التالية :

$2(2x-3)(2x+3) = 8x^2 - 18$

2) حلل العبارة A بحيث :

$A = (2x-3)(4x+2) - (8x^2 - 18)$

3) حل المتراجحة :

$-8x + 12 \leq -6x + 3$

- مثل حلولها بيانيا.

**التمرين الثاني :** (حسب نموذج 2016)

1) تحقق من صحة المساواة التالية :

$3(3x-4)(3x+4) = (27x^2 - 48)$

2) حلل العبارة A بحيث :

$A = (3x-4)(4x-6) + (27x^2 - 48)$

3) حل المتراجحة :

$12x^2 - 34x + 24 \geq 2x(6x - 12) + 14$

- مثل حلولها بيانيا.

**حل التمرين الثاني لامتحان شهادة التعليم المتوسط (دورة 2016)**

**1) التحقق من صحة المساواة** $5(2x+1)(2x-1) = 20x^2 - 5$

$20x^2 - 5$
$= 5(4x^2 - 1)$
$= 5(4x^2 - 1^2)$
$= 5(2x+1)(2x-1)$

**متطابقة شهيرة :**
$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$
$a = 2x$ , $b = 1$

**ملاحظة** : يمكن التحقق من صحة المساواة بطرق أخرى

**2) تحليل العبارة** $A = (2x+1)(3x-7) - (20x^2-5)$

**بما أن** $20x^2 - 5 = 5(2x+1)(2x-1)$ **مما سبق فإن:**

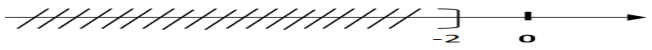
$A = (2x+1)(3x-7) - \mathbf{(20x^2-5)}$
$A = (2x+1)(3x-7) - 5(2x+1)(2x-1)$
$A = (2x+1)[(3x-7) - 5(2x-1)]$
$A = (2x+1)[(3x-7) - (10x-5)]$
$A = (2x+1)[3x - 7 - 10x + 5]$
$A = (2x+1)(-7x-2)$

**3) حل المتراجحة** $-14x^2 - 11x - 2 < 2(10 - 7x^2)$

$-14x^2 - 11x - 2 < 2(10 - 7x^2)$
$-14x^2 - 11x - 2 < 20 - 14x^2$
$-14x^2 - 11x + 14x^2 < 2 + 20$
$-11x < 22$
$11x > -22$
$-2x >$

نعكس الإشارة من $<$ إلى $>$ لأننا ضربنا طرفي المتراجحة في عدد سالب و هو : -1

**التمثيل البياني :**




حلول المتراجحة هي كل الأعداد الحقيقية الأكبر من -2

$(-14x^2 - 11x - 2 < 2(10 - 7x^2)$ هي كل قيم $x$ الاكبر تماما من -2

## حلـــــــــــــــول نماذج التمرين الثاني ( دورة 2016):

**حل التمرين الأول :**

**1) التحقق من المساواة :** $2(2x-3)(2x+3) = 8x^2 - 18$

$8x^2 - 18$
$= 2(4x^2 - 9)$
$= 2(4x^2 - 3^2)$
$= 2(2x-3)(2x+3)$

**متطابقة شهيرة :**
$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$
$a = 2x$ , $b = 3$

**2) تحليل العبارة :** $A = (2x-3)(4x+2) - (8x^2 - 18)$

**بما أن** $8x^2 - 18 = 2(2x-3)(2x+3)$ **مما سبق فإن:**

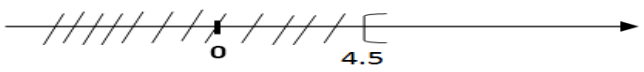
$A = (2x-3)(4x+2) - \mathbf{(8x^2 - 18)}$
$A = (2x-3)(4x+2) - 2(2x-3)(2x+3)$
$A = (2x-3)[(4x+2) - 2(2x+3)]$
$A = (2x-3)[(4x+2) - (4x+6)]$
$A = (2x-3)(4x+2-4x-6)$
$A = (2x-3)(-4)$

**3) حل المتراجحة:**

$-8x + 12 \leq -6x + 3$
$-2x + 12 \leq 3$
$-2x \leq -9$
$2x \geq 9$
$x \geq \mathbf{4.5}$

نعكس الإشارة من $\leq$ إلى $\geq$ لأننا ضربنا طرفي المتراجحة في عدد سالب و هو : -1

**التمثيل البياني :**




حلول المتراجحة هي كل الأعداد الأكبر من أو تساوي 4.5

**حل التمرين الثاني :**

**1) التحقق من المساواة:** $3(3x-4)(3x+4) = (27x^2 - 48)$

$(27x^2 - 48)$
$= 3(9x^2 - 16)$
$= 3(9x^2 - 4^2)$
$= 3(3x-4)(3x+4)$

**متطابقة شهيرة :**
$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$
$a = 3x$ , $b = 4$

**2) تحليل العبارة :** $(3x-4)(4x-6) + (27x^2 - 48)$

**بما أن** $27x^2 - 48 = 3(3x-4)(3x+4)$ **مما سبق فإن:**

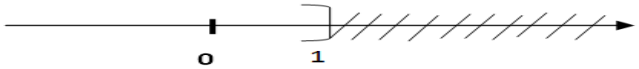
$A = (3x-4)(4x-6) + \mathbf{(27x^2 - 48)}$
$A = (3x-4)(4x-6) + 3(3x-4)(3x+4)$
$A = (3x-4)[(4x-6) + 3(3x+4)]$
$A = (3x-4)[(4x-6) + 9x + 12]$
$A = (3x-4)(4x - 6 + 9x + 12)$
$A = (3x-4)(13x+6)$

**3) حل المتراجحة :**

$12x^2 - 34x + 24 \geq 2x(6x-12) + 14$
$12x^2 - 34x + 24 \geq 12x^2 - 24x + 14$
$-34x + 24 \geq -24x + 14$
$-10x + 24 \geq +14$
$-10x \geq -10$
$10x \leq 10$
$x \leq 1$

نعكس الإشارة من $\geq$ إلى $\leq$ لأننا ضربنا طرفي المتراجحة في عدد سالب و هو : -1

**التمثيل البياني :**




حلول المتراجحة هي كل الأعداد الأصغر من أو تساوي 1

**التمرين الثاني :** (3.5 نقطة) امتحان شهادة التعليم المتوسط دورة 2013

1) لتكن العبارة : $A= 3x - 5$ حيث $x$ عدد حقيقي.

أ- أحسب القيمة المقرّبة إلى $10^{-2}$ بالنقصان للعدد A من أجل $x=\sqrt{2}$

ب- حل المتراجحة :$A \geq 0$ ثمّ مثّل مجموعة حلولها بيانيّا.

2) أ- أنشر ثمّ بسّط العبارة B حيث : $B = (3x-5)^2 + 9x^2 - 25$

ب-استنتج أنّ : $B = 6x(3x-5)$

ج- حل المعادلة : $B = 0$

**التمرين الأول :** (حسب نموذج 2013)

1) لتكن العبارة : $A= 2x - 4$ حيث $x$ عدد حقيقي.

أ- أحسب القيمة المقربة إلى $10^{-2}$ بالنقصان للعدد A من أجل $x=\sqrt{6}$

ب- حل المتراجحة :$A < 0$ ثمّ مثّل مجموعة حلولها بيانيّا.

2) أ- أنشر ثمّ بسّط العبارة B حيث : $B = (2x-4)^2 + 4x^2 - 16$

ب-استنتج أنّ : $B = 4x(2x-4)$

ج- حل المعادلة : $B = 0$

**التمرين الثاني :** (حسب نموذج 2013)

1) لتكن العبارة : $A= 3x - 6$ حيث $x$ عدد حقيقي.

أ- أحسب القيمة المقربة إلى $10^{-2}$ بالنقصان للعدد A من أجل $x=\sqrt{5}$

ب- حل المتراجحة :$A \leq 0$ ثمّ مثّل مجموعة حلولها بيانيّا.

2) أ- أنشر ثمّ بسّط العبارة B حيث : $B = (3x-6)^2 + 9x^2 - 36$

ب-استنتج أنّ : $B = 6x(3x-6)$

ج- حل المعادلة : $B = 0$

**حل التمرين الثاني لامتحان شهادة التعليم المتوسط (دورة 2013)**

**1) حساب A مقربة بالنقصان إلى $10^{-2}$ من أجل $x=\sqrt{2}$**

$A = 3 \times \sqrt{2} - 5$

$A= 3 \times 1.41 - 5$

$A = 4.23 - 5$

$A = \mathbf{-0.77}$

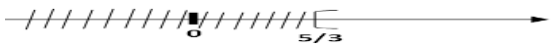
**ب) حل المتراجحة : $A \geq 0$**

$3x - 5 \geq 0$

$3x \geq 5$

$x \geq \frac{5}{3}$

كل قيم $x$ الأكبر من أو تساوي $\frac{5}{3}$ هي حلول لهذه المتراجحة .




**2) أ- نشر العبارة B**

$B = (3x-5)^2 + 9x^2 - 25$

$B = 9x^2 + (5)^2 - (2)\times(3x)\times(5) + 9x^2 - 25$

$B = 9x^2 + 25 - 30x + 9x^2 - 25$

$B= 18x^2 - 30x$

**ب- استنتاج أن : $B = 6x(3x-5)$**

$B = 18x^2 - 30x$

$B = 6x(3x-5)$

**ج- حل المعادلة $B = 0$**

$6x(3x-5) = 0$

معناه إما : $3x-5 = 0$ أو : $6x = 0$

أي : $3x = 5$ , $x = \frac{5}{3}$ أو : $x = 0$

للمعادلة $B = 0$ حلين هما : $x = \frac{5}{3}$ أو $\mathbf{x = 0}$

**حلول نماذج التمرين الثاني ( دورة 2013) :**

**حل التمرين الأول :**

**1) حساب A مقربة بالنقصان إلى $10^{-2}$ من أجل $x=\sqrt{6}$**

$A = 2x - 4$

$A= 2 \times 2.44 - 4$

$A = 4.88 - 4$

$A = \mathbf{-0.12}$

**ب) حل المتراجحة : $A < 0$**

$2x - 4 < 0$

$2x < 4$

$x < 2$

كل قيم $x$ الأصغر من 2 هي حلول لهذه المتراجحة .

**2) أ- نشر العبارة B**

$B = (2x-4)^2 + 4x^2 - 16$

$B = (2x)^2 + (4)^2 - (2)\times(2x)\times(4) + 4x^2 - 16$

$B = 4x^2 + 16 - 16x + 4x^2 - 16$

$B= 8x^2 - 16x$

**ب- استنتاج أن : $B = 4x(2x-4)$**

$B = 8x^2 - 16x$

$B = 4x(2x-4)$

**ج- حل المعادلة $B = 0$**

$4x(2x-4) = 0$

معناه إما : $2x-4 = 0$ أو : $4x = 0$

أي : $2x = 2$ أو : $x = 0$

للمعادلة $B = 0$ حلين هما : $x = 2$ أو $\mathbf{x = 0}$

**حل التمرين الثاني :**

**1) ) حساب A مقربة بالنقصان إلى $10^{-2}$ من أجل $x=\sqrt{5}$**

$A = 3x - 6$

$A= 3 \times 2.23 - 6$

$A = 6.69 - 6$

$A = \mathbf{-0.69}$

**ب) حل المتراجحة : $A \leq 0$**

$3x - 6 \leq 0$

$3x \leq 6$

$x \leq 2$

كل قيم $x$ الأصغر من أو تساوى 2 هى حلول لهذه المتراجحة .

**2) أ- نشر العبارة B**

$B = (3x-6)^2 + 9x^2 - 36$

$B = (3x)^2 + (6)^2 - (2)\times(3x)\times(6) + 9x^2 - 36$

$B = 9x^2 + 36 - 36x + 9x^2 - 36$

$B= 18x^2 - 36x$

**ب- استنتاج أن : $B = 6x(3x-6)$**

$B = 18x^2 - 36x$

$B = 6x(3x-6)$

**ج- حل المعادلة $B = 0$**

$6x(3x-6) = 0$

معناه إما : $3x-6 = 0$ أو : $6x = 0$

أي : $x = 2$, أو : $x = 0$

للمعادلة $B = 0$ حلين هما : $x = 2$ أو $\mathbf{x = 0}$

**التمرين الثاني :** (3.5 نقطة) امتحان شهادة التعليم المتوسط دورة 2015

تعطى العبارة : $F = (2x-3)^2 - 16$

1) تحقق بالنّشر أنّ : $F = 4x^2 - 12x - 7$

2) حلّل F إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

3) حل المعادلة : $(2x-7)(2x+1) = 0$

4) احسب F من أجل $x = 1 + \sqrt{2}$ و اكتب النتيجة على الشّكل : $a + b\sqrt{2}$ حيث a و b عددان نسبيان.

**التمرين الأول :** ( حسب نموذج 2015)

تعطى العبارة : $F = (2x-1)^2 - 4$

1) تحقق بالنّشر أنّ : $F = 4x^2 - 4x - 3$

2) حلّل F إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

3) حل المعادلة : $(2x-3)(2x+1) = 0$

4) احسب F من أجل $x = -2\sqrt{3}$ و اكتب النتيجة على الشّكل : $a + b\sqrt{3}$ حيث a و b عددان نسبيان.

**التمرين الثاني :** ( حسب نموذج 2015)

تعطى العبارة : $F = (x-2)^2 - 9$

1) تحقق بالنّشر أنّ : $F = x^2 - 4x - 5$

2) حلّل F إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

3) حل المعادلة : $(x+1)(x-5) = 0$

4) احسب F من أجل $x = 4 + \sqrt{2}$ و اكتب النتيجة على الشّكل : $a + b\sqrt{2}$ حيث a و b عددان نسبيان.

**حل التمرين الثاني لامتحان شهادة التعليم المتوسط (دورة 2015)**

**1) التحقق بالنشر أنّ :** $F = 4x^2 - 12x - 7$

$F = (2x-3)^2 - 16$

$F = (2x)^2 + (3)^2 - (2)x(2x)x(3) - 16$

$F = 4x^2 + 9 - 12x - 16$

$F = 4x^2 - 12x - 7$

**2) تحليل F إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى :**

$F = (2x-3)^2 - 16$

$F = (2x-3)^2 - 4^2$

**متطابقة شهيرة :**
$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$
$a = 2x-3$ , $b=4$

$F = [(2x-3) + 4] \times [(2x-3) - 4]$

$F = (2x+1)(2x-7)$

**3) حل المعادلة:** $(2x-7)(2x+1) = 0$

$(2x+1)(2x-7) = 0$

معناه إما: $2x+1 = 0$ أو $2x-7 = 0$

و منه : $x = \frac{-1}{2}$ أو $x = \frac{7}{2}$

و بالتالي للمعادلة حلان هما : $\frac{-1}{2}$ أو $\frac{7}{2}$

**4) حساب F من أجل $x = 1 + \sqrt{2}$ و كتابة النتيجة على الشكل $a + b\sqrt{2}$**

$F = 4(1+\sqrt{2})^2 - 12(1+\sqrt{2}) - 7$

$F = 4(1+2+2\sqrt{2}) - 12 - 12\sqrt{2} - 7$

$F = 4(3+2\sqrt{2}) - 12 - 12\sqrt{2} - 7$

$F = 12 + 8\sqrt{2} - 12 - 12\sqrt{2} - 7$

$F = -4\sqrt{2} - 7$

$F = -7 - 4\sqrt{2}$ , $a = -7$ , $b = -4$

**حلول نماذج التمرين الثاني ( دورة 2015) :**

**حل التمرين الأول :**

**1) التحقق بالنشر أنّ : $F = 4x^2 - 4x - 3$**

$F = (2x-1)^2 - 4$

$F = (2x)^2 + 1^2 - (2)x(2x)x(1) - 4$

$F = 4x^2 + 1 - 4x - 4$

$F = 4x^2 - 4x - 3$

**2) تحليل إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى :**

$F = (2x-1)^2 - 4$

$F = (2x-1)^2 - 2^2$

**متطابقة شهيرة :**
$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$
$a = 2x-1$ , $b = 2$

$F = (2x-1-2)(2x-1+2)$

$F = (2x-3)(2x+1)$

**3) حل المعادلة : $(2x+1)(2x-3) = 0$**

$(2x+1)(2x-3) = 0$ معناه إما: $2x+1 = 0$ أو $2x-3 = 0$

و منه : $x = \frac{-1}{2}$ أو $x = \frac{3}{2}$ و بالتالي للمعادلة حلان هما : $\frac{-1}{2}$ أو $\frac{3}{2}$

**4) حساب F من أجل $x = -2\sqrt{3}$ و كتابة النتيجة على الشّكل : $a + b\sqrt{3}$**

$F = 4x^2 - 4x - 3$

$F = 4(2-\sqrt{3})^2 - 4(2-\sqrt{3}) - 3$

$F = 4[(2)^2 + (\sqrt{3})^2 - (2)x(2)x(\sqrt{3})] - 4(2-\sqrt{3}) - 3$

$F = 4(4+3-4\sqrt{3}) - 4(2-\sqrt{3}) - 3$

$F = 4(7-4\sqrt{3}) - 4(2-\sqrt{3}) - 3$

$F = 28 - 16\sqrt{3} - 8 + 4\sqrt{3} - 3$

$F = 17 - 12\sqrt{3}$ , $a = 17$ , $b = -12$

**حل التمرين الثاني :**

**1) التحقق بالنشر أنّ : $F = x^2 - 4x - 5$**

$F = (x-2)^2 - 9$

$F = (x)^2 + (2)^2 - (2)(x)(2) - 9$

$F = x^2 + 4 - 4x - 9$

$F = x^2 - 4x - 5$

**2) تحليل إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى :**

$F = (x-2)^2 - 9$

$F = (x-2)^2 - 3^2$

**متطابقة شهيرة :**
$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$
$a = x-2$ , $b = 3$

$F = (x-2-3)(x-2+3)$

$F = (x-5)(x+1)$

**3) حل المعادلة : $(x+1)(x-5) = 0$**

$(x+1)(x-5) = 0$ معناه إما : $x+1 = 0$ أو: $x-5 = 0$

و منه : $x = -1$ أو $x = 5$ و بالتالي للمعادلة حلان هما : $-1$ أو $5$

**4) احسب F من أجل $x = 4 + \sqrt{2}$ و اكتب النتيجة على الشّكل : $a + b\sqrt{2}$**

$F = x^2 - 4x - 5$

$F = (4+\sqrt{2})^2 - 4(4+\sqrt{2}) - 5$

$F = (4)^2 + (\sqrt{2})^2 + (2)x(4)x(\sqrt{2}) - 4(4+\sqrt{2}) - 5$

$F = 16 + 2 + 8\sqrt{2} - 4(4+\sqrt{2}) - 5$

$F = 16 + 2 + 8\sqrt{2} - 16 - 4\sqrt{2} - 5$

$F = -3 + 4\sqrt{2}$ , $a = -3$ , $b = 4$

**تمرين يشمل: درس** : الحساب الحرفي : (النشر و التحليل و المتطابقات الشهيرة) **+ درس** الحساب على الجذور

**التمرين الثاني :** (3.5 نقطة) امتحان شهادة التعليم المتوسط دورة 2008

A عدد حيث : $A = (2 - \sqrt{3})^2$

1) أنشر ثم بسّط A .

2) لتكن العبارة الجبرية E حيث : $E = x^2 - (7 - 4\sqrt{3})$

- احسب القيمة المضبوطة للعبارة E من أجل $x = \sqrt{7}$ .
- حلّل E إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.
- حل المعادلة : $(x - 2 + \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3}) = 0$

**التمرين الأول :** (حسب نموذج 2008)

A عدد حيث : $A = (3 - \sqrt{5})^2$

1) أنشر ثم بسّط A .

2) لتكن العبارة الجبرية E حيث : $E = x^2 - (14 - 6\sqrt{5})$

- احسب القيمة المضبوطة للعبارة E من أجل $x = \sqrt{14}$ .
- حلّل E إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.
- حل المعادلة : $(x - 3 + \sqrt{5})(x + 3 - \sqrt{5}) = 0$

**التمرين الثاني :** (حسب نموذج 2008)

A عدد حيث : $A = (2 + \sqrt{2})^2$

1) أنشر ثم بسّط A .

2) لتكن العبارة الجبرية E حيث : $E = 4x^2 - (6 + 4\sqrt{2})$

- احسب القيمة المضبوطة للعبارة E من أجل $x = \sqrt{2}$ .
- حلّل E إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.
- حل المعادلة : $(2x - 2 - \sqrt{2})(2x + 2 + \sqrt{2}) = 0$

**حل التمرين الثاني لامتحان شهادة التعليم المتوسط (دورة 2008)**

**1) نشر A :**

$A = (2 - \sqrt{3})^2$

$A = (2)^2 + (\sqrt{3})^2 - (2) \times (\sqrt{3}) \times (2)$

$A = 4 + 3 - 4\sqrt{3}$

$A = 7 - 4\sqrt{3}$

**2) حساب قيمة E من أجل : $x = \sqrt{7}$**

$E = x^2 - (7 - 4\sqrt{3})$

$E = (\sqrt{7})^2 - (7 - 4\sqrt{3})$

$E = 7 - 7 + 4\sqrt{3}$

$E = 4\sqrt{3}$

**3) تحليل E إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى :**

بما أن **$(2 - \sqrt{3})^2 = (7 - 4\sqrt{3})$** مما سبق ، فإن :

$E = x^2 - (7 - 4\sqrt{3})$

$E = x^2 - (2 - \sqrt{3})^2$

$E = (x - 2 + \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3})$

$E = (x - 2 + \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3})$

**متطابقة شهيرة :**
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
$a = x$ , $b = 2 - \sqrt{3}$

**4) حل المعادلة $(x - 2 + \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3}) = 0$ :**

$(x - 2 + \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3}) = 0$

معناه : $(x + 2 - \sqrt{3}) = 0$ أو $(x - 2 + \sqrt{3}) = 0$

معناه $x = -2 + \sqrt{3}$ أو $x = 2 - \sqrt{3}$

المعادلة لها حلان هما : **$-2+\sqrt{3}$** و **$2-\sqrt{3}$**

**حلول نماذج التمرين الثاني ( دورة 2008) :**

**حل التمرين الأول :**

**1) نشر A :**

$A = (3 - \sqrt{5})^2$

$A = (3)^2 + (\sqrt{5})^2 - (2) \times (3) \times (\sqrt{5})$

$A = 9 + 5 - 6\sqrt{5}$

$A = 14 - 6\sqrt{5}$

**2) حساب قيمة E من أجل : $x = \sqrt{14}$**

$E = x^2 - (14 - 6\sqrt{5})$

$E = (\sqrt{14})^2 - (14 - 6\sqrt{5})$

$E = 14 - (14 - 6\sqrt{5})$

$E = 14 - 14 + 6\sqrt{5}$

$E = 6\sqrt{5}$

**3) تحليل E إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى :**

بما أن **$(3 - \sqrt{5})^2 = 14 - 6\sqrt{5}$** مما سبق، فإن :

$E = x^2 - (14 - 6\sqrt{5})$

$E = x^2 - (3 - \sqrt{5})^2$

$E = [x - (3 - \sqrt{5})] \times [x + (3 - \sqrt{5})]$

$E = (x - 3 + \sqrt{5})(x + 3 - \sqrt{5})$

**متطابقة شهيرة :**
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
$a = x$ , $b = 3 - \sqrt{5}$

**4) حل المعادلة $(x - 3 + \sqrt{5})(x + 3 - \sqrt{5}) = 0$**

$(x - 3 + \sqrt{5})(x + 3 - \sqrt{5}) = 0$

معناه إما: $(x + 3 - \sqrt{5}) = 0$ أو : $(x - 3 + \sqrt{5}) = 0$

أي إما : $x = -3 + \sqrt{5}$ أو : $x = 3 - \sqrt{5}$

للمعادلة حلان و هما : **$-3+\sqrt{5}$** و **$3-\sqrt{5}$**

**حل التمرين الثاني :**

**1) نشر A :**

$A = (2 + \sqrt{2})^2$

$A = (2)^2 + (\sqrt{2})^2 + (2) \times (2) \times (\sqrt{2})$

$A = 4 + 2 + 4\sqrt{2}$

$A = 6 + 4\sqrt{2}$

**2) حساب قيمة E من أجل : $x = \sqrt{2}$**

$E = 4x^2 - (6 + 4\sqrt{2})$

$E = 4x(\sqrt{2})^2 - 6 - 4\sqrt{2}$

$E = 4 \times 2 - 6 - 4\sqrt{2}$

$E = 8 - 6 - 4\sqrt{2}$

$E = 2 - 4\sqrt{2}$

**3) تحليل E إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى :**

بما أن **$(2 + \sqrt{2})^2 = 6 + 4\sqrt{2}$** مما سبق ، فإن :

$E = 4x^2 - (6 + 4\sqrt{2})$

$E = 4x^2 - (2 + \sqrt{2})^2$

$E = [2x - (2 + \sqrt{2})][2x + (2 + \sqrt{2})]$

$E = (2x - 2 - \sqrt{2})(2x + 2 + \sqrt{2})$

**متطابقة شهيرة :**
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
$a = 2x$ , $b = 2 + \sqrt{2}$

**4) حل المعادلة $(2x - 2 - \sqrt{2})(2x + 2 + \sqrt{2}) = 0$**

$(2x - 2 - \sqrt{2})(2x + 2 + \sqrt{2}) = 0$

معناه إما : $(2x + 2 + \sqrt{2}) = 0$ أو : $(2x - 2 - \sqrt{2}) = 0$

أي إما $x = \frac{-2-\sqrt{2}}{2}$ أو : $x = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$

للمعادلة حلان و هما : $\frac{-2-\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

**التمرين الرابع** : ( **3 نقط**) امتحان شهادة التعليم المتوسط جوان 2008

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$

1) علّم النقطتين A (0 , 4) , B (1 , 0)

2) حدّد العبارة الجبرية للدالة التآلفية $f$ التي تمثيلها البياني هو المستقيم (AB)

3) ليكن المستقيم (Δ) التمثيل البياني للدالة $g$ حيث : $g(x) = \frac{2}{3}x + 2$
- أنشىء ( Δ) .
- أوجد احداثيي M نقطة تقاطع المستقيمين ( AB ) و ( Δ ).

**التمرين الأول** : (حسب نموذج 2008):
المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$
1) علّم النقطتين A (1 , 4) , B (0 , 1)
2) حدّد العبارة الجبرية للدالة التآلفية $f$ التي تمثيلها البياني هو المستقيم (AB)
3) ليكن المستقيم (Δ) التمثيل البياني للدالة $g$ حيث : $g(x) = x - 1$
- أنشىء ( Δ) .
- أوجد احداثيي M نقطة تقاطع المستقيمين ( AB ) و ( Δ ).

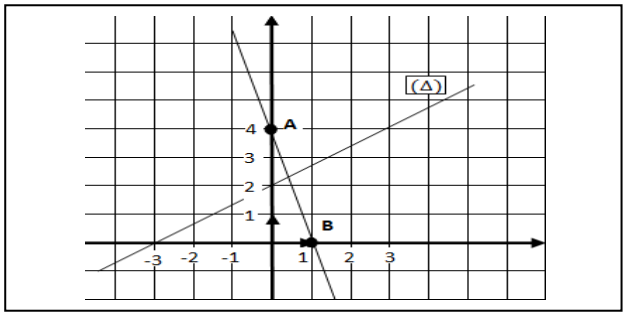
**التمرين الثاني** : (حسب نموذج 2008):
المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$
1) علّم النقطتين A (0 , 4) , B (-1 , 2)
2) حدّد العبارة الجبرية للدالة التآلفية $f$ التي تمثيلها البياني هو المستقيم (AB)
3) ليكن المستقيم (Δ) التمثيل البياني للدالة $g$ حيث : $g(x) = x + 1$
- أنشىء ( Δ) .
- أوجد احداثيي M نقطة تقاطع المستقيمين ( AB ) و ( Δ ).

**التمرين الثالث** : (حسب نموذج 2008):
المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$
1) علّم النقطتين A (3 , -4) , B (-2 , 2)
2) حدّد العبارة الجبرية للدالة التآلفية $f$ التي تمثيلها البياني هو المستقيم (AB)
3) ليكن المستقيم (Δ) التمثيل البياني للدالة $g$ حيث : $g(x) = 3x - 3$
- أنشىء ( Δ) .
- أوجد احداثيي M نقطة تقاطع المستقيمين ( AB ) و ( Δ ).

**التمرين الرابع** : (حسب نموذج 2008):
المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$
1) علّم النقطتين A (-3 , 2) , B (-2 , -1)
2) حدّد العبارة الجبرية للدالة التآلفية $f$ التي تمثيلها البياني هو المستقيم (AB)
3) ليكن المستقيم (Δ) التمثيل البياني للدالة $g$ حيث : $g(x) = 2x - 2$
- أنشىء ( Δ) .
- أوجد احداثيي M نقطة تقاطع المستقيمين ( AB ) و ( Δ ).

## حل التمرين الرابع لامتحان شهادة التعليم المتوسط ( 2008) :

### 1- التمثيل البياني :




### 2- تحديد العبارة الجبرية للدالة $f(x)$ :

لتكن احداثيتي النقطة A (0, 4) هي : A $(x_1, y_1)$

لتكن احداثيتي النقطة B (1, 0) هي : B $(x_2, y_2)$

### أ- طريقة 1 : باستعمال جملة معادلتين :

$f(x)$ = a $x$ + b حيث : $\begin{cases} f(A) = 0 + b = 4 \\ f(B) = a + b = 0 \end{cases}$ معناه : $\begin{cases} b = 4 \ldots (1) \\ a = -4 \ldots (2) \end{cases}$

**حـــذاري :** على التلميذ أن لا يخلط بين : A و B التي هما نقطتان.
و
a و b و هما معاملان توجيه الدالة التآلفية.

بما أن **a = -4** و **b = 4** فإن العبارة الجبرية للدالة : $f(x)$ = a$x$+b هي : **$f(x)$ = -4$x$ +4**

### ب – طريقة 2 : باستعمال القاعدة:

**a =** $\frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1}$ أو : **a=** $\frac{y2-y1}{x2-x1}$

**a =** $\frac{0-4}{1-0} = \frac{-4}{1} = -4$ و منه : **a = - 4**

بما أن الدالة $f(x)$ تشمل النقطة A (0, 4) فإن : $f(0) = 4$ أي : $f(x)$ = a$x$+b=4

بتعويض: **a = -4** و $x = 0$ في $f(x)$ = a$x$+b=4 نجد : **b=4**

**و منه** فإن العبارة الجبرية للدالة : $f(x)$ هي : **$f(x)$ = -4$x$ +4**

### 3-إيجاد احداثيتي M :

لتكن M$(x_M, y_M)$ .

بما أن M هي النقطة تقاطع المستقيمين ( AB ) و ( Δ ) فهي تنتمي إلى الدالة $f(x)$ و الدالة $g(x)$ .

فإن M$(x_M, y_M)$ تحقق المعادلة : $f(x)$ = -4$x$ +4 أي : $y_M = -4x_M + 4$

و M$(x_M, y_M)$ تحقق المعادلة : $g(x) = \frac{2}{3}x + 2$ أي : $y_M = \frac{2}{3}x_M + 2$

لإيجاد احداثيتي النقطة M يكفي حل جملة المعادلتين :

$$\begin{cases} yM = -4xM + 4 \ldots (1) \\ yM = \frac{2}{3}xM + 2 \ldots \ldots (2) \end{cases}$$

بضرب (1) في (-1 ) نجد :

$$\begin{cases} yM = 4xM - 4 \ldots (1) \\ -yM = \frac{2}{3}xM + 2 \ldots \ldots (2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد :

| | | |
|---|---|---|
| $4xM - 4 + \frac{2}{3}xM + 2 = 0 \longrightarrow$ | $\frac{12}{3}xM - 4 + \frac{2}{3}xM + 2 = 0 \longrightarrow$ | $\frac{14}{3}xM - 2 = 0 \longrightarrow$ |
| $\frac{14}{3}xM = 2 \longrightarrow$ | $\frac{3}{14} \times \frac{14}{3}xM = 2 \times \frac{3}{14} \longrightarrow$ | $= \frac{6}{14} = \frac{3}{7} = 0.42\ xM$ |

$$xM = \frac{3}{7}$$

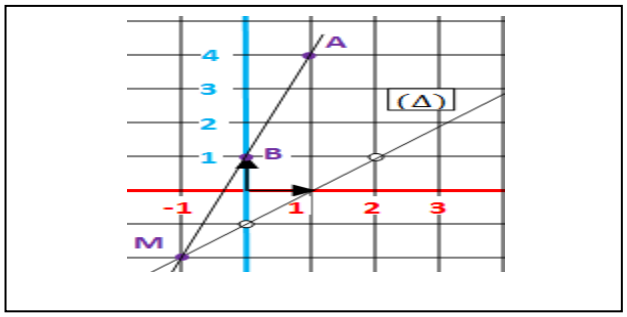
لإيجاد $yM$ نعوض $xM = \frac{3}{7}$ في المعادلة $yM = -4xM + 4$ (2)

نجد : **M =** $\frac{16}{7}y$

إذن احداثيتي **M** هما : **M** $(\frac{3}{7}, \frac{16}{7})$

**حل التمرين الأول :** ( نموذج 2008)

**1- التمثيل البياني :**




**2- تحديد العبارة الجبرية للدالة $f(x)$ :**

لتكن احداثيتي النقطة A (1, 4) هي : A $(x_2, y_2)$

لتكن احداثيتي النقطة B (0, 1) هي : B $(x_1, y_1)$

**أ- طريقة 1 : باستعمال جملة معادلتين :**

$f(x) = ax + b$ حيث : $\begin{cases} f(A) = 1a + b = 4 \\ f(B) = 0 + b = 1 \end{cases}$ معناه : $\begin{cases} a + b = 4 \ldots (1) \\ \mathbf{b = 1} \ldots (2) \end{cases}$

بتعويض **b = 1** في المعادلة (1) نجد: $a + 1 = 4$ أي : **a = 3**

بما أن **a = 3** و **b = 1** فإن العبارة الجبرية للدالة : $f(x) = ax+b$

هي : **$f(x) = 3x + 1$**

**ب – طريقة 2 : باستعمال القاعدة:** $a = \frac{f(x2) - f(x1)}{x2 - x1}$ أو : $a = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$

$a = \frac{4-1}{1-0} = \frac{3}{1} = 3$ و منه : **a = 3**

بما أن الدالة $f(x)$ تشمل النقطة A (1, 4) فإن : $f(1) = 4$ أي : $f(x) = ax+b=4$

بتعويض: **a = 3** في $f(x) = ax+b=4$ نجد : $3x+b=4$ أي : **b=1**

**و منه** فإن العبارة الجبرية للدالة : $f(x)$ هي : **$f(x) = 3x + 1$**

**3-إيجاد احداثيتي M :**

لتكن $M(x_M, y_M)$ .

بما أن M هي النقطة تقاطع المستقيمين ( AB ) و ( Δ ) فهي تنتمي إلى الدالة $f(x)$ و الدالة $g(x)$ .

فإن $M(x_M, y_M)$ تحقق المعادلة : $f(x) = 3x + 1$ أي : $y_M = 3x_M + 1$

و $M(x_M, y_M)$ تحقق المعادلة : $g(x) = x - 1$ أي : $y_M = x_M - 1$

لإيجاد احداثيتي النقطة M يكفي حل جملة المعادلتين :

$$\begin{cases} yM = 3xM + 1 \ldots (1) \\ yM = xM - 1 \ldots \ldots (2) \end{cases}$$

بضرب (2) في (- 3) نجد :

$$\begin{cases} yM = 3xM + 1 \ldots (1) \\ -3yM = -3xM + 3 \ldots \ldots (2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد :

$$-2yM = 4$$

$$\mathbf{yM = -2}$$

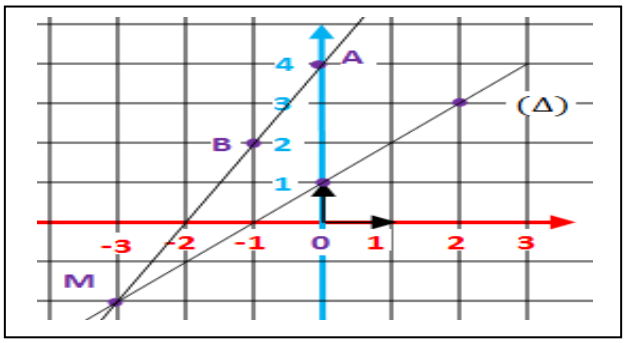
لإيجاد $xM$ نعوض **$yM = -2$** في المعادلة (2) $yM = xM - 1$

و منه : $M - 1 = -2x$ **M = -1x**

إذن احداثيتي **M** هما : **M (-1, -2)**

**حل التمرين الثاني :** ( نموذج 2008)

**1- التمثيل البياني :**




**2- تحديد العبارة الجبرية للدالة $f(x)$ :**

لتكن احداثيتي النقطة A (0, 4) هي : A $(x_2, y_2)$

لتكن احداثيتي النقطة B (-1, 2) هي : B $(x_1, y_1)$

**أ- طريقة 1 : باستعمال جملة معادلتين :**

$f(x) = ax + b$ حيث : $\begin{cases} f(A) = 0a + b = 4 \\ f(B) = -a + b = 2 \end{cases}$ معناه : $\begin{cases} b = 4 \ldots (1) \\ -a + b = 2 \ldots (2) \end{cases}$

بتعويض **b = 4** في المعادلة (1) نجد: $-a + 4 = 2$ أي : **a = 2**

بما أن **a = 2** و **b = 4** فإن العبارة الجبرية للدالة : $f(x) = ax+b$

هي : $\mathbf{f(x) = 2x + 4}$

**ب – طريقة 2 : باستعمال القاعدة:** $a = \frac{f(x2) - f(x1)}{x2 - x1}$ أو : $a = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$

$a = \frac{4-2}{0-(-1)} = \frac{2}{1} = 2$ و منه : **a = 2**

بما أن الدالة $f(x)$ تشمل النقطة A (0, 4) فإن : $f(0) = 4$ أي : $f(x) = 0x+b=4$

بتعويض: **a = 2** في $f(x) = 0x+b=4$ نجد : **b=4**

**و منه** فإن العبارة الجبرية للدالة : $f(x)$ هي : $\mathbf{f(x) = 2x + 4}$

**3-إيجاد احداثيتي M :**

لتكن $M(x_M, y_M)$ .

بما أن M هي النقطة تقاطع المستقيمين ( AB ) و ( Δ ) فهي تنتمي إلى الدالة $f(x)$ و الدالة $g(x)$ .

فإن $M(x_M, y_M)$ تحقق المعادلة : $f(x) = 2x + 4$ أي : $y_M = 2x_M + 4$

و $M(x_M, y_M)$ تحقق المعادلة : $g(x) = x + 1$ أي : $y_M = x_M + 1$

لإيجاد احداثيتي النقطة M يكفي حل جملة المعادلتين :

$$\begin{cases} yM = 2xM + 4 \ldots (1) \\ yM = xM + 1 \ldots \ldots (2) \end{cases}$$

بضرب (2) في (-2 ) نجد :

$$\begin{cases} yM = 2xM + 4 \ldots (1) \\ -2yM = -2xM - 2 \ldots \ldots (2) \end{cases}$$

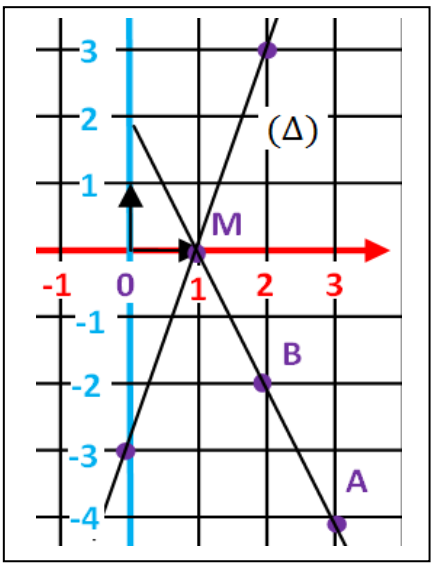
بجمع (1) و (2) نجد :

$$-yM = 2$$
$$\mathbf{yM = -2}$$

لإيجاد $xM$ نعوض $\mathbf{yM = -2}$ في المعادلة (2) $yM = -2 - 1$ و منه : **M = -3x**

إذن احداثيتي **M** هما : **M (-2, -3)**

**حل التمرين الثالث :** ( نموذج 2008)




**1- التمثيل البياني :**

**2- تحديد العبارة الجبرية للدالة $f(x)$ :**

لتكن احداثيتي النقطة A (3, - 4) هي : A $(x_2, y_2)$

لتكن احداثيتي النقطة B (2, -2) هي : B $(x_1, y_1)$

**أ- طريقة 1 : باستعمال جملة معادلتين :**

$f(x) = ax + b$ حيث : $\begin{cases} f(A) = 3a + b = -4 \\ f(B) = 2a + b = -2 \end{cases}$ معناه : $\begin{cases} 3a + b = -4 \ldots (1) \\ 2a + b = -2 \ldots\ldots (2) \end{cases}$

بضرب (1) في (-1) نجد : $\begin{cases} -3a - b = +4 \ldots (1) \\ 2a + b = -2 \ldots\ldots (2) \end{cases}$ بجمع (1) و (2) نجد : $-a = 2$ أي : **a = -2**

بتعويض $a = -2$ في المعادلة (1) نجد: $-6 + b = -4$ أي : **b = 2**

بما أن **a = -2** و $b = 2$ فإن العبارة الجبرية للدالة : $f(x) = ax+b$

هي : **$f(x) = -2x + 2$**

**ب – طريقة 2 : باستعمال القاعدة:** $a = \frac{f(x2) - f(x1)}{x2 - x1}$ أو : $a = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$

$a = \frac{-4-(-2)}{3-2} = \frac{-2}{1} = -2$ و منه : **a = - 2**

بما أن الدالة $f(x)$ تشمل النقطة A (3, -4) فإن : $f(x) = -4$ (3) أي : $f(x) = 3a+b=-4$

بتعويض: **a = -2** في $f(x) = -6+b=-4$ نجد : **b = 2**

**و منه** فإن العبارة الجبرية للدالة : $f(x)$ هي : **$f(x) = -2x + 2$**

**3-إيجاد احداثيتي M :**

لتكن $M(x_M, y_M)$ .

بما أن M هي النقطة تقاطع المستقيمين ( AB ) و ( Δ ) فهي تنتمي إلى الدالة $f(x)$ و الدالة $g(x)$ .

فإن $M(x_M, y_M)$ تحقق المعادلة : $f(x) = -2x + 2$ أي : $y_M = -2x_M + 2$

و $M(x_M, y_M)$ تحقق المعادلة : $g(x) = 3x - 3$ أي : $y_M = 3x_M - 3$

لإيجاد احداثيتي النقطة M يكفي حل جملة المعادلتين :

$$\begin{cases} yM = -2xM + 2 \ldots (1) \\ yM = 3xM - 3 \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

بضرب (2) في (-1 ) نجد :

$$\begin{cases} yM = -2xM + 2 \ldots (1) \\ -yM = -3xM + 3 \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد :

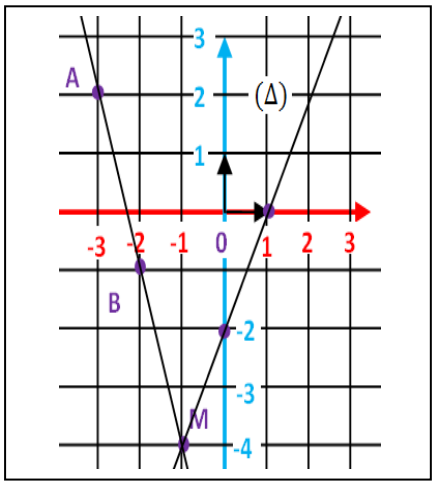
$$-5xM + 5 = 0$$

$$xM = 1$$

لإيجاد $yM$ نعوض $xM = 1$ في المعادلة (1) $yM = -2 + 2$ و منه : **M = 0y**

إذن احداثيتي **M** هما : **M (1, 0)**

**حل التمرين الرابع :** ( نموذج 2008)




**1- التمثيل البياني :**

**2- تحديد العبارة الجبرية للدالة $f(x)$ :**

لتكن احداثيتي النقطة A (-3, 2) هي : A $(x_1, y_1)$

لتكن احداثيتي النقطة B (-2, -1) هي : B $(x_2, y_2)$

**أ- طريقة 1 : باستعمال جملة معادلتين :**

$f(x) = ax + b$ حيث : $\begin{cases} f(A) = -3a + b = 2 \\ f(B) = -2a + b = -1 \end{cases}$ معناه : $\begin{cases} -3a + b = 2 \ldots (1) \\ -2a + b = -1 \ldots \ldots (2) \end{cases}$

بضرب (1) في (-1) نجد : $\begin{cases} 3a - b = -2 \ldots (1) \\ -2a + b = -1 \ldots \ldots (2) \end{cases}$ بجمع (1) و (2) نجد : ي : **a = -3**

بتعويض **$a = -3$** في المعادلة (1) نجد: $2 + b = 9$ أي : **b = -7**

بما أن **a = -3** و **$b = -7$** فإن العبارة الجبرية للدالة : $f(x) = ax+b$

هي : **$f(x) = -3x - 7$**

**ب – طريقة 2 : باستعمال القاعدة:** $a = \frac{f(x2) - f(x1)}{x2 - x1}$ أو : $a = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$

$a = \frac{-1-2}{-2-(-3)} = \frac{-3}{1} = -3$ و منه : **a = - 3**

بما أن الدالة $f(x)$ تشمل النقطة A (-3, 2) فإن : $f(-3) = 2$ أي : $f(x) = -3a+b=2$

بتعويض: **a = -3** في $f(x) = 9+b=2$ نجد : **b=-7**

**و منه** فإن العبارة الجبرية للدالة : $f(x)$ هي : **$f(x) = -3x - 7$**

**3-إيجاد احداثيتي M :**

لتكن M$(x_M, y_M)$ .

بما أن M هي النقطة تقاطع المستقيمين ( AB ) و ( Δ ) فهي تنتمي إلى الدالة $f(x)$ و الدالة $g(x)$ .

فإن M$(x_M, y_M)$ تحقق المعادلة : $f(x) = -3x - 7$ أي : $y_M = -3x_M - 7$

و M$(x_M, y_M)$ تحقق المعادلة : $g(x) = 2x - 2$ أي : $y_M = 2x_M - 2$

لإيجاد احداثيتي النقطة M يكفي حل جملة المعادلتين :

$\begin{cases} yM = -3xM - 7 \ldots (1) \\ yM = 2xM - 2 \ldots \ldots (2) \end{cases}$

بضرب (2) في (-1 ) نجد :

$\begin{cases} yM = -3xM - 7 \ldots (1) \\ -yM = -2xM + 2 \ldots \ldots (2) \end{cases}$

بجمع (1) و (2) نجد :

$-5xM - 5 = 0$

$xM = -1$

لإيجاد $yM$ نعوض **$xM = -1$** في المعادلة (1) $yM = 3 - 7$ و منه : **M = - 4y**

إذن احداثيتي **M** هما : **M (-1, -4)**

**التمرين الثالث** : ( **2.5 نقطة**) امتحان شهادة التعليم المتوسط جوان 2016

$f$ دالة تآلفية تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{\imath}\,,\overrightarrow{\jmath})$ يشمل النقطتين A (2, 5) و B (-1 , -4) .

1) بيّن أنّ العبارة الجبرية للدالة التآلفية $f$ هي : $f(x) = 3x - 1$.
2) لتكن النقطة C (4 , 11) من المستوي ،
هل النقط A, B, C على استقامة واحدة ؟
3) أوجد العدد الذي صورته 29 بالدالة $f$ .

**التمرين الأول** : (حسب نموذج 2016)

$f$ دالة تآلفية تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{\imath}\,,\overrightarrow{\jmath})$ يشمل النقطتين A (5, 7) و B (0, -3) .
1) بيّن أنّ العبارة الجبرية للدالة التآلفية $f$ هي : $f(x) = 2x - 3$.
2) لتكن النقطة C (1- , 1) من المستوي ، هل النقط A, B, C على استقامة واحدة ؟
3) أوجد العدد الذي صورته 11 بالدالة $f$ .

**التمرين الثاني** : (حسب نموذج 2016)

$f$ دالة تآلفية تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{\imath}\,,\overrightarrow{\jmath})$ يشمل النقطتين A (-2, -2) و B (-1, 1) .
1) بيّن أنّ العبارة الجبرية للدالة التآلفية $f$ هي : $f(x) = 3x + 4$.
2) لتكن النقطة C (2 , 10) من المستوي ، هل النقط A, B, C على استقامة واحدة ؟
3) أوجد العدد الذي صورته 13 بالدالة $f$ .

**التمرين الثالث :** (حسب نموذج 2016)

$f$ دالة تآلفية تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{\imath}\,,\overrightarrow{\jmath})$يشمل النقطتين A (2, -6) و B (3, -11) .
1) بيّن أنّ العبارة الجبرية للدالة التآلفية $f$ هي : $f(x) = -5x + 4$.
2) لتكن النقطة C (0 , 4) من المستوي ، هل النقط A, B, C على استقامة واحدة ؟
3) أوجد العدد الذي صورته 14 بالدالة $f$ .

**التمرين الرابع** : (حسب نموذج 2016)

$f$ دالة تآلفية تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{\imath}\,,\overrightarrow{\jmath})$ يشمل النقطتين A (4, -2) و B (3, -1) .
1) بيّن أنّ العبارة الجبرية للدالة التآلفية $f$ هي : $f(x) = -x + 2$.
2) لتكن النقطة C (2 , 3) من المستوي ، هل النقط A, B, C على استقامة واحدة ؟
3) أوجد العدد الذي صورته 4- بالدالة $f$ .

**حل التمرين الثالث لامتحان شهادة التعليم المتوسط ( 2016 ) :**

لدينا $\begin{cases} f(x) = 3x - 1 \\ f(x) = ax + b \end{cases}$ معملان توجيه الدالة $f(x)$ هما **a = 3** و **b = -1**

لإثبات أن العبارة الجبرية للدالة التآلفية للدالة $f(x)$ هي : $3x - 1$ يجب إثبات أن معاملان التوجيه a وb يعادلان 3 = a و -= b 1

**حـــذاري :** على التلميذ أن لا يخلط بين : **A** و **B** التي هما نقطتان.
و
**a** و **b** و هما معاملان توجيه الدالة

**1) إثبات أن $f(x) = 3x - 1$ :**

**أ- طريقة 1 : باستعمال جملة معادلتين :**

**1- كتابة المعادلة الأولى :**

بما أن الدالة $f(x)$ هي دالة تآلفية فتمثيلها البياني هو المستقيم الذي معادلته : y+bx = a

لدينا الدالة $f(x)$ تشمل النقطة A (2, 5) و منه بتعويض: **2**$x$= و **5**y = في معادلة المستقيم y+b**x** = a

نحصل على المعادلة : **5** = **2** a + b ...(1)

**2- كتابة المعادلة الثانية :**

بما أن الدالة$f(x)$ هي دالة تآلفية فتمثيلها البياني هو المستقيم الذي معادلته : y+bx = a

لدينا الدالة $f(x)$ تشمل النقطة B ( **-1**, **-4**) و منه بتعويض: **-1**$x$ = و **-4**y = في معادلة المستقيم y+b**x** = a

نحصل على المعادلة : **-4** = **-1** a + b أي **-4** = **-** a + b ...(2)

من المعادلة (1) و المعادلة (2) نحصل على جملة المعادلتين التالية : $\begin{cases} 2a + b = 5 \ldots\ldots (1) \\ -a + b = -4 \ldots (2) \end{cases}$

بضرب المعادلة (1) في -1 نحصل على : $\begin{cases} -2a - b = -5 \ldots (1) \\ -a + b = -4 \ldots (2) \end{cases}$

بجمع (1) و (2) نحصل على : -3a = -9 أي : **a = 3**

بتعويض a=3 في المعادلة (2) نحصل على : -3 + b = -4 و منه : **b= -1**

بما أن : ***a = 3*** و ***b = -1***
فإن العبارة الجبرية للدالة : $f(x)$ = **a**$x$ + **b** هي : ***(x) = 3x -1f***

**ب – طريقة 2 : باستعمال القاعدة:** $a = \frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1}$ أو : $a = \frac{y2-y1}{x2-x1}$

لتكن احداثيتي النقطة A (2, 5) هي : A $(x_1, y_1)$

لتكن احداثيتي النقطة B (-1, -4) هي : B $(x_2, y_2)$

**1- التحقق من أن a = 3 :**

باستعمال القاعدة : $a = \frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1}$ أو $a = \frac{y2-y1}{x2-x1}$ بالتعويض نجد : $a = \frac{-4-5}{-1-2} = \frac{-9}{-3} = 3$ إذن : **a = 3**

**2- التحقق من أن b = -1 :**

الدالة $f(x)$ تشمل النقطة A (**2**, **5**) و بتعويض: **2**$x$= و **5**y = في معادلة المستقيم y+b**x** = a

نحصل على المعادلة : **5** = **2** a + b و بتعويض a =3 نجد : 5 = 6 + b و منه : **b= -1**

بما أن : ***a = 3*** و ***b = -1***
فإن العبارة الجبرية للدالة : $f(x)$ = **a**$x$ + **b** هي : ***(x) = 3x -1f***

**2- ) معرفة هل النقط A ، B ، C على استقامة واحدة :**

A ، B ، C على استقامة واحدة ، معناه الدالة $f(x)$ تشمل النقطة C

أي النقطة C ( **4** , **11**) تحقق المعادلة $3x - 1y$ = و بتعويض **4**$x$ = و **11**$y$ = في معادلة المستقيم

نحصل على : $3 (4) - 111$ = أي : $12 - 111$ = 11 و منه النقطة C تحقق المعادلة المستقيم

أي النقطة C على استقامة واحدة مع النقطتين A و B .

**3)- إيجاد العدد الذي صورته 29 بالدالة $f$**

لدينا : $f(x) = 29$ و منه : $3x - 1 = 29$ و عليه: $3x = 30$ أي : $x = \frac{30}{3} = 10$

و بالتالي العدد الذي صورته 29 بالدالة $f$ هو **10**

**حل التمرين الأول ( نموذج 2016) :**

لدينا $\begin{cases} f(x) = 2x - 3 \\ f(x) = ax + b \end{cases}$ معملان توجيه الدالة $f(x)$ هما **a = 2** و **b = -3**

لإثبات أن العبارة الجبرية للدالة التآلفية للدالة $f(x)$ هي : $2x - 3$ يجب إثبات أن معاملان التوجيه a وb يعادلان a = 2 و b =- 3

**1) إثبات أن $f(x) = 2x - 3$ :**

**أ- طريقة 1 : باستعمال جملة معادلتين :**

**1- كتابة المعادلة الأولى :**

بما أن الدالة $f(x)$ هي دالة تآلفية فتمثيلها البياني هو المستقيم الذي معادلته : y +bx = a

لدينا الدالة $f(x)$ تشمل النقطة A (5, 7) و منه بتعويض: **5x**= و **7y** = في معادلة المستقيم y +bx = a

نحصل على المعادلة : **7 = 5** a + b ...(1)

**2- كتابة المعادلة الثانية :**

بما أن الدالة$f(x)$ هي دالة تآلفية فتمثيلها البياني هو المستقيم الذي معادلته : y +bx = a

لدينا الدالة $f(x)$ تشمل النقطة B (**0**, **-3**) و منه بتعويض: **0x** = و **-3y** = في معادلة المستقيم y +bx = a

نحصل على المعادلة : **-3 = 0** a + b أي b = - 3 ...(2)

من المعادلة (1) و المعادلة (2) نحصل على جملة المعادلتين التالية : $\begin{cases} 5a + b = 7 \dots\dots (1) \\ b = -3 \dots (2) \end{cases}$

بتعويض b= -3 في المعادلة (1) نحصل على : 5a -3 = 7 و منه : **a= 2**

بما أن : **a = 2** و **b = -3**

فإن العبارة الجبرية للدالة : $af(x) + b$ = a $x$ + b هي : **f(x) = 2x -3**

**ب – طريقة 2 : باستعمال القاعدة:** $a = \frac{f(x2) - f(x1)}{x2 - x1}$ أو : $a = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$

لتكن احداثيتي النقطة A (5, 7) هي : A ($x_1$, $y_1$)

لتكن احداثيتي النقطة B (0, -3) هي : B ( $x_2$, $y_2$)

**1- التحقق من أن a = 2 :**

باستعمال القاعدة : $a = \frac{f(x2) - f(x1)}{x2 - x1}$ أو $a = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$ بالتعويض نجد : $a = \frac{-3-7}{0-5} = \frac{-10}{-5} = 2$ إذن : **a = 2**

**2- التحقق من أن b = -3 :**

الدالة $f(x)$ تشمل النقطة A (**5**, **7**) و بتعويض: **5x**= و **7y** = في معادلة المستقيم y +bx = a

نحصل على المعادلة : **7 = 5** a + b و بتعويض a =2 نجد : 10 + b = 7 و منه : **b= -3**

بما أن : **a = 2** و **b = -3**

فإن العبارة الجبرية للدالة : $af(x) + b$ = a $x$ + b هي : **f(x) = 2x -3**

**2- ) معرفة هل النقط A ، B ، C على استقامة واحدة :**

A ، B ، C على استقامة واحدة ، معناه الدالة $f(x)$ تشمل النقطة C

أي النقطة C ( **1** , **-1**) تحقق المعادلة $2x - 3y$ = و بتعويض **1x** = و **-1y** = في معادلة المستقيم

نحصل على : $-1 - 3(1)$ = 2 أي : $-1 - 3 = 2$ أي : -1=-1 و منه النقطة C تنتمي إلى معادلة المستقيم

أي النقطة C على استقامة واحدة مع النقطتين A و B .

**3)- إيجاد العدد الذي صورته 11 بالدالة $f$**

لدينا : $f(x) = 11$ و منه : $2x - 3 = 11$ و عليه: $2x = 14$ أي : $x = 7$

و بالتالي العدد الذي صورته 11 بالدالة $f$ هو **7**

**حل التمرين الثاني ( نموذج 2016) :**

لدينا $\begin{cases} f(x) = 3x + 4 \\ f(x) = ax + b \end{cases}$ معملان توجيه الدالة $f(x)$ هما **a = 3** و **b = 4**

لإثبات أن العبارة الجبرية للدالة التآلفية للدالة $f(x)$ هي : $3x + 4$ يجب إثبات أن معاملان التوجيه a وb يعادلان a = 3 و b =4

**1) إثبات أن $f(x) = 3x + 4$ :**

**أ- طريقة 1 : باستعمال جملة معادلتين :**

**1- كتابة المعادلة الأولى :**

بما أن الدالة $f(x)$ هي دالة تآلفية فتمثيلها البياني هو المستقيم الذي معادلته : y = a $x$ +b

لدينا الدالة $f(x)$ تشمل النقطة A ( -2, -2) و منه بتعويض: $x$ = -2 و y = -2 في معادلة المستقيم y = a $x$ +b

نحصل على المعادلة : -2 = -2 a + b ...(1)

**2- كتابة المعادلة الثانية :**

بما أن الدالة $f(x)$ هي دالة تآلفية فتمثيلها البياني هو المستقيم الذي معادلته : y = a $x$ +b

لدينا الدالة $f(x)$ تشمل النقطة B ( -1, 1) و منه بتعويض: $x$ = -1 و y = 1 في معادلة المستقيم y = a $x$ +b

نحصل على المعادلة : 1 = -1 a + b أي 1 = −a + b ...(2)

من المعادلة (1) و المعادلة (2) نحصل على جملة المعادلتين التالية : $\begin{cases} -2a + b = -2 \dots\dots (1) \\ -a + b = 1 \dots (2) \end{cases}$

بضرب المعادلة (1) في -1 نحصل على : $\begin{cases} 2a - b = 2 \dots (1) \\ -a + b = 1 \dots (2) \end{cases}$

بجمع (1) و (2) نحصل على : **a = 3**

بتعويض a=3 في المعادلة (2) نحصل على : 1 = b + 3- و منه : **b= 4**

بما أن : **a = 3** و **b = 4**

فإن العبارة الجبرية للدالة : $f(x)$ = **a** $x$ + **b** هي : **$f(x) = 3x + 4$**

**ب – طريقة 2 : باستعمال القاعدة:** a = $\frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1}$ أو : a= $\frac{y2-y1}{x2-x1}$

لتكن احداثيتي النقطة A (-2, -2) هي : A ($x_1$, $y_1$)

لتكن احداثيتي النقطة B (-1, 1) هي : B ( $x_2$, $y_2$)

**1- التحقق من أن a = 3 :**

باستعمال القاعدة : a = $\frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1}$ أو a = $\frac{y2-y1}{x2-x1}$ بالتعويض نجد : a = $\frac{1-(-2)}{-1-(-2)}$ =$\frac{3}{1}$ = **3** إذن : **a = 3**

**2- التحقق من أن b = 4 :**

الدالة $f(x)$ تشمل النقطة A ( -2, -2) و بتعويض: $x$ = -2 و y = -2 في معادلة المستقيم y = a $x$ +b

نحصل على المعادلة : -2 = -2 a + b و بتعويض a =3 نجد : -2 = -6 + b و منه : **b= 4**

بما أن : **a = 3** و **b = 4**

فإن العبارة الجبرية للدالة : $f(x)$ = **a** $x$ + **b** هي : **$f(x) = 3x + 4$**

**2- ) معرفة هل النقط A ، B ، C على استقامة واحدة :**

A ، B ، C على استقامة واحدة ، معناه الدالة $f(x)$ تشمل النقطة C

أي النقطة C ( **2** , **10**) تحقق المعادلة $y$ = 3$x$ +4 و بتعويض $x$ = **2** و $y$ = **10** في معادلة المستقيم

نحصل على : **10** = 3 (**2**) +4**10** أي : **10** = 10 أي : 10=10 و منه النقطة C تحقق المعادلة المستقيم

أي النقطة C على استقامة واحدة مع النقطتين A و B .

**3)- إيجاد العدد الذي صورته 13 بالدالة $f$**

لدينا : $f(x)$ = 13 و منه : 3 $x$ 4 = 13 و عليه: 3 $x$ = 9 أي : $3x$ =

و بالتالي العدد الذي صورته 13 بالدالة $f$ هو **3**

**حل التمرين الثالث ( نموذج 2016) :**

لدينا $\begin{cases} f(x) = -5x + 4 \\ f(x) = ax + b \end{cases}$ معملان توجيه الدالة $f(x)$ هما a = -5 و b = 4

لإثبات أن العبارة الجبرية للدالة التآلفية للدالة $f(x)$ هي: $-5x + 4$ يجب إثبات أن معاملان التوجيه a وb يعادلان a = -5 و b =4

**1) إثبات أن $f(x)$ = -5 $x$ +4 :**

**أ- طريقة 1 : باستعمال جملة معادلتين :**

**1- كتابة المعادلة الأولى :**

بما أن الدالة $f(x)$ هي دالة تآلفية فتمثيلها البياني هو المستقيم الذي معادلته : y = a $x$ +b

لدينا الدالة $f(x)$ تشمل النقطة A (2, -6) و منه بتعويض: $x$=2 و y = -6 في معادلة المستقيم y = a $x$ +b

نحصل على المعادلة : 2 a + b = -6 ...(1)

**2- كتابة المعادلة الثانية :**

بما أن الدالة$f(x)$ هي دالة تآلفية فتمثيلها البياني هو المستقيم الذي معادلته : y = a $x$ +b

لدينا الدالة $f(x)$ تشمل النقطة B (3, -11) و منه بتعويض: $x$ = 3 و y = -11 في معادلة المستقيم y = a $x$ +b

نحصل على المعادلة : 3 a + b = -11 أي ...(2) 3 a + b = -11

من المعادلة (1) و المعادلة (2) نحصل على جملة المعادلتين التالية : $\begin{cases} 2a + b = -6 \dots \dots (1) \\ 3a + b = -11 \dots (2) \end{cases}$

بضرب المعادلة (2) في -1 نحصل على : $\begin{cases} 2a + b = -6 \dots (1) \\ -3a - b = 11 \dots (2) \end{cases}$

بجمع (1) و (2) نحصل على : -a = 5 أي : **a = -5**

بتعويض a=-5 في المعادلة (1) نحصل على : -10 + b = -6 و منه : **b= 4**

بما أن : ***a = -5*** و ***b = 4***

فإن العبارة الجبرية للدالة : $f(x)$ = ***a*** $x$ + ***b*** هي : ***f*(x) = -5x +4***

**ب – طريقة 2 : باستعمال القاعدة:** $a = \frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1}$ أو : $a = \frac{y2-y1}{x2-x1}$

لتكن احداثيتي النقطة A (2, -6) هي : A $(x_1, y_1)$

لتكن احداثيتي النقطة B (3, -11) هي : B $(x_2, y_2)$

**1- التحقق من أن a = -5 :**

باستعمال القاعدة : $a = \frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1}$ أو $a = \frac{y2-y1}{x2-x1}$ بالتعويض نجد : $a = \frac{-11-(-6)}{3-2} = \frac{-5}{1}$ = -5 إذن : **a = -5**

**2- التحقق من أن b = 4 :**

الدالة $f(x)$ تشمل النقطة A (2, -6) و بتعويض: $x$=2 و y = -6 في معادلة المستقيم y = a $x$ +b

نحصل على المعادلة : 2 a + b = -6 و بتعويض a =-5 نجد : -10 + b = -6 و منه : **b= 4**

بما أن : ***a = -5*** و ***b = 4***

فإن العبارة الجبرية للدالة : $f(x)$ = ***a*** $x$ + ***b*** هي : ***f*(x) = -5x +4***

**2- ) معرفة هل النقط A ، B ، C على استقامة واحدة :**

A ، B ، C على استقامة واحدة ، معناه الدالة $f(x)$ تشمل النقطة C

أي النقطة C ( 0 , 4) تحقق المعادلة $y$ = -5$x$ +4 و بتعويض $x$ = 0 و y = 4 في معادلة المستقيم

نحصل على : 4 = -5 (0) +4 أي : 4 = 4 و منه النقطة C تحقق المعادلة المستقيم

أي النقطة C على استقامة واحدة مع النقطتين A و B .

**3)- إيجاد العدد الذي صورته 14 بالدالة $f$**

لدينا : $f(x)$ = 14 و منه : 14 = -5 $x$+ 4 و عليه: -5 $x$ = 10 أي : $a = \frac{10}{-5}$ = -2 أي : -2$x$

و بالتالي العدد الذي صورته 14 بالدالة $f$ هو **-2**

**حل التمرين الرابع ( نموذج 2016) :**

لدينا $\begin{cases} f(x) = -x + 2 \\ f(x) = ax + b \end{cases}$ معملان توجيه الدالة $f(x)$ هما **a = -1** و **b = 2**

لإثبات أن العبارة الجبرية للدالة التآلفية للدالة $f(x)$ هي: $-x + 2$ يجب إثبات أن معاملان التوجيه a وb يعادلان a = -1 و b =2

**1) إثبات أن $f(x) = -x + 2$ :**

**أ- طريقة 1 : باستعمال جملة معادلتين :**

**1- كتابة المعادلة الأولى :**

بما أن الدالة $f(x)$ هي دالة تآلفية فتمثيلها البياني هو المستقيم الذي معادلته : y = a $x$ +b

لدينا الدالة $f(x)$ تشمل النقطة A (**4**, **-2**) و منه بتعويض: **4**$x$= و **-2**y = في معادلة المستقيم y = a **$x$** +by

نحصل على المعادلة : **4** a + b = **-2** ...(1)

**2- كتابة المعادلة الثانية :**

بما أن الدالة$f(x)$ هي دالة تآلفية فتمثيلها البياني هو المستقيم الذي معادلته : y = a $x$ +b

لدينا الدالة $f(x)$ تشمل النقطة B (**3**, **-1**) و منه بتعويض: **3**$x$ = و **-1**y = في معادلة المستقيم y = a **$x$** +by

نحصل على المعادلة : **3** a + b = **-1** أي **3** a + b = **-1** ...(2)

من المعادلة (1) و المعادلة (2) نحصل على جملة المعادلتين التالية : $\begin{cases} 4a + b = -2 \dots\dots (1) \\ 3a + b = -1 \dots (2) \end{cases}$

بضرب المعادلة (1) في -1 نحصل على : $\begin{cases} -4a - b = 2 \dots (1) \\ 3a + b = -1 \dots (2) \end{cases}$

بجمع (1) و (2) نحصل على : -a = 1 أي : **a = -1**

بتعويض a=-1 في المعادلة (2) نحصل على : -3 + b = -1 و منه : **b= 2**

بما أن : **a= -1** و **b = 2**

فإن العبارة الجبرية للدالة : $f(x)$ = **a** $x$ + **b** هي : **$f(x) = -x + 2$**

**ب – طريقة 2 : باستعمال القاعدة:** a = $\frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1}$ أو : a= $\frac{y2-y1}{x2-x1}$

لتكن احداثيتي النقطة A (4, -2) هي : A ($x_1, y_1$)

لتكن احداثيتي النقطة B (3, -1) هي : B ( $x_2, y_2$)

**1- التحقق من أن a = -1 :**

باستعمال القاعدة : a = $\frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1}$ أو a = $\frac{y2-y1}{x2-x1}$ بالتعويض نجد : a = $\frac{-1-(-2)}{3-4}=\frac{1}{-1}$ = **-1** إذن : **a = -1**

**2- التحقق من أن b = 2 :**

الدالة $f(x)$ تشمل النقطة A (**4**, **-2**) و بتعويض: **4**$x$ = و **-2**y = في معادلة المستقيم y = a **$x$** +by

نحصل على المعادلة : **4** a + b = **-2** و بتعويض a =-1 نجد : -4 + b = -2 و منه : **b= 2**

بما أن : **a= -1** و **b = 2**

فإن العبارة الجبرية للدالة : $f(x)$ = **a** $x$ + **b** هي : **$f(x) = -x + 2$**

**2- ) معرفة هل النقط A ، B ، C على استقامة واحدة :**

A ، B ، C على استقامة واحدة ، معناه الدالة $f(x)$ تشمل النقطة C

أي النقطة C ( **2** , **3**) تحقق المعادلة **2**$y$ = **-**$x$ +2 و بتعويض **2**$x$ = و **3**$y$ = في معادلة المستقيم

نحصل على : **3**2+ (**2**) -1 = أي : **0**3 = و منه النقطة C لا تحقق معادلة المستقيم

أي النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة .

**3)- إيجاد العدد الذي صورته 4- بالدالة $f$**

لدينا : $f(x)$ = -4 و منه : -4 = 2 +$x$ - و عليه: -6 = -$x$ أي : 6$x$ =

و بالتالي العدد الذي صورته 4- بالدالة $f$ هو **6**

**المسألة** : ( **8 نقاط**) امتحان شهادة التعليم المتوسط (2011)

تقترح وكالة تجارية للاتصالات الهاتفية للتسديد الشهري الصيغ الثلاث الآتية :

الصّيغة (أ) : دفع 11 دينارا للدقيقة.
الصّيغة (ب) : دفع 600 دينار اشتراكاً و 5 دنانير للدقيقة.
الصّيغة (ج) : دفع 1200 دينار اشتراكاً و 3 دنانير للدقيقة.

1) احسب تكلفة المكالمات التي مدّتها 100 دقيقة في كلّ من الصّيغ الثّلاث.
2) $y$ يمثل الكلفة بالدنانير ، $x$ يمثل المدة بالدقائق.

اكتب $y$ بدلالة $x$ في كلّ من الصّيغ الثّلاث. و في نفس المعلم، مثّل بيانيا الصّيغ الثّلاث و استنتج الفترة الزمنية التي تكون خلالها الصّيغة (ب) أقل تكلفة.

( يمكنك اختيار المعلم بحيث 1cm تمثل 50 دقيقة على محور الفواصل و 1 cm تمثل 200DA على محور التراتيب).

**حل مسألة امتحان شهادة التعليم المتوسط (2011 ):**

**1) تكلفة المكالمات حسب الصيغ هي على الترتيب :**

**الصيغة أ** : 11 x 100 = 1 100 DA =

**الصيغة ب** : 600 + 5 x 100 = 1 100 DA =

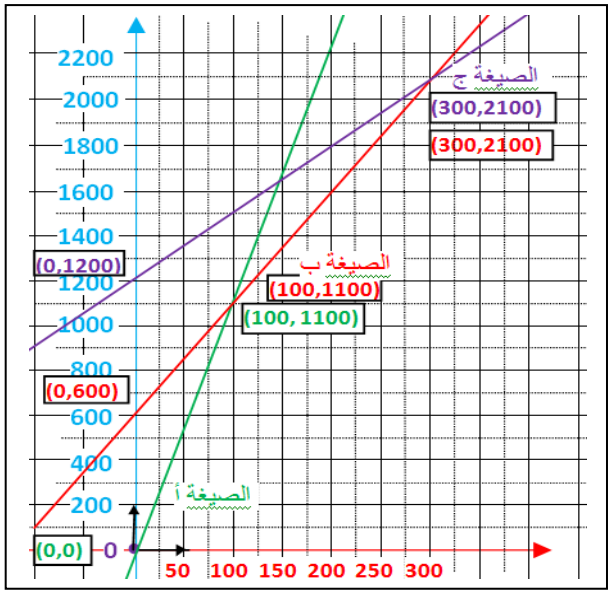
**الصيغة ج** : 1200 + 3 x 100 = 1 500 DA =

**2) كتابة الكلفة بدلالة المدة حسب الصيغ الثلاث على الترتيب :**

$y = 11\,x$
$y = 5\,x + 600$
$y = 3\,x + 1200$

**التمثيل البياني :**

| الصيغة | إحداثيا النقطة | |
|---|---|---|
| | $x$ | y |
| الأولى | 0 | 0 |
| | 100 | 1100 |
| الثانية | 0 | 600 |
| | 100 | 1100 |
| الثالثة | 0 | 1200 |
| | 100 | 1500 |




**3) استنتاج الفترة الزمنية التي تكون خلالها الصيغة (ب) أقل تكلفة:**
من خلال التمثيل البياني نجد أن المستقيم الذي يمثل الصيغة (ب) يقع أسفل المستقيمين الممثلين للصيغتين (أ) و (ج) في الفترة الزمنية بين 100 و 300 دقيقة.
و منه نستنتج أن الفترة الزمنية التي تكون خلالها الصيغة (ب) أقل تكلفة هي : من 100 إلى 300 دقيقة.

**المسألة الأولى :** (حسب نموذج 2011):

تقترح شركة النقل البري للتسديد الشهري الصيغ الثلاث الآتية :

الصّيغة (أ) : دفع 50 دينارا لتذكرة السفر الواحدة.
الصّيغة (ب) : دفع 50 دينار اشتراكا و 40 دنانير لتذكرة السفر.
الصّيغة (ج) : دفع 100 دينار اشتراكا و 35 دنانير لتذكرة السفر.

1) احسب تكلفة 5 أسفار في كلّ من الصّيغ الثلاث.
2) $y$ يمثل الكلفة بالدنانير ، $x$ يمثل عدد الأسفار.
اكتب $y$ بدلالة $x$ في كل من الصّيغ الثّلاث. و في نفس المعلم، مثّل بيانيا الصّيغ الثّلاث و استنتج عدد الأسفار التي تكون خلالها الصّيغة (ج) أقل تكلفة.

( يمكنك اختيار المعلم بحيث 1cm تمثل 1 سفر واحد على محور الفواصل و 1 cm تمثل 50 DA على محور التراتيب).

**المسألة الثانية :** (حسب نموذج 2011):

يقترح مطعم الأكل السريع الصيغ الثلاث الآتية :

الصّيغة (أ) : دفع 300 دينارا للوجبة الكاملة الواحدة.
الصّيغة (ب) : دفع 350 دينار اشتراكا و 150 دنانير للوجبة الكاملة.
الصّيغة (ج) : دفع 600 دينار اشتراكا و 100 دنانير للوجبة الكاملة.

1) احسب تكلفة 5 وجبات في كلّ من الصّيغ الثلاث.
2) $y$ يمثل الكلفة بالدنانير ، $x$ يمثل عدد الوجبات.
اكتب $y$ بدلالة $x$ في كل من الصّيغ الثّلاث. و في نفس المعلم، مثّل بيانيا الصّيغ الثّلاث و استنتج عدد الوجبات التي تكون خلالها الصّيغة (ج) أقل تكلفة.

( يمكنك اختيار المعلم بحيث 1cm تمثل 1 وجبة واحدة على محور الفواصل و 0.5 cm تمثل 100DA على محور التراتيب).

## حل المسألة الأولى :

**1) تكلفة 5 أسفار حسب الصيغ هي على الترتيب :**

**الصيغة أ** : $= 50 \times 5 = 250$ DA

**الصيغة ب** : $= 50 + 5 \times 40 = 250$ DA

**الصيغة ج** : $= 100 + 35 \times 5 = 275$ DA

**2) كتابة الكلفة بدلالة عدد الأسفار حسب الصيغ الثلاث على الترتيب :**

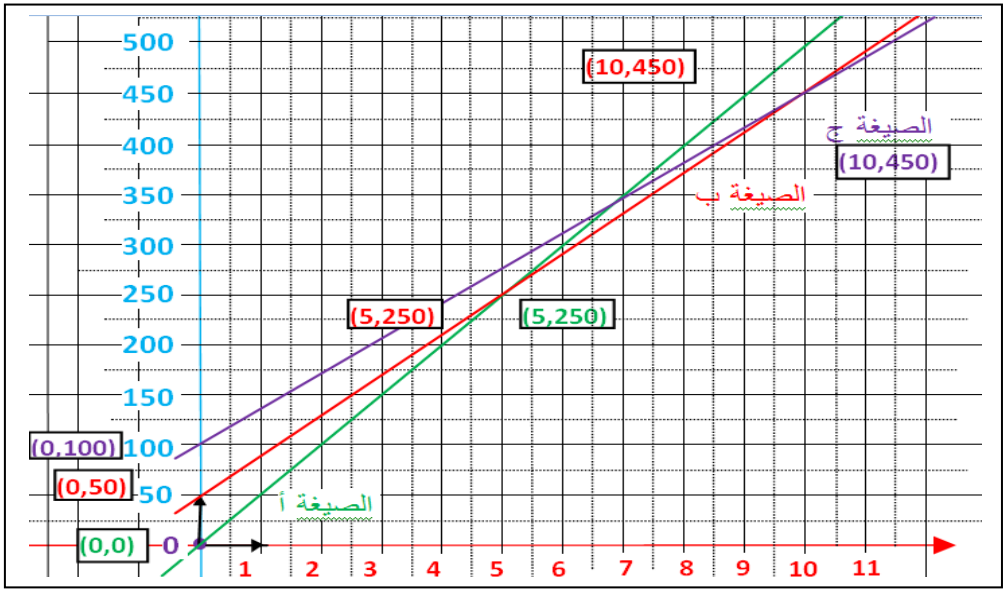
$y = 50\ x$

$y = 40\ x + 50$

$y = 35\ x + 100$

**التمثيل البياني :**

| الصيغة | إحداثيا النقطة | |
|---|---|---|
| | $x$ | y |
| **الأولى** | 0 | 0 |
| | 5 | 250 |
| **الثانية** | 0 | 50 |
| | 5 | 250 |
| **الثالثة** | 0 | 100 |
| | 5 | 275 |




**3) استنتاج عدد الأسفار التي تكون خلالها الصيغة (ج) أقل تكلفة:**

من خلال التمثيل البياني نجد أن المستقيم الذي يمثل الصيغة (ج) يقع أسفل المستقيمين الممثلين للصيغتين (أ) و (ب) عندما يفوق عدد الأسفار 10 .

و منه نستنتج أن عدد الأسفار التي تكون خلالها الصيغة (ج) أقل تكلفة هي : أكثر من 10 أسفار.

## حل المسألة الثانية :

**1) تكلفة 5 وجبات حسب الصيغ هي على الترتيب :**

**الصيغة أ** : $= 300 \times 5 = 1500$ DA

**الصيغة ب** : $= 150 \times 5 + 350 = 1100$ DA

**الصيغة ج** : $= 100 \times 5 + 600 = 1100$ DA

**2) كتابة الكلفة بدلالة عدد الوجبات حسب الصيغ الثلاث على الترتيب :**

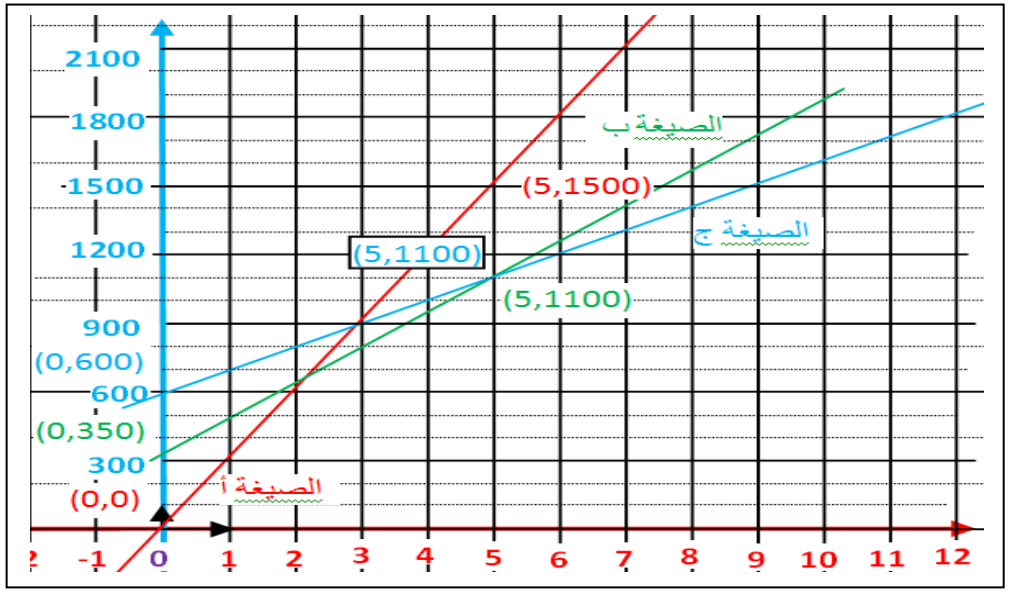
$y = 300\ x$

$y = 150\ x + 350$

$y = 100\ x + 600$

**التمثيل البياني :**

| الصيغة | إحداثيا النقطة | |
|---|---|---|
| | $x$ | y |
| **الأولى** | 0 | 0 |
| | 5 | 1500 |
| **الثانية** | 0 | 350 |
| | 5 | 1100 |
| **الثالثة** | 0 | 600 |
| | 5 | 1100 |




**3) استنتاج عدد الوجبات التي تكون خلالها الصيغة (ج) أقل تكلفة:**

من خلال التمثيل البياني نجد أن المستقيم الذي يمثل الصيغة (ج) يقع أسفل المستقيمين الممثلين للصيغتين (أ) و (ب) عندما يفوق عدد الوجبات 5 .

و منه نستنتج أن عدد الوجبات التي تكون خلالها الصيغة (ج) أقل تكلفة هي : أكثر من 5 وجبات.

**المسألة** : ( **8 نقاط**) امتحان شهادة التعليم المتوسط (2012)

يقترح مدير صحيفة يومية على زبائنه صيغتين لاقتناء الجريدة.

- الصّيغة الأولى : ثمن الجريدة 10 DA.
- الصّيغة الثانية : ثمن الجريدة 8DA مع اشتراك سنوي قدره 500 DA .

1) انقل و أتمم الجدول :

| | | | |
|---|---|---|---|
| عدد الجرائد المشتراة | 50 | | |
| مبلغ الصّيغة الأولى بـــ DA | | 1000 | |
| مبلغ الصّيغة الثانية بـــ DA | | | 3300 |

2) ليكن $x$ عدد الجرائد المشتراة.
نسمي $f(x)$ الثمن المدفوع بالصّيغة الأولى و $g(x)$ الثمن المدفوع بالصّيغة الثانية.

-عبّر عن $f(x)$ و $g(x)$ بدلالة $x$ .

3) مثّل بيانيا الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ حيث :
$2cm$ على محور الفواصل يمثّل 50 جريدة و $2cm$ على محور التراتيب يمثّل 500 DA .

4) حل المعادلة $f(x) = g(x)$ ماذا يمثل الحل ؟

5) ما هي الصيغة الأفضل في الحالتين التاليتين :
- عند اقتناء 150 جريدة.
- عند اقتناء 270 جريدة.

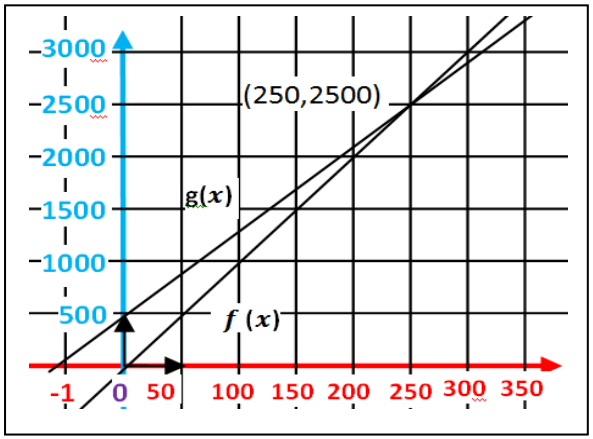
**حل مسألة امتحان شهادة التعليم المتوسط (2012 ):**

1) إتمام الجدول :

| | | | |
|---|---|---|---|
| عدد الجرائد المشتراة | 50 | 100 | 350 |
| مبلغ الصّيغة الأولى بـــ DA | 500 | 1000 | 3500 |
| مبلغ الصّيغة الثانية بـــ DA | 900 | 1300 | 3300 |

2) التعبير عن $f(x)$ و $g(x)$ بدلالة $x$ :
$g(x) = 8x + 500$ $\quad$ $f(x) = 10x$

3) التمثيل البياني :




4) حل المعادلة : $f(x) = g(x)$
$10x = 8x + 500$ و منه : $2x = 500$ إذن : $\boldsymbol{x = 250}$
يمثل الحل نقطة تقاطع المستقيمين و يمثل عدد الجرائد المشتراة بالصيغتين معا :

5) أ. حساب ثمن 150 جريدة :
بالصيغة الأولى : $f(150) = 10 \times 150 = 1500\ DA$
بالصيغة الثانية : $g(150) = 8 \times 150 + 500 = 1200 + 500 = 1700\ DA$
إذن الصيغة الأولى هي الأفضل لاقتناء 150 جريدة.

ب. حساب ثمن 270 جريدة :
بالصيغة الأولى : $f(270) = 10 \times 270 = 2700\ DA$
بالصيغة الثانية : $g(270) = 8 \times 270 + 500 = 2660\ DA$
إذن الصيغة الثانية هي الأفضل لاقتناء 270 جريدة.
ملاحظة : يمكن استعمال المنحنى البياني لتحديد الصيغة الأفضل في الحالتين.

**المسألة الأولى :** (حسب نموذج 2012):

يقترح بائع الأزهار على زبائنه صيغتين لاقتناء الورود الصيغتين الآتيتين:

- الصّيغة الأولى : ثمن الوردة 80 DA.
- الصّيغة الثانية : ثمن الوردة 20 DA مع اشتراك سنوي قدره 420 DA .

1) انقل و أتمم الجدول :

| | | | |
|---|---|---|---|
| عدد الورود المشتراة | 4 | | |
| مبلغ الصّيغة الأولى بـــ DA | | | |
| مبلغ الصّيغة الثانية بـــ DA | | 580 | 660 |

2) ليكن $x$ عدد الورود المشتراة.
نسمي $f(x)$ الثمن المدفوع بالصّيغة الأولى و $g(x)$ الثمن المدفوع بالصّيغة الثانية.
-عبّر عن $f(x)$ و $g(x)$ بدلالة $x$ .

3) مثّل بيانيا الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ في معلم متعامد و متجانس $(O , \vec{i} , \vec{j})$ حيث :
$1cm$ على محور الفواصل يمثّل 1 وردة واحدة و $1cm$ على محور التراتيب يمثّل 100 DA .

4) حل المعادلة $f(x) = g(x)$ ماذا يمثل الحل ؟

5) ما هي الصيغة الأفضل في الحالتين التاليتين :
- عند اقتناء 5 ورود.
- عند اقتناء 10 ورود.

**المسألة الثانية :** (حسب نموذج 2012):

يقترح صاحب فندق على زبائنه صيغتين لحجز الغرف الصيغتين الآتيتين:

- الصّيغة الأولى : ثمن الليلة 2000 DA.
- الصّيغة الثانية : ثمن الليلة 1600 DA مع اشتراك سنوي قدره 2400 DA .

1) انقل و أتمم الجدول :

| | | | |
|---|---|---|---|
| عدد الليالي | 6 | | 10 |
| مبلغ الصّيغة الأولى بـــ DA | | | |
| مبلغ الصّيغة الثانية بـــ DA | 12 000 | 13 600 | |

2) ليكن $x$ عدد الليالي.
نسمي $f(x)$ الثمن المدفوع بالصّيغة الأولى و $g(x)$ الثمن المدفوع بالصّيغة الثانية.
-عبّر عن $f(x)$ و $g(x)$ بدلالة $x$ .

3) مثّل بيانيا الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ في معلم متعامد و متجانس $(O , \vec{i} , \vec{j})$ حيث :
$1cm$ على محور الفواصل يمثّل ليلة واحدة و $1cm$ على محور التراتيب يمثّل 2000 DA .

4) حل المعادلة $f(x) = g(x)$ ماذا يمثل الحل ؟

5) ما هي الصيغة الأفضل في الحالتين التاليتين :
- عند حجز 3 ليالي.
- عند حجز 8 ليالي.

**حل المسألة الأولى :**

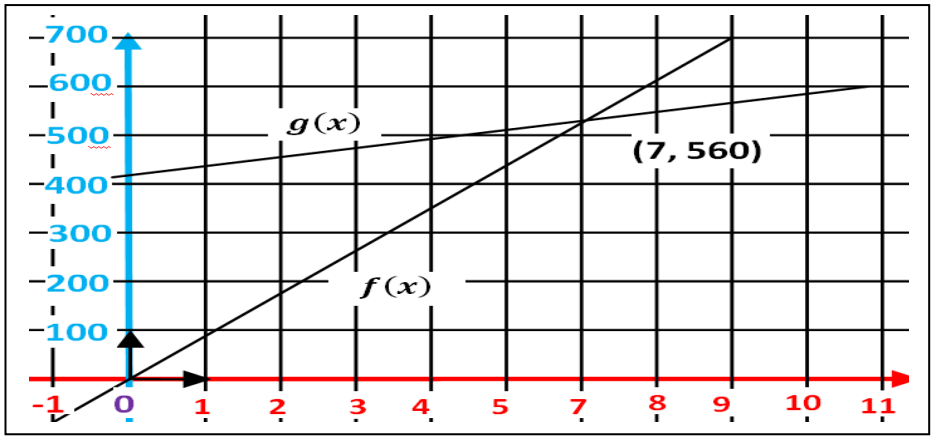
1) ) إتمام الجدول :

| عدد الورود المشتراة | 4 | 8 | 12 |
|---|---|---|---|
| مبلغ الصّيغة الأولى بـــ DA | 320 | 640 | 960 |
| مبلغ الصّيغة الثانية بـــ DA | 500 | 580 | 660 |

2) التعبير عن $f(x)$ و $g(x)$ بدلالة $x$ :

$g(x) = 20\,x + 420$ $\qquad$ $f(x) = 80\,x$

3) التمثيل البياني :




4) حل المعادلة : $f(x) = g(x)$

$80\,x = 20\,x + 420$ و منه : $60\,x = 420$ إذن : $\boldsymbol{x = 7}$

يمثل الحل نقطة تقاطع المستقيمين و يمثل عدد الورود المشتراة بالصيغتين معا .

5) أ. حساب ثمن 5 وردة :

بالصيغة الأولى : $f(5) = 80 \text{ x } 5 = 400\ DA$

بالصيغة الثانية : $g(5) = 20 \text{ x } 5 + 420 = 100 + 420 = 520\ DA$

إذن الصيغة الأولى هي الأفضل لاقتناء 5 ورود.

ب. حساب ثمن 10 وردة :

بالصيغة الأولى : $f(10) = 80 \text{ x } 10 = 800\ DA$

بالصيغة الثانية : $g(10) = 20 \text{ x } 10 + 420 = 200 + 420 = 620\ DA$

إذن الصيغة الثانية هي الأفضل لاقتناء 10 ورود.

ملاحظة : يمكن استعمال المنحنى البياني لتحديد الصيغة الأفضل في الحالتين.

**حل المسألة الثانية :**

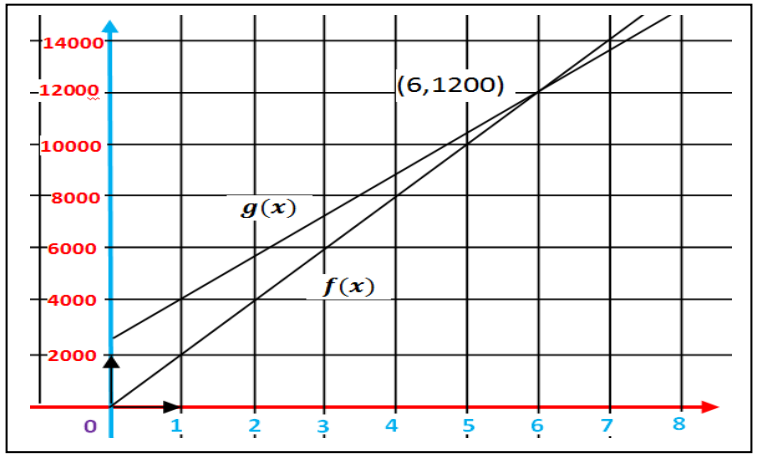
1) ) إتمام الجدول :

| عدد الليالي | 6 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|
| مبلغ الصّيغة الأولى بـــ DA | 12 000 | 14 000 | 20 000 |
| مبلغ الصّيغة الثانية بـــ DA | 12 000 | 13 600 | 18 400 |

2) التعبير عن $f(x)$ و $g(x)$ بدلالة $x$ :

$g(x) = 1600\,x + 2400$ $\qquad$ $f(x) = 2000\,x$

3) التمثيل البياني :




4) حل المعادلة : $f(x) = g(x)$

$2000\,x = 1600\,x + 2400$ و منه : $400\,x = 2400$ إذن : $\boldsymbol{x = 6}$

يمثل الحل نقطة تقاطع المستقيمين و يمثل عدد الليالي بالصيغتين معا .

5) أ. حساب ثمن حجز 3 ليالي :

بالصيغة الأولى : $f(3) = 2000 \text{ x } 3 = 6000\ DA$

بالصيغة الثانية : $g(3) = 1600 \text{ x } 3 + 2400 = 4800 + 2400 = 7200\ DA$

إذن الصيغة الأولى هي الأفضل لحجز 3 ليالي.

ب. حساب ثمن حجز 8 ليالي :

بالصيغة الأولى : $f(8) = 2000 \text{ x } 8 = 16000\ DA$

بالصيغة الثانية : $g(8) = 1600 \text{ x } 3 + 2400 = 12800 + 2400 = 15200\ DA$

إذن الصيغة الثانية هي الأفضل لحجز 8 ليالي.

ملاحظة : يمكن استعمال المنحنى البياني لتحديد الصيغة الأفضل في الحالتين.

**المسألة** : ( **8 نقاط**) امتحان شهادة التعليم المتوسط جوان 2014

بمناسبة عيد الأضحى قدمت مؤسسة للهاتف النّقال عرضين لمدّة أسبوع للتّواصل و تبادل التّهاني بواسطة الرسائل القصيرة (SMS).
العرض الأول : 3DA للرسالة الواحدة.
العرض الثاني : 1.5 DA للرسالة الواحدة مع اقتطاع مبلغ جزافي قدره 30 DA من الرّصيد.

1) انقل و أكمل الجدول :

| | | | |
|---|---|---|---|
| عدد الرسائل ( SMS) | 10 | | |
| المبلغ حسب العرض الأول بـــ DA | | 45 | |
| المبلغ حسب العرض الثاني بـــ DA | | | 90 |

2) $x$ يعبّرعن عدد الرسائل المرسلة.
$y_1$ هو المبلغ حسب العرض الأول و $y_2$ هو المبلغ حسب العرض الثاني
- عبّر عن $y_1$ و $y_2$ بدلالة $x$ .

3) $f$ و g دالتان حيث : $f(x) = 3x$ و $g(x) = 1.5x + 30$
مثّل بيانيا الدالتين $f$ و g في نفس المعلم المتعامد و المتجانس حيث :
( $1cm$ على محور الفواصل يمثل 5 رسائل SMS و $1cm$ على محور التراتيب يمثّل 10 DA)

4) يريد الأخوان زينب و كريم استغلال هذين العرضين لهذه المناسبة ، في رصيد كريم 120 DA و يريد تهنئة أكبر عدد ممكن من الأشخاص، أمّا زينب تريد تهنئة زميلاتها في الدّراسة و عددهن 15 .

- بقراءة بيانية ، ما هو العرض المناسب لكل منهما ؟ ( مع الشّرح)

## حل مسألة امتحان شهادة التعليم المتوسط (جوان 2014 ):

**1) إتمام الجدول :**

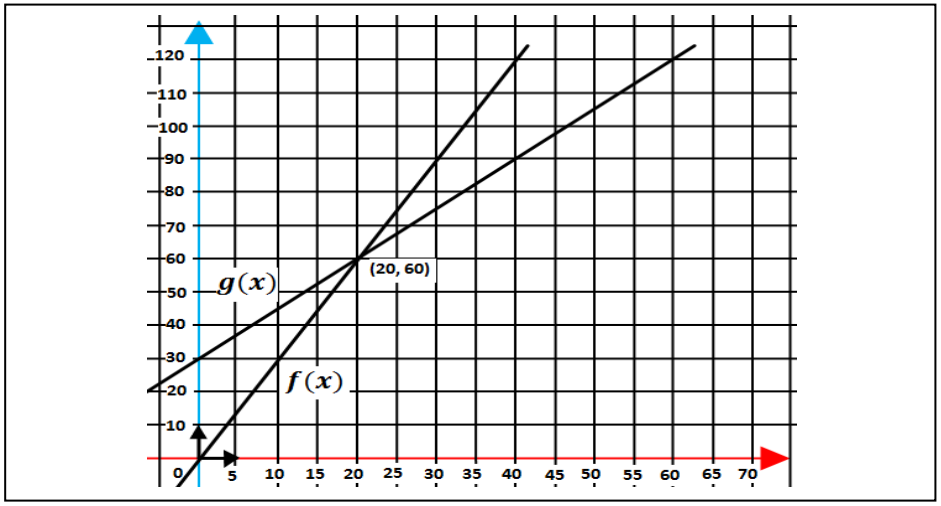
| | | | |
|---|---|---|---|
| عدد الرسائل ( SMS) | 10 | 15 | 40 |
| المبلغ حسب العرض الأول بـــ DA | 30 | 45 | 120 |
| المبلغ حسب العرض الثاني بـــ DA | 45 | 52.5 | 90 |

**2) التعبير عن $y_1$ و $y_2$ بدلالة $x$ :**

$y_1 = 3x$ و $y_2 = 1.5x + 30$

**3) التمثيل البياني :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 10 | 20 |
| $y_1$ | 0 | 30 | 60 |
| $y_2$ | 30 | 45 | 60 |




**4) بقراءة بيانية نلاحظ أن :**
- العرض المناسب لكريم هو العرض الثاني لأن المستقيم الذي معادلته $y = 120$ يقطع التمثيل البياني للدالة $f$ في النقطة التي فاصلتها 40 ببينما يقطع التمثيل البياني للدالة g في النقطة التي فاصلتها 60 أي عدد الرسائل بالعرض الثاني أكبر منه بالعرض الأول.
- العرض المناسب لزينب هو العرض الأول لأن المستقيم الذي معادلته $x = 15$ يقطع التمثيل البياني للدالة $f$ في نقطة ترتيبها أصغر من ترتيب نقطة تقاطعه مع التمثيل البياني للدالة g أي بالعرض الأول فإن 15 رسالة أقل تكلفة من العرض الثاني.

**ملاحظة :** يمكن استخدام نقطة تقاطع التمثيلين و التي تمثل تساوي العرضين لتفسير الاختيارين.

**المسألة الأولى :** (حسب نموذج 2014):

يقترح صاحب محل للصور طبق الأصل على زبائنه، العرضين الآتيين:

العرض الأول : 4 DA للصورة طبق الأصل.
العرض الثاني : 2 DA للصورة طبق الأصل مع اشتراك قدره 40 DA.

1) انقل و أكمل الجدول :

| | | | |
|---|---|---|---|
| عدد الصور طبق الأصل | | 5 | |
| المبلغ حسب العرض الأول بـــ DA | | | |
| المبلغ حسب العرض الثاني بـــ DA | 46 | | 60 |

2) $x$ يعبّرعن عدد الصور طبق الأصل.
$y_1$ هو المبلغ حسب العرض الأول و $y_2$ هو المبلغ حسب العرض الثاني
- عبّر عن $y_1$ و $y_2$ بدلالة $x$ .

3) $f$ و g دالتان حيث : $f(x) = 4x$ و $g(x) = 2x + 40$
مثّل بيانيا الدالتين $f$ و g في نفس المعلم المتعامد و المتجانس حيث :
( $1cm$ على محور الفواصل يمثل 5 صور طبق الأصل و $1cm$ على محور التراتيب يمثّل 10 DA)

4) يريد علي و ياسين استغلال هذين العرضين ، لعلي مبلغ قدره 100 DA و يريد أكبر عدد من الصور طبق الأصل ، أمّا ياسين يريد 15 صورة طبق الأصل بأقل تكلفة.

- بقراءة بيانية، ما هو العرض المناسب لكل منهما ؟ ( مع الشّرح)

**المسألة الثانية :** (حسب نموذج 2014):

تقترح وكالة الاتصالات الهاتفية على زبائنها، العرضين الآتيين:

العرض الأول : 8 DA للدقيقة.
العرض الثاني : 4 DA للدقيقة مع اشتراك قدره 20 DA.

1) انقل و أكمل الجدول :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| المدة بالدقائق | | | | |
| المبلغ حسب العرض الأول بـــ DA | | 16 | 64 | 96 |
| المبلغ حسب العرض الثاني بـــ DA | | | | |

2) $x$ يعبّرعن الدقائق.
$y_1$ هو المبلغ حسب العرض الأول و $y_2$ هو المبلغ حسب العرض الثاني
- عبّر عن $y_1$ و $y_2$ بدلالة $x$ .

3) $f$ و g دالتان حيث : $f(x) = 8x$ و $g(x) = 4x + 20$
مثّل بيانيا الدالتين $f$ و g في نفس المعلم المتعامد و المتجانس حيث :
( $1cm$ على محور الفواصل يمثل 5 دقائق و $1cm$ على محور التراتيب يمثّل 10 DA)

4) يريد نزيه و الياس استغلال هذين العرضين ، لنزيه مبلغ قدره 90 DA و يريد أطول مدة ، أمّا الياس يريد أن يتصل لمدة 5 دقائق بأقل تكلفة.

- بقراءة بيانية، ما هو العرض المناسب لكل منهما ؟ ( مع الشّرح)

**حل المسألة الأولى** : (نموذج 2014)

**1) إتمام الجدول :**

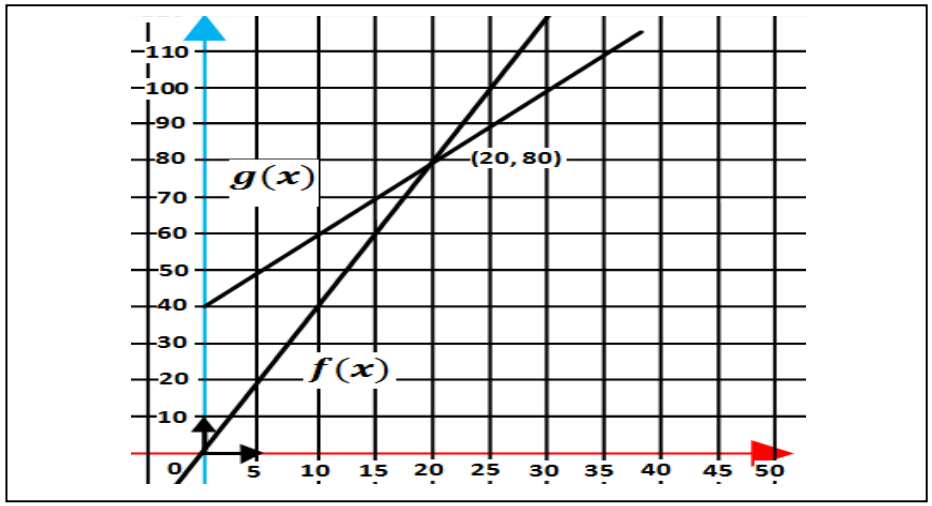
| | | | |
|---|---|---|---|
| عدد الصور طبق الأصل | 3 | 5 | 10 |
| المبلغ حسب العرض الأول بـــ DA | 12 | 20 | 40 |
| المبلغ حسب العرض الثاني بـــ DA | 46 | 50 | 60 |

**2) التعبير عن $y_1$ و $y_2$ بدلالة $x$ :**

$y_1 = 4x$ و $y_2 = 2x + 40$

**3) التمثيل البياني :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 10 | 20 |
| $y_1$ | 0 | 40 | 80 |
| $y_2$ | 40 | 60 | 80 |




**4) بقراءة بيانية نلاحظ أن :**

- العرض المناسب لعلي هو **العرض الثاني** لأن ( وحسب القراءة البيانية) 100 DA تمثل 30 صورة طبق الأصل حسب العرض الثاني و 25 صورة طبق الأصل حسب العرض الأول .

العرض المناسب لياسين هو **العرض الأول** لأن ( وحسب القراءة البيانية) 15 صورة طبق الأصل تمثل 60 DA حسب العرض الأول و 70 DA حسب العرض الثاني .

**ملاحظة :** يمكن استخدام نقطة تقاطع التمثيلين و التي تمثل تساوي العرضين لتفسير الاختيارين.

**حل المسألة الثانية** : (نموذج 2014)

**1) إتمام الجدول :**

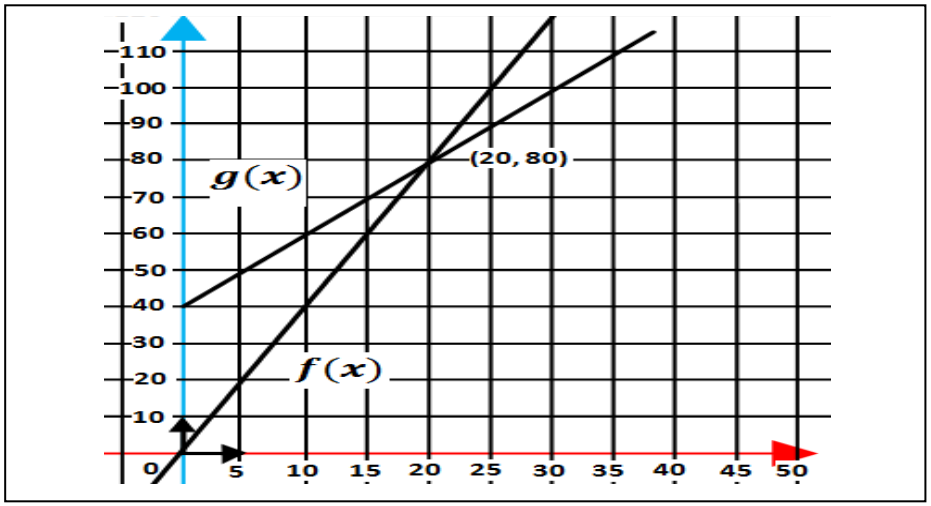
| | | | |
|---|---|---|---|
| المدة بالدقائق | 2 | 8 | 12 |
| المبلغ حسب العرض الأول بـــ DA | 16 | 64 | 96 |
| المبلغ حسب العرض الثاني بـــ DA | 28 | 52 | 68 |

**2) التعبير عن $y_1$ و $y_2$ بدلالة $x$ :**

$y_1 = 8x$ و $y_2 = 4x + 20$

**3) التمثيل البياني :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 5 | 6 |
| $y_1$ | 0 | 40 | 48 |
| $y_2$ | 20 | 40 | 44 |




**4) بقراءة بيانية نلاحظ أن :**

- العرض المناسب لنزيه هو **العرض الثاني** لأن ( وحسب القراءة البيانية) 90 DA تمثل أكثر من 15 دقيقة حسب العرض الثاني و أقل من ذلك حسب العرض الأول .

كلا العرضين الأول و الثاني مناسبين لالياس لأن ( وحسب القراءة البيانية) 5 دقائق تمثل حسب العرض الأول 40 DA و كذلك 5 دقائق تمثل الثمن نفسه حسب العرض الثاني.

العرض الأول يمثل

**ملاحظة :** يمكن استخدام نقطة تقاطع التمثيلين و التي تمثل تساوي العرضين لتفسير الاختيارين.

**المسألة** : ( **8 نقاط**) امتحان شهادة التعليم المتوسط (2018)

عبد الله و محمد عاملان في مؤسسة لصناعة ألعاب الأطفال، راتبهما الشهري على النحو التالي :

- عبد الله راتبه 20'000 DA إضافة إلى 200 DA لكل لعبة يتم صنعها.
- محمد راتبه 30'000 DA إضافة إلى 100 DA لكل لعبة يتم صنعها.

**الجزء الأول :**

1) ما هو الراتب الشهري الذي يتقاضاه كل منهما إذا تمّ صنع 120 لعبة ؟
2) ليكن $x$ عدد اللعب المصنوعة في مدة شهر.
- عبّر بدلالة $x$ عن $y1$ راتب عبد الله و $y2$ عن راتب محمد.

**الجزء الثاني :**

1) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
- ارسم المستقيمين $(D_1)$ و $(D_2)$ ممثلا الدالتين $g$ و $h$ حيث :

$$g(x) = 200\,x + 20000 \text{ و } h(x) = 100\,x + 30000$$

( نأخذ : $1cm$ على محور الفواصل يمثل 50 لعبة ، $1\ cm$ على محور التراتيب يمثل 5000 DA )

2) حل جملة المعادلتين التالية :

$$\begin{cases} y = 200\,x + 20000 \\ y = 100\,x + 30000 \end{cases}$$

- ثم أعط تفسيرا بيانيا لهذا الحل .
- بقراءة بيانية متى يكون راتب عبد الله أكبر من راتب محمد؟

## حل مسألة امتحان شهادة التعليم المتوسط (2018 ):

**الجزء (1)** :

1) حساب الراتب الشهري عندما يتم صنع 120 لعبة :

راتب عبد الله : 200 x 120 + 20000 = 24000 + 20000 = 44000 DA

راتب محمد : 100 x 120 + 30000 = 12000 + 30000 = 42000 DA

2) التعبير عن $y_1$ و عن $y_2$ بدلالة $x$ :

$y_1 = 200\,x + 20\,000$ $\quad y_2 = 100\,x + 30\,000$

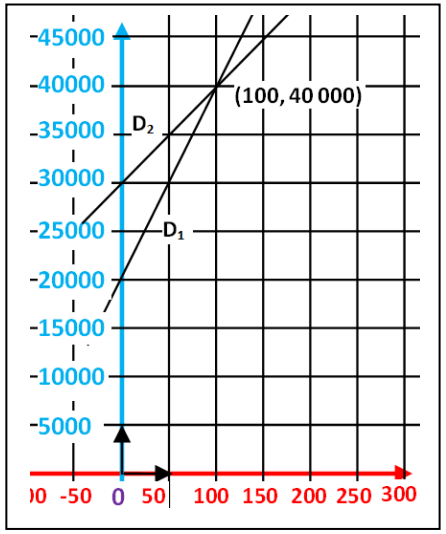
**الجزء (2) :**

1) رسم مستقيما الدالتين $g(x) = 200\,x + 20000$ و $h(x) = 100\,x + 30000$

| $x$ | 0 | 50 |
|---|---|---|
| $g(x)$ | 20000 | 30000 |

| $x$ | 0 | 50 |
|---|---|---|
| $h(x)$ | 30000 | 35000 |

**ملاحظة :** تأخذ بعين الاعتبار كل النقط المختارة من طرف التلميذ




2) حل جملة المعادلتين :

$y = 200\,x + 20000$

$y = 100\,x + 30000$

و منه : $200\,x + 20000 = 100\,x + 30000$

و منه : $200\,x - 100\,x = 30000 - 20000$

و منه : $100\,x = 10000$

و منه : $x = \frac{10000}{100}$

أي : $x = 100$

تعويض قيمة $x$ في المعادلة الأولى :

$y = 200 \times 100 + 20000$

$= 20000 + 20000$

$= 40000$

للجملة حل واحد و هو : $(x = 100\ ,\ y = 40000)$

**التفسير البياني لحل الجملة :**

- حل هذه الجملة هو إحداثيتا نقطة تقاطع المستقيمين $D_1$ و $D_2$ التي تمثل تساوي الراتبين عند 100 لعبة.

- من التمثيل البياني يكون راتب عبد الله أكبر من راتب محمد عند صنع أكثر من 100 لعبة.

**المسألة الأولى** : (حسب نموذج 2018):

إيمان و إيناس أستاذتان في مدرسة الدروس التدعيمية، راتبهما الشهري على النحو التالي :

- إيناس راتبها 15'000 DA إضافة إلى 700 DA لكل ساعة تدريس.
- إيمان راتبها 31'000 DA إضافة إلى 300 DA لكل ساعة تدريس.

**الجزء الأول :**

1) ما هو الراتب الشهري الذي تتقاضاه كل منهما إذا تمّ تقديم 50 ساعة ؟
2) ليكن $x$ عدد الساعات المقدمة في مدة شهر.
- عبّر بدلالة $x$ عن $y1$ راتب إيناس و $y2$ عن راتب إيمان.

**الجزء الثاني :**

1) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
- ارسم المستقيمين $(D_1)$ و $(D_2)$ ممثلا الدالتين $g$ و $h$ حيث :
$g(x) = 700\,x + 15000$ و $h(x) = 300\,x + 31000$

( نأخذ : $1cm$ على محور الفواصل يمثل 20 ساعات ، $1\ cm$ على محور التراتيب يمثل 5000 DA )

2) حل جملة المعادلتين التالية :
$$\begin{cases} y = 700\,x + 15000 \\ y = 300\,x + 31000 \end{cases}$$

- ثم أعط تفسيرا بيانيا لهذا الحل .
- بقراءة بيانية متى يكون راتب إيناس أكبر من راتب إيمان؟

**المسألة الثانية** : (حسب نموذج 2018):

أمين و رفيق عاملان في مخبزة، راتبهما الشهري على النحو التالي :

- أمين راتبه 8'000 DA إضافة إلى 3 DA لكل خبزة.
- رفيق راتبه 10'000 DA إضافة إلى 2 DA لكل خبزة.

**الجزء الأول :**

1) ما هو الراتب الشهري الذي يتقاضاه كل منهما إذا تمّ انتاج 2500 خبزة ؟
2) ليكن $x$ عدد الخبز المنتج في مدة شهر.
- عبّر بدلالة $x$ عن $y1$ راتب أمين و $y2$ عن راتب رفيق.

**الجزء الثاني :**

1) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
- ارسم المستقيمين $(D_1)$ و $(D_2)$ ممثلا الدالتين $g$ و $h$ حيث :
$g(x) = 3\,x + 8000$ و $h(x) = 2\,x + 10000$

( نأخذ : $1cm$ على محور الفواصل يمثل 500 خبزة ، $1\ cm$ على محور التراتيب يمثل 2000 DA )

2) حل جملة المعادلتين التالية :
$$\begin{cases} y = 3\,x + 8\,000 \\ y = 2\,x + 10\,000 \end{cases}$$

- ثم أعط تفسيرا بيانيا لهذا الحل .
- بقراءة بيانية متى يكون راتب أمين أكبر من راتب رفيق؟

**حل المسألة الأولى :** (نموذج 2018)

**الجزء (1) :**

1) حساب الراتب الشهري عند تقديم 50 ساعة :

راتب إيناس : $700 \times 50 + 15\,000 = 35\,000 + 15\,000 = 50\,000$ DA

راتب إيمان : $300 \times 50 + 31\,000 = 15\,000 + 31\,000 = 46\,000$ DA

2) التعبير عن $y_1$ و عن $y_2$ بدلالة $x$ :

$y_2 = 300\,x + 31\,000$ $y_1 = 700\,x + 15\,000$

**الجزء (2) :**

1) رسم مستقيما الدالتين $g(x) = 700\,x + 15\,000$ و $h(x) = 300\,x + 31\,000$

| $x$ | 0 | 50 |
|---|---|---|
| $g(x)$ | 15 000 | 50 000 |

| $x$ | 0 | 50 |
|---|---|---|
| $h(x)$ | 31 000 | 46 000 |

**ملاحظة :** تأخذ بعين الاعتبار كل النقط المختارة من طرف التلميذ

2) حل جملة المعادلتين :

$y = 700\,x + 15\,000$

$y = 300\,x + 31\,000$

و منه : $700\,x + 15\,000 = 300\,x + 31\,000$

و منه : $700\,x - 300\,x = 31\,000 - 15\,000$

و منه : $400\,x = 16\,000$

و منه : $x = \frac{16\,000}{100}$

أي : $x = 40$

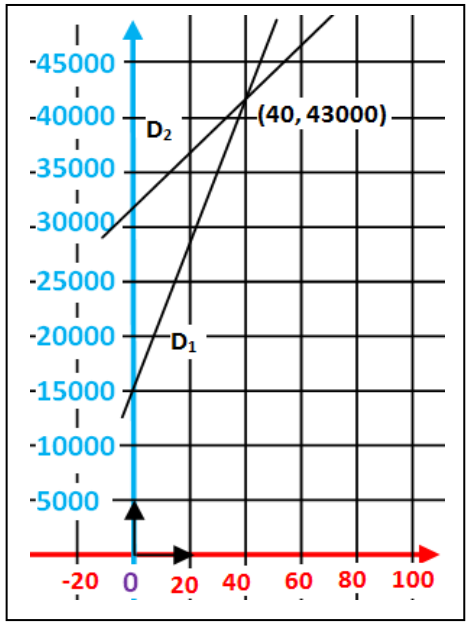
تعويض قيمة $x$ في المعادلة الأولى :

$y = 700 \times 40 + 15\,000$

$= 28\,000 + 15\,000$

$y = 43\,000$

للجملة حل واحد و هو : $(x = 40\ ,\ y = 43\,000)$




**التفسير البياني لحل الجملة :**

- حل هذه الجملة هو إحداثيتا نقطة تقاطع المستقيمين $D_1$ و $D_2$ التي تمثل تساوي الراتبين عند تقديم 40 ساعة.

- من التمثيل البياني يكون راتب إيناس أكبر من راتب إيمان عند تقديم أكثر من 40 ساعة.

**حل المسألة الثانية :** (نموذج 2018)

**الجزء (1) :**

1) حساب الراتب الشهري عند إنتاج 2 500 خبزة :

راتب أمين : $3 \times 2\,500 + 8\,000 = 7\,500 + 8000 = 15\,500$ DA

راتب رفيق : $2 \times 2\,500 + 10\,000 = 5\,000 + 10\,000 = 15\,000$ DA

2) التعبير عن $y_1$ و عن $y_2$ بدلالة $x$ :

$y_2 = 2\,x + 10\,000$ $y_1 = 3\,x + 8\,000$

**الجزء (2) :**

1) رسم مستقيما الدالتين $g(x) = 3\,x + 8\,000$ و $h(x) = 2\,x + 10\,000$

| $x$ | 0 | 2 500 |
|---|---|---|
| $g(x)$ | 8 000 | 15 500 |

| $x$ | 0 | 2 500 |
|---|---|---|
| $h(x)$ | 10 000 | 15 000 |

**ملاحظة :** تأخذ بعين الاعتبار كل النقط المختارة من طرف التلميذ

2) حل جملة المعادلتين :

$y = 3\,x + 8\,000$

$y = 2\,x + 10\,000$

و منه : $3\,x + 8\,000 = 2\,x + 10\,000$

و منه : $3\,x - 2\,x = 10\,000 - 8\,000$

و منه : $x = 2\,000$

أي : $x = 2\,000$

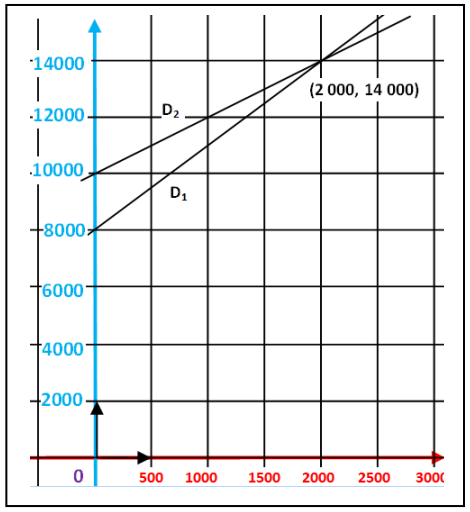
تعويض قيمة $x$ في المعادلة الأولى :

$y = 3 \times 2\,000 + 8\,000$

$= 6\,000 + 8\,000$

$y = 14\,000$

للجملة حل واحد و هو : $(x = 2\,000\ ,\ y = 14\,000)$




**التفسير البياني لحل الجملة :**

- حل هذه الجملة هو إحداثيتا نقطة تقاطع المستقيمين $D_1$ و $D_2$ التي تمثل تساوي الراتبين عند انتاج 2 000 خبزة.

- من التمثيل البياني يكون راتب أمين أكبر من راتب رفيق عند انتاج أكثر من 2 000 خبزة.

**المسألة** : ( **8 نقاط**) امتحان شهادة التعليم المتوسط جوان 2019

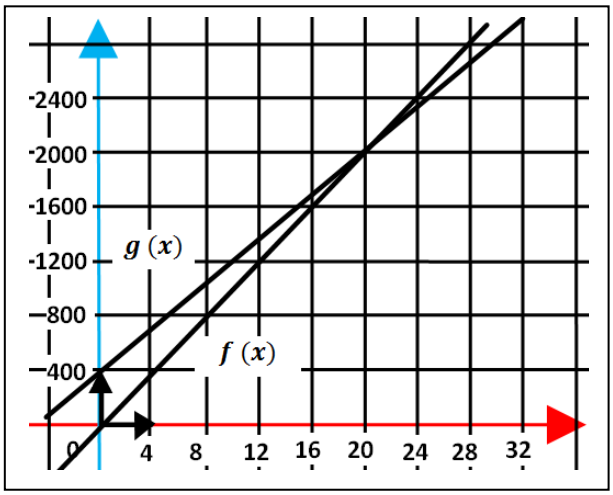
يقترح مدير المسبح البلدي على السباحين التسعيرتين الآتيتين :

- التسعيرة الأولى : 100 DA للحصة الواحدة لغير المنخرطين.
- التسعيرة الثانية : 80 DA للحصة الواحدة مع اشتراك شهري قدره 400 DA.

1) ما هو عدد الحصص التي يمكنك الحصول عليها في كل تسعيرة إذا دفعت مبلغ 2 800 DA ؟

2) باعتبار : $x$ عدد الحصص في الشهر و بالاستعانة بتمثيل بياني، أعط أفضل التسعيرتين حسب عدد الحصص خلال شهر واحد.

يمكنك أخذ : ( $1cm$ على محور الفواصل يمثّل 4 حصص، $1cm$ على محور التراتيب يمثل 400 DA)




**حل مسألة امتحان شهادة التعليم المتوسط (2019 ):**

**1) حساب عدد الحصص :**

حساب عدد الحصص بالتسعيرة الأولى : $282\,800 \div 100 =$

عدد الحصص حسب التسعيرة الأولى هو : **28 حصة**

حساب عدد الحصص بالتسعيرة الثانية : $(2\,800 - 400) \div 80 = 30$

عدد الحصص حسب التسعيرة الثانية هو : **30 حصة**

**2) التمثيل البياني :**

ليكن $f(x)$ المبلغ المدفوع لـ $x$ حصة بالتسعيرة الأولى

و $g(x)$ المبلغ المدفوع لـ $x$ حصة بالتسعيرة الثانية فيكون :

$f(x) = 100\,x$

$g(x) = 80x + 400$

| $x$ | 0 | 10 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 1 000 |

| $x$ | 0 | 10 |
|---|---|---|
| $g(x)$ | 400 | 1 200 |

**التفسير البياني :**

التمثيلان البيانيان للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ يتقاطعان في النقطة التي فاصلتها 20 و هذا يعني أن التسعيرتين متساويتين عند 20 حصة.

و عندما لا يفوق عدد الحصص 20 حصة، فالتسعيرة الأولى هي الأفضل و إذا تجاوز عدد الحصص 20 حصة فالتسعيرة الثانية هي الأفضل.

## مسألتان حسب نموذج (2019)

**المسألة الأولى :** (حسب نموذج 2019):

يقترح مدير شركة تنظيف التسعيرتين الآتيتين :

- التسعيرة الأولى : 180 DA لتنظيف المتر المربع الواحد لغير المنخرطين.
- التسعيرة الثانية : 130 DA لتنظيف المتر المربع الواحد مع اشتراك شهري قدره 2 500 DA.

1) ما هو عدد الأمتار المربعة التي يمكنك تنظيفها في كل تسعيرة إذا دفعت مبلغ 10 000 DA ؟

2) باعتبار : $x$ عدد الأمتار المربعة المراد تنظيفها في الشهر و بالاستعانة بتمثيل بياني، أعط أفضل التسعيرتين حسب عدد الأمتار خلال شهر واحد.

يمكنك أخذ : ( $1cm$ على محور الفواصل يمثّل 10 أمتار مربعة ، $1cm$ على محور التراتيب يمثل 2 000 DA)

**المسألة الثانية :** (حسب نموذج 2019):

يقترح صاحب مقهى الأنترنت التسعيرتين الآتيتين :

- التسعيرة الأولى : 90 DA للساعة الواحدة لغير المنخرطين.
- التسعيرة الثانية : 60 DA للساعة مع اشتراك شهري قدره 300 DA.

1) ما هو عدد الساعات التي يمكنك الحصول عليها في كل تسعيرة إذا دفعت مبلغ 1 500 DA ؟

2) باعتبار : $x$ عدد الساعات في الشهر و بالاستعانة بتمثيل بياني، أعط أفضل التسعيرتين حسب عدد الساعات خلال شهر واحد.

يمكنك أخذ : ( $0.5\ cm$ على محور الفواصل يمثّل ساعة واحدة، $1cm$ على محور التراتيب يمثل 200 DA)

**حل المسألة الأولى :** (نموذج 2019)

**1) حساب عدد الأمتار المربعة :**

حساب عدد الأمتار بالتسعيرة الأولى : $55.5510\ 000 = 180 \div$

عدد الأمتار المربعة حسب التسعيرة الأولى هو : **55.55 متر مربع**

حساب عدد الأمتار بالتسعيرة الثانية : $57.69 = 130 \div (10\ 000 - 2\ 500)$

عدد الأمتار حسب التسعيرة الثانية هو : **57.69 متر مربع**

**2) التمثيل البياني :**

ليكن $f(x)$ المبلغ المدفوع لـ $x$ متر مربع بالتسعيرة الأولى

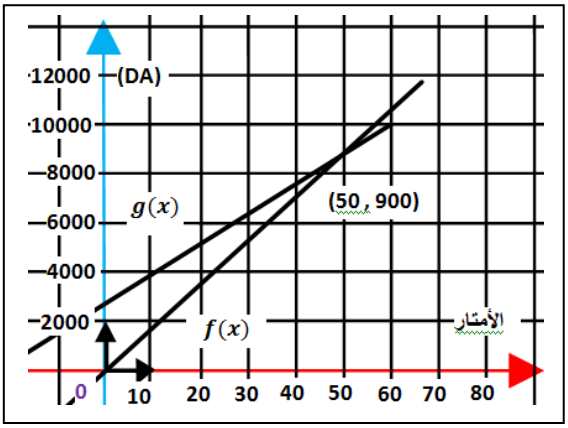
و $g(x)$ المبلغ المدفوع لـ $x$ متر مربع بالتسعيرة الثانية فيكون :

$f(x) = 180\,x$

$g(x) = 130\,x + 2\ 500$

| $x$ | 0 | 10 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 1 800 |

| $x$ | 0 | 10 |
|---|---|---|
| $g(x)$ | 2 500 | 3 800 |




**التفسير البياني :**

التمثيلان البيانيان للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ يتقاطعان في النقطة التي

فاصلتها 50 و هذا يعني أن التسعيرتين متساويتين عند 50 متر مربع بكلفة 9 000 DA

و عندما لا يفوق عدد الأمتار المربعة 50، فالتسعيرة الأولى هي الأفضل

و إذا تجاوز عدد الأمتار المربعة 50 متر مربع فالتسعيرة الثانية هي الأفضل.

**حل المسألة الثانية :** (نموذج 2019)

**1) حساب عدد الساعات :**

حساب عدد الساعات بالتسعيرة الأولى : $16,661\ 500 = 90 \div$

عدد الساعات حسب التسعيرة الأولى هو : **16 ساعة و 40 دقيقة**

حساب عدد الساعات بالتسعيرة الثانية : $20 = 60 \div (1\ 500 - 300)$

عدد الساعات حسب التسعيرة الثانية هو : **20 ساعة**

**2) التمثيل البياني :**

ليكن $f(x)$ المبلغ المدفوع لـ $x$ حصة بالتسعيرة الأولى

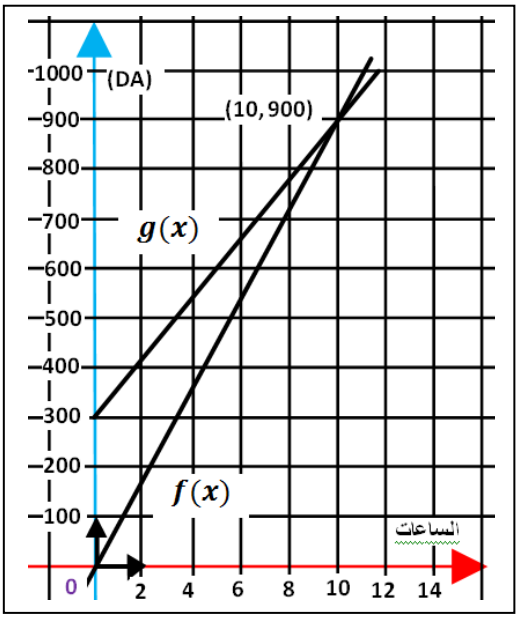
و $g(x)$ المبلغ المدفوع لـ $x$ حصة بالتسعيرة الثانية فيكون :

$f(x) = 90\,x$

$g(x) = 60x + 300$

| $x$ | 0 | 10 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 900 |

| $x$ | 0 | 10 |
|---|---|---|
| $g(x)$ | 300 | 900 |




**التفسير البياني :**

التمثيلان البيانيان للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ يتقاطعان في النقطة التي

فاصلتها 10 و هذا يعني أن التسعيرتين متساويتين عند 10 ساعات بكلفة 900 DA

و عندما لا يفوق عدد الساعات 10، فالتسعيرة الأولى هي الأفضل

و إذا تجاوز عدد الساعات 10 فالتسعيرة الثانية هي الأفضل.

**المسألة** : ( **8 نقاط**) امتحان شهادة التعليم المتوسط جوان 2013

لإقامة حفل زفاف قرّرت عائلة كراء سيارة فاخمة فاتّصل الأب محمد بثلاث وكالات فقدّموا له عروضا حسب المعطيات الآتية:

فاستنجد الأب محمد بابنه سمير الذّي يدرس في السنة الرابعة متوسط لمساعدته في اختيار العرض الأنسب و الأقل تكلفة.

**عرض الوكالة الأولى :**

دفع مبلغ 4000 DA لليوم الواحد.

**عرض الوكالة الثانية :**

دفع مبلغ 3000 DA لليوم الواحد يضاف إليه ضمان غير مسترجع قدره 1000 DA .

**عرض الوكالة الثالثة :**

دفع مبلغ 16000 DA لمدة لا تتعدى أسبوعا واحدا.

لو كنت في مكان الابن سمير ساعد الأب محمد في :

1) اختيار العرض الأنسب و الأقل تكلفة لكراء سيارة لمدة 7 أيام.

2) $x$ عدد الأيام التي يستغل فيها الأب محمد السيارة.

أ- عبّر ، بدلالة $x$ ، عن العرض الأول بالدالة $f(x)$ و عن العرض الثاني بالدالة $g(x)$ وعن العرض الثالث بالدالة $h(x)$.

ب- مثّل بيانيا في معلم متعامد و متجانس $(0, \vec{i}, \vec{j})$ الدوال $f$، $g$ و $h$.

(حيث كل 2cm من محور الفواصل يمثل يومًا واحدًا و كل 1cm من محور التراتيب يمثل 2000 DA ) .

3) اعتمادًا على البيان املأ الجدول الآتي :

| الأيام / العروض | اليوم الأول | اليوم الرابع | اليوم الخامس |
|---|---|---|---|
| العرض 1 | | | |
| العرض 2 | | | |
| العرض 3 | | | |

4) أ- حلّ المعادلات الآتية لإيجاد $x$ عدد الأيام المستغلة من طرف الأب محمد.

$f(x) = g(x)$ ، $f(x) = h(x)$ ، $g(x) = h(x)$ .

ب- ماذا يمثل حل كل معادلة ؟.

## حل مسألة امتحان شهادة التعليم المتوسط (جوان 2013 ):

**1) اختيار العرض المناسب لمدة أسبوع :**

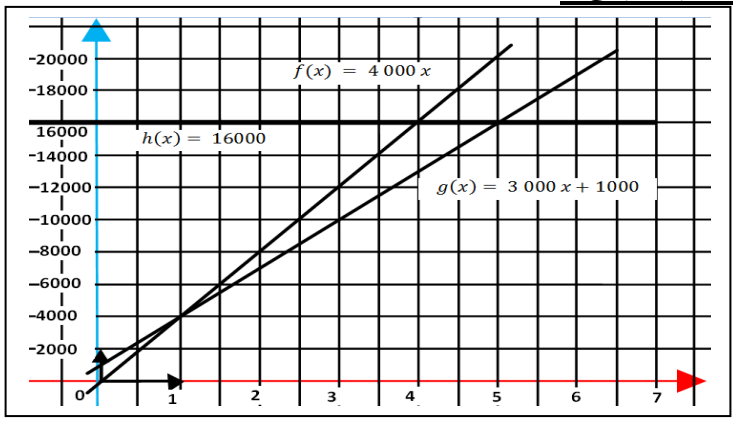
- عرض الوكالة الأولى : 4 000 x 7 = 28 000 DA
- عرض الوكالة الثانية : 3 000 x 7 + 1 000 = 21 000 + 1000 = 22 000 DA
- عرض الوكالة الثالثة : 16 000 DA

إذن العرض الأقل تكلفة لمدة أسبوع هو عرض الوكالة الثالثة.

**2) تعبير عن $f(x)$ و $g(x)$ و $h(x)$ بدلالة :**

$h(x) = 16\,000 , g(x) = 3\,000\,x + 1\,000 , f(x) = 4\,000\,x$

**التمثيل البياني :**




**3) ملء الجدول من البيان :**

| الأيام / العروض | اليوم الأول | اليوم الرابع | اليوم الخامس |
|---|---|---|---|
| عرض الوكالة 1 | 4 000 | 16 000 | 20 000 |
| عرض الوكالة 2 | 4 000 | 13 000 | 16 000 |
| عرض الوكالة 3 | 16 000 | 16 000 | 16 000 |

**4) حل المعادلات :**

$f(x) = g(x) , 4000\,x = 3000\,x + 1000 , 1000\,x = 1000 , \boldsymbol{x = 1}$

$f(x) = h(x)\ 4000x = 16000 , \boldsymbol{x = 4}$

$g(x) = h(x)\ 3000\,x + 1000 = 16000 , 3000x = 15000 , \boldsymbol{x = 5}$

- في اليوم الأول يتساوى العرض الأول مع العرض الثاني .
- في اليوم الرابع يتساوى العرض الأول مع العرض الثالث .
- في اليوم الخامس يتساوى العرض الثاني مع العرض الثالث .

**المسألة الأولى** : (حسب نموذج 2013):

يقترح موقع واب مختص في تحميل الأفلام و المسلسلات على زبائنه العروض الآتية:

**العرض الأول :**
دفع مبلغ 100 DA لتحميل 1 Go من المحتويات.
**العرض الثاني:**
دفع مبلغ 70 DA لتحميل 1 Go من المحتويات بإضافة إلى اشتراك شهري قدره 300 DA
**العرض الثالث:**
دفع مبلغ 1 350 DA على أن لا تتجاوز التحميلات 15 Go.

1) اختر العرض الأنسب و الأقل تكلفة لتحميل 14 Go من المعطيات.
2) $x$ عدد Go التي يمكن تحميلها.
أ- عبّر ، بدلالة $x$ ، عن العرض الأول بالدالة $f\ (x)$ و عن العرض الثاني بالدالة $g\ (x)$ وعن العرض الثالث بالدالة $h\ (x)$.
ب- مثّل بيانيا في معلم متعامد و متجانس $(O\ ,\vec{i}\ ,\vec{j}\ )$ الدوال $f$، $g$ و $h$.
(حيث كل 1cm من محور الفواصل يمثل 2 Go و كل 1cm من محور التراتيب يمثل 200 DA ) .
3) اعتمادا على البيان املأ الجدول الآتي :

| Go / العروض | 10 Go | 13.5 Go | 15 Go |
|---|---|---|---|
| العرض 1 | | | |
| العرض 2 | | | |
| العرض 3 | | | |

4) أ- حلّ المعادلات الآتية لإيجاد $x$ .
$f\ (x) = g(x)$ , $f\ (x) = h\ (x)$ , $g\ (x) = h\ (x)$ .
ب- ماذا يمثل حل كل معادلة ؟.

**المسألة الثانية** : (حسب نموذج 2013):

يريد مستغل شاطىء كراء مظلات شمسية و يقترح على زبائنه العروض الآتية:

**العرض الأول :**
دفع مبلغ 150 DA لكراء المظلة لساعة واحدة.
**العرض الثاني:**
دفع مبلغ 100 DA للساعة الواحدة إضافة إلى ضمان غير مسترجع بمبلغ 200 DA
**العرض الثالث:**
دفع مبلغ 1500 DA على أن لا يتجاوز عدد الساعات 14.

1) اختر العرض الأنسب و الأقل تكلفة لكراء مظلة لمدة 8 ساعات.
2) $x$ عدد ساعات الكراء التي يمكن التحصل عليها.
أ- عبّر، بدلالة $x$، عن العرض الأول بالدالة $f\ (x)$ و عن العرض الثاني بالدالة $g\ (x)$ وعن العرض الثالث بالدالة $h\ (x)$.
ب- مثّل بيانيا في معلم متعامد و متجانس $(O\ ,\vec{i}\ ,\vec{j}\ )$ الدوال $f$، $g$ و $h$.
(حيث كل 1 cm من محور الفواصل يمثل 2 ساعتان و كل 1cm من محور التراتيب يمثل 200 DA ) .
3) اعتمادا على البيان املأ الجدول الآتي :

| الساعات / العروض | 4 ساعات | 10 ساعات | 13 ساعة |
|---|---|---|---|
| العرض 1 | | | |
| العرض 2 | | | |
| العرض 3 | | | |

4) أ- حلّ المعادلات الآتية لإيجاد $x$ .
$f\ (x) = g(x)$ , $f\ (x) = h\ (x)$ , $g\ (x) = h\ (x)$ .
ب- ماذا يمثل حل كل معادلة ؟.

**حل المسألة الأولى :** (نموذج 2013)

**1) اختيار العرض المناسب لتحميل 14 Go من المعطيات :**

- العرض الأول : 100 x 14 = 1 400 DA
- العرض الثاني : 70 x 14 + 300 = 980 + 300 =1 280 DA
- العرض الثالث : 1 350 DA
إذن العرض الأقل تكلفة لمدة أسبوع هو عرض الوكالة الثالثة.

**2) تعبير عن $f(x)$ و $g(x)$ و $h(x)$ بدلالة :**

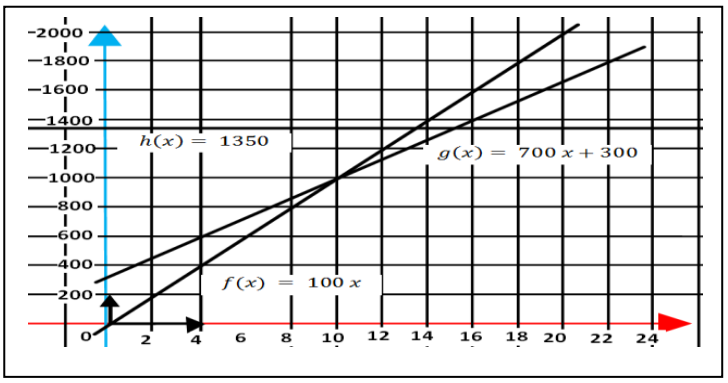
$$f(x) = 100\,x$$
$$g(x) = 70\,x + 300$$
$$h(x) = 1\,350$$

**3) ملء الجدول من البيان :**

| Go / العروض | 10 Go | 13.5 Go | 15 Go |
|---|---|---|---|
| العرض 1 | 1 000 | 1 350 | 1 500 |
| العرض 2 | 1 000 | 1 245 | 1 350 |
| العرض 3 | 1 350 | 1 350 | 1 350 |

- عندما يساوي عدد الجيجات 10 فإن العرض الأول يساوي العرض الثاني بكلفة 1 000 DA.
- عندما يساوي عدد الجيجات 13.5 فإن العرض الأول يساوي العرض الثالث بكلفة 1 350 DA
- عندما يساوي عدد الجيجات 15 فإن العرض الثاني يساوي العرض الثالث بكلفة 1 350 DA

**2) التمثيل البياني :**




**4) حل المعادلات :**

$$\boldsymbol{f(x) = g(x)},$$
$$100\,x = 70\,x + 300$$
$$30\,x = 300,$$
$$\boldsymbol{x = 10}$$
$$\boldsymbol{f(x) = h(x)}$$
$$100x = 1\,350$$
$$\boldsymbol{x = 13.5}$$
$$\boldsymbol{g(x) = h(x)}$$
$$70\,x + 300 = 1\,350$$
$$70\,x = 1\,050$$
$$\boldsymbol{x = 15}$$

**2) حل المسألة الثانية :** (نموذج 2013)

**1) اختيار العرض المناسب لكراء مظلة لمدة 8 ساعات :**

- العرض الأول : 150 x 8 = 1 200 DA
- العرض الثاني : 100 x 8 + 200 = 800 + 200 =1 000 DA
- العرض الثالث : 1 500 DA
إذن العرض الأقل تكلفة لمدة 8 ساعات هو العرض الثاني.

**2) تعبير عن $f(x)$ و $g(x)$ و $h(x)$ بدلالة :**

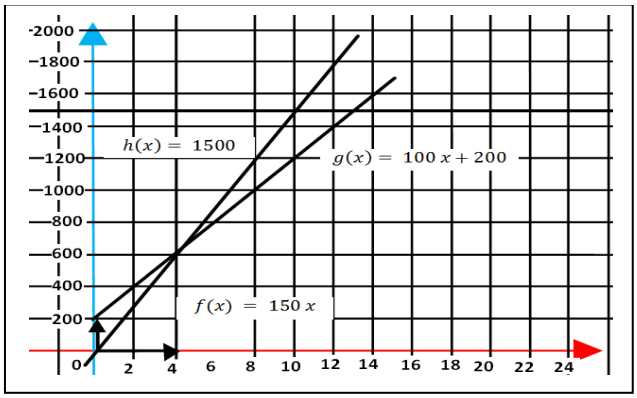
$$f(x) = 150\,x$$
$$g(x) = 100\,x + 200$$
$$h(x) = 1\,500$$

**3) ملء الجدول من البيان :**

| الساعات / العروض | 4 ساعات | 10 ساعات | 13 ساعة |
|---|---|---|---|
| العرض 1 | 600 DA | 1 500 DA | 1 950 DA |
| العرض 2 | 600 DA | 1 200 DA | 1 500 DA |
| العرض 3 | 1 500 DA | 1 500 DA | 1 500 DA |

- عندما يساوي عدد الساعات 4 فإن العرض الأول يساوي العرض الثاني بكلفة 600 DA.
- عندما يساوي عدد الساعات 10 فإن العرض الأول يساوي العرض الثالث بكلفة 1 500 DA
- عندما يساوي عدد الساعات 13 فإن العرض الثاني يساوي العرض الثالث بكلفة 1 500 DA

**2) التمثيل البياني :**




**4) حل المعادلات :**

$$\boldsymbol{f(x) = g(x)},$$
$$150\,x = 100\,x + 200$$
$$50\,x = 200$$
$$\boldsymbol{x = 4}$$
$$\boldsymbol{f(x) = h(x)}$$
$$150\,x = 1\,500$$
$$\boldsymbol{x = 10}$$
$$\boldsymbol{g(x) = h(x)}$$
$$100\,x + 200 = 1\,500$$
$$100\,x = 1\,300$$
$$\boldsymbol{x = 13}$$

**المسألة** : ( **8 نقاط**) امتحان شهادة التعليم المتوسط جوان 2007

تقترح شركة لسيارات الأجرة التسعيرتين التاليتين :

- التسعيرة الأولى : 15 DA للكيلومتر الواحد لغير المنخرطين.
- التسعيرة الثانية : 12 DA للكيلومتر الواحد مع مشاركة شهرية قدرها 900 DA.

1 - انقل الجدول على ورقة الإجابة ثم أكمله :

| | | | |
|---|---|---|---|
| المسافة (km) | 60 | | |
| التسعيرة الأولى (DA) | | | 5100 |
| التسعيرة الثانية (DA) | | 3060 | |

2- ليكن : $x$ هو عدد الكيلومترات للمسافات المقطوعة.
$y_1$ هو المبلغ حسب التسعيرة الأولى.
$y_2$ هو المبلغ حسب التسعيرة الثانية.

ا- عبّر عن $y_1$ و $y_2$ بدلالة $x$ .
ب- حل المتراجحة : $15\,x > 12\,x + 900$
3- في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$
ا- مثل بيانيا الدالتين $f$ , $g$ حيث :

$$f(x) = 15\,x$$
$$g(x) = 12x + 900$$

( $1cm$ على محور الفواصل يمثل $50\,km$ ، $1\,cm$ على محور التراتيب يمثل 500 DA )

ب- استعمل التمثيل البياني لتحديد أفضل تسعيرة مع الشرح.

## حل مسألة امتحان شهادة التعليم المتوسط :

**1) ملىء الجدول :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| المسافة (km) | 60 | **180** | **340** |
| التسعيرة الأولى (DA) | **900** | **2700** | 5100 |
| التسعيرة الثانية (DA) | **1620** | 3060 | **4980** |

**2) أ ) : التعبير عن $y_1$ و عن $y_2$ بدلالة $x$ :**

أ) من أجل $x$ مسافة مقطوعة فإن المبلغ حسب التسعيرة الأولى هو $15\,x$ و بالتالي : $y_1 = 15x$
من أجل $x$ مسافة مقطوعة فإن المبلغ حسب التسعيرة الثانية هو $12\,x + 900$
و بالتالي : $y_2 = 12x + 900$

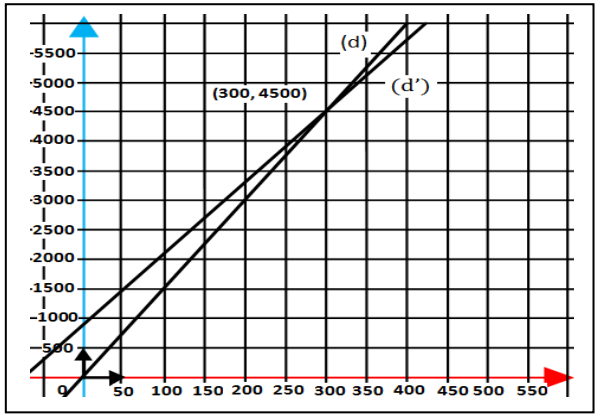
**ب) حل المتراجحة $15\,x < 12x + 900$ :**

$15\,x > 12x + 900$ معناه : $15\,x - 12x > 12x + 900 - 12x$ و منه : $3x > 900$ و منه $x > 300$
إذن حلول المتراجحة هي كل القيم الأكبر من 300

-3

**أ) التمثيل البياني :**

الدالة $f$ هي دالة خطية و منه تمثيلها البياني عبارة عن المستقيم (d) الذي يمر بالمبدأ 0 و يمر أيضا من النقطة A ( 60, 900)
الدالة $g$ هي دالة تآلفية تمثيلها البياني هو المستقيم (d') الذي يمر بالنقطتين B ( 60, 1620) و C (180, 3060)




**ب) تحديد أفضل تسعيرة من خلال التمثيل البياني :**

من خلال التمثيل البياني نجد أن فاصلة نقطة تقاطع المستقيمين (d) و (d') هي 300
من أجل مسافة أقل من 300 km يكون المستقيم (d') فوق المستقيم (d) و منه التسعيرة الأولى هي الأفضل.
من أجل مسافة أكبر من 300 km يكون المستقيم (d) فوق المستقيم (d') و منه التسعيرة الثانية هي الأفضل.
من أجل المسافة 300 km نجد أن التسعيرة الأولى هي نفسها التسعيرة الثانية.

**المسألة الأولى** : ( حسب نموذج 2007)

تقترح شركة تنظيف التسعيرتين التاليتين :

- التسعيرة الأولى : 50 DA للمتر المربع الواحد لغير المنخرطين.
- التسعيرة الثانية : 30 DA للمتر المربع الواحد مع مشاركة شهرية قدرها 600 DA.

1 - انقل الجدول على ورقة الإجابة ثم أكمله :

| المساحة ($m^2$) | | 20 | 40 |
|---|---|---|---|
| التسعيرة الأولى (DA ) | | | |
| التسعيرة الثانية (DA ) | 900 | | |

2- ليكن : $x$ هو عدد الأمتار المربعة المنظفة.
$y_1$ هو المبلغ حسب التسعيرة الأولى.
$y_2$ هو المبلغ حسب التسعيرة الثانية.

ا- عبّر عن $y_1$ و $y_2$ بدلالة $x$ .
ب- حل المتراجحة : $50\ x > 30\ x + 600$
3- في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o\ ;\vec{\imath}\ ;\vec{\jmath}\ )$
ا- مثل بيانيا الدالتين $f$ , $g$ حيث : $f(x) = 50\ x$
$g(x) = 30\ x + 600$

( 0.5 $cm$ على محور الفواصل يمثل 5 $m^2$ ، 0.5 $cm$ على محور التراتيب يمثل 300 DA )

ب- استعمل التمثيل البياني لتحديد أفضل تسعيرة مع الشرح.

**المسألة الثانية** : ( حسب نموذج 2007)

يقترح محل كراء الكراسي التسعيرتين التاليتين :

- التسعيرة الأولى : 100 DA للكرسي الواحد لغير المنخرطين.
- التسعيرة الثانية : 70 DA للكرسي الواحد مع مشاركة شهرية قدرها 2 100 DA.

1 - انقل الجدول على ورقة الإجابة ثم أكمله :

| عدد الكراسي | 10 | | |
|---|---|---|---|
| التسعيرة الأولى (DA ) | | 2 000 | |
| التسعيرة الثانية (DA ) | | | 4 900 |

2- ليكن : $x$ هو عدد الكراسي المؤجرة.
$y_1$ هو المبلغ حسب التسعيرة الأولى.
$y_2$ هو المبلغ حسب التسعيرة الثانية.

ا- عبّر عن $y_1$ و $y_2$ بدلالة $x$ .
ب- حل المتراجحة : $100\ x > 70\ x + 2\ 100$
3- في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o\ ;\vec{\imath}\ ;\vec{\jmath}\ )$
ا- مثل بيانيا الدالتين $f$ , $g$ حيث : $f(x) = 100\ x$
$g(x) = 70\ x + 2\ 100$

( 1$cm$ على محور الفواصل يمثل 10 كراسي ، 1 $cm$ على محور التراتيب يمثل 1 000 DA )

ب- استعمل التمثيل البياني لتحديد أفضل تسعيرة مع الشرح.

## حل المسألة الأولى : (نموذج 2007)

**1) ملىء الجدول :**

| المساحة ( $m^2$ ) | **10** | 20 | 40 |
|---|---|---|---|
| التسعيرة الأولى (DA ) | **500** | **1 000** | **2 000** |
| التسعيرة الثانية (DA ) | 900 | **1 200** | **1 800** |

**2) أ ) : التعبير عن $y_1$ و عن $y_2$ بدلالة $x$ :**

حسب التسعيرة الأولى : $y_1 = 50\ x$

حسب التسعيرة الثانية : $y_2 = 30\ x + 600$

**ب) حل المتراجحة $50\ x < 30\ x + 600$:**

$50\ x > 30\ x + 600$

$50\ x - 30\ x > 600$

$20\ x > 600$

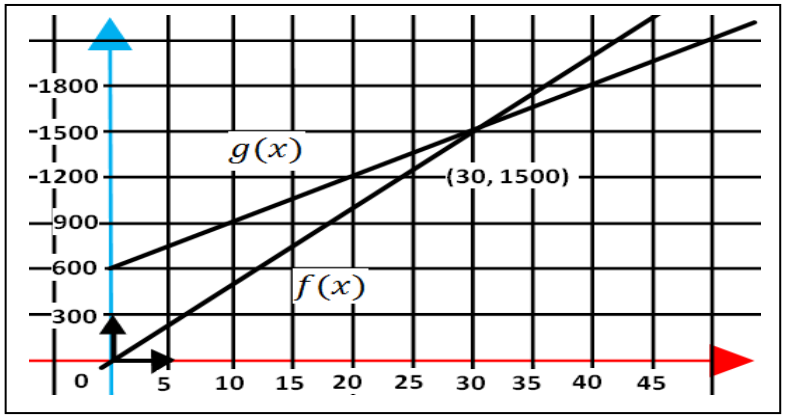
$x > \mathbf{30}$

إذن حلول المتراجحة هي كل القيم الأكبر من 30

**3- أ) التمثيل البياني :**

| $x$ | 5 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 250 | 500 | 750 |

| $x$ | 5 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 750 | 900 | 1 050 |




**ب) استعمال التمثيل البياني لتحديد أفضل تسعيرة:**

التمثيلان البيانيان للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ يتقاطعان في النقطة التي فاصلتها 30 و هذا يعني أن التسعيرتين متساويتين عند 30 متر مربع بكلفة 1 500 DA

و عندما لا يفوق عدد الأمتار المربعة 30، فالتسعيرة الأولى هي الأفضل

و إذا تجاوز عدد الأمتار المربعة 30 متر مربع فالتسعيرة الثانية هي الأفضل.

## حل المسألة الثانية : (نموذج 2007)

**1) ملىء الجدول :**

| عدد الكراسي | **10** | 20 | 40 |
|---|---|---|---|
| التسعيرة الأولى (DA ) | **1 000** | **2 000** | **4 000** |
| التسعيرة الثانية (DA ) | 2 800 | **3 500** | **4 900** |

**2) أ ) : التعبير عن $y_1$ و عن $y_2$ بدلالة $x$ :**

حسب التسعيرة الأولى : $y_1 = 100\ x$

حسب التسعيرة الثانية : $y_2 = 70\ x + 2\ 100$

**ب) حل المتراجحة $100\ x < 70\ x + 2\ 100$:**

$100\ x > 70\ x + 2\ 100$

$100\ x - 70\ x > 2\ 100$

$30\ x > 2\ 100$

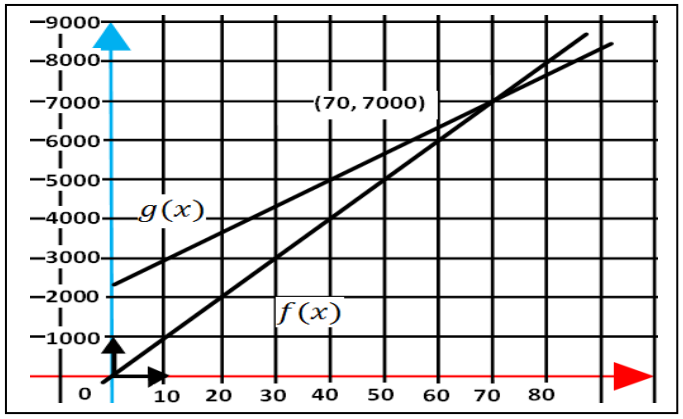
$x > \mathbf{70}$

إذن حلول المتراجحة هي كل القيم الأكبر من 70

**3- أ) التمثيل البياني :**

| $x$ | 10 | 30 | 70 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 000 | 3 000 | 7 000 |

| $x$ | 10 | 30 | 70 |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 2 800 | 4 200 | 7 000 |




**ب) استعمال التمثيل البياني لتحديد أفضل تسعيرة:**

التمثيلان البيانيان للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ يتقاطعان في النقطة التي فاصلتها 70 و هذا يعني أن التسعيرتين متساويتين عند كراء 70 كرسي بكلفة 7 000 DA

و عندما لا يفوق عدد الكراسي 70، فالتسعيرة الأولى هي الأفضل

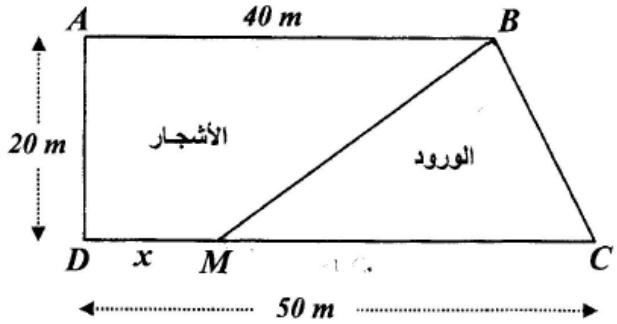
و إذا تجاوز عدد الكراسي 70 كرسي فالتسعيرة الثانية هي الأفضل.

**المسألة** : ( **8 نقاط**) امتحان شهادة التعليم المتوسط (2015)

I) لِعَمّي أحمد قطعة أرض مستطيلة الشّكل مساحتها $1000\ m^2$ ، عرضها خمسي ( $\frac{2}{5}$ ) طولها.

- أوجد بُعْدَي هذه القطعة.

II) تنازل عَمّي أحمد لأخيه عن جزء من هذه القطعة مساحته $100\ m^2$ و خصّص الجزء الباقي منها لاستغلاله مشتلة للورود و الأشجار . لهذا الغرض قسّم هذا الجزء عشوائيًا إلى قطعتين كما هو موضّح في الشّكل:




نضع $DM = x$ ( M نقطة من [DC] مع $0 \leq x \leq 50$ )

لتكن $f(x)$ مساحة المثلث BCM و $g(x)$ مساحة القطعة ABMD.

1) أ- عبّر عن $f(x)$ و $g(x)$ بدلالة $x$.

ب- سَاعِدْ عَمّي أحمد لإيجاد الطول DM حتى تكون لقطعتي الأرض نفس المساحة.

2) أ- في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(0, \vec{i}, \vec{j})$

- مثّل بيانيا الدالتين : $f(x) = 500 - 10x$ ، $g(x) = 10x + 400$

نأخذ : 1 cm على محور الفواصل يمثّل 2 m

1 cm على محور التراتيب يمثّل $50\ m^2$

ب- فسّر بيانيًا مساعدتك السابقة لِعَمّي أحمد ، مع تحديد قيمة المساحة في هذه الحالة.

## حل مسألة امتحان شهادة التعليم المتوسط (2015 ):

**إيجاد بعدي القطعة** :

بفرض طول القطعة هو $x$ و عرضها هو $y$ . ...لدينا :

$$\begin{cases} y = \frac{2}{5} \times x \ .....(1) \\ x \times y = 1000 \ ...(2) \end{cases}$$

نعوض قيمة $y$ في المعادلة رقم (2) و نحصل على : $\frac{2}{5}x \times x = 1000$

أي : $\frac{2}{5}x^2 = 1000$ و منه : $2x^2 = 5000$ أي : $x^2 = 2500$ أي : $x = \sqrt{2500}$

ومنه $x = 50$ أي الطول هو 50m باستعمال قاعدة حساب مساحة المستطيل و بما أن المساحة تعادل 1000 m و الطول يعادل **50m** فإن عرض المستطيل هو **20m**

**أ) التعبير عن $f(x)$ و $g(x)$ بدلالة $x$ :**

**لدينا مساحة المثلث** هي : $\frac{\text{(القاعدة} \times \text{الارتفاع)}}{2}$ القاعدة هي : $50 - x$ أي : $\frac{20 \times (50-x)}{2}$

و منه مساحة المثلث هي : $10 \times (50-x)$ أي: $f(x) = 500 - 10x$

و **مساحة الشبه منحرف** هي : $\frac{\text{( القاعدة الصغرى+القاعدة الكبرى)} \times \text{الارتفاع}}{2}$ أي : $\frac{20 \times (x+40)}{2}$

أي : $10 \times (x+40)$ و منه : $g(x) = 10x + 400$

ب) مساعدة عمي أحمد لإيجاد الطول DM حتى تكون لقطعتي الأرض نفس المساحة :

لقطعتي الأرض نفس المساحة تعني : $f(x) = f(g)$ أي : $500 - 10x = 400 + 10x$

و منه : $500 - 400 = 10x + 10x$ أي : $100 = 20 \times x$ و منه : $x = 5$

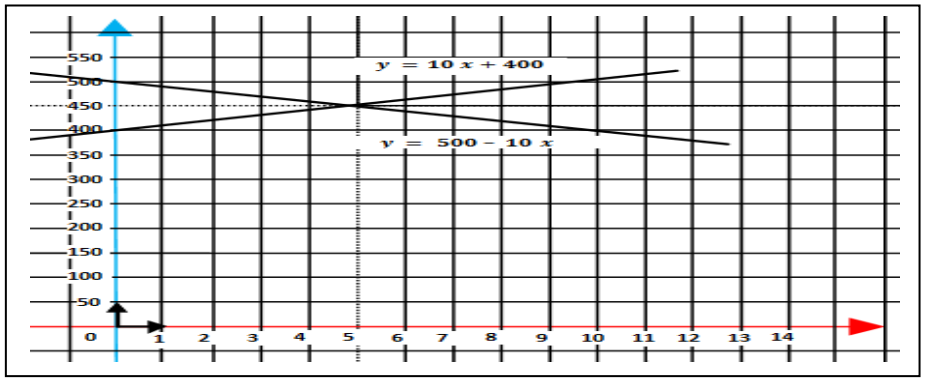
و بالتالي حتى تكون لقطعتي الأرض نفس المساحة يجب أن يكون : **DM = 5**

2-أ) لتمثيل الدالتين : $f(x) = -10x + 500 , g(x) = 10x + 400$ بيانيا:

**التمثيل البياني** :

| $x$ | 0 | 10 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | 500 | 400 |

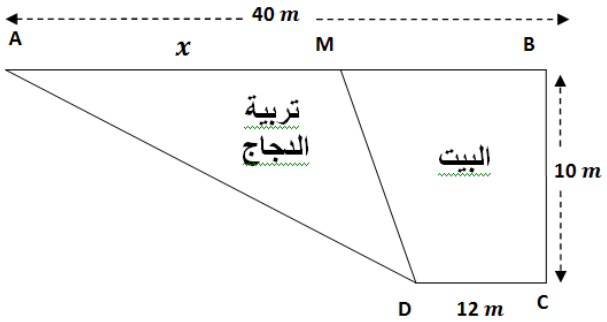
| $x$ | 0 | 10 |
|---|---|---|
| $g(x)$ | 400 | 500 |




ب) **التفسير البياني** : يكون لقطعتي الأرض نفس المساحة من أجل فاصلة نقطة تقاطع المنحنيين و هي $450\ m^2$ و تبلغ قيمة القطعة DM في هذه الحالة DM = 5 m

**المسألة الأولى** : (حسب نموذج 2015):

I) لأمين قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها $360\ m^2$ ، طولها يساوي مرتين و نصف 2.5 عرضها
- أوجد بُعْدَي هذه القطعة.
II) باع صاحب الأرض جزء من هذه القطعة مساحته $100\ m^2$ و خصّص الجزء الباقي منها لاستغلاله لتربية الدجاج و لبناء منزل . لهذا الغرض قسّم هذا الجزء عشوائيا إلى قطعتين كما هو موضّح في الشّكل:




نضع $AM = x$ ( M نقطة من $[AB]$ مع $0 \leq x \leq 40$ )
لتكن $f(x)$ مساحة المثلث AMD و $g(x)$ مساحة القطعة MBCD.

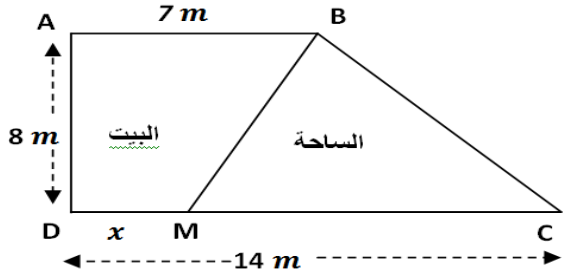
1) أ- عبّر عن $f(x)$ و $g(x)$ بدلالة $x$.
ب- سَاعِدْ أمين لإيجاد الطول AM حتى تكون لقطعتي الأرض نفس المساحة.

2) أ- في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- مثّل بيانيا الدالتين : $f(x) = 5x$ ، $g(x) = -5x + 260$
نأخذ : 1 cm على محور الفواصل يمثّل 2 m
1 cm على محور التراتيب يمثّل $20\ m^2$

ب- فسّر بيانيّا مساعدتك السابقة لأمين ، مع تحديد قيمة المساحة في هذه الحالة.

**المسألة الثانية** : (حسب نموذج 2015):

I) لمينة قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها $147\ m^2$ ، طولها ثلاثة أضعاف 3 عرضها .
- أوجد بُعْدَي هذه القطعة.
II) باعت صاحبة الأرض جزء من هذه القطعة مساحته $63\ m^2$ و خصّصت الجزء الباقي منها لاستغلاله لبناء بيت و لاستعماله كساحة. لهذا الغرض قسّمت هذا الجزء عشوائيا إلى قطعتين كما هو موضّح في الشّكل:




نضع $DM = x$ ( M نقطة من $[DC]$ مع $0 \leq x \leq 14$ )
لتكن $f(x)$ مساحة المثلث BCM و $g(x)$ مساحة القطعة ABMD.

1) أ- عبّر عن $f(x)$ و $g(x)$ بدلالة $x$.
ب- سَاعِدْ مينة لإيجاد الطول DM حتى تكون لقطعتي الأرض نفس المساحة.

2) أ- في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- مثّل بيانيا الدالتين : $f(x) = -4x + 56$ ، $g(x) = 4x + 28$
نأخذ : 1 cm على محور الفواصل يمثّل 1 m
1 cm على محور التراتيب يمثّل $10\ m^2$

ب- فسّر بيانيّا مساعدتك السابقة لمينة ، مع تحديد قيمة المساحة في هذه الحالة.

## حل المسألة الأولى :

**إيجاد بعدي القطعة** :

بفرض عرض القطعة هو $x$ . .....لدينا :

$$\begin{cases} y = 2.5 \times x \ldots..(1) \\ x \times y = 360 \ldots(2) \end{cases}$$

و طولها هو $y$ .

نعوض قيمة $y$ في المعادلة رقم (2) و نحصل على : $2.5 \times x^2 = 360x$

أي : $x^2 = 144$ أي : $x = \sqrt{144}$ أي العرض هو 12 m

ومنه $x = 12$

بما أن الطول هو 2.5 العرض فإن $y = 2.5 \times 12$ أي $y = 30$ m و منه :

**أ) التعبير عن $f(x)$ و $g(x)$ بدلالة $x$ :**

**لدينا مساحة المثلث هي** : (القاعدة x الارتفاع) / 2 القاعدة هي : $x$ أي : $\frac{10 \times x}{2}$

و منه مساحة المثلث هي : $x$ 5 أي : $f(x) = 5x$ x 5

و **مساحة الشبه منحرف** هي : ( القاعدة الصغرى+القاعدة الكبرى) x الارتفاع / 2 أي : $\frac{[12+(40-x)]\times 10}{2}$

أي : $5 \times (52-x)$ أي : $260 - 5x$ و منه : $g(x) = 260 - 5x$

ب) مساعدة أمين لإيجاد الطول AM حتى تكون لقطعتي الأرض نفس المساحة :

لقطعتي الأرض نفس المساحة تعني : $f(x) = f(g)$ أي : $5x = 260 - 5x$

و منه : $10x = 260$ أي $x = 26$

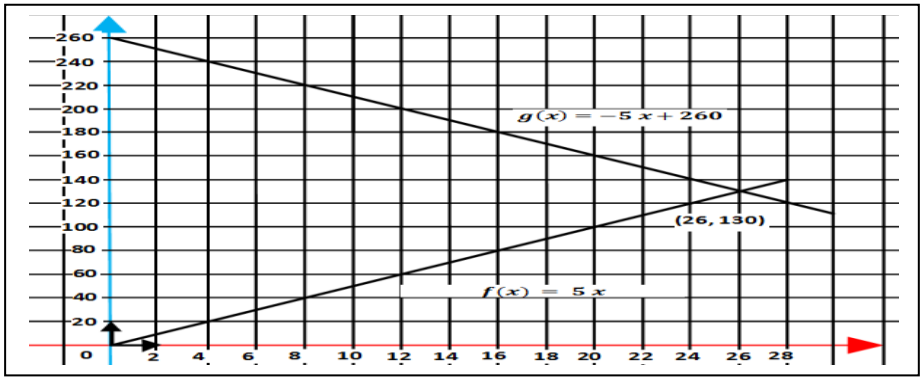
و بالتالي حتى تكون لقطعتي الأرض نفس المساحة يجب أن يكون : **AM = 26**

2-أ) لتمثيل الدالتين : $f(x) = 5x$ , $g(x) = 260 - 5x$ بيانيا:

**التمثيل البياني** :

| $x$ | 0 | 10 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 50 |

| $x$ | 0 | 10 |
|---|---|---|
| $g(x)$ | 260 | 210 |




ب) **التفسير البياني** : يتقاطع المنحنيين عند النقطة التي فاصلتها 26 و ترتيبتها 130 أي تتساوى مساحتين القطعتين عند $130\ m^2$ عندما يكون طول القطعة AM 26 متر

## حل المسألة الثانية :

**إيجاد بعدي القطعة** :

بفرض عرض القطعة هو $x$ . .....لدينا :

$$\begin{cases} y = 3 \times x \ldots..(1) \\ x \times y = 147 \ldots(2) \end{cases}$$

و طولها هو $y$ .

نعوض قيمة $y$ في المعادلة رقم (2) و نحصل على : $3x = 147x$ x

أي : $x^2 = 49$ أي : $x = \sqrt{49}$ أي العرض هو 7 m

ومنه $x = 7$m

بما أن الطول هو 3 مرات العرض أي: $y = 3x$ أي $y = 3 \times 7$ و منه : $y = 21$ m

**أ) التعبير عن $f(x)$ و $g(x)$ بدلالة $x$ :**

**لدينا مساحة المثلث هي** : (القاعدة x الارتفاع) / 2 القاعدة هي : $x$ أي : $\frac{(14-x) \times 8}{2}$

و منه مساحة المثلث هي : $x$ 4 أي : $f(x) = -4x + 56$ x 4 (14-$x$)

و **مساحة الشبه منحرف** هي : ( القاعدة الصغرى+القاعدة الكبرى) x الارتفاع / 2 أي : $\frac{(x+7) \times 8}{2}$

أي : $4 \times (x+7)$ أي : $4x + 28$ و منه : $g(x) = 4x + 28$

ب) مساعدة مينة لإيجاد الطول DM حتى تكون لقطعتي الأرض نفس المساحة :

لقطعتي الأرض نفس المساحة تعني : $f(x) = f(g)$ أي : $-4x + 56 = 4x + 28$

و منه : $-8x = -28$ أي $x = 3.5$

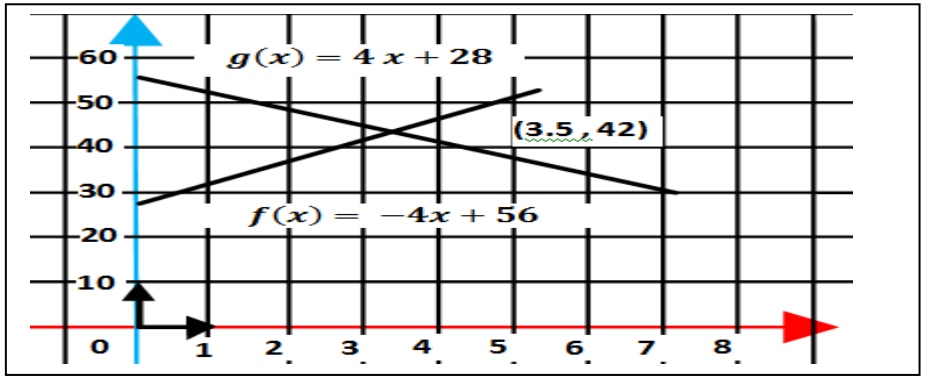
و بالتالي حتى تكون لقطعتي الأرض نفس المساحة يجب أن يكون : **DM = 3.5 m**

2-أ) لتمثيل الدالتين : $f(x) = -4x + 56$ , $g(x) = 4x + 28$ بيانيا:

**التمثيل البياني** :

| $x$ | 0 | 10 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | 56 | 16 |

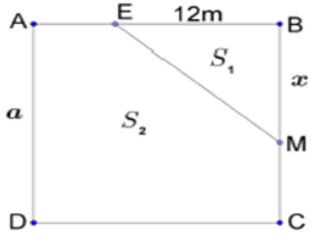
| $x$ | 0 | 10 |
|---|---|---|
| $g(x)$ | 28 | 68 |




ب) **التفسير البياني** : يتقاطع المنحنيين عند النقطة التي فاصلتها 3.5 و ترتيبتها 42 أي تتساوى مساحتين القطعتين عند $42\ m^2$ عندما يكون طول القطعة DM 3.5 متر

**المسألة** : ( **8 نقاط**) امتحان شهادة التعليم المتوسط (2017)

$ABCD$ قطعة أرض مربعة الشكل مساحتها 324 $m^2$ ملك للأخوين أحمد و فاطمة و مجزأة حسب المخطط المقابل.




**الجزء الأول :**

1) احسب a طول ضلع هذه القطعة.

2) M نقطة متحركة على الضلع $[BC]$

حيث : BM = $x$

E نقطة من $[BA]$ حيث : EB = 12 m

الجزء EBM تملكه فاطمة و الجزأ AEMCD يملكه أحمد.

أ) ليكن $S_1$ مساحة الجزء EBM و $S_2$ مساحة الجزء AEMCD

-اكتب بدلالة $x$ كلا من المساحتين $S_1$ و $S_2$

ب) ساعد الأخوين على تحديد موضع النقطة M بحيث تكون مساحة قطعة أحمد ضعف مساحة قطعة فاطمة.

**الجزء الثاني :**

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(0, \vec{I}, \vec{J})$

1) مثل بيانيا الدالتين $f$ و $g$ حيث :

$g(x) = 12x$ , $f(x) = -6x + 324$

(نأخذ : 1 $cm$ على محور الفواصل يمثل 2 $m$ و 1 $cm$ على محور التراتيب يمثل 36 $m^2$ )

2) بقراءة بيانية فسر مساعدتك السابقة للأخوين حول تحديد موضع النقطة M مع إيجاد مساحة كل من القطعتين.

**حل مسألة امتحان شهادة التعليم المتوسط (2017 ):**

**الجزء الأول :**

1) حساب a طول ضلع القطعة

بما أن مساحة المربع ABCD هي : $S = a^2$ و عليه $a^2 = 324$ و بالتالي $a = \sqrt{324}$ ،أي a=18 ، أي طول ضلع القطعة هو **18 m**

2) أ) كتابة المساحتين $S_1$ و $S_2$ بدلالة $x$ :

لدينا $S_1 = \frac{12 \times BM}{2}$ أي : $S_1 = \frac{12 \times x}{2}$ و بالتالي : $S_1 = 6x$ ( $S_1$ مقدرة بـ : $m^2$ )

و لدينا $S_2 = 324 - S_1$ و منه $S_2 = 324 - 6x$ ( $S_2$ مقدرة بـ : $m^2$ )

ب) تحديد موضع M بحيث تكون مساحة قطعة أحمد ضعف مساحة قطعة فاطمة

لدينا $S_2 = 2\ S_1$ و منه $324 - 6x = 2 \times 6x$ و عليه $12x + 6x = 324$

أي : $18x = 324$ إذن $x = 18$ ( الوحدة هي m ) و بالتالي النقطة M تنطبق على النقطة C .

**الجزء الثاني :**

1) التمثيل البياني للدالة الخطية $f$ هو المستقيم الذي يشمل النقطتين :

مبدأ المعلم O (0 ; 0) و النقطة K (12 ; 144)

التمثيل البياني للدالة التآلفية $g$ هو المستقيم الذي يشمل النقطتين

E (0 ; 324) و F ( 15 ; 234)

( **ملاحظة** : تقبل أي نقطتين من التمثيل البياني لكل من الدالتين )

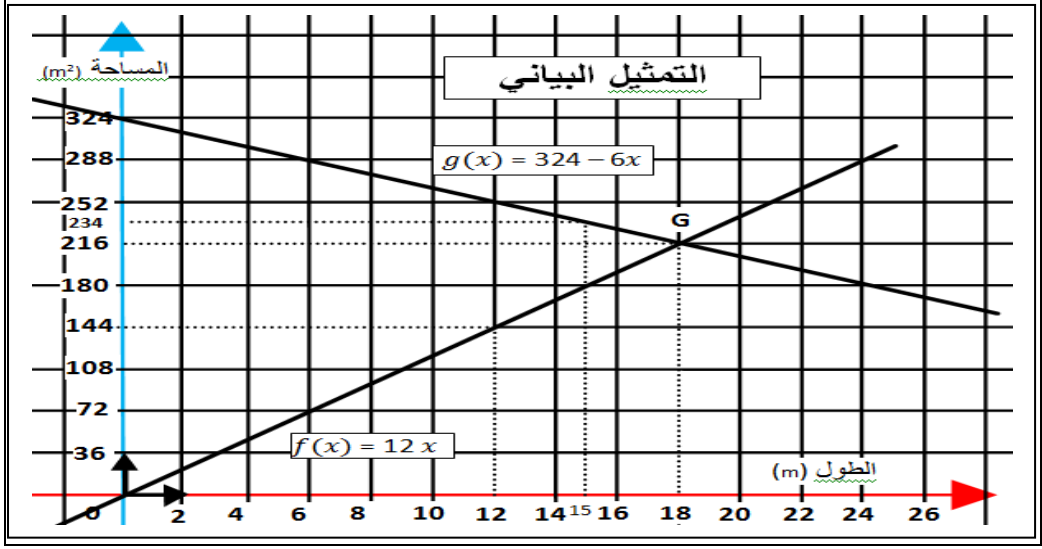
2) التفسير البياني و إيجاد المساحتين :

التمثيلان البيانيان للدالتين $f$ و $g$ يتقاطعان في النقطة G (18 ; 216)

لدينا : $f(x) = 2\ S_1$ و $g(x) = S_2$ و من أجل $x = 18$ فإن $f(x) = g(x)$ أي $2S_1 = S_2$ و من التمثيل البياني فإن $g(18) = 216$

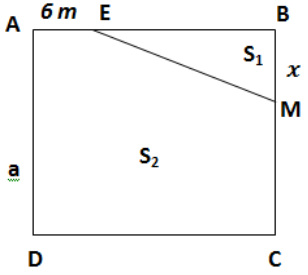
أي $S_2 = 216\ m^2$ و $2S_1 = 216\ m^2$ و منه $S_1 = 108\ m^2$

إذن : مساحة القطعة التي يملكها أحمد هي $216\ m^2$ و مساحة القطعة التي تملكها أخته فاطمة هي $108\ m^2$



**المسألة الأولى:** (حسب نموذج 2017):

*ABCD* قطعة أرض مربعة الشكل مساحتها $1296\ m^2$ ملك للأخوين نزيه و الياس و مجزأة حسب المخطط المقابل.




**الجزء الأول :**

1) احسب a طول ضلع هذه القطعة.

2) M نقطة متحركة على الضلع $[BC]$

حيث : $MC = x$

E نقطة من $[AB]$ حيث : $AE = 6\ m$

الجزء EBM يملكه الياس و الجزأ AEMCD يملكه نزيه.

أ) ليكن $S_1$ مساحة الجزء EBM و $S_2$ مساحة الجزء AEMCD

-اكتب بدلالة $x$ كلا من المساحتين $S_1$ و $S_2$

ب) ساعد الأخوين على تحديد موضع النقطة M بحيث تكون مساحة قطعة نزيه 8 أضعاف مساحة قطعة الياس.

**الجزء الثاني :**

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{I}, \vec{J})$

1) مثل بيانيا الدالتين $f$ و $g$ حيث :

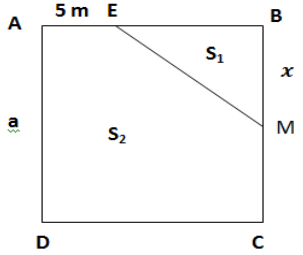
$f(x) = 120\ x$ , $g(x) = -15x + 1296$

(نأخذ : $1\ cm$ على محور الفواصل يمثل $5\ m$ و $1\ cm$ على محور التراتيب يمثل $100\ m^2$ )

2) بقراءة بيانية فسر مساعدتك السابقة للأخوين حول تحديد موضع النقطة M مع إيجاد مساحة كل من القطعتين.

**المسألة الثانية:** (حسب نموذج 2017):

*ABCD* قطعة أرض مربعة الشكل مساحتها $225\ m^2$ ملك للأخوين ريمة و أمين و مجزأة حسب المخطط المقابل.




**الجزء الأول :**

1) احسب a طول ضلع هذه القطعة.

2) M نقطة متحركة على الضلع $[BC]$

حيث : $MB = x$

E نقطة من $[AB]$ حيث : $AE = 5\ m$

الجزء EBM تملكه ريمة و الجزأ AEMCD يملكه أمين.

أ) ليكن $S_1$ مساحة الجزء EBM و $S_2$ مساحة الجزء AEMCD

-اكتب بدلالة $x$ كلا من المساحتين $S_1$ و $S_2$

ب) ساعد الأخوين على تحديد موضع النقطة M بحيث تكون مساحة قطعة أمين 5 أضعاف مساحة قطعة ريمة.

**الجزء الثاني :**

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{I}, \vec{J})$

1) مثل بيانيا الدالتين $f$ و $g$ حيث :

$f(x) = 25\ x$ , $g(x) = -5x + 225$

(نأخذ : $1\ cm$ على محور الفواصل يمثل $5\ m$ و $1\ cm$ على محور التراتيب يمثل $20\ m^2$ )

2) بقراءة بيانية فسر مساعدتك السابقة للأخوين حول تحديد موضع النقطة M مع إيجاد مساحة كل من القطعتين.

## حل المسألة الأولى : (نموذج 2017)

1) حساب a طول ضلع القطعة

بما أن مساحة المربع ABCD هي : $S = a^2$ و عليه $a^2 = 1296$ و بالتالي $a = \sqrt{1296}$ ، طول ضلع القطعة هو **36 m**

2) أ) كتابة المساحتين $S_1$ و $S_2$ بدلالة $x$ :

لدينا $S_1 = \frac{x\,(39-9)}{2}$ أي : $S_1 = \frac{x \times 30}{2}$ و بالتالي : $\underline{\mathbf{S_1 = 15\,x}}$ ( $S_1$ مقدرة بـ : $m^2$ )

و لدينا $S_1 - S_2 = 1296$ و منه $\underline{\mathbf{S_2 = 1296 - 15\,x}}$ ( $S_2$ مقدرة بـ : $m^2$ )

ب) تحديد موضع M بحيث تكون مساحة قطعة نزيه 8 أضعاف مساحة الياس.

لدينا $S_1 = 8\,S_2$ و منه $x = 8 \times 15\,x$ و عليه $1296 - 15\,x = 120\,x$

أي : $-135x = -1296$ إذن $9.6x$ = ( الوحدة هي m ) .

**التمثيل البياني:**

| $x$ | 0 | 10 |
|---|---|---|
| $g(x)$ | 1296 | 1146 |

| $x$ | 0 | 10 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 1200 |

**التفسير البياني حول إيجاد المساحة :**

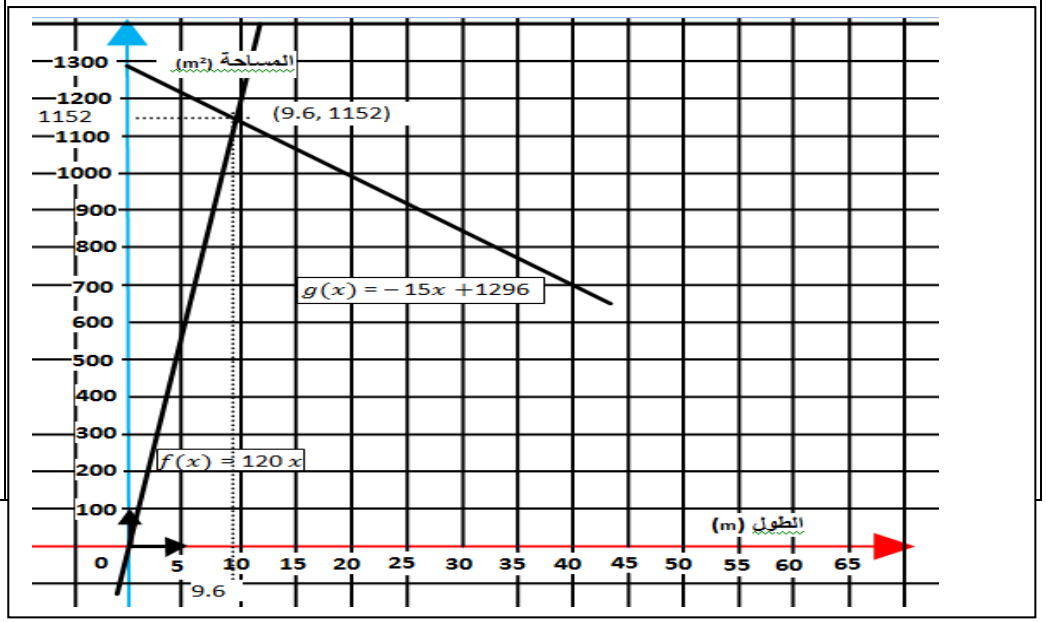
التمثيلان البيانيان للدالتين $f$ و $g$ يتقاطعان في النقطة (9.6 ; 1152) أي أن مساحتين القطعتين متساويتين عندما $9.6x$ m= بمساحة $1152\ m^2$ لكل قطعة أرض.

لدينا : $S_1$ $f(x) = 8$ و $S_2$ $g(x) =$ و من أجل $x = 9.6$ فإن

$f(x) = g(x)$ أي $S_1 = S_2$ و من التمثيل البياني فإن $8S_1 = 1152g(9.6)$

أي $S_2 = 1152\ m^2$ و $8S_1 = 1152\ m^2$ و منه $S_1 = 144\ m^2$

إذن : مساحة القطعة التي يملكها نزيه هي $1152\ m^2$ و مساحة القطعة التي يملكها أخوه الياس هي $144\ m^2$




## حل المسألة الثانية : (نموذج 2017)

1) حساب a طول ضلع القطعة

بما أن مساحة المربع ABCD هي : $S = a^2$ و عليه $a^2 = 225$ و بالتالي $a = \sqrt{225}$ ، طول ضلع القطعة هو **15 m**

2) أ) كتابة المساحتين $S_1$ و $S_2$ بدلالة $x$ :

لدينا $S_1 = \frac{x\,(15-5)}{2}$ أي : $S_1 = \frac{x \times 10}{2}$ و بالتالي : $\underline{\mathbf{S_1 = 5\,x}}$ ( $S_1$ مقدرة بـ : $m^2$ )

و لدينا $S_1 - S_2 = 225$ و منه $\underline{\mathbf{S_2 = 225 - 5\,x}}$ ( $S_2$ مقدرة بـ : $m^2$ )

ب) تحديد موضع M بحيث تكون مساحة قطعة أمين 5 أضعاف مساحة ريمة.

لدينا $S_1 = 5\,S_2$ و منه $x = 5 \times 5\,x$ و عليه $225 - 5\,x = 25\,x$

أي : $-30x = -225$ إذن $\mathbf{7.5}x$ = ( الوحدة هي m ) .

**التمثيل البياني:**

| $x$ | 0 | 10 |
|---|---|---|
| $g(x)$ | 225 | 175 |

| $x$ | 0 | 10 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 250 |

**التفسير البياني حول إيجاد المساحة :**

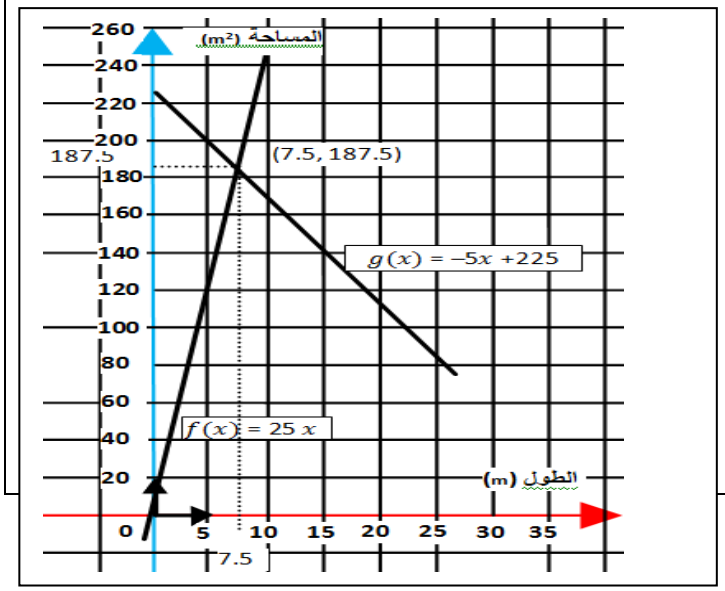
التمثيلان البيانيان للدالتين $f$ و $g$ يتقاطعان في النقطة (7.5; 187.5) أي أن مساحتين القطعتين متساويتين عندما $7.5\ m x$= بمساحة $187.5\ m^2$ لكل قطعة أرض.

لدينا : $S_1$ $f(x) = 5$ و $S_2$ $g(x) =$ و من أجل $x = 7.5$ فإن

$f(x) = g(x)$ أي $S_1 = S_2$ و من التمثيل البياني فإن $5 = 187.5g(7.5)$

أي $S_2 = 187.5$ و $5S_1 = 187.5$ و منه $S_1 = 37.5$

إذن : مساحة القطعة التي يملكها أمين هي $187.5\ m^2$ و مساحة القطعة التي تملكها أخته ريمة هي $37.5\ m^2$



**المسألة** : ( **8 نقاط**) امتحان شهادة التعليم المتوسط (2009)

تم بناء خزّان للماء على شكل أسطوانة دورانية نصف قطر قاعدتها 5 m و ارتفاعها 4 m لتزويد مسبح على شكل متوازي مستطيلات بعدا قاعدته 20m و 6m و ارتفاعه 2m .

1- أحسب سعة كل من الخزان و المسبح ( نأخذ $\pi$ =3,14 )

2- إذا علمت أنّ الخزان مملوء تماما و المسبح فارغ تماما و تدفق الماء في المسبح هو ( $12m^3/h$ ) أي $12m^3$ في الساعة ، أحسب كمية الماء المتدفقة في المسبح و كمية الماء المتبقية في الخزان بعد مرور ثلاث ساعات.

3- نفرض أنّ الخزان مملوء ( سعته $314m^3$ ) و المسبح فارغ . نسمي $f(x)$ كمية الماء المتبقية في الخزّان و $g(x)$ كمية الماء المتدفقة في المسبح بالمتر المكعب بعد مرور $x$ ساعة.

- أوجد العبارة $g(x)$ ثم استنتج العبارة $f(x)$ بدلالة $x$ .

4- نعتبر الدالتين $f$ و $g$ حيث :

$$f(x) = 314 - 12x$$
$$g(x) = 12x$$

أ- أرسم التمثيل البياني لكل من الدالتين $f$ و $g$ في المعلم متعامد و متجانس $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (يؤخذ : 1cm يمثل 4h على محور الفواصل و 1cm يمثل $50m^3$ على محور التراتيب )

ب- أوجد الوقت المستغرق لملء المسبح .

ج- حل المعادلة : $f(x) = g(x)$
- ماذا يمثل حل هذه المعادلة ؟

**حل مسألة امتحان شهادة التعليم المتوسط (2009 ):**

1- سعة الخزان : $V_1 = 3.14 \times 5^2 \times 4$ $V_1 = \mathbf{314\ m^3}$

سعة المسبح : $V_2 = 20 \times 6 \times 2$ $V_2 = \mathbf{240\ m^3}$

2-بعد مرور 3 ساعات : $Q_1 = 12 \times 3$

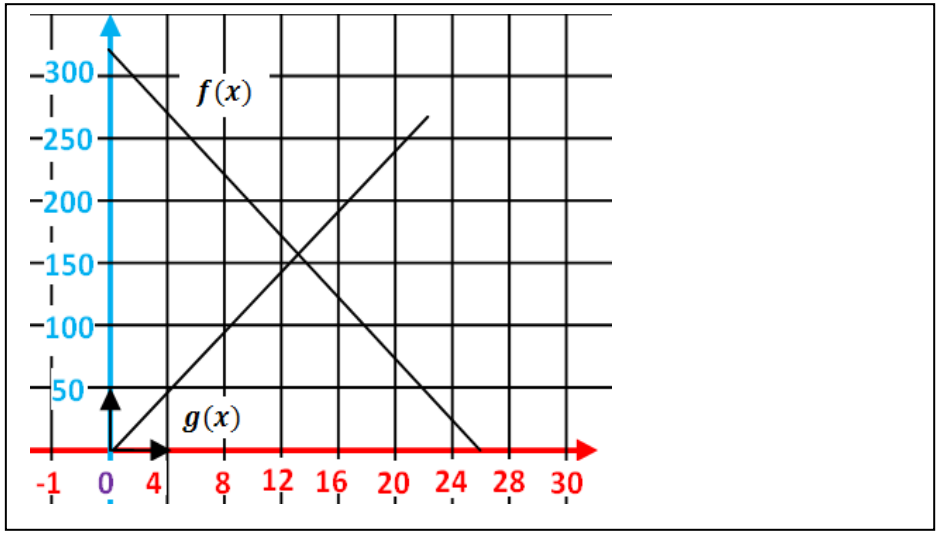
كمية الماء المتدفقة في المسبح هي : $\mathbf{Q_1 = 36\ m^3}$

كمية الماء المتبقية في الخزان هي : $Q_2 = 314 - 36$

$\mathbf{Q_2 = 278\ m^3}$

3- $f(x) = 314 - 12x$ , $g(x) = 12x$

4- إنشاء التمثيل البياني لكل من $f$ و $g$




ب- $12x = 240$ معناه $x = 20$ ( $20h$ ) تمثل الوقت المستغرق لملء المسبح)

ج- $f(x) = g(x)$ معناه: $12x = 314 - 12x$ و منه : $x = \frac{314}{24} = 13.08$

$\mathbf{13.08} = 13h5\ mn$ تمثل المدة الزمنية التي تكون فيها كمية الماء المتدفقة في المسبح مساوية لكمية الماء المتبقية في الخزان بسعة تقريبية تعادل $157\ m^3$ في كل من الخزان و المسبح.

**المسألة الأولى** : (حسب نموذج 2009)

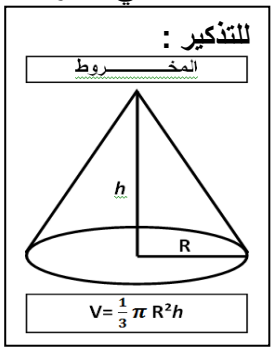
تم بناء خزّان أول للماء على شكل مخروط نصف قطر قاعدته 6 m و ارتفاعه 7 m لتزويد خزان ثاني على شكل مكعب طول ضلعه 5 m

1- أحسب سعة كل من الخزان الأول و الخزان الثاني ( نأخذ $\pi$ =3,14 )
( بالتدوير إلى الوحدة من المتر المكعب )

2- إذا علمت أنّ الخزان الأول مملوء تماما و الخزان الثاني فارغ تماما و تدفق الماء في الخزان الثاني هو ( $20m^3/h$ ) أي $20m^3$ في الساعة ، أحسب كمية الماء المتدفقة في الخزان الثاني و كمية الماء المتبقية في الخزان الأول بعد مرور خمسة ساعات.

3- نفرض أنّ الخزان الأول مملوء ( سعته $264\ m^3$ ) و الخزان الثاني فارغ . نسمي $f(x)$ كمية الماء المتبقية في الخزّان الأول و $g(x)$ كمية الماء المتدفقة في الخزان الثاني بالمتر المكعب بعد مرور $x$ ساعة.

**للتذكير :**




- أوجد العبارة $g(x)$ ثم استنتج العبارة $f(x)$ بدلالة $x$ .

4- نعتبر الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ حيث :

$$f(x) = 264 - 20x$$
$$g(x) = 20x$$

أ- أرسم التمثيل البياني لكل من الدالتين $f(x)$ و$g(x)$ في المعلم متعامد و متجانس $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
(يؤخذ : 1cm يمثل ساعة واحدة على محور الفواصل و 1cm يمثل $50m^3$ على محور التراتيب )

ب- أوجد الوقت المستغرق لملء الخزان الثاني .

ج- حل المعادلة : $f(x) = g(x)$
- ماذا يمثل حل هذه المعادلة ؟

**المسألة الثانية** : (حسب نموذج 2009)

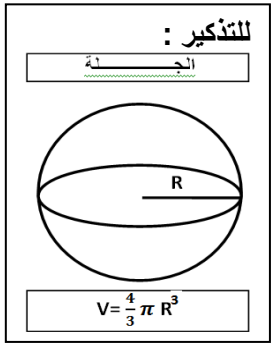
تم بناء خزّان أول للماء على شكل جلة نصف قطرها 3 m لتزويد خزان ثاني على شكل متوازي المستطيلات بعدا قاعدته 2 m و 3 m و ارتفاعه 7 m .

1- أحسب سعة كل من الخزان الأول و الخزان الثاني ( نأخذ $\pi$ =3,14 )
( بالتدوير إلى الوحدة من المتر المكعب )

2- إذا علمت أنّ الخزان الأول مملوء تماما و الخزان الثاني فارغ تماما و تدفق الماء في الخزان الثاني هو ( $15\ m^3/h$ ) أي $15\ m^3$ في الساعة ، أحسب كمية الماء المتدفقة في الخزان الثاني و كمية الماء المتبقية في الخزان الأول بعد مرور ساعتان.

3- نفرض أنّ الخزان الأول مملوء ( سعته $113\ m^3$ ) و الخزان الثاني فارغ . نسمي $f(x)$ كمية الماء المتبقية في الخزّان الأول و $g(x)$ كمية الماء المتدفقة في الخزان الثاني بالمتر المكعب بعد مرور $x$ ساعة.

**للتذكير :**




- أوجد العبارة $g(x)$ ثم استنتج العبارة $f(x)$ بدلالة $x$ .

4- نعتبر الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ حيث :

$$f(x) = 113 - 15x$$
$$g(x) = 15x$$

أ- أرسم التمثيل البياني لكل من الدالتين $f(x)$ و$g(x)$ في المعلم متعامد و متجانس $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
(يؤخذ : 1cm يمثل ساعة واحدة على محور الفواصل و 1cm يمثل $10m^3$ على محور التراتيب )

ب- أوجد الوقت المستغرق لملء الخزان الثاني .

ج- حل المعادلة : $f(x) = g(x)$
- ماذا يمثل حل هذه المعادلة ؟

**حل المسألة الأولى :** (نموذج 2009 )

1- سعة الخزان الأول : $V_1 = 263.76\ m^3 = \mathbf{264\ m^3}$ $\mathbf{V_1 = \frac{1}{3} \times 3.14 \times 6^2 \times 7}$

سعة الخزان الثاني : $\mathbf{V_2 = 5 \times 5 \times 5}$ $\mathbf{V_2 = 125\ m^3}$

2-بعد مرور 5 ساعات : $\mathbf{Q_1 = 5 \times 20}$

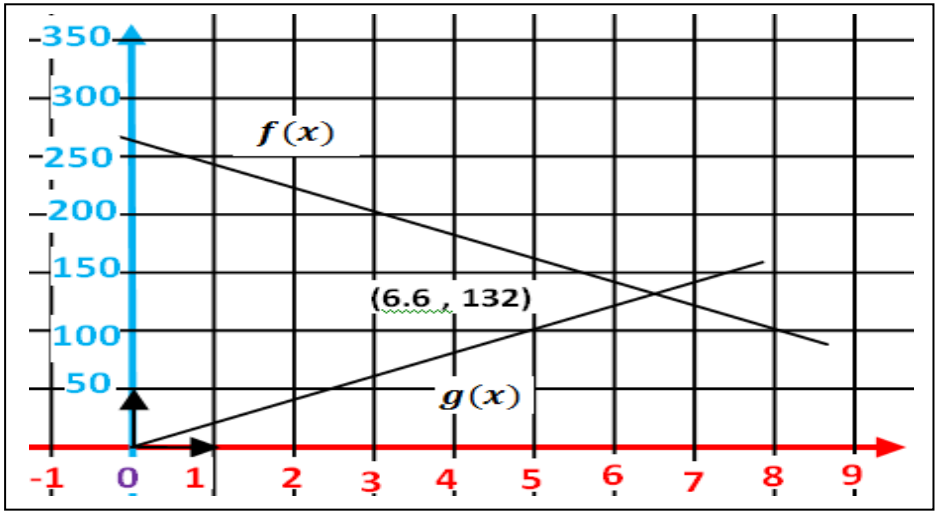
كمية الماء المتدفقة في الخزان الثاني هي : $\mathbf{Q_1 = 100\ m^3}$

كمية الماء المتبقية في الخزان الأول : $\mathbf{Q_2 = 264 - 100}$

$\mathbf{Q_2 = 164\ m^3}$

3- $f(x) = 264 - 20x$ , $g(x) = 20x$

4- إنشاء التمثيل البياني لكل من $f$ و $g$




ب- $\frac{125}{20} = 6.25$ أي 6 ساعات و 15 دقيقة.

ج- $f(x) = g(x)$ معناه: $264 - 20x = 20x$ و منه : $x = 6.6 = \frac{264}{40}$

$\mathbf{6.6} = 6h36\ mn$ تمثل المدة الزمنية التي تكون فيها كمية الماء المتدفقة في الخزان الثاني مساوية لكمية الماء المتبقية في الخزان الأول ، بسعة $132\ m^3$ في كلا من الخزانين .

**حل المسألة الثانية :** (نموذج 2009 )

1- سعة الخزان الأول : $V_1 = 113.04\ m^3 = \mathbf{113\ m^3}$ $\mathbf{V_1 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times 3^3}$

سعة الخزان الثاني : $\mathbf{V_2 = 2 \times 3 \times 7}$ $\mathbf{V_2 = 42\ m^3}$

2-بعد مرور 2 ساعة : $\mathbf{Q_1 = 2 \times 15}$

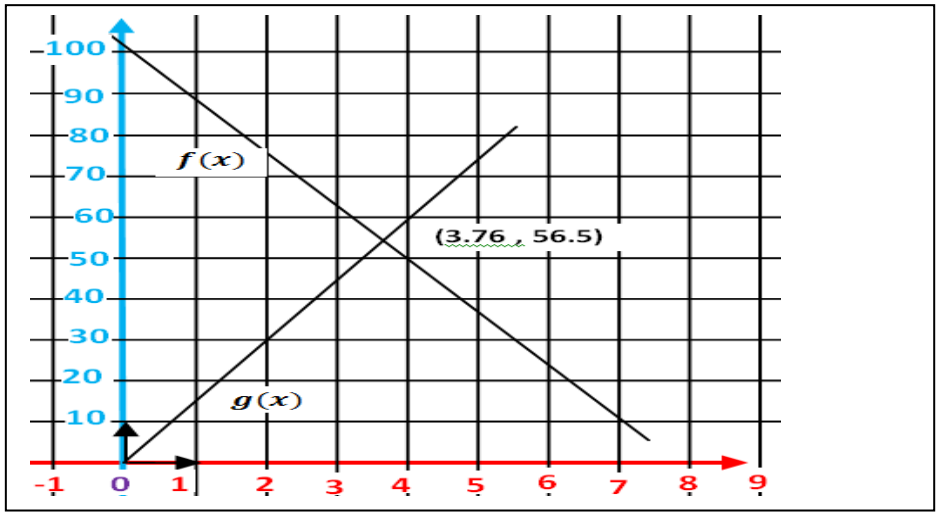
كمية الماء المتدفقة في الخزان الثاني هي : $\mathbf{Q_1 = 30\ m^3}$

كمية الماء المتبقية في الخزان الأول : $\mathbf{Q_2 = 113 - 30}$

$\mathbf{Q_2 = 83\ m^3}$

3- $f(x) = 113 - 15x$ , $g(x) = 15x$

4- إنشاء التمثيل البياني لكل من $f$ و $g$




ب- $\frac{42}{15} = 2.8$ أي 2 ساعة و 48 دقيقة.

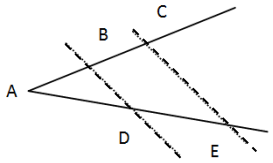
ج- $f(x) = g(x)$ معناه: $113 - 15x = 15x$ و منه : $x = 3.76 = \frac{113}{30}$

$\mathbf{3.76} = 3h45\ mn$ تمثل المدة الزمنية التي تكون فيها كمية الماء المتدفقة في الخزان الثاني مساوية لكمية الماء المتبقية في الخزان الأول ، بسعة $56.5\ m^3$ في كلا من الخزانين .

**ملاحظة** : كل الأشكال مرسومة بأطوال غير حقيقية

## تمارين تطبيقية حول : نظرية طالس

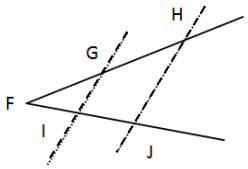
**التمرين 01** : لدينا الشكل التالي ، حيث الخطوط المتقطّعة مستقيمان متوازيان. لدينا : CE = 6 و BD = 2 و AC = 4.8 و AE = 4.32




1-أكتب نظرية طالس $\frac{CE}{BD} = \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$ بملأ الفراغات المشار إليها.

2- أحسب طول AB و طول AD

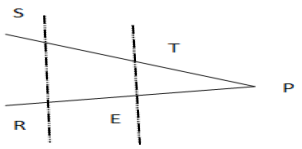
**التمرين 02** : لدينا الشكل التالي ، حيث الخطوط المتقطّعة مستقيمان متوازيان. لدينا : FH = 2.7 و GI = 2.25 و FJ = 2.43 و FI = 1.81




1-أكتب نظرية طالس $= \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$ بملأ الفراغات المشار إليها.

2- أحسب طول FG و طول HJ

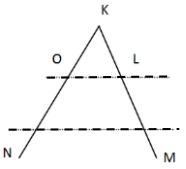
**التمرين 03** : لدينا الشكل التالي ، حيث الخطوط المتقطّعة مستقيمان متوازيان. لدينا : TE = 2.8 و PS = 4.8 و PT = 3.36 و PE = 3.69




1-أكتب نظرية طالس $= \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$ بملأ الفراغات المشار إليها.

2- أحسب طول PR و طول SR

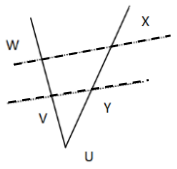
**التمرين 04** : لدينا الشكل التالي ، حيث الخطوط المتقطّعة مستقيمان متوازيان. لدينا : NM = 5 و OL = 2.5 و KO = 2.75 و KM = 6.06




1-أكتب نظرية طالس $= \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$ بملأ الفراغات المشار إليها.

2- أحسب طول KL و طول KN

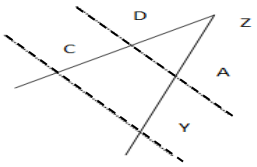
**التمرين 05** : لدينا الشكل التالي ، حيث الخطوط المتقطّعة مستقيمان متوازيان. لدينا : WX = 7 و UW = 9.1 و UX = 4.55 و UY = 3.18




1-أكتب نظرية طالس $= \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$ بملأ الفراغات المشار إليها.

2- أحسب طول VY و طول UV

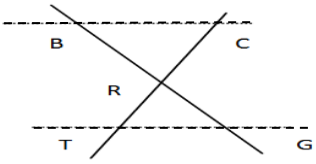
**التمرين 06** : لدينا الشكل التالي ، حيث الخطوط المتقطّعة مستقيمان متوازيان. لدينا : CY = 4 و ZC = 5.2 و ZD = 1.87 و ZA = 2.24




1-أكتب نظرية طالس $= \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$ بملأ الفراغات المشار إليها.

2- أحسب طول DA و طول ZY

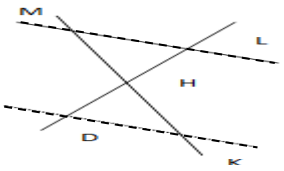
**التمرين 07** : لدينا الشكل التالي ، حيث الخطوط المتقطّعة مستقيمان متوازيان. لدينا : BC = 5 و TG = 1.86 و RB = 4 و RC = 4.8




-أكتب نظرية طالس $= \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$ بملأ الفراغات المشار إليها.

2- أحسب طول RG و طول RT

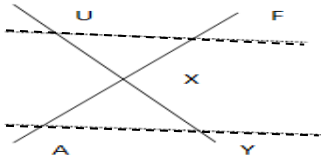
**التمرين 08** : لدينا الشكل التالي ، حيث الخطوط المتقطّعة مستقيمان متوازيان. لدينا : ML = 3 و DK = 1.59 و HM = 3.6 و HD = 1.71




1-أكتب نظرية طالس $= \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$ بملأ الفراغات المشار إليها.

2- أحسب طول HK و طول HL

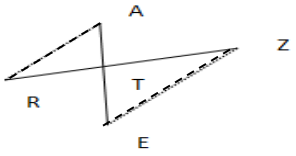
**التمرين 09** : لدينا الشكل التالي ، حيث الخطوط المتقطّعة مستقيمان متوازيان. لدينا : UF = 6 و AY = 9 و XY = 7.2 و XA = 8.64




1-أكتب نظرية طالس $= \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$ بملأ الفراغات المشار إليها.

2- أحسب طول XF و طول XU

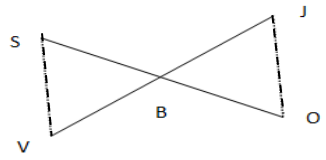
**التمرين 10** : لدينا الشكل التالي ، حيث الخطوط المتقطّعة مستقيمان متوازيان. لدينا : ZE = 10 و TE = 12 و TR = 10.92 و TZ = 15.6




1-أكتب نظرية طالس $= \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$ بملأ الفراغات المشار إليها.

2- أحسب طول AR و طول TA

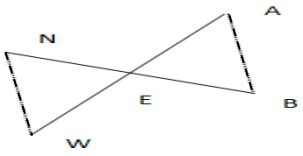
**التمرين 11** : لدينا الشكل التالي ، حيث الخطوط المتقطّعة مستقيمان متوازيان. لدينا : SV = 7 و JO = 8 و BS = 3.5 و BJ = 5.6




1-أكتب نظرية طالس $= \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$ بملأ الفراغات المشار إليها.

2- أحسب طول BO و طول BV

**التمرين 12** : لدينا الشكل التالي ، حيث الخطوط المتقطّعة مستقيمان متوازيان. لدينا : AB = 6 و EB = 3 و EW = 3.2 و EA = 4.8




1-أكتب نظرية طالس $= \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$ بملأ الفراغات المشار إليها.

2- أحسب طول NW و طول EN

## الحلـــــــول

**التمرين 1 :** $\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{CE}{BD}$

$AB = \frac{BD \times AC}{CE} = 1.6$ و $AD = \frac{BD \times AE}{CE} = 1.44$

**التمرين 2 :** $\frac{FH}{FG} = \frac{FJ}{FI} = \frac{HJ}{GI}$

$FG = \frac{FI \times FH}{FJ} = 2.01$ و $HJ = \frac{GI \times FJ}{FI} = 3.02$

**التمرين 3 :** $\frac{PS}{PT} = \frac{PR}{PE} = \frac{SR}{TE}$

$PR = \frac{PS \times PE}{PT} = 5.27$ و $SR = \frac{PS \times TE}{PT} = 4$

**التمرين 4 :** $\frac{KN}{KO} = \frac{KM}{KL} = \frac{NM}{OL}$

$KL = \frac{KO \times NM}{OL} = 5.5$ و $KN = \frac{KM \times OL}{NM} = 3.03$

**التمرين 5 :** $\frac{UW}{UV} = \frac{UX}{UY} = \frac{WX}{VY}$

$VY = \frac{WX \times UY}{UX} = 4.89$ و $UV = \frac{UW \times UY}{UX} = 6.36$

**التمرين 6 :** $\frac{ZC}{ZD} = \frac{ZY}{ZA} = \frac{CY}{DA}$

$DA = \frac{ZD \times CY}{ZC} = 1.43$ و $ZY = \frac{ZA \times ZC}{ZD} = 6.22$

**التمرين 7 :** $\frac{RB}{RG} = \frac{RC}{RT} = \frac{BC}{TG}$

$RG = \frac{RB \times TG}{BC} = 1.48$ و $RT = \frac{RC \times TG}{BC} = 1.78$

**التمرين 8 :** $\frac{HM}{HK} = \frac{HL}{HD} = \frac{ML}{DK}$

$HK = \frac{DK \times HM}{ML} = 1.9$ و $HL = \frac{HD \times ML}{DK} = 3.22$

**التمرين 9 :** $\frac{XU}{XY} = \frac{XF}{XA} = \frac{UF}{AY}$

$XF = \frac{XA \times UF}{AY} = 5.76$ و $XU = \frac{XY \times UF}{AY} = 4.8$

**التمرين 10 :** $\frac{TA}{TE} = \frac{TR}{TZ} = \frac{AR}{ZE}$

$AR = \frac{ZE \times TR}{TZ} = 8.4$ و $TA = \frac{TE \times TR}{TZ} = 7$

**التمرين 11 :** $\frac{BS}{BO} = \frac{BV}{BJ} = \frac{SV}{JO}$

$BO = \frac{BS \times JO}{SV} = 4$ و $BV = \frac{BJ \times SV}{JO} = 4.9$

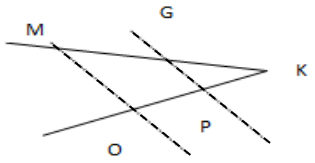
**التمرين 12 :** $\frac{EN}{EB} = \frac{EW}{EA} = \frac{NW}{AB}$

$NW = \frac{AB \times EW}{EA} = 4$ و $EN = \frac{EB \times EW}{EA} = 2$

**ملاحظة** : كل الأشكال مرسومة بأطوال غير حقيقية

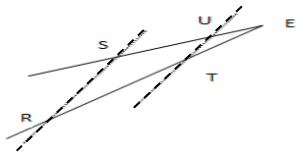
## تمارين تطبيقية حول : عكس نظرية طالس

**التمرين 01** : لدينا الشكل التالي ،
حيث: MO = 2 و GP = 1.3 و KG = 1.82 و KM = 2.8 و KP = 5.46 و KO = 8.4، علما أن النقاط M,G,K في استقامية و كذلك بالنسبة للنقاط O,P,K



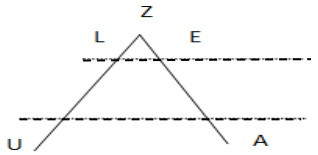

1- برهن أن المستقيمان MO و GP متوازيان.

**التمرين 02** : لدينا الشكل التالي ،
حيث : UT = 1.3 و SR = 1.9 و EU = 2.6 و ES = 3.8 و ET = 3.9 و ER = 5.7، علما أن النقاط S,U,E في استقامية و كذلك بالنسبة للنقاط R ,T, E



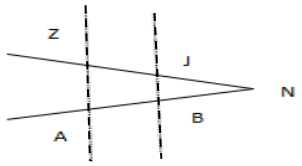

1- برهن أن المستقيمان SR و UT متوازيان.

**التمرين 03** : لدينا الشكل التالي ،
حيث : LE = 2 و UA = 2.4 و ZE = 11.4 و ZA =13.68 و ZL = 3.8 و ZU = 4.56، علما أن النقاط Z,L,U في استقامية و كذلك بالنسبة للنقاط Z, E, A



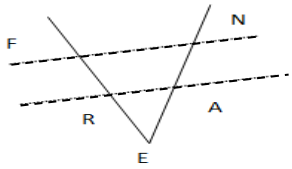

1- برهن أن المستقيمان LE و UA متوازيان.

**التمرين 04** : لدينا الشكل التالي ،
حيث : ZA = 3 و JB = 2 و NJ = 3.2 و NZ = 4.8 و NB = 6.4 و NA = 9.6، علما أن النقاط Z,J,N في استقامية و كذلك بالنسبة للنقاط A,B,N



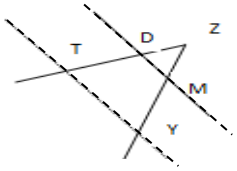

1- برهن أن المستقيمان ZA و JB متوازيان.

**التمرين 05** : لدينا الشكل التالي ،
حيث : RA = 2.3 و FN = 4 و ER = 3.91 و EF = 6.8 و EA =4.3 و EN = 7.48، علما أن النقاط F,R,E في استقامية و كذلك بالنسبة للنقاط E,A,N



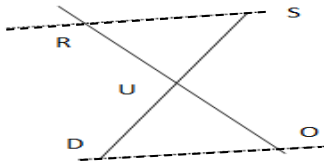

1- برهن أن المستقيمان FN و RA متوازيان.

**التمرين 06** : لدينا الشكل التالي ،
حيث : DM = 3 و TY =5 و ZD =3.9 و ZT = 6.5 و ZM =4.68 و ZY =7.8، علما أن النقاط T, D, Z في استقامية و كذلك بالنسبة للنقاط Z, M, Y



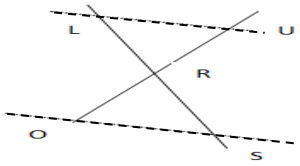

1- برهن أن المستقيمان DM و TY متوازيان.

**التمرين 07** : لدينا الشكل التالي ،
حيث : RS =7 و DO =7.3 و US =16.8 و UD =17.52 و UR =14 و UO =14.6، علما أن النقاط R,U,O في استقامية و كذلك بالنسبة للنقاط S,U,D



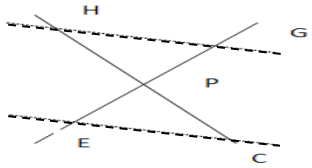

1- برهن أن المستقيمان RS و DO متوازيان.

**التمرين 08** : لدينا الشكل التالي ،
حيث : LU =7 و OS =2 و RL =11.55 و RS =3.3 و RU =10.5 و RO =3، علما أن النقاط U,R,O في استقامية و كذلك بالنسبة للنقاط L, R, S



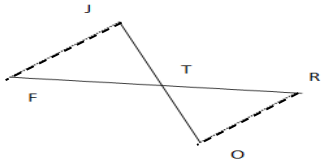

1- برهن أن المستقيمان LU و OS متوازيان.

**التمرين 09** : لدينا الشكل التالي ،
حيث : HG =6 و EC =5.2 و PG =25.92 و PE =22.46 و PH =16.2 و PC =14.04، علما أن النقاط H,P,C في استقامية و كذلك بالنسبة للنقاط E,P,G



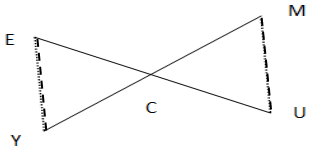

1- برهن أن المستقيمان HG و EC متوازيان.

**التمرين 10** : لدينا الشكل التالي ، حيث : JF =2.4 و RO =6 و TR =9.9 و TO =6.6 و TJ =2.64، علما أن النقاط J,T,O في استقامية و كذلك بالنسبة للنقاط F,T,R



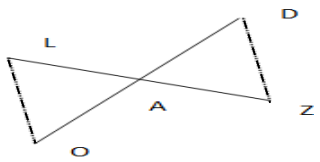

1- برهن أن المستقيمان JF و RO متوازيان.

**التمرين 11** : لدينا الشكل التالي ، حيث : EY =1 و MU =5 و CM =9.1 و CY =1.82 و CU =7 و CE =1.4، علما أن النقاط E,C,U في استقامية و كذلك بالنسبة للنقاط Y ,C,M




1- برهن أن المستقيمان MU و EY متوازيان.

**التمرين 12** : لدينا الشكل التالي ، حيث : DZ = 4 و LO =1 و AZ = 8 و AL = 2 و AD = 16 و AO = 4، علما أن النقاط L,A,Z في استقامية و كذلك بالنسبة للنقاط O, A, D




1- برهن أن المستقيمان DZ و LO متوازيان.

## الحلـــــــول

**التمرين 01 :**
*الطريقة الأولى:
$\frac{MO}{GP}=\frac{2}{1.3}=1.53$ ...(1) , $\frac{KM}{KG}=\frac{2.8}{1.82}=1.53$...(2) , $\frac{KO}{KP}=\frac{8.4}{5.46}=1.53$ ...(3)
بما أنّ (1) = (2) = (3) فإن MO و GP متوازيان.
*الطريقة الثانية :
$\frac{GP}{MO}=\frac{1.3}{2}=0.65$ ...(1) , $\frac{KG}{KM}=\frac{1.82}{2.8}=0.65$...(2) , $\frac{KP}{KO}=\frac{5.46}{8.4}=0.65$ ...(3)
الشيء نفسه

**التمرين 02 :**
*الطريقة الأولى:
$\frac{UT}{SR}=\frac{1.3}{1.9}=0.68$...(1) , $\frac{EU}{ES}=\frac{2.6}{3.8}=0.68$...(2) , $\frac{ET}{ER}=\frac{3.9}{5.7}=0.68$ ...(3)
بما أنّ (1) = (2) = (3) فإن UT و SR متوازيان.
*الطريقة الثانية :
$\frac{SR}{UT}=\frac{1.9}{1.3}=1.46$ ...(1) , $\frac{ES}{EU}=\frac{3.8}{2.6}=1.46$...(2) , $\frac{ER}{ET}=\frac{5.7}{3.9}=1.46$ ...(3)
الشيء نفسه

**التمرين 03 :**
*الطريقة الأولى:
$\frac{LE}{UA}=\frac{2}{2.4}=0.83$...(1) , $\frac{ZL}{ZU}=\frac{3.8}{4.56}=0.83$...(2) , $\frac{ZE}{ZA}=\frac{11.4}{13.68}=0.83$ ...(3)
بما أنّ (1) = (2) = (3) فإن LE و UA متوازيان.
*الطريقة الثانية :
$\frac{UA}{LE}=\frac{2.4}{2}=1.2$ ...(1) , $\frac{ZU}{ZL}=\frac{4.56}{3.8}=1.2$ ...(2) , $\frac{ZA}{ZE}=\frac{13.68}{11.4}=1.2$ ...(3)
الشيء نفسه

**التمرين 04 :**
ط الأولى: $\frac{ZA}{JB}=\frac{NZ}{NJ}=\frac{NA}{NB}=0.66$ , ط الثانية: $\frac{JB}{ZA}=\frac{NJ}{NZ}=\frac{NB}{NA}=1.5$

**التمرين 05 :**
ط الأولى: $\frac{RA}{FN}=\frac{ER}{EF}=\frac{EA}{EN}=1.73$ , ط الثانية: $\frac{FN}{RA}=\frac{EF}{ER}=\frac{EN}{EA}=0.57$

**التمرين 06 :**
ط الأولى: $\frac{TY}{DM}=\frac{ZT}{ZD}=\frac{ZY}{ZM}=0.6$ , ط الثانية: $\frac{DM}{TY}=\frac{ZD}{ZT}=\frac{ZM}{ZY}=1.66$

**التمرين 07 :**
ط الأولى: $\frac{DO}{RS}=\frac{UD}{US}=\frac{UO}{UR}=0.95$ , ط الثانية: $\frac{RS}{DO}=\frac{US}{UD}=\frac{UR}{UO}=1.04$

**التمرين 08 :**
ط الأولى: $\frac{OS}{LU}=\frac{RO}{RU}=\frac{RS}{RL}=3.5$ , ط الثانية: $\frac{LU}{OS}=\frac{RU}{RO}=\frac{RL}{RS}=0.28$

**التمرين 09 :**
ط الأولى: $\frac{EC}{HG}=\frac{PE}{PG}=\frac{PC}{PH}=1.15$ , ط الثانية: $\frac{HG}{EC}=\frac{PG}{PE}=\frac{PH}{PC}=0.86$

**التمرين 10 :**
ط الأولى: $\frac{RO}{JF}=\frac{TO}{TJ}=\frac{TR}{TF}=2.5$ , ط الثانية: $\frac{JF}{RO}=\frac{TJ}{TO}=\frac{TF}{TR}=0.4$

**التمرين 11 :**
ط الأولى: $\frac{MU}{EY}=\frac{CU}{CE}=\frac{CM}{CY}=0.2$ , ط الثانية: $\frac{EY}{MU}=\frac{CE}{CU}=\frac{CY}{CM}=5$

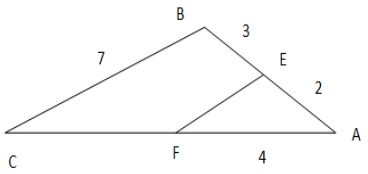
**التمرين 12 :**
ط الأولى: $\frac{DZ}{LO}=\frac{AZ}{AL}=\frac{AD}{AO}=0.25$ , ط الثانية: $\frac{LO}{DZ}=\frac{AL}{AZ}=\frac{AO}{AD}=4$

إعداد : الأستاذة رحال- الطبعة الأولى : نوفمبر 2020

**ملاحظة** : كل الأشكال مرسومة بأطوال غير حقيقية

**تمرين حول :** نظرية طالس

**التمرين الرابع:** (3 نقاط) امتحان شهادة التعليم المتوسط (2010)
في الشكل المقابل ( BC ) // ( EF )
احسب الطولين FC ، EF

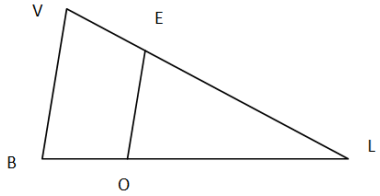



**حل تمرين امتحان شهادة التعليم المتوسط :**
في المثلث ABC لدينا : ( BC) // ( EF) فإن :
بالتعويض : $\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{FE}{CB}$

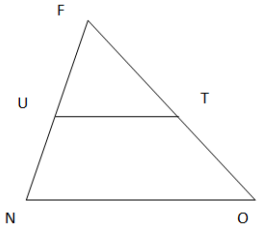
$\frac{4}{AC} = \frac{2}{5} = \frac{FE}{7}$ و منه : $AC = \frac{4 X 5}{2} = 10$ و منه : $FC = AC - AF = 6$

$FE = \frac{2 X 7}{5} = \mathbf{2.8}$

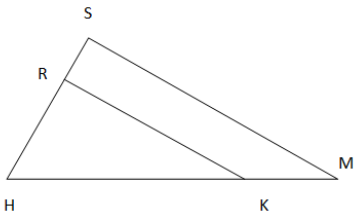
**التمرين الأول :** حسب نموذج (2010)
في الشكل المقابل ( EO ) // ( VB )
VB = 8 , VL = 6.4 , EL = 4 , BL =10.4
احسب الطولين OL ، EO



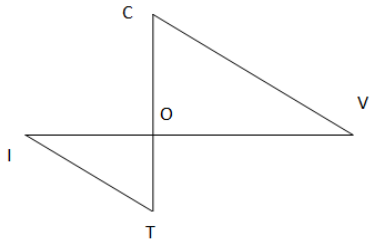

**التمرين الثاني :** حسب نموذج (2010)
في الشكل المقابل ( NO ) // ( UT )
NO = 10 , UT = 4 , FN = 11 , FO =9.9
احسب الطولين FU ، TO



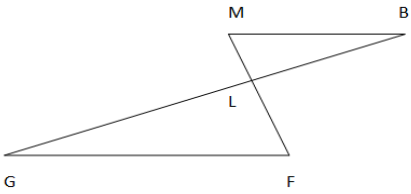

**التمرين الثالث :** حسب نموذج (2010)
في الشكل المقابل ( SM ) // ( RK )
SM = 6 , SH = 4.2 , MK = 3.15 , MH =3.78
احسب الطولين SR ، RK



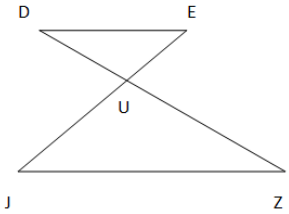

**التمرين الرابع :** حسب نموذج (2010)
في الشكل المقابل ( IT ) // ( CV )
IT = 5 , OV = 7.2 , CO = 7.92 , OT =3.3
احسب الطولين IO ، CV




**التمرين الخامس :** حسب نموذج (2010)
في الشكل المقابل ( GF ) // ( MB )
GF = 10 , BL = 3.6 , LF = 7.2 , LM =4.32
احسب الطولين LG ، MB




**التمرين السادس :** حسب نموذج (2010)
في الشكل المقابل ( DE ) // ( JZ )
JZ = 8 , UZ = 7.2 , UD = 5.4 , UJ =7.92
احسب الطولين UE ، DE




**الحلـــــول :**

| | | |
|---|---|---|
| **ت 1 :** $\frac{VB}{EO}=\frac{LV}{LE}=\frac{LB}{LO}$ أي : $\frac{10.4\ 8}{LO\ EO} = \frac{6.4}{4}=$ <br> LO= **6.5** و EO= **5** | **ت 2 :** $\frac{NO}{UT}=\frac{FN}{FU}=\frac{FO}{FT}$ أي : $\frac{9.910}{FT\ 4} = \frac{11}{FU}=$ <br> TO= **5.94** و FU= **4.4** | **ت 3 :** $\frac{SM}{RK}=\frac{SH}{SR}=\frac{MH}{MK}$ أي : $\frac{3.78\ 6}{3.15RK} = \frac{4.2}{SR}=$ <br> SR= **3.5** و RK= **5** |
| **ت 4 :** $\frac{CV}{IT}=\frac{OV}{OI}=\frac{OC}{OT}$ أي : $\frac{7.92CV}{3.3\ 5} = \frac{7.2}{OI}=$ <br> OI= **3** و CV= **12** | **ت 5 :** $\frac{GF}{MB}=\frac{LG}{LB}=\frac{LF}{LM}$ أي : $\frac{7.2\ 10}{4.32MB} = \frac{LG}{3.6}=$ <br> MB= **6** و LG= **6** | **ت 6 :** $\frac{JZ}{DE}=\frac{UZ}{UD}=\frac{UJ}{UE}$ أي : $\frac{7.92\ 8}{UE\ DE} = \frac{7.2}{5.4}=$ <br> DE= **6** و UE= **5.94** |

**تمرين يشمل : درس:** نظرية طالس **+ درس:** نظرية فيثاغورس

**التمرين الرابع:** (3.5 نقط) امتحان شهادة التعليم المتوسط دورة (2007)

1- أرسم المثلث ABC القائم في A حيث : AB = 4.5 cm ، BC = 7.5 cm

2- احسب AC

3- لتكن النقطة E من [AB] حيث AB = *3* AE و D نقطة من [AC] حيث DC = $\frac{2}{3}$ AC .

عيّن على الشكل النقطتين D ، E

4- بيّن أنّ (BC)//(DE) ثم احسب DE .

**التمرين الأول :** حسب نموذج (2007)

1- أرسم المثلث SAC القائم في S حيث : SA = 3 cm ، SC = 6 cm

2- احسب AC

3- لتكن النقطة R من [SA] حيث 3 SR = SA و M نقطة من [SC] حيث SC = $\frac{6}{4}$ MC .

عيّن على الشكل النقطتين R ، M

4- بيّن أنّ (RM)//(AC) ثم احسب RM.

**التمرين الثاني :** حسب نموذج (2007)

1- أرسم المثلث PIC القائم في P حيث : PI = 5 cm ، PC = 7.5 cm

2- احسب IC

3- لتكن النقطة E من [PI] حيث PE = $\frac{4}{10}$ PI و K نقطة من [PC] حيث KC = $\frac{4.5}{7.5}$ PC .

عيّن على الشكل النقطتين E ، K

4- بيّن أنّ (EK)//(IC) ثم احسب EK .

**التمرين الثالث :** حسب نموذج (2007)

1- أرسم المثلث MIX القائم في M حيث : MI = 4 cm ، MX = 6 cm

2- احسب IX

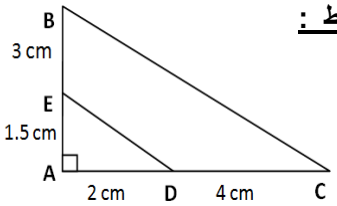
3- لتكن النقطة A من [MI] حيث MI = *2* MA و B نقطة من [MX] حيث BX = $\frac{1}{2}$ MX .

عيّن على الشكل النقطتين A ، B

4- بيّن أنّ (AB)//(IX) ثم احسب AB .

**حل تمرين امتحان شهادة التعليم المتوسط :**

**1) إنشاء الشكل :**




**2) حساب AC :**

بما أن المثلث ABC قائم في A فحسب نظرية فيثاغورث لدينا :

$AB^2 + AC^2 = BC^2$

و منه : $AC^2 = BC^2 - AB^2$

$AC^2 = 7.5^2 - 4.5^2$

$AC^2 = 56.25 - 20.25$

$AC^2 = 36$

$AC = \sqrt{36}$

**AC = 6 cm**

**3) تعيين النقطتين D و E :**

DC = $\frac{2}{3}$ AC

DC = $\frac{2}{3}$ x 6

DC = $\frac{12}{3}$ = 4

**DC = 4 cm**

AB = 3 AE

4.5 = 3 AE

**AE = 1.5 cm**

**4) بيان أن (BC)//(DE) :**

بما أن النقط A, E, B على استقامة واحدة و النقط A, D, C على استقامة واحدة.

فإن (BC)//(DE) إذا تحقق : $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$ حسب عكس نظرية طالس.

$\frac{AC}{AD} = \frac{6}{2} = 3$

$\frac{AB}{AE} = \frac{4.5}{1.5} = 3$

بما أن $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$ فإن ( BC) و(DE) متوازيين.

**حساب طول DE :**

بما أن (BC)//(DE) فإن $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{DE}$ (حسب نظرية طالس)

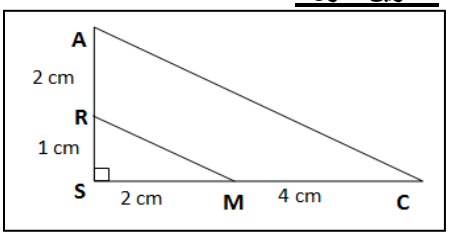
**DE** $= \frac{AD \times BC}{AC} = \frac{2 \times 7.5}{6} = \frac{15}{6}$ **= 2.5**

**DE = 2.5 cm**

**ملاحظة** : يمكن حساب DE باستعمال نظرية فيثاغورث في المثلث AED

**الحلـــــــــول :**

**التمرين الأول :**




**2)** $AC^2 = SC^2 + SA^2 = 36 + 9 = 45$

**AC** $= \sqrt{45}$ **= 6.70 cm**

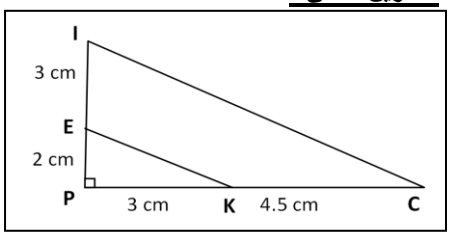
**4)** (RM)//(AC) يعني : $\frac{SA}{SR} = \frac{SC}{SM}$

$\frac{SA}{SR} = \frac{3}{1} = 3$ ...(1) $\frac{SC}{SM} = \frac{6}{2} = 3$...(2) **3=3**

$RM^2 = SR^2 + SM^2$ , $RM^2 = 1^2 + 2^2 = 5$

**RM** $= \sqrt{5}$ **= 2.23 cm**

**التمرين الثاني :**




**2)** $IC^2 = PI^2 + PC^2 = 25 + 56.25 = 81.25$

**IC** $= \sqrt{81.25}$ **= 9.01 cm**

**4)** (EK)//(IC) يعني : $\frac{PI}{PE} = \frac{PC}{PK}$

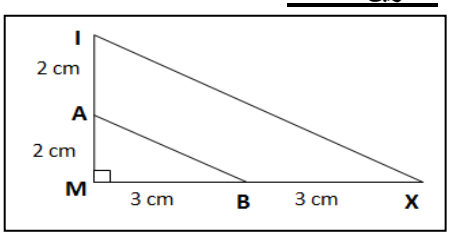
$\frac{PI}{PE} = \frac{5}{2} = 2.5$ ...(1) $\frac{PC}{PK} = \frac{7.5}{3} = 2.5$...(2)

**2.5=2.5**

$EK^2 = PE^2 + PK^2$ , $EK^2 = 4 + 9 = 13$

**EK** $= \sqrt{13}$ **= 3.60 cm**

**التمرين الثالث :**




**2)** $IX^2 = MI^2 + MX^2 = 16 + 36 = 52$

**IX** $= \sqrt{52}$ **= 7.21 cm**

**4)** (AB)//(IX) يعني : $\frac{MI}{MA} = \frac{MX}{MB}$

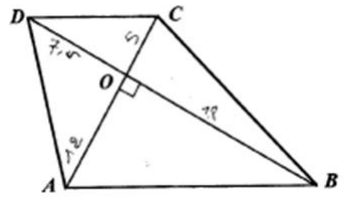
$\frac{MI}{MA} = \frac{4}{2} = 2$ ...(1) $\frac{MX}{MB} = \frac{6}{3} = 2$...(2) **2=2**

$AB^2 = MA^2 + MB^2$ , $AB^2 = 4 + 9 = 13$

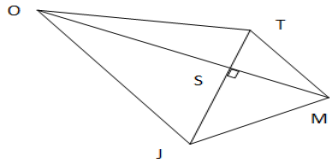
**AB** $= \sqrt{13}$ **= 3.60 cm**

**تمرين يشمل : درس:** نظرية طالس **+ درس:** نظرية فيتاغورس

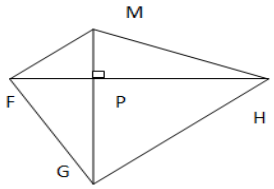
**التمرين الرابع:** (2.5 نقطة) امتحان شهادة التعليم المتوسط دورة (2015)
الشكل المقابل مرسوم بأطوال غير حقيقية.
ABCD رباعي قطراه متعامدان و متقاطعان في O حيث :
OD = 7.5 cm , OC = 5 cm , OB = 18 cm , OA = 12 cm
1) برهن أنّ المستقيمين (AB ) و (CD ) متوازيان.
2) أحسب الطول AB.



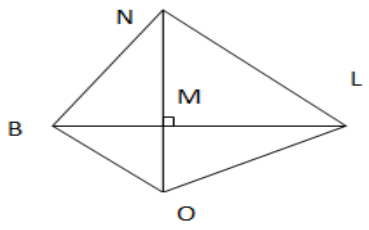

**التمرين الأول :** حسب نموذج (2015)
الشكل المقابل مرسوم بأطوال غير حقيقية.
OTMJ رباعي قطراه متعامدان و متقاطعان في S حيث :
SO = 4 cm , ST = 2.8 cm , SM = 3 cm , SJ = 2.1 cm
1) برهن أنّ المستقيمين (TM ) و (OJ ) متوازيان.
2) أحسب الطول OJ.




**التمرين الثاني :** حسب نموذج (2015)
الشكل المقابل مرسوم بأطوال غير حقيقية.
FMHG رباعي قطراه متعامدان و متقاطعان في P حيث :
PF =4 cm , PM = 2.8 cm , PH = 7 cm , PG = 4.9 cm
1) برهن أنّ المستقيمين (FM ) و (GH ) متوازيان.
أحسب الطول GH.

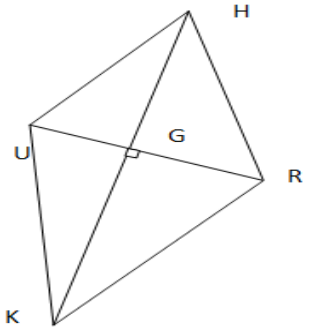



**التمرين الثالث :** حسب نموذج (2015)
الشكل المقابل مرسوم بأطوال غير حقيقية.
BNLO رباعي قطراه متعامدان و متقاطعان في M حيث :
MB = 5 cm , MN = 5.6 cm , ML = 8 cm , MO = 3.5 cm
1) برهن أنّ المستقيمين (BO ) و (NL ) متوازيان.
أحسب الطول NL.

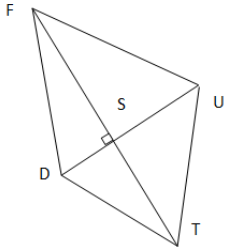



**حل تمرين امتحان شهادة التعليم المتوسط :**
**1) برهان أنّ المستقيمين (AB ) و (CD ) متوازيان :**
لدينا : $\frac{OA}{OC} = \frac{12}{5} = 2.4$ و $\frac{OB}{OD} = \frac{18}{7.5} = 2.4$ نستنتج أنّ : $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$
و بما أنّ النقط C,O,A في استقامية و كذلك النقط D,O,B إذن المستقيمان ( AB) و (CD ) متوازيان (حسب عكس مبرهنة طالس).
2) **حساب طول AB** :
بتطبيق مبرهنة فيثاغورس على المثلث ABO القائم في O نجد : $AB^2= OA^2+OB^2$
بالتعويض نجد : $AB^2=12^2+18^2$ و منه : $AB^2 = 144 + 324 = 468$
إذن : $AB= \sqrt{468} =\sqrt{36x13} =\sqrt{36}\ x\sqrt{13} = 6\sqrt{13}\ \ cm$

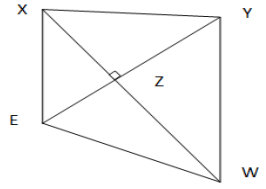
**التمرين الرابع :** حسب نموذج (2015)
الشكل المقابل مرسوم بأطوال غير حقيقية.
UHRK رباعي قطراه متعامدان و متقاطعان في G حيث :
GU = 1.6 cm , GH = 4 cm
, GR = 2.4 cm , GK = 6 cm
1) برهن أنّ المستقيمين (UH ) و (KR ) متوازيان.
2) أحسب الطول UH.




**التمرين الخامس :** حسب نموذج (2015)
الشكل المقابل مرسوم بأطوال غير حقيقية.
FUTD رباعي قطراه متعامدان و متقاطعان في S حيث :
SF = 4.5 cm , SU = 9 cm , ST = 3.5 cm , SD = 7 cm
1) برهن أنّ المستقيمين (FU ) و (DT ) متوازيان.
2) أحسب الطول FU.




**التمرين السادس :** حسب نموذج (2015)
الشكل المقابل مرسوم بأطوال غير حقيقية.
XYWE رباعي قطراه متعامدان و متقاطعان في Z حيث :
ZX = 6.3 cm , ZY = 11 cm , ZW = 9.9 cm , ZE = 7 cm
1) برهن أنّ المستقيمين (YW ) و (XE ) متوازيان.
2) أحسب الطول XE.

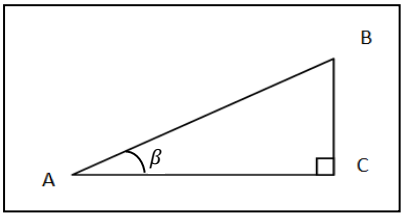



| الحلول : | | |
|---|---|---|
| **ت 1:** الطريقة 1 : $\frac{SO}{SM} = \frac{ST}{SJ} = \frac{2.8}{2.1} = 1.33 = \frac{4}{3}$ | **ت 2:** الطريقة 1 : $\frac{PG}{PM} = \frac{4.9}{2.8} = 1.75 = \frac{7}{4}$ | **ت 3:** الطريقة 1 : $\frac{MN}{MO} = \frac{5.6}{3.5} = 1.6 = \frac{8}{5}$ و $\frac{ML}{MB} =$ |
| أو الطريقة 2 : $\frac{SM}{SO} = \frac{SJ}{ST} = \frac{2.1}{2.8} = 0.75 = \frac{3}{4}$ | أو الطريقة 2 : $\frac{PM}{PG} = \frac{2.8}{4.9} = 0.57 = \frac{4}{7}$ و $\frac{PF}{PH} =$ | أو الطريقة 2 : $\frac{MO}{MN} = \frac{3.5}{5.6} = 0.62 = \frac{5}{8}$ و $\frac{MB}{ML} =$ |
| $OJ^2=SJ^2+SO^2$ , $OJ^2= 4.41 + 16=20.41$ , **OJ= 4.51 cm** | $GH^2=PH^2+PG^2$ , $GH^2= 49 +24.01=73.01$ , **GH= 8.54 cm** | $NL^2=MN^2+ML^2$ , $NL^2= 31.36+64=95.36$, **NL= 9.76 cm** |
| **ت 4:** الطريقة 1 : $\frac{GR}{GU} = \frac{2.4}{1.6} = 1.5 = \frac{6}{4}$ و $\frac{GK}{GH} =$ | **ت 5:** الطريقة 1 : $\frac{SF}{ST} = \frac{4.5}{3.5} = 1.28 = \frac{9}{7}$ و $\frac{SU}{SD} =$ | **ت 6:** الطريقة 1 : $\frac{ZW}{ZX} = \frac{9.9}{6.3} = 1.57 = \frac{11}{7}$ و $\frac{ZY}{ZE} =$ |
| أو الطريقة 2 : $\frac{GU}{GR} = \frac{1.6}{2.4} = 0.66 = \frac{4}{6}$ و $\frac{GH}{GK} =$ | أو الطريقة 2 : $\frac{ST}{SF} = \frac{3.5}{4.5} = 0.77 = \frac{7}{9}$ و $\frac{SD}{SU} =$ | أو الطريقة 2 : $\frac{ZX}{ZW} = \frac{6.3}{9.9} = 0.63 = \frac{7}{11}$ و $\frac{ZE}{ZY} =$ |
| $UH^2=GH^2+GU^2$ , $UH^2= 16+ 2.56=18.56$, **UH= 4.30 cm** | $FU^2=SF^2+SU^2$ , $FU^2= 20.25+ 81=101.25$ , **FU= 10.06 cm** | $XE^2=ZE^2+ZX^2$ , $XE^2= 49+39.69=88.69$ , **XE= 9.41 cm** |

**ملاحظة** : كل الأشكال مرسومة بأطوال غير حقيقية

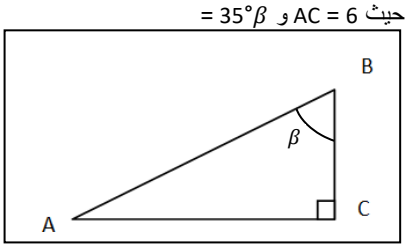
# تمارين تطبيقية حول : حساب المثلثات

**التمرين 01** : ليكن المثلث ABC قائم في C
حيث AC = 3 و $\beta = 30°$



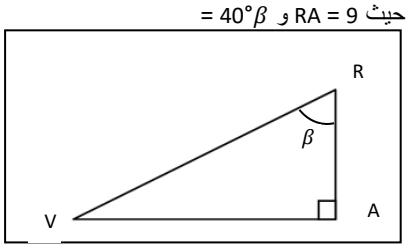

**1-** أكتب قاعدة النسب المثلثية بالنسبة للزاوية $\beta$ بملأ الفراغات التالية :
$\cos\beta =$ ..... $\sin\beta =$ ..... $\tan\beta =$ .....
**2-** أحسب طول AB

**التمرين 02** : ليكن المثلث ABC قائم في C
حيث AC = 6 و $\beta = 35°$



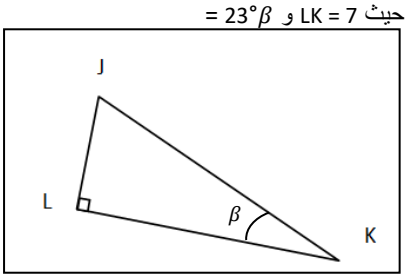

**1-** أكتب قاعدة النسب المثلثية بالنسبة للزاوية $\beta$ بملأ الفراغات التالية :
$\cos\beta =$ ..... $\sin\beta =$ ..... $\tan\beta =$ .....
**2-** أحسب طول AB

**التمرين 03 :** ليكن المثلث RAV قائم في A
حيث RA = 9 و $\beta = 40°$



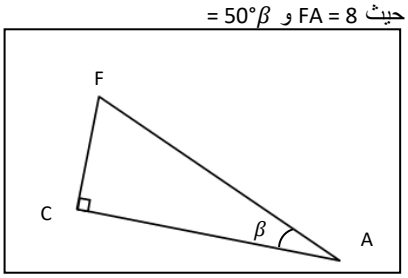

**1-** أكتب قاعدة النسب المثلثية بالنسبة للزاوية $\beta$ بملأ الفراغات التالية :
$\cos\beta =$ ..... $\sin\beta =$ ..... $\tan\beta =$ .....
**2-** أحسب طول VR

**التمرين 04** : ليكن المثلث JKL قائم في L
حيث LK = 7 و $\beta = 23°$



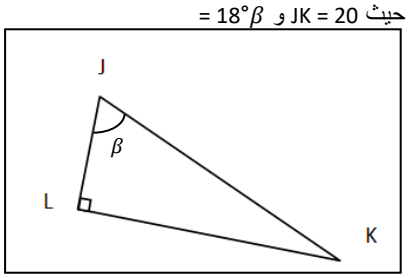

**1-** أكتب قاعدة النسب المثلثية بالنسبة للزاوية $\beta$ بملأ الفراغات التالية :
$\cos\beta =$ ..... $\sin\beta =$ ..... $\tan\beta =$ .....
**2-** أحسب طول JK

**التمرين 05** : ليكن المثلث FAC قائم في C
حيث FA = 8 و $\beta = 50°$



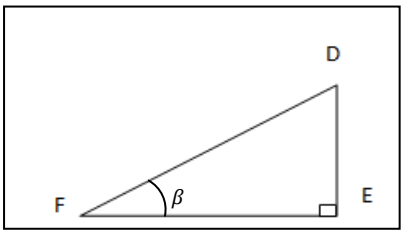

**1-** أكتب قاعدة النسب المثلثية بالنسبة للزاوية $\beta$ بملأ الفراغات التالية :
$\cos\beta =$ ..... $\sin\beta =$ ..... $\tan\beta =$ .....
**2-** أحسب طول CA

**التمرين 06** : ليكن المثلث JKL قائم في L
حيث JK = 20 و $\beta = 18°$



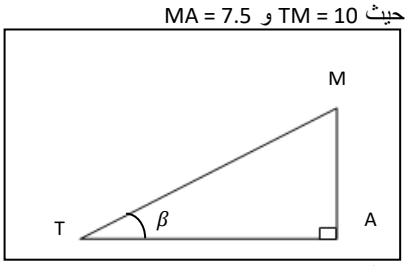

**1-** أكتب قاعدة النسب المثلثية بالنسبة للزاوية $\beta$ بملأ الفراغات التالية :
$\cos\beta =$ ..... $\sin\beta =$ ..... $\tan\beta =$ .....
**2-** أحسب طول JL

**التمرين 07** : ليكن المثلث DEF قائم في E
حيث DE = 5 و FE = 3.37



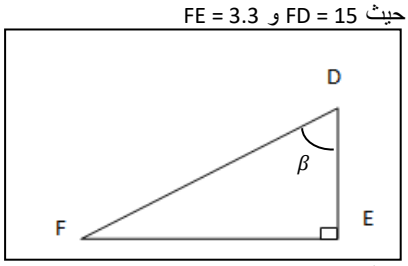

**1-** أكتب قاعدة النسب المثلثية بالنسبة للزاوية $\beta$ بملأ الفراغات التالية :
$\cos\beta =$ ..... $\sin\beta =$ ..... $\tan\beta =$ .....
**2-** أحسب قيس الزاوية $\beta$

**التمرين 08** : ليكن المثلث MAT قائم في A
حيث TM = 10 و MA = 7.5



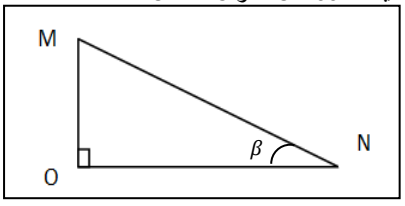

**1-** أكتب قاعدة النسب المثلثية بالنسبة للزاوية $\beta$ بملأ الفراغات التالية :
$\cos\beta =$ ..... $\sin\beta =$ ..... $\tan\beta =$ .....
**2-** أحسب قيس الزاوية $\beta$

**التمرين 09** : ليكن المثلث DEF قائم في E
حيث FD = 15 و FE = 3.3



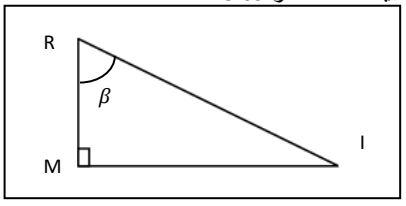

**1-** أكتب قاعدة النسب المثلثية بالنسبة للزاوية $\beta$ بملأ الفراغات التالية :
$\cos\beta =$ ..... $\sin\beta =$ ..... $\tan\beta =$ .....
**2-** أحسب قيس الزاوية $\beta$

**التمرين 10** : ليكن المثلث MNO قائم في O
حيث MO = 66.7 و ON = 23



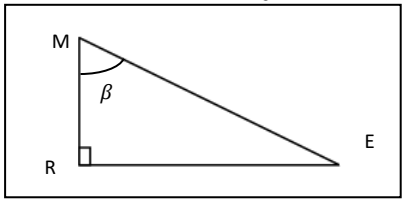

**1-** أكتب قاعدة النسب المثلثية بالنسبة للزاوية $\beta$ بملأ الفراغات التالية :
$\cos\beta =$ ..... $\sin\beta =$ ..... $\tan\beta =$ .....
**2-** أحسب قيس الزاوية $\beta$

**التمرين 11** : ليكن المثلث RIM قائم في M
حيث RI = 17 و RM = 13.09




**1-** أكتب قاعدة النسب المثلثية بالنسبة للزاوية $\beta$ بملأ الفراغات التالية :
$\cos\beta =$ ..... $\sin\beta =$ ..... $\tan\beta =$ .....
**2-** أحسب قيس الزاوية $\beta$

**التمرين 12** : ليكن المثلث MER قائم في R
حيث ME = 23 و RE = 4.6




**1-** أكتب قاعدة النسب المثلثية بالنسبة للزاوية $\beta$ بملأ الفراغات التالية :
$\cos\beta =$ ..... $\sin\beta =$ ..... $\tan\beta =$ .....
**2-** أحسب قيس الزاوية $\beta$

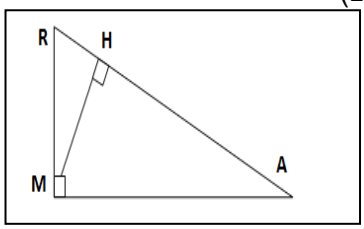
| | | |
|---|---|---|
| ت 1 : $\cos\beta = \frac{AC}{AB}$ $\cos 30° = 0.86$ $\frac{AC}{AB} = 0.86$<br>$AB = \frac{AC}{0.86} = \frac{3}{0.86} = 3.48$ **AB = 3.48** | ت 2 : $\sin\beta = \frac{AC}{AB}$ $\sin 35° = 0.57$ $\frac{AC}{AB} = 0.57$<br>$AB = \frac{AC}{0.57} = \frac{6}{0.57} = 10.52$ **AB = 10.52** | ت 3 : $\cos\beta = \frac{RA}{VR}$ $\cos 40° = 0.76$ $\frac{RA}{VR} = 0.76$<br>$VR = \frac{RA}{0.76} = \frac{9}{0.76} = 11.84$ **VR = 11.84** |
| ت 4 : $\cos\beta = \frac{LK}{JK}$ $\cos 23° = 0.92$ $\frac{LK}{JK} = 0.92$<br>$JK = \frac{LK}{0.92} = \frac{7}{0.92} = 7.60$ **JK = 7.60** | ت 5 : $\cos\beta = \frac{CA}{FA}$ $\cos 50° = 0.64$ $\frac{CA}{FA} = 0.64$<br>CA = FA x 0.64 = 8 x 0.64 = **5.12** **CA = 5.12** | ت 6 : $\cos\beta = \frac{JL}{JK}$ $\cos 18° = 0.95$ $\frac{JL}{JK} = 0.95$<br>JL = JK x 0.95 = 20 x 0.95 = **19** **JL = 19** |
| ت 7 : $\tan = \frac{DE}{FE} = \frac{5}{3.37} = 1.48$ $\tan 1.48 = 56°$ **$\beta = 56°$** | ت 8 : $\sin = \frac{MA}{TM} = \frac{7.5}{10} = 0.75$ $\sin 0.75 = 49°$ **$= 49°\beta$** | ت 9 : $\sin = \frac{FE}{FD} = \frac{3.3}{15} = 0.22$ $\sin 0.22 = 13°$ **$\beta = 13°$** |
| ت 10 : $\tan = \frac{MO}{ON} = \frac{66.7}{23} = 2.9$ $\tan 2.90 = 71°$ **$\beta = 71°$** | ت 11 : $\cos = \frac{RM}{RI} = \frac{13.09}{17} = 0.77$ $\cos 0.77 = 39°$ **$\beta = 39°$** | ت 12 : $\sin = \frac{RE}{ME} = \frac{4.6}{23} = 0.20$ $\sin 0.20 = 12°$ **$\beta = 12°$** |

**تمرين حول :** حساب المثلثات

**التمرين الثالث:** (3 نقاط) امتحان شهادة التعليم المتوسط دورة جوان (2011)
ABC مثلث قائم الزاوية في A . $[AH]$ الارتفاع المتعلق بالوتر $[BC]$.
- بيّن أنّ : $AB^2=BH \times BC$ ( يمكنك الاعتماد على $\cos\widehat{ABC}$ في كلا من المثلثين ABC و ABH )

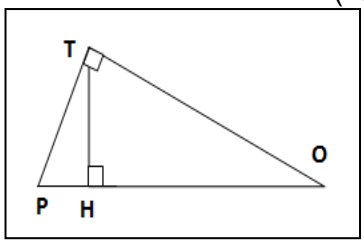
**ملاحظة :** كان من الأصح أن يصاغ السؤال بهذه الطريقة (يمكن الاعتماد على $\cos\widehat{ABC}$ و $\cos\widehat{ABH}$ في كل من المثلثين ABC و ABH )

**التمرين الأول:** (حسب نموذج 2011)



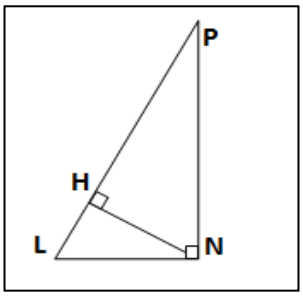

إليك الشكل المقابل :
- بيّن أنّ : $MA^2=HA \times RA$
(يمكن الاعتماد على $\cos\widehat{RAM}$ و $\cos\widehat{HAM}$ ) في المثلثين القائمين $RAM$ و $HAM$ .

**التمرين الثاني:** (حسب نموذج 2011)



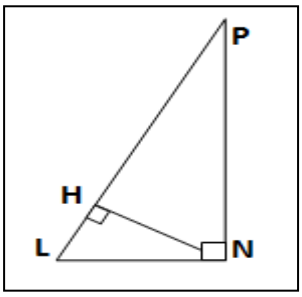

إليك الشكل المقابل :
- بيّن أنّ : $TO^2=HO \times PO$
(يمكن الاعتماد على $\cos\widehat{TOP}$ و $\cos\widehat{TOH}$ ) في المثلثين القائمين $TOP$ و $TOH$ .

**التمرين الثالث:** (حسب نموذج 2011)




إليك الشكل المقابل :
- بيّن أنّ : $PN^2=HP \times LP$
(يمكن الاعتماد على $\cos\widehat{LPN}$ و $\cos\widehat{HPN}$ ) في المثلثين القائمين $LPN$ و $HPN$ .

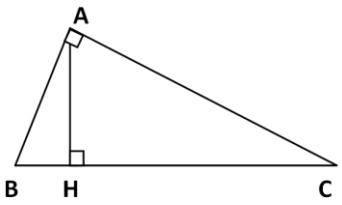
**التمرين الرابع:** (حسب نموذج 2011)




إليك الشكل المقابل :
- بيّن أنّ : $LN^2=LH \times LP$
(يمكن الاعتماد على $\cos\widehat{PLN}$ و $\cos\widehat{HLN}$ ) في المثلثين القائمين $PLN$ و $HLN$ .

**حل التمرين :**

**1) إنشاء الشكل**




**2) إثبات أن $AB^2=BH \times BC$**

بما أن الزاويتان $\widehat{ABC}$ و $\widehat{ABH}$ لهما نفس القيس و تتواجدان في مثلثين قائمين :

فإن : $\begin{cases}\cos\widehat{ABH}=\cos\widehat{ABC}\\ \sin\widehat{ABH}=\sin\widehat{ABC}\\ \tan\widehat{ABH}=\tan\widehat{ABC}\end{cases}$

للتذكير : $\cos = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

(1) في المثلث ABC : $\cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$

(2) في المثلث ABH : $\cos\widehat{ABH} = \frac{BH}{AB}$

لدينا : $\cos\widehat{ABH} = \frac{BH}{AB} = \cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$ و منه : $\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB}$

أي : $AB \times AB = BH \times BC$ أي : $AB^2 = BH \times BC$

**حل التمرين الأول :**

لدينا : $\cos\widehat{RAM} = \frac{MA}{RA} = \cos\widehat{HAM} = \frac{HA}{MA}$ و منه : $\frac{MA}{RA} = \frac{HA}{MA}$

أي : $MA \times MA = HA \times RA$ أي : $MA^2 = HA \times RA$

**حل التمرين الثاني :**

لدينا : $\cos\widehat{TOP} = \frac{TO}{PO} = \cos\widehat{TOH} = \frac{HO}{TO}$ و منه : $\frac{TO}{PO} = \frac{HO}{TO}$

أي : $TO \times TO = HO \times PO$ أي : $TO^2 = HO \times PO$

**حل التمرين الثالث :**

لدينا : $\cos\widehat{LPN} = \frac{PN}{LP} = \cos\widehat{HPN} = \frac{HP}{PN}$ و منه : $\frac{PN}{LP} = \frac{HP}{PN}$

أي : $PN \times PN = HP \times LP$ أي : $PN^2 = HP \times LP$

**حل التمرين الرابع :**

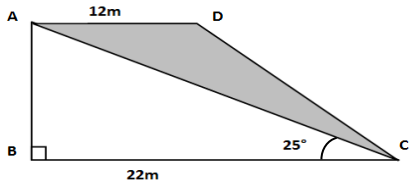
لدينا : $\cos\widehat{PLN} = \frac{LN}{LP} = \cos\widehat{HLN} = \frac{LH}{LN}$ و منه : $\frac{LN}{LP} = \frac{LH}{LN}$

أي : $LN \times LN = LH \times LP$ أي : $LN^2 = LH \times LP$

**تمرين حول :** حساب المثلثات

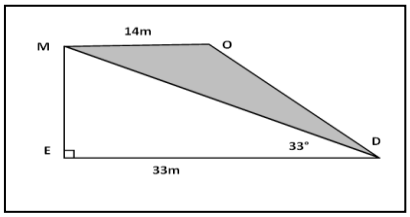
**ملاحظة** : كل الأشكال مرسومة بأطوال غير حقيقية

**التمرين الثالث:** (3 نقاط) امتحان شهادة التعليم المتوسط دورة جوان (2014)
الشكل ABCD شبه منحرف قائم في B ، فيه : $\widehat{ACB}$ = 25°
1) احسب الطول AB بالتدوير إلى الوحدة. (استعن بـ : tan $\widehat{ACB}$ ) .
2) احسب مساحة كل من شبه المنحرف ABCD و المثلث ABC .
ثم استنتج مساحة الجزء المظلل.
تعطى : مساحة شبه المنحرف = $\frac{(\text{القاعدة الكبرى}+\text{القاعدة الصغرى}) \times \text{الارتفاع}}{2}$

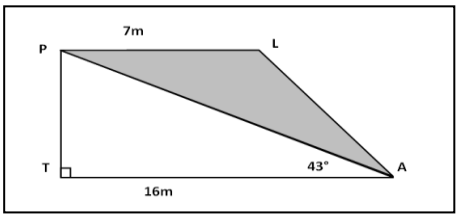



**حل تمرين امتحان شهادة التعليم المتوسط (2014):**
**1) حساب الطول AB بالتدوير إلى الوحدة :**
في المثلث ABC القائم في B لدينا : tan $\widehat{ACB} = \frac{AB}{BC}$
أي : $\tan 25° = \frac{AB}{22}$ = و منه : AB = 22 x tan 25°
و tan 25° ≈ 0.466 إذن: AB ≈ 22x 0.46= 10 m
**2) حساب مساحة شبه المنحرف ABCD :**
$A_1 = \frac{(22+12)x10}{2}$ = 170 أي أن : $A_1$= 170 $m^2$
**3) حساب مساحة المثلث ABC:**
$A_2 = \frac{22\ X\ 10}{2}$ = 110 أي أن : $A_2$ = 110 $m^2$
**4) مساحة الجزء المظلل من الشكل :**
A = $A_1 - A_2$ = 170 -110 = 60 أي أن : A = 60 $m^2$

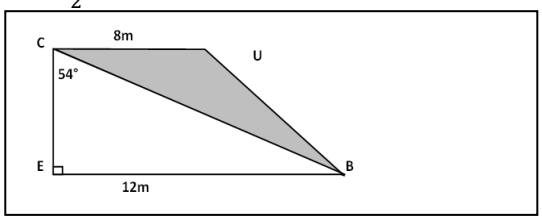
**التمرين الأول:** (حسب نموذج 2014)
الشكل MODE شبه منحرف قائم في E ، فيه : $\widehat{MDE}$ = 33°
1) احسب الطول ME بالتدوير إلى الوحدة. (استعن بـ : tan $\widehat{MDE}$ ) .
2) احسب مساحة كل من شبه المنحرف MODE و المثلث MDE .
ثم استنتج مساحة الجزء المظلل.
تعطى : مساحة شبه المنحرف = $\frac{(\text{القاعدة الكبرى}+\text{القاعدة الصغرى}) \times \text{الارتفاع}}{2}$



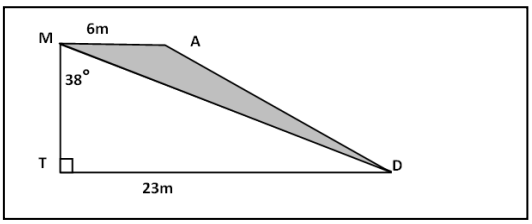

**التمرين الثاني :** (حسب نموذج 2014)
الشكل PLAT شبه منحرف قائم في T ، فيه : $\widehat{PAT}$ = 43°
1) احسب الطول PT بالتدوير إلى الوحدة. (استعن بـ : tan $\widehat{PAT}$ ) .
2) احسب مساحة كل من شبه المنحرف PLAT و المثلث PAT .
ثم استنتج مساحة الجزء المظلل.
تعطى : مساحة شبه المنحرف = $\frac{(\text{القاعدة الكبرى}+\text{القاعدة الصغرى}) \times \text{الارتفاع}}{2}$



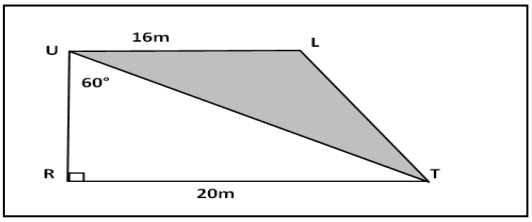

**التمرين الثالث:** (حسب نموذج 2014)
الشكل CUBE شبه منحرف قائم في E ، فيه : $\widehat{ECB}$ = 54°
1) احسب الطول CE بالتدوير إلى الوحدة. (استعن بـ : tan $\widehat{ECB}$ ) .
2) احسب مساحة كل من شبه المنحرف CUBE و المثلث CEB .
ثم استنتج مساحة الجزء المظلل.
تعطى : مساحة شبه المنحرف = $\frac{(\text{القاعدة الكبرى}+\text{القاعدة الصغرى}) \times \text{الارتفاع}}{2}$



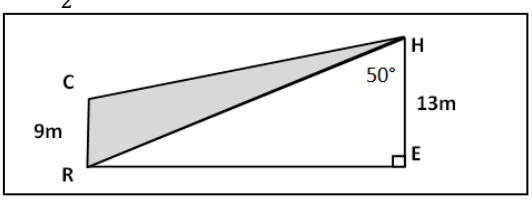

**التمرين الرابع :** (حسب نموذج 2014)
الشكل MADT شبه منحرف قائم في T ، فيه : $\widehat{TMD}$ =38°
1) احسب الطول MT بالتدوير إلى الوحدة. (استعن بـ : tan $\widehat{TMD}$ ) .
2) احسب مساحة كل من شبه المنحرف MADT و المثلث MDT .
ثم استنتج مساحة الجزء المظلل.
تعطى : مساحة شبه المنحرف = $\frac{(\text{القاعدة الكبرى}+\text{القاعدة الصغرى}) \times \text{الارتفاع}}{2}$




**التمرين الخامس:** (حسب نموذج 2014)
الشكل ULTR شبه منحرف قائم في R ، فيه: $\widehat{RUT}$ = 60°
1) احسب الطول UR بالتدوير إلى الوحدة. (استعن بـ : tan $\widehat{RUT}$ ) .
2) احسب مساحة كل من شبه المنحرف ULTR و المثلث UTR .
ثم استنتج مساحة الجزء المظلل.
تعطى : مساحة شبه المنحرف = $\frac{(\text{القاعدة الكبرى}+\text{القاعدة الصغرى}) \times \text{الارتفاع}}{2}$




**التمرين السادس:** (حسب نموذج 2014)
الشكل CHER شبه منحرف قائم في E ، فيه : $\widehat{RHE}$ = 50°
1) احسب طول RE بالتدوير إلى الوحدة. (استعن بـ : tan $\widehat{RHE}$ ) .
2) احسب مساحة كل من شبه المنحرف CHER و المثلث REH .
ثم استنتج مساحة الجزء المظلل.
تعطى : مساحة شبه المنحرف = $\frac{(\text{القاعدة الكبرى}+\text{القاعدة الصغرى}) \times \text{الارتفاع}}{2}$



## حلـــــــــــــــول نماذج التمرين الثالث ( دورة 2014):

**التمرين الأول :**

tan 33°=0.64 ……..(1)

tan $\widehat{MED}$ = $\frac{ME}{ED}$ ……..(2)

$\frac{ME}{ED}$= 0.64

**ME**= ED x 0.64 = 33 x 0.64 =**21.12 m**

A (MODE) =$\frac{(33+14)\text{ x }21.12}{2}$ = $\frac{47\text{ x }21.12}{2}$ =$\frac{992}{2}$ = **496,32 m**

A (MED)= $\frac{33\text{ x }21.12}{2}$**= 348,48 m²**

A (MODE)- A (MED) = **147.84 m²**

**التمرين الثاني :**

tan 43°=0.93……..(1)

tan $\widehat{PAT}$ = $\frac{PT}{TA}$ ……..(2)

$\frac{PT}{TA}$ = 0.93

**PT**= TA x 0.93 = 16 x 0.93 =**14.88 m**

A (PLAT) =$\frac{(16+7)\text{ x }14.88}{2}$ =$\frac{23\text{ x }14.88}{2}$ =$\frac{342.24}{2}$ = **171,12 m**

A (PAT)= $\frac{16\text{ x }14.88}{2}$**= 119.04 m²**

A (MODE)- A (MED) = **52.08 m²**

**التمرين الثالث :**

tan 54°=1.37 ……..(1)

tan $\widehat{ECB}$ = $\frac{EB}{CE}$ ……(2)

$\frac{EB}{CE}$ =1.37

**CE**=$\frac{EB}{1.37}$= $\frac{12}{1.37}$= **8.75 m**

A (CUBE) =$\frac{(12+8)\text{ x }8.75}{2}$ =$\frac{20\text{ x }8.75}{2}$ =$\frac{175}{2}$ = **87.5 m**

A (ECB)= $\frac{12\text{ x }8.75}{2}$**= 52.5 m²**

A (CUBE)- A (ECB) = **35 m²**

**التمرين الرابع :**

tan 38°=0.78 ……..(1)

tan $\widehat{TMD}$ = $\frac{TD}{MT}$ ……..(2)

= 0.78 $\frac{TD}{MT}$

**MT**= $\frac{23}{0.78}$ = **29.48 m**

A (MADT) =$\frac{(23+6)\text{ x }29.48}{2}$ =$\frac{29\text{ x }29.48}{2}$ =$\frac{854.92}{2}$ = **427.46 m²**

A (MDT)= $\frac{23\text{ x }29.48}{2}$**= 339.02m²**

A (MADT)- A (MDT) = **88.44 m²**

**التمرين الخامس :**

tan 60°=1.73 ……..(1)

tan $\widehat{RUT}$ = $\frac{RT}{UR}$ ……..(2)

= 1.73$\frac{RT}{UR}$

**UR**= $\frac{20}{1.73}$ = **11.56 m**

A (ULTR) =$\frac{(20+16)\text{ x }11.56}{2}$ =$\frac{36\text{ x }11.56}{2}$ =$\frac{416.16}{2}$ = **208.08 m²**

A (UTR)= $\frac{20\text{ x }11.56}{2}$**= 115.6 m²**

A (ULTR)- A (UTR) = **92.48 m²**

**التمرين السادس :**

tan 50°=1.19 ……..(1)

tan $\widehat{RHE}$ = $\frac{RE}{HE}$ ……..(2)

= 1.19$\frac{RE}{HE}$

**RE**=13 x 1.19 = **15.47 m**

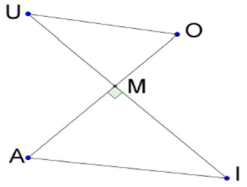
A (CHER) =$\frac{(13+9)\text{ x }15.47}{2}$ =$\frac{22\text{ x }15.47}{2}$ =$\frac{340.34}{2}$ = **170.17 m²**

A (REH)= $\frac{13\text{ x }15.47}{2}$**= 100.55 m²**

A (CHER)- A (REH) = **69.61 m²**

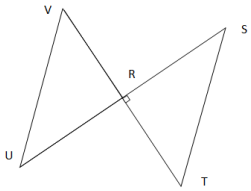
**تمرين يشمل :** حساب المثلثات **+** نظرية طالس

**التمرين الرابع:** (نقطتين) امتحان شهادة التعليم المتوسط (2017)
الشكل المقابل غير مرسوم بأبعاده الحقيقية (وحدة الطول هي الميليمتر)
MU = 28 , MI = 36 , MO = 21 , MA = 27
1) بيّن أنّ المستقيمين (AI ) و (OU ) متوازيين.
2) احسب قيس الزاوية $\widehat{AIM}$ ( بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة)

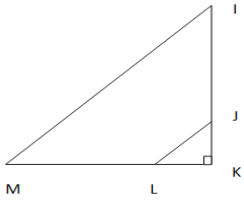



**حل تمرين امتحان شهادة التعليم المتوسط :**
1) نبيّن أنّ (UO ) // (AI )
لدينا : $\frac{MU}{MI} = \frac{28}{36} = \frac{7}{9}$ و $\frac{MO}{MA} = \frac{21}{27} = \frac{7}{9}$ نستنتج أنّ : $\frac{MO}{MA} = \frac{MU}{MI}$
و حسب النظرية العكسية لنظرية طالس فإن (UO ) // (AI )
( ملاحظة : ترتيب النقط محقق في الشكل المعطى)
2) حساب قيس الزاوية $\widehat{AIM}$
لدينا في المثلث AIM القائم في M ، $\tan \widehat{AIM} = \frac{AM}{MI}$ و منه $\tan \widehat{AIM} = \frac{27}{36}$
أي $\tan \widehat{AIM} = 0.75$ باستعمال الحاسبة العلمية نجد : $\widehat{AIM} = 36,869$
إذن : $\widehat{AIM} = 37°$ ( بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة) .

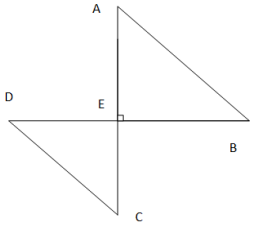
**التمرين الأول :** حسب نموذج (2017)
(وحدة الطول هي الميليمتر)
الشكل المقابل غير مرسوم بأبعاده الحقيقية
RS = 6 , RT = 6.6 , RU = 6.5 , RV = 7.15
1) بيّن أنّ المستقيمين :
(ST) و (VU ) متوازيين.
2) احسب قيس الزاوية $\widehat{UVR}$
( بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة)



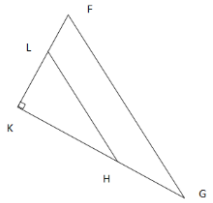

**التمرين الرابع :** حسب نموذج (2017)
(وحدة الطول هي الميليمتر)
الشكل المقابل غير مرسوم بأبعاده الحقيقية
KJ = 3 , KI = 17 , KL = 2.4 , KM = 13.6
1) بيّن أنّ المستقيمين:
(LJ ) و (MI ) متوازيين.
2) احسب قيس الزاوية $MIK$
( بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة)



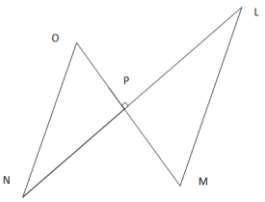

**التمرين الثاني :** حسب نموذج (2017)
(وحدة الطول هي الميليمتر)
الشكل المقابل غير مرسوم بأبعاده الحقيقية
EA = 10.8 , EB = 12 , EC = 8.1 , ED = 9
1) بيّن أنّ المستقيمين :
(AB ) و (DC ) متوازيين.
2) احسب قيس الزاوية $\widehat{EDC}$
( بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة)



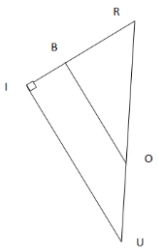

**التمرين الخامس :** حسب نموذج (2017)
(وحدة الطول هي الميليمتر)
الشكل المقابل غير مرسوم بأبعاده الحقيقية
KH = 9 , KG = 14 , KL = 5.4 , KF = 8.4
1) بيّن أنّ المستقيمين:
(FG ) و (LH ) متوازيين.
2) احسب قيس الزاوية $\widehat{KGF}$
( بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة)




**التمرين الثالث :** حسب نموذج (2017)
(وحدة الطول هي الميليمتر)
الشكل المقابل غير مرسوم بأبعاده الحقيقية
PL = 15 , PM = 10.5 , PN = 8 , PO = 5.6
1) بيّن أنّ المستقيمين:
(LM ) و (ON ) متوازيين.
2) احسب قيس الزاوية $\widehat{PML}$
( بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة)




**التمرين السادس :** حسب نموذج (2017)
(وحدة الطول هي الميليمتر)
الشكل المقابل غير مرسوم بأبعاده الحقيقية
RB = 6.6 , RI = 10.8 , RO = 11 , RU = 18
1) بيّن أنّ المستقيمين:
( IU ) و (BO ) متوازيين.
2) احسب قيس الزاوية $\widehat{IRU}$
( بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة)



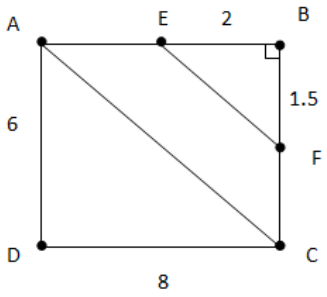

الحلول :

| | | |
|---|---|---|
| **ت 1:** الطريقة 1: $\frac{RV}{RT} = \frac{7.15}{6.6} = 1.08$ و $\frac{RU}{RS} = \frac{6.5}{6} = 1.08$<br>أو الطريقة 2 : $\frac{RT}{RV} = \frac{6.6}{7.15} = 0.92$ و $\frac{RS}{RU} = \frac{6}{6.5} = 0.92$<br>$\tan \widehat{UVR} = \frac{RV}{RU} = \frac{7.15}{6.5} = 1.1$ , tan 1.1 = **48 °** | **ت 2:** الطريقة 1 : $\frac{EA}{EC} = \frac{10.8}{8.1} = 1.33$ و $\frac{EB}{ED} = \frac{12}{9} = 1.33$<br>أو الطريقة 2 : $\frac{EC}{EA} = \frac{8.1}{10.8} = 0.75$ و $\frac{ED}{EB} = \frac{9}{12} = 0.75$<br>$\tan \widehat{EDC} = \frac{EC}{ED} = \frac{8.1}{9} = 0.9$ , tan 0.9 = **42 °** | **ت 3:** الطريقة 1: $\frac{PM}{PO} = \frac{10.5}{5.6} = 1.87$ و $\frac{PL}{PN} = \frac{15}{8} = 1.87$<br>أو الطريقة 2 : $\frac{PO}{PM} = \frac{5.6}{10.5} = 0.53$ و $\frac{PN}{PL} = \frac{8}{15} = 0.53$<br>$\tan \widehat{PML} = \frac{PL}{PM} = \frac{15}{10.5} = 1.42$ , tan 1.42 = **55 °** |
| **ت 4:** الطريقة 1: $\frac{KM}{KL} = \frac{13.6}{2.4} = 5.66$ و $\frac{KI}{KJ} = \frac{17}{3} = 5.66$<br>أو الطريقة 2 : $\frac{KL}{KM} = \frac{2.4}{13.6} = 0.17$ و $\frac{KJ}{KI} = \frac{3}{17} = 0.17$<br>$\tan \widehat{MIK} = \frac{KM}{KI} = \frac{13.6}{17} = 0.8$ , tan 0.8 = **39 °** | **ت 5:** الطريقة 1 : $\frac{KF}{KL} = \frac{8.4}{5.4} = 1.55$ و $\frac{KG}{KH} = \frac{14}{9} = 1.55$<br>أو الطريقة 2 : $\frac{KL}{KF} = \frac{5.4}{8.4} = 0.64$ و $\frac{KH}{KG} = \frac{9}{14} = 0.64$<br>$\tan \widehat{KGF} = \frac{KF}{KG} = \frac{8.4}{14} = 0.6$ , tan 0.6= **31 °** | **ت 6:** الطريقة 1: $\frac{RI}{RB} = \frac{10.8}{6.6} = 1.63$ و $\frac{RU}{RO} = \frac{18}{11} = 1.63$<br>أو الطريقة 2 : $\frac{RB}{RI} = \frac{6.6}{10.8} = 0.61$ و $\frac{RO}{RU} = \frac{11}{18} = 0.61$<br>Cos $\widehat{IRU} = \frac{RI}{RU} = \frac{10.8}{18} = 0.6$ , cos 0.6= **53 °** |

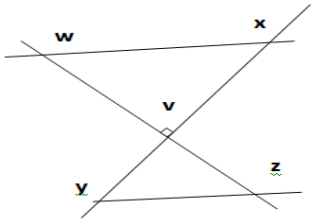
**درس**: نظرية طالس + **درس**: نظرية فيتاغورث + **درس**: حساب المثلثات

**ملاحظة** : كل الأشكال مرسومة بأطوال غير حقيقية

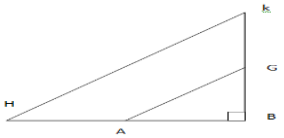
**التمرين الثالث :** (3 نقاط) امتحان شهادة التعليم المتوسط دورة 2018
ABCD مستطيل حيث AD = 6 و DC = 8 ( وحدة الطول هي السنتيمتر)
1) أحسب طول AC
2) E و F نقطتان من الضلعين [AB] و [BC] على الترتيب
حيث : BF = 1.5 و BE =2
بيّن أنّ : ( AC) يوازي (EF )
3) احسب قيس الزاوية $\widehat{BEF}$ بالتدوير إلى الوحدة.




**التمرين الأول :** حسب نموذج (2018)
( وحدة الطول هي السنتيمتر)
ليكن الشكل التالي حيث VW = 5.4 و VX = 6
1) أحسب طول WX
2) لدينا : VZ =1.62 و VY =1.8
بيّن أنّ : (WX ) يوازي (YZ )
احسب قيس الزاوية $V\widehat{Z}Y$ بالتدوير إلى الوحدة.



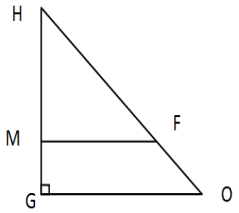

**التمرين الثاني :** حسب نموذج (2018)
( وحدة الطول هي المتر)
ليكن الشكل التالي حيث BH = 15 و BK = 10.5
1) أحسب طول KH
2) لدينا : GB =5.6 و AB=8
بيّن أنّ : (HK ) يوازي (AG )
احسب قيس الزاوية $\widehat{GAB}$ بالتدوير إلى الوحدة.




**التمرين الثالث :** حسب نموذج (2018)
( وحدة الطول هي المتر)
ليكن الشكل التالي حيث GH = 25.2 و HO = 28
1) أحسب طول GO

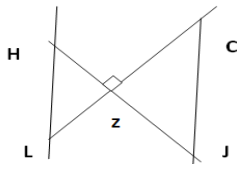
**حل التمرين الثالث لامتحان شهادة التعليم المتوسط (دورة 2018):**
1) حساب طول AC :
بتطبيق نظرية فيتاغورث على المثلث القائم ADC :
$AC^2 = AD^2 + DC^2$ أي : $AC^2 = 6^2 + 8^2$ أي $AC^2 =36+64=100$
$AC = \sqrt{100} = 10\ cm$
2) إثبات أن (AC ) // (EF ) :
لدينا من جهة : $\frac{BF}{BC} = \frac{1.5}{6} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ و من جهة أخرى : $\frac{BE}{BA} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$
بما أن : $\frac{BE}{BA} = \frac{BF}{BC}$ فإن المستقيمين (EF ) و (AC ) متوازيان حسب عكس خاصية طالس.
3) حساب قيس الزاوية $\widehat{BEF}$ بالتدوير إلى الوحدة :
$\tan \widehat{BEF} = \frac{BF}{BE} = \frac{1.5}{2} = 0.75$ و منه : $\widehat{BEF} = 37°$

تابع للتمرين الثالث :



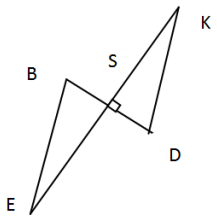

2) لدينا : HM =14.4 و HF = 16
بيّن أنّ : (MF) يوازي (GO)
احسب قيس الزاوية $\widehat{GHO}$ بالتدوير إلى الوحدة.

**التمرين الرابع:** حسب نموذج (2018)
( وحدة الطول هي الكيلومتر)
ليكن الشكل التالي حيث ZJ =28.8 و ZC = 32



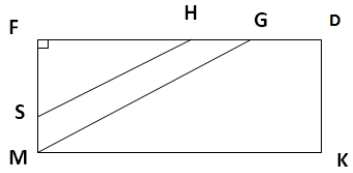

1) أحسب طول CJ
2) لدينا : ZL= 26 و ZH=23.4
بيّن أنّ : (CJ) يوازي (HL)
3) احسب قيس الزاوية $\widehat{LHZ}$ بالتدوير إلى الوحدة.

**التمرين الخامس :** حسب نموذج (2018)
( وحدة الطول هي الكيلومتر)
ليكن الشكل التالي حيث SD =16.8 و SK = 42




3) أحسب طول KD
4) لدينا : SE =38 و SB=15.2
بيّن أنّ : (KD) يوازي (BE)
3) احسب قيس الزاوية $\widehat{EBS}$ بالتدوير إلى الوحدة.

**التمرين السادس :** حسب نموذج (2018)
( وحدة الطول هي المليمتر)
FDKL مستطيل حيث FS = 7.6 و FH=19




1) أحسب طول SH
2) لدينا : FG = 23 و FM = 9.2
بيّن أنّ : (SH) يوازي (MG)
3) احسب بالتدوير إلى الوحدة :
قيس الزاوية $\widehat{FMG}$

**الحلـــــول :**

| | | |
|---|---|---|
| **ت 1:** $WX^2=VX^2+VW^2$ , $WX^2=36+29.16=65.16$<br>**WX**$=\sqrt{65.16}$ = **8.07 cm**<br>الطريقة 1: $\frac{6}{1.8}$= **3.33**$\frac{VX}{VY}$ و $\frac{VW}{VZ}$ =$\frac{5.4}{1.62}$ = **3.33**<br>أو الطريقة 2 : $\frac{1.8}{6}$= **0.3**$\frac{VY}{VX}$ و $\frac{VZ}{VW}$ =$\frac{1.62}{5.4}$ = **0.3**<br>$\tan \widehat{VZY} = \frac{VY}{VZ} = \frac{1.8}{2.4}$ = **0.75** , tan 0.75 = **37 °** | **ت 2:** $HK^2=BH^2+BK^2$ , $HK^2=225.+110.25=$**335.25**<br>**HK**$=\sqrt{335.25}$ = **18.30 m**<br>الطريقة 1: $\frac{15}{8}$= **1.87**$\frac{BH}{BA}$ و $\frac{BK}{BG}$ =$\frac{10.5}{5.6}$ = **1.87**<br>أو الطريقة 2 : $\frac{8}{15}$= **0.53**$\frac{BA}{BH}$ و $\frac{BG}{BK}$ =$\frac{5.6}{10.5}$ = **0.53**<br>$\tan \widehat{GAB} = \frac{BG}{BA} = \frac{5.6}{8}$ = **0.7** , tan 0.7 = **35 °** | **ت 3:** $GO^2=HO^2-GH^2$ , $GO^2=784-635.04=148.96$<br>**HO**$=\sqrt{148.96}$ = **12.20m**<br>الطريقة 1: $\frac{28}{16}$= **1.75**$\frac{HO}{HF}$ و $\frac{HG}{HM}$ =$\frac{25.2}{14.4}$ = **1.75**<br>أو الطريقة 2 : $\frac{16}{28}$= **0.57**$\frac{HF}{HO}$ و $\frac{HM}{HG}$ =$\frac{14.4}{25.2}$ = **0.57**<br>$\cos \widehat{GHO} = \frac{HG}{HO} = \frac{25.2}{28}$ = **0.9** , cos 0.9 = **25 °** |
| **ت 4:** $CJ^2=ZC^2+ZJ^2$ , $CJ^2=1024+829.44=1853.44$<br>**CJ**$=\sqrt{1853.44}$ = **43.05 km**<br>الطريقة 1: $\frac{32}{26}$= **1.23**$\frac{ZC}{ZL}$ و $\frac{ZJ}{ZH}$ =$\frac{28.8}{23.4}$ = **1.23**<br>أو الطريقة 2 : $\frac{26}{32}$= **0.81**$\frac{ZL}{ZC}$ و $\frac{ZH}{ZJ}$ =$\frac{23.4}{28.8}$ = **0.81**<br>$\tan \widehat{LHZ} = \frac{ZL}{ZH} = \frac{26}{23.4}$ = **1.11** , tan 1.11 = **48 °** | **ت 5:** $KD^2=SK^2+SD^2$ , $KD^2=1764+282.24=2064.24$<br>**KD**$=\sqrt{2064.24}$ = **45.23 km**<br>الطريقة 1: $\frac{42}{38}$= **1.1**$\frac{SK}{SE}$ و $\frac{SD}{SB}$ =$\frac{16.8}{15.2}$ = **1.1**<br>أو الطريقة 2 : $\frac{38}{42}$= **0.9**$\frac{SE}{SK}$ و $\frac{SB}{SD}$ =$\frac{15.2}{16.8}$ = **0.9**<br>$\tan \widehat{EBS} = \frac{SE}{SB} = \frac{38}{15.2}$ = **2.5** , tan 2.5= **68 °** | **ت 6:** $SH^2=FH^2+FS^2$ , $SH^2=361+57.76=418.76$<br>**SH**$=\sqrt{418.76}$ = **20.46 mm**<br>الطريقة 1: $\frac{23}{19}$= **1.21**$\frac{FG}{FH}$ و $\frac{FM}{FS}$ =$\frac{9.2}{7.6}$ = **1.21**<br>أو الطريقة 2 : $\frac{19}{23}$= **0.82**$\frac{FH}{FG}$ و $\frac{FS}{FM}$ =$\frac{7.6}{9.2}$ = **0.82**<br>$\tan \widehat{FMG} = \frac{FG}{FM} = \frac{23}{9.2}$ = **2.5** , tan 2.5 = **68 °** |

**تمرين يشمل :** النسب المثلثية **+** نظرية طالس

**التمرين الثالث:** (نقطتان) امتحان شهادة التعليم المتوسط (2013)
ABC مثلث قائم في B حيث : AB= 4 cm و CB = 8 cm .
لتكن M نقطة من $[BC]$ حيث $BM = \frac{BC}{4}$ ،
المستقيم (Δ) العمودي على (BC) في النقطة M
يقطع $[AC]$ في النقطة H .
1) أحسب الطول MH.
2) أحسب tan $\widehat{AMB}$ و استنتج قيس الزاوية $\widehat{AMB}$ بالتدوير إلى الدّرجة.

**التمرين الأول:** (حسب نموذج 2013)
PIC مثلث قائم في I حيث : IP= 5 cm و IC = 2 cm .
لتكن X نقطة من $[IP]$ حيث $IX = 3$ ،
المستقيم (Δ) العمودي على (IP) في النقطة X
يقطع $[PC]$ في النقطة Y .
1) أحسب الطول YX.
2) أحسب tan $\widehat{CXI}$ و استنتج قيس الزاوية $\widehat{CXI}$ بالتدوير إلى الدّرجة.

**التمرين الثاني:** (حسب نموذج 2013)
BAL مثلث قائم في L حيث : LA= 4 cm و LB = 2 cm .
لتكن T نقطة من $[LA]$ حيث LT = 1 ،
المستقيم (Δ) العمودي على (LA) في النقطة T
يقطع $[AB]$ في النقطة S .
1) أحسب الطول ST.
2) أحسب tan $\widehat{LTB}$ و استنتج قيس الزاوية $\widehat{LTB}$ بالتدوير إلى الدّرجة.

**التمرين الثالث:** (حسب نموذج 2013)
MOI مثلث قائم في O حيث : OM= 7 cm و OI = 4 cm .
لتكن R نقطة من $[OM]$ حيث OR = 3 ،
المستقيم (Δ) العمودي على (OM) في النقطة R
يقطع $[IM]$ في النقطة G .
1) أحسب الطول RG.
2) أحسب tan $\widehat{ORI}$ و استنتج قيس الزاوية $\widehat{ORI}$ بالتدوير إلى الدّرجة.

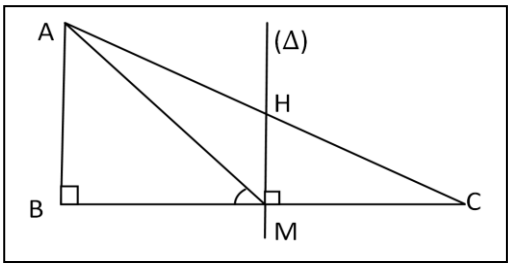
**التمرين الرابع:** (حسب نموذج 2013)
LIR مثلث قائم في L حيث : LR= 8 cm و LI = 5 cm .
لتكن P نقطة من $[LR]$ حيث LP = 2 ،
المستقيم (Δ) العمودي على (LR) في النقطة P
يقطع $[IR]$ في النقطة B.
1) أحسب الطول BP.
2) أحسب tan $\widehat{LPI}$ و استنتج قيس الزاوية $\widehat{LPI}$ بالتدوير إلى الدّرجة.

## الحلـــــــــول :

**التمرين الأول :**
$\frac{YX}{IC} = \frac{PX}{IP}$ , $\frac{YX}{2} = \frac{2}{5}$, yx= $\frac{4}{5}$ = **0.8cm**
**YX = 0.8 cm**
Tan $\widehat{CXI} = \frac{IC}{IX} = \frac{2}{3}$ = 0.66 tan 0.66= **34°** **$\widehat{CXI}$ =34°**

**التمرين الثاني :**
$\frac{ST}{LB} = \frac{AT}{LA}$ , $\frac{ST}{2} = \frac{3}{4}$, ST= $\frac{6}{4}$ = **1.5 cm**
**ST = 1.5 cm**
Tan $\widehat{LTB} = \frac{BL}{LT} = \frac{2}{1}$ = 2 tan 2 = **64°** **$\widehat{LTB}$ = 64°**

**حل التمرين :**
**1) الرسم**




**2) حساب طول MH**
بما أن : ( AB) ⊥ ( BC) و (HM ) ⊥( BC) فإن : (HM ) // (AB )
بما أنّ ( AB) // (HM ) و حسب نظرية طالس لدينا : $\frac{CM}{CB} = \frac{MH}{AB}$ ،
MH = $\frac{CM \times AB}{CB}$ = $\frac{4 \times 6}{8}$ = $\frac{24}{6}$ = 3
MH = **3 cm**

**3) حساب : tan $\widehat{AMB}$**
tan $\widehat{AMB} = \frac{AB}{BM}$ ; tan $\widehat{AMB} = \frac{4}{2}$ ; tan $\widehat{AMB}$ = 2
4) استنتاج قيس الزاوية $\widehat{AMB}$ :
Tan 2 = 63.4° ≅ 63°
$\widehat{AMB} = 63°$

**التمرين الخامس :** (حسب نموذج 2013)
***المرجع :** تمرين مأخوذ من (موضوع مقترح – نموذج 2) تمرين 3:
ABC مثلث قائم في B حيث : AB= 4 و $CB = 4\sqrt{3}$.
لتكن M نقطة من $[BC]$ حيث $BM = \frac{BC}{2}$ ،
المستقيم (Δ) العمودي على (BC) في النقطة M
يقطع $[AC]$ في النقطة H .
1) أحسب الطول MH.
2) أحسب tan $\widehat{AMB}$ و استنتج قيس الزاوية $\widehat{AMB}$ (يمكن استعمال الحاسبة)

**التمرين السادس:** (حسب نموذج 2013)
LOR مثلث قائم في R حيث : RL= 7 cm و RO = 3 cm .
لتكن A نقطة من $[RL]$ حيث RA = 2،
المستقيم (Δ) العمودي على (LR) في النقطة A
يقطع $[OL]$ في النقطة C .
1) أحسب الطول AC.
2) أحسب tan $\widehat{RAO}$ و استنتج قيس الزاوية $\widehat{RAO}$ بالتدوير إلى الدّرجة.

**التمرين الثالث :**
$\frac{RG}{OI} = \frac{RM}{OM}$ , $\frac{RG}{4} = \frac{4}{7}$, RG= $\frac{16}{7}$ = **2.28 cm**
**RG= 2.28 cm**
Tan $\widehat{ORI} = \frac{OI}{OR} = \frac{4}{3}$ = 1.33 tan 1.33 = **53°** **$\widehat{ORI}$ = 53°**

**التمرين الرابع :**
$\frac{BP}{LI} = \frac{PR}{LR}$ , $\frac{BP}{5} = \frac{6}{8}$, BP= $\frac{30}{8}$ = **3.75 cm**
**BP= 3.75 cm**
Tan $\widehat{LPI} = \frac{LI}{LP} = \frac{5}{2}$ = 2.5 tan 2.5 = **68°** **$\widehat{LPI}$ =68°**

**التمرين الخامس:**
$\frac{MH}{BA} = \frac{MC}{BC}$ , $\frac{MH}{4} = \frac{3.45}{6.92}$, MH= $\frac{13.8}{6.92}$ ≅ **2 cm**
**MH ≅ 2 cm**
Tan $\widehat{AMB} = \frac{BA}{BM} = \frac{4}{3.46}$ = 1.15 tan 1.15 = **49°** **$\widehat{AMB}$ = 49°**

**التمرين السادس :**
$\frac{AC}{RO} = \frac{LA}{RL}$ , $\frac{AC}{3} = \frac{5}{7}$, AC= $\frac{15}{7}$ = **2.14 cm**
**AC= 2.14 cm**
Tan $\widehat{RAO} = \frac{AC}{RO} = \frac{3}{2}$ = 1.5 tan 1.5 = **57°** **$\widehat{RAO}$ = 57°**

**التمرين الثالث:** (3 نقط) امتحان شهادة التعليم المتوسط دورة جوان 2008
وحدة الطول المختارة هي السنتيمتر.
ABC مثلث قائم في A حيث : AB= 3 و BC = 5.
1) أنشيء الشكل ثم حدد الطول AC
2) E نقطة من $[AB]$ حيث AE = 1
المستقيم الذي يشمل E و يعامد ( AB ) يقطع ( BC ) في النقطة M
- أوجد BM
- احسب $\cos \widehat{ABC}$ ثم استنتج قيس الزاوية $\widehat{EMB}$ .
(تدوّر النتيجة إلى الوحدة من الدرجة)

**التمرين الأول:** (حسب نموذج 2008)
وحدة الطول المختارة هي السنتيمتر.
WIL مثلث قائم في I حيث : IW= 2 و WL = 4.
1) أنشيء الشكل ثم حدد الطول IL
2) E نقطة من $[IW]$ حيث IE = 1
المستقيم الذي يشمل E و يعامد ( IW ) يقطع ( WL ) في النقطة M
- أوجد طول WM
- احسب $\cos \widehat{IWL}$ ثم استنتج قيس الزاوية $\widehat{EMW}$ .
(تدور النتيجة إلى الوحدة من الدرجة)

**التمرين الثاني:** (حسب نموذج 2008)
وحدة الطول المختارة هي السنتيمتر.
YOU مثلث قائم في Y حيث : YO= 5 و OU = 8.
1) أنشيء الشكل ثم حدد الطول YU
2) E نقطة من $[YO]$ حيث YE = 2
المستقيم الذي يشمل E و يعامد ( YO ) يقطع ( OU ) في النقطة M
- أوجد طول OM
- احسب $\cos \widehat{YOU}$ ثم استنتج قيس الزاوية $\widehat{EMO}$ .
(تدور النتيجة إلى الوحدة من الدرجة)

**التمرين الثالث:** (حسب نموذج 2008)
وحدة الطول المختارة هي السنتيمتر.
SPA مثلث قائم في S حيث : SP= 7 و AP = 12.
1) أنشيء الشكل ثم حدد الطول SA
2) E نقطة من $[SP]$ حيث SE = 3
المستقيم الذي يشمل E و يعامد ( SP ) يقطع ( AP ) في النقطة M
- أوجد طول PM
- احسب $\cos \widehat{APS}$ ثم استنتج قيس الزاوية $\widehat{EMP}$ .
(تدور النتيجة إلى الوحدة من الدرجة)

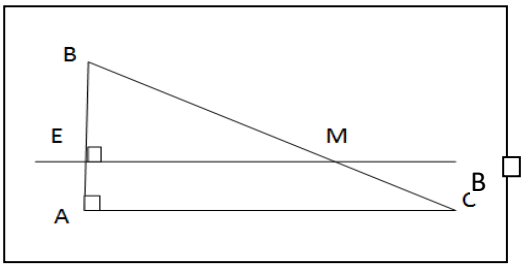
**التمرين الرابع:** (حسب نموذج 2008)
وحدة الطول المختارة هي السنتيمتر.
LON مثلث قائم في L حيث : LO= 4 و ON = 10.
1) أنشيء الشكل ثم حدد الطول NL
2) E نقطة من $[LO]$ حيث LE = 1.5
المستقيم الذي يشمل E و يعامد ( LO ) يقطع ( ON ) في النقطة M
- أوجد طول OM
- احسب $\cos \widehat{LON}$ ثم استنتج قيس الزاوية $\widehat{EMO}$ .
(تدور النتيجة إلى الوحدة من الدرجة)

**الحلول**

**التمرين الأول:**
$IL^2$= 16-4= 12 , IL=$\sqrt{12}$ = **3.46 cm**
$= \frac{WE}{WI}$ / $\frac{WM}{4} = \frac{1}{2}$ / MW = $\frac{4}{2}$ = 2 MW = **2 cm** $\frac{WM}{WL}$
$\cos \widehat{IWL} = \frac{WI}{WL} = \frac{2}{4}$ = 0.5 cos 0.5 = **60°**
180° = 90° + 60° + $\widehat{EMW}$ ° / $\widehat{EMW}$ = 180° -150° = **30°**

**التمرين الثاني :**
$YU^2$= 64-25= 39 , YU=$\sqrt{39}$ = **6.24 cm**
$= \frac{OE}{OY}$ / $\frac{OM}{8} = \frac{3}{5}$ / OM = $\frac{24}{5}$ = 4.8 OM = **4.8 cm** $\frac{OM}{OU}$
$\cos \widehat{YOU} = \frac{OY}{OU} = \frac{5}{8}$ = 0.625 cos 0.625 = **51°**
180° = 90° + 51° + $\widehat{EMB}$ ° / $\widehat{EMB}$ = 180° -141° = **39°**

**حل التمرين :**
**1) انشاء الشكل**




**2) حساب AC**
$AC^2 = BC^2-AB^2$ و منه $AC^2 = 25-9=16$ إذن $AC = \sqrt{16} = 4$

3) **حساب : BM: تطبيقا لنظرية طالس لدينا :**
$\frac{BM}{BC} = \frac{BE}{AB}$ أي $\frac{5 \times 2}{3} = \frac{10}{3}$ = BM = $\frac{BC \times BE}{AB}$
4) **حساب Cos $\widehat{ABC}$**
$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$ = 0.6 و منه $\widehat{ABC} \cong 53°$
نستنتج أن $\widehat{EMB} = 90° - 53° = 37°$ لأن المثلث EMB قائم في E

**التمرين الخامس:** (حسب نموذج 2008)
وحدة الطول المختارة هي السنتيمتر.
GHT مثلث قائم في H حيث : HG= 3 و GT = 7.
1) أنشيء الشكل ثم حدد الطول HT
2) E نقطة من $[HG]$ حيث HE = 1
المستقيم الذي يشمل E و يعامد ( HG ) يقطع ( GT ) في النقطة M
- أوجد طول GM
- احسب $\cos \widehat{HGT}$ ثم استنتج قيس الزاوية $\widehat{EMG}$ .
(تدور النتيجة إلى الوحدة من الدرجة)

**التمرين السادس:** (حسب نموذج 2008)
وحدة الطول المختارة هي السنتيمتر.
FAD مثلث قائم في D حيث : DA= 2 و FA = 4.
1) أنشيء الشكل ثم حدد الطول DF
2) E نقطة من $[DA]$ حيث DE = 1
المستقيم الذي يشمل E و يعامد ( DA ) يقطع ( FA ) في النقطة M
- أوجد طول AM
- احسب $\cos \widehat{FAD}$ ثم استنتج قيس الزاوية $\widehat{EMA}$ .
(تدور النتيجة إلى الوحدة من الدرجة)

**التمرين الثالث :**
$SA^2$= 144-49= 95 , SA=$\sqrt{95}$ = **9.74 cm**
$= \frac{PE}{PS}$ / $\frac{PM}{12} = \frac{4}{7}$ / PM = $\frac{48}{7}$ = 6.85 PM = **6.85 cm** $\frac{PM}{AP}$
$\cos \widehat{APS} = \frac{PS}{AP} = \frac{7}{12}$ = 0.58 cos 0.58 = **54°**
180° = 90° + 54° + $\widehat{EMP}$ ° / $\widehat{EMP}$ = 180° -144° = **36°**

**التمرين الرابع :**
$ON^2$= 100-16= 84 , NL=$\sqrt{84}$ = **9.16 cm**
$= \frac{OE}{OL}$ / $\frac{OM}{10} = \frac{2.5}{4}$ / OM = $\frac{25}{4}$ = 6.25 OM = **6.25 cm** $\frac{OM}{ON}$
$\cos \widehat{LON} = \frac{OL}{ON} = \frac{4}{10}$ = 0.4 cos 0.4 = **66°**
180° = 90° + 66° + $\widehat{EMP}$ ° / $\widehat{EMO}$ = 180° -156° = **24°**

**التمرين الخامس :**
$HT^2$= 49-9= 40 , HT=$\sqrt{40}$ = **6.32 cm**
$= \frac{GE}{GH}$ / $\frac{GM}{7} = \frac{2}{3}$ / GM = $\frac{14}{3}$ = 4.66 GM = **4.66 cm** $\frac{GM}{GT}$
$\cos \widehat{HGT} = \frac{GH}{GT} = \frac{3}{7}$ = 0.42 cos 0.42 = **65°**
180° = 90° + 65° + $\widehat{GME}$ ° / $\widehat{GME}$ = 180° -155° = **25°**

**التمرين السادس :**
$DF^2$= 16-4= 12 , DF=$\sqrt{12}$ = **3.46 cm**
$= \frac{AE}{AD}$ / $\frac{AM}{4} = \frac{1}{2}$ / AM = $\frac{4}{2}$ = 2 AM = **2 cm** $\frac{AM}{AF}$
$\cos \widehat{FAD} = \frac{AD}{AF} = \frac{2}{4}$ = 0.5 cos 0.5 = **60°**
180° = 90° + 60° + $\widehat{EMA}$ ° / $\widehat{EMA}$ = 180° -150° = **30°**

**تمرين يشمل : درس:** حساب المثلثات **+** نظرية طالس **+** نظرية فيتاغورث

**التمرين الثالث:** (3 نقط) امتحان شهادة التعليم المتوسط دورة جوان (2019)
RST مثلث قائم في R حيث : $\sin\widehat{RTS} = 0.8$ و RS = 8 *cm*
1) احسب الطولين ST و TR.
2) لتكن M نقطة من [TR] حيث TM=4 cm ، المستقيم (Δ ) العمودي على (TR ) في النقطة M يقطع ( TS) في النقطة N.
احسب الطول MN بالتدوير إلى الوحدة من السنتيمير.

**التمرين الأول :** ( حسب نموذج 2019)
ABC مثلث قائم في B حيث : $\sin\widehat{BAC} = 0.7$ و BC = 6 *cm*
1) احسب الطولين AC و BA .
2) لتكن M نقطة من [BA] حيث AM=3 cm ، المستقيم (Δ ) العمودي على (BA ) في النقطة M يقطع ( AC) في النقطة N.
احسب الطول MN بالتدوير إلى الوحدة من السنتيمير.

**التمرين الثاني :** ( حسب نموذج 2019)
JAK مثلث قائم في K حيث : $\sin\widehat{AJK} = 0.6$ و KA = 4 *cm*
1) احسب الطولين JA و KJ .
2) لتكن M نقطة من [KJ] حيث JM=3 cm ، المستقيم (Δ ) العمودي على (KJ) في النقطة M يقطع ( JA ) في النقطة N.
احسب الطول MN بالتدوير إلى الوحدة من السنتيمير.

**التمرين الثالث :** ( حسب نموذج 2019)
UVW مثلث قائم في U حيث : $\sin\widehat{WVU} = 0.9$ و WU = 11 *cm*
1) احسب الطولين VW و UV .
2) لتكن M نقطة من [UV] حيث VM=3 cm ، المستقيم (Δ ) العمودي على (UV) في النقطة M يقطع ( VW ) في النقطة N.
احسب الطول MN بالتدوير إلى الوحدة من السنتيمير.

**التمرين الرابع :** ( حسب نموذج 2019)
ROL مثلث قائم في R حيث : $\cos\widehat{RLO} = 0.9$ و RL = 6 *cm*
1) احسب الطولين OL و RO .
2) لتكن M نقطة من [RO] حيث OM=1 cm ، المستقيم (Δ ) العمودي على (RO ) في النقطة M يقطع ( OL) في النقطة N.
احسب الطول MN.

**الحلول**

**التمرين الأول:**
$\sin\widehat{BAC} = \frac{BC}{AC} = 0.7$ AC $= \frac{BC}{0.7} = \frac{6}{0.7} = 8.57 \cong$ **9 cm**
**AC = 9 cm**
$BA^2 = AC^2 - BC^2 = 81-36 = 45$ , $\sqrt{45} = 6.70 \cong$ **7 cm**
**BA = 7 cm**
$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{BA}$ : **MN** $= \frac{AM \times BC}{BA} = \frac{3 \times 6}{7} = \frac{18}{7} =$ **2.57 cm**
**MN = 3 cm**

**التمرين الثاني:**
$\sin\widehat{AJK} = \frac{KA}{JA} = 0.6$ JA $= \frac{KA}{0.6} = \frac{4}{0.6} = 6.66 \cong$ **7 cm**
**JA = 7 cm**
$kJ^2 = JA^2 - KA^2 = 49-16 = 33$ , $\sqrt{33} = 5.74 \cong$ **6 cm**
**KJ = 6 cm**
$\frac{JM}{KJ} = \frac{MN}{KA}$ : **MN** $= \frac{KA \times JM}{KJ} = \frac{4 \times 3}{6} = \frac{12}{6} =$ **2 cm**
**MN = 2 cm**

**حل التمرين :**
**1) حساب الطولين TR , TS**
Sin $\widehat{RTS} = \frac{RS}{ST} = 0.8$ و منه: ST $= \frac{RS}{0.8} = \frac{8}{0.8} = 10$Cm
و بتطبيق نظرية فيثاغورس نجد : $ST^2 = RT^2 + RS^2$
و منه : $RT^2 = ST^2 - RS^2$ و منه : $RT^2 = 36$ و عليه : RT=6 Cm
**2) حساب الطول MN :**
بما أن : ( RT) ⊥ ( RS) و ( RT ) ⊥( MN) فإن : ( MN ) // ( RS )
و بتطبيق نظرية طالس نجد أنّ : $\frac{TM}{TR} = \frac{MN}{RS}$
و بالتعويض نجد : $\frac{4}{6} = \frac{MN}{8}$ و منه MN $= \frac{8 \times 4}{6}$
أي : MN $= \frac{4 \times 8}{6}$ إذن : MN = **5 *cm***

**التمرين الخامس :** ( حسب نموذج 2019)
EFG مثلث قائم في G حيث : $\cos\widehat{EFG} = 0.88$ و GF = 4 *cm*
1) احسب الطولين FE و GE .
2) لتكن M نقطة من [GE] حيث EM=1 cm ، المستقيم (Δ ) العمودي على (GE ) في النقطة M يقطع ( FE) في النقطة N.
احسب الطول MN بالقيمة القربة إلى $10^{-2}$.

**التمرين السادس :** ( حسب نموذج 2019)
TRI مثلث قائم في I حيث : $\cos\widehat{TRI} = 0.60$ و IR = 7 *cm*
1) احسب الطولين TR و IT .
2) لتكن M نقطة من [IT] حيث TM=6 cm ، المستقيم (Δ ) العمودي على (IT ) في النقطة M يقطع ( TR) في النقطة N.
احسب الطول MN بالتدوير إلى الوحدة من السنتيمير.

**الحلول**

**التمرين الثالث:**
$\sin\widehat{WVU} = \frac{UV}{VW} = 0.9$ VW $= \frac{WU}{0.9} = \frac{11}{0.9} = 12.22 \cong$ **13 cm**
**VW = 13 cm**
$UV^2 = VW^2 - WU^2 = 169-121 = 48$ , $\sqrt{48} = 6.92 \cong$ **7 cm**
**UV = 7 cm**
$\frac{VM}{UV} = \frac{MN}{WU}$ : **MN** $= \frac{WU \times VM}{UV} = \frac{11 \times 3}{7} = \frac{33}{7} =$ **4.71 cm**
**MN = 5 cm**

**التمرين الرابع:**
$\cos\widehat{RLO} = \frac{RL}{OL} = 0.9$ OL $= \frac{RL}{0.9} = \frac{6}{0.9} = 6.66 \cong$ **7 cm**
**OL = 7 cm**
$RO^2 = OL^2 - RL^2 = 49-36 = 13$ , $\sqrt{13} = 3.60 \cong$ **4 cm**
**RO = 4 cm**
$\frac{MN}{RL} = \frac{MO}{RO}$ : **MN** $= \frac{MO \times RL}{RO} = \frac{1 \times 6}{4} = \frac{6}{4} =$ **1.5 cm**
**MN = 1.5 cm**

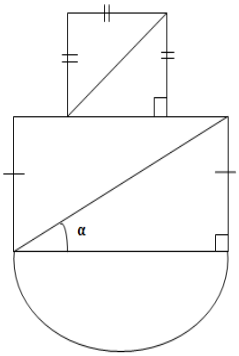
**التمرين الخامس:**
$\cos\widehat{EFG} = \frac{GF}{FE} = 0.88$ FE $= \frac{GF}{0.88} = \frac{4}{0.88} = 4.54 \cong$ **5 cm**
**FE = 5 cm**
$GE^2 = FE^2 - GF^2 = 25-16 = 9$ , $\sqrt{9} =$ **3 cm**
**GE = 3 cm**
$\frac{MN}{GF} = \frac{EM}{GE}$ : **MN** $= \frac{GF \times EM}{GE} = \frac{4 \times 1}{3} = \frac{4}{3} =$ **1.33 cm**
**MN = 1.33 cm**

**التمرين السادس:**
$\cos\widehat{TRI} = \frac{IR}{TR} = 0.6$ TR $= \frac{IR}{0.6} = \frac{7}{0.6} = 11.66 \cong$ **12 cm**
**TR = 12 cm**
$IT^2 = TR^2 - IR^2 = 144-49 = 95$ , $\sqrt{95} = 9.74 \cong$ **10 cm**
**IT = 12 cm**
$\frac{MN}{IR} = \frac{TM}{IT}$ : **MN** $= \frac{IR \times TM}{IT} = \frac{7 \times 6}{10} = \frac{42}{10} =$ **4.2 cm**
**MN = 4 cm**

**مسألة تشمل** : **درس :** جملة معادلتين + **درس :** النسب المثلثية

**المسألة : امتحان شهادة التعليم المتوسط (2010)**

يمثل الشكل المقابل أرضية قاعة حفلات مكونة من مربع و مستطيل و نصف قرص.
طول قطر المستطيل يزيد عن طول قطر المربع بـــ 2m و مجموع طوليهما 28m.
يريد صاحبها تبليطها ببلاط سعر المتر المربع الواحد 800 دينار.




1) احسب طول قطر المربع.
2) احسب طول و عرض المستطيل.
علما أن : $\cos \alpha = 0.8$
3) احسب السعر الإجمالي للبلاط.

**الحـــل :**

**1) حساب قطر المربع و قطر المستطيل**

ليكن $x$ قطر المستطيل و $y$ قطر المربع.
من المعطيات : $\begin{cases} x = y + 2 \ldots\ldots (1) \\ x + y = 28 \ldots\ldots (2) \end{cases}$ بتعويض $x$ بـ $y + 2$ في (2) نجد :
$y + 2) + y = 28$ أي : $2y + 2 = 28$ أي : $2y = 26$ و منه : $y = 13$
و بما أن : $x = y + 2$ فإن : $x = 15$
قطر المستطيل هو **15 متر** و قطر المربع هو **13 متر**.

**2) حساب طول و عرض المستطيل :**

**ا) حساب طول المستطيل :**

لدينا: $\cos \alpha = 0.8$ و نعلم أن $\cos \alpha = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ بالتعويض : $0.8 = \frac{\text{المجاور}}{15}$
أي : المجاور = 15 x 0.8 = 12 المجاور هو طول المستطيل : **12 متر**

**ب) حساب عرض المستطيل :**

بما أن المثلث قائم و حسب نظرية فيثاغورث فإن :
الوتر $^2$ = العرض$^2$ + الطول$^2$ إذن : العرض$^2$ = الوتر$^2$- الطول$^2$
بالتعويض نجد : العرض$^2$ = 15 $^2$- 12 $^2$ و منه العرض$^2$= 225 - 144
العرض$^2$= 225 - 144 = 81 و منه طول العرض هو : **9 متر**

**3) حساب السعر الإجمالي للبلاط :**

**أ) حساب مساحة المربع :**

1-حساب طول الضلع :
ليكن $x$ طول ضلع المربع.
لدينا و حسب نظرية فيثاغورث : $x^2 + 13^2 = x^2$ أي : $2x^2 = 13^2$
$2x^2 = 169$ أي : $x^2 = 84.5$ أي : $x = \sqrt{84.5}$ =
مساحة المربع هي الضلع $^2$ أي $x^2$ = **84.5 m²**

**ب) حساب مساحة المستطيل :**

مساحة المستطيل هي : 9 x 12 = 108 **108 متر²**

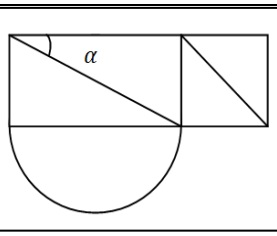
**ج) حساب مساحة نصف القرص :**

$\frac{\pi R^2}{2} = \frac{3.14 \times 6^2}{2}$ = **56.52 m²**
مساحة نصف القرص هي : **56.52 متر²**

**حساب كلفة التبليط :**

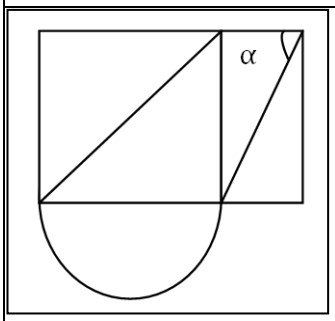
**( 84.5 + 108 + 56.52 ) x 800 = 199 216**
**كلفة التبليط هي : 199 216 دج**

**المسألة الأولى ( حسب نموذج 2010)**




يمثل الشكل المقابل قطعة أرض تتكون مربع و مستطيل ونصف قرص.
طول قطر المستطيل يزيد عن طول قطر المربع بـ 12 متر و يساوي طول قطر المستطيل 3 أضعاف طول قطر المربع.
يريد صاحبها تبليطها ببلاط سعر المتر المربع الواحد 500 دينار.
1) احسب طول قطر المربع و طول قطر المستطيل.
2) احسب طول و عرض المستطيل علما أن : $\sin \alpha = 0.5$
3) احسب السعر الإجمالي للبلاط.

**المسألة الثانية ( حسب نموذج 2010)**




يمثل الشكل المقابل قطعة أرض تتكون مربع و مستطيل ونصف قرص.
طول قطر المربع يزيد عن طول قطر المستطيل بـ 2.5 متر و يساوي طول قطر المربع (1.5) مرة و نصف طول قطر المستطيل.
يريد صاحبها تبليطها ببلاط سعر المتر المربع الواحد 300 دينار.
1) احسب طول قطر المربع و طول قطر المستطيل.
2) احسب طول و عرض المستطيل علما أن : $\sin \alpha = 0.9$
3) احسب السعر الإجمالي للبلاط.

**حلول نماذج مسألة ( دورة 2010) :**

## حـــل المسألة الأولى:

**1) حساب قطر المربع و قطر المستطيل**

ليكن $x$ قطر المستطيل و $y$ قطر المربع.
من المعطيات : $\begin{cases} x = y + 12 \ldots\ldots (1) \\ x = 3\,y \ldots\ldots (2) \end{cases}$ بتعويض $x$ بـ $3y$ في (1) نجد :
$3y = y + 12$ أي : $2y = 12$ أي : $y = 6$
و بما أن : $x = y + 12$ فإن : $x = 18$
قطر المستطيل هو **18 متر** و قطر المربع هو **6 متر**.

**2) حساب طول و عرض المستطيل :**

**ا) حساب عرض المستطيل :**
لدينا: $\sin \alpha = 0.5$ و نعلم أن $\sin \alpha = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ بالتعويض : $0.5 = \frac{\text{المقابل}}{18}$
أي : المقابل = 18 x 0.5 = 9 المقابل هو عرض المستطيل : **9 متر**

**ب) حساب طول المستطيل :**
بما أن المثلث قائم و حسب نظرية فيثاغورث فإن :
الوتر $^2$ = العرض$^2$ + الطول$^2$ إذن : الطول$^2$ = الوتر$^2$- العرض$^2$
بالتعويض نجد : الطول$^2$ = 18 $^2$- 9 $^2$ و منه الطول$^2$= 324 - 81
الطول$^2$= 243 أي : الطول= $\sqrt{243}$ =15.58
و منه طول المستطيل هو : **15.58 متر**

**3) حساب السعر الإجمالي للبلاط :**

**أ) حساب مساحة المربع :**
نلاحظ من الشكل أن طول **عرض** المستطيل هو طول **ضلع** المربع.
مساحة المربع هي الضلع $^2$ أي **81 m²** = $9^2$
مساحة المربع هي **81** متر$^2$

**ب) حساب مساحة المستطيل :**
9 x 15.58 = 140.22
مساحة المستطيل هي : **140.22 متر²**

**ج) حساب مساحة نصف القرص :**
$\frac{\pi R^2}{2} = \frac{3.14 \times 7.79^2}{2} = \frac{3.14 \times 60.68}{2} = \frac{190.53}{2} =$ **95.26 m²**
مساحة نصف القرص هي : **95.26 متر²**

**حساب كلفة التبليط :**
**( 81 + 140.22 + 95.26) x 500 = 158 240**
**كلفة التبليط هي : 240 158 دج**

## حـــل المسألة الثانية:

**1) حساب قطر المربع و قطر المستطيل**

ليكن $x$ قطر المربع و $y$ قطر المستطيل.
من المعطيات : $\begin{cases} x = y + 2.5 \ldots\ldots (1) \\ x = 1.5\,y \ldots\ldots (2) \end{cases}$ بتعويض $x$ بـ $y + 2.5$ في (2) نجد:
$y + 2.5 = 1.5y$ أي : $y - 1.5\,y = -2.5$ أي : $-0.5\,y = -2.5$
$y = \frac{2.5-}{1.5-}$ و منه : $y = 5$
و بما أن : $x = y + 2.5$ فإن : $x = 7.5$
قطر المستطيل هو **5 متر** و قطر المربع هو **7.5 متر**.

**2) حساب طول و عرض المستطيل :**

**ا) حساب طول المستطيل :**
لدينا: $\sin \alpha = 0.9$ و نعلم أن $\sin \alpha = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ بالتعويض : $0.9 = \frac{\text{المقابل}}{5}$
أي : المقابل = 5 x 0.9 = 4.5 المقابل هو طول المستطيل : **4.5 متر**

**ب) حساب عرض المستطيل :**
بما أن المثلث قائم و حسب نظرية فيثاغورث فإن :
الوتر $^2$ = العرض$^2$ + الطول$^2$ إذن : العرض$^2$ = الوتر$^2$- الطول$^2$
بالتعويض نجد : العرض$^2$ = 5 $^2$- 4.5 $^2$ و منه العرض$^2$= 25 – 20.25
العرض$^2$= 4.75 أي العرض =$\sqrt{4.75}$ = **2.17**
و منه العرض هو : **2.17 متر**

**3) حساب السعر الإجمالي للبلاط :**

**أ) حساب مساحة المربع :**
نلاحظ من الشكل أن طول المستطيل هو طول **ضلع** المربع.
مساحة المربع هي الضلع $^2$ أي **20.25 m²** = 4.5 $^2$
مساحة المربع هي **20.25** متر$^2$

**ب) حساب مساحة المستطيل :**
4.5 x 2.17 = 9.76
مساحة المستطيل هي : **9.76 متر²**

**ج) حساب مساحة نصف القرص :**
$\frac{\pi R^2}{2} = \frac{3.14 \times 2.25^2}{2} = \frac{3.14 \times 5.06}{2} = \frac{15.88}{2} =$ **7.94 m²**
مساحة نصف القرص هي : **7.94 متر²**

**حساب كلفة التبليط :**
**( 20.25 + 9.76 + 7.94) x 300 = 11 385**
**كلفة التبليط هي : 385 11 دج**

**التمرين الرابع :** (3.5 نقاط)امتحان شهادة التعليم المتوسط (2013)
المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$ .
1) علّم النقط : $A$ (2, 0) , $B$(-4, 3) , $C$ (5, 3)
2) احسب إحداثيتي الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ثم الطّول AB .
3) عيّن النقطة D صورة النقطة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ ثمّ أحسب إحداثيتي النقطة D.
4) أوجد إحداثيتي M نقطة تقاطع المستقيمين ( AD) و ( BC).

**التمرين الأول :** حسب نموذج (2013)
المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$ .
1) علّم النقط : $A$ (-2, -3) , $B$(-2, 1) , $C$ (2, 0)
2) احسب إحداثيتي الشعاع $\overrightarrow{BA}$ ثم الطّول BA .
3) عيّن النقطة D صورة النقطة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BA}$ ثمّ أحسب إحداثيتي النقطة D.
4) أوجد إحداثيتي M نقطة تقاطع المستقيمين ( AC) و ( BD).

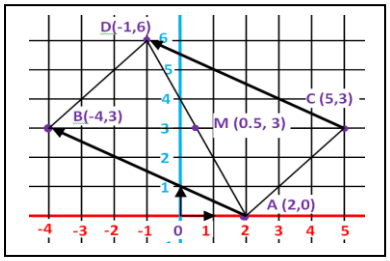
**التمرين الثاني :** حسب نموذج (2013)
المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$ .
1) علّم النقط : $P$ (-2, 1) , $C$(2, -2) , $T$ (-3, -2)
2) احسب إحداثيتي الشعاع $\overrightarrow{TC}$ ثم الطّول $[\mathbf{TC}]$ .
3) عيّن النقطة A صورة النقطة P بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{TC}$ ثمّ أحسب إحداثيتي النقطة A.
4) أوجد إحداثيتي M نقطة تقاطع المستقيمين ( TA) و ( PC).

**التمرين الثالث :** حسب نموذج (2013)
المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$ .
1) علّم النقط : $R$ (2, 1) , $A$(1, 4) , $B$ (-5, 4)
2) احسب إحداثيتي الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ثم الطّول $[\mathbf{AB}]$ .
3) عيّن النقطة E صورة النقطة R بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ ثمّ أحسب إحداثيتي النقطة E.
4) أوجد إحداثيتي M نقطة تقاطع المستقيمين ( BR) و ( EA).

**التمرين الرابع :** حسب نموذج (2013)
المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$ .
1) علّم النقط : $E$ (-4, 0) , $F$(-1, 0) , $A$ (-3, 4)
2) احسب إحداثيتي الشعاع $\overrightarrow{FA}$ ثم الطّول $[\mathbf{FA}]$ .
3) عيّن النقطة C صورة النقطة E بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{FA}$ ثمّ أحسب إحداثيتي النقطة C.
4) أوجد إحداثيتي M نقطة تقاطع المستقيمين ( CF) و ( EA).

**التمرين الخامس :** حسب نموذج (2013)
المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$ .
1) علّم النقط : $T$ (-1, -2) , $R$(7, 3) , $F$ (2, 3)
2) احسب إحداثيتي الشعاع $\overrightarrow{FT}$ ثم الطّول $[\mathbf{FT}]$ .
3) عيّن النقطة i صورة النقطة R بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{FT}$ ثمّ أحسب إحداثيتي النقطة i.
4) أوجد إحداثيتي M نقطة تقاطع المستقيمين ( Fi) و ( TR).

**الحل التمرين الرابع :**




**1- تعليم النقط :**

**2- حساب إحداثيتي الشعاع $\overrightarrow{AB}$**
$\overrightarrow{AB}$ $\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}xB-xA\\yB-yA\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-4-2)\\3-0)\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}$ و منه : $\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}$

**3- حساب طول** $[AB]$ :
$[\mathbf{AB}]=\sqrt{(\boldsymbol{xB}-\boldsymbol{xA})^2+(\boldsymbol{yB}-\boldsymbol{yA})^2}=$
$\sqrt{(-6)^2+(3)^2}=\sqrt{45}=\sqrt{9x5}=\sqrt{9}x\sqrt{5}=3\sqrt{5}$ $\quad [\mathbf{AB}]=3\sqrt{5}$

**4- حساب إحداثيتي D :**

بما أن **D** هي صورة **C** بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$
* فإن الشعاعين $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AB}$ متساويين $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$
* و بما أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ فإن لهما نفس المركبتين

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}xD-xC\\yD-yC\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

إذن $\begin{cases}xD-xC=-6\\yD-yC=3\end{cases}$ بالتعويض $\begin{cases}xD-5=-6\\yD-3=3\end{cases}$

و منه : $\begin{cases}xD=\mathbf{-1}\\yD=\mathbf{6}\end{cases}$ إحداثيتي **D** هي **D (−1 , 6)**

**5-** حساب إحداثيتي **M** نقطة تقاطع $[AD]$ و $[BC]$
حساب منتصف $[BC]$

M $=\frac{xB+xC}{2}=\frac{-4+5}{2}=\frac{1}{2}=$ **0.5** , $\boldsymbol{x}$**M = 0.5**$x$

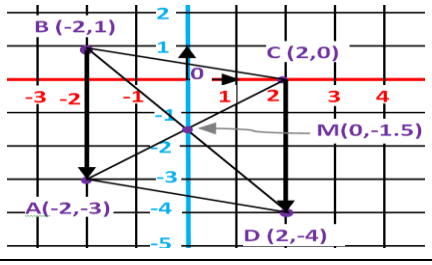
M $=\frac{yB+yC}{2}=\frac{3+3}{2}=\frac{6}{2}=$ **3** , $\boldsymbol{y}$**M = 3**$y$

إحداثيتي **M** هي : **M ( 0.5, 3)**

**التمرين السادس :** حسب نموذج (2013)
المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$ .
1) علّم النقط : $E$ (-1, -3) , $i$(7, -4) , $L$ (3, -1)
2) احسب إحداثيتي الشعاع $\overrightarrow{Li}$ ثم الطّول $[\mathbf{Li}]$ .
3) عيّن النقطة K صورة النقطة E بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{Li}$ ثمّ أحسب إحداثيتي النقطة K.
4) أوجد إحداثيتي M نقطة تقاطع المستقيمين ( Ei) و ( LK).

## حل التمرين الأول :

**1- تعليم النقاط :**




**2- حساب إحداثيتي الشعاع $\overrightarrow{BA}$**

$\overrightarrow{BA}$ $\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$: ومنه $\begin{pmatrix}xA-xB\\yA-yB\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2-(-2)\\-3-1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-2+2\\-4\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BA}$

**3- حساب طول [BA] :**

$[BA]=\sqrt{(xA-xB)^2+(yA-yB)^2}=$

$\sqrt{(0)^2+(-4)^2}=\sqrt{16}=4$ $[AB]=4$

**4- حساب إحداثيتي D :**

بما أن **D** هي صورة **C** بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BA}$

* فإن الشعاعين $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{BA}$ متساويين $=\overrightarrow{CD}\,\overrightarrow{BA}$

* و بما أن $=\overrightarrow{CD}\,\overrightarrow{BA}$ فإن لهما نفس الإحداثيتي.

$\overrightarrow{CD}$ $\begin{pmatrix}xD-xC\\yD-yC\end{pmatrix}=\overrightarrow{BA}$ $\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{BA}$ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\overrightarrow{CD}$ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

إذن $\begin{cases}xD-xC=0\\yD-yC=-4\end{cases}$ بالتعويض $\begin{cases}xD-2=0\\yD-0=-4\end{cases}$

و منه : $\begin{cases}xD=2\\yD=-4\end{cases}$ إحداثيتي **D** هي $D\,(2,-4)$

**5- حساب إحداثيتي M نقطة تقاطع $[AC]$ و $[BD]$**

حساب منتصف [AC] :

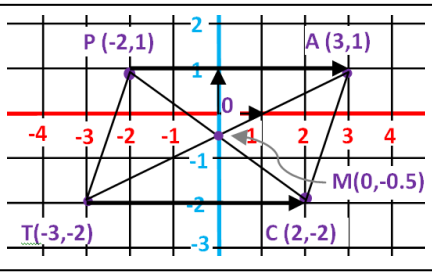
$M=\frac{xA+xC}{2}=\frac{-2+2}{2}=\frac{0}{2}=0$ , $xM=0x$

$M=\frac{yA+yC}{2}=\frac{-3+0}{2}=-\frac{-3}{2}=1.5$ , $yM=-1.5\ y$

إحداثيتي **M** هي : **M ( 0, -1.5)**

## حل التمرين الثاني :

**1- تعليم النقاط :**




**2- حساب إحداثيتي الشعاع $\overrightarrow{TC}$**

$\overrightarrow{TC}$ $\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$: ومنه $\begin{pmatrix}xc-xt\\yc-yt\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2-(-3)\\-2-(-2)\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2+3\\-2+2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{TC}$

**3- حساب طول [TC] :**

$[TC]=\sqrt{(xC-xT)^2+(yC-yT)^2}=$

$\sqrt{(5)^2+(0)^2}=\sqrt{25}=5$ $[TC]=5$

**4- حساب إحداثيتي A :**

بما أن **A** هي صورة **P** بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{TC}$

* فإن الشعاعين $\overrightarrow{PA}$ و $\overrightarrow{TC}$ متساويين $=\overrightarrow{PA}\,\overrightarrow{TC}$

* و بما أن $=\overrightarrow{PA}\,\overrightarrow{TC}$ فإن لهما نفس الإحداثيتي.

$\overrightarrow{PA}$ $\begin{pmatrix}xA-xP\\yA-yP\end{pmatrix}=\overrightarrow{TC}$ $\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{PA}$ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\overrightarrow{TC}$ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

إذن $\begin{cases}xA-xP=5\\yA-yP=0\end{cases}$ بالتعويض $\begin{cases}xA-(-2)=5\\yA-1=0\end{cases}$

و منه : $\begin{cases}xA=3\\yA=1\end{cases}$ احداثيتي P هي $A\,(3,1)$

**5- حساب إحداثيتي M نقطة تقاطع $[PC]$ و $[TA]$**

حساب منتصف [PC] :

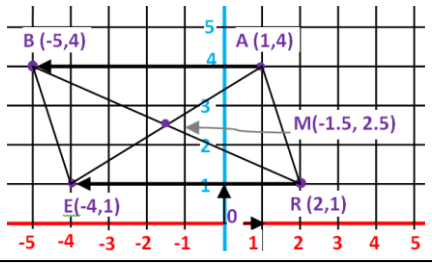
$M=\frac{xP+xC}{2}=\frac{-2+2}{2}=\frac{0}{2}=0$ , $xM=0x$

$M=\frac{yP+yC}{2}=\frac{1-2}{2}=-\frac{1}{2}=-0.5$ , $yM=-0.5\ y$

إحداثيتي **M** هي : **M ( 0, - 0.5)**

## حل التمرين الثالث :

**1- تعليم النقاط :**




**2- حساب إحداثيتي الشعاع $\overrightarrow{AB}$**

$\overrightarrow{AB}$ $\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}$: ومنه $\begin{pmatrix}xB-xA\\yB-yA\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-5-1\\4-4\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}$

**3- حساب طول [AB] :**

$[AB]=\sqrt{(xB-xA)^2+(yB-yA)^2}=$

$\sqrt{(-6)^2+(0)^2}=\sqrt{36}=6$ $[AB]=6$

**4- حساب إحداثيتي E :**

بما أن **E** هي صورة **R** بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$

* فإن الشعاعين $\overrightarrow{RE}$ و $\overrightarrow{AB}$ متساويين $=\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{RE}$

* و بما أن $=\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{RE}$ فإن لهما نفس الإحداثيتي.

$\overrightarrow{RE}$ $\begin{pmatrix}xE-xR\\yE-yR\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}$ $\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{RE}$ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}$ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

إذن $\begin{cases}xE-xR=-6\\yE-yR=0\end{cases}$ بالتعويض $\begin{cases}xE-2=-6\\yE-1=0\end{cases}$

و منه : $\begin{cases}xE=-4\\yE=1\end{cases}$ إحداثيتي **E** هي $E\,(-4,1)$

**5- حساب إحداثيتي M نقطة تقاطع $[BR]$ و $[EA]$**

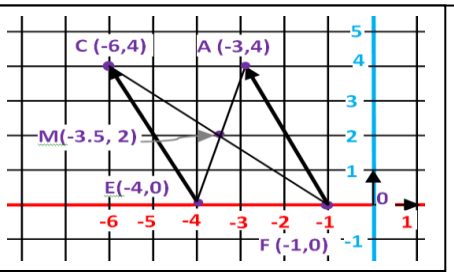
حساب منتصف [BR] :

$M=\frac{xB+xR}{2}=\frac{-5+2}{2}=\frac{-3}{2}=-1.5$ , $xM=-1.5x$

$M=\frac{yB+yR}{2}=\frac{4+1}{2}=\frac{5}{2}=2.5$ , $yM=2.5\ y$

إحداثيتي **M** هي : **M ( -1.5, 2.5)**

## حل التمرين الرابع :




**1- تعليم النقاط :**

**2- حساب إحداثيتي الشعاع $\overrightarrow{FA}$**

$\overrightarrow{FA}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ : ومنه $\begin{pmatrix}xA-xF\\yA-yF\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3-(-1)\\4-0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3+1\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}\overrightarrow{FA}$

**3- حساب طول $[FA]$ :**

$[FA]=\sqrt{(xA-xF)^2+(yA-yF)^2}=$

$\sqrt{(-2)^2+(4)^2}=\sqrt{20}=4.47\approx 4.5$ $[FA]\approx 4.5$

**4- حساب إحداثيتي C :**

بما أن C هي صورة E بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{FA}$

* فإن الشعاعين $\overrightarrow{EC}$ و $\overrightarrow{FA}$ متساويين $=\overrightarrow{EC}\,\overrightarrow{FA}$

* و بما أن $=\overrightarrow{EC}\,\overrightarrow{FA}$ فإن لهما نفس الإحداثيتي.

$\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}xC-xE\\yC-yE\end{pmatrix}=\overrightarrow{FA}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{FA}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

إذن $\begin{cases}xC-xE=-2\\yC-yE=4\end{cases}$ بالتعويض $\begin{cases}xC-(-4)=-2\\yC-0=4\end{cases}$

و منه : $\begin{cases}xC=-6\\yC=4\end{cases}$ إحداثيتي C هي **C (-6, 4)**

**5- حساب إحداثيتي M نقطة تقاطع $[CF]$ و $[EA]$**

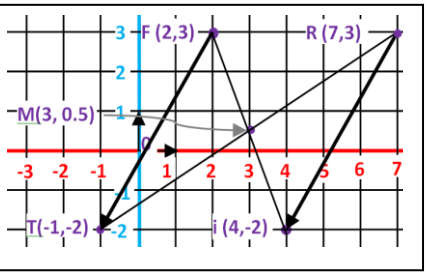
حساب منتصف [EA] :

$M=\frac{xE+xA}{2}=\frac{-4-3}{2}=\frac{-7}{2}=$ **-3.5** , $xM=-3.5x$

$M=\frac{yE+yA}{2}=\frac{0+4}{2}=-\frac{4}{2}=$ **2** , $yM=2y$

إحداثيتي M هي : **M ( -3.5, 2)**

## حل التمرين الخامس :




**1- تعليم النقاط :**

**2- حساب إحداثيتي الشعاع $\overrightarrow{FT}$**

$\overrightarrow{FT}\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$ : ومنه $\begin{pmatrix}xT-xF\\yT-yF\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1-2\\-2-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}\overrightarrow{FT}$

**3- حساب طول [FT] :**

$[FT]=\sqrt{(xT-xF)^2+(yT-yF)^2}=$

$\sqrt{(-3)^2+(-5)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}\approx 5.8$ $[FT]\approx 5.8$

**4- حساب إحداثيتي i :**

بما أن i هي صورة R بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{FT}$

* فإن الشعاعين $\overrightarrow{Ri}$ و $\overrightarrow{FT}$ متساويين $=\overrightarrow{Ri}\,\overrightarrow{FT}$

* و بما أن $=\overrightarrow{Ri}\,\overrightarrow{FT}$ فإن لهما نفس الإحداثيتي.

$\overrightarrow{Ri}\begin{pmatrix}xi-xR\\yi-yR\end{pmatrix}=\overrightarrow{FT}\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{FT}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\overrightarrow{Ri}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

إذن $\begin{cases}xi-xR=-3\\yi-yR=-5\end{cases}$ بالتعويض $\begin{cases}xi-7=-3\\yi-3=-5\end{cases}$

و منه : $\begin{cases}xi=4\\yi=-2\end{cases}$ إحداثيتي i هي **i (4,-2)**

**5- حساب إحداثيتي M نقطة تقاطع $[FI]$ و $[TR]$**

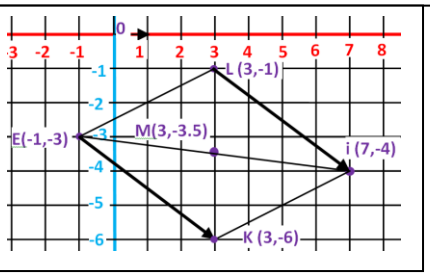
حساب منتصف [TR] :

$M=\frac{xT+xR}{2}=\frac{-1+7}{2}=\frac{6}{2}=$ **3** , $xM=3x$

$M=\frac{yT+yR}{2}=\frac{-2+3}{2}=\frac{1}{2}=$ **0.5** , $yM=0.5\ y$

إحداثيتي M هي : **M ( 3, 0.5)**

## حل التمرين السادس :




**1- تعليم النقاط :**

**2- حساب إحداثيتي الشعاع $\overrightarrow{Li}$**

$\overrightarrow{Li}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ : ومنه $\begin{pmatrix}xi-xL\\yi-yL\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7-3\\-4-(-1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-4+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\overrightarrow{Li}$

**3- حساب طول [Li] :**

$[Li]=\sqrt{(xi-xL)^2+(yi-yL)^2}=$

$\sqrt{(4)^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ $[Li]=5$

**4- حساب إحداثيتي K :**

بما أن K هي صورة E بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{Li}$

* فإن الشعاعين $\overrightarrow{EK}$ و $\overrightarrow{Li}$ متساويين $=\overrightarrow{EK}\,\overrightarrow{Li}$

* و بما أن $=\overrightarrow{EK}\,\overrightarrow{Li}$ فإن لهما نفس الإحداثيتي.

$\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix}xK-xE\\yK-yE\end{pmatrix}=\overrightarrow{Li}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\overrightarrow{Li}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

إذن $\begin{cases}xK-xE=4\\yK-yE=-3\end{cases}$ بالتعويض $\begin{cases}xK-(-1)=4\\yK-(-3)=-3\end{cases}$

و منه : $\begin{cases}xK=3\\yK=-6\end{cases}$ إحداثيتي K هي $\mathbf{K}\,(3,-6)$

**5- حساب إحداثيتي M نقطة تقاطع $[Ei]$ و $[LK]$**

حساب منتصف [Ei] :

$M=\frac{xE+xi}{2}=\frac{-1+7}{2}=\frac{6}{2}=$ **3** , $xM=3x$

$M=\frac{yE+yi}{2}=\frac{-3-4}{2}=\frac{-7}{2}=$ **-3.5** , $yM=-3.5y$

إحداثيتي M هي : **M ( 3, -3.5)**

**التمرين الرابع : ( 04 نقاط ) امتحان شهادة التعليم المتوسط (2020)**

المستوي مزوّد بمعلم متعامد و متجانس ( O ; $\overrightarrow{OI}$ ; $\overrightarrow{OJ}$ )

1) علّم النقط A (1 ; 2) ، B( 5 ; -2) و C (-1 ; -3)

2) احسب مركّبتي الشعاع $\overrightarrow{BC}$ ثم استنتج الطول BC .

3) احسب احداثيتي النقطة M منتصف القطعة [AC] .

4) أوجد احداثيتي النقطة D حيث يكون $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BM}$ ثم استنتج نوع الرباعي ABCD .

**التمرين الأول :** حسب نموذج (2020)

المستوي مزوّد بمعلم متعامد و متجانس ( O ; $\overrightarrow{OI}$ ; $\overrightarrow{OJ}$ )

1) علّم النقط N (-1 ; 3) ، G ( 4 ; 4) و E (5 ; 1)

2) احسب مركّبتي الشعاع $\overrightarrow{EG}$ ثم استنتج الطول EG .

3) احسب احداثيتي النقطة M منتصف القطعة [NE] .

4) أوجد احداثيتي النقطة A حيث يكون $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{GM}$ ثم استنتج نوع الرباعي ANGE .

**التمرين الثاني :** حسب نموذج (2020)

المستوي مزوّد بمعلم متعامد و متجانس ( O ; $\overrightarrow{OI}$ ; $\overrightarrow{OJ}$ )

1) علّم النقط G (4 ; 1) ، E ( 3 ; -3) و P (-2 ; -3)

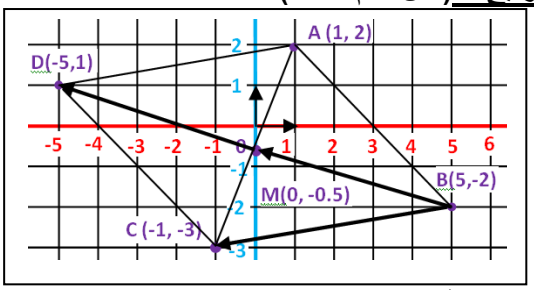
2) احسب مركّبتي الشعاع $\overrightarrow{EG}$ ثم استنتج الطول EG .

3) احسب احداثيتي النقطة M منتصف القطعة [PG] .

4) أوجد احداثيتي النقطة A حيث يكون $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{EM}$ ثم استنتج نوع الرباعي PAGE .

## حل التمرين الرابع : (ا.ش.ت.م 2020)

**1- تعليم النقاط :**




**2- حساب مركبتي الشعاع $\overrightarrow{BC}$**

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}xC-xB\\yC-yB\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1-5\\-3-(-2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\-3+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\-1\end{pmatrix}$ و منه : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-6\\-1\end{pmatrix}$

**استنتاج طول [BC] :**

$[BC]=\sqrt{(-6)^2+(-1)^2}=\sqrt{36+1}=\sqrt{37}=6.08$ $[BC]=6.08$

**3- ايجاد إحداثيتي النقطة M منتصف القطعة [AC] :**

$M=\frac{xA+xC}{2}=\frac{1+(-1)}{2}=\frac{1-1}{2}=\frac{0}{2}=0$ , $xM=0x$

$M=\frac{yA+yC}{2}=\frac{2+(-3)}{2}=\frac{2-3}{2}=-\frac{-1}{2}=-0.5$ , $yM=-0.5\ y$

إحداثيتي M هي : M ( 0 , -0.5 )

**4- ايجاد احداثيتي النقطة D :**

بما $\overrightarrow{MD}\overrightarrow{BM}=$ فإن لهما نفس الإحداثيتي.

$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}xM-xB\\yM-yB\end{pmatrix}=\overrightarrow{MD}\begin{pmatrix}xD-xM\\yD-yM\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\overrightarrow{MD}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

**أ- حساب احداثيتي $\overrightarrow{BM}$ :**

$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}xM-xB\\yM-yB\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-5\\-0.5-(-2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\-0.5+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\1.5\end{pmatrix}$

**ب- حساب احداثيتي $\overrightarrow{MD}$ :**

**مما سبق :** $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}-5\\1.5\end{pmatrix}=\overrightarrow{MD}\begin{pmatrix}xD-xM\\yD-yM\end{pmatrix}$

أي : $\begin{cases}xD-xM=-5\\yD-yM=1.5\end{cases}$ بالتعويض $\begin{cases}xD-0=-5\\yD-(-0.5)=1.5\end{cases}$

و منه : $\begin{cases}xD=-5\\yD=1\end{cases}$ احداثيتي D هي $D\ (-5\ ,\ 1)$

**استنتاج نوع الرباعي ABCD :**

بما أن القطران [AC] و [BD] يتقاطعان في النقطة M

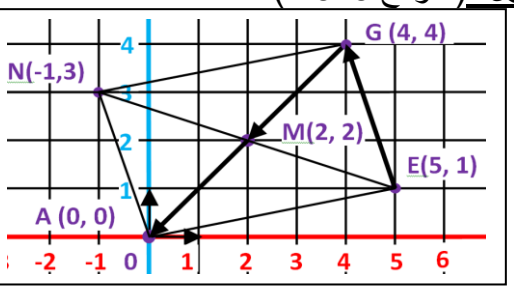
و بما أن النقطة M هي منتصف القطر [AC] ( من المعطيات )

و بما أن $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MD}$ فإن النقطة M هي منتصف القطعة [BD]

و منه فإن القطران متناصفان إذن الرباعي ABCD متوازي الأضلاع.

## حل التمرين الأول : (نموذج 2020 )

**1- تعليم النقاط :**




**2- حساب مركبتي الشعاع $\overrightarrow{EG}$**

$\begin{pmatrix}xG-xE\\yG-yE\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4-5\\4-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\overrightarrow{EG}$

و منه : $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

**استنتاج طول [EG] :**

$[EG]=\sqrt{(-1)^2+(3)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}=3.16$ $[EG]=3.16$

**3- ايجاد إحداثيتي النقطة M منتصف القطعة [NE] :**

$M=\frac{xN+xE}{2}=\frac{-1+5}{2}=\frac{4}{2}=2$ , $xM=2x$

$M=\frac{yN+yE}{2}=\frac{3+1}{2}=-\frac{4}{2}=2$ , $yM=2\ y$

إحداثيتي M هي : M ( 2, 2)

**4- ايجاد احداثيتي النقطة A :**

بما $\overrightarrow{MA}\overrightarrow{GM}=$ فإن لهما نفس الإحداثيتي.

$\overrightarrow{GM}\begin{pmatrix}xM-xG\\yM-yG\end{pmatrix}=\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}xA-xM\\yA-yM\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{GM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

**أ- حساب احداثيتي $\overrightarrow{GM}$ :**

$\overrightarrow{GM}\begin{pmatrix}xM-xG\\yM-yG\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-4\\2-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$

**ب- حساب احداثيتي $\overrightarrow{MA}$ :**

**مما سبق :** $\overrightarrow{GM}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}=\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}xA-xM\\yA-yM\end{pmatrix}$

أي : $\begin{cases}xA-xM=-2\\yA-yM=-2\end{cases}$ بالتعويض $\begin{cases}xA-2=-2\\yA-2=-2\end{cases}$

و منه : $\begin{cases}xA=0\\yA=0\end{cases}$ احداثيتي A هي $A\ (0\ ,\ 0)$

**استنتاج نوع الرباعي ANGE :**

بما أن القطران [NE] و [GA] يتقاطعان في النقطة M

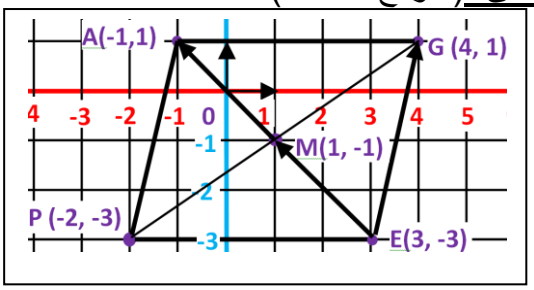
و بما أن النقطة M هي منتصف القطر [NE] ( من المعطيات )

و بما أن $\overrightarrow{MA}\ \overrightarrow{GM}=$ فإن النقطة M هي منتصف القطعة [GA]

و منه فإن القطران متناصفان إذن الرباعي ANGE متوازي الأضلاع.

## حل التمرين الثاني : (نموذج 2020 )

**1- تعليم النقاط :**




**2- حساب مركبتي الشعاع $\overrightarrow{EG}$**

$\begin{pmatrix}xG-xE\\yG-yE\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4-3\\1-(-3)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1+3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\overrightarrow{EG}$

و منه : $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

**استنتاج طول [EG] :**

$[EG]=\sqrt{(1)^2+(4)^2}=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}=4.12$ $[EG]=4.12$

**3- ايجاد إحداثيتي النقطة M منتصف القطعة [PG] :**

$M=\frac{xP+xG}{2}=\frac{-2+4}{2}=\frac{2}{2}=1$ , $xM=1x$

$M=\frac{yP+yG}{2}=\frac{-3+1}{2}=-\frac{-2}{2}=-1$ , $yM=-1\ y$

إحداثيتي M هي : M ( 1 , -1)

**4- ايجاد احداثيتي النقطة A :**

بما $\overrightarrow{MA}\overrightarrow{EM}=$ فإن لهما نفس الإحداثيتي.

$\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix}xM-xE\\yM-yE\end{pmatrix}=\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}xA-xM\\yA-yM\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

**أ- حساب احداثيتي $\overrightarrow{EM}$ :**

$\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix}xM-xE\\yM-yE\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-3\\-1-(-3)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-1+3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$

**ب- حساب احداثيتي $\overrightarrow{MA}$ :**

**مما سبق :** $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}=\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}xA-xM\\yA-yM\end{pmatrix}$

أي : $\begin{cases}xA-xM=-2\\yA-yM=2\end{cases}$ بالتعويض $\begin{cases}xA-1=-2\\yA-(-1)=2\end{cases}$

و منه : $\begin{cases}xA=-1\\yA=1\end{cases}$ احداثيتي A هي $A\ (-1\ ,\ 1)$

**استنتاج نوع الرباعي PAGE :**

بما أن القطران [EA] و [PG] يتقاطعان في النقطة M

و بما أن النقطة M هي منتصف القطر [PG] ( من المعطيات )

و بما أن $\overrightarrow{MA}\ \overrightarrow{EM}=$ فإن النقطة M هي منتصف القطعة [EA]

و منه فإن القطران متناصفان إذن الرباعي PAGE متوازي الأضلاع.

**التمرين الرابع** : (3 نقاط) امتحان شهادة التعليم المتوسط (2014)
المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$
1) علّم النقط : $A(-2,-3)$ ، $B(4,1)$ ، $C(2,4)$
2) أ) أعط القيمة المضبوطة للطول $AB$.
ب) علما أنّ : $AC=\sqrt{65}$ و $BC=\sqrt{13}$ ،
بيّن أنّ المثلث ABC قائم.
3) أنشيء النقطة E صورة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$ .
أثبت أنّ $ABCE$ مستطيل.

**التمرين الأول** : ( حسب نموذج 2014)
المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$
1) علّم النقط : $A(2,6)$ ، $B(2,1)$ ، $D(0,5)$
2) أ) أعط القيمة المضبوطة للطول $AB$.
ب) علما أنّ : $DA=\sqrt{5}$ و $DB=\sqrt{20}$ ،
بيّن أنّ المثلث DAB قائم.
3) أنشيء النقطة C صورة B بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{DA}$ .
أثبت أنّ $ACBD$ مستطيل.

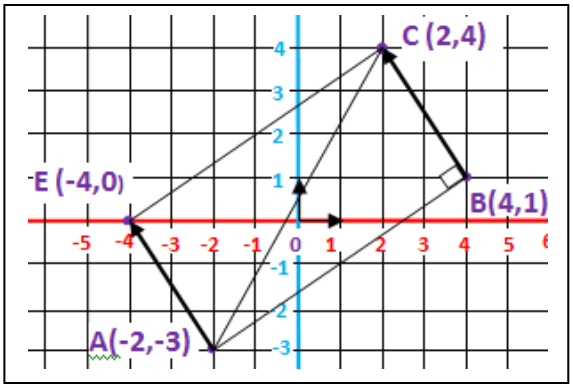
**التمرين الثاني** : ( حسب نموذج 2014)
المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$
1) علّم النقط : $A(-4,3)$ ، $C(1,-2)$ ، $D(-5,1)$
2) أ) أعط القيمة المضبوطة للطول $AC$.
ب) علما أنّ : $DA=\sqrt{5}$ و $DC=\sqrt{45}$ ،
بيّن أنّ المثلث ACD قائم.
3) أنشيء النقطة B صورة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{DA}$ .
أثبت أنّ $ABCD$ مستطيل.

**التمرين الثالث** : ( حسب نموذج 2014)
المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$
1) علّم النقط : $A(-5,2)$ ، $B(3,4)$ ، $D(-2,7)$
2) أ) أعط القيمة المضبوطة للطول $DA$.
ب) علما أنّ : $AB=\sqrt{68}$ و $DB=\sqrt{34}$ ،
بيّن أنّ المثلث ADB قائم.
3) أنشيء النقطة C صورة B بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{DA}$ .
أثبت أنّ $ADBC$ مربع.

**التمرين الرابع** : ( حسب نموذج 2014)
المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$
1) علّم النقط : $A(2,6)$ ، $B(-2,-1)$ ، $D(-4,3)$
2) أ) أعط القيمة المضبوطة للطول $BA$.
ب) علما أنّ : $DB=\sqrt{20}$ و $DA=\sqrt{45}$ ،
بيّن أنّ المثلث DAB قائم.
3) أنشيء النقطة C صورة B بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{DA}$ .
أثبت أنّ $DACB$ مستطيل.

**الحـــــــل:**

**1) تعليم النقط :**



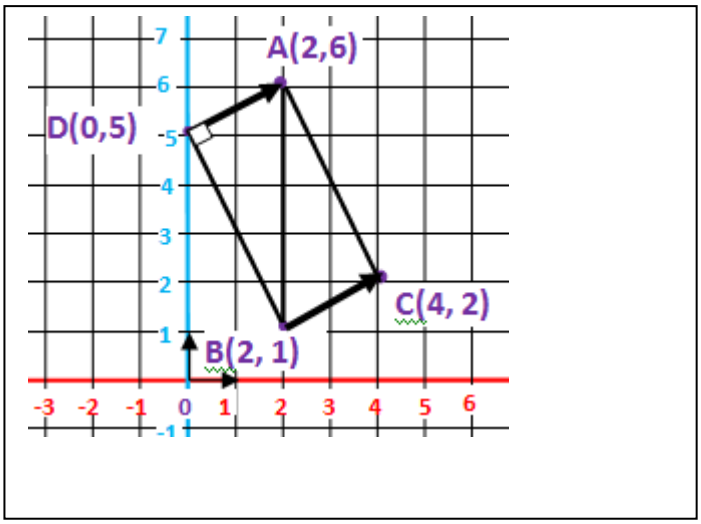

**2) أ) حساب طول AB :**
$AB=\sqrt{(4+2)^2+(1+3)^2}=\sqrt{(6)^2+(4)^2}=\sqrt{52}$
$AB=\sqrt{52}$
**ب) بيان أن المثلث ABC قائم :**
إذا كان المثلث ABC قائم فإنه و حسب عكس نظرية فيثاغورث :
$(AC)^2=(AB)^2+(BC)^2$ بالتعويض نجد : $AC^2=AB^2+BC^2$
بالتعويض نجد :
$(\sqrt{65})^2=(\sqrt{52})^2+(\sqrt{13})^2$
$65=52+13$
$65=65$
و منه المثلث ABC قائم في B.
**3) إثبات أن الرباعي ABCE مستطيل :**
بما أن $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}$ فإن النقط A,B,C,E تشكل الرباعي ABCE متوازي الأضلاع و بما أنه قائم في B و الضلعين BC و AB غير متساويان فهو مستطيل.

**التمرين الخامس** : ( حسب نموذج 2014)
المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$
1) علّم النقط : $A(4,2)$ ، $B(-4,-2)$ ، $D(2,6)$
2) أ) أعط القيمة المضبوطة للطول $BD$.
ب) علما أنّ : $DA=\sqrt{20}$ و $AB=\sqrt{80}$ ،
بيّن أنّ المثلث ABD قائم.
3) أنشيء النقطة C صورة D بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ .
أثبت أنّ $ABCD$ مستطيل.

**التمرين السادس** : ( حسب نموذج 2014)
المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$
1) علّم النقط : $A(0,8)$ ، $B(4,2)$ ، $C(-2,-2)$
2) أ) أعط القيمة المضبوطة للطول $BC$.
ب) علما أنّ : $AB=\sqrt{52}$ و $AC=\sqrt{104}$ ،
بيّن أنّ المثلث ABC قائم.
3) أنشيء النقطة D صورة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$ .
أثبت أنّ $ABCD$ مربع.

## حل التمرين الأول :

**1- تعليم النقاط :**




**2 ) أ) حساب طول AB :**

$[AB]=\sqrt{(xB-xA)^2+(yB-yA)^2}$

$=\sqrt{(2-2)^2+(1-6)^2}$

$\sqrt{(0)^2+(-5)^2}=\sqrt{0+25}=\sqrt{25}$ $[AB]=\sqrt{25}$

**ب) بيان أن المثلث DAB قائم :**

إذا كان المثلث **DAB** قائم فإنه و حسب عكس نظرية فيثاغورث :

$AB^2 = DB^2 + DA^2$ بالتعويض نجد : $(\sqrt{25})^2 = (\sqrt{20})^2 + (\sqrt{5})^2$

أي : $25 = 20 + 5$ إذن : $25 = 25$

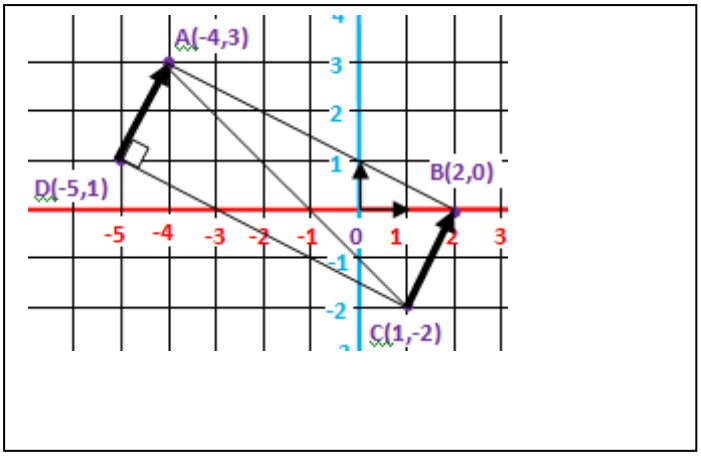
و منه DAB قائم في D

**3) إثبات أن الرباعي ACBD مستطيل :**

بما أن $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BC}$ فإن النقط A,C,B,D تشكل الرباعي ACBD متوازي الأضلاع و بما أنه قائم في D و الضلعين DA و DB غير متساويان فهو مستطيل.

## حل التمرين الثاني :

**1- تعليم النقاط :**




**2) أ) حساب طول AC :**

$[AC]=\sqrt{(xC-xA)^2+(yC-yA)^2}$

$=\sqrt{(1-(-4))^2+(-2-3)^2}$

$=\sqrt{(1+4)^2+(-2-3)^2}$

$\sqrt{(5)^2+(-5)^2}=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}$ $[AC]=\sqrt{50}$

**ب) بيان أن المثلث ACD قائم :**

إذا كان المثلث **ACD** قائم فإنه و حسب عكس نظرية فيثاغورث :

$AC^2 = DC^2 + DA^2$ بالتعويض نجد : $(\sqrt{50})^2 = (\sqrt{45})^2 + (\sqrt{5})^2$

أي : $50 = 45 + 5$ إذن : $50 = 50$

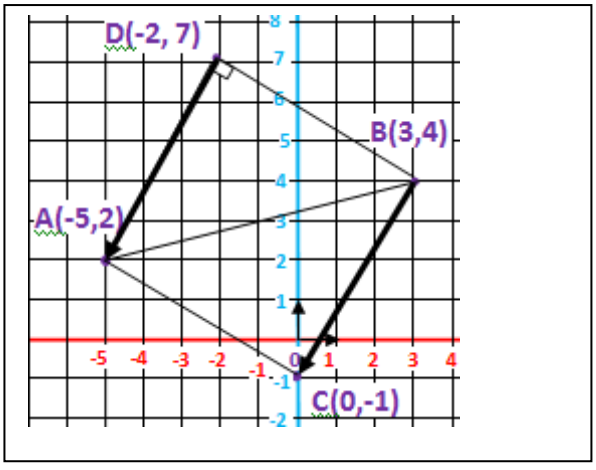
و منه ACD قائم في D

**3) إثبات أن الرباعي ABCD مستطيل :**

بما أن $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$ فإن النقط A,B,C,D تشكل الرباعي ABCD متوازي الأضلاع و بما أنه قائم في D و الضلعين DA و DC غير متساويان فهو مستطيل

## حل التمرين الثالث :

**1- تعليم النقاط :**




**2) أ) حساب طول DA :**

$[DA]=\sqrt{(xA-xD)^2+(yA-yD)^2}$

$=\sqrt{(-5-(-2))^2+(2-7)^2}$

$=\sqrt{(-5+2)^2+(2-7)^2}$

$\sqrt{(-3)^2+(-5)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$ $[DA]=\sqrt{34}$

**ب) بيان أن المثلث ADB قائم :**

إذا كان المثلث **ADB** قائم فإنه و حسب عكس نظرية فيثاغورث :

$AB^2 = DA^2 + DB^2$ بالتعويض نجد : $(\sqrt{68})^2 = (\sqrt{34})^2 + (\sqrt{34})^2$

أي : $68 = 34 + 34$ إذن : $68 = 68$

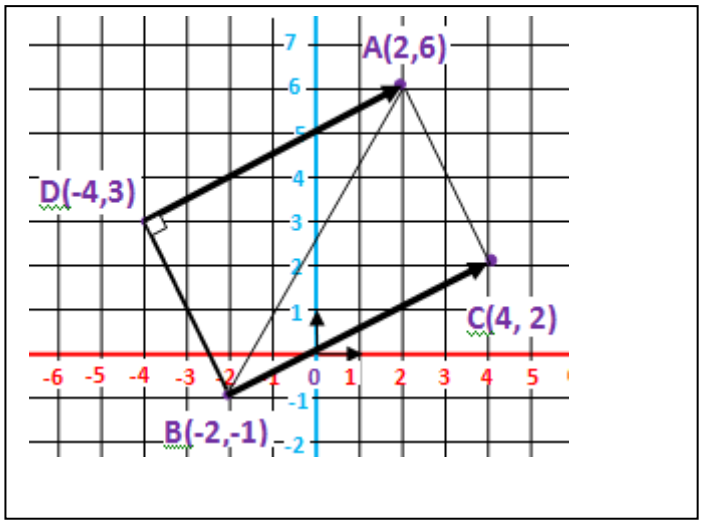
و منه ADB قائم في D

**3) إثبات أن الرباعي ADBC مربع :**

بما أن $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BC}$ فإن النقط A,B,C,D تشكل الرباعي ADBC متوازي الأضلاع و بما أنه قائم في D و الضلعين DA و DB متساويان فهو مربع.

## حل التمرين الرابع :

**1- تعليم النقاط :**




**2 ) أ) حساب طول BA :**

$[BA]=\sqrt{(xA-xB)^2+(yA-yB)^2}$

$=\sqrt{(2-(-2))^2+(6-(-1))^2}$

$=\sqrt{(2+2)^2+(6+1)^2}$

$\sqrt{(4)^2+(7)^2}=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}$ $[BA]=\sqrt{65}$

**ب) بيان أن المثلث DAB قائم :**

إذا كان المثلث **DAB** قائم فإنه و حسب عكس نظرية فيثاغورث :

$BA^2 = DA^2 + DB^2$ بالتعويض نجد : $(\sqrt{65})^2 = (\sqrt{45})^2 + (\sqrt{20})^2$

أي : $65 = 45 + 20$ إذن : $65 = 65$

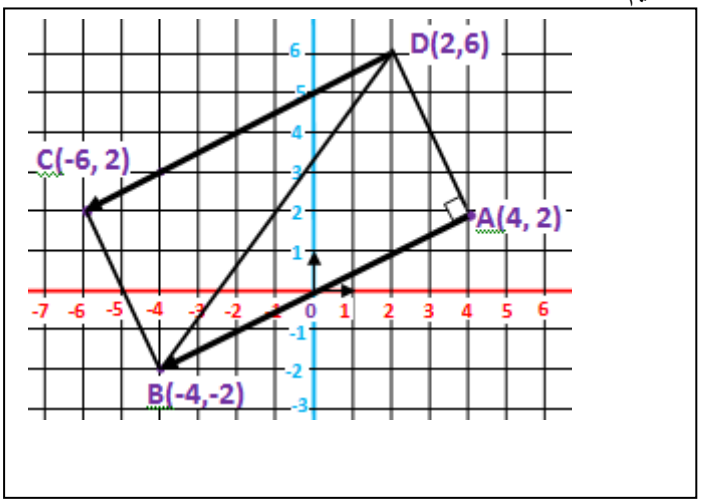
و منه DAB قائم في D

**3) إثبات أن الرباعي DACB مستطيل :**

بما أن $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DA}$ فإن النقط D,A,C,B تشكل الرباعي **DACB** متوازي الأضلاع و بما أنه قائم في D و الضلعين DA و DB غير متساويان فهو مستطيل.

## حل التمرين الخامس :

**1- تعليم النقاط :**




**2) أ) حساب طول BD :**

$[BD]=\sqrt{(xD-xB)^2+(yD-yB)^2}$

$=\sqrt{(2-(-4))^2+(6-(-2))^2}$

$=\sqrt{(2+4)^2+(6+2)^2}$

$=\sqrt{(6)^2+(8)^2}$

$\sqrt{(36)^2+(64)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}$ $[BD]=\sqrt{100}$

**ب) بيان أن المثلث ABD قائم :**

إذا كان المثلث ABD قائم فإنه و حسب عكس نظرية فيثاغورث :

$BD^2 = AB^2 + DA^2$ بالتعويض نجد: $(\sqrt{100})^2 = (\sqrt{80})^2 + (\sqrt{20})^2$

أي : $100 = 80 + 20$ إذن : $100 = 100$

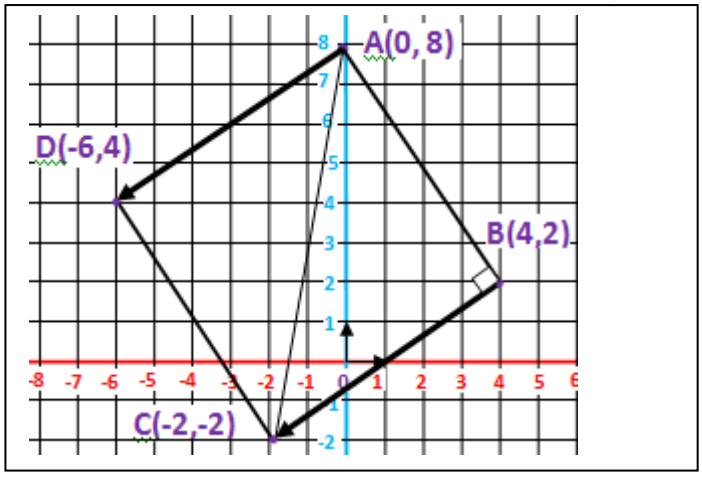
و منه ABD قائم في A.

**3) إثبات أن الرباعي ABCD مستطيل :**

بما أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ فإن النقط A,B,C,D تشكل الرباعي ABCD متوازي الأضلاع و بما أنه قائم في A و الضلعين AB و DA غير

## حل التمرين السادس :

**1- تعليم النقاط :**




**2) أ) حساب طول BC :**

$[BC]=\sqrt{(xC-xB)^2+(yC-yB)^2}$

$=\sqrt{(-2-4)^2+(-2-2)^2}$

$\sqrt{(-6)^2+(-4)^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}$ $[BC]=\sqrt{52}$

**ب) بيان أن المثلث ABC قائم :**

إذا كان المثلث **ABC** قائم فإنه و حسب عكس نظرية فيثاغورث :

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ بالتعويض نجد : $(\sqrt{104})^2 = (\sqrt{52})^2 + (\sqrt{52})^2$

أي : $104 = 52 + 52$ إذن : $104 = 104$

و منه ABC قائم في B

**3) إثبات أن الرباعي ABCD مربع :**

بما أن $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ فإن النقط A,B,C,D تشكل الرباعي ABCD متوازي الأضلاع و بما أنه قائم في B و الضلعين BC و AB متساويان فهو مربع.

**التمرين الرابع :** (03 نقاط) امتحان شهادة التعليم المتوسط (2012)
$(O, \vec{i}, \vec{j})$ معلم متعامد و متجانس للمستوي.
1) علّم النقط C (-4, -3) , B (-2, 3) , A (2, -1)
2) احسب الطول AC و استنتج نوع المثلث ABC
علما أنّ $BC = 2\sqrt{10}$
3) احسب إحداثيتي النقطة D حتى يكون $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA}$
4) بيّن أن (AB) ⊥ (CD)

**التمرين الأول :** (حسب نموذج 2012)
$(O, \vec{i}, \vec{j})$ معلم متعامد و متجانس للمستوي.
1) علّم النقط C (3, -1) , B (5, 3) , A (1, 1)
2) احسب الطول BA و استنتج نوع المثلث ABC
علما أنّ $BC = 2\sqrt{5}$
3) احسب إحداثيتي النقطة D حتى يكون $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$
4) بيّن أن (AC) ⊥ (DB)

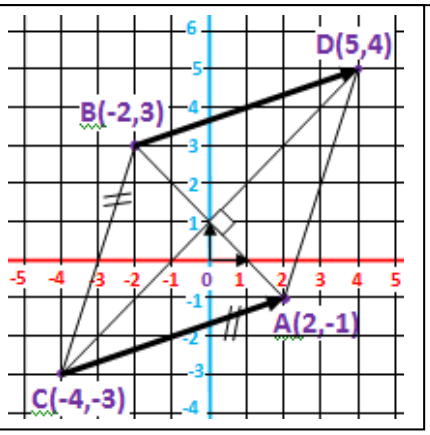
**التمرين الثاني :** (حسب نموذج 2012)
$(O, \vec{i}, \vec{j})$ معلم متعامد و متجانس للمستوي.
1) علّم النقط C (8, -3) , B (3, 2) , A (-4, 3)
2) احسب الطول BA و استنتج نوع المثلث ABD
علما أنّ $DA = 5\sqrt{2}$
3) احسب إحداثيتي النقطة D حتى يكون $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$
4) بيّن أن (AC) ⊥ (BD)

**التمرين الثالث :** (حسب نموذج 2012)
$(O, \vec{i}, \vec{j})$ معلم متعامد و متجانس للمستوي.
1) علّم النقط C (5, -4) , B (3, 4) , A (-5, 2)
2) احسب الطول BC و استنتج نوع المثلث ABC
علما أنّ $BA = 2\sqrt{17}$
3) احسب إحداثيتي النقطة D حتى يكون $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$
4) بيّن أن (DB) ⊥ (AC)

**التمرين الرابع :** (حسب نموذج 2012)
$(O, \vec{i}, \vec{j})$ معلم متعامد و متجانس للمستوي.
1) علّم النقط C (5, -4) , B (2, 2) , A (-1,-4)
2) احسب الطول BA و استنتج نوع المثلث ABC
علما أنّ $BC = 3\sqrt{5}$
3) احسب إحداثيتي النقطة D حتى يكون $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$
4) بيّن أن (BD) ⊥ (AC)

**الحل :**

**1) تعليم النقط :**




**2) حساب AC :**
$AC = \sqrt{(-4-2)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{36+4} = \mathbf{2\sqrt{10}}$
AC = BC = $2\sqrt{10}$ فإن المثلث ABC متساوي الساقين قاعدته $[AB]$

**3) حساب إحداثيتي النقطة D :**
* بما أن الشعاعين $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{BD}$ متساويين $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BD}$
فإن لهما نفس الإحداثيتين.
$\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} xD-xB \\ yD-yB \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} xA-xC \\ yA-yC \end{pmatrix}$
**حساب إحداثيتي $\overrightarrow{CA}$**
$\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} xA-xC \\ yA-yC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 \\ -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

إذن $\begin{cases} xD-xB=6 \\ yD-yB=2 \end{cases}$ بالتعويض $\begin{cases} xD-(-2)=6 \\ yD-3=2 \end{cases}$

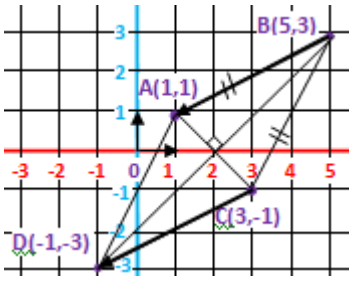
و منه : $\begin{cases} xD=\mathbf{4} \\ yD=\mathbf{5} \end{cases}$ إحداثيتي D هي **D (4, 5)**

**4) إثبات أن (AB) ⊥ (CD) :**
بما أن $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BD}$ فإن النقط A,B,C,D تشكل متوازي الأضلاع و
بما أن AC = BC فهو معين و منه قطراه CD و AB متعامدان :
(AB) ⊥ (CD)

**التمرين الخامس :** (حسب نموذج 2012)
$(O, \vec{i}, \vec{j})$ معلم متعامد و متجانس للمستوي.
1) علّم النقط D (-4,3) , B (-2,-1) , A (3,4)
2) احسب الطول AB و استنتج نوع المثلث DAB
علما أنّ $AD = 5\sqrt{2}$
3) احسب إحداثيتي النقطة C حتى يكون $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
4) بيّن أن (CA) ⊥ (DB)

**التمرين السادس :** (حسب نموذج 2012)
$(O, \vec{i}, \vec{j})$ معلم متعامد و متجانس للمستوي.
1) علّم النقط C (7, 0) , B (3, 6) , A (-3,2)
2) احسب الطول BA و استنتج نوع المثلث ABC
علما أنّ $BC = 2\sqrt{13}$
3) احسب إحداثيتي النقطة D حتى يكون $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$
4) بيّن أن (AC) ⊥ (BD)

## حل التمرين الأول :




**1- تعليم النقاط :**

**2- حساب طول [BA] :**

$[BA]=\sqrt{(xA-xB)^2+(yA-yB)^2}=$

$\sqrt{(1-5)^2+(1-3)^2}=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}$

$=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=\sqrt{4}\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$ $[BA]=2\sqrt{5}$

**استنتاج نوع المثلث ABC:** بما أن $[BA]=2\sqrt{5}=[BC]$ فإن المثلث متساوي الساقين

**3- حساب إحداثيتي D :**

بما أن الشعاعين $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{BA}$ متساويين $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$

فإن لهما نفس الإحداثيتين.

**حساب إحداثيتي $\overrightarrow{BA}$**

$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}xA-xB\\yA-yB\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-5\\1-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$

لدينا $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$ أي $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}xD-xC\\yD-yC\end{pmatrix}\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$

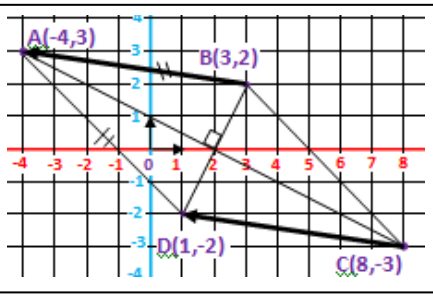
إذن $\begin{cases}xD-xC=-4\\yD-yC=-2\end{cases}$ بالتعويض $\begin{cases}xD-3=-4\\yD-(-1)=-2\end{cases}$

و منه : $\begin{cases}xD=-1\\yD=-3\end{cases}$ إحداثيتي D هي $D(-1,-3)$

**4) إثبات أن (AC) ⊥ (DB) :**

بما أن $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$ فإن النقط A,B,C,D تشكل الرباعي ABCD متوازي الأضلاع و بما أن BC = BA فإن الرباعي معين و منه قطراه AC و DB متعامدان : (AC) ⊥ (DB)

## حل التمرين الثاني :




**1- تعليم النقاط :**

**2- حساب طول [BA] :**

$[BA]=\sqrt{(xA-xB)^2+(yA-yB)^2}=$

$\sqrt{(-4-3)^2+(3-2)^2}=\sqrt{(-7)^2+(1)^2}$

$=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}=\sqrt{25}\times\sqrt{2}=5\sqrt{2}$ $[BA]=5\sqrt{2}$

**استنتاج نوع المثلث ABD:** بما أن $[BA]=5\sqrt{2}=[DA]$ فإن المثلث متساوي الساقين

**3- حساب إحداثيتي D :**

بما أن الشعاعين $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{BA}$ متساويين $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$

فإن لهما نفس الإحداثيتي.

**حساب إحداثيتي $\overrightarrow{BA}$**

$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}xA-xB\\yA-yB\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4-3\\3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}$

لدينا $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$ أي $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}xD-xC\\yD-yC\end{pmatrix}\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}$

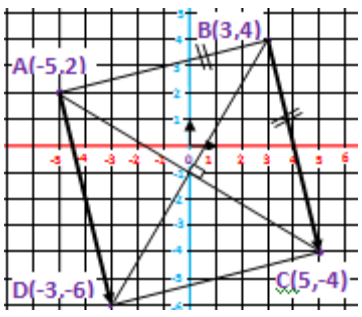
إذن $\begin{cases}xD-xC=-7\\yD-yC=1\end{cases}$ بالتعويض $\begin{cases}xD-8=-7\\yD-(-3)=1\end{cases}$

و منه : $\begin{cases}xD=1\\yD=-2\end{cases}$ إحداثيتي D هي $D(1,-2)$

**4) إثبات أن (AC) ⊥ (DB) :**

بما أن $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$ فإن النقط A,B,C,D تشكل الرباعي ABCD متوازي الأضلاع و بما أن DA = BA فإن الرباعي معين و منه قطراه AC و BD متعامدان : (AC) ⊥ (BD)

## حل التمرين الثالث :




**1- تعليم النقاط :**

**2- حساب طول [BC] :**

$[BC]=\sqrt{(xC-xB)^2+(yC-yB)^2}=$

$\sqrt{(5-3)^2+(-4-4)^2}=\sqrt{(2)^2+(-8)^2}$

$=\sqrt{4+64}=\sqrt{68}=\sqrt{4}\times\sqrt{17}=2\sqrt{17}$ $[BC]=2\sqrt{17}$

**استنتاج نوع المثلث ABC:** بما أن $[BC]=2\sqrt{17}=[BA]$ فإن المثلث متساوي الساقين

**3- حساب إحداثيتي D :**

بما أن الشعاعين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BC}$ متساويين $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

فإن لهما نفس الإحداثيتي.

**حساب إحداثيتي $\overrightarrow{BC}$**

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}xC-xB\\yC-yB\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-3\\-4-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-8\end{pmatrix}$

لدينا $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ أي $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}xD-xA\\yD-yA\end{pmatrix}\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\-8\end{pmatrix}$

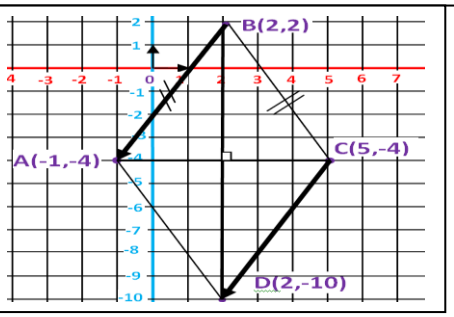
إذن $\begin{cases}xD-xA=2\\yD-yA=-8\end{cases}$ بالتعويض $\begin{cases}xD-(-5)=2\\yD-2=-8\end{cases}$

و منه : $\begin{cases}xD=-3\\yD=-6\end{cases}$ إحداثيتي D هي $D(-3,-6)$

**4) إثبات أن (AC) ⊥ (DB) :**

بما أن $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ فإن النقط A,B,C,D تشكل الرباعي ABCD متوازي الأضلاع و بما أن BC = BA فإن الرباعي معين و منه قطراه AC و DB متعامدان : (DB) ⊥ (AC)

## حل التمرين الرابع :




**1- تعليم النقاط :**

**2- حساب طول [BA] :**

$[BA]=\sqrt{(xA-xB)^2+(yA-yB)^2}=$

$\sqrt{(-1-2)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{(-3)^2+(-6)^2}$

$=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}=\sqrt{9}\times\sqrt{5}=3\sqrt{5}$ $[BA]=3\sqrt{5}$

**استنتاج نوع المثلث ABC:** بما أن $[BA]=3\sqrt{5}=[BC]$ فإن المثلث متساوي الساقين

**3- حساب إحداثيتي D :**

بما أن الشعاعين $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{BA}$ متساويين $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$

فإن لهما نفس الإحداثيتين.

**حساب إحداثيتي $\overrightarrow{BA}$**

$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}xA-xB\\yA-yB\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-2\\-4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}$

لدينا $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$ أي $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}xD-xC\\yD-yC\end{pmatrix}\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}$

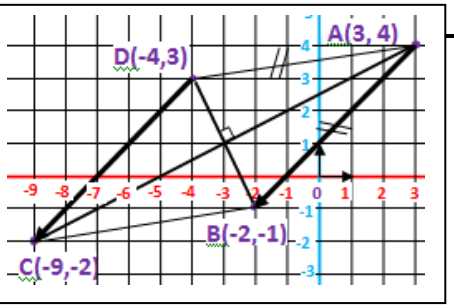
إذن $\begin{cases}xD-xC=-3\\yD-yC=-6\end{cases}$ بالتعويض $\begin{cases}xD-5=-3\\yD-(-4)=-6\end{cases}$

و منه : $\begin{cases}xD=2\\yD=-10\end{cases}$ إحداثيتي D هي $D\,(2,-10)$

**4) إثبات أن (AC) ⊥ (BD) :**

بما أن $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$ فإن النقط A,B,C,D تشكل الرباعي ABCD متوازي الأضلاع و بما أن BC = BA فإن الرباعي معين و منه قطراه AC و BD متعامدان : (AC) ⊥ (BD)

## حل التمرين الخامس




**1- تعليم النقاط :**

**2- حساب طول [AB] :**

$[AB]=\sqrt{(xB-xA)^2+(yB-yA)^2}=$

$\sqrt{(-2-3)^2+(-1-4)^2}=\sqrt{(-5)^2+(-5)^2}$

$=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}=\sqrt{25}\times\sqrt{2}=5\sqrt{2}$ $[AB]=5\sqrt{2}$

**استنتاج نوع المثلث DAB:** بما أن $[AD]=5\sqrt{2}=[AB]$ فإن المثلث متساوي الساقين

**3- حساب إحداثيتي C :**

بما أن الشعاعين $\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{AB}$ متساويين $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$

فإن لهما نفس الإحداثيتين.

**حساب إحداثيتي $\overrightarrow{AB}$**

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}xB-xA\\yB-yA\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-3\\-1-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-5\end{pmatrix}$

لدينا $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ أي $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}xC-xD\\yC-yD\end{pmatrix}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\-5\end{pmatrix}$

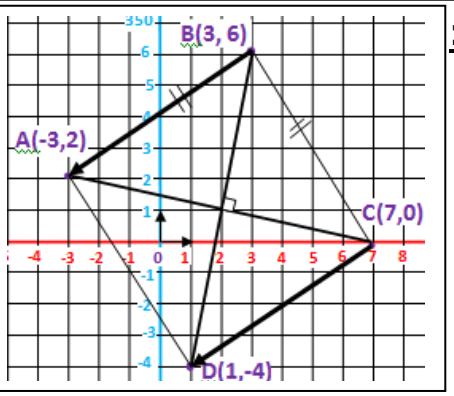
إذن $\begin{cases}xC-xD=-5\\yC-yD=-5\end{cases}$ بالتعويض $\begin{cases}xC-(-4)=-5\\yC-3=-5\end{cases}$

و منه : $\begin{cases}xC=-9\\yC=-2\end{cases}$ إحداثيتي C هي $C\,(-9,-2)$

**4) إثبات أن (CA) ⊥ (DB) :**

بما أن $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ فإن النقط A,B,C,D تشكل الرباعي ABCD متوازي الأضلاع و بما أن AB = AD فإن الرباعي معين و منه قطراه CA و DB متعامدان : (DB) ⊥ (CA)

## حل التمرين السادس :




**1- تعليم النقاط :**

**2- حساب طول [BA] :**

$[BA]=\sqrt{(xA-xB)^2+(yA-yB)^2}=$

$\sqrt{(-3-3)^2+(2-6)^2}=\sqrt{(-6)^2+(-4)^2}$

$=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}=\sqrt{4}\times\sqrt{13}=2\sqrt{13}$ $[BA]=2\sqrt{13}$

**استنتاج نوع المثلث ABC:** بما أن $[BA]=2\sqrt{13}=[BC]$ فإن المثلث متساوي الساقين

**3- حساب إحداثيتي D :**

بما أن الشعاعين $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{BA}$ متساويين $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$

فإن لهما نفس الإحداثيتين.

**حساب إحداثيتي $\overrightarrow{BA}$**

$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}xA-xB\\yA-yB\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-3\\2-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix}$

لدينا $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$ أي $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}xD-xC\\yD-yC\end{pmatrix}\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix}$

إذن $\begin{cases}xD-xC=-6\\yD-yC=-4\end{cases}$ بالتعويض $\begin{cases}xD-7=-6\\yD-0=-4\end{cases}$

و منه : $\begin{cases}xD=1\\yD=-4\end{cases}$ إحداثيتي D هي $D\,(1,-4)$

**4) إثبات أن (AC) ⊥ (BD) :**

بما أن $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$ فإن النقط A,B,C,D تشكل الرباعي ABCD متوازي الأضلاع و بما أن BC = BA فإن الرباعي معين و منه قطراه AC و BD متعامدان : (BD) ⊥ (AC)

**تمرين يشمل : درس** : الأشعة و الانسحاب + **درس** فيثاغورث

**التمرين الرابع** : (3.5 نقطة) امتحان شهادة التعليم المتوسط (2016)

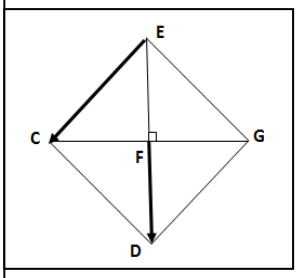
1) أنشىء المثلث EFG القائم في F حيث : $EF=FG=4\ cm$ .
2) أنشىء النقطتين :
D صورة النقطة F بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{EF}$ .
C صورة النقطة E بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{GD}$ .
3) بيّن أنّ الرباعي EGDC مربع .
- احسب مساحته.
4) ليكن الشعاع $\vec{U}$ حيث : $\vec{U} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{FG}$ ،
بيّن أنّ : $\vec{U} = \overrightarrow{ED}$

**التمرين الأول** : ( حسب نموذج 2016)
1) أنشىء المثلث ABC القائم في A حيث : $AB=AC=3\ cm$ .
2) أنشىء النقطتين :
D صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BA}$ .
E صورة النقطة D بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CB}$ .
3) بيّن أنّ الرباعي BCDE مربع .
- احسب مساحته.
4) ليكن الشعاع $\vec{U}$ حيث : $\vec{U} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{AC}$ ،
بيّن أنّ : $\vec{U} = \overrightarrow{DB}$

**التمرين الثاني** : ( حسب نموذج 2016)
1) أنشىء المثلث RAG القائم في R حيث : $RA=RG=5\ cm$ .
2) أنشىء النقطتين :
B صورة النقطة R بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AR}$ .
D صورة النقطة B بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{GA}$ .
3) بيّن أنّ الرباعي GADB مربع .
- احسب مساحته.
4) ليكن الشعاع $\vec{U}$ حيث : $\vec{U} = \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GR}$ ،
بيّن أنّ : $\vec{U} = \overrightarrow{GD}$

**الحـــــل :**

**1) إنشاء المثلث EFG و النقطتين D و C**




**2) بيان أن الرباعي EGDC مربع :**

**أ) من المعطيات :** بما أن C صورة النقطة E بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{GD}$ .
فإن الشعاعين $\overrightarrow{EC}$ و $\overrightarrow{GD}$ متساويين.
و منه فإن النقط : E,G,D,C تشكل رباعي **متوازي الأضلاع**.

ب) من خصائص **المعين** أن قطراه متعامدان ، و المثلث EFG قائم في G ( **من المعطيات**)، إذن المتوازي الأضلاع EGDC **معين**.

**{إثبات أن المعين EGDC مربع}**

(**بالطريقة الأولى :** هذه الطريقة تعتمد على نظرية فيثاغورث و هي أسهل)

**لإثبات أن المعين EGDC مربع، يكفي إثبات أن إحدى زواياه قائمة ( لتكن الزاوية $\widehat{EGD}$ :**

**1) حساب طول الضلع EG :**

$EG^2 = FE^2 + FG^2$ ( حسب نظرية فيثاغورث) $EG = \sqrt{32} = 5.65$ cm

و بما أن EGDC معين فإن كل أضلاعه متقايسة و منه : **EG = DG = 5.65 cm**

و بما أن EGDC معين فإن قطراه متناصفان أي **ED = FE + FD = 8 cm**

**2) إثبات أن المثلث EGD قائم في G:**

**$ED^2 = GE^2 + GD^2$ ( حسب نظرية فيثاغورث) أي : $(8)^2 = (5.65)^2 + (5.65)^2$ و منه 64 = 31.92 +31.92 أي : 63.84 ≅ 64**

**و منه المثلث EGD قائم في G أي المعين EGDC مربع**

(**بالطريقة الثانية :** هذه الطريقة معقدة نوعا ما)

ج) **من خصائص المثلث القائم:** أنه إذا كان طول المتوسط المتعلق بأحد الأضلاع يساوي نصف طول هذا الضلع، فإن المثلث قائم . (**ملاحظة:** هذه الخاصية درست في برنامج السنة الثالثة متوسط)

**الإثبات :** لدينا (من المعطيات) FE = FG = 4 cm.....(1)

بما أن الرباعي EGDC **متوازي الأضلاع** فإن قطراه متناصفان

أي : FE = FD = 4 cm .....(2)

للدينا من (1) و (2) : FE = FG = FD و منه 2 x FG= FE + FD

إذن و حسب الخاصية المذكورة أعلاه فإن المثلث EGD قائم في G

بما أن المعين EGDC قائم فهو **مربع**

**3) حساب مساحة المربع :**

**أ) حساب طول الوتر EG :**

$EG^2 = FE^2 + FG^2$ ( حسب نظرية فيثاغورث)

$EG^2 = 4^2 + 4^2$ أي : $EG^2 = 16 + 16$ أي : $EG^2 = 32$ و من: $EG = \sqrt{32}$

**ب) حساب مساحة المربع :**

مساحة المربع هي : الضلع $^2$ أي : $S = \sqrt{32}^{\,2} =$ **32 cm²**

**4) بيان أن $\vec{U} = \overrightarrow{ED}$ :**

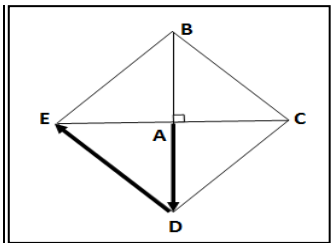
لدينا : $\vec{U} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{FG}$ هي $= \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{EC}$

أي : $\vec{U} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EC}$ (باستعمال علاقة شال)

و بما أن: $\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED}$ فإن : $\vec{U} = \overrightarrow{ED}$

**حل التمرين الأول :**

**1) إنشاء الشكل**




**2) بيان أن الرباعي BCDE مربع :**

يكفي إتباع نفس المراحل المفصلة في حل تمرين (دورة جوان 2016)

**3) حساب مساحة المربع :**

**أ) حساب طول الوتر BC :**

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ ( حسب نظرية فيثاغورث)

$BC^2 = 3^2 + 3^2$ أي : $BC^2 = 9 + 9$ أي : $BC^2 = 18$ و من: $BC = \sqrt{18}$

**ب) حساب مساحة المربع :**

مساحة المربع هي : الضلع $^2$ أي : $S = \sqrt{18}^{\,2} =$ **18 cm²**

**4) بيان أن $\vec{U} = \overrightarrow{DB}$ :**

لدينا : $\vec{U} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{AC}$ هي $= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE}$

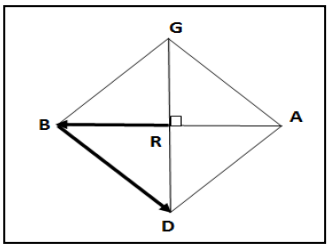
أي : $\vec{U} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE}$ (باستعمال علاقة شال)

و بما أن الرباعي BCDE متوازي الأضلاع فإن : $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DB}$

و منه : $\vec{U} = \overrightarrow{DB}$

**حل التمرين الثاني :**

**1) إنشاء الشكل**




**2) بيان أن الرباعي GADB مربع :**

يكفي إتباع نفس المراحل المفصلة في حل تمرين (دورة جوان 2016)

**3) حساب مساحة المربع :**

**أ) حساب طول الوتر GA :**

$GA^2 = RG^2 + RA^2$ ( حسب نظرية فيثاغورث)

$GA^2 = 5^2 + 5^2$ أي : $GA^2 = 25 + 25$ أي : $GA^2 = 50$ و من: $GA = \sqrt{50}$

**ب) حساب مساحة المربع :**

مساحة المربع هي : الضلع $^2$ أي : $S = \sqrt{50}^{\,2} =$ **50 cm²**

**4) بيان أن $\vec{U} = \overrightarrow{GD}$ :**

لدينا : $\vec{U} = \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GR}$ هي $= \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GR}$

أي : $\vec{U} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA}$ (باستعمال علاقة شال)

و بما أن الرباعي GADB متوازي الأضلاع فإن : $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GD}$

و منه : $\vec{U} = \overrightarrow{GD}$

# النسب المثلثية في مثلث قائم

| Tan<br>ظل | Sin<br>جيب تمام | Cos<br>جيب | الزاوية | Tan<br>ظل | Sin<br>جيب تمام | Cos<br>جيب | الزاوية | Tan<br>ظل | Sin<br>جيب تمام | Cos<br>جيب | الزاوية |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.8040 | 0.8746 | 0.4848 | **61°** | 0.6009 | 0.5150 | 0.8572 | **31°** | 0.0175 | 0.0175 | 0.9998 | **1°** |
| 1.8807 | 0.8829 | 0.4695 | **62°** | 0.6249 | 0.5299 | 0.8480 | **32°** | 0.0349 | 0.0349 | 0.9994 | **2°** |
| 1.9626 | 0.8910 | 0.4540 | **63°** | 0.6494 | 0.5446 | 0.8387 | **33°** | 0.0524 | 0.0523 | 0.9986 | **3°** |
| 2.0503 | 0.8988 | 0.4384 | **64°** | 0.6745 | 0.5592 | 0.8290 | **34°** | 0.0699 | 0.0698 | 0.9976 | **4°** |
| 2.1445 | 0.9063 | 0.4226 | **65°** | 0.7002 | 0.5736 | 0.8192 | **35°** | 0.0875 | 0.0872 | 0.9962 | **5°** |
| 2.2460 | 0.9135 | 0.4067 | **66°** | 0.7265 | 0.5878 | 0.8090 | **36°** | 0.1051 | 0.1045 | 0.9945 | **6°** |
| 2.3559 | 0.9205 | 0.3907 | **67°** | 0.7536 | 0.6018 | 0.7986 | **37°** | 0.1228 | 0.1219 | 0.9925 | **7°** |
| 2.4751 | 0.9272 | 0.3746 | **68°** | 0.7813 | 0.6157 | 0.7880 | **38°** | 0.1405 | 0.1392 | 0.9903 | **8°** |
| 2.6051 | 0.9336 | 0.3584 | **69°** | 0.8098 | 0.6293 | 0.7771 | **39°** | 0.1584 | 0.1564 | 0.9877 | **9°** |
| 2.7475 | 0.9397 | 0.3420 | **70°** | 0.8391 | 0.6428 | 0.7660 | **40°** | 0.1763 | 0.1736 | 0.9848 | **10°** |
| 2.9042 | 0.9455 | 0.3256 | **71°** | 0.8693 | 0.6561 | 0.7547 | **41°** | 0.1944 | 0.1908 | 0.9816 | **11°** |
| 3.0777 | 0.9511 | 0.3090 | **72°** | 0.9004 | 0.6691 | 0.7431 | **42°** | 0.2126 | 0.2079 | 0.9781 | **12°** |
| 3.2709 | 0.9563 | 0.2924 | **73°** | 0.9325 | 0.6820 | 0.7314 | **43°** | 0.2309 | 0.2250 | 0.9744 | **13°** |
| 3.4874 | 0.9613 | 0.2756 | **74°** | 0.9657 | 0.6947 | 0.7193 | **44°** | 0.2493 | 0.2419 | 0.9703 | **14°** |
| 3.7321 | 0.9659 | 0.2588 | **75°** | 1.0000 | 0.7071 | 0.7071 | **45°** | 0.2679 | 0.2588 | 0.9659 | **15°** |
| 4.0108 | 0.9703 | 0.2419 | **76°** | 1.0355 | 0.7193 | 0.6947 | **46°** | 0.2867 | 0.2756 | 0.9613 | **16°** |
| 4.3315 | 0.9744 | 0.2250 | **77°** | 1.0724 | 0.7314 | 0.6820 | **47°** | 0.3057 | 0.2924 | 0.9563 | **17°** |
| 4.7046 | 0.9781 | 0.2079 | **78°** | 1.1106 | 0.7431 | 0.6691 | **48°** | 0.3249 | 0.3090 | 0.9511 | **18°** |
| 5.1446 | 0.9816 | 0.1908 | **79°** | 1.1504 | 0.7547 | 0.6561 | **49°** | 0.3443 | 0.3256 | 0.9455 | **19°** |
| 5.6713 | 0.9848 | 0.1736 | **80°** | 1.1918 | 0.7660 | 0.6428 | **50°** | 0.3640 | 0.3420 | 0.9397 | **20°** |
| 6.3138 | 0.9877 | 0.1564 | **81°** | 1.2349 | 0.7771 | 0.6293 | **51°** | 0.3839 | 0.3584 | 0.9336 | **21°** |
| 7.1154 | 0.9903 | 0.1392 | **82°** | 1.2799 | 0.7880 | 0.6157 | **52°** | 0.4040 | 0.3746 | 0.9272 | **22°** |
| 8.1443 | 0.9925 | 0.1219 | **83°** | 1.3270 | 0.7986 | 0.6018 | **53°** | 0.4245 | 0.3907 | 0.9205 | **23°** |
| 9.5144 | 0.9945 | 0.1045 | **84°** | 1.3764 | 0.8090 | 0.5878 | **54°** | 0.4452 | 0.4067 | 0.9135 | **24°** |
| 11.4301 | 0.9962 | 0.0872 | **85°** | 1.4281 | 0.8192 | 0.5736 | **55°** | 0.4663 | 0.4226 | 0.9063 | **25°** |
| 14.3007 | 0.9976 | 0.0698 | **86°** | 1.4826 | 0.8290 | 0.5592 | **56°** | 0.4877 | 0.4384 | 0.8988 | **26°** |
| 19.0811 | 0.9986 | 0.0523 | **87°** | 1.5399 | 0.8387 | 0.5446 | **57°** | 0.5095 | 0.4540 | 0.8910 | **27°** |
| 28.6363 | 0.9994 | 0.0349 | **88°** | 1.6003 | 0.8480 | 0.5299 | **58°** | 0.5317 | 0.4695 | 0.8829 | **28°** |
| 57.2900 | 0.9998 | 0.0175 | **89°** | 1.6643 | 0.8472 | 0.5150 | **59°** | 0.5543 | 0.4848 | 0.8746 | **29°** |
| | | | | 1.7321 | 0.8660 | 0.5000 | **60°** | 0.5774 | 0.5000 | 0.8660 | **30°** |