مفاتيح الرياضيات

القسمة والموافقات في $\mathbb{Z}$

السنة الثالثة ثانوي

شعبة: الرياضيات – تقني رياضي

قواعد أساسية في الحساب

120 تمرين نموذجي

جميع مواضيع القسمة والموافقات في البكالوريا

من 2008 إلى 2022

مع حلولها المفصلة

ر.د.م.ك: 4-3873-0-9947-978
الإيداع القانوني : 2013-3893

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ فَلَمَّا رَءَاهُ مُسْتَقِرًّا عِندَهُۥ قَالَ هَٰذَا مِن فَضْلِ رَبِّى لِيَبْلُوَنِىٓ ءَأَشْكُرُ أَمْ أَكْفُرُ ۖ
وَمَن شَكَرَ فَإِنَّمَا يَشْكُرُ لِنَفْسِهِۦ ۖ وَمَن كَفَرَ فَإِنَّ رَبِّى غَنِىٌّ كَرِيمٌ ﴿٤٠﴾ ﴾

﴿ رَبِّ أَوْزِعْنِىٓ أَنْ أَشْكُرَ نِعْمَتَكَ ٱلَّتِىٓ أَنْعَمْتَ عَلَىَّ وَعَلَىٰ وَٰلِدَىَّ وَأَنْ أَعْمَلَ صَٰلِحًا
تَرْضَىٰهُ وَأَصْلِحْ لِى فِى ذُرِّيَّتِىٓ ۖ إِنِّى تُبْتُ إِلَيْكَ وَإِنِّى مِنَ ٱلْمُسْلِمِينَ ﴿١٥﴾ ﴾

الإهداء

إلى روح والدي رحمه الله الذي ضحّى بالنفس و النفيس من أجل وطنه أولا ثمّ من أجل أبنائه ثانيا و مضى إلى ربه دون أن يقطف أيّ من الثمرتين رحمه الله رحمة واسعة وأسكنه فسيح جنته .

إلى الحضن الدافئ و اللمسة الحانية أمي الحبيبة حفظها الله ورعاها وجزاها عني خير ما جزى والدة عن ولدها وألبسها لباس الصحة والعافية .

إلى حبيبة العمر ورفيقة الدرب ومهجة الفؤاد زوجتي وأم أبنائي أكرمها الله وأحسن مثوبتها .

إلى رياحين الدنيا أبنائي وأحبابي وقرة عيني أسامة ، محسن ووائل ، وإلى كنتي ريمة وحفيدي سامي حفظهم الله جميعا ورزقهم الهُدى والتُقى والعفاف والغِنى والعلم النافع والعمل الصالح وجعلهم ذخرا لأمتهم ووطنهم .

إلى كل حرّ أبيّ يسعى لرفع الغبن والجهل والتخلف عن أمته حتى يعود لهذه الأمة مجدها وعزها التي كانت ترفل فيه يوم كانت خير أمة أُخرجت للناس .

إلى هؤلاء جميعا أهدي هذا العمل المتواضع ، سائلا المولى ﷻ أن ينفع به كاتبه وناشره وقارئه .

عبد الكريم واضحي

مُقدّمة

الحمد للّه على نعمائه والشكر له على آلائه والصلاة والسلام على نبيه وخاتم رسله سيدنا محمد ﷺ وعلى آله وأصحابه ومن تبعهم بإحسان إلى يوم لقائه.

يسرني أن أضع بين يدي إخواني الأساتذة و أبنائي الطلبة هذه السلسلة التي تضم عددا هائلا من مسائل الرياضيات للأقسام النهائية (العلمية و الرياضية) التي جمعتها من مصادر شتى (كتب ، سلاسل ، اختبارات ومواضيع بكالوريا) ، مُرفقة بحلولها المفصّلة بلا اختصار مخّل ولا إطالة مملة ، لتكون عونا للأستاذ لاختيار مواضيع الفروض والاختبارات ، ومنارة للطلاب يهتدون بها خلال تحضيرهم لشهادة البكالوريا التي نسأل اللّه العلي القدير أن يوفقهم للحصول عليها بتقديرات تسرّهم وتمهّد لهم الطريق نحو النجاح في حياتهم العلمية و العملية.

وتضم هذه السلسلة خمسة أجزاء هي:

1. **القسمة والموافقات في $\mathbb{Z}$ (وهو الكتاب الذي بين يديك)**
2. **الدوال (العددية ، الأسية واللوغاريتمية)**
3. **الهندسة الفضائية**
4. **الأعداد المركبة والتحويلات النقطية**
5. **المتتاليات العددية**

في الأخير، وعملا بقول المصطفى ﷺ "من لا يشكر الناس لا يشكر اللّه" أحمد اللّه على توفيقه ومنّه وفضله وكرمه فله الحمد أولا وله الحمد آخرا، كما أتقدم بالشكر الجزيل لكل إخواني الأساتذة الذين استفدت من أعمالهم الرائعة ومواضيعهم المتميزة سواءً كانت سلاسل أو اختبارات نموذجية أو حلول لمواضيع البكالوريا ، فلهم مني جزيل الشكر.

وبما أنّ اللّه ﷻ أبى العصمة إلا لنبيّه ﷺ ، فلا شك أنّ هذا العمل قد يعتريه الخطأ ، فرجائي لكل من وقف على خطأ أو سهو أو نقص أن ينبهني لتصحيحه على البريد الإلكتروني ouailmaths@gmail.com **ورحم اللّه امرئ أهدى إليّ عيوبي.**

قبل أن نبدأ

أبنائي الطلبة ، بناتي الطالبات :

لا شك أنّ موضوع الحساب (القسمة ، الموافقات والأعداد الأولية) هو أصعب مواضيع الرياضيات للأقسام النهائية شعبتي الرياضيات والتقني الرياضي، ولا داعي للالتفات إلى "النكتة" القائلة بأنّ موضوع الحساب سهل بدليل أن طلبة الأقسام الأدبية يدرسونه، فنظرة عابرة لمواضيع القسمة والموافقات في امتحانات البكالوريا لشعبة الآداب تبيّن أنه لا مجال للمقارنة بين هذه المواضيع ومواضيع شعبتي الرياضيات والتقني الرياضي، كما أنه لا مجال للمقارنة بين مواضيع دراسة الدوال الخاصة بكل شعبة.

أقول هذا الكلام ليس انتقاصا من مستوى طلبة الأقسام الأدبية، لكن لبيان مدى صعوبة هذا الموضوع حتى يعرف الطالب كيفية التعامل معه خلال السنة الدراسية، وحتى لا يتأثر نفسيا وتتحطم معنوياته لمجرد أنّه تعثر أمام تمرين أو استعصى عليه سؤال أو أشكلت عليه مسألة، فيظن نفسه أنّه غير مؤهل لاجتياز امتحان البكالوريا.

ولست أذيع سرا إن قلت لكم إنّ هذا الموضوع يستعصي علينا أيضا، لوعورة مسلكه وتشعّب أفكاره وتنوّع مسائله وتداخل خصائصه وقلة موارده، فإذا أردتم البحث عن مراجع خاصة بالدوال أو الهندسة أو الأعداد المركبة وحتى المتتاليات وجدتم الآلاف المؤلفة من الكتب والحوليات والبرامج، لكن إذا بحثتم عن كتاب واحد للقسمة والموافقات انقلب إليكم البصر خاسئا وهو حسير. لذا فلا تجزعوا لأول عثرة ولا تستسلموا لأول كبوة، بل اجتهدوا وثابروا وحاولوا مرة وثانية وثالثة وحتى عاشرة لتتمكنوا في النهاية من حل معظم مسائل القسمة والموافقات بما فيها المسائل التي ستطرح عليكم في امتحان شهادة البكالوريا الذي أتمنى لكم من أعماق قلبي أن تنجحوا فيه بتقدير يسعدكم أنتم بالدرجة الأولى وأولياؤكم بالدرجة الثانية ثمّ نحن بالدرجة الثالثة.

ولتذليل الصعوبات المتعلقة بهذا الموضوع، يسرني أن أضع بين أيديكم هذه الأفكار والطرائق لتمكنكم بإذن الله من الإجابة على أشهر المسائل الخاصة به.

أخيرا أوصيكم بحل ما استطعتم من تمارين هذا الكتاب بصفة مستمرة حتى ترسخ في أذهانكم كل المفاهيم الخاصة بموضوع الحساب، مع الاهتمام طبعا بباقي المحاور والمتمثلة في الدوال، الهندسة الأعداد المركبة والمتتاليات.

عبد الكريم واضحي

قواعد أساسية

في الحساب

1- إيجاد القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر :

لإيجاد القيم الممكنة لـ $d = PGCD(a;b)$ ، نبحث عن علاقة بين a و b مستقلة عن n

<u>مثال 1:</u> $b = 5n - 2\,;\, a = 2n + 3$

$d = PGCD(a;b)$ يعني d يقسم a و d يقسم b ، منه d يقسم $5a - 2b$ أي d يقسم 19

فالقيم الممكنة لـ d هي قواسم 19 أي 1 و 19.

<u>مثال 2:</u> $b = n^2 + 2\,;\, a = 5n^2 + 7$

$d = PGCD(a;b)$ يعني d يقسم a و d يقسم b ، منه d يقسم $-a + 5b$ أي d يقسم 3

فالقيم الممكنة لـ d هي قواسم 3 أي 1 و 3.

2- إيجاد قيم n التي من أجلها يأخذ d قيمة معيّنة:

لإيجاد قيم n التي من أجلها يأخذ d قيمة معيّنة (غالبا القيمة المختلفة عن 1) نستعمل الموافقات على النحو التالي:

<u>مثال 1 (السابق):</u> $b = 5n - 2\,;\, a = 2n + 3$ ، $d = 1$ أو $d = 19$

نبحث عن قيم n التي من أجلها $d = 19$:

$d = 19$ يعني أنّ a و b من مضاعفات 19 أي :

$$d = 19 \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0[19] \\ b \equiv 0[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n + 3 \equiv 0[19] \\ 5n - 2 \equiv 0[19] \end{cases} \xRightarrow[\text{طرح الموافقتين}]{} 3n - 5 \equiv 0[19]$$

$$\Rightarrow 3n \equiv 5[19]$$

لإيجاد قيم n التي تحقق الموافقة السابقة نستعمل إحدى الطريقتين :

<u>الطريقة الأولى : الجدول</u>

نعطي لـ n القيم من 0 إلى 18 (الترديد -1) ، ثمّ نضرب هذه القيم في 3 وكلّما زاد العدد عن الترديد (أو أحد مضاعفاته) نطرح منه الترديد (أو أحد مضاعفاته)

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	**8**	9
$3n \equiv$	0	3	6	9	12	15	18	2	**5**	8
$n \equiv$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	[19]
$3n \equiv$	11	14	17	1	4	7	10	13	16	

$$3n \equiv 5[19] \Rightarrow n \equiv 8[19] \Rightarrow \boxed{n = 19k + 8\,;\, k \in \mathbb{N}}$$

<u>الطريقة الثانية : إضافة الترديد إلى الطرف الثاني حتى يقبل القسمة على الطرف الأول</u>

$$3n \equiv 5[19] \Rightarrow 3n \equiv 5 + 19[19] \Rightarrow 3n \equiv 24[19] \Rightarrow n = 19k + 8\,;\, k \in \mathbb{N}$$

ملاحظة هامة : تستعمل هذه الطريقة فقط إذا كان الطرف الأول أولي مع الترديد (3 مع 19)

<u>مثال 2 (السابق):</u> $b = n^2 + 2\,;\, a = 5n^2 + 7$ ، $d = 1$ أو $d = 3$

نبحث عن قيم n التي من أجلها $d = 3$:

$d = 3$ يعني أنّ a و b من مضاعفات 3 أي :

$$\begin{cases} a \equiv 0[3] \\ b \equiv 0[3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5n^2 + 7 \equiv 0[3] \\ n^2 + 2 \equiv 0[3] \end{cases} \xRightarrow[\text{نطرح الموافقتين}]{} \underbrace{4}_{\equiv 1[3]} n^2 + \underbrace{5}_{\equiv 2[3]} \equiv 0[3]$$

$$\Rightarrow n^2 + 2 \equiv 0[3] \Rightarrow n^2 \equiv -2[3] \xRightarrow[\text{نضيف الترديد}]{} \boxed{n^2 \equiv 1[3]}$$

لإيجاد قيم n التي تحقق الموافقة السابقة نستعمل إحدى الطريقتين السابقتين بالإضافة إلى طريقة ثالثة عندما يكون n من الدرجة الثانية **والترديد أوليا** :

ط1: الجدول

$n \equiv$	0	1	2	[3]
$n^2 \equiv$	0	1	1	[3]

$n^2 \equiv 1[3] \Rightarrow n \equiv 1[3]$ أو $n \equiv 2[3]$

$\Rightarrow \boxed{n = 3k + 1 \text{ أو } n = 3k + 2 \,; k \in \mathbb{N}}$

ط2: إضافة الترديد حتى نحصل على مربع تام

$n^2 \equiv 1[3] \Rightarrow n^2 \equiv 4[3] \Rightarrow n \equiv 2[3]$ أو $n \equiv -2[3] \Rightarrow \boxed{n \equiv 2[3] \text{ أو } n \equiv 1[3]}$

ط3: استعمال المتطابقات الشهيرة

$n^2 \equiv 1[3] \Rightarrow n^2 - 1 \equiv 0[3] \Rightarrow (n-1)(n+1) \equiv 0[3]$

$\Rightarrow n - 1 \equiv 0[3]$ أو $n + 1 \equiv 0[3]$

$\Rightarrow n \equiv 1[3]$ أو $n \equiv -1[3] \Rightarrow \boxed{n \equiv 1[3] \text{ أو } n \equiv 2[3]}$

3- إيجاد قيم n لمّا يكون الترديد مجهولا :

لإيجاد قيم n لمّا يكون الترديد مجهولا نكتب الموافقة عل الشكل : $\boxed{\text{عدد} \equiv 0[\text{الترديد}]}$

مثال1: $n + 9 \equiv 0[n+1]$

$n + 9 \equiv 0[n+1] \Rightarrow n + 9 \equiv n + 1[n+1] \Rightarrow (n+9) - (n+1) \equiv 0[n+1]$

$\Rightarrow 8 \equiv 0[n+1] \Rightarrow (n+1)$ مضاعف لـ $8 \Rightarrow 8$ قاسم لـ $(n+1)$

$(n+1) \in D_8 \Rightarrow (n+1) \in \{1; 2; 4; 8\} \Rightarrow \boxed{n \in \{0; 1; 3; 7\}}$

ملاحظة هامة : لتحديد القواسم ينبغي دائما التأكّد من السؤال إن كان المجهول طبيعيا أم صحيحا، فإن كان المجهول طبيعيا نكتفي بالقواسم الطبيعية ($D_8 = \{1; 2; 4; 8\}$) ، أمّا إن كان المجهول صحيحا نأخذ القواسم الصحيحة ($D_8 = \{-8; -4; -2; -1; 1; 2; 4; 8\}$)

مثال2: $n^2 + 3n + 8 \equiv 0[n+1]$

$n^2 + 3n + 8 \equiv 0[n+1] \Rightarrow n^2 + 3n + 8 \equiv (n+1)^2 + (n+1)[n+1]$

$\Rightarrow n^2 + 3n + 8 \equiv n^2 + 3n + 2[n+1] \Rightarrow 6 \equiv 0[n+1] \Rightarrow (n+1) \mid 6$

$\Rightarrow (n+1) \in \{1; 2; 3; 6\} \Rightarrow \boxed{n \in \{0; 1; 2; 5\}}$

طريقة ثانية: $n^2 + 3n + 8 = (n+1)(n+2) + 6$;

$n^2 + 3n + 8 \equiv 0[n+1] \Rightarrow 6 \equiv 0[n+1] \Rightarrow (n+1) \mid 6$

$\Rightarrow (n+1) \in \{1; 2; 3; 6\} \Rightarrow \boxed{n \in \{0; 1; 2; 5\}}$

4- إيجاد باقي قسمة عدد طبيعي على آخر:

بواقي القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي a^n على b تكون دورية، أي أنها تتكرر من أجل قيم معينّة للعدد n، وبما أنّ باقي a^0 على b يكون دائما 1 ، نحسب بواقي قسمة a^n على b حتى نحصل على قيمة للعدد n حيث باقي a^n على b يساوي 1، ويكون الدور حينئذ هو n.

<u>مثال1:</u> دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 4^n على 7

$4^0 \equiv 1[7]\ ;\ 4^1 \equiv 4[7]\ ;\ 4^2 \equiv 2[7]\ ;\ 4^3 \equiv 1[7]$

$4^{3k} \equiv 1[7]\ ;\ 4^{3k+1} \equiv 4[7]\ ;\ 4^{3k+2} \equiv 2[7]$

<u>مثال2:</u> دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 7

$5^0 \equiv 1[7]\ ;\ 5^1 \equiv 5[7]\ ;\ 5^2 \equiv 4[7]\ ;\ 5^3 \equiv 6[7]\ ;\ 5^4 \equiv 2[7]\ ;\ 5^5 \equiv 3[7]\ ;\ 5^6 \equiv 1[7]$

$5^{6k} \equiv 1[7]\ ;\ 5^{6k+1} \equiv 5[7];\ 5^{6k+2} \equiv 4[7];\ 5^{6k+3} \equiv 6[7];\ 5^{6k+4} \equiv 2[7];\ 5^{6k+5} \equiv 3[7]$

حالة خاصة: دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي 2^n على 10

$2^0 \equiv 1[10]\ ;\ 2^1 \equiv 2[10]\ ;\ 2^2 \equiv 4[10]\ ;\ 2^3 \equiv 8[10]\ ;\ 2^4 \equiv 6[10]\ ;$

$2^5 \equiv 2[10]\ ;\ 2^6 \equiv 4[10]\ ;\ 2^7 \equiv 8[10]\ ;\ 2^8 \equiv 6[10]\ ;$

نلاحظ أنّ الباقي 1 لن يتكرر (لأنّ العدد 2^n زوجي من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$) ، لهذا السبب نتوقف عند تكرار أول باقي يختلف عن 1 (أي 2) ويكون الدور 4.

$2^{4k} \equiv 6[10]\ ;\ 2^{4k+1} \equiv 2[10]\ ;\ 2^{4k+2} \equiv 4[10]\ ;\ 2^{4k+3} \equiv 8[10]\ ; k \in \mathbb{N}^*$

بعد دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد a^n على b يُطلب منكم إيجاد باقي قسمة عدد c مرفوع بقوة على b وهنا نميز الحالات التالية :

1. <u>$c = a$</u>

$4^{2014} = 4^{3(671)+1} \Rightarrow 4^{2014} \equiv 4[7]\ ;\ 5^{1435} = 5^{6(239)+1} \Rightarrow 5^{1435} \equiv 5[7]$

2. <u>$c \equiv a[b]$</u>

$2013 \equiv 4[7] \Rightarrow 2013^{1434} \equiv 4^{3(478)}[7] \Rightarrow 2013^{1434} \equiv 1[7]$

$2014 \equiv 5[7] \Rightarrow 2014^{1995} \equiv 5^{6(332)+3}[7] \Rightarrow 2014^{1995} \equiv 6[7]$

3. <u>$c \equiv 1[b]$</u> أو <u>$c \equiv -1[b]$</u>

$8 \equiv 1[7] \Rightarrow 8^n \equiv 1[7]\ ;\ 6 \equiv -1[7] \Rightarrow 6^{2n} \equiv 1[7]$ و $6^{2n+1} \equiv -1[7]$

4. قوة العدد c مختلفة عن الدور

$4^{6k+5} = 4^{3(2k+1)+2} \Rightarrow 4^{6k+5} \equiv 2[7]; 5^{18k+10} = 5^{6(3k+1)+4} \Rightarrow 5^{18k+10} \equiv 2[7]$

أخيرا يُطلب منكم تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل عدد c' القسمة على b. في هذه الحالة نبسط العدد c' ونحلّ الموافقة باستعمال الطرق المذكورة سابقا.

مثال1: تعيين قيم العدد الطبيعي n حيث : $19^{6n+3} + 26^{6n+4} + 4n^2 + 4 \equiv 0[7]$

$19 \equiv 5[7] \Rightarrow 19^{6n+3} \equiv 5^{6n+3}[7] \Rightarrow 19^{6n+3} \equiv 6[7]$

$26 \equiv 5[7] \Rightarrow 26^{6n+4} \equiv 5^{6n+4}[7] \Rightarrow 26^{6n+4} \equiv 2[7]$

$19^{6n+3} + 26^{6n+4} + 4n^2 + 4 \equiv 0[7] \Rightarrow 8 + 4n^2 + 4 \equiv 0[7]$

$\Rightarrow 4n^2 + 12 \equiv 0[7] \Rightarrow 4(n^2 + 3) \equiv 0[7]$

$\Rightarrow n^2+3\equiv 0[7]$ (لأنّ 7 أولي مع 4) $\Rightarrow n^2\equiv 4[7]\Rightarrow n^2-4\equiv 0[7]$

$\Rightarrow (n-2)(n+2)\equiv 0[7]\Rightarrow n\equiv 2[7]$ أو $n\equiv 5[7]$

$\Rightarrow$ $\boxed{n=7k+2 \text{ أو } n=7k+5}$

5. العبارة تشتمل على عددين دور باقي قسمتهما على الترديد مختلف

مثال:

دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العددين 4^n و 8^n على 9

$4^{3k}\equiv 1[9];\ 4^{3k+1}\equiv 4[9];\ 4^{3k+2}\equiv 7[9]; k\in\mathbb{N}$

$8^{2k}\equiv 1[9];\ 8^{2k+1}\equiv 8[9]\ ; k\in\mathbb{N}$

تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون 6 باقي قسمة (2006^n-2002^n) على 9

$2006^n\equiv 8^n[9];\ 2002^n\equiv 4^n[9];\ 2006^n-\ 2002^n\equiv 6[9]\Rightarrow 8^n-4^n\equiv 6[9]$

بما أن بواقي قسمة 4^n و 8^n على 9 لها دورين مختلفين (2 و 3) ، نأخذ المضاعف المشترك الأصغر لهذين الدورين :

$n=$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$\boldsymbol{6k+4}$	$6k+5$	
$8^n\equiv$	1	8	1	8	**1**	8	$[9]$
$4^n\equiv$	1	4	7	1	**4**	7	$[9]$
$8^n-4^n\equiv$	0	4	3	7	**6**	1	$[9]$

$$\boxed{8^n-4^n\equiv 6[9]\Rightarrow n=6k+4\ ; k\in\mathbb{N}}$$

6. تعيين الثنائيات $(x;y)$ التي تحقّق: $a^x+b^y\equiv c$ [الترديد]

لإيجاد الثنائيات $(x;y)$ نستعمل الجدول المتقاطع $(Tableau\ croisé)$

مثال:

دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة كل من 3^n و 5^n على 16

$3^{4k}\equiv 1[16]\ ;\ 3^{4k+1}\equiv 3[16]\ ;\ 3^{4k+2}\equiv 9[16]\ ;\ 3^{4k+3}\equiv 11[16]$

$5^{4k}\equiv 1[16]\ ;\ 5^{4k+1}\equiv 5[16]\ ;\ 5^{4k+2}\equiv 9[16]\ ;\ 5^{4k+3}\equiv 13[16]$

تعيين جميع الثنائيات (x,y) من الأعداد الطبيعية حيث : $3^x+5^y\equiv 0[16]$

	$x=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
$y=$	$3^x\equiv$ / $5^y\equiv$	1	3	9	11
$4k'$	1	2	4	10	12
$4k'+1$	5	6	8	14	0
$4k'+2$	9	10	12	2	4
$4k'+3$	13	14	0	6	8

$$\boxed{(x,y)\in\{(4k+1;4k'+3),(4k+3;4k'+1)\}\ ;\ (k,k')\in\mathbb{N}^2}$$

5- حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة $ax+by=c$:

1. تقبل هذه المعادلة حلولا في $\mathbb{Z}$ لمّا يقسم $PGCD(a;b)$ العدد c

مثال 1: المعادلة $7x+21y=3$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}$ لأنّ $PGCD(7;21)=7$ لا يقسم 3

مثال 2: المعادلة $6x-5y=2$ تقبل حلولا في $\mathbb{Z}$ لأنّ $PGCD(6;5)=1$ يقسم 2

2. لإيجاد الحل الخاص نستعمل خوارزمية إقليدس

مثال: لنبحث عن حل خاص للمعادلة $27x+22y=1$

$$27=22+5 \quad \Rightarrow \quad 5=27-22$$

$$22=4(5)+2 \quad \Rightarrow \quad 2=22-4(5)$$

$$5=2(2)+1 \quad \Rightarrow \quad 1=5-2(2)$$

$$1=5-2(2)=5-2[22-4(5)]=9(5)-2(22)$$

$$1=9(27-22)-2(22)=27(9)+22(-11) \Rightarrow \boxed{(x_0;y_0)=(9;-11)}$$

ملاحظة هامة : إذا كانت الثنائية $(x_0;y_0)$ حلا خاصا للمعادلة $ax+by=c$ فإنّ الثنائية $(nx_0;ny_0)$ حل خاص للمعادلة $ax+by=nc$

مثال: نلاحظ أنّ $(1;1)$ حل خاص للمعادلة $6x-5y=1$ ، منه الثنائية $(2;2)$ حل خاص للمعادلة $6x-5y=2$.

3. لحل المعادلة نستعمل مبرهنة غوص

مثال: حل في $\mathbb{Z}$ للمعادلة $6x-5y=2$

$$\begin{cases} 6x-5y=2 \\ 6(2)-5(2)=2 \end{cases} \Rightarrow 6(x-2)-5(y-2)=0 \Rightarrow 6(x-2)=5(y-2)$$

بما أنّ 5 يقسم $6(x-2)$ و 5 أولي مع 6 ، إذن 5 يقسم $(x-2)$ منه $x=5k+2$

بالتعويض في العبارة السابقة نجد: $6(5k)=5(y-2)$ منه $y=6k+2$

حلول المعادلة هي : $\boxed{S=\{(5k+2;6k+2)\};k\in\mathbb{Z}}$

ملاحظة: حلول المعادلة $ax-by=c$ تكون من الشكل $(bk+x_0;ak+y_0)$،

أمّا حلول المعادلة $ax+by=c$ تكون من الشكل $(bk+x_0;-ak+y_0)$

أو من الشكل $(-bk+x_0;ak+y_0)$

مثال1: حلول المعادلة $27x-22y=1$ ذات الحل الخاص $(9;11)$ هي :

$$\boxed{S=\{(22k+9\,;27k+11)\};k\in\mathbb{Z}}$$

مثال2: حلول المعادلة $11x+7y=2$ ذات الحل الخاص $(-3;5)$ هي :

$$\boxed{S=\{(7k-3\,;-11k+5)\}=\{(-7k-3\,;11k+5)\};k\in\mathbb{Z}}$$

4. يمكن حل المعادلة باستعمال الموافقات

مثال: حل المعادلة $4x-9y=19$

$4x - 9y = 19 \Rightarrow 4x = 9y + 19 \Rightarrow 9y + 19 \equiv 0[4]$
$\Rightarrow y + 3 \equiv 0[4] \Rightarrow y \equiv 1[4] \Rightarrow y = 4k + 1$
$4x = 9(4k + 1) + 19 = 36k + 28 = 4(9k + 7)$
$\Rightarrow x = 9k + 7 \Rightarrow \boxed{S = \{(9k + 7; 4k + 1)\} ; k \in \mathbb{Z}}$

6- حل المعادلات المشتملة على m و d :

لحل المعادلات المشتملة على $m = PPCM(a; b)$ و$d = PGCD(a; b)$ نتبع الخطوات التالية

1. كتابة a و b بدلالة a' و b'

$d = PGCD(a; b) \Rightarrow \boxed{a = da'; b = db'; PGCD(a'; b') = 1}$

2. إيجاد علاقة بين m و d ، a' و b'

$m \times d = a \times b \Rightarrow m \times d = da' \times db' \Rightarrow \boxed{m = da'b'}$

3. تعيين القيم الممكنة لـ a' وb' مع مراعاة الشرط $PGCD(a'; b') = 1$ ، ثمّ استنتاج القيم الممكنة لـ a وb

<u>**مثال:**</u>

عيّن في الحالات التالية قيم العددين الطبيعيين a وb

1) $\begin{cases} a + b = 420 \\ PGCD(a, b) = 84 \end{cases} \Rightarrow 84a' + 84b' = 420$
$\Rightarrow 84(a' + b') = 420 \Rightarrow a' + b' = 5$
$\Rightarrow (a', b') \in \{(1,4); (4,1); (2,3); (3,2)\}$
$\Rightarrow \boxed{(a, b) \in \{(84,336); (336,84); (168,252); (252,168)\}}$

2) $\begin{cases} a \times b = 360 \\ PGCD(a, b) = 6 \end{cases} \Rightarrow 6a' \times 6b' = 360$
$\Rightarrow 36(a' \times b') = 360 \Rightarrow a' \times b' = 10$
$\Rightarrow (a', b') \in \{(1,10); (10,1); (2,5); (5,2)\}$
$\Rightarrow \boxed{(a, b) \in \{(6,60); (60,6); (12,30); (30,12)\}}$

3) $\begin{cases} a^2 - b^2 = 825 \\ PGCD(a, b) = 5 \end{cases} \Rightarrow (5a')^2 - (5b')^2 = 825 \Rightarrow 25\left(a'^2 - b'^2\right) = 825$
$\Rightarrow a'^2 - b'^2 = 33 \Rightarrow (a' - b')(a' + b') = 33$
$\begin{cases} a' - b' = 1 \\ a' + b' = 33 \end{cases} \Rightarrow 2a' = 34 \Rightarrow a' = 17 \Rightarrow b' = 16 \Rightarrow \boxed{(a, b) = (85,80)}$
$\begin{cases} a' - b' = 3 \\ a' + b' = 11 \end{cases} \Rightarrow 2a' = 14 \Rightarrow a' = 7 \Rightarrow b' = 4 \Rightarrow \boxed{(a, b) = (35,20)}$

ملاحظة: الحالتان $\begin{cases} a' - b' = 33 \\ a' + b' = 1 \end{cases}$ و $\begin{cases} a' - b' = 11 \\ a' + b' = 3 \end{cases}$ مرفوضتان لأنّ $a' + b' > a' - b'$

4) $\begin{cases} PPCM(a,b)=90 \\ PGCD(a,b)=18 \end{cases}$; $m=da'b' \Rightarrow a'\times b'=\dfrac{m}{d}=\dfrac{90}{18}=5$

$(a',b')\in\{(1,5);(5,1)\} \Rightarrow \boxed{(a,b)\in\{(18,90);(90,18)\}}$

5) $PPCM(a,b)-9PGCD(a,b)=13 \Rightarrow m-9d=13 \Rightarrow da'b'-9d=13$

$\Rightarrow d(a'b'-9)=13 \Rightarrow d \mid 13 \Rightarrow d\in\{1,13\}$

$d=1: a'b'-9=13 \Rightarrow a'b'=22 \Rightarrow (a',b')\in\{(1,22);(22,1);(2,11);(11,2)\}$

$\Rightarrow \boxed{(a,b)\in\{(1,22);(22,1);(2,11);(11,2)\}}$

$d=13: a'b'-9=1 \Rightarrow a'b'=10 \Rightarrow (a',b')\in\{(1,10);(10,1);(2,5);(5,2)\}$

$\Rightarrow \boxed{(a,b)\in\{(13,130);(130,13);(26,65);(65,26)\}}$

6) $\begin{cases} d+m=156 \\ m=d^2 \end{cases} \Rightarrow d^2+d-156=0 \Rightarrow d=12 \Rightarrow m=144$

$m=da'b' \Rightarrow a'b'=\dfrac{m}{d}=12 \Rightarrow (a';b')\in\{(1;12);(12;1);(3;4);(4;3)\}$

$\Rightarrow \boxed{(a;b)\in\{(12;144);(144;12);(36;48);(48;36)\}}$

7- التعداد :

1. لتحويل عدد من النظام العشري إلى نظام غير عشري نجري قسمات متتالية لهذا العدد على الأساس ونكتب البواقي المتحصل عليها من النهاية إلى البداية

$$\begin{array}{l|l} 2014 & 7 \\ \boxed{5} & 287 \;|\; 7 \\ & \boxed{0} \;\; 41 \;|\; 7 \\ & \quad \boxed{6} \;\; 5 \;|\; 7 \\ & \qquad \boxed{5} \;\; 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 1435 & 8 \\ \boxed{3} & 179 \;|\; 8 \\ & \boxed{3} \;\; 22 \;|\; 8 \\ & \quad \boxed{6} \;\; 2 \;|\; 8 \\ & \qquad \boxed{2} \;\; 0 \end{array}$$

$2014=\overline{5605}^{7}$ $\qquad$ $1435=\overline{2633}^{8}$

2. لتحويل عدد من نظام غير عشري إلى النظام العشري نضرب أرقام العدد في الأساس مرفوع بقوة تناسب رتبة الرقم

$\overline{5605}^{7}=5+0(7)+6(7)^2+5(7)^3=2014$

$\overline{2633}^{8}=3+3(8)+6(8)^2+2(8)^3=1435$

3. لحل المعادلات المشتملة على أعداد مكتوبة في أسس مختلفة، لا بدّ من الانتباه أنّ كل أرقام العدد هي أصغر تماما من الأساس، وبعد كتابة الأعداد في النظام العشري (غالبا) ما تحصلون على المعادلة المطلوب حلها في بداية السؤال.

مثال 1:

1) حل في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة $7x - 9y = -19$

2) نعتبر العدد الطبيعي n الذي يُكتب $\overline{2\alpha5}$ في نظام العد ذي الأساس 7 ، و يُكتب $\overline{1\beta3}$ في نظام العد ذي الأساس 9. عيّن α و β ، ثمّ اكتب العدد n في النظام العشري.

$7x - 9y = -19 \Rightarrow \boxed{S = \{(9k+5\,;7k+6)\}\,;k \in \mathbb{Z}}$

$n = \overline{2\alpha5}^7 = \overline{1\beta3}^9 \Rightarrow 2(7)^2 + 7\alpha + 5 = 9^2 + 9\beta + 3$

$\Rightarrow 7\alpha - 9\beta = -19 \Rightarrow (\alpha;\beta) = (9k+5\,;7k+6)$

$\begin{cases} 0 \le \alpha < 7 \\ 0 \le \beta < 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le 9k+5 < 7 \\ 0 \le 7k+6 < 9 \end{cases} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 5\,;\ \beta = 6\,;n = 138}$

مثال 2:

1- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $23x - 17y = 6$

2- استنتج الأعداد الطبيعية A الأصغر من 1000 حيث $A \equiv 2[23]$ و $A \equiv 8[17]$

3- اكتب هذه الأعداد في النظام ذي الأساس 7

$23x - 17y = 6 \Rightarrow \boxed{S = \{(17k+1\,;\ 23k+1)\}\,;\ k \in \mathbb{Z}}$

$A = 23x + 2 = 17y + 8 \Rightarrow 23x - 17y = 6$

$\Rightarrow (x;y) = (17k+1\,;\ 23k+1)$

$k = 0:\ (x;y) = (1\,;1)\,;A = 25 = \overline{34}^7$

$k = 1:\ (x;y) = (18\,;24)\,;A = 416 = \overline{1133}^7$

$k = 2:\ (x;y) = (35\,;47)\,;A = 807 = \overline{2232}^7$

8- تذكّر :

1. إذا كان d يقسم a و d يقسم b فإنّ d يقسم $\alpha a + \beta b$ ، $(\alpha;\beta) \in \mathbb{Z}^2$
2. إذا كان a يقسم bc و a أولي مع b فإنّ a يقسم c $(Gauss)$
3. إذا كان $PGCD(a;b) = 1$ فإنّ $PGCD(a;b;c) = 1$ مهما يكن العدد c
4. إذا كان $PGCD(a;b) = 1$ فإنّ $PGCD(a^n;b^n) = 1$ مهما يكن العدد n
5. إذا وُجِدت ثنائية $(\alpha;\beta) \in \mathbb{Z}^2$ حيث : $\alpha a + \beta b = 1$ ، فإنّ a و b أوليان فيما بينهما $(Bézout)$
6. إذا كان a و b أوليين فيما بينهما فإنّ : $a + b$ و ab أوليان فيما بينهما ، كذلك $(a+b)^2$ و ab أوليان فيما بينهما.
7. إذا كان $m = PPCM(a;b)$ و $d = PGCD(a;b)$ ، فإنّ :

$a = da'; b = db'; PGCD(a';b') = 1$

$m \times d = a \times b = da' \times db' \Rightarrow m = da'b' \Rightarrow \dfrac{m}{d} = a'b'$

تمارين القسمة والموافقات في $\mathbb{Z}$

التمرين 01 :

n, b, a أعداد طبيعية غير معدومة حيث : $b = n^2 + 2 \,;\, a = 5n^2 + 7$

1. بيّن أنّ كل قاسم مشترك للعددين a وb يقسم 3
2. بيّن أنّ $PGCD(a, b) = 3$ إذا وفقط إذا $n^2 \equiv 1[3]$
3. استنتج حسب قيم n ، $PGCD(a, b)$.

التمرين 02 :

n, b, a أعداد طبيعية غير معدومة حيث : $b = 5n - 2 \,;\, a = 2n + 3$

1. بيّن أنّه إذا كان العددان a وb غير أوليين فيما بينهما فإنّ : $PGCD(a, b) = 19$
2. عيّن قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a, b) = 19$.

التمرين 03 :

n, b, a أعداد طبيعية غير معدومة حيث :

$$b = 2n^2 + n \,;\, a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1$$

1. بيّن أنّ العدد $(2n + 1)$ قاسم مشترك للعددين a وb
2. باستعمال مبرهنة بيزو بيّن أنّ :

$PGCD(n, n + 1) = 1$ و $PGCD[n, (n + 1)^2] = 1$

3. استنتج $PGCD(a, b)$.

التمرين 04 :

1. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(1) \ldots 9x - 7y = 3$
2. إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (1) ، عيّن قيم $PGCD(x, y)$
3. عيّن الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (1) التي تحقق: $\begin{cases} m = 1242 \\ d = 3 \end{cases}$

حيث : $d = PGCD(x, y)$ و $m = PPCM(x, y)$

التمرين 05 :

1. أثبت أن العدد 251 أولي.
2. حلل العدد 2008 إلى جداء عوامل أولية واستنتج الأعداد الطبيعية التي مكعب كل منها يقسم 2008.
3. عين الأعداد الطبيعية a و b بحيث : $m^3 + 35d^3 = 2008$ ، علما أنّ : $m = PPCM\ (a,b)\ ; d = PGCD(a,b)$.

التمرين 06 :

عيّن كل الثنائيات (a, b) من الأعداد الطبيعية حيث :

$$(1)\begin{cases} a+b=420 \\ PGCD(a,b)=84 \end{cases} ;\ (2)\begin{cases} a\times b=360 \\ PGCD(a,b)=6 \end{cases} ;$$

$$(3)\begin{cases} a^2-b^2=825 \\ PGCD(a,b)=5 \end{cases} ;\ (4)\begin{cases} PPCM(a,b)=90 \\ PGCD(a,b)=18 \end{cases} ;$$

$$(5)\ a \le b \text{ مع } PPCM(a,b)-9PGCD(a,b)=13$$

التمرين 07 :

ليكن n عددا طبيعيا

1. برهن أنّ العددين $n^2 + 5n + 4$ و $n^2 + 3n + 2$ يقبلان القسمة على $(n + 1)$
2. عيّن قيم n حتى يقبل العدد $3^2 + 15n + 19$ القسمة على $(n + 1)$
3. استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : العدد $3n^2 + 15n + 19$ لا يقبل القسمة على $n^2 + 3n + 2$.

التمرين 08 :

1. عيّن الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584
2. عيّن العددين الطبيعيين a و b حيث $a < b$ اللذين يحققان : $\begin{cases} a+b=32 \\ a^2+b^2=584 \end{cases}$

التمرين 09 :

n عدد طبيعي. نضع : $A = n^4 + n^2 + 1$

1. حلل A إلى جداء عاملين من الدرجة الثانية (لاحظ أنّ : $A = n^4 + 2n^2 + 1 - n^2$)
2. نضع : $b = n^2 - n + 1 \,;\, a = n^2 + n + 1$
   - أ. بيّن أنّ العددين a و b فردين
   - ب. بيّن أنّ كل قاسم مشترك للعددين a و b يقسم $2n$ و $2(n^2 + 1)$
   - ج. بيّن أنّ العددين n و $n^2 + 1$ أوليان فيما بينهما
   - د. استنتج أنّ العددين a و b أوليان فيما بينهما.

التمرين 10 :

n, b, a أعداد طبيعية غير معدومة حيث : $b = 13n - 1 \,;\, a = 11n + 3$

1. بيّن أنّ كل قاسم مشترك للعددين a و b يقسم 50
2. باستعمال خوارزمية إقليدس عيّن حلا خاصا للمعادلة : $50x - 11y = 1$ ، ثمّ حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $50x - 11y = 3$
3. استنتج قيم n التي يكون من أجلها : $PGCD(a, b) = 50$.
4. ما هي قيم n التي يكون من أجلها : $PGCD(a, b) = 25$ ؟

التمرين 11 :

نعتبر في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $324x - 245y = 7 \ldots (E)$

1. باستعمال خوارزمية إقليدس عيّن حلا خاصا للمعادلة (E)، ثم حل في $\mathbb{Z}$ هذه المعادلة
2. بيّن أنّه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (E)، فإنّ : $x \equiv 0[7]$
3. نضع : $PGCD(x, y) = d$
   - أ. بيّن أنّ القيم الممكنة للعدد d هي 1 و7
   - ب. عيّن كل الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (E) بحيث $PGCD(x, y) = 7$.

التمرين 12 :

1. عيّن القاسم المشترك الأكبر للأعداد 1996 ، 1497 و2994.
2. نعتبر المعادلة : (1) ... $1996x - 1497y = 2994$ حيث : x و y عددان صحيحان.
   - أ- أثبت أنّ x مضاعف للعدد 3 و y مضاعف للعدد 2 ، ثمّ حل المعادلة (1).
   - ب- عيّن الحلول $(x; y)$ بحيث يكون : $xy = 1950$.

التمرين 13 :

1. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : (I) ... $4x - 9y = 19$
2. ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x; y)$ حل للمعادلة (I)
   أ- ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟
   ب- عيّن حلول المعادلة بحيث يكون $d = 19$
3. عيّن الثنائيات $(a; b)$ الصحيحة حلول المعادلة : $4a^2 - 9b^2 = 19$

التمرين 14 :

1. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $5x - 3y = 2$
2. A عدد طبيعي يُكتب $\overline{55}$ في النظام ذي الأساس x ويُكتب $\overline{37}$ في النظام ذي الأساس y حيث $y \leq 20 ; x \leq 12$
   عيّن القيم الممكنة للعددين x و y ، ثمّ اكتب A في النظام العشري.

التمرين 15 :

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) ... $12x - 7y = 13$

1. عيّن الثنائية (x_0, y_0) حلا للمعادلة (1) والتي تحقق $4x_0 - y_0 = 11$
2. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1)
3. عيّن الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (1) التي تحقق : $PGCD(x, y) = 13$

التمرين 16 :

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ... $5x - 6y = 3$

1. بيّن أنّه إذا كان $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإنّ x مضاعف للعدد 3
2. استنتج حلا خاصا (x_0, y_0) ، ثمّ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)
3. نضع : $d = PGCD(x, y)$
   أ- عيّن القيم الممكنة للعدد d
   ب- عيّن الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الطبيعية حلول المعادلة (E) حيث x أولي مع y
4. عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق $x^2 - y^2 < 56$

التمرين 17 :

x و y عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما.

1. برهن أنّ $x+y$ أولي مع xy
2. α و β عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما. عيّن α و β حيث : $15\alpha^2 - 229\alpha = 30\beta$
3. عيّن الثنائيات $(x;y)$ الأولية فيما بينها والتي تحقق $15(x^2+y^2) = 229(x+y)$.

التمرين 18 :

x و y عددان طبيعيان حيث $0 < x \leq y$

نضع $PGCD(x,y) = d$ و $PPCM(x,y) = m$

نريد تعيين x و y حيث $m^2 - 5d^2 = 2000 \ldots (*)$

1. برهن أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة $(*)$ فإنّ d^2 يكون قاسما للعدد 2000
2. حلل العدد 2000 إلى جداء عوامل أولية ، ثمّ استنتج الأعداد التي مربعاتها تقسم العدد 2000
3. برهن أنّ 5 هو قاسم مشترك للعددين d و m. ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟
4. استنتج القيم الممكنة للعددين x و y.

التمرين 19 :

لتكن a، b، x، y أربعة أعداد طبيعية غير معدومة حيث : $x = 2a+3b$ و $y = 3a+4b$

1. بيّن أنّ $PGCD(a;b) = PGCD(x;y)$ ، ثمّ استنتج أنه إذا كان a و b أوليين فيما بينهما فإنّ x و y أوليان فيما بينهما.
2. عيّن الثنائيات $(\alpha;\beta)$ من الأعداد الطبيعية بحيث:

$PGCD(\alpha;\beta) = 5$ و $(2\alpha+3\beta)(3\alpha+4\beta) = 2200$.

التمرين 20 :

a و b عددان طبيعيان يُكتبان على الترتيب $\overline{2310}$ ، $\overline{252}$ في نظام تعداد ذي الأساس n ،

وليكن $d = PGCD(a,b)$

1. برهن أنّ $(2n+1)$ يقسم كلا من a و b وأنّ $d = 2n+1$ أو $d = 2(2n+1)$
2. نأخذ $n = 6$. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $ax+by = -26$.

التمرين 21 :

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : (1) ... $16x + 59y = 2006$

1. حلل إلى جداء عوامل أولية العدد 2006 ، ثمّ استنتج أنّه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإنّ x مضاعف للعدد 59
2. حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1)
3. عيّن الحلول $(x; y)$ للمعادلة (1) التي تنتمي ${\mathbb{N}^*}^2$
4. عيّن الأعداد الطبيعية غير المعدومة a و b التي تحقق : $16m + 59d = 2006$ حيث $PGCD(x, y) = d$ ، $PPCM(x, y) = m$.

التمرين 22 :

a و b عددان طبيعيان. نضع $d = PGCD(a, b)$ و $m = PPCM(a, b)$

1. عيّن الثنائيات (a, b) التي تحقق $d + m = b + 9$
2. حلل العدد 319 إلى جداء عوامل أولية
3. برهن أنّه إذا كان x أولي مع y فإنّ $3x + 5y$ أولي مع $x + 2y$
4. عيّن الثنائيات (a, b) التي تحقق : $\begin{cases}(3a + 5b)(a + 2b) = 1276 \\ ab = 2m\end{cases}$.

التمرين 23 :

1. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) ... $6x + 7y = 79$
   أ. عيّن الثنائيات (x_0, y_0) حلول المعادلة (1) والتي تحقق $x_0 + y_0^2 = 13$
   ب. استنتج حلول المعادلة (1)
   ج. عيّن الثنائيات الطبيعية (x, y) حلول المعادلة (1)
2. a و b عددان طبيعيان. نضع $d = PGCD(a, b)$ و $m = PPCM(a, b)$
   عيّن الثنائيات (a, b) التي تحقق : $\begin{cases}7a + 6b = 79d \\ m = 840\end{cases}$.

التمرين 24 :

1. حلل العدد 275 إلى جداء عوامل أولية ، ثمّ عيّن قواسم 275
2. جد الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 275
3. برهن أنّه إذا كان a أولي مع b فإنّ $(a + b)^2$ أولي مع ab
4. نضع $d = PGCD(a, b)$ و $m = PPCM(a, b)$
   أ. عيّن الثنائيات (a, b) التي تحقق : $6(a + b)^2 = 275m$
   ب. عيّن الثنائيات (a, b) التي تحقق : $\begin{cases}d + m = 156 \\ m = d^2\end{cases}$.

التمرين 25 :

1. عيّن القاسم المشترك الأكبر للأعداد التالية : 2189 ، 1393 ، 398
2. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) ... $2189x + 1393y = 398$
   أ. عيّن قيمة α حتى تكون الثنائية $(-3;\alpha)$ حلا خاصا للمعادلة (1)
   ب. استنتج حلول المعادلة (1)
3. من بين حلول المعادلة (1) عيّن تلك التي تحقق :
   أ. $x < 11$ و $y < 18$
   ب. $x^2 + 6y - 39 < 0$.

التمرين 26 :

1. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) ... $95(x-2) = 76(y+1)$
2. من بين حلول المعادلة (1) عيّن الثنائيات (α,β) التي تحقق : $\alpha^2 \equiv \beta[5]$
3. حل في مجموعة الأعداد الطبيعية الجملة التالية : $\begin{cases} 5(2-x) = -4(y+1) \\ x^2 - y^2 \geq 0 \end{cases}$.

التمرين 27 :

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) ... $7x + 13y = 119$

1. بيّن أنّه إذا كان $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإنّ y مضاعف للعدد 7 ، ثم استنتج حلول المعادلة (1)
2. عيّن الأعداد الطبيعية غير المعدومة α ، β و γ حيث :
   $\overline{\alpha\gamma 1}^6 + \overline{1\beta 3\beta}^8 = \overline{32\gamma\alpha}^7$

التمرين 28 :

1. بيّن أنّ العددين 27 و 22 أوليان فيما بينهما
2. باستعمال خوارزمية إقليدس ، عيّن عددين صحيحين a و b يحققان : $27a + 22b = 1$
3. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $405x - 330y = 15$
3. استنتج في مجموعة الأعداد الصحيحة حل الجملة التالية : $\begin{cases} \lambda \equiv 0[27] \\ \lambda \equiv 1[22] \end{cases}$.

التمرين 29 :

1. احسب $PGCD(580;1885)$
2. α عدد صحيح. نعتبر المعادلة : (1) ... $1885x - 580y = \alpha$. عيّن قيّم α حتى تقبل المعادلة (1) حلولا في $\mathbb{Z}^2$
3. نضع : $\alpha = 1305$

أ. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1)

ب. عيّن الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (1) حيث يكون x قاسما لـ y.

التمرين 30 :

حافلة صغيرة لنقل المسافرين بها 16 راكبا مصنفون إلى 3 أصناف : مجموعة دفعت 20 دج (صنف a) ومجموعة أخرى دفعت 15 دج (صنف b) ، أمّا المجموعة الثالثة فلم تدفع شيئا (صنف c). إذا علمت أنّ المبلغ الإجمالي المدفوع هو 285 دج ، احسب عدد الركاب من كل صنف.

التمرين 31 :

1. أ. حلل العدد 1996 إلى جداء عوامل أولية

أ- عيّن مجموعة قواسم 1996

ب- بيّن أنّ جداء قواسم 1996 هو $8(998)^3$

ج- جد العددين الطبيعيين اللذين مربع كل منهما يقسم العدد 1996

2. نضع $d = PGCD(x;y)$ و $m = PPCM(x,y)$

عيّن كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق : $2m^2 + 49d^2 = 1996$

التمرين 32 :

نعتبر في مجموعة الأعداد الطبيعية المعادلة (1) ... $4\alpha - 7\beta = 3$

1. عيّن حلا خاصا للمعادلة (1) وليكن (α_0,β_0) حيث $0 < \alpha_0 < 7$ ، ثمّ استنتج جميع حلولها
2. استنتج مما سبق حلول المعادلة (2) ... $68x - 119y = 102$ ، حيث $(x,y) \in \mathbb{N}^2$
3. نضع $d = PGCD(x,y)$. ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟
4. عيّن كل الثنائيات (α,β) حلول المعادلة (1) التي تحقق : $PGCD(\alpha,\beta) = 1$.

التمرين 33 :

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) ... $3x - 11y = 5$

2. بيّن أنّ المعادلة (1) تكافئ المعادلة (2) ... $3x - 5 \equiv 0[11]$
3. عيّن حلول المعادلة (2) ، ثمّ استنتج حلول المعادلة (1)
4. نضع : $d = PGCD(x;y)$

أ. عيّن القيم الممكنة للعدد d

ب. عيّن الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية حلول المعادلة (1) التي من أجلها يكون $d = 5$

التمرين 34 :

n عدد صحيح. نضع : $a = n - 2$ و $b = 2n^2 - 7n + 17$

1. عيّن قيّم العدد n حيث يقبل b القسمة على a

2. ليكن (C) منحنى الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ : $f(x) = \frac{2x^2-7x+17}{x-2}$

   عيّن نقط المنحنى (C) التي إحداثياها أعداد صحيحة.

التمرين 35 :

1. انشر العدد $(n+2)^3$ حيث n عدد طبيعي

2. نعتبر كثير الحدود : $P(x) = 3x^3 - 13x^2 - 48x - 56$

   أ. احسب $P(7)$ ، ثمّ استنتج تحليلا لـ $P(x)$

   ب. حل عندئذ المعادلة $P(x) = 0$

3. ليكن العدد الطبيعي a حيث : $a = \overline{5564}^n = \overline{2668}^{n+2}$. عيّن قيمة n ، ثمّ اكتب العدد a في النظام العشري.

التمرين 36 :

a و b عددان طبيعيان و p عدد طبيعي أولي حيث: $PGCD(a+b\,;ab) = p^2$

1. بيّن أنّ p^2 يقسم a^2 ، ثمّ استنتج أنّ p يقسم a
   - بطريقة مماثلة بيّن أنّ p يقسم b
   - أثبت أنّ : $PGCD(a\,;b) = p^2$ أو $PGCD(a;b) = p$

2. نعتبر في $\mathbb{N}^2$ الجملة : $(E):\begin{cases} PGCD(a+b;ab) = 49 \\ PPCM(a,b) = 231 \end{cases}$
   - بيّن أنّ : $PGCD(a;b) = 7$
   - عيّن كل الثنائيات $(a;b)$ في $\mathbb{N}^2$ والتي تحقق (E).

التمرين 37 :

لتكن الأعداد : $a_n = 4 \times 10^n - 1$ ، $b_n = 2 \times 10^n - 1$ ، $c_n = 2 \times 10^n + 10$ حيث $n \in \mathbb{N}$

1. أحسب b_3 ، c_3
   - بيّن أنّ a_n و c_n يقبلان القسمة على 3 ، وأنّ b_3 عدد أولي
   - بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $b_n \times (c_n - 9) = a_{2n}$

     استنتج تحليلا إلى جداء عوامل أولية للعدد a_6

- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$$PGCD(b_n\,, c_n) = PGCD(b_n\,, 11)$$

استنتج أنّ b_n و c_n أوليان فيما بينهما

2. نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ... $b_3x + c_3y = 1$
   - بيّن أنّ المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$
   - تحقق أنّ (731,727-) حل للمعادلة (E)، ثمّ حل في $\mathbb{Z}^2$ هذه المعادلة.

التمرين 38 :

1. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : (E) ... $3x - 2y = 1$
2. ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم
   أ. بيّن أنّ الثنائية $(14n + 3\,, 21n + 4)$ هي حل للمعادلة (E)
   ب. استنتج أنّ العددين $21n + 4$ و $14n + 3$ أوليان فيما بينهما
3. ليكن d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين : $21n + 4$ و $2n + 1$
   أ. بيّن أنّ $d = 1$ أو $d = 13$
   ب. بيّن أنّه إذا كان $d = 13$ فإنّ $n \equiv 6[13]$
4. من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ نضع :

$$A = 21n^2 - 17n - 4 \quad \text{و} \quad B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$$

   أ. بيّن أنّ العددين A و B يقبلان القسمة على $(n - 1)$
   ب. جد حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B.

التمرين 39 :

1. نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ المعادلة: (1) ... $11n - 24m = 1$
   أ. برر أنّ المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا
   ب. عيّن مجموعة حلول المعادلة (1) علما أنّ الثنائية $(11;\ 5)$ حل لها
2. أ. بيّن أنّ 9 يقسم $10^{11} - 1$ و $10^{24} - 1$
   ب. بيّن أنّه مهما يكن الحل (n, m) فإنّ: $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$
   ج. بيّن أنّ : $10^{11} - 1$ يقسم $10^{11n} - 1$ وأنّ: $10^{24} - 1$ يقسم $10^{24m} - 1$

   استنتج وجود عددين صحيحين N و M بحيث:

$$(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9$$

   د. بيّن أنّ كل قاسم مشترك للعددين $10^{24} - 1$ و $10^{11} - 1$ يقسم 9
   ه. استنتج مما سبق $PGCD(10^{11} - 1; 10^{24} - 1)$.

التمرين 40 :

1. نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $91x + 10y = 1 \ldots (1)$
   أ. عيّن حلا خاصا للمعادلة (1) ، ثمّ استنتج حلا خاصا للمعادلة
   $91x + 10y = 412 \ldots (2)$
   ب. حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (2)
2. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد الطبيعي : $A_n = 3^{2n} - 1$ قابلا للقسمة على 8
3. نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $A_3x + A_2y = 3296 \ldots (3)$
   أ. عيّن في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (3) ، ثمّ بيّن أنّ المعادلة (3) تقبل حلا وحيدا (α, β) من $\mathbb{N}^2$ يُطلب تعيينه
   ب. جد قيمة العدد الطبيعي $(\alpha + \beta)A_2 + 10$.

التمرين 41 :

a و b عددان طبيعيان حيث: $a = 5n + 3$ ، $b = 2n + 1$ ، $n \in \mathbb{N}$

1. أثبت أنّ العددين a و b أوليان فيما بينهما
2. نضع : $x = 5m + 3$ ، $y = 2m - 1$ ، $m \in \mathbb{N}$
   أ- عين علاقة بين x و y مستقلة عن العدد الطبيعي m
   ب- نفرض أن $PGCD\ (x; y) = d$
   - عين القيم الممكنة لـ d
   - عين الثنائيات $(x; y)$ حيث $d = 11$.

التمرين 42 :

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $8x + 5y = 1 \ldots (E)$

1. جد حلا خاصا للمعادلة (E) ، ثمّ حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ هذه المعادلة
2. ليكن N عددا طبيعيا حيث يوجد عددان طبيعيان a و b يحققان : $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$
   أ. بيّن أنّ الثنائية $(a; -b)$ حل للمعادلة (E)
   ب. جد باقي القسمة الإقليدية للعدد N على 40
3. حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $8x + 5y = 100$
4. للاشتراك في رحلة ، دفع مجموعة أشخاص من الجنسين 100 قطعة نقدية، حيث دفع كل ذكر 8 قطع نقدية ودفعت كل أنثى 5 قطع نقدية.
   ما هو عدد الذكور وعدد الإناث في هذه المجموعة ؟

التمرين 43 :

n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2.

1. بيّن أنّ العددين n و $2n+1$ أوليان فيما بينهما
2. نضع : $\alpha = n+3$ ، $\beta = 2n+1$ و $PGCD(\alpha,\beta) = d$
   أ. ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟
   ب. بيّن أنّ α و β مضاعفان للعدد 5 إذا وفقط إذا كان $(n-2)$ مضاعفا للعدد 5
3. نعتبر العددين a و b حيث : $a = n^3+2n^2-3n\ ;\ b = 2n^2-n-1$
   بيّن أنّ العددين a و b يقبلان القسمة على $(n-1)$
4. نضع : $PGCD[n(n+3),(2n+1)] = d'$
   أ. بيّن أنّ $d = d'$
   ب. استنتج $PGCD(a;b)$
   ج. حدد $PGCD(a;b)$ من أجل $n = 2001$ ثمّ من أجل $n = 2002$.

التمرين 44 :

من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $a = 3n+4$ و $b = 2n+1$

1) تحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ: $2a-3b=5$ ، $a-b=n+3$ ،
$3(n+3)-5=a$ ، $2(n+3)-5=b$
استنتج أنّ: $PGCD(a;b) = PGCD(n+3;5)$
2) استنتج تبعا لقيم n ، قيم $PGCD(a;b)$
3) x ، y ، z أعداد طبيعية غير معدومة تشكل بهذا الترتيب حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها q حيث $q \in \mathbb{N}^*$. عيّن الأعداد q ، y ، x ، z علما أنّ: $PGCD(3z+4y;2z+y) = 10$
4) عيّن العددين الطبيعيين m ، n علما أنّ n أولي و $m^2 = a$.

التمرين 45 :

A و B عددان صحيحان مكتوبان في النظام ذي الأساس 9 كما يلي: $A = \overline{abcd}$ و $B = \overline{bcda}$

حيث a ، b ، c ، d أعداد طبيعية

نعتبر في كل ما يلي أنّ العدد B يقبل القسمة على 7

1) بيّن أنّه إذا كان $a = 7$ فإنّ A يقبل القسمة على 7
2) بيّن أنّ العدد $9A-a$ يقبل القسمة على 7
3) استنتج أنّه إذا كان A قابلا للقسمة على 7 فإنّ $a = 7$
4) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $7x-4y=1$
5) نضع: $c=0$ ، $d=1$. عيّن العدد A بحيث يكون A قابلا للقسمة على 7.

التمرين 46 :

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) ... $35x - 42y = \alpha$ مع α عدد حقيقي

2) ما هو الشرط اللازم والكافي حتى تكون للمعادلة (1) حلول في $\mathbb{Z}^2$

3) نضع $\alpha = 21$

أ- بيّن أنّه إذا كان $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإنّ x مضاعف 3 ، ثمّ استنتج حلا خاصا للمعادلة

ب- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1)

ج- عيّن E مجموعة الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (1) التي تحقق :

$x^2 - y^2 < 96$

4) نفرض c عدد طبيعي أكبر تماما من 5 ، a و b عددان طبيعيان يُكتبان $\overline{21}$ و $\overline{15}$ على الترتيب في نظام التعداد ذي الأساس c

أ- عيّن c ثمّ a و b علما أنّ $(a; b)$ حل للمعادلة (1)

ب- تحقق أنّ $(a; b)$ تنتمي إلى المجموعة E.

التمرين 47 :

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: (1) ... $5x - 3y = 2$

1) بيّن أنّ المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا

2) أثبت أنّه إذا كان $(x ; y)$ حلا للمعادلة (1) فإنّ: $x \equiv 1[3]$

3) استنتج حلول المعادلة (1)

4) أ. بيّن أنّه إذا كان $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإنّ: $PGCD(x; y) = PGCD(x; 2)$

ب. استنتج القيم الممكنة لـ $PGCD(x; y)$

ج. عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (1) التي تحقق: $PGCD(x; y) = 2$

التمرين 48 :

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 8^n على 10

2. ما هو باقي قسمة العددين 2^{192} ;8^{341} على 10 ؟

3. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $3 \times 8^{4n} + 2^{12n+9} \equiv 0[10]$.

التمرين 49 :

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على كل من 5 و7

2. ما هي مجموعة قيّم n حتى يكون باقي قسمة 2^n على كل من 5 و7 هو 2 ؟

3. حل في $\mathbb{N}$ الجملة التالية : $\begin{cases} n - 1 \equiv 0[3] \\ (n-1)2^n \equiv 0[7] \end{cases}$

التمرين 50 :

1. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n :

أ) $n^3 - n \equiv 0[3]$ ، ب) $n^2(n^2-1) \equiv 0[12]$ ، جـ) $7n^3 + 35n \equiv 0[42]$

2. عين قيم العدد الطبيعي n حيث :

أ) $n^2 - 3n + 6 \equiv 0[5]$ ، ب) $n + 9 \equiv 0[n+1]$ ، جـ) $n^2 + 3n + 8 \equiv 0[n+1]$

التمرين 51 :

1. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $2^{2n-1} \times 3^{n+2} + 1 \equiv 0[11]$
2. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $7^n + 12n - 1 \equiv 0[9]$.

التمرين 52 :

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 7
2. أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $19^{6n+3} + 26^{6n+4} + 54^{6n+1} + 1 \equiv 0[7]$
3. عين قيم العدد الطبيعي n حيث : $19^{6n+3} + 26^{6n+4} + 4n^2 + 4 \equiv 0[7]$.

التمرين 53 :

1. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 7.
2. عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 6^{2n} على 7.
3. عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(5^n + 6^{2n} + 3)$ قابلا للقسمة على 7.

التمرين 54 :

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة كل من 3^n و 5^n على 16
2. عين باقي قسمة العدد $2^{1992} + 3^{1993} + 5^{1995} + 6^{1996}$ على 16
3. عيّن جميع الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية حيث : $3^x + 5^y \equiv 0[16]$.

التمرين 55 :

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 7.
2. أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $(26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3)$ يقبل القسمة على 7.
3. عين قيم n التي يكون من أجلها العدد $(26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 5n)$ قابلا للقسمة على 7.

التمرين 56 :

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العددين 4^n و 8^n على 9
2. ما هو باقي قسمة الأعداد التالية على 9 : $32^{2006}; 16^{197}; 22^{301}; 10^{35}$ ؟
3. أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، يقبل العدد التالي القسمة على 9 :
$(3 \times 64^n + 2006^{2n+1} - 2 \times 2002^{3n+1} + 6)$
4. عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون 6 باقي قسمة $(2006^n - 2002^n)$ على 9.

التمرين 57 :

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 13
2. أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $18^{4n} + 31^{4n+1} + 57^{4n+3} - 1 \equiv 0[13]$
3. عيّن قيم n حيث : $18^{4n} + 31^{4n+1} + 2n \equiv 0[13]$ و $10 \leq n \leq 40$
4. عين الأعداد الطبيعية n حتى يكون $n^2 - 57^{4n}$ قابلا للقسمة على 13.

التمرين 58 :

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على 7
2. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $25^{3n} \times 4^{3n+1} + 100^{3n+1} + 1 \equiv 0[7]$
3. عيّن قيّم العدد n بحيث يقبل العدد $n^2 + n \times 71^{6n} + 31^{6n+3} - 5$ القسمة على 7
4. أوجد الأعداد الصحيحة x التي تحقق : $17^{3n+2} \times 2x - 38^{3n+1} \equiv 0[7]$ ،
ثمّ استنتج قيم x حيث $|x - 4| \leq 10$
5. A و B عددان طبيعيان حيث : $A = \overline{2n1n2n1n}^3$ و $B = \overline{20102010}^3$
أ. عيّن العدد الطبيعي n حيث : $A \equiv 0[7]$
ب. احسب $A + B$ في النظام ذي الأساس 3 (دون كتابة A و B في النظام العشري)
ج. اكتب $A + B$ في النظام ذي الأساس 7.

التمرين 59 :

1. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $3x + 5y = 65 \dots (1)$
أ. بيّن أنّه إذا كان $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإنّ x مضاعف للعدد 5
ب. استنتج حلول المعادلة (1)
2. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9
3. عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $5 + 7^{67-5n} \equiv 0[9]$.

التمرين 60 :

1. عيّن الأعداد الصحيحة x حيث : $7x \equiv -19[9]$
2. استنتج في مجموعة الأعداد الصحيحة حلول المعادلة (1) ... $7x - 9y = -19$
3. من بين حلول المعادلة (1) عيّن تلك التي تحقق: $x \equiv 0[y]$ (أي y يقسم x)
4. نعتبر العدد الطبيعي n الذي يُكتب $\overline{2\alpha5}$ في نظام العد ذي الأساس 7 ، ويُكتب $\overline{1\beta3}$ في نظام العد ذي الأساس 9. عيّن α وβ ، ثمّ اكتب العدد n في النظام العشري.

التمرين 61 :

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 4^n على 7
2. استنتج باقي قسمة العدد $(3 \times 11^{3n-1} - 3^{2004})$ على 7
3. عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(6^{n^2+n+1} + 18^{n+1}\right)$ مضاعفا للعدد 7
4. a ، b و c ثلاثة أعداد طبيعية غير معدومة تُشكّل بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية حسابية.

   برهن أنّ العدد $4^a \times 4^b \times 4^c - 1$ يقبل القسمة على 7.

التمرين 62 :

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على 7
2. استنتج باقي قسمة العدد 2005^{2007} على 7
3. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $n \times 3^{2n} + 3n \equiv 0[4]$
4. عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $(n \times 3^{2n} + 3n)$ مضاعفا للعدد 28.

التمرين 63 :

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على 63
2. نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$$Y_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n+1} \text{ ، } X_n = 4^{3n} + 4^{3n+1} + 4^{3n+2} - 84$$

أ. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $X_n \equiv 0[63]$ ، ثمّ أثبت أنّ X_n مضاعف للعدد 252

ب. عين قيم العدد الطبيعي n حيث : $\begin{cases} X_n \equiv 0[7] \\ Y_n \equiv 0[63] \end{cases}$.

التمرين 64 :

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 9^n على 13
2. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $12^{2n} + 9^{3n+1} + 3^{3n-2} \equiv 0[13]$

3. عين قيم العدد الطبيعي n حيث : $22^{3n+2} + 2 \times 35^{6n+2} + 5n \equiv 0[13]$
4. عين قيم العدد الطبيعي n حيث : $\begin{cases} n + 7 \equiv 0[13] \\ 9^n + 10 \equiv 0[13] \end{cases}$.

التمرين 65 :

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^{3n} على 31
2. استنتج باقي قسمة العددين 5^{3n+1} و 5^{3n+2} على 31
3. ما هو باقي قسمة العدد $5^{3n+2} + 36^{3n+1} + 6^{6n+2}$ على 31 ؟
4. حل في المجموعة $\mathbb{Z}$ المعادلة : $5^{3n+2} + 36^{3n+1} + x \equiv 0[31]$
5. عين قيم العدد الصحيح m حيث : $5^{3m} + 36^{3m+1} + m^2 \equiv 3[31]$
6. n عدد طبيعي لا يقبل القسمة على 3.
   أ. ما هي القيم الممكنة للعدد n ؟
   ب. أثبت أنّ : $5^{2n} + 5^n + 1 \equiv 0[31]$.

التمرين 66 :

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العددين 2^n و 3^n على 7
2. استنتج باقي قسمة العدد $5 + 1426^{1425} - 2956 \times 2005^{2004}$ على 7
3. نضع : $S_n = (2^0 - 4) + (2^1 - 4) + \cdots + (2^n - 4)$. عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون S_n قابلا للقسمة على 7
4. عيّن قيّم العدد الطبيعي x حيث : $2004^x - 2005^x \equiv 2[7]$
5. عين الثنائيات (x, y) من $\mathbb{N}^2$ حيث : $2^x + 2^y \equiv 2[7]$

التمرين 67 :

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على 11
2. ما هو باقي قسمة العدد $8 - 4 \times 69^{10n+6} + 7 \times 58^{20n+13}$ على 11 ؟
3. عين قيم العدد الطبيعي n حيث : $n^2 + 36^{5n} \times n + 14^{5n+3} + 5 \equiv 0[11]$
4. جد الأعداد الصحيحة β التي تحقق من أجل كل n من $\mathbb{N}$:
   $\begin{cases} 80^{3n+2} \times \beta + 91^{3n+1} \equiv 0[11] \\ |\beta| \leq 20 \end{cases}$
5. عين الثنائيات (x, y) من $\mathbb{N}^2$ حيث : $14^x + 25^y \equiv 8[11]$
6. عين الثلاثيات (x, y, z) من $\mathbb{N}^3$ حيث : $3^x + 14^y \times 47^z \equiv 2[11]$.

التمرين 68 :

1. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : (I) ... $8x - 5y = 3$
2. ليكن m عددا صحيحا بحيث توجد ثنائية (p, q) من الأعداد الصحيحة تحقق :
$m = 8p + 1$ و $m = 5q + 4$
أ- بيّن أنّ الثنائية (p, q) هي حل للمعادلة (I) ، ثمّ استنتج أنّ : $m \equiv 9[40]$
ب- عيّن أصغر عدد طبيعي m أكبر 2000
3. ليكن n عددا طبيعيا
أ- أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا : $2^{3k} \equiv 1[7]$
ب- ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{2009} على 7 ؟
4. ليكن a و b عددان طبيعيان حيث : $0 < a \leq 9$ و $b \leq 9$ ، ونعتبر العدد N
الذي يكتب في النظام العشري على الشكل: $N = \overline{a00b}$ $(N = a \times 10^3 + b)$.
نريد تعيين من ضمن هذه الأعداد الطبيعية N تلك التي تقبل القسمة على 7
أ- تحقق من أنّ : $10^3 \equiv -1[7]$
ب- استنتج الأعداد الطبيعية N التي تقبل القسمة على 7.

التمرين 69 :

اختر الإجابة الصحيحة مع التعليل :

1. في مجموعة الأعداد الصحيحة ، المعادلة $x^2 + x + 3 \equiv 0[5]$:
(أ) لا تقبل حلولا (ب) حلولها تحقق $x \equiv 2[5]$
(جـ) حلولها زوجية (د) حلولها تحقق $x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 3[5]$
2. حلول المعادلة $24x + 34y = 2$ هي :
(أ) $(17k - 7; 5 - 12k)\ , k \in \mathbb{Z}$ (ب) $(-7k; 5k)\ , k \in \mathbb{Z}$
(جـ) $(34k - 7; 5 - 24k)\ , k \in \mathbb{Z}$ (د) المجموعة الخالية
3. N عدد طبيعي يُكتب في النظام ذي الأساس 5: $\overline{421}$. كتابته في النظام ذي الأساس 6 هي:
(أ) $\overline{421}$ (ب) $\overline{111}$
(جـ) $\overline{303}$ (د) $\overline{222}$
4. باقي القسمة الإقليدية للعدد 1432^{2011} على العدد 3 هو :
(أ) 0 (ب) 1 (جـ) 2 (د) 3
5. من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $a = n(n+2)$; $b = n + 1$.
بما أنّ: $b^2 - a = 1$ فإنّ $PGCD(a, b)$ هو :
(أ) n (ب) $n + 1$
(جـ) 1 (د) 2

التمرين 70 :

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليمية للعدد 3^n على 10
2. استنتج باقي القسمة الإقليمية على 10 للعدد $63 \times 9^{2001} - 7^{1422}$
3. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون :

$$3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1) \times 3^{2n+1}[10]$$

4. عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون : $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10]$.

التمرين 71 :

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليمية للعدد 4^n على 11
2. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ العدد الطبيعي k يقبل القسمة على 11 حيث :

$$k = 15^{5n+1} - 2 \times 26^{5n+2} + 3 \times 125^{5n+3}$$

3. عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث :

$$\begin{cases} 15^{5n+1} + 26^{5n+2} + 3n \equiv 0[11] \\ 8 \leq n \leq 50 \end{cases}$$

التمرين 72 :

1. أ. ما هو باقي القسمة الإقليمية للعدد 6^{10} على 11؟ علل.
   ب. ما هو باقي القسمة الإقليمية للعدد 6^4 على 5؟ علل.
   ج. استنتج أنّ $6^{40} \equiv 1[11]$ وأنّ $6^{40} \equiv 1[5]$
   د. بيّن أنّ $6^{40} - 1$ يقبل القسمة على 55
2. x و y عددان صحيحان
   أ. بيّن أنّ المعادلة التالية ليس لها حلول: $65x - 40y = 1 \ldots (E)$
   ب. بيّن أنّ المعادلة $17x - 40y = 1 \ldots (E')$ تقبل على الأقل حلا
   ج. عيّن باستعمال خوارزمية إقليدس حلا خاصا للمعادلة (E')
   د. حل المعادلة (E') واستنتج وجود عدد طبيعي وحيد x_0 أصغر من 40 حيث :
   $17x_0 \equiv 1[40]$
3. من أجل كل عدد طبيعي a ، بيّن أنّه إذا كان : $a^{17} \equiv b[55]$ و $a^{40} \equiv 1[55]$ فإنّ :
   $b^{33} \equiv a[55]$.

التمرين 73 :

a عدد طبيعي حيث $a > 5$ و y عدد طبيعي يُكتب $\overline{4452}$ في نظام التعداد ذي الأساس a ويُكتب $\overline{2020}$ في نظام التعداد ذي الأساس $(a + 2)$

1. أ. بيّن أنّ a يحقق : $a(2a^2 - 8a - 21) = 18$

ب. استنتج قيمة a ، ثمّ اكتب العدد y في النظام العشري

2. أ. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 9

ب. استنتج باقي قسمة العدد $4^{2013} + y^{2012} \times 3 - y^{1434}$ على 9

التمرين 74 :

1- أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 9^n على 11

2- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $(2011)^{5n+1} + (1993)^{10n} + (1431)^n$ يقبل القسمة على 11

3- عيّن العدد الطبيعي n بحيث :

$(2011)^{5n+1} + 5n + (1431)^n$ يقبل القسمة على 11 و $90 < n < 100$

التمرين 75 :

1- أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 4^{2n} على 5

2- عيّن باقي قسمة 3^n على 5

3- ما هو باقي قسمة 1428^{2009} على 5 ؟

4- ليكن العدد الطبيعي A_n حيث : $A_n = 2 + 4^{2n} + 3^n$

عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث A_n يقبل القسمة على 5.

التمرين 76 :

أرقام نظام التعداد ذو الأساس 12 هي : 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، β ، α

1- ليكن N_1 العدد المكتوب في النظام ذي الأساس 12 على الشكل $\overline{\beta 1 \alpha}^{12}$.

أكتب N_1 في النظام العشري

2- ليكن N_2 العدد المكتوب في النظام العشري على الشكل 1131.

أكتب N_2 في النظام ذي الأساس 12

3- ليكن N العدد المكتوب في النظام ذي الأساس 12 على الشكل

$\overline{a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0}^{12}$

أ. بيّن أنّ $N \equiv a_0[3]$ ، ثمّ استنتج خاصية لقابلية القسمة على 3 لعدد مكتوب في النظام ذي الأساس 12

- تأكد من ذلك باستعمال كتابة N_2 في النظام ذي الأساس 12

ب. بيّن أنّ $N \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0[11]$ ، ثمّ استنتج خاصية لقابلية القسمة على 11 لعدد مكتوب في النظام ذي الأساس 12

- تأكد من ذلك باستعمال كتابة N_1 في النظام ذي الأساس 12

4- نُذكّر أنّه إذا كان a و b أوليان فيما بينهما وكان N يقبل القسمة على a و b فإنّ N يقبل القسمة على الجداء ab

- نعتبر $N = \overline{x4y}^{12}$. عيّن قيم x و y التي من أجلها يكون N قابلا للقسمة على 33.

التمرين 77 :

أذكر إن كانت الجمل التالية صحيحة أم خاطئة مبررا الإجابة

1) من أجل كل عدد طبيعي n ، 3 يقسم $2^{2n} - 1$

2) إذا كان العدد الصحيح x حلا للمعادلة $x^2 + x \equiv 0[6]$ ، فإنّ $x \equiv 0[3]$

3) مجموعة حلول المعادلة $12x - 5y = 3$ في $\mathbb{Z}^2$ هي: $\{(10k + 4; 24k + 9)\}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

4) توجد ثنائية وحيدة $(a; b)$ في $\mathbb{N}^2$ حيث :

$$\begin{cases} a < b \\ PPCM(a;b) - PGCD(a;b) = 1 \end{cases}$$

التمرين 78 :

1) ليكن العدد a من المجموعة $\{2; 3; 4; 5\}$ والعدد الطبيعي n

أ- برهن أنّه مهما كان a فإنّ: $a^6 - 1 \equiv 0[7]$

ب- ليكن A_n العدد المعرف كما يلي: $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$

برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $A_{n+6} \equiv A_n[7]$

2) ليكن q و r حاصل وباقي القسمة الإقليدية للعدد n على 6

أ- برهن أنّ: $A_n \equiv A_r[7]$

ب- عيّن مجموعة قيم n التي يكون من أجلها A_n قابلا للقسمة على 7

3) ليكن B_n العدد المعرف كما يلي:

$$B_n = 100^n + 101^n + 102^n + 103^n$$

أ- برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $B_n \equiv A_n[7]$.

ب- استنتج مجموعة قيم n التي يكون من أجلها B_n قابلا للقسمة على 7.

التمرين 79 :

1. حلل العدد 1995 إلى جداء عوامل أولية
2. عيّن الأعداد الصحيحة x ، y ، z المتمايزة مثنى مثنى والتي تحقق ما يلي : x ، y ، z حدود متتابعة بهذا الترتيب لمتتالية حسابية و z ، x ، y حدود متتابعة بهذا الترتيب لمتتالية هندسية و $x + y + z$ عدد طبيعي أولي قاسم للعدد 1995.

التمرين 80 :

(u_n) متتالية هندسية حدودها أعداد طبيعية غير معدومة.

1. عيّن العددين الطبيعيين q و u_0 علما أنّ q أولي مع u_0 و $5u_0 = u_3 - u_1$
2. أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n
3. احسب المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-2}$
4. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 11
5. عين قيم العدد الطبيعي n حيث : $S_n \equiv 0[11]$

التمرين 81 :

1- أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 10

- استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي k ، يقبل العدد $7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3}$ القسمة على 10

2- من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $S_n = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n$

- أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_{n+4} \equiv S_n[10]$
- أدرس حسب قيم n بواقي القسمة الإقليدية للعدد S_n على 10.

التمرين 82 :

نعتبر المتتالية (u_n) للأعداد الطبيعية المعرفة بـ : $u_0 = 14$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:
$u_{n+1} = 5u_n - 6$

1. أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4. ما هو تخمينك حول الرقمين الأخيرين للعدد u_n
2. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+2} \equiv u_n[4]$ ، ثمّ استنتج أنّ: $u_{2k} \equiv 2[4]$ و $u_{2k+1} \equiv 0[4]$
3. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $2u_n = 5^{n+2} + 3$
استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $2u_n \equiv 28[100]$
4. عيّن الرقمين الأخيرين للكتابة العشرية للعدد u_n تبعا لشفعية n.

التمرين 83 :

u_0 ، q عددان طبيعيان غير معدومين. (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها q

1) عيّن u_0 و q علما أنّ q أولي مع u_0 و $3u_0^2 = u_3 - u_1$

2) نفرض أنّ $u_0 = 8$ و $q = 3$

أ- أحسب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3

ب- عيّن عبارة u_n بدلالة n. هل المتتالية (u_n) متقاربة؟

ج- نضع: $P_n = u_0 \times u_1 \times ... \times u_n$. أحسب P_n بدلالة n

3) نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

أ- تحقق أنّ: $S_n = 4(3^{n+1} - 1)$

ب- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n على 13

ج- عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون S_n مضاعفا لـ 13.

التمرين 84 :

(u_n) متتالية هندسية معرّفة على $\mathbb{N}$ حدودها وأساسها q أعداد طبيعية غير معدومة حيث :

$q < u_0$ و $u_5 - 31u_1 - 6u_0^3 = 0 ... (1)$

1) تحقق أنّ المعادلة (1) تكافئ : $q(q^4 - 31) = 6u_0^2$

2) عيّن العددين الحقيقيين u_0 و q علما أنّهما أوليان فيما بينهما

3) كيف يُكتب الحد u_{30} في نظام التعداد ذي الأساس 3؟

4) نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

أ- أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n

ب- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n على 7

ج- عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون S_n قابلا للقسمة على 7.

التمرين 85 :

1) أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، العددان $5n + 1$ و $14n + 3$ أوليان فيما بينهما

2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $87x + 31y = 2 ... (E)$

أ- تحقق أنّ العددين 31 و87 أوليان فيما بينهما ، ثمّ عيّن حلا خاصا للمعادلة (E)

ب- حل المعادلة (E)

3) ليكن (Δ) المستقيم ذي المعادلة : $87x + 31y - 2 = 0$

عيّن نقط المستقيم (Δ) التي إحداثياها أعداد صحيحة وفواصلها محصورة بين 0 و100.

التمرين 86 :

1. عيّن PGCD (2688 ; 3024)
2. أ. تحقق أنّ المعادلتين $2688x+3024y=-3360 \;...\; (1)$
و $(2) \;...\; 8x+9y=-10$ متكافئتان

ب. تحقق أنّ $(-2;1)$ حل خاص للمعادلة (2)

3. نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ المستويين (P) و(P') اللذين معادلتاهما على الترتيب:

$$(P): x+2y-z=-2 \qquad (P'): 3x-y+5z=0$$

أ. بيّن أنّ المستويين (P) و (P') يتقاطعان وفق مستقيم (d)

ب. بيّن أنّ إحداثيات نقط (d) تحقق المعادلة (2) ، ثمّ استنتج (E) مجموعة نقط (d) التي إحداثياتها أعداد صحيحة.

التمرين 87 :

1. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $48x+35y=1 \;...\; (E)$

أ. عيّن حلا خاصا للمعادلة (E)

ب. استنتج الحل العام للمعادلة (E)

2. نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(-11;35;-13)$ والشعاع $\vec{u}(48;35;24)$

أ. عيّن طبيعة ومعادلة (π) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث :
$\vec{u}.\overrightarrow{AM}=0$

ب. ليكن المستقيم (D) تقاطع (π) مع المستوي ذي المعادلة $z=16$. عيّن جميع النقط من المستقيم (D) التي إحداثياتها أعداد صحيحة من المجال $[-100;100]$

ج. استنتج النقطة التي إحداثياتها صحيحة والقريبة من المبدأ.

التمرين 88 :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. ليكن (P) المستوي المار من $B(1;3;5)$ وشعاع الناظم $\vec{n}(-2\,;1\,;1)$ ، و(Q) المستوي ذو المعادلة : $x-2y+4z-9=0$

1. بيّن أن المستويين (P) و (Q) متعامدان
2. أحسب المسافة بين النقطة B والمستقيم (Δ) تقاطع المستويين
3. عيّن المعادلة الديكارتية للمستوي (P)

4. ليكن (Δ) المستقيم ذو التمثيل الوسيطي :

$$\begin{cases} x = 2k - 5 \\ y = 3k - 5 \ ; k \in \mathbb{R} \\ z = k + 1 \end{cases}$$

لتكن M نقطة كيفية من (Δ) و $A(-9; -4; -1)$

أ. تحقق أنّ A لا تنتمي إلى (P) ولا تنتمي إلى (Q)

ب. عبّر عن المسافة AM^2 بدلالة k

ج. لتكن f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(k) = 2k^2 + 2k + 3$

- أدرس اتجاه تغيّر الدالة f
- من أجل أي نقطة M تكون المسافة AM أصغرية

د. نعتبر k عدد طبيعي و $PGCD(2k-5; 3k-5) = d$

- ما هي القيم الممكنة لـ d ؟
- إذا كان $d = 5$. عيّن مجموعة النقط M من (Δ) التي تكون إحداثياها أعدادا طبيعية واذكر أول حل طبيعي M_0.

التمرين 89 :

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $6x + 7y = 57 \ldots (E)$

1. عيّن الثنائية (α, β) التي تحقق $6\alpha + 7\beta = 1$ ، ثمّ استنتج حلا خاصا للمعادلة (E)
2. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)
3. نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ المستوي (P) ذي المعادلة $6x + 7y + 8z - 57 = 0$ وليكن المستقيم (D) تقاطع (P) مع المستوي $(O, \vec{i}, \vec{j})$
   - بيّن أنّه توجد نقطة وحيدة من (D) إحداثياتها أعداد طبيعية
4. $M(x, y, z)$ نقطة من (P) حيث x ، y ، z أعداد طبيعية. بيّن أنّ y فردي
5. نضع : $y = 2k + 1$ حيث k عدد طبيعي

أ. عيّن باقي قسمة العدد $(k + z)$ على 3

ب. ليكن p عدد طبيعي حيث : $3p = k + z - 1$. برهن أنّ : $x + k + 4p = 7$ ، ثمّ استنتج القيم الممكنة للعدد p

ج. استنتج النقط M من (P) ذات الاحداثيات الطبيعية.

التمرين 90 :

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $35x - 42y = \alpha \ldots (1)$ ، حيث α عدد صحيح غير معدوم

1. ما هو الشرط اللازم والكافي حتى يكون للمعادلة (1) حلولا في $\mathbb{Z}^2$ ؟

2. نضع : $\alpha = 21$

أ- بيّن أنّه إذا كان $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإنّ x مضاعف للعدد 3 ، ثمّ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1)

ب- عيّن (K) مجموعة الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (1) التي تحقق :
$x^2 - y^2 < 56$

3. β عدد طبيعي أكبر تماما من 5. a و b عددان طبيعيان يُكتبان $\overline{21}$ و $\overline{15}$ على الترتيب في نظام التعداد ذي الأساس β

أ. عيّن β ثمّ a وb ، علما أنّ $(a;b)$ حل المعادلة (1)

ب. تحقق أن $(a;b)$ تنتمي إلى (K)

4. d هو القاسم المشترك الأكبر لـ x و y ، حيث $(x;y)$ حل للمعادلة :
$5x - 6y = 3 \ldots (2)$

أ- عيّن القيم الممكنة للعدد d

ب- عيّن مجموعة الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (2) علما أنّ $d = 3$ مستنتجا المضاعف المشترك الأصغر لـ x و y.

التمرين 91 :

1. أثبت أنّه إذا كان a و b عددين أوليين فيما بينهما ، فإنّ مجموعهما $(a+b)$ أولي مع جداءهما (ab)

2. عيّن الثنائيات $(x;y)$ من $(\mathbb{N}^*)^2$ بحيث : $\begin{cases} x + y = 56 \\ PPCM(x;y) = 105 \end{cases}$

3. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(1) \ldots 11x - 5y = 7$. عيّن حلا خاصا (x_0, y_0) ، ثمّ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1)

4. نضع : $d = PGCD(x;y)$

أ- عيّن القيم الممكنة للعدد d

ب- عيّن كل الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ حلول المعادلة (1) ، حيث x و y أوليين فيما بينهما.

التمرين 92 :

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على 11

2. عيّن الأعداد الطبيعية n حيث : $3 \times 2^{n+1} + 36 \equiv 0[11]$

3. ليكن العدد $A = 10^{2n+1} + 4^{5n+1}x$. عيّن الأعداد الصحيحة x حيث A يقبل القسمة على 11 من أجل $n \in \mathbb{N}$

4. N عدد طبيعي يُكتب $\overline{28x75y}$ في النظام العشري. عيّن x و y حيث N يقبل القسمة على 2 وعلى 11.

التمرين 93 :

x و y عددان صحيحان. أجب بصحيح أم خطأ مع التعليل :

1. $x^3 \equiv x[2]$
2. إذا كان $x \equiv 2[14]$ فإنّ $x \equiv 1[7]$
3. إذا كان $4x \equiv 10y[5]$ فإنّ $x \equiv 0[5]$
4. إذا كان $x \equiv 4[5]$ و $y \equiv 5[8]$ فإنّ $8x - 5y = 7$.

التمرين 94 :

المستوي المركب منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط A ، B و C من المستوي ذات اللواحق $3+5i$ ، $-4+2i$ ، $1+4i$ على الترتيب.

أنجز الشكل وأتممه شيئا فشيئا.

ليكن التحويل النقطي f الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = (2-2i)z + 1$

1. عيّن طبيعة التحويل f وعناصره المميزة
2. لتكن النقطة B' صورة النقطة B بالتحويل f
   أ. عيّن لاحقة النقطة B'
   ب. بيّن أنّ المستقيمين (CB') و (CA) متعامدان
3. لتكن M النقطة ذات اللاحقة $z = x + iy$ ، حيث x و y عددان صحيحان ، ولتكن M' صورة النقطة M بالتحويل f
   بيّن أنّ $\overrightarrow{CM'}$ و $\overrightarrow{CA}$ متعامدان إذا وفقط إذا كان $x + 3y = 2$
4. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ... $x + 3y = 2$.
   أ. تحقق أنّ الثنائية $(-4;2)$ حل للمعادلة (E)
   ب. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)
   ج. استنتج مجموعة النقط M التي إحداثياتها أعداد صحيحة من المجال $[-5;5]$ والتي يكون من أجلها الشعاعان $\overrightarrow{CM'}$ و $\overrightarrow{CA}$ متعامدين.

التمرين 95 :

n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1

1. برهن أنّ n و $2n+1$ أوليان فيما بينهما
2. نضع : $\alpha = n+3$ ، $\beta = 2n+1$ و $\delta = PGCD(\alpha;\beta)$
   أ. احسب $2\alpha - \beta$ واستنتج القيم الممكنة للعدد δ
   ب. برهن أنّ العددين α و β مضاعفان للعدد 5 إذا وفقط إذا كان $n-2$ مضاعف 5

3. نعتبر العددين a و b حيث : $a = n^3 + 2n^2 - 3n$ و $b = 2n^2 - n - 1$
برهن أن العددين a و b يقبلان القسمة على $n - 1$
4. نضع : $d = PGCD(n(n+3); 2n+1)$
أ. برهن أنّ δ يقسم d ، ثمّ استنتج أنّ $\delta = d$
ب. نضع : $\Delta = PGCD(a; b)$. استنتج قيم Δ بدلالة n
ج. احسب Δ من أجل $n = 1437$ ، ثمّ من أجل $n = 2016$.

التمرين 96 :

1. نريد تعيين الأعداد الطبيعية N بحيث : $\begin{cases} N \equiv 5[13] \\ N \equiv 1[17] \end{cases}$
أ. تحقق أنّ 239 حل للجملة السابقة
ب. ليكن N عدد صحيح نسبي حل للجملة. بيّن أنّه يمكن كتابة N على الشكل :
$N = 1 + 17x = 5 + 13y$ ، حيث : x و y عددان صحيحان نسبيان
يحققان العلاقة : $17x - 13y = 4$
ج. حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $17x - 13y = 4$
د. استنتج أنّه يوجد عدد صحيح نسبي k حيث : $N = 18 + 221k$
ه. برهن أنّ $N \equiv 18[221]$ تكافئ $\begin{cases} N \equiv 5[13] \\ N \equiv 1[17] \end{cases}$
2. هل يوجد عدد طبيعي n حيث : $10^n \equiv 1[17]$ ؟
3. هل يوجد عدد طبيعي m حيث : $10^m \equiv 18[221]$ ؟

التمرين 97 :

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 10^n على 7 ، ثمّ استنتج أنّ العدد $(29000^{81} - 6)$ يقبل القسمة على 7
2. A عدد طبيعي يُكتب في النظام العشري كما يلي : $A = 29000^{81} + \overline{3y59}$.
عيّن y حيث يكون العدد A مضاعفا لـ 7
3. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $9n.4^n + 5^{2n+1} \equiv (n-1).2^{2n+1}[7]$
4. عيّن قيّم العدد n بحيث يكون : $9n.4^n + 5^{2n+1} \equiv 0[7]$.

التمرين 98 :

1. a ، b و c أعداد طبيعية حيث : $1 \le a \le b \le c$.
عيّن الأعداد a ، b و c ، علما أنّ في النظام ذي الأساس a يكون:
$b + c = \overline{46}$ و $bc = \overline{545}$

2. نعتبر في $\mathbb{N}^2$ المعادلة $(1) ... 21x - 17y = 8$ ، x و y حيث عددان طبيعيان
   أ. عيّن الثنائية (x_0, x_0) حل للمعادلة (1)
   ب. حل في $\mathbb{N}^2$ المعادلة (1)
3. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 9^n على 13
4. برهن أنّه إذا كان $(\alpha; \beta)$ حل للمعادلة (1) فإنّ :
   $3^{34\beta+20} - 9^{21\alpha} - 2 \equiv 0[13]$
5. برهن أنّه إذا كان $(x; y)$ حل للمعادلة (1) و $x \equiv 0[4]$ فإنّ : $y \equiv 0[4]$
6. عيّن $(x; y)$ حلول المعادلة (1) التي يكون من أجلها $PGCD(x; y) = 4$.

التمرين 99 :

1. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(x+1)^2 = 9 + 5y ... (E)$
   أ. بيّن أنّه إذا كان $(x; y)$ حل للمعادلة (E) فإنّ : $x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 2[5]$
   ب. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)
2. بيّن أنّ $PGCD(x; y)$ يقسم العدد 8
3. حل في $\mathbb{N}^2$ الجملة: $\begin{cases} \overline{121}^x = \overline{59}^y \\ PGCD(x; y) = 8 \\ x \equiv 1[5] \end{cases}$

التمرين 100 :

نعتبر الأعداد الطبيعية $a = 3n + 2$ ، $b = 2n + 1$ و $c = n + 2$ حيث n عدد طبيعي.

1. بيّن أنّ a و b أوليان فيما بينهما
2. تحقق أنّ $a = 3c - 4$ ، ثمّ استنتج القيم الممكنة لـ $PGCD(a; c)$
3. عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\frac{a}{c}$ عنصرا من $\mathbb{N}$
4. عيّن قيمة العدد الطبيعي n التي تحقق : $\begin{cases} PGCD(a; c) = 4 \\ PPCM(a; c) = 8 \end{cases}$

التمرين 101 :

1. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $11x - 7y = 5 ... (E)$ ، حيث x و y عددان صحيحان
   أ. تحقق أنّ الثنائية $(10; 15)$ حل للمعادلة (E) ، ثمّ حل في $\mathbb{Z}^2$ هذه المعادلة
   ب. عيّن عدد الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق الشرطين :
   $0 \le x \le 50$ و $0 \le y \le 50$
2. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على 11
3. عيّن باقي قسمة العدد $(4 \times 69^{10n+6} + 7 \times 58^{20n+13} - 8)$ على 11

4. لتكن x ، y ، z ثلاثة أعداد طبيعية حيث : $y = \overline{131}^x$ و $z = \overline{101}^x$

أ. بيّن أنّه يمكن كتابة الجداء $x \times y \times z$ في الأساس x دون معرفة x

ب. عيّن الأعداد الطبيعية x ، y ، z علما أنّ : $x + y + z = 50$.

التمرين 102 :

1. عيّن القاسم المشترك الأكبر للعددين 324 و 405
2. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(*)$ ... $324x - 405y = \alpha$ ، حيث $\alpha \in \mathbb{Z}^*$
عيّن شرطا على α حتى تقبل المعادلة $(*)$ حلولا في $\mathbb{Z}^2$ ؟
3. نضع : $\alpha = -81$

أ- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(*)$ علما أنّ $(x_0; y_0)$ حل خاص لها ويحقق $x_0 - y_0 = 0$

ب- عيّن كل الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة $(*)$ حيث يكون العدد $\frac{8x+24}{y+1}$ صحيحا

4. a و b عددان طبيعيان و N عدد طبيعي يُكتب $\overline{a6}$ في النظام ذي الأساس 9 ويُكتب $\overline{b1ba}$ في النظام ذي الأساس 2
عيّن a و b ، ثمّ احسب العدد N.

التمرين 103 :

5. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ... $3x - 5y = 6$

أ. بيّن أنّه إذا كان $(x; y)$ حل للمعادلة (E) فإنّ y مضاعف للعدد 3

ب. عيّن حلا خاصا للمعادلة (E) ، ثمّ حل في $\mathbb{Z}^2$ هذه المعادلة

6. عين جميع الثنائيات $(x; y)$ حلول الجملة : $\begin{cases} 3x - 5y = 6 \\ y \equiv x^2[5] \end{cases}$

التمرين 104 :

1. عيّن قيم العدد الصحيح x الذي يحقق : $13x + 1 \equiv 0[4x + 1]$
2. أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 1885 و 580
3. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ... $1885x - 580y = \alpha$ ، حيث α عدد صحيح
أوجد الشرط اللازم والكافي الذي يحققه α حتى يكون للمعادلة (E) حلولا في $\mathbb{Z}^2$
4. نفرض : $\alpha = 1305$

أ- عيّن $(x_0; y_0)$ حلا خاصا للمعادلة (E) الذي يحقق : $x_0 + y_0 = 2$

ب- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

ج- عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) التي يكون من أجلها العدد x قاسما للعدد y.

التمرين 105 :

1. عيّن باقي قسمة العدد 5^{3n} على 31 من أجل كل عدد طبيعي n
2. استنتج باقي قسمة 5^{3n+1} و 5^{3n+2} على 31 ، ثمّ عيّن باقي قسمة العدد 1431^{2009} على 31
3. ما هو باقي قسمة العدد $5^{3n+2} + 36^{3n+1} + 6^{6n+2}$ على 31 ؟
4. حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة $5^{3n+2} + 36^{3n+1} + x \equiv 0[31]$
5. عيّن قيم العدد الصحيح m حتى يكون : $5^{3m} + 36^{3m+1} + m^2 \equiv 3[31]$
6. n عدد طبيعي لا يقبل القسمة على 3.

عيّن القيم الممكنة للعدد n ، واثبت أنّ : $5^{2n} + 5^n + 1 \equiv 0[31]$.

التمرين 106 :

1. تحقق أنّ العدد 67 أولي ، ثمّ حلل العدد 2010 إلى جداء عوامل أولية
2. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) ... $14x + 67y = 2010$
   - أ. تحقق أنّ للمعادلة (1) حلولا في $\mathbb{Z}^2$
   - ب. بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإنّ x مضاعف للعدد 67 ، ثمّ استنتج حلول المعادلة (1)
   - ج. عيّن الحلول الطبيعية للمعادلة (1)
3. عيّن الأعداد الطبيعية غير المعدومة a و b التي تحقق : $14m + 67d = 2010$ ، حيث $\begin{cases} m = PPCM(a; b) \\ d = PGCD(a; b) \end{cases}$.

التمرين 107 :

1. عيّن $PGCD(2405; 407; 111)$
2. لتكن (E) مجموعة الثنائيات الصحيحة $(x; y)$ التي تحقق : $407x + 111y = 2405$ ... (1)
   - أ. أوجد الثنائية $(x_0; y_0)$ من (E) حيث : $2x_0^2 - 3y_0 = 11$
   - ب. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1)
3. عيّن الثنائيات $(x; y)$ من (E) التي تحقق : $-5 < x$ و $-5 < y$
4. عيّن القيم الممكنة لـ $PGCD(x; y)$
5. عيّن الثنائيات $(a; b)$ الطبيعية الأولية فيما بينها حيث : $11d + 3m = 65$.

$[d = PGCD(x; y)$ و $m = PPCM(x; y)]$

التمرين 108 :

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10
2. بيّن أنّه مهما يكن n فإنّ العدد : $(33^{16n+2} - 2\times 109^{8n+1} - 11)$ يقبل القسمة على 10
3. عيّن قيم العدد الطبيعي n حيث: $7\times 3^{n+1} - 1 \equiv 0[10]$ و $10 < n \leq 25$
4. ليكن العدد A الذي يُكتب في النظام ذي الأساس 3 : $\overline{xx02102}$ ، ويُكتب في النظام ذي الأساس 9 : $\overline{y67y}$

أ. عيّن العددين الطبيعيين x و y

ب. احسب A في النظام العشري

ج. اكتب A في النظام ذي الأساس 7.

التمرين 109 :

1. n عدد صحيح يختلف عن (-1).

نعتبر العددين α وβ حيث : $\alpha = n^2 + 4n + 7$ و $\beta = n + 1$

أ. بيّن أنّ : $PGCD(\alpha;\beta) = PGCD(\beta;4)$

ب. ناقش حسب قيم n ، القاسم المشترك الأكبر للعددين α وβ

ج. ما هي مجموعة قيم العدد n بحيث يكون الكسر $\frac{\alpha}{\beta}$ غير قابل للاختزال ؟

2. عيّن مجموعة الأعداد الصحيحة n بحيث يكون : $\alpha \equiv 0[\beta]$
3. نفرض الآن أنّ $n > 3$ ، ونعتبر العددين الطبيعيين A وB حيث :

$A = n^3 + n^2 - 5n - 21$ و $B = n^2 - 2n - 3$

أ. بيّن أنّ كلا من العددين A وB يقبل القسمة على $(n-3)$

ب. استنتج تبعا لقيم n وبدلالة n ، $PGCD(A;B)$.

التمرين 110 :

1. عيّن مجموعة الأعداد الصحيحة x بحيث : $4x \equiv 33[5]$
2. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ... $4x - 5y = 33$

أ. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) (يمكن استعمال نتيجة السؤال 1)

ب. استنتج حلول الجملة $\begin{cases}\lambda \equiv 55[5]\\ \lambda \equiv 22[4]\end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{Z})$ ، ثمّ عيّن باقي قسمة λ على 20

ج. عيّن حلول المعادلة (E) التي تحقق : $|x+y+3| < 27$

3. أ. عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 11

ب. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$10^{10n} + 16^{5n-4} + 27^{5n+2} + 38^{5n+3} + 49^{5n-1} \equiv 0[11]$$

ج. عيّن قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية : $\begin{cases} n - 5^n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[5] \end{cases}$.

4. N عدد طبيعي يُكتب في النظام ذي الأساس 4 : $\overline{abbaba}$ ، حيث : $a \neq 0$
عيّن العددين الطبيعيين a و b بحيث يكون N قابلا للقسمة على 33 ، ثمّ اكتب N في النظام العشري.

التمرين 111 :

1. ادرس حسب قيم n بواقي قسمة 3^n على 5
2. u_0 و r عددان طبيعيان غير معدومين. (u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_0 وأساسها r
عيّن u_0 و r علما أنّ u_0 و r أوليان فيما بينهما و $u_0^2 = u_{10} - u_1$
3. نضع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ و $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$
أ. احسب S_n و P_n بدلالة n
ب. عيّن العدد q بحيث : $2P_q = 2014!$ ، ثمّ تحقق أنّ : $3^q \equiv 4[5]$
ج. عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث : $2S_n + 3 \equiv 3^q[5]$.
$(n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n)$

التمرين 112 :

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7
2. عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد: $(19^{6n+3} - 5^{6n+4} + 4n^2 + 1)$ قابلا للقسمة على 7.
3. A عدد طبيعي يُكتب في النظام ذي الأساس 5: $\overline{1xx0}$.
عيّن x حتى يكون A قابلا للقسمة على 35 ، ثمّ اكتب A في النظام العشري.

التمرين 113 :

N عدد طبيعي غير معدوم يُكتب $\overline{abcca}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5 ويُكتب $\overline{bbab}$ في نظام التعداد ذي الأساس 8

1. بيّن أنّ N يحقق : $309a + 15c = 226b$
2. بيّن أنّ 3 قاسم للعدد b
3. فيما يلي نفرض أنّ $b = 3$
أ. بيّن أنّ : $309(a - 2) = 60 - 15c$
ب. بيّن أنّ 5 قاسم للعدد $a - 2$ ، ثمّ استنتج كلا من a و c
ج. اكتب العدد N في النظام العشري.

التمرين 114 :

1. أ. حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (I) ... $41x + 5y = 301$

ب. جد الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (I) التي من أجلها $x - y$ يقبل القسمة على 5

2. أ. جد القاسم المشترك الأكبر للعددين 205 و25

ب. اشترى تلميذ عددا من الكتب متساوية الثمن، ثمن الكتاب الواحد $205\ DA$ وعددا من الكراريس متساوية الثمن ، ثمن الكراس الواحد $25\ DA$. إذا علمت أنّ التلميذ دفع $1505\ DA$ ، ما هو العدد الممكن للكتب والكراريس التي اشتراها هذا التلميذ؟

3. أ. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7

ب. عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد 7 قاسما للعدد $(1440^n + 3 \times 5^n + 97)$

4. x عدد طبيعي يُكتب في النظام العشري $x = 2\alpha\alpha6$. عيّن قيم العدد الطبيعي α التي من أجلها يكون باقي القسمة الإقليدية للعدد x على 7 هو 1 ، ثمّ عيّن x.

التمرين 115 :

1. جد القاسم المشترك الأكبر للأعداد 2772 ، 1260 و504

2. نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (I) ... $2772x - 1260y = 504$

أ. عيّن الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (I) والذي يحقق: $2x_0^2 - 3y_0 = -4$

ب. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (I)

3. نفرض أنّ x وy عددان طبيعيان حيث $(x; y)$ حل للمعادلة (I).

أ. عيّن القيم الممكنة لـ $PGCD(x; y)$

ب. عيّن كل الثنائيات $(x; y)$ بحيث يكون العددان x وy أوليين فيما بينهما

4.

أ. عيّن رقم آحاد الأعداد المختلفة والمشكّلة من قوى العدد 2 ، ثمّ استنتج رقم آحاد العدد 2018^{1439}

ب. عيّن الثنائيات $(x; y)$ من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ التي هي حلول للمعادلة (I) والتي تحقق: $2^{y-2x} \equiv 8[10]$.

التمرين 116 :

1. حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ... $4x - 5y = 1$

2. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $a = 4n + 3$ ، $b = 3n + 1$ ، $PGCD(a; b) = d$

أ. عيّن القيم الممكنة للعدد d

ب. برهن أنّه إذا كان $n \equiv 3[5]$ فإنّ $d = 5$

ج. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5

د. جد أصغر عدد طبيعي $n > 2015$ حيث: $\begin{cases} 2^a + 3^b \equiv 0[5] \\ PGCD(a;b) = 5 \end{cases}$

3. α ، β و γ أعداد طبيعية حيث : $1 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma$ ، ولتكن المعادلة التالية :

$$(E'): x^2 - (\beta + \gamma)x + \beta\gamma = 0$$

أ. برهن أنّ β و γ هما حلان للمعادلة (E')

ب. عيّن الأعداد الطبيعية α ، β و γ علما أنّ في النظام ذي الأساس α يكون :

$\beta + \gamma = \overline{46}$ و $\beta\gamma = \overline{545}$.

التمرين 117 :

نعتبر المتتاليتين (x_n) و (y_n) حدودهما أعداد طبيعية معرفتان كما يلي:

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = 2x_n - 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}$$

1. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $x_n = 2^{n+1} + 1$
2. احسب $PGCD(x_8; x_9)$
3. هل العددين x_n و x_{n+1} أوّليين فيما بينهما من أجل كل عدد طبيعي n ؟
4. عيّن $PGCD(x_{2014}; x_{2015})$
5. أ. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $2x_n - y_n = 5$
ب. عبّر عن y_n بدلالة n
6. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي p باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^p على 5
7. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $d_n = PGCD(x_n; y_n)$

برهن أنّ $d_n = 1$ أو $d_n = 5$ ، ثمّ استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها $PGCD(x_n; y_n) = 1$.

التمرين 118 :

a ، b و n أعداد طبيعية حيث: $a = 3n + 2$ و $b = 2n + 1$

1. أثبت أن a و b أوّليان فيما بينهما
2. نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $3x - 4y = 304 \dots (1)$

أ. عيّن قيم العدد الطبيعي n حيث $(a;b)$ حل للمعادلة (1)

ب. استنتج حلا خاصا للمعادلة (1) ، ثمّ حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ هذه المعادلة

3. عيّن الثنائية $(x_0; y_0)$ التي تحقق : $\begin{cases} 3x_0 - 4y_0 = 304 \\ PPCM(x_0; y_0) = 2333856 \end{cases}$.

التمرين 119 :

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5
2. عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد $(2017^{4n+3} - 2 \times 2016^{8n} + 2014^{2n+1})$ على 5 ، حيث n عدد طبيعي
3. بيّن أنّ العدد 131 أولي
4. عيّن الأعداد الطبيعية n التي تحقق : $\begin{cases} 3m + 7d = 2^n - 48 \\ ab = 5m \end{cases}$ ،
حيث $d = PGCD(a;b)$ و $m = PPCM(a;b)$
5. عيّن قيم n بحيث يكون $7 < n < 15$ ، ثمّ استنتج الثنائيات $(a;b)$.

التمرين 120 :

1. نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $11x + 8y = 79 \dots (E_1)$
أ. بيّن أنّه إذا كان $(x;y)$ حلا للمعادلة (E_1) فإنّ $y \equiv 3[11]$
ب. حل المعادلة (E_1)
2. لتكن في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $3y + 11z = 372 \dots (E_2)$
أ. بيّن أنّه إذا كان $(y;z)$ حلا للمعادلة (E_2) فإنّ $z \equiv 0[3]$
ب. حل المعادلة (E_2)
3. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $3x - 8z = -249 \dots (E_3)$
4. لدينا 41 قطعة غيار مصنفة إلى ثلاثة أصناف ثمنها الكلي 480 ألف دينار جزائري ثمن القطعة من الصنف الأول 48 ألف دينار جزائري وثمن القطعة من الصنف الثاني 36 ألف دينار جزائري أمّا ثمن القطعة من الصنف الثالث فهو 4 آلاف دينار جزائري. عيّن عدد القطع لكل صنف.

مواضيع القسمة والموافقات في البكالوريا

التمرين 01 : بكالوريا 1991

1. حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $18x + 4y = 84$ وعيّن مجموعة الحلول $(x; y)$ التي تحقق $xy > 0$.
2. n عدد طبيعي يُكتب في نظام العدّ الذي أساسه 5 على الشكل $\overline{30\alpha\beta\gamma}$ ويُكتب في نظام العدّ الذي أساسه 7 على الشكل $\overline{55\alpha\beta}$ ، حيث α ، β و γ أعداد طبيعية.
عيّن الأعداد α ، β و γ واكتب العدد n في النظام العشري.

التمرين 02 : بكالوريا 1994

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليمية للعدد 2^n على 10. استنتج رقم آحاد العدد 1994^{1414}
2. (u_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = 2^n$
   أ. تحقق أنّ (u_n) هندسية
   ب. احسب بدلالة n العدد :
   $$S_n = (5 + 2^1) + (5 + 2^2) + (5 + 2^3) + \cdots + (5 + 2^n)$$
   ج. أوجد قيم العدد n بحيث يكون العدد S_n مضاعفا للعدد 10.

التمرين 03 : بكالوريا 1996

1. حلل كلا من العددين 1995 و105 إلى جداء عوامل أولية
2. α و β عددان طبيعيان حيث $\alpha < \beta$. حل في المجموعة $\mathbb{N}^2$ المعادلة: $\alpha\beta = 105$
3. a و b عددان طبيعيان غير معدومين وغير أوليين فيما بينهما بحيث $a < b$.
   عيّن a و b بحيث يكون : $\begin{cases} 95d + 19m = 1995 \\ d < 7 \end{cases}$
   حيث d هو $PGCD(a; b)$ و m هو $PPCM(a; b)$.

التمرين 04 : بكالوريا 2000 ر

1. حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $9x - 14y = 13$ ... (1) (لاحظ أنّ (3;1) حلّ خاص)
2. نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $45x - 28y = 130$ ... (2)
   أ. بيّن أنّه إذا كان $(x\ ;\ y)$ حلا للمعادلة (2) فإنّ x مضاعف لـ 2 و y مضاعف لـ 5

ب. عيّن مجموعة حلول المعادلة (2)

3. n عدد طبيعي يُكتب في نظام العدّ الذي أساسه 9 على الشكل $\overline{2\alpha\alpha3}$ ويُكتب في نظام العدّ الذي أساسه 7 على الشكل $\overline{5\beta\beta6}$ ، حيث α و β عددان طبيعيان. عيّن α و β واكتب العدد n في النظام العشري.

التمرين 05 : بكالوريا 2001

1. عيّن $PGCD(225; 180)$
2. حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) ... $225x - 180y = 90$
3. عيّن مجموعة الثنائيات $(x\,;\,y)$ حلول المعادلة (1) التي تحقق : $|x - y + 1| < 2$
4. a و b عددان طبيعيان يُكتبان في نظام عدّ أساسه α على الشكل : $a = \overline{52}$ و $b = \overline{252}$ ويُكتبان في نظام عدّ أساسه β على الشكل : $a = \overline{44}$ و $b = \overline{206}$.
عيّن α و β ثمّ a و b.

التمرين 06 : بكالوريا 2001 ر

1. α و β عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما. عيّن α و β حيث يكون $\beta(\beta^3 - 1) = 28\alpha^2$
2. a ، b ، c ، d و e أعداد طبيعية غير معدومة تشكل بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية هندسية أساسها q
عيّن هذه الأعداد إذا علمت أن العددين a و q عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما وأنّ $28a^3 = e - b$.

التمرين 07 : بكالوريا 2003 ر

1. α و β عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما و $\alpha > \beta$. عيّن α و β حيث يكون :
$\alpha(\alpha^2 - 19) = 35\beta$
2. (u_n) متتالية هندسية حدّها الأول u_0 وأساسها q حيث u_0 و q عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما و $q > u_0$.
   أ. عيّن u_0 و q إذا علمت أنّ : $35u_0^2 + 19u_1 - u_0q^3 = 0$
   ب. أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
   ج. عيّن قيم n بحيث يقبل العدد S_n القسمة على 30.

التمرين 08 : بكالوريا 2004 ر

ليكن λ عددا صحيحا ونعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $43x - 13y = \lambda \ldots (1)$

1. تحقق أنّ $(-3\lambda; -10\lambda)$ حل للمعادلة (1) واعط مجموعة حلول هذه المعادلة
2. n عدد طبيعي يُكتب في نظام العدّ الذي أساسه 6 على الشكل : $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}$ ويُكتب في نظام العدّ الذي أساسه 5 على الشكل $\overline{\beta0\gamma\gamma\gamma}$ ، حيث α ، β و γ أعداد طبيعية.
   أ. تحقق أنّ $43\alpha - 13\beta = \gamma$
   ب. عيّن الأعداد α ، β و γ واكتب العدد n في النظام العشري.

التمرين 09 : بكالوريا 2004 ع

1. أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 3^n و 4^n على 7
2. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد :
   $2 \times 2006^{3n+2} + 1424^{6n+1}$ قابلا للقسمة على 7
3. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام u_n حيث:
   $u_n = 2 \times 3^n + 3 \times 4^n$
   - أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
   - ما هي قيم الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها S_n قابلا للقسمة على 7؟

التمرين 10 : بكالوريا 2005 ر

n عدد طبيعي ، ونعتبر العددين الطبيعيين: $\alpha = n^2 + n$ و $\beta = n + 2$

1. برهن أنّ $PGCD(\alpha;\beta) = PGCD(\beta;n)$
2. استنتج القيم الممكنة لـ $PGCD(\alpha;\beta)$
3. a و b عددان طبيعيان يُكتبان في نظام العد الذي أساسه n على الشكل:
   $a = \overline{3520}$ و $b = \overline{384}$
   أ. برهن أنّ العدد $3n + 2$ قاسم مشترك للعددين a و b
   ب. استنتج تبعا لقيم n أنّ $PGCD(a;b)$ هو $3n + 2$ أو $2(3n + 2)$
   ج. عيّن العددين α و β علما أنّ $PGCD(a;b) = 41$.

التمرين 11 : بكالوريا 2005 ع

1) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 10

ب) استنتج أنّه مهما يكن العدد الطبيعي k فإنّ العدد:

$7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3}$ يقبل القسمة على 10

2) نضع: $S_n = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n$ من أجل كل عدد طبيعي n

أ) أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ $S_{n+4} \equiv S_n[10]$

ب) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد S_n على 10

التمرين 12 : بكالوريا 2007

n عدد طبيعي أكبر تماما من 2 ، و نعتبر الأعداد الطبيعية:

$a = 2n + 1$ ، $b = 4n + 3$ و $c = 2n + 3$

1. أثبت أنّ العددين a و b أوليان فيما بينهما واستنتج أنّ الأعداد a ، b و c أولية فيما بينها
2. عيّن تبعا لقيم العدد n قيمة القاسم المشترك الأكبر للعددين b و c
3. عيّن قيمة n بحيث يكون :

$$\begin{cases} PGCD(b;c) = 7 \\ PPCM(b;c) = 1305 \end{cases}$$

4. أكتب العدد b^2 في نظام العد الذي أساسه a
5. نفرض أنّ $(a;b;c)$ هي إحداثيات نقطة ω في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

أ- بيّن أنّ النقطة ω تنتمي إلى مستقيم (Δ) يُطلب تعيينه

ب- اكتب معادلة للمستوي (P) الذي يشمل المبدأ O ويحوي المستقيم (Δ).

التمرين 13 : بكالوريا 2008 ر

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث : $3x - 21y = 78$

1. أ. بيّن أنّ (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

ب. اثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $x \equiv 5[7]$.

استنتج حلول المعادلة (E)

2. أ. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7

ب. عيّن الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ التي هي حلول للمعادلة (E) وتحقق:

$5^x + 5^y \equiv 3[7]$.

التمرين 14 : بكالوريا 2008 ت ر

n عدد طبيعي أكبر من 5.

1. a و b عددان طبيعيان حيث: $a = n - 2$ و $b = 2n + 3$
   أ. ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ؟
   ب. بيّن أنّ العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n + 5$ مضاعفا للعدد 7
   ج. عيّن قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a; b) = 7$
2. نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث:
   $$p = 2n^2 - 7n - 15 \quad \text{و} \quad q = n^2 - 7n + 10$$
   أ. بيّن أنّ العددين p و q يقبلان القسمة على $n - 5$
   ب. عيّن تبعا لقيم n وبدلالة n ، $PGCD(p; q)$.

التمرين 15 : بكالوريا 2008 ت ر

نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y : (I) ... $4x - 9y = 319$

1. تأكد أنّ الثنائية (1 , 82) حل للمعادلة (I)
   أ- حل المعادلة (I)
2. عيّن الثنائيات $(a; b)$ الصحيحة حلول المعادلة :
   $$4a^2 - 9b^2 = 319 \text{ ... (II)}$$
3. استنتج الثنائيات $(x_0; y_0)$ حلول المعادلة (I) بحيث x_0 و y_0 مربعين تامين.

التمرين 16 : بكالوريا 2009 ر

x عدد طبيعي أكبر من 1 و y عدد طبيعي. A عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس x بالشكل $A = \overline{5566}$

1. أ. انشر العبارة $(5x^2 + 6)(x + 1)$ ، ثمّ أوجد علاقة تربط بين x و y إذا علمت أنّ:
   $$A = (5x^2 + 6)(2 + 2y)$$
   ب. احسب x و y إذا علمت أنّ x عدد أولي أصغر من 12 ، ثمّ اكتب تبعا لذلك العدد A في نظام التعداد العشري
2. أ. عيّن الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584
   ب. عيّن الأعداد الطبيعية a و b حيث $a > b$ التي تحقق :
   $$\begin{cases} a + b = 32 \\ a^2 + b^2 = 584 \end{cases}$$

التمرين 17 : بكالوريا 2009 ت ر

1. أ. عيّن الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2009
u_0 و a عددان طبيعيان غير معدومين ، (u_n) متتالية هندسية أساسها a
وحدها الأول u_0 بحيث: $u_1^2 + u_2 + 35a^2 = 2009$
ب. أحسب a و u_0
2. نضع $a = 7$ و $u_0 = 2$ ، أحسب u_n بدلالة n
3. نضع $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
أ. عبّر عن S_n بدلالة n
ب. عيّن العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n = 800$.

التمرين 18 : بكالوريا 2009 ت ر

1. حل المعادلة التفاضلية : $y' = (\ln 2)y$
2. نسمي f الحل الخاص لهذه المعادلة الذي يحقق $f(0) = 1$ ، عيّن عبارة $f(x)$
3. n عدد طبيعي.
أ. أدرس بواقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد 2^n
ب. استنتج باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد $f(2009) - 4$
4. أ. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث :
$$S_n = f(0) + f(1) + \cdots + f(n)$$
ب. عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يقبل من أجلها S_n القسمة على 7.

التمرين 19 : بكالوريا 2010 ر

1. نعتبر المعادلة: (1) ... $7x + 65y = 2009$ ، حيث x و y عددان صحيحان.
أ. بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإنّ y مضاعف للعدد 7
ب. حل المعادلة (1)
2. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9
3. عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يقبل العدد $2^{6n} + 3n + 2$ القسمة على 9
4. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2^{6n} - 1$
أ. تحقّق أنّ u_n يقبل القسمة على 9
ب. حل المعادلة : (2) ... $(7u_1)x + (u_2)y = 126567$ ذات المجهول $(x; y)$
حيث x و y عددان صحيحان.
ج. عيّن الثنائية $(x_0; y_0)$ حل المعادلة (2) حيث x_0 و y_0 عددان طبيعيان مع $y_0 \geq 25$.

التمرين 20 : بكالوريا 2010 ر

1. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^{3n} - 1$ يقبل القسمة على 13
2. استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، يقبل كل من العددين $3^{3n+1} - 3$ و $3^{3n+2} - 9$ القسمة على 13
3. عيّن حسب قيم n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13 ، و استنتج باقي قسمة 2005^{2010} على 13
4. نضع من أجل كل عدد طبيعي p : $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p}$
   - أ. من أجل $p = 3n$ ، عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13
   - ب. برهن أنّه إذا كان $p = 3n + 1$ فإنّ A_p يقبل القسمة على 13
   - ج. عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13 من أجل $p = 3n + 2$
5. يكتب العددان الطبيعيان a و b في نظام العد ذي الأساس 3 كما يلي :
   $a = \overline{1001001000}$ و $b = \overline{1000100010000}$
   - أ. تحقق أنّ العددين الطبيعيين a و b يكتبان على الشكل A_p في النظام العشري
   - ب. استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 13.

التمرين 21 : بكالوريا 2010 ت ر

نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب في نظام العد ذي الأساس 7 كما يلي : $n = \overline{11\alpha00}$ حيث α عدد طبيعي.

1. عيّن α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3
2. عيّن العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5.
   استنتج قيمة α حتى يكون n قابلا للقسمة على 15.
3. نأخذ $\alpha = 4$. اكتب العدد n في النظام العشري.

التمرين 22 : بكالوريا 2010 ت ر

1. عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 10^n على 13
2. تحقّق أنّ : $(10^{2008})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 0[13]$
3. عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0[13]$.

التمرين 23 : بكالوريا 2011 ر

(u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها أعداد طبيعية تحقق:

$$\begin{cases} u_4 = 15 \\ m + d = 42 \end{cases} \quad \text{حيث} \quad \begin{cases} m = PPCM\,(u_3, u_5) \\ d = PGCD\,(u_3, u_5) \end{cases}$$

1. عيّن الحدين u_3 و u_5 ، ثمّ استنتج u_0
2. أكتب (u_n) بدلالة n ، ثمّ بيّن أنّ : 2010 حد من حدود (u_n) وعيّن رتبته
3. عيّن الحد الذي ابتداءً منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة من (u_n) يساوي 10080
4. n عدد طبيعي غير معدوم.

أ- أحسب بدلالة n المجموع S حيث :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2n}$$

ب-استنتج بدلالة n المجموعين S_1 و S_2 حيث :

$$S_1 = u_0 + u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n}$$
$$S_2 = u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n-1}$$

التمرين 24 : بكالوريا 2011 ر

1. نعتبر المعادلة (E) ... $13x - 7y = -1$ حيث x و y عددان صحيحان. حلّ المعادلة (E)
2. عيّن الأعداد الصحيحة النسبية a بحيث : $\begin{cases} a \equiv -1[7] \\ a \equiv 0[13] \end{cases}$
3. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على كل من 7 و13
4. ليكن العدد الطبيعي b المكتوب في نظام التعداد ذي الأساس 9 كما يلي : $\overline{\alpha 00\beta 086}$ حيث: α و β عددان طبيعيان، $\alpha \neq 0$. عيّن α و β حتى يكون b قابلا للقسمة على 91.

التمرين 25 : بكالوريا 2011 ت ر

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية :

1. المعادلة $21x + 14y = 40$ لا تقبل حلولا في مجموعة الأعداد الصحيحة
2. في نظام التعداد ذي الأساس 7 يكون : $\overline{3421} + \overline{1562} = \overline{5413}$
3. باقي القسمة الإقليدية للعدد : $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{2011}$ على 7 هو : 6

التمرين 26 : بكالوريا 2011 ت ر

من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$

1. تحقّق أنّ $4 \equiv -3[7]$ ، ثمّ بيّن أنّ $A_3 \equiv 6[7]$
2. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2^n و 3^n على 7
3. بيّن أنّه إذا كان n فرديا فإنّ $A_n + 1$ يقبل القسمة على 7 واستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{2011} على 7.
4. ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{1432} على 7 ؟

التمرين 27 : بكالوريا 2012 ر

1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية :

$$2011x - 1432y = 31 \dots (1)$$

أ. أثبت أن العدد 2011 أولي

ب. باستعمال خوارزمية إقليدس، عيّن حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) ثمّ حل المعادلة (1)

2) أ. عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 ،

ثمّ جد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7

ب. عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون :

$$2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0[7]$$

3) N عدد طبيعي يُكتب $\overline{2\gamma\alpha\beta}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث : α ، β ، γ بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما و $(\beta;\gamma)$ حل للمعادلة (1).

عيّن α ، β و γ ، ثمّ اكتب N في النظام العشري.

التمرين 28 : بكالوريا 2012 ر

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 16$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} = 6u_n - 9$$

1) أ. احسب بواقي قسمة كل من u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 على 7

ب. خمّن قيمة للعدد a وقيمة للعدد b بحيث:

$$u_{2k} \equiv a[7] \quad \text{و} \quad u_{2k+1} \equiv b[7]$$

2) أ. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2} \equiv u_n[7]$

ب. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي k ، $u_{2k} \equiv 2[7]$ ، ثمّ استنتج أنّ :
$u_{2k+1} \equiv 3[7]$

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - \frac{9}{5}$

أ. بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية ، يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب. أحسب بدلالة n كلا من u_n و S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

التمرين 29 : بكالوريا 2012 ت ر

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 9^n على 11
2. ما هو باقي قسمة 2011^{2012} على 11 ؟
3. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، يقبل العدد
$(4 \times 9^{15n+1} + 4 \times 2011^{10n} + 2011^{2012})$ القسمة على 11
4. عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد $(2011^{2012} + 2n + 2)$ مضاعفا للعدد 11.

التمرين 30 : بكالوريا 2012 ت ر

نسمي (S) المجلة التالية : $\begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases}$ حيث x عدد صحيح $(x \in \mathbb{Z})$

1. بيّن أنّ العدد 153 حل للجملة (S)
2. إذا كان x_0 حلا لـ (S) ، بيّن أنّ : (x حل لـ (S)) يكافئ $\begin{pmatrix} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{pmatrix}$
3. حل الجملة (S)
4. يُريد مكتبي وضع عدد من الكتب في علب ، فإذا استعمل علبا تتسع لـ 15 كتاب بقي لديه 3 كتب، وإذا استعمل علبا تتسع لـ 7 كتب بقي لديه 6 كتب. إذا علمت أنّ عدد الكتب التي بحوزته محصور بين 500 و600 كتاب ، ما هو عدد هذه الكتب ؟

التمرين 31 : بكالوريا 2013 ر

1) n عدد طبيعي.

نعتبر العددين الصحيحين α و β حيث: $\alpha = 2n^3 - 14n + 2$ و $\beta = n + 3$

أ) بيّن أنّ: $PGCD(\alpha; \beta) = PGCD(\beta; 10)$

ب) ما هي القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha; \beta)$؟

ج) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $PGCD(\alpha; \beta) = 5$

2) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11

ب) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية: $\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[10] \end{cases}$.

التمرين 32 : بكالوريا 2013 ر

1) أ) عيّن الأعداد الطبيعية n التي تحقق: $2n + 27 \equiv 0[n+1]$

ب) عيّن الثنائيات (a, b) من الأعداد الطبيعية حيث: $(b-a)(a+b) = 24$

ج) استنتج طريقة لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$

2) α و β عددان صحيحان مكتوبان في النظام ذي الأساس خمسة على الشكل:

$\alpha = \overline{10141}$ و $\beta = \overline{3403}$

أ) أكتب العددين α و β في النظام العشري

ب) عيّن الثنائية (a, b) من الأعداد الطبيعية حيث: $\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ \alpha a - \beta b = 9 \end{cases}$

3) أ) عيّن القاسم المشترك الأكبر للعددين 2013 و1434 ، ثمّ استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 671 و478

ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية: $2013x - 1434y = 27$.

التمرين 33 : بكالوريا 2013 ت ر

x و y عددان صحيحان و (E) المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية:

$$11x + 7y = 1$$

1) أ) عيّن $(x_0; y_0)$ حل المعادلة (E) الذي يحقق: $x_0 + y_0 = -1$

ب) استنتج حلول المعادلة (E)

2) a و b عددان صحيحان و S العدد الذي يحقق: $\begin{cases} S = 11a + 1 \\ S = 7b + 2 \end{cases}$

أ) بيّن أنّ $(a; -b)$ حل للمعادلة (E)

ب) ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد S على 77؟

3) n عدد طبيعي باقي قسمته على 11 هو 1 وباقي قسمته على 7 هو 2

عيّن أكبر قيمة للعدد n حتى يكون $n < 2013$.

التمرين 34 : بكالوريا 2014 ر

1. نعتبر المعادلة (E) : $2013x - 1962y = 54$ حيث x و y عددان صحيحان
   أ. احسب $PGCD(2013; 1962)$
   ب. استنتج أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا
   ج. بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ: $x \equiv 0[6]$
   د. استنتج حلا خاصا $(x_0; y_0)$ حيث $74 < x_0 < 80$ ، ثمّ حل المعادلة (E)
2. نرمز بـ d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x; y)$ حل للمعادلة (E)
   أ. ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟
   ب. عيّن قيّم العددين a و b حيث: $671a - 654b = 18$ و $PGCD(a; b) = 18$.

التمرين 35 : بكالوريا 2014 ت ر

n و p عددان طبيعيان.

1. ادرس حسب قيم n ، بواقي القسمة الإقليدية على 16 للعدد 5^n
2. نضع: $C_n = 16n + 9$ و $D_p = 5^p$
   أ. بيّن أنّه إذا كان $p = 4k + 2$ حيث k عدد طبيعي، فإنّه يوجد عدد طبيعي n يحقق $C_n = D_p$
   ب. عيّن n من أجل $p = 6$
3. f هي الدالة المعرّفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = 5^{(4x+2)} - 9$
   ادرس تغيّرات الدالة f ، ثمّ استنتج إشارة $f(x)$
4. (u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = 5^4\left(u_n + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{16}$
   أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{5^{(4n+2)}-9}{16}$
   ب. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإنّ u_n عدد طبيعي
5. استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

التمرين 36 : بكالوريا 2015 ر

1. أ. عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7
   ب. استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $[2015^{53} + 1954^{1962} - 1962^{1954}]$ على 7
2. أ. بيّن أنّ 89 عدد أولي
   ب. عيّن كل القواسم الطبيعية للعدد 7832
   جـ. بيّن أنّ العددين 981 و 977 أوّليان فيما بينهما
3. x و y عددان طبيعيان غير معدومين قاسمهما المشترك الأكبر هو 2
   عيّن x و y علما أنّ: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8[22] \end{cases}$

4. a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة حيث a أوّلي مع b و a أوّلي مع c
أ. باستعمال مبرهنة ، برهن أنّ a أوّلي مع $b \times c$
ب. باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،
$PGCD(a; b^n) = 1$
جـ. استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 1962^{1954} و 1954^{1962}.

التمرين 37 : بكالوريا 2015 ر

a ، b ، c و d أعداد طبيعية غير معدومة وأصغر من أو تساوي 9
$\overline{abcd}$ عدد طبيعي مكتوب في النظام العشري
من أجل كل الأعداد a ، b ، c و d : يكون العدد $\overline{abcd}$ يقبل القسمة على 11 إذا وفقط إذا كان :
أ. العدد $(a - b + c - d)$ يقبل القسمة على 11
ب. العدد $(a + b + c - d)$ يقبل القسمة على 11
جـ. العدد $\overline{cd}$ المكتوب في النظام العشري يقبل القسمة على 11.

التمرين 38 : بكالوريا 2015 ت ر

1. أ. عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على 13
ب. استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $3 - 2014^{2037} + 138^{2015} \times 42$ على 13
2. أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n :
$$(5n + 1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n + 6)8^{2n}[13]$$
ب. عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n حتى يكون:
$$(5n + 1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv 0[13]$$

التمرين 39 : بكالوريا 2016 ر

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما، حدودها موجبة تماما، حدّها الأول u_0 وأساسها q حيث:
$$\begin{cases} \ln u_1 + \ln u_2 = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1 + e^3) \end{cases}$$
1. احسب u_1 و u_2 ، ثمّ استنتج قيمة الأساس q
2. نضع: $u_1 = e^4$ و $q = e^3$
أ. عبّر عن u_n بدلالة n
ب. نضع: $S_n = \ln u_0 + \ln u_1 + \cdots + \ln u_n$. احسب S_n بدلالة n
3. من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $a_n = n + 3$
أ. بيّن أنّ $PGCD(2S_n; a_n) = PGCD(a_n; 14)$
ب. عيّن القيم الممكنة لـ: $PGCD(2S_n; a_n)$
ج. عيّن قيم الأعداد الطبيعية n التي من أجلها: $PGCD(2S_n; a_n) = 7$

4. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7
5. نضع: $b_n = 3na_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1$
عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $\begin{cases} b_n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$
6. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $(1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52)$ يقبل القسمة على 7.

التمرين 40 : بكالوريا 2016 ر

1. أ. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 3^n و 7^n على 11
ب. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4}$ مضاعف للعدد 11
2. نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$: $7x - 3y = 8$ ، حيث x و y عددان طبيعيان
أ. حل المعادلة (E)
ب. d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x;y)$ حلا للمعادلة (E)
- ما هي القيّم الممكنة للعدد d ؟
- عيّن الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) من أجل $d = 4$
ج. جد الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق :
$2016^{7x} + 1437^{3y} \equiv 0[11]$

التمرين 41 : بكالوريا 2016 ت ر

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$: $6x - 7y = 19$ ، حيث x و y عددان صحيحان
1. جد الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) بحيث $x_0 = y_0$ ، ثمّ حل المعادلة (E)
2. استنتج قيم العدد الصحيح λ والتي تحقق : $\begin{cases} \lambda \equiv 24[7] \\ \lambda \equiv 5[6] \end{cases}$ ، ثمّ عيّن باقي قسمة العدد λ على 42
3. عيّن جميع الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) حيث: $|x + y - 1| \leq 13$
4. أ. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7
ب. عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة : $\begin{cases} n - 5^n \equiv 2020[7] \\ n \equiv 1437[6] \end{cases}$.

التمرين 42 : بكالوريا 2017 ر

1. نعتبر المعادلة (E) ... $104x - 20y = 272$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان

أ. احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 20 و104 ، ثمّ بيّن أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا

ب. بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $x \equiv 3[5]$ ، ثمّ استنتج حلول المعادلة (E)

2. λ عدد طبيعي يُكتب $\overline{1\alpha\alpha\beta01}$ في نظام التعداد الذي أساسه 4 ، ويُكتب $\overline{1\alpha\beta01}$ في نظام التعداد الذي أساسه 6 حيث α و β عددان طبيعيان.
عيّن α و β ، ثمّ اكتب λ في النظام العشري

3. تحقق أنّ كلا من 2017 و1009 عدد أوّلي ، ثمّ عيّن الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق:
$2m - d = 2017$ حيث $d = PGCD(a; b)$ ، $m = PPCM(a; b)$.

التمرين 43 : بكالوريا 2017 ر

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = 1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n،
$u_{n+1} = 7u_n + 8$

1. برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n = 7^{n+1} - 4$
2. نضع من أجل كل عدد طبيعي n :
$S_n = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
أ. احسب بدلالة n المجموع S_n ، ثمّ جد علاقة بين S_n و S'_n
ب. استنتج أنّ من أجل كل عدد طبيعي n : $18S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31$
3. أ. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 5
ب. عين قيم n الطبيعية حتى يكون S'_n قابلا للقسمة على 5.

التمرين 44 : بكالوريا 2017 ت ر

1. بيّن أنّ من أجل كل عدد طبيعي k ، $4^{5k} \equiv 1[11]$
2. استنتج تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11
3. بيّن أنّ من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $(2 \times 2017^{5n+3} + 3 \times 1438^{10n} + 1)$ يقبل القسمة على 11
4. عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(2 \times 2017^{5n+2} + n - 3)$ قابلا للقسمة على 11.

التمرين 45 : بكالوريا 2018 ر

1. α وβ عددان طبيعيان بحيث: $\begin{cases} \alpha + \beta = 4035 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$
عيّن العددين α وβ ، ثم بيّن أنّ العددين $\frac{\alpha}{2}$ وβ أوليان فيما بينهما.
2. عيّن كل الثنائيات الصحيحة (x , y) التي تحقق المعادلة: $1009x - 2017y = 1$

3. عيّن الأعداد الصحيحة a التي تحقق الجملة: $\begin{cases} a \equiv 2019[2017] \\ a \equiv 2019[1009] \end{cases}$

4. أ) n عدد طبيعي، ادرس تبعا لقيم n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 9.

ب) L عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس 7 كما يلي: $L = \underbrace{\overline{111 \dots 1}}_{\text{2018 مرة}}$

عن باقي القسمة الاقليدية للعدد $42L$ على 9.

التمرين 46 : بكالوريا 2018 ت ر

لتكن (u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام كما يلي: $u_n = 2(3)^n$ و (v_n) متتالية عددية معرّفة بحدها الأول $v_0 = 4$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = 5v_n + u_n$

1. نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $w_n = \frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2}$

اثبت أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{3}$، يُطلب تعيين حدها الأول.

2. اكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$:
$v_n = 5^{n+1} - 3^n$

3. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الاقليدية للعددين 3^n و 5^n على 8.

4. عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد v_n على 8.

التمرين 47 : بكالوريا 2019 ر

1. حل المعادلة $(E) \dots 505x - 673y = 1$ ذات المجهول $(x; y)$ حيث x و y عددان صحيحان. (لاحظ أن: $2019 = 673 \times 3$ و $2020 = 505 \times 4$)

2. بيّن أنّه من أجل كل ثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (E) فإن: x و y من نفس الإشارة.

3. نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 505 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = v_n + 673 \end{cases}$$

اكتب u_α بدلالة α ثمّ اكتب v_β بدلالة β حيث α و β عددان طبيعيان.

4. أ) عيّن الحدود المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) ثمّ بيّن أنّ هذه الحدود المشتركة تشكّل متتالية حسابية (w_n) يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $X_n = \frac{1}{505}(w_n - 2023)$

احسب بدلالة n الجداء $p = X_1 . X_2 \dots . X_n$.

التمرين 48 : بكالوريا 2019 ر

(u_n) متتالية عددية حدودها موجبة معرفة بحدها الأول u_1 حيث $u_1 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1} = u_n + 2\sqrt{u_n} + 1$

1. أ) تحقق أنّه: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} = 1$

ب) استنتج كتابة الحد العام u_n بدلالة n

2. تحقق أنّه: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n = n(n-2) + 1$
3. عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها: $n-2$ يقسم $n-5$
4. أ) من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ ، بيّن أنّ: $PGCD(n-2; u_n) = 1$

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها :

$(n-2)(n^2+1)$ يقسم $(n-5)u_n$

التمرين 49 : بكالوريا 2019 ت ر

(u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 7u_n - 18n + 9 \end{cases} \text{ و } v_n = u_n - 3n + 1$$

1. أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
2. اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.
3. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
4. أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لـ 7^n على 9.

ب) ما هو باقي القسمة الإقليدية على 9 للعدد:

$1442^{2019} + 1962^{1954} + 1954^{1962}$

ج) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $6S_n - 7u_n \equiv 0[9]$.

التمرين 50 : بكالوريا 2019 ت ر

1. نعتبر المعادلة ذات المجهول (x, y) : $(E) ... 5x - 3y = 1$ ، حيث x و y عددان صحيحان.

أ) تحقق أن الثنائية $(6n+2\ ;\ 10n+3)$ حل للمعادلة (E) حيث n عدد طبيعي.

ب) استنتج أنّ العددين $10n+3$ و $6n+2$ أوليان فيما بينهما.

2. نضع $a = 10n + 3$ ، $b = 3n + 5$ و d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b.

أ) بيّن أنّ $d = 1$ أو $d = 41$

ب) بيّن أنّه إذا كان $d = 41$ فإن $n \equiv 12[41]$

3. ليكن العددان الطبيعيان $A = 20n^2 + 36n + 9$ و $B = 6n^2 + 19n + 15$
أ) بيّن أنّ العددين A و B يقبلان القسمة على $2n + 3$.
ب) جد بدلالة n وحسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B.

التمرين 51 : بكالوريا 2020 ر

ليكن n عددا طبيعيا أكبر تماما من 1.

نعتبر الأعداد الطبيعية a ، b و c حيث : $a = 4n + 1$ ، $b = 6n + 1$ و $c = 3n + 2$

1. أثبت أن العددين a و b أوليان فيما بينهما.
2. نسمي α القاسم المشترك الأكبر للعددين a و c
أثبت أن α يقسم 5 ، ثم عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون: $\alpha = 5$
3. نسمي β القاسم المشترك الأكبر للعددين b و c
أ. أثبت أن α يقسم β.
ب. أثبت أن العددين β و b أوليان فيما بينهما ثم استنتج أنّ: $\alpha = \beta$.
4. نعتبر العددين الطبيعيين A و B حيث:
$$A = 4n^2 - 3n - 1 \text{ و } B = 18n^3 - 3n^2 - 13n - 2$$
أ. بيّن أنّ كلا من العددين A و B مضاعف للعدد الطبيعي $(n - 1)$
ب. نضع : $d = PGCD(A; B)$. عبر حسب قيم α عن d بدلالة n.
(لاحظ أنّ: $bc = 18n^2 + 15n + 2$)

التمرين 52 : بكالوريا 2020 ر

1. حل المعادلة: $3x - 5y = 2$ ذات المجهول (x, y) حيث x و y عددان صحيحان.
2. أ. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي 9^n على 7.
ب. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي 4^n على 11.
3. عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون: $14 \times 4^n + 11 \times 9^n - 4 \equiv 0[77]$.
4. ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم، نضع:
$$u_n = 3 \times 4^n + 4 \times 9^n \quad \text{و} \quad S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{15n}$$
أ. عبر عن S_n بدلالة n
ب. أثبت أنّ S_n مضاعف للعدد 77.

التمرين 53 : بكالوريا 2020 ت ر

نعتبر المعادلتين : $693x - 216y = 738 \dots (E_1)$ و $77x - 24y = 82 \dots (E_2)$

حيث x و y عددان صحيحان.

1. جد $PGCD(693; 216)$ واستنتج أنّ المعادلتين (E_1) و (E_2) متكافئتان.
2. تحقق أن الثنائية $(2; 3)$ حل للمعادلة (E_2) ثم أوجد حلولها في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
3. جد الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E_2) التي تحقق: $|y - x| \leq 54$.
4. ليكن N عددا طبيعيا يكتب $\overline{\beta 68 \alpha}$ في النظام ذي الأساس 9 ويكتب $\overline{1\alpha\beta 0\alpha}$ في النظام ذي الأساس 6. حيث α و β عددان طبيعيان.
جد العددين α و β ، ثمّ اكتب العدد N في النظام العشري.

التمرين 54 : بكالوريا 2020 ت ر

1) أ. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5.
ب. استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد: $8^{2020} - 2 \times 3^{1441} - 1$ على 5.

2) من أجل كل عدد طبيعي n، نعتبر العدد الطبيعي a_n حيث: $a_n = 3^{n+1} + 4$.
عين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون: $a_n \equiv 0[5]$.

3) نعتبر العدد الطبيعي b_n حيث: $b_n = 7a_n + 5$.
أ. عيّن القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a_n و b_n.
ب. بيّن أنّ: $a_n \equiv 0[5]$ إذا وفقط إذا كان $b_n \equiv 0[5]$
ج. استنتج الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون a_n و b_n أوليين فيما بينهما.

التمرين 55 : بكالوريا 2021 ر

1) نعتبر المعادلة ذات المجهول $(x; y)$: $42x - y = 38 \dots (E)$
حيث x و y عددان صحيحان.
حل المعادلة (E) علما أن الثنائية $(1; 4)$ حل لها.

2) a ، b و c أعداد طبيعية حيث a غير معدوم. العدد الطبيعي N يكتب $\overline{ab0cb}$ في نظام تعداد أساسه 5 ويكتب $\overline{a7c5}$ في نظام تعداد أساسه 8.
أ. بين أن الأعداد a ، b و c تحقق: $113a = 3(c - 42b + 151)$، ثمّ استنتج أنّ: $a = 3$.
ب. جذ العددين الطبيعيين b و c ثمّ اكتب العدد N في النظام العشري.

3) أ. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 6.
ب. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $2021^{2n} + 1441^n + 4$ مضاعف للعدد 6.

جـ. نضع: $A_n = 2021^{2n} + 1441^n + 2 \times 1442^n$
جد قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $A_n \equiv 0[6]$.

التمرين 56 : بكالوريا 2021 ر

1) نعتبر المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: (E) ... $7x - 6y = 1$، حيث x و y عددان صحيحان.
أ. حل المعادلة (E) علما أن الثنائية $(1;1)$ حل لها.
ب. تحقق أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن xy عدد طبيعي غير معدوم.
2) أ. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7.
ب. بيّن أنّ العدد $2022^{2022} + 2019^{2021} \times 4$ يقبل القسمة على 7.
3) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $4^n \equiv 4[6]$
4) نفرض أن الثنائية $(a;b)$ حل للمعادلة (E) . A عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس 4 على الشكل: $\overline{333 \ldots 330}$ (عدد أرقامه $a \times b$)
أ. بيّن أنّ: $A = 4^{ab} - 4$
ب. تحقق أنّ: $A \equiv 0[6]$ ثمّ عيّن كل الثنائيات $(a;b)$ التي من أجلها يكون A قابلا للقسمة على 42.

التمرين 57 : بكالوريا 2021 ت ر

1) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 9.
2) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 2021^{1442} على 9.
3) بيّن أنّ العدد $2021^{1442} + 1691^{1954} - 8$ مضاعف للعدد 9.
4) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $5^{6n} + 2021^{6n+1} + 1443$ مضاعف للعدد 9.
5) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $A_n = 2021^{1442} + 1691^{1954} + 5n$
عيّن الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون: $A_n \equiv 0[9]$.

التمرين 58 : بكالوريا 2021 ت ر

نعتبر المعادلة: (E) ... $13x - 9y = 1$، ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان.
1) أ. تحقق أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ: $x \equiv 7[9]$
ب. استنتج حلول المعادلة (E)

2) أ. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5
ب. نضع: $A_n = 3^{4n} + 3^{4n+1} + 3^{4n+2} - 3$ حيث n عدد طبيعي.
بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، A_n يقبل القسمة على 5
3) بفرض أنّ $(x; y)$ حل للمعادلة (E) حيث x و y عددان طبيعيان.
عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد $n + 3^{y-x} + 2023^{2022}$ القسمة على 5.

التمرين 59 : بكالوريا 2022 ر

1) أ. عيّن، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7
ب. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $6^{2n} \equiv 1[7]$ ثمّ استنتج بواقي القسمة الإقليدية للعدد 6^n على 7
2) بيّن أنّ العدد $(2021^{2022} + 1962^{1443})^{1954} - 2$ يقبل القسمة على 7
3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n :

$$S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \quad \text{و} \quad a_n = 2^n + 6^n$$

أ- استنتج، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد a_n على 7
ب- بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_{n+6} \equiv S_n[7]$
جـ- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n \equiv 2^{n+1} + 3 \times 6^{n+1} + 3[7]$
ثمّ استنتج قيم n بحيث $S_n \equiv 0[7]$

التمرين 60 : بكالوريا 2022 ر

n عدد طبيعي. نضع: $A_n = n^3 + 5n^2 + 7n + 9$ و $B_n = n + 2$
1) أ. بيّن أنّ $PGCD(A_n; B_n) = PGCD(B_n; 7)$
ب. استنتج القيم الممكنة لـ $PGCD(A_n; B_n)$
جـ. عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون A_n و B_n أوليين فيما بينهما.
2) نعتبر المعادلة (E) ... $A_2x - B_2y = 29$ ذات المجهولين الصحيحين x و y
أ. بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (E) فإنّ $x \equiv 3[4]$
ب. عيّن حلول المعادلة (E)
3) أ. استنتج حلول المعادلة (E') ... $51x - 4y = 45$
ب. عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E') حيث $|y - 12x| \leq 3$.

التمرين 61 : بكالوريا 2022 ت ر

a و b عددان طبيعيان حيث $a = 2022$ و $b = 124$

1) عيّن باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 7

2) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7

3) بيّن أنّ العدد $a^a + b^b + 4$ يقبل القسمة على 7

4) نضع، من أجل كل عدد طبيعي n:

$$A_n = 2021^n + 2022^n + 2023^n + 2024^n$$

بيّن أنّ $A_n \equiv 1 + 5^n + 6^n[7]$ ثمّ عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $A_n + 1$ مضاعفا للعدد 7.

التمرين 62 : بكالوريا 2022 ت ر

نضع، من أجل كل عدد طبيعي n: $a = 5n + 2$ ، $b = n + 1$ ، $c = 9n + 2$

و $d = PGCD(a; b)$ ، $d' = PGCD(b; c)$

1) عيّن القيم الممكنة لكل من d و d' ثم استنتج $PGCD(a; b; c)$

2) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد b قاسما لـ a

3) نعتبر المعادلة: (E) ... $17x - 4y = 29$ حيث x و y عددان صحيحان.

بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $x \equiv 1[4]$ ثمّ حل المعادلة (E)

4) عين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) والتي تحقق $xy < 279$.

حلول تمارين القسمة والموافقات

حل التمرين 01 :

$$\boldsymbol{b = n^2 + 2\ ;\ a = 5n^2 + 7}$$

1. بيان أنّ كل قاسم مشترك للعددين a و b يقسم 3

$$d \mid a \text{ و } d \mid b \Rightarrow d \mid 5b - a \Rightarrow d \mid 5n^2 + 10 - 5n^2 - 7 \Rightarrow \boxed{d \mid 3}$$

2. بيان أنّ $PGCD(a,b) = 3$ إذا و فقط إذا $n^2 \equiv 1[3]$

$$PGCD(a,b) = 3 \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0[3] \\ b \equiv 0[3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5n^2 + 7 \equiv 0[3] \\ n^2 + 2 \equiv 0[3] \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4n^2 + 5 \equiv 0[3] \Rightarrow n^2 + 2 \equiv 0[3] \Rightarrow \boxed{n^2 \equiv 1[3]}$$

3. استنتاج حسب قيم n ، $PGCD(a,b)$

$n \equiv$	0	1	2	[3]
$n^2 \equiv$	0	1	1	[3]

$n^2 \equiv 1[3] \Rightarrow n \equiv 1[3]$ أو $n \equiv 2[3]$

$n = 3k : PGCD(a,b) = 1$

$n = 3k + 1$ أو $n = 3k + 2 : PGCD(a,b) = 3$

حل التمرين 02 :

$$\boldsymbol{PGCD(a,b) = d\ ;\ b = 5n - 2\ ;\ a = 2n + 3}$$

1. بيان أنّ: $PGCD(a,b) = 19$

$$d \mid a \text{ و } d \mid b \Rightarrow d \mid 5a - 2b \Rightarrow d \mid 10n + 15 - 10n + 4 \Rightarrow d \mid 19$$

$$\Rightarrow d = 1 \text{ أو } d = 19$$

إذا كان العددان a و b غير أوليين فيما بينهما فإن $d \neq 1$ منه $d = 19$

2. تعيين قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a,b) = 19$

$$PGCD(a,b) = 19 \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0[19] \\ b \equiv 0[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n + 3 \equiv 0[19] \ldots ① \\ 5n - 2 \equiv 0[19] \ldots ② \end{cases}$$

$$② - ① \Rightarrow 3n - 5 \equiv 0[19] \Rightarrow 3n \equiv 5[19] \Rightarrow 3n \equiv 24[19]$$

$$\Rightarrow n \equiv 8[19] \Rightarrow \boxed{n = 19k + 8\ ;\ k \in \mathbb{N}}$$

حل التمرين 03 :

$$\boldsymbol{b = 2n^2 + n \, ; a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1}$$

1. **بيان أنّ العدد $(2n+1)$ قاسم مشترك للعددين a و b**

$a = (2n+1)(n^2+2n+1) \; ; \; b = n(2n+1)$

منه العدد $(2n+1)$ قاسم مشترك للعددين a و b

2. **بيان أنّ $PGCD(n, n+1) = 1$ و $PGCD[n, (n+1)^2] = 1$**

$(n+1) - (n) = 1 \Rightarrow \boxed{PGCD(n, n+1) = 1}$ (بيزو)

$(n+1)^2 - n(n+2) = 1 \Rightarrow \boxed{PGCD[n, (n+1)^2] = 1}$

3. **استنتاج $PGCD(a, b)$**

$$PGCD(a,b) = (2n+1)PGCD(n^2+2n+1, n)$$
$$= (2n+1)\underbrace{PGCD[(n+1)^2, n]}_{1} = \boxed{2n+1}$$

حل التمرين 04 :

1. **حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) ... $9x - 7y = 3$**

$9(-2) - 7(-3) = 3 \Rightarrow (x_0; y_0) = (-2; -3)$

$\begin{cases} 9x - 7y = 3 \\ 9(-2) - 7(-3) = 3 \end{cases} \Rightarrow 9(x+2) - 7(y+3) = 0 \Rightarrow 9(x+2) = 7(y+3)$

$\begin{cases} 7 \mid 9(x+2) \\ PGCD(7,9) = 1 \end{cases} \Rightarrow 7 \mid (x+2) \Rightarrow x + 2 = 7k \Rightarrow x = 7k - 2 \; ; k \in \mathbb{Z}$

$9(x+2) = 7(y+3) \Rightarrow 9(7k) = 7(y+3) \Rightarrow y + 3 = 9k \Rightarrow y = 9k - 3; k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{S = \{(7k-2 \, ; 9k-3)\} \, ; \; k \in \mathbb{Z}}$$

2. **تعيين قيم d حيث : $d = PGCD(x, y)$**

$d = PGCD(x,y) \Rightarrow d \mid x$ و $d \mid y \Rightarrow d \mid 9x - 7y \Rightarrow d \mid 3$

$\Rightarrow$ $\boxed{d = 1}$ أو $\boxed{d = 3}$

3. **تعيين الثنائيات (x, y) التي تحقق: $\begin{cases} m = 1242 \\ d = 3 \end{cases}$**

$x.y = m.d \Rightarrow (7k-2)(9k-3) = 3726 \Rightarrow 63k^2 - 39k - 3720 = 0$

$\Rightarrow 21k^2 - 13k - 1240 = 0 \Rightarrow k = 8 \Rightarrow \boxed{(x,y) = (54, 69)}$

حل التمرين 05 :

1. **إثبات أن العدد 251 أولي.**

$15,84 \approx \sqrt{251}$. بما أنّ العدد 251 لا يقبل القسمة على كل من 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 و 13 فهو إذن أولي

2. **تحليل العدد 2008 واستنتاج الأعداد الطبيعية التي مكعباتها تقسم 2008**

$2008 = 2^3 \times 251$. الأعداد الطبيعية التي مكعب كل منها يقسم 2008 هي 1 و 2

3. **تعيين الأعداد الطبيعية a و b بحيث : $m^3 + 35d^3 = 2008$**

$$a = da', b = db'; PGCD(a', b') = 1$$

$$m \times d = a \times b \Rightarrow m = \frac{a \times b}{d} = \frac{da' \times db'}{d} = da'b'$$

$$m^3 + 35d^3 = 2008 \Rightarrow (da'b')^3 + 35d^3 = 2008$$

$$\Rightarrow d^3[(a'b')^3 + 35] = 2008 \Rightarrow d^3 | 2008 \quad \Rightarrow d \in \{1,2\}$$

$d = 1: (a'b')^3 + 35 = 2008 \Rightarrow (a'b')^3 = 1973 \ \Rightarrow a'b' = \sqrt[3]{1973}$
مستحيل لأن a' و b' عددان صحيحان

$$d = 2: 2^3[(a'b')^3 + 35] = 2008 \Rightarrow (a'b')^3 = 216 \ \Rightarrow a'b' = \sqrt[3]{216} = 6$$

$(a', b') \in \{(1,6); (6,1); (2,3); (3,2)\}$

$$\Rightarrow \boxed{(a, b) \in \{(2,12); (12,2); (4,6); (6,4)\}}$$

حل التمرين 06 :

$PGCD(a, b) = d \Rightarrow a = da';\ b = db'; PGCD(a', b') = 1$
$PGCD(a, b) = d\ ;\ PPCM(a, b) = m \Rightarrow m \times d = a \times b \qquad \Rightarrow m = \frac{a \times b}{d} = \frac{da' \times db'}{d} = da'b'$

1) $\begin{cases} a+b=420 \\ PGCD(a,b)=84 \end{cases} \Rightarrow 84a'+84b'=420$

$\Rightarrow 84(a'+b')=420 \Rightarrow a'+b'=5$

$\Rightarrow (a',b') \in \{(1,4);(4,1);(2,3);(3,2)\}$

$\Rightarrow \boxed{(a,b) \in \{(84,336);(336,84);(168,252);(252,168)\}}$

2) $\begin{cases} a\times b=360 \\ PGCD(a,b)=6 \end{cases} \Rightarrow 6a'\times 6b'=360$

$\Rightarrow 36(a'\times b')=360 \Rightarrow a'\times b'=10$

$\Rightarrow (a',b') \in \{(1,10);(10,1);(2,5);(5,2)\}$

$\Rightarrow \boxed{(a,b) \in \{(6,60);(60,6);(12,30);(30,12)\}}$

3) $\begin{cases} a^2-b^2=825 \\ PGCD(a,b)=5 \end{cases} \Rightarrow (5a')^2-(5b')^2=825 \Rightarrow 25\left({a'}^2-{b'}^2\right)=825$

$\Rightarrow {a'}^2-{b'}^2=33 \Rightarrow (a'-b')(a'+b')=33$

$\begin{cases} a'-b'=1 \\ a'+b'=33 \end{cases} \Rightarrow 2a'=34 \Rightarrow a'=17 \Rightarrow b'=16 \Rightarrow \boxed{(a,b)=(85,80)}$

$\begin{cases} a'-b'=3 \\ a'+b'=11 \end{cases} \Rightarrow 2a'=14 \Rightarrow a'=7 \Rightarrow b'=4 \Rightarrow \boxed{(a,b)=(35,20)}$

ملاحظة: الحالتان $\begin{cases} a'-b'=33 \\ a'+b'=1 \end{cases}$ و $\begin{cases} a'-b'=11 \\ a'+b'=3 \end{cases}$ مرفوضتان لأن $a'+b'>a'-b'$

4) $\begin{cases} PPCM(a,b)=90 \\ PGCD(a,b)=18 \end{cases}$; $m=da'b' \Rightarrow a'\times b'=\dfrac{m}{d}=\dfrac{90}{18}=5$

$(a',b') \in \{(1,5);(5,1)\} \Rightarrow \boxed{(a,b) \in \{(18,90);(90,18)\}}$

5) $PPCM(a,b)-9PGCD(a,b)=13 \Rightarrow m-9d=13 \Rightarrow da'b'-9d=13$

$\Rightarrow d(a'b'-9)=13 \Rightarrow d/13 \Rightarrow d \in \{1,13\}$

$d=1: a'b'-9=13 \Rightarrow a'b'=22$

$\Rightarrow (a',b') \in \{(1,22);(2,11)\} \Rightarrow \boxed{(a,b) \in \{(1,22);(2,11)\}}$

$d=13: a'b'-9=1 \Rightarrow a'b'=10$

$\Rightarrow (a',b') \in \{(1,10);(2,5)\} \Rightarrow \boxed{(a,b) \in \{(13,130);(26,65)\}}$

حل التمرين 07 :

1. **بيان أنّ n^2+5n+4 و n^2+3n+2 يقبلان القسمة على $(n+1)$**

$n^2+5n+4=(n+1)(n+4)$

منه (n^2+5n+4) يقبل القسمة على $(n+1)$

$n^2+3n+2=(n+1)(n+2)$

منه (n^2+3n+2) يقبل القسمة على $(n+1)$

2. **تعيين قيم n حتى يقبل العدد $3^2+15n+19$ القسمة على $(n+1)$**

$3n^2+15n+19=(n+1)(3n+12)+7$

$(n+1)\mid(3n^2+15n+19)\Rightarrow(n+1)\mid 7\Rightarrow \boxed{n=0\vee n=6}$

3. **استنتاج أنّ $3n^2+15n+19$ لا يقبل القسمة على n^2+3n+2**

$n^2+3n+2\mid 3n^2+15n+19\Rightarrow n+1\mid 3n^2+15n+19$

$\Rightarrow n=0$ أو $n=6$

- $n=0: 2\mid 19$ (مستحيل)
- $n=6: 56\mid 217$ (مستحيل)

نستنتج أنّ العدد $3n^2+15n+19$ لا يقبل القسمة على العدد n^2+3n+2

حل التمرين 08 :

1. **تعيين الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584**

$584=2^3\times 73$ ، منه الأعداد التي مربعاتها تقسم العدد 584 هي 1 و 2

2. **تعيين العددين الطبيعيين a و b اللذين يحققان :** $\begin{cases}a+b=32\\a^2+b^2=584\end{cases}$

$\underline{\boldsymbol{d=1}}$: $\begin{cases}a'+b'=32\\a'^2+b'^2=584\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b'=32-a'\\a'^2+(32-a')^2=584\end{cases}$

$a'^2+(32-a')^2=584\Rightarrow 2a'^2-64a'+1024=584$

$\Rightarrow 2a'^2-64a'+440=0\Rightarrow a'^2-32a'+220=0$

$\Delta'=36$; $a'=10$ أو $a'=22$

$(a',b')\in\{(10,22);(22,10)\}\Rightarrow\boxed{(a,b)\in\{(10,22);(22,10)\}}$

$\underline{\boldsymbol{d=2}}$: $\begin{cases}a'+b'=16\\a'^2+b'^2=146\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b'=16-a'\\a'^2+(16-a')^2=146\end{cases}$

$a'^2+(16-a')^2=146\Rightarrow 2a'^2-32a'+256=146$

$\Rightarrow 2a'^2-32a'+110=0\Rightarrow a'^2-16a'+55=0$

$\Delta'= 9$; $a' = 5$ أو $a' = 11$

$(a', b') \in \{(5,11); (11,5)\} \Rightarrow \boxed{(a, b) \in \{(10,22); (22,10)\}}$

حل التمرين 09 :

$\boldsymbol{A = n^4 + n^2 + 1}$

1. تحليل A إلى جداء عاملين من الدرجة الثانية

$$A = n^4 + 2n^2 + 1 - n^2 = (n^2 + 1)^2 - n^2$$
$$= (n^2 + 1 - n)(n^2 + 1 + n)$$
$$\boxed{A = (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)}$$

2. $\boldsymbol{b = n^2 - n + 1 \,;\, a = n^2 + n + 1}$

أ. بيان أنّ العددين a و b فردين

$$a = n(n + 1) + 1 \,;\, b = n(n - 1) + 1$$

بما أنّ جداء عددين متتابعين هو عدد زوجي ، فإنّ العددين $n(n + 1)$ و $n(n - 1)$ زوجيان، و منه يكون العددان a و b فرديين

ب. بيان أنّ كل قاسم مشترك للعددين a و b يقسم $2n$ و $2(n^2 + 1)$

$d \mid a$ و $d \mid b \Rightarrow d \mid a - b \Rightarrow \boxed{d \mid 2n}$

$d \mid a$ و $d \mid b \Rightarrow d \mid a + b \Rightarrow d \mid 2n^2 + 2 \Rightarrow \boxed{d \mid 2(n^2 + 1)}$

ج. بيان أنّ العددين n و $n^2 + 1$ أوليان فيما بينهما

$n^2 + 1 - n(n) = 1 \Rightarrow \boxed{PGCD(n^2 + 1, n) = 1}$ (بيزو)

د. استنتاج أنّ العددين a و b أوليان فيما بينهما

$d \mid a$ و $d \mid b \Rightarrow d \mid a - b$ و $d \mid a + b \Rightarrow d \mid PGCD(a - b, a + b)$

$\Rightarrow d \mid PGCD\big(2n, 2(n^2 + 1)\big)$

$PGCD\big(2n, 2(n^2 + 1)\big) = 2 \times PGCD(n, n^2 + 1) = 2$

$\Rightarrow d \mid 2 \Rightarrow d = 1$ أو $d = 2$

بما أنّ العددين a و b فرديان ، نستنتج أنّ $PGCD(a, b) = 1$ ، منه العددان a و b أوليان فيما بينهما.

حل التمرين 10 :

$b = 13n - 1\ ;\ a = 11n + 3$

1. **بيان أنّ كل قاسم مشترك للعددين a و b يقسم 50**

$d \mid a$ و $d \mid b \Rightarrow d \mid 13a - 11b \Rightarrow \boxed{d \mid 50}$

2. **تعيين حل خاص للمعادلة : $50x - 11y = 1$**

$50 = 11(4) + 6 \Rightarrow 6 = 50 - 11(4)$
$11 = 6 + 5 \Rightarrow 5 = 11 - 6$
$6 = 5 + 1 \Rightarrow 1 = 6 - 5$
$1 = 6 - 5 = 6 - (11 - 6) = 2(6) - 11$
$1 = 2[50 - 11(4)] - 11 = 50(2) - 11(9)$

$$\Rightarrow \boxed{(x_0, y_0) = (2,9)}$$

حل المعادلة : $50x - 11y = 3$

$50(2) - 11(9) = 1 \Rightarrow 50(6) - 11(27) = 3$

$\begin{cases} 50x - 11y = 3 \\ 50(6) - 11(27) = 3 \end{cases} \Rightarrow 50(x-6) - 11(y-27) = 0 \qquad \Rightarrow 50(x-6) = 11(y-27)$

$\begin{cases} 11 \mid 50(x-6) \\ PGCD(11,50) = 1 \end{cases} \Rightarrow 11 \mid (x-6) \Rightarrow x - 6 = 11k \ \Rightarrow x = 11k + 6$

$50(x-6) = 11(y-27) \Rightarrow 50(11k) = 11(y-27) \Rightarrow y - 27 = 50k$
$\Rightarrow y = 50k + 27$

$$\boxed{S = \{(11k + 6\ ; 50k + 27)\}\ ;\ k \in \mathbb{Z}}$$

3. **استنتاج قيم n التي يكون من أجلها : $PGCD(a,b) = 50$**

$PGCD(a,b) = 50 \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0[50] \\ b \equiv 0[50] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11n + 3 \equiv 0[50] \\ 13n - 1 \equiv 0[50] \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 11n \equiv 47[50] \\ 13n \equiv 1[50] \end{cases} \Rightarrow n \equiv 27[50]$

$\Rightarrow \boxed{n = 50k + 27\ ;\ k \in \mathbb{N}}$

4. تعيين قيم n التي يكون من أجلها : $PGCD(a,b)=25$

$$PGCD(a,b)=25 \Rightarrow \begin{cases} a\equiv 0[25] \\ b\equiv 0[25] \\ PGCD(a,b)\neq 50 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 11n+3\equiv 0[25] \\ 13n-1\equiv 0[25] \\ n\neq 50k+27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11n\equiv 22[25] \\ 13n\equiv 1[25] \\ n\neq 50k+27 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n\equiv 2[25] \\ n\neq 50k+27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=25k'+2 \\ n\neq 50k+27 \end{cases}$$

$25k'+2\neq 50k+27 \Rightarrow 25k'\neq 50k+25$

$\Rightarrow k'\neq 2k+1 \Rightarrow$ زوجي $k' \Rightarrow k'=2k$

$\Rightarrow \boxed{n=50k+2\,;\ k\in\mathbb{N}}$

حل التمرين 11 :

$$\mathbf{324x-245y=7\ ...\ (E)}$$

1. تعيين حل خاص للمعادلة (E)

$324=245+79 \Rightarrow 79=324-245$

$245=79(3)+8 \Rightarrow 8=245-79(3)$

$79=8(9)+7 \Rightarrow 7=79-8(9)$

$7=79-8(9)=79-9[245-79(3)]=245(-9)+79(28)$

$=245(-9)+28[324-245]$

$7=324(28)-245(37) \Rightarrow \boxed{(x_0;y_0)=(28;37)}$

حل المعادلة (E)

$$\begin{cases} 324x-245y=7 \\ 324(28)-245(37)=7 \end{cases} \Rightarrow 324(x-28)-245(y-37)=0$$

$$\Rightarrow 324(x-28)=245(y-37)$$

$$\begin{cases} 245\mid 324(x-28) \\ PGCD(245,324)=1 \end{cases} \Rightarrow 245\mid(x-28) \Rightarrow x-28=245k$$

$$\Rightarrow x=245k+28$$

$324(x-28)=245(y-37) \Rightarrow 324(245k)=245(y-37)$

$$\Rightarrow y-37=324k \Rightarrow y=324k+37$$

$$\boxed{S=\{(245k+28\,,324k+37)\}\;;\;k\in\mathbb{Z}}$$

2. بيان أنّه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (E)، فإنّ : $x\equiv 0[7]$

$324x-245y=7 \Rightarrow 324x=245y+7$

$\Rightarrow 324x=7(35y+1)$

$\begin{cases} 7 \mid 324x \\ PGCD(7,324)=1 \end{cases} \Rightarrow 7 \mid x \Rightarrow \boxed{x\equiv 0[7]}$

3. $PGCD(x,y)=d$

أ. بيان أنّ القيم الممكنة للعدد d هي 1 و 7

$d \mid x$ و $d \mid y \Rightarrow d \mid 324x-245y \Rightarrow d \mid 7 \Rightarrow \boxed{d=1 \vee d=7}$

ب. تعيين كل الثنائيات (x,y) حيث $PGCD(x,y)=7$.

$d=7 \Rightarrow y\equiv 0[7] \Rightarrow 324k+37\equiv 0[7]$

$\Rightarrow 2k+2\equiv 0[7] \Rightarrow 2k\equiv 5[7] \Rightarrow k\equiv 6[7]$

$\Rightarrow k=7k'+6 \Rightarrow x=245(7k'+6)+28$

$\Rightarrow x=1715k'+1498\;;\;k'\in\mathbb{Z}$

$y=324(7k'+6)+37=2268k'+1981\;;\;k'\in\mathbb{Z}$

$$\boxed{S=\{(1715k'+1498\,,2268k'+1981\,)\}\;;\;k'\in\mathbb{Z}}$$

حل التمرين 12 :

1. **تعيين $PGCD(1996;1497;2994)$**

$$1996=2^2\times 499\,;1497=3\times 499\,;2994=2\times 3\times 499$$

$$\Rightarrow \boxed{PGCD(1996,1497,2994)=499}$$

2. **$1996\,x-1497\,y=2994\;\ldots\;(1)$**

أ- إثبات أنّ $x\equiv 0[3]$ و $y\equiv 0[2]$

$(1) \Rightarrow 4x-3y=6 \Rightarrow 4x=3y+6 \Rightarrow 4x=3(y+2)$

$\begin{cases} 3 \mid 4x \\ PGCD(3,4)=1 \end{cases} \Rightarrow 3 \mid x \Rightarrow \boxed{x\equiv 0[3]}$

$(1) \Rightarrow 4x-3y=6 \Rightarrow 3y=4x-6 \Rightarrow 3y=2(2x-3)$

$$\begin{cases} 2 \mid 3y \\ PGCD(2,3) = 1 \end{cases} \Rightarrow 2 \mid y \Rightarrow \boxed{y \equiv 0[2]}$$

حل المعادلة (1)

$$4x - 3y = 6 \Rightarrow 3y = 4x - 6 = 4(3k) - 6$$
$$\Rightarrow 3y = 12k - 6 = 3(4k - 2) \Rightarrow y = 4k - 2$$
$$\boxed{S = \{(3k; 4k - 2)\}\ ;\ k \in \mathbb{Z}}$$

ب- **تعيين الحلول (x,y) بحيث: $xy = 1950$**

$$xy = 1950 \Rightarrow 3k(4k - 2) = 1950$$
$$\Rightarrow 12k^2 - 6k - 1950 = 0\ ;\ \Delta' = 23409\ ;\ \sqrt{\Delta'} = 153$$
$$k = \frac{3 - 153}{12} = -12{,}5\ (\text{مرفوض})\ ; k = \frac{3 + 153}{12} = 13$$
$$\Rightarrow \boxed{(x; y) = (39; 50)}$$

حل التمرين 13 :

1. حل المعادلة : (I) ... $4x - 9y = 19$

$$4x - 9y = 19 \Rightarrow 4x = 9y + 19 \Rightarrow 9y + 19 \equiv 0[4]$$
$$\Rightarrow y + 3 \equiv 0[4] \Rightarrow y \equiv 1[4] \Rightarrow y = 4k + 1$$
$$4x = 9(4k + 1) + 19 = 36k + 28 = 4(9k + 7)$$
$$\Rightarrow x = 9k + 7 \Rightarrow \boxed{S = \{(9k + 7; 4k + 1)\}\ ; k \in \mathbb{Z}}$$

2. $d = PGCD(x; y)$ حيث (x, y) حل للمعادلة (I)

أ- **تعيين القيم الممكنة للعدد d**

$$d \mid x \text{ و } d \mid y \Rightarrow d \mid 4x - 9y \Rightarrow d \mid 19 \Rightarrow \boxed{d = 1 \text{ أو } d = 19}$$

ب- **تعيين حلول المعادلة بحيث يكون $d = 19$**

$$d = 19 \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 0[19] \\ y \equiv 0[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9k + 7 \equiv 0[19] \\ 4k + 1 \equiv 0[19] \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 9k \equiv 12[19] \\ 4k \equiv 18[19] \end{cases} \Rightarrow 5k \equiv -6[19] \Rightarrow k \equiv 14[19] \Rightarrow k = 19k' + 14$$
$$x = 9(19k' + 14) + 7 = 171k' + 133$$

$y = 4(19k' + 14) + 1 = 76k' + 57$

$\boxed{S = \{(171k' + 133\ ;\ 76k' + 57)\}\ ; k' \in \mathbb{Z}}$

3. تعيين الثنائيات $(a\ ,\ b)$ الصحيحة حلول المعادلة : $4a^2 - 9b^2 = 19$

$4a^2 - 9b^2 = 19 \Rightarrow (2a - 3b)(2a + 3b) = 19$

نلاحظ أنّه إذا كانت الثنائية $(a; b)$ حلا للمعادلة ، فكذلك الثنائيات $(-a; b)$ ، $(a; -b)$ و $(-a; -b)$، لذا سنبحث عن الثنائية الموجبة فقط ، أي أنّ $(2a - 3b) < (2a + 3b)$

$(2a - 3b)(2a + 3b) = 19 \Rightarrow \begin{cases} 2a - 3b = 1 \\ 2a + 3b = 19 \end{cases}$

$\Rightarrow 4a = 20 \Rightarrow a = 5\ ; b = 3$

$\boxed{S = \{(5; 3)\ ;\ (-5; 3)\ ;\ (5; -3)\ ;\ (-5; -3)\}}$

حل التمرين 14 :

1. حل المعادلة : $5x - 3y = 2$

$5x - 3y = 2 \Rightarrow 5x - 2 = 3y \Rightarrow 5x - 2 \equiv 0[3]$

$\Rightarrow 2x \equiv 2[3] \Rightarrow x \equiv 1[3] \Rightarrow x = 3k + 1$

$3y = 5x - 2 \Rightarrow 3y = 5(3k + 1) - 2 = 15k + 3 = 3(5k + 1)$

$\Rightarrow y = 5k + 1$

$\boxed{S = \{(3k + 1; 5k + 1)\}\ ;\ k \in \mathbb{Z}}$

2. تعيين القيم الممكنة لـ x و y و كتابة A في النظام العشري

$\begin{cases} A = \overline{55}^x \\ A = \overline{37}^y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 5 + 5x \\ A = 7 + 3y \end{cases} \Rightarrow 5x + 5 = 3y + 7$

$\Rightarrow 5x - 3y = 2 \Rightarrow (x; y) = (3k + 1; 5k + 1)$

$\begin{cases} 5 < x \leq 12 \\ 7 < y \leq 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 < 3k + 1 \leq 12 \\ 7 < 5k + 1 \leq 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 < 3k \leq 11 \\ 6 < 5k \leq 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{3} < k \leq \dfrac{11}{3} \\ \dfrac{6}{5} < k \leq \dfrac{19}{5} \end{cases} \Rightarrow k$

$= 2$ أو $k = 3$

- $k = 2 \Rightarrow (x; y) = (7; 11) \Rightarrow A = 5(7) + 5 = 40$
- $k = 3 \Rightarrow (x; y) = (10; 16) \Rightarrow A = 5(10) + 5 = 55$

حل التمرين 15 :

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) ... $12x - 7y = 13$

1. **تعيين الثنائية (x_0, y_0) حلا للمعادلة (1) والتي تحقق $4x_0 - y_0 = 11$**

$$\begin{cases} 12x_0 - 7y_0 = 13 \\ 4x_0 - y_0 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x_0 - 7(4x_0 - 11) = 13 \\ y_0 = 4x_0 - 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -16x_0 = -64 \\ y_0 = 4x_0 - 11 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = 4 \\ y_0 = 5 \end{cases}$$

2. **حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1)**

$$\begin{cases} 12x - 7y = 13 \\ 12(4) - 7(5) = 13 \end{cases} \Rightarrow 12(x-4) - 7(y-5) = 0 \quad \Rightarrow 12(x-4) = 7(y-5)$$

$$\begin{cases} 7 \mid 12(x-4) \\ PGCD(7,12) = 1 \end{cases} \Rightarrow 7 \mid (x-4) \Rightarrow x - 4 = 7k \Rightarrow x = 7k + 4$$

$$12(x-4) = 7(y-5) \Rightarrow 12(7k) = 7(y-5) \Rightarrow y - 5 = 12k$$
$$\Rightarrow y = 12k + 5$$

$$\boxed{S = \{(7k+4\,;12k+5)\}\,;\ k \in \mathbb{Z}}$$

3. **تعيين الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (1) التي تحقق : $PGCD(x, y) = 13$**

$$PGCD(x,y) = 13 \Rightarrow \begin{cases} 7k + 4 \equiv 0[13] \\ 12k + 5 \equiv 0[13] \end{cases} \Rightarrow 5k + 1 \equiv 0[13] \quad \Rightarrow 5k \equiv 12[13] \Rightarrow 5k \equiv 25[13]$$

$$\Rightarrow k \equiv 5[13] \Rightarrow k = 13k' + 5$$
$$\Rightarrow x = 7(13k' + 5) + 4 = 91k' + 39\ ;\ y = 12(13k' + 5) + 5$$
$$\Rightarrow y = 156k' + 65$$
$$\Rightarrow \boxed{(x;y) = (91k' + 39\,;156k' + 65); k' \in \mathbb{Z}}$$

حل التمرين 16 :

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ... $5x - 6y = 3$

1. **بيان أنّه إذا كان $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإنّ x مضاعف للعدد 3**

$$5x - 6y = 3 \Rightarrow 5x = 6y + 3 \Rightarrow 5x = 3(2x+1) \Rightarrow 5x \equiv 0[3]$$
$$\Rightarrow \boxed{x \equiv 0[3]}$$ (لأنّ 3 أولي مع 5)

2. **استنتاج حل خاص (x_0, y_0) ، ثمّ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)**

$$\begin{cases} 5x_0 - 6y_0 = 3 \\ x_0 \equiv 0[3] \end{cases} \Rightarrow \boxed{(x_0, y_0) = (3,2)}$$

$$\begin{cases} 5x-6y=3 \\ 5(3)-6(2)=3 \end{cases} \Rightarrow 5(x-3)-6(y-2)=0 \Rightarrow 5(x-3)=6(y-2)$$

$$\begin{cases} 6 \mid 5(x-3) \\ PGCD(5,6)=1 \end{cases} \Rightarrow 6 \mid (x-3) \Rightarrow x-3=6k \Rightarrow x=6k+3\,; k\in\mathbb{Z}$$

$$5(x-3)=6(y-2) \Rightarrow 5(6k)=6(y-2) \Rightarrow y-2=5k$$

$$\Rightarrow y=5k+2; k\in\mathbb{Z}$$

$$\boxed{S=\{(6k+3\,;5k+2)\}\,;\ k\in\mathbb{Z}}$$

.3 $\boldsymbol{d=PGCD(x,y)}$

أ. تعيين القيم الممكنة للعدد $\boldsymbol{d}$

$$d=PGCD(x,y) \Rightarrow d \mid x \text{ و } d \mid y \Rightarrow d \mid 5x-6y \Rightarrow d \mid 3$$

$$\Rightarrow \boxed{d=1 \text{ أو } d=3}$$

ب. تعيين الثنائيات $(\boldsymbol{x;y})$ من الأعداد الطبيعية حلول المعادلة $(\boldsymbol{E})$ حيث $\boldsymbol{x}$ أولي مع $\boldsymbol{y}$

$$PGCD(x,y)=3 \Rightarrow \begin{cases} 6k+3\equiv 0[3] \\ 5k+2\equiv 0[3] \end{cases} \Rightarrow k+1\equiv 0[3] \Rightarrow k\equiv 2[3] \quad \Rightarrow k = 3k'+2\,; k'\in\mathbb{N}$$

$$PGCD(x,y)=1 \Rightarrow k=3k' \text{ أو } k=3k'+1$$

- $k=3k' \Rightarrow (x;y)=(18k'+3\,;15k'+2)$
- $k=3k'+1 \Rightarrow (x;y)=(18k'+9\,;15k'+7)$

.4 تعيين الثنائيات $(\boldsymbol{x;y})$ حلول المعادلة $(\boldsymbol{E})$ التي تحقق $\boldsymbol{x^2-y^2<56}$

$$x^2-y^2<56 \Rightarrow (6k+3)^2-(5k+2)^2<56$$

$$\Rightarrow 11k^2+16k-51<0 \Rightarrow -3<k<\frac{17}{11}$$

$$\Rightarrow k\in\{-2,-1,0,1\} \Rightarrow \boxed{(x;y)\in\{(-9;-8),(-3;-3),(3;2),(9;7)\}}$$

حل التمرين 17 :

.1 برهان أنّ $\boldsymbol{x+y}$ أولي مع $\boldsymbol{xy}$

$$d=PGCD(x+y;xy) \Rightarrow \begin{cases} d \mid x+y \\ d \mid xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid x(x+y)-xy \\ d \mid y(x+y)-xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid x^2 \\ d \mid y^2 \end{cases} \Rightarrow d \mid PGCD(x^2;y^2) \Rightarrow \boxed{d=1}$$

لأنّ $PGCD(x;y)=1$ يستلزم $PGCD(x^2;y^2)=1$

.2 تعيين $\boldsymbol{\alpha}$ و $\boldsymbol{\beta}$ حيث : $\boldsymbol{15\alpha^2-229\alpha=30\beta}$

$$15\alpha^2-229\alpha=30\beta \Rightarrow \alpha(15\alpha-229)=30\beta$$

$$\xrightarrow[(\alpha;\beta)\in\mathbb{N}^2]{} \begin{cases} \alpha \mid 30\beta \\ 15\alpha - 229 \geq 0 \end{cases} \xrightarrow[PGCD(\alpha;\beta)=1]{} \begin{cases} \alpha \mid 30 \\ \alpha \geq 15,26 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = 30 \; ; \; \beta = 450 - 229 = 221 \Rightarrow \boxed{(\alpha;\beta) = (30;221)}$$

3. تعيين الثنائيات $(x;y)$ الأولية فيما بينها والتي تحقق $15(x^2+y^2) = 229(x+y)$

$$15(x^2+y^2) = 229(x+y) \Rightarrow 15[(x+y)^2 - 2xy] - 229(x+y) = 0$$

$$\Rightarrow 15\underbrace{(x+y)^2}_{\alpha^2} - 229\underbrace{(x+y)}_{\alpha} = 30\underbrace{xy}_{\beta} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 30 \\ xy = 221 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X^2 - 30X + 221 = 0 \Rightarrow X = 13 \text{ أو } X = 17$$

$$\Rightarrow \boxed{(x,y) = (13,17) \text{ أو } (x,y) = (17,13)}$$

حل التمرين 18 :

$$\boldsymbol{PGCD(x,y) = d} \text{ ، } \boldsymbol{PPCM(x,y) = m} \text{ ، } \boldsymbol{m^2 - 5d^2 = 2000} \ldots (*)$$

1. برهان أنّه إذا كانت $(x\,,y)$ حلا للمعادلة $(*)$ فإنّ d^2 يقسم 2000

$$PGCD(x,y) = d \Rightarrow x = dx'; y = dy';\; PGCD(x',y') = 1$$

$$PPCM(x,y) = m \Rightarrow m.d = x.y \Rightarrow m.d = d^2.x'.y'$$

$$\Rightarrow m = d.x'.y' \Rightarrow m^2 = d^2.x'^2.y'^2$$

$$m^2 - 5d^2 = 2000 \Rightarrow d^2.x'^2.y'^2 - 5d^2 = 2000$$

$$\Rightarrow d^2(x'^2.y'^2 - 5) = 2000 \Rightarrow \boxed{d^2 \mid 2000}$$

2. تحليل العدد 2000 إلى جداء عوامل أولية

$$2000 = 2^4 \times 5^3$$

استنتاج الأعداد التي مربعاتها تقسم العدد 2000

الأعداد التي مربعاتها تقسم العدد 2000 هي : 1 - 2 - 4 - 5 - 10 - 20

3. برهان أنّ 5 هو قاسم مشترك للعددين d و m

$$m^2 - 5d^2 = 2000 \Rightarrow m^2 = 5d^2 + 2000 = 5(d^2 + 400)$$

$$\Rightarrow 5 \mid m^2 \Rightarrow 5 \mid m \;(\text{لأن 5 عدد أولي}) \Rightarrow m = 5k$$

$$5d^2 = m^2 - 2000 = (5k)^2 - 2000 = 5(5k^2 - 400)$$

$$\Rightarrow d^2 = 5k^2 - 400 = 5(k^2 - 80) \Rightarrow 5 \mid d^2 \Rightarrow 5 \mid d$$

تعيين القيم الممكنة للعدد d

$$\begin{cases} 5 \mid d \\ d^2 \mid 2000 \end{cases} \Rightarrow d \in \{5; 10; 20\}$$

4. استنتاج القيم الممكنة للعددين x و y

$d = 5 : m^2 = 5(5)^2 + 2000 = 2125$

(مرفوض لأن العدد 2125 ليس مربع تام)

$d = 10 : m^2 = 5(10)^2 + 2000 = 2500 \Rightarrow \boxed{m = 50}$

$d = 20 : m^2 = 5(20)^2 + 2000 = 4000$

(مرفوض لأن العدد 4000 ليس مربع تام)

$$m = d.x'.y' \Rightarrow x'.y' = \frac{m}{d} = 5 \Rightarrow (x', y') = (1,5)$$

$\Rightarrow \boxed{(x, y) = (10,50)}$

حل التمرين 19 :

$\boldsymbol{x = 2a + 3b}$ ، $\boldsymbol{y = 3a + 4b}$ ، $\boldsymbol{d' = PGCD(x; y)}$; $\boldsymbol{d = PGCD(a; b)}$

1. بيان أنّ $\boldsymbol{d = d'}$

$$\begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid 2a + 3b \\ d \mid 3a + 4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid x \\ d \mid y \end{cases} \Rightarrow d \mid d'$$

$$\begin{cases} d' \mid x \\ d' \mid y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d' \mid 2a + 3b \\ d' \mid 3a + 4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d' \mid 3(2a + 3b) - 2(3a + 4b) \\ d' \mid 3(3a + 4b) - 4(2a + 3b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d' \mid a \\ d' \mid b \end{cases}$$

$$\Rightarrow d' \mid d$$

$d \mid d'$ و $d' \mid d \Rightarrow \boxed{d = d'}$

استنتاج أنّه إذا كان $PGCD(a; b) = 1$ فإنّ $PGCD(x; y) = 1$

$$\boxed{d = 1 \Rightarrow d' = 1}$$

2. تعيين الثنائيات $(\boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{\beta})$ حيث : $\begin{cases} \boldsymbol{PGCD(\alpha; \beta) = 5} \\ \boldsymbol{(2\alpha + 3\beta)(3\alpha + 4\beta) = 2200} \end{cases}$

$x = 2\alpha + 3\beta; y = 3\alpha + 4\beta; PGCD(x; y) = PGCD(\alpha; \beta) = 5$

$x = 5x'; y = 5y'; PGCD(x'; y') = 1$

$$\begin{cases} xy = 2200 \\ d = 5 \end{cases} \Rightarrow 25x'y' = 2200 \Rightarrow x'y' = 88$$

$\Rightarrow (x', y') \in \{(1,88); (8,11)\}$

$\Rightarrow (x,y) \in \{(5,440);(40,55)\}$

$\begin{cases} 2\alpha+3\beta=5 \\ 3\alpha+4\beta=440 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=1300 \\ \beta=-865 \end{cases}$ (مرفوض لأن العدد β طبيعي)

$\begin{cases} 2\alpha+3\beta=40 \\ 3\alpha+4\beta=55 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=5 \\ \beta=10 \end{cases} \Rightarrow (\alpha;\beta)=(5;10)$

حل التمرين 20 :

$\boldsymbol{d = PGCD(a,b)}$ ، $\boldsymbol{b = \overline{252}^n}$ ، $\boldsymbol{a = \overline{2310}^n}$

1. بيان أنّ $(2n+1)$ يقسم كلا من a و b

$a = \overline{2310}_n = 2n^3+3n^2+n \,; b = \overline{252}_n = 2n^2+5n+2$

$2n^3+3n^2+n = (2n+1)(n^2+n) \Rightarrow \boxed{(2n+1) \mid a}$

$2n^2+5n+2 = (2n+1)(n+2) \Rightarrow \boxed{(2n+1) \mid b}$

بيان أنّ $d = 2n+1$ أو $d = 2(2n+1)$

$d = PGCD(a;b) = (2n+1) \times \underbrace{PGCD(n^2+n;n+2)}_{d'}$

$n^2+n = (n+2)(n-1)+2 \Rightarrow d' = PGCD(n+2;2)$

$\Rightarrow d'=1 \vee d'=2$

$d = (2n+1)\times d' \Rightarrow \boxed{d = 2n+1 \vee d = 2(2n+1)}$

2. حل المعادلة : $ax+by=-26$

$n=6 : a=546\,; b=104\,; d=26$

$ax+by=-26 \Rightarrow 546x+104y=-26$

$\Rightarrow 21x+4y=-1$; نلاحظ أنّ الثنائية $(-1;5)$ حل خاص للمعادلة

$\begin{cases} 21x+4y=-1 \\ 21(-1)+4(5)=-1 \end{cases} \Rightarrow 21(x+1)+4(y-5)=0$

$\Rightarrow 21(x+1) = 4(-y+5)$

$\begin{cases} 4 \mid 21(x+1) \\ PGCD(4;21)=1 \end{cases} \Rightarrow 4 \mid (x+1) \Rightarrow x+1=4k \Rightarrow x=4k-1$

$21(4k) = 4(-y+5) \Rightarrow -y+5 = 21k \Rightarrow y = -21k+5$

$\boxed{S = \{(4k-1;-21k+5)\}\,; k \in \mathbb{Z}}$

حل التمرين 21 :

$$16x + 59y = 2006 \ldots (1)$$

1. تحليل العدد 2006

$$2006 = 2 \times 17 \times 59$$

استنتاج أنّه إذا كانت $(x\,,y)$ حلا للمعادلة (1) فإنّ x مضاعف للعدد 59

$$16x + 59y = 2006 \Rightarrow 16x = 2006 - 59y = 59(34 - y)$$

$$\begin{cases} 59 \,|\, 16x \\ PGCD(59;16) = 1 \end{cases} \Rightarrow 59 \,|\, x \Rightarrow \boxed{x = 59k\,;k \in \mathbb{Z}}$$

2. حل المعادلة (1)

$$16x = 59(34 - y) \Rightarrow 16(59k) = 59(34 - y)$$

$$\Rightarrow 34 - y = 16k \Rightarrow y = -16k + 34\,;k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{S = \{(59k\,;-16k + 34\,)\}\,;k \in \mathbb{Z}}$$

3. تعيين الحلول $(x\,,y)$ للمعادلة (1) التي تنتمي $\mathbb{N}^{*2}$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 59k > 0 \\ -16k + 34 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k < \frac{34}{16} \end{cases} \Rightarrow 0 < k < 2{,}125$$

$$\Rightarrow k \in \{1;2\} \Rightarrow \boxed{(x,y) \in \{(59{,}18);(118{,}2)\}}$$

4. تعيين الأعداد الطبيعية a و b التي تحقق : $16m + 59d = 2006$

$$16m + 59d = 2006 \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} m = 59 \\ d = 18 \end{cases}}_{\text{(مرفوض لأن 18 لا يقسم 59)}} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} m = 118 \\ d = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 118 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow a.b = m.d = 236 \Rightarrow d^2.a'.b' = 236$$

$$\Rightarrow a'.b' = \frac{236}{4} = 59 \Rightarrow (a',b') \in \{(59{,}1);(1{,}59)\}$$

$$\Rightarrow \boxed{(a,b) \in \{(118{,}2);(2{,}118)\}}$$

حل التمرين 22 :

a و b عددان طبيعيان. نضع $d = PGCD(a,b)$ و $m = PPCM(a,b)$

1. تعيين الثنائيات (a,b) التي تحقق $d + m = b + 9$

$$d + m = b + 9 \Rightarrow d + da'b' - db' = 9 \Rightarrow d(1 + a'b' - b') = 9 \quad \Rightarrow d \,|\, 9 \Rightarrow d \in \{1;3;9\}$$

$\underline{\boldsymbol{d = 1}}$: $1 + a'b' - b' = 9 \Rightarrow b'(a' - 1) = 8$

$\Rightarrow \begin{cases} b' = 1 \\ a'-1 = 8 \end{cases}$ أو $\begin{cases} b' = 2 \\ a'-1 = 4 \end{cases}$ أو $\begin{cases} b' = 4 \\ a'-1 = 2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} b' = 8 \\ a'-1 = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow (a', b') \in \{(9,1) ; (5,2) ; (3,4)\}$

$\Rightarrow (a, b) \in \{(9,1) ; (5,2) ; (3,4)\}$ (الحالة $(a', b') = (2,8)$ مرفوضة)

$\underline{\boldsymbol{d = 3}} : 1 + a'b' - b' = 3 \Rightarrow b'(a'-1) = 2$

$\Rightarrow \begin{cases} b' = 1 \\ a'-1 = 2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} b' = 2 \\ a'-1 = 1 \end{cases} \Rightarrow (a', b') = (3,1)$

$\Rightarrow (a, b) = (9,3)$ (الحالة $(a', b') = (2,2)$ مرفوضة)

$\underline{\boldsymbol{d = 9}} : 1 + a'b' - b' = 1 \Rightarrow b'(a'-1) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} b' = 0 \\ a'-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (a', b') = (1,0) \Rightarrow (a, b) = (9,0)$

$$\boxed{(a, b) \in \{(9,0) ; (9,1) ; (9,3) ; (5,2) ; (3,4)\}}$$

2. تحليل العدد 319 إلى جداء عوامل أولية

$319 = 11 \times 29$

3. برهان أنّه إذا كان $\boldsymbol{x}$ أولي مع $\boldsymbol{y}$ فإنّ $\boldsymbol{3x + 5y}$ أولي مع $\boldsymbol{x + 2y}$

$d = PGCD(3x + 5y; x + 2y) \Rightarrow \begin{cases} d \mid 3x + 5y \\ d \mid x + 2y \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} d \mid 2(3x + 5y) - 5(x + 2y) \\ d \mid 3(x + 2y) - (3x + 5y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid x \\ d \mid y \end{cases}$

$\Rightarrow d \mid PGCD(x; y) \Rightarrow \boxed{d = 1}$

4. تعيين الثنائيات $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ التي تحقق : $\begin{cases} \boldsymbol{(3a + 5b)(a + 2b) = 1276} \\ \boldsymbol{ab = 2m} \end{cases}$

$ab = 2m \Rightarrow d = 2 \Rightarrow a = 2a'; b = 2b'; PGCD(a'; b') = 1$

$(3a + 5b)(a + 2b) = 1276 \Rightarrow 4(3a' + 5b')(a' + 2b') = 1276$

$\Rightarrow (3a' + 5b')(a' + 2b') = 319$

بما أنّ $(a'; b') \in \mathbb{N}^2$ فإنّ $3a' + 5b' > a' + 2b'$ منه :

$(3a' + 5b')(a' + 2b') = 319 \Rightarrow \begin{cases} 3a' + 5b' = 29 \\ a' + 2b' = 11 \end{cases} \Rightarrow (a'; b') = (3; 4)$

$\Rightarrow \boxed{(a; b) = (6; 8)}$

ملاحظة: الحالة $\begin{cases} 3a' + 5b' = 319 \\ a' + 2b' = 1 \end{cases}$ مرفوضة لأن الجملة ليس لها حلول في $\mathbb{N}$.

حل التمرين 23 :

1. **نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) ... $6x+7y=79$**

أ. **تعيين الثنائيات (x_0,y_0) حلول المعادلة (1) والتي تحقق $x_0+y_0^2=13$**

$$\begin{cases}6x_0+7y_0=79\\ x_0+y_0^2=13\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6(13-y_0^2)+7y_0=79\\ x_0=13-y_0^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-6y_0^2+7y_0-1=0\\ x_0=13-y_0^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y_0=1\\ x_0=12\end{cases}\Rightarrow\boxed{(x_0,y_0)=(12,1)}$$

ب. **استنتاج حلول المعادلة (1)**

$$\begin{cases}6x+7y=79\\ 6(12)+7(1)=79\end{cases}\Rightarrow 6(x-12)+7(y-1)=0$$

$$\Rightarrow 6(x-12)=7(-y+1)$$

$$\begin{cases}7\mid 6(x-12)\\ PGCD(6;7)=1\end{cases}\Rightarrow 7\mid(x-12)\Rightarrow x-12=7k$$

$$\Rightarrow x=7k+12\,;k\in\mathbb{Z}$$

$$6(7k)=7(-y+1)\Rightarrow -y+1=6k\Rightarrow y=-6k+1\,;k\in\mathbb{Z}$$

$$\boxed{S=\{(7k+12;-6k+1)\}\,;k\in\mathbb{Z}}$$

ج. **تعيين الثنائيات الطبيعية (x,y) حلول المعادلة (1)**

$$\begin{cases}x\geq 0\\ y\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7k+12\geq 0\\ -6k+1\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k\geq-\dfrac{12}{7}\\ k\leq\dfrac{1}{6}\end{cases}\Rightarrow k\in\{-1;0\}$$

$$\Rightarrow\boxed{(x,y)\in\{(5;7);(12;1)\}}$$

2. **تعيين الثنائيات (a,b) التي تحقق : $\begin{cases}7a+6b=79d\\ m=840\end{cases}$**

$$d=PGCD(a,b)\Rightarrow a=da';b=db';PGCD(a';b')=1$$

$$m=PPCM(a,b)\Rightarrow md=ab\Rightarrow md=d^2a'b'\Rightarrow m=da'b'$$

$$\begin{cases}7a+6b=79d\\ m=840\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7a'+6b'=79\\ da'b'=840\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(a',b')\in\{(5;7);(12;1)\}\\ d=\dfrac{840}{a'b'}\end{cases}$$

- $(a',b')=(5,7)\Rightarrow d=24\Rightarrow\boxed{(a,b)=(120,168)}$
- $(a',b')=(12,1)\Rightarrow d=70\Rightarrow\boxed{(a,b)=(840,70)}$

حل التمرين 24 :

1. **تحليل العدد 275 إلى جداء عوامل أولية ، ثمّ تعيين قواسم 275**

$275 = 5^2 \times 11 \Rightarrow D_{275} = \{1; 5; 11; 25; 55; 275\}$

2. العددان الطبيعيان اللذان مربع كل منهما يقسم 275 هما 1 و 5

3. **برهان أنّه إذا كان a أولي مع b فإنّ $(a+b)^2$ أولي مع ab**

$d = PGCD(a+b; ab) \Rightarrow \begin{cases} d \mid a+b \\ d \mid ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid a(a+b) - ab \\ d \mid b(a+b) - ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid a^2 \\ d \mid b^2 \end{cases} \Rightarrow d$

$\mid PGCD(a^2; b^2) \Rightarrow \boxed{d = 1}$

(لأنّ a أولي مع b منه a^2 أولي مع b^2).

بما أنّ $PGCD(a+b; ab) = 1$ فإنّ $\boxed{PGCD[(a+b)^2; ab] = 1}$

4. **نضع $d = PGCD(a,b)$ و $m = PPCM(a,b)$**

أ. **تعيين الثنائيات (a,b) التي تحقق : $6(a+b)^2 = 275m$**

$6(a+b)^2 = 275m \Rightarrow 6(da' + db')^2 = 275da'b'$

$\Rightarrow 6d^2(a'+b')^2 = 275da'b' \Rightarrow 6d(a'+b')^2 = 275a'b'$

$\Rightarrow (a'+b')^2 \mid 275a'b' \Rightarrow (a'+b')^2 \mid 275$ (لأنّ $(a'+b')^2$ أولي مع $a'b'$)

$(a'+b')^2 \mid 275 \Rightarrow a'+b' = 1$ أو $a'+b' = 5$

$a'+b' = 1 \Rightarrow (a'; b') \in \{(0;1); (1;0)\} \Rightarrow a'b' = 0$

$$\Rightarrow d = \frac{275a'b'}{6(a'+b')^2} = 0$$ مستحيل

$a'+b' = 5 \Rightarrow (a'; b') \in \{(1;4); (4;1); (2;3); (3;2)\}$

$(a'; b') \in \{(1;4); (4;1)\} \Rightarrow a'b' = 4 \Rightarrow d = \dfrac{275 \times 4}{6 \times 16} = 11{,}458$ مستحيل

$(a'; b') \in \{(2;3); (3;2)\} \Rightarrow a'b' = 6 \Rightarrow d = \dfrac{275 \times 6}{6 \times 25} = 11$

$\Rightarrow \boxed{(a; b) \in \{(22; 33); (33; 22)\}}$

ب. **تعيين الثنائيات (a,b) التي تحقق : $\begin{cases} d + m = 156 \\ m = d^2 \end{cases}$**

$\begin{cases} d + m = 156 \\ m = d^2 \end{cases} \Rightarrow d^2 + d - 156 = 0 \Rightarrow d = 12 \Rightarrow m = 144$

$m = da'b' \Rightarrow a'b' = \dfrac{m}{d} = \dfrac{144}{12} = 12$

$\Rightarrow (a'; b') \in \{(1;12); (12;1); (3;4); (4;3)\}$

$\Rightarrow \boxed{(a; b) \in \{(12; 144); (144; 12); (36; 48); (48; 36)\}}$

حل التمرين 25 :

1. تعيين القاسم المشترك الأكبر للأعداد التالية : 2189 ، 1393 ، 398

$2189 = 11 \times 199 \,;\, 1393 = 7 \times 199 \,;\, 398 = 2 \times 199$

$\Rightarrow \boxed{PGCD(2189; 1393; 398) = 199}$

2. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) ... $2189x + 1393y = 398$

أ. تعيين قيمة α حتى تكون الثنائية $(-3; \alpha)$ حلا خاصا للمعادلة (1)

$2189x + 1393y = 398 \Rightarrow 11x + 7y = 2 \Rightarrow 11(-3) + 7\alpha = 2 \quad \Rightarrow 7\alpha = 35 \Rightarrow \alpha = 5$

ب. استنتاج حلول المعادلة (1)

$\begin{cases} 11x + 7y = 2 \\ 11(-3) + 7(5) = 2 \end{cases} \Rightarrow 11(x+3) + 7(y-5) = 0 \quad \Rightarrow 11(x+3) = 7(-y+5)$

$\begin{cases} 7 \mid 11(x+3) \\ PGCD(7\,;11) = 1 \end{cases} \Rightarrow 7 \mid (x+3) \Rightarrow x + 3 = 7k \Rightarrow x = 7k - 3$

$11(7k) = 7(-y+5) \Rightarrow -y + 5 = 11k \Rightarrow y = -11k + 5$

$\boxed{S = \{(7k - 3\,; -11k + 5)\}\,;\, k \in \mathbb{Z}}$

3. تعيين حلول المعادلة (1) التي تحقق :

أ. $x < 11$ و $y < 18$

$\begin{cases} x < 11 \\ y < 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7k - 3 < 11 \\ -11k + 5 < 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k < 2 \\ k > -1{,}18 \end{cases} \Rightarrow k \in \{-1; 0; 1\}$

$\Rightarrow \boxed{(x; y) \in \{(-10; 16)\,;(-3; 5)\,;(4; -6)\}}$

ب. $x^2 + 6y - 39 < 0$

$x^2 + 6y - 39 < 0 \Rightarrow (7k-3)^2 + 6(-11k+5) - 39 < 0$

$\Rightarrow 49k^2 - 108k < 0 \Rightarrow k(49k - 108) < 0$

$\Rightarrow k \in]0; 2{,}2[\Rightarrow k \in \{1; 2\} \Rightarrow \boxed{(x; y) \in \{(4; -6)\,;(11; -17)\,\}}$

حل التمرين 26 :

1. حل المعادلة (1) ... $95(x-2) = 76(y+1)$

$95(x-2) = 76(y+1) \Rightarrow 5(x-2) = 4(y+1)$

$\begin{cases} 4 \mid 5(x-2) \\ PGCD(4\,;5) = 1 \end{cases} \Rightarrow 4 \mid (x-2) \Rightarrow x - 2 = 4k \Rightarrow x = 4k + 2$

$5(4k) = 4(y+1) \Rightarrow y + 1 = 5k \Rightarrow y = 5k - 1$

$\boxed{S = \{(4k + 2\,; 5k - 1)\}\,;\, k \in \mathbb{Z}}$

2. تعيين الثنائيات (α,β) التي تحقق : $\alpha^2 \equiv \beta[5]$

$\alpha^2 \equiv \beta[5] \Rightarrow (4k+2)^2 \equiv (5k-1)[5] \Rightarrow 16k^2+11k+5 \equiv 0[5]$

$\Rightarrow k^2+k \equiv 0[5] \Rightarrow k(k+1) \equiv 0[5] \Rightarrow k \equiv 0[5]$ أو $k+1 \equiv 0[5]$

$\Rightarrow k = 5k'$ أو $k = 5k'-1; k' \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (\alpha,\beta) = (20k'+2; 25k'-1)$ أو $(\alpha,\beta) = (20k'-2; 25k'-6)$

3. حل في مجموعة الأعداد الطبيعية الجملة : $\begin{cases} 5(2-x) = -4(y+1) \\ x^2-y^2 \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 5(2-x) = -4(y+1) \\ x^2-y^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(x-2) = 4(y+1) \\ x^2-y^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4k+2 \\ y = 5k-1 \\ x^2-y^2 \geq 0 \end{cases}$$

$x^2-y^2 \geq 0 \Rightarrow (4k+2)^2-(5k-1)^2 \geq 0 \Rightarrow 9k^2-26k-3 \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{9} \leq k \leq 3 \Rightarrow k \in \{1;2;3\}$

$\Rightarrow \boxed{(x;y) \in \{(6;4);(10;9);(14;14)\}}$ ($k=0 \Rightarrow y=-1$ حالة مرفوضة)

حل التمرين 27 :

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) ... $7x+13y=119$

1. **بيان أنّه إذا كان $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإنّ y مضاعف للعدد 7**

$7x+13y=119 \Rightarrow 13y = 119-7x = 7(17-x) \Rightarrow 13y \equiv 0[7] \quad \Rightarrow y \equiv 0[7]$ (لأنّ 7 أولي مع 13)

استنتاج حلول المعادلة (1)

$7x+13y=119 \Rightarrow 7x = 119-13y \Rightarrow 119-13(7k) = 7(17-13k) \Rightarrow x = -13k+17$

$\boxed{S = \{(-13k+17\,;7k)\}\,;k \in \mathbb{Z}}$

2. **تعيين α ، β و γ حيث : $\overline{\alpha\gamma1}^6 + \overline{1\beta3\beta}^8 = \overline{32\gamma\alpha}^7$**

$\overline{\alpha\gamma1}^6 + \overline{1\beta3\beta}^8 = \overline{32\gamma\alpha}^7$

$\Rightarrow 6^2\alpha+6\gamma+1+8^3+8^2\beta+24+\beta = 3.7^3+2.7^2+7\gamma+\alpha$

$\Rightarrow 35\alpha+65\beta-590=\gamma \Rightarrow 5(7\alpha+13\beta-118)=\gamma \Rightarrow \gamma \equiv 0[5]$

$\Rightarrow \gamma = 5$ (لأنّ $0<\gamma<6$)

$5(7\alpha+13\beta-118)=5 \Rightarrow 7\alpha+13\beta=119$

$\Rightarrow (\alpha\,;\beta) = (-13k+17\,;7k)$

$$\begin{cases}0 < \alpha < 6\\0 < \beta < 8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0 < -13k + 17 < 6\\ 0 < 7k < 8\end{cases} \Rightarrow k = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = 4\,;\ \beta = 7\,;\gamma = 5}$$

حل التمرين 28 :

1. **بيان أنّ العددين 27 و 22 أوليان فيما بينهما**

$$27 = 3^3\,; 22 = 2 \times 11\,; \boxed{PGCD(27;22) = 1}$$

2. **تعيين عددين صحيحين a و b يحققان : $27a + 22b = 1$**

$$27 = 22 + 5 \quad \Rightarrow \quad 5 = 27 - 22$$

$$22 = 4(5) + 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = 22 - 4(5)$$

$$5 = 2(2) + 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 5 - 2(2)$$

$$1 = 5 - 2(2) = 5 - 2[22 - 4(5)] = 9(5) - 2(22)$$
$$= 9(27 - 22) - 2(22) = 27(9) + 22(-11)$$
$$\Rightarrow \boxed{(a;b) = (9;-11)}$$

3. **حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $405x - 330y = 15$**

$$405x - 330y = 15 \Rightarrow 27x - 22y = 1$$
$$\begin{cases}27x - 22y = 1\\27(9) - 22(11) = 1\end{cases} \Rightarrow 27(x-9) - 22(y-11) = 0 \Rightarrow 27(x-9)$$
$$= 22(y-11)$$
$$\begin{cases}22 \mid 27(x-9)\\PGCD(27\,;22) = 1\end{cases} \Rightarrow 22 \mid (x-9) \Rightarrow x - 9 = 22k$$
$$\Rightarrow x = 22k + 9\,; k \in \mathbb{Z}$$
$$27(22k) = 22(y-11) \Rightarrow y - 11 = 27k \Rightarrow y = 27k + 11\,; k \in \mathbb{Z}$$
$$\boxed{S = \{(22k + 9\,; 27k + 11)\}\,; k \in \mathbb{Z}}$$

3. **استنتاج حل الجملة التالية : $\begin{cases}\lambda \equiv 0[27]\\\lambda \equiv 1[22]\end{cases}$**

$$\begin{cases}\lambda \equiv 0[27]\\\lambda \equiv 1[22]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda = 27\alpha\\\lambda = 22\beta + 1\end{cases} \Rightarrow 27\alpha - 22\beta = 1$$
$$\Rightarrow (\alpha;\beta) = (22k + 9\,; 27k + 11)$$
$$\lambda = 27\alpha \Rightarrow \lambda = 27(22k + 9) \Rightarrow \boxed{\lambda = 594k + 243\,; k \in \mathbb{Z}}$$

حل التمرين 29 :

1. **حساب $PGCD(580; 1885)$**

$PGCD(580; 1885) = 145$

2. **تعيين قيّم α حتى تقبل المعادلة $1885x - 580y = \alpha$ حلولا في $\mathbb{Z}^2$**

$PGCD(580; 1885) \mid \alpha \Rightarrow 145 \mid \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = 145\beta; \beta \in \mathbb{Z}}$

3. $\boldsymbol{\alpha = 1305}$

أ. **حل المعادلة (1)**

$1885x - 580y = 1305 \Rightarrow 13x - 4y = 9$

$\begin{cases} 13x - 4y = 9 \\ 13(1) - 4(1) = 9 \end{cases} \Rightarrow 13(x-1) - 4(y-1) = 0$

$\Rightarrow 13(x-1) = 4(y-1)$

$\begin{cases} 4 \mid 13(x-1) \\ PGCD(4,13) = 1 \end{cases} \Rightarrow 4 \mid (x-1) \Rightarrow x - 1 = 4k \Rightarrow x = 4k + 1\,; k \in \mathbb{Z}$

$13(x-1) = 4(y-1) \Rightarrow 13(4k) = 4(y-1) \Rightarrow y - 1 = 13k$

$\Rightarrow y = 13k + 1; k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{S = \{(4k+1\,; 13k+1)\}\,;\ k \in \mathbb{Z}}$

ب. **تعيين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (1) حيث يكون x قاسما لـ y**

$y \equiv 0[x] \Rightarrow 13k + 1 \equiv 0[4k+1] \Rightarrow 13k + 1 - 3(4k+1) \equiv 0[4k+1]$

$\Rightarrow k - 2 \equiv 0[4k+1] \Rightarrow -4(k-2) + (4k+1) \equiv 0[4k+1]$

$\Rightarrow 9 \equiv 0[4k+1] \Rightarrow (4k+1) \mid 9 \Rightarrow (4k+1) \in \{-9; -3; -1; 1; 3; 9\}$

$\Rightarrow 4k \in \{-10; -4; -2; 0; 2; 8\} \Rightarrow k \in \{-1; 0; 2\}$

$\Rightarrow \boxed{(x; y) \in \{(-3; -12), (1; 1), (9; 27)\}}$

حل التمرين 30 :

حساب عدد الركاب من كل صنف

$\begin{cases} a + b + c = 16 \\ 20a + 15b = 285 \end{cases};\ 20a + 15b = 285 \Rightarrow 4a + 3b = 57$

$\Rightarrow 4a = 57 - 3b = 3(19 - b) \Rightarrow 3 \mid 4a$

$\Rightarrow 3 \mid a$ (لأنّ 4 أولي مع 3) $\Rightarrow a = 3k\,; k \in \mathbb{N}$

$3b = -4a + 57 = -12k + 57 = 3(-4k + 19) \Rightarrow b = -4k + 19$

$\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3k > 0 \\ -4k + 19 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k < 4{,}75 \end{cases} \Rightarrow k \in \{1; 2; 3; 4\}$

- $\underline{k=1}: a = 3\ ; b = 15$ مرفوضة
- $\underline{k=2}: a = 6\ ; b = 11$ مرفوضة
- $\underline{k=3}: a = 9\ ; b = 7\ ; c = 0$ مرفوضة
- $\underline{k=4}: \boxed{a = 12\ ; b = 3\ ; c = 1}$

حل التمرين 31 :

1. أ. تحليل العدد 1996 إلى جداء عوامل أولية

$$\boxed{1996 = 2^2 \times 499}$$

ب. تعيين مجموعة قواسم 1996

$$\boxed{D_{1996} = \{1; 2; 4; 499; 998; 1996\}}$$

ج. بيان أنّ جداء قواسم 1996 هو $8(998)^3$

$$1 \times 2 \times 4 \times 499 \times 998 \times 1996 = 8 \times 499 \times 998 \times 998 \times 2 = \boxed{8(998)^3}$$

د. إيجاد العددين الطبيعيين اللذين مربع كل منهما يقسم العدد 1996

$$d^2 \mid 1996 \Rightarrow \boxed{d = 1 \text{ أو } d = 2}$$

2. تعيين كل الثنائيات (x, y) التي تحقق : $2m^2 + 49d^2 = 1996$

$$d = PGCD(x, y) \Rightarrow x = dx'; y = dy'; PGCD(x', y') = 1$$

$$m = PPCM(x, y) \Rightarrow md = xy \Rightarrow md = d^2x'y' \Rightarrow m = dx'y'$$

$$2m^2 + 49d^2 = 1996 \Rightarrow 2d^2x'^2y'^2 + 49d^2 = 1996 \Rightarrow d^2(2x'^2y'^2 + 49) = 1996 \Rightarrow d^2 \mid 1996$$

- $d = 1: 2x'^2y'^2 + 49 = 1996 \Rightarrow 2x'^2y'^2 = 1947$ مستحيل
- $d = 2: 2x'^2y'^2 + 49 = 499 \Rightarrow 2x'^2y'^2 = 450$
  $\Rightarrow x'^2y'^2 = 225 \Rightarrow x'y' = 15$

$$x'y' = 15 \Rightarrow (x'; y') \in \{(1; 15); (3; 5); (5; 3); (15; 1)\}$$

$$\Rightarrow \boxed{(x; y) \in \{(2; 30); (6; 10); (10; 6); (30; 2)\}}$$

حل التمرين 32 :

نعتبر في مجموعة الأعداد الطبيعية المعادلة (1) ... $4\alpha - 7\beta = 3$

1. تعيين $(\alpha_0; \beta_0)$ حيث $0 < \alpha_0 < 7$

$$4(6) - 7(3) = 3 \Rightarrow \boxed{(\alpha_0; \beta_0) = (6\ ; 3)}$$

استنتاج حلول المعادلة (1)

$$\begin{cases} 4\alpha - 7\beta = 3 \\ 4(6) - 7(3) = 3 \end{cases} \Rightarrow 4(\alpha - 6) - 7(\beta - 3) = 0 \qquad \Rightarrow 4(\alpha - 6) = 7(\beta - 3)$$

$$\begin{cases} 7 \mid 4(\alpha - 6) \\ PGCD(7\,;4) = 1 \end{cases} \Rightarrow 7 \mid (\alpha - 6) \Rightarrow \alpha - 6 = 7k \Rightarrow \alpha = 7k + 6$$

$$4(7k) = 7(\beta - 3) \Rightarrow \beta - 3 = 4k \Rightarrow \beta = 4k + 3$$

$$\boxed{S_{(1)} = \{(7k + 6\,; 4k + 3)\}\,; k \in \mathbb{N}}$$

2. **استنتاج حلول المعادلة (2) ... $68x - 119y = 102$ ، حيث $(x, y) \in \mathbb{N}^2$**

$$68x - 119y = 102 \Rightarrow 4x - 7y = 6 \Rightarrow (x_0; y_0) = (12; 6)$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{(2)} = \{(7k + 12\,; 4k + 6)\}}$$

3. **تعيين القيم الممكنة للعدد d**

$$d = PGCD(x, y) \Rightarrow d \mid x \text{ و } d \mid y \Rightarrow d \mid 4x - 7y \Rightarrow d \mid 6$$

$$\Rightarrow \boxed{d \in \{1; 2; 3; 6\}}$$

4. **تعيين كل الثنائيات (α, β) حلول المعادلة (1) التي تحقق : $PGCD(\alpha, \beta) = 1$**

$$d' = PGCD(\alpha, \beta) \Rightarrow d' \mid 3 \Rightarrow d' = 1 \text{ أو } d' = 3$$

$$d' = 3 \Rightarrow \begin{cases} \alpha \equiv 0[3] \\ \beta \equiv 0[3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7k + 6 \equiv 0[3] \\ 4k + 3 \equiv 0[3] \end{cases} \Rightarrow k \equiv 0[3] \Rightarrow k = 3k'$$

$$d' = 1 \Rightarrow k = 3k' + 1 \text{ أو } k = 3k' + 2$$

$$\Rightarrow \boxed{(\alpha, \beta) \in \{(21k' + 13; 12k' + 7)\,; (21k' + 20; 12k' + 11)\}}$$

حل التمرين 33 :

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) ... $3x - 11y = 5$

2. **بيان أنّ المعادلة (1) تكافئ المعادلة (2) ... $3x - 5 \equiv 0[11]$**

$$3x - 11y = 5 \Rightarrow 3x - 5 = 11y \Rightarrow 3x - 5 \equiv 0[11]$$

3. **تعيين حلول المعادلة (2) ، ثمّ استنتاج حلول المعادلة (1)**

$$3x - 5 \equiv 0[11] \Rightarrow 3x \equiv 5[11] \Rightarrow 3x \equiv 27[11] \Rightarrow x \equiv 9[11]$$

$$\Rightarrow x = 11k + 9$$

$$11y = 3x - 5 \Rightarrow 11y = 3(11k + 9) - 5 \Rightarrow 11y = 33k + 22$$

$$\Rightarrow y = 3k + 2$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{(1)} = S_{(2)} = (11k + 9; 3k + 2)\,; k \in \mathbb{Z}}$$

4. نضع : $d = PGCD(x, y)$

أ. تعيين القيم الممكنة للعدد d

$d = PGCD(x, y) \Rightarrow d \mid x$ و $d \mid y \Rightarrow d \mid 3x - 11y \Rightarrow d \mid 5$

$\Rightarrow \boxed{d = 1 \text{ أو } d = 5}$

ب. تعيين الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الطبيعية حلول المعادلة (1) التي من أجلها يكون $d = 5$

$PGCD(x, y) = 5 \Rightarrow \begin{cases} 11k + 9 \equiv 0[5] \\ 3k + 2 \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow 8k + 11 \equiv 0[5]$

$\Rightarrow 3k + 1 \equiv 0[5] \Rightarrow 3k \equiv 4[5] \Rightarrow 3k \equiv 9[5] \Rightarrow k \equiv 3[5]$

$\Rightarrow k = 5k' + 3 \Rightarrow x = 11(5k' + 3) + 9 = 55k' + 42$

$\Rightarrow y = 3(5k' + 3) + 2 = 15k' + 11$

$\Rightarrow \boxed{(x; y) = (55k' + 42\,; 15k' + 11); k' \in \mathbb{Z}}$

حل التمرين 34 :

1. تعيين قيّم العدد n حيث يقبل b القسمة على a

$2n^2 - 7n + 17 = (n - 2)(2n - 3) + 11$

$a \mid b \Rightarrow n - 2 \mid 11 \Rightarrow n - 2 \in \{-11; -1; 1; 11\} \Rightarrow \boxed{n \in \{-9; 1; 3; 13\}}$

2. $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 17}{x - 2}$ ، $Df = \mathbb{R} - \{2\}$

تعيين نقط المنحنى (C) التي إحداثياها أعداد صحيحة

$M(x, y) \in (C) \Rightarrow y = \dfrac{2x^2 - 7x + 17}{x - 2}$

$(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ x - 2 \mid 2x^2 - 7x + 17 \end{cases} \Rightarrow x \in \{-9; 1; 3; 13\}$

$\boxed{(x; y) \in \{(-9; -22)\,; (1; -12)\,; (3; 14)\,; (13; 24)\}}$

حل التمرين 35 :

1. نشر العدد $(n + 2)^3$

$(n + 2)^3 = n^3 + 6n^2 + 12n + 8$

2. $P(x) = 3x^3 - 13x^2 - 48x - 56$

أ. حساب $P(7)$ واستنتاج تحليلا لـ $P(x)$

$$P(7) = 3(7)^3 - 13(7)^2 - 48(7) - 56 = 0 \qquad \Rightarrow P(x) = (x-7)(3x^2+8x+8)$$

ب. حل المعادلة $\boldsymbol{P(x) = 0}$

$$P(x) = 0 \Rightarrow (x-7)(3x^2+8x+8) = 0$$
$$\Rightarrow x = 7 \; [3x^2+8x+8 \neq 0(\Delta = -32)]$$

3. تعيين قيمة $\boldsymbol{n}$ وكتابة العدد $\boldsymbol{a}$ في النظام العشري

$$a = \overline{5564}^n = \overline{2668}^{n+2}$$
$$\Rightarrow 5n^3 + 5n^2 + 6n + 4 = 2(n+2)^3 + 6(n+2)^2 + 6(n+2) + 8$$
$$\Rightarrow 5n^3 + 5n^2 + 6n + 4 = 2n^3 + 18n^2 + 54n + 60$$
$$\Rightarrow 3n^3 - 13n^2 - 48n - 56 = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{n = 7\;;\; a = 2006}$$

حل التمرين 36 :

$$\boldsymbol{PGCD(a+b\,;ab) = p^2}$$

1. بيان أنّ $\boldsymbol{p^2}$ يقسم $\boldsymbol{a^2}$

$$PGCD(a+b;ab) = p^2 \Rightarrow \begin{cases} p^2 \mid a+b \\ p^2 \mid ab \end{cases} \Rightarrow p^2 \mid a(a+b) - ab \Rightarrow \boxed{p^2 \mid a^2}$$

2. استنتاج أنّ $\boldsymbol{p}$ يقسم $\boldsymbol{a}$

$$p^2 \mid a^2 \Rightarrow p \mid a^2 \Rightarrow p \mid a \;(\text{لأنّ } p \text{ أولي})$$

- **بيان أنّ $\boldsymbol{p}$ يقسم $\boldsymbol{b}$**

$$PGCD(a+b;ab) = p^2 \Rightarrow \begin{cases} p^2 \mid a+b \\ p^2 \mid ab \end{cases} \Rightarrow p^2 \mid b(a+b) - ab \Rightarrow p^2 \mid b^2$$
$$\Rightarrow p \mid b^2 \Rightarrow p \mid b \;(\text{لأنّ } p \text{ أولي})$$

- **إثبات أنّ : $\boldsymbol{PGCD(a\,;b) = p^2}$ أو $\boldsymbol{PGCD(a\,;b) = p}$**

$$PGCD(a,b) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid a+b \\ d \mid ab \end{cases} \Rightarrow d \mid p^2 \Rightarrow d \in \{1, p, p^2\}$$

بما أنّ p يقسم a ويقسم b وهو يختلف عن 1 لأنّه أولي، إذن $PGCD(a,b) \neq 1$ منه : $PGCD(a,b) = p$ أو $PGCD(a,b) = p^2$

.3 $(E):\begin{cases} PGCD(a+b;ab)=49 \\ PPCM(a,b)=231 \end{cases}$

- **بيان أنّ : $PGCD(a\,;b)=7$**

$\begin{cases} PGCD(a+b;ab)=49 \\ PPCM(a,b)=231 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=49 \\ m=231 \end{cases}$ أو $\begin{cases} p^2=49 \\ m=231 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} d=49 \\ m=231 \end{cases}$ (مرفوض لأنّ 49 لا يقسم 231) أو $\begin{cases} d=7 \\ m=231 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{d=7}$

- **تعيين كل الثنائيات $(a\,,b)$ في $\mathbb{N}^2$ و التي تحقق (E)**

$d=7 \Rightarrow a=7a';b=7b';PGCD(a',b')=1$

$m=231 \Rightarrow d.a'.b'=231 \Rightarrow a'.b'=33$

$\Rightarrow (a',b') \in \{(1,33)\,;(33,1);(3,11);(11,3)\}$

$\Rightarrow \boxed{(a,b) \in \{(7,231)\,;(231,7);(21,77);(77,21)\}}$

حل التمرين 37 :

$$a_n=4\times10^n-1 \text{ ، } b_n=2\times10^n-1 \quad c_n=2\times10^n+10$$

.1 حساب b_3 ، c_3

$b_3=2\times10^3-1=1999\,;\ c_3=2\times10^3+10=2010$

- **بيان أنّ a_n و c_n يقبلان القسمة على 3 ، و أنّ b_3 عدد أولي**

$\begin{cases} 10\equiv1[3] \\ 4\equiv1[3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10^n\equiv1[3] \\ 4\times10^n-1\equiv0[3] \end{cases} \Rightarrow \boxed{a_n\equiv0[3]}$

$\begin{cases} 10\equiv1[3] \\ 2\equiv-1[3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10^n\equiv1[3] \\ 2\times10^n+10\equiv0[3] \end{cases} \Rightarrow \boxed{c_n\equiv0[3]}$

$\sqrt{1999}\approx44{,}7$

بما أنّ العدد 1999 لا يقبل القسمة على أي من الأعداد التالية:

$\{2;3;5;7;11;13;17;19;23;29;31;37;41;43\}$ ، فهو إذن أولي.

- **بيان أنّ $b_n\times(c_n-9)=a_{2n}$**

$b_n\times(c_n-9)=(2\times10^n-1)(2\times10^n+10-9)$
$=(2\times10^n-1)(2\times10^n+1)=4\times10^{2n}-1=a_{2n}$

استنتاج تحليل للعدد a_6

$a_6=a_{2(3)}=b_3\times(c_3-9)=1999\times2001$

$\boxed{a_6 = 1999 \times 3 \times 23 \times 29}$

- **بيان أنّ $PGCD(b_n\,, c_n) = PGCD(b_n\,, 11)$**

$c_n = b_n + 11 \Rightarrow PGCD(b_n\,, c_n) = PGCD(b_n\,, 11)$

استنتاج أنّ b_n و c_n أوليان فيما بينهما

$d = PGCD(b_n\,, c_n) \Rightarrow d = PGCD(b_n\,, 11) \Rightarrow d = 1$ أو $d = 11$

بما أنّ العدد b_3 أولي ، إذن $d \neq 11$ منه $\boxed{d = 1}$

2. $b_3x + c_3y = 1 \dots (E)$

- **بيان أنّ المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$**

بما أنّ العدد 1999 أولي ، فإنّ $PGCD(1999{,}2010) = 1$ ، منه المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$

- **التحقق أنّ $(-731; 727)$ حل للمعادلة (E)**

$1999(-731) + 2010(727) = 1 \Rightarrow (-731; 727) \in S_{(E)}$

- **حل المعادلة (E)**

$$\begin{cases} 1999x + 2010y = 1 \\ 1999(-731) + 2010(727) = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow 1999(x + 731) + 2010(y - 727) = 0$

$\Rightarrow 1999(x + 731) = 2010(-y + 727)$

$$\begin{cases} 2010 \mid 1999(x + 731) \\ PGCD(1999{,}2010) = 1 \end{cases} \Rightarrow 2010 \mid (x + 731)$$

$\Rightarrow x + 731 = 2010k \Rightarrow x = 2010k - 731$

$1999(2010k) = 2010(-y + 727) \Rightarrow -y + 727 = 1999k$

$\Rightarrow y = -1999k + 727$

$\boxed{S = \{(2010k - 731; -1999k + 727)\}\,; k \in \mathbb{Z}}$

حل التمرين 38 :

1. حل المعادلة (E)

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 3(1) - 2(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow 3(x - 1) - 2(y - 1) = 0$$

$\Rightarrow 3(x - 1) = 2(y - 1)$

$$\begin{cases} 2 \mid 3(x-1) \\ PGCD(2;3)=1 \end{cases} \Rightarrow 2 \mid (x-1) \Rightarrow x-1=2k \Rightarrow x=2k+1\,;k\in\mathbb{Z}$$

$$3(2k)=2(y-1) \Rightarrow y-1=3k \Rightarrow y=3k+1\,;k\in\mathbb{Z}$$

$$\boxed{S=\{(2k+1;3k+1)\}\,;k\in\mathbb{Z}}$$

.2

أ. بيان أنّ الثنائية $(14n+3\,,21n+4)$ هي حل للمعادلة (E)

$$3(14n+3)-2(21n+4)=42n+9-42n-8=1$$

$$\Rightarrow (14n+3;21n+4)\in S$$

ب. استنتاج أنّ العددين $21n+4$ و $14n+3$ أوليان فيما بينهما

$$3(14n+3)-2(21n+4)=1 \Rightarrow PGCD(14n+3;21n+4)=1$$

.3 $d=PGCD(21n+4;2n+1)$

أ. بيان أنّ $d=1$ أو $d=13$

$$\begin{cases} d \mid 2n+1 \\ d \mid 21n+4 \end{cases} \Rightarrow d \mid 21(2n+1)-2(21n-4) \Rightarrow d \mid 13 \Rightarrow \boxed{d=1 \text{ أو } d=13}$$

ب. بيان أنّه إذا كان $d=13$ فإنّ $n\equiv 6[13]$

$$d=13 \Rightarrow \begin{cases} 2n+1\equiv 0[13] \\ 21n+4\equiv 0[13] \end{cases} \Rightarrow 19n\equiv 10[13] \Rightarrow 6n\equiv 36[13]$$

$$\Rightarrow \boxed{n\equiv 6[13]}$$

.4 $A=21n^2-17n-4$ و $B=28n^3-8n^2-17n-3$

أ. بيان أنّ العددين A و B يقبلان القسمة على $(n-1)$

$$21n^2-17n-4=(n-1)(21n+4)$$

$$28n^3-8n^2-17n-3=(n-1)(28n^2+20n+3)$$

منه ، A و B يقبلان القسمة على $(n-1)$

ب. إيجاد حسب قيم n $PGCD(A;B)$

$$PGCD(A;B)=(n-1)\times PGCD(21n+4;28n^2+20n+3)$$

$$PGCD(A;B)=(n-1)\times PGCD(21n+4;(14n+3)(2n+1))$$

بما أنّ العدين $21n+4$ و $14n+3$ أوليان فيما بينهما ، فإنّ :

$$PGCD(A;B)=(n-1)\times PGCD(21n+4;2n+1)$$

ومنه نستنتج أنّ:

- $n=13k+6:\ PGCD(21n+4;2n+1)=13$

$$\Rightarrow \boxed{PGCD(A;B)=13(n-1)}$$

- $n\neq 13k+6:\ PGCD(21n+4;2n+1)=1$

$$\Rightarrow \boxed{PGCD(A;B) = n-1}$$

حل التمرين 39 :

.1 $\mathbf{11n - 24m = 1 \ldots (1)}$

أ. تبرير أنّ المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا

$PGCD(11,24) = 1 \Rightarrow$ المعادلة تقبل على الأقل حلا

ب. تعيين مجموعة حلول المعادلة (1)

$$\begin{cases} 11n - 24m = 1 \\ 11(11) - 24(5) = 1 \end{cases} \Rightarrow 11(n-11) - 24(m-5) = 0$$

$$\Rightarrow 11(n-11) = 24(m-5)$$

$$\begin{cases} 24 \mid 11(n-11) \\ PGCD(24;11) = 1 \end{cases} \Rightarrow 24 \mid (n-11) \Rightarrow n - 11 = 24k \Rightarrow n = 24k + 11$$

$$11(24k) = 24(m-5) \Rightarrow m - 5 = 11k \Rightarrow m = 11k + 5$$

$$\boxed{S = \{(24k+11; 11k+5)\}\,; k \in \mathbb{Z}}$$

.2 أ. بيان أنّ 9 يقسم $\mathbf{10^{11} - 1}$ **و** $\mathbf{10^{24} - 1}$

$$10 \equiv 1[9] \Rightarrow 10^{11} \equiv 1[9] \Rightarrow 10^{11} - 1 \equiv 0[9] \Rightarrow 9 \mid 10^{11} - 1$$

$$10 \equiv 1[9] \Rightarrow 10^{24} \equiv 1[9] \Rightarrow 10^{24} - 1 \equiv 0[9] \Rightarrow 9 \mid 10^{24} - 1$$

ب. بيان أنّ $\mathbf{(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9}$

$$(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1)$$
$$= \left(10^{11(24k+11)} - 1\right) - 10\left(10^{24(11k+5)} - 1\right)$$
$$= 10^{264k+121} - 1 - 10^{264k+121} + 10 = 9$$

طريقة ثانية :

$$11n - 24m = 1 \Rightarrow 11n = 24m + 1$$
$$(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 10^{11n} - 10^{24m+1} + 9$$
$$= 10^{24m+1} - 10^{24m+1} + 9 = 9$$

ج. بيان أنّ : $\mathbf{10^{11} - 1}$ **يقسم** $\mathbf{10^{11n} - 1}$

$$10^{11n} - 1 = (10^{11})^n - 1$$
$$= (10^{11} - 1)\left(10^{11(n-1)} + 10^{11(n-2)} + \cdots + 10^{11} + 1\right)$$
$$\Rightarrow 10^{11} - 1 \mid 10^{11n} - 1$$

بيان أنّ : $\mathbf{10^{24} - 1}$ **يقسم** $\mathbf{10^{24m} - 1}$

$$10^{24m}-1=(10^{24})^m-1$$
$$=(10^{24}-1)\left(10^{24(m-1)}+10^{24(m-2)}+\cdots+10^{24}+1\right)$$
$$\Rightarrow 10^{24}-1 \mid 10^{24m}-1$$

استنتاج وجود N و M حيث : $(\mathbf{10^{11}-1})N-(\mathbf{10^{24}-1})M=\mathbf{9}$

$$(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=9$$
$$\Rightarrow (10^{11}-1)\left(10^{11(n-1)}+\cdots+1\right)-10(10^{24}-1)\left(10^{24(m-1)}+\cdots+1\right)=9$$
$$\Rightarrow N=\left(10^{11(n-1)}+10^{11(n-2)}+\cdots+10^{11}+1\right)$$
$$M=\left(10^{24(m-1)}+10^{24(m-2)}+\cdots+10^{24}+1\right)$$

د. بيان أنّ كل قاسم مشترك للعددين $\mathbf{10^{24}-1}$ و $\mathbf{10^{11}-1}$ يقسم 9

$$\begin{cases} d \mid 10^{11}-1 \\ d \mid 10^{24}-1 \end{cases} \Rightarrow d \mid (10^{11}-1)N-(10^{24}-1)M \Rightarrow d \mid 9$$

ه. استنتاج أنّ $\boldsymbol{PGCD}(\mathbf{10^{11}-1;10^{24}-1})$

$$\begin{cases} d \mid 9 \\ 9 \mid 10^{11}-1 \\ 9 \mid 10^{24}-1 \end{cases} \Rightarrow PGCD(10^{11}-1;10^{24}-1)=9$$

حل التمرين 40 :

.1 $\mathbf{91x+10y=1}\ \dots(\mathbf{1})$

أ. تعيين حل خاص للمعادلة (1)

الثنائية $(1,-9)$ حل خاص للمعادلة (1) $91(1)+10(-9)=1 \Rightarrow$

استنتاج حل خاص للمعادلة (2) ... $91x+10y=412$

نحصل على حل خاص للمعادلة (2) بضرب الثنائية $(1,-9)$ في 412

$$91(1)+10(-9)=1 \Rightarrow 91(412)+10(-3708)=412$$

منه الثنائية $(412,-3708)$ حل خاص للمعادلة (2)

ب. حل المعادلة (2)

$$\begin{cases} 91x+10y=412 \\ 91(412)+10(-3708)=412 \end{cases}$$
$$\Rightarrow 91(x-412)+10(y+3708)=0$$
$$\Rightarrow 91(x-412)=10(-y-3708)$$

$$\begin{cases} 10 \mid 91(x-412) \\ PGCD(10;91)=1 \end{cases} \Rightarrow 10 \mid (x-412) \Rightarrow x-412=10k \Rightarrow x=10k+412$$

$$91(10k)=10(-y-3708) \Rightarrow -y-3708=91k \Rightarrow y=-91k-3708$$

$$\boxed{S=\{(10k+412;-91k-3708)\}\,;k\in\mathbb{Z}}$$

2. برهان أنّ $A_n \equiv 0[8]$

$$A_n=3^{2n}-1=9^n-1\,;9\equiv 1[8] \Rightarrow 9^n\equiv 1[8]$$

$$\Rightarrow 9^n-1\equiv 0[8] \Rightarrow \boxed{A_n\equiv 0[8]}$$

3. $A_3x+A_2y=3296 \ldots (3)$

أ. تعيين حلول المعادلة (3)

$$A_3x+A_2y=3296 \Rightarrow 728x+80y=3296$$

$$\Rightarrow 91x+10y=412 \ \left(\text{نقسم طرفي المعادلة على 8}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{S=\{(10k+412;-91k-3708)\}\,;k\in\mathbb{Z}}$$

بيان أنّ المعادلة (3) تقبل حلا وحيدا (α,β) من $\mathbb{N}^2$

$$\begin{cases}\alpha\geq 0\\ \beta\geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}10k+412\geq 0\\ -91k-3708\geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k\geq -41{,}2\\ k\leq -40{,}7\end{cases} \Rightarrow k=-41$$

$$\Rightarrow (\alpha,\beta)=(2,23)$$

ب. إيجاد قيمة العدد الطبيعي $(\alpha+\beta)A_2+10$

$$(\alpha+\beta)A_2+10=25\times 80+10=2010$$

حل التمرين 41 :

$$\begin{cases}a=5n+3\\ b=2n+1\end{cases} \quad n\in\mathbb{N}$$

1. إثبات أن العددين a و b أوليان فيما بينهما

$$2a-5b=1 \Rightarrow PGCD(a,b)=1 \ \left(\text{بيزو}\right)$$

2. $x=5m+3$ ، $y=2m-1$ ، $m\in\mathbb{N}$

أ- تعيين علاقة بين x و y مستقلة عن العدد الطبيعي m

$$2x-5y=2(5m+3)-5(2m-1)=11$$

ب- $PGCD(x,y)=d$

- **تعيين القيم الممكنة لـ d**

$$d\mid x \text{ و } d\mid y \Rightarrow d\mid 2x-5y \Rightarrow d\mid 11 \Rightarrow \boxed{d=1 \text{ أو } d=11}$$

- **تعيين الثنائيات (x,y) حيث $d=11$**

$$d = 11 \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 0[11] \\ y \equiv 0[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5m + 3 \equiv 0[11] \\ 2m - 1 \equiv 0[11] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5m \equiv 8[11] \\ 2m \equiv 1[11] \end{cases} \Rightarrow m \equiv 6[11] \Rightarrow m = 11k + 6$$

$x = 5(11k + 6) + 3 = 55k + 33$;

$y = 2(11k + 6) - 1 = 22k + 11$

$\boxed{(x; y) = (55k + 33; 22k + 11); k \in \mathbb{N}}$

حل التمرين 42 :

$\mathbf{8x + 5y = 1} \ldots (E)$

1. إيجاد حل خاص للمعادلة (E)

$8(2) + 5(-3) = 1 \Rightarrow$ الثنائية $(2, -3)$ حل خاص للمعادلة (E)

حل المعادلة (E)

$8(x - 2) + 5(y + 3) = 0 \Rightarrow 8(x - 2) = 5(-y - 3)$

$\begin{cases} 5/8(x - 2) \\ PGCD(5; 8) = 1 \end{cases} \Rightarrow 5/(x - 2) \Rightarrow x - 2 = 5k \Rightarrow x = 5k + 2$

$8(5k) = 5(-y - 3) \Rightarrow -y - 3 = 8k \Rightarrow y = -8k - 3$

$\boxed{S = \{(5k + 2 \,;\, -8k - 3)\} \,;\, k \in \mathbb{Z}}$

2. $\begin{cases} \mathbf{N = 8a + 1} \\ \mathbf{N = 5b + 2} \end{cases}$

أ. بيان أنّ الثنائية $(a, -b)$ حل للمعادلة (E)

$8a = N - 1 \,; 5b = N - 2 \,; 8a - 5b = N - 1 - N + 2 = 1$

$\Rightarrow$ الثنائية $(a, -b)$ حل للمعادلة (E)

ب. إيجاد باقي القسمة الإقليدية للعدد N على 40

$a = 5k + 2 \Rightarrow N = 8(5k + 2) + 1 = 40k + 17$

$\Rightarrow \boxed{N \equiv 17[40]}$

3. حل المعادلة : $\mathbf{8x + 5y = 100}$

$8x + 5y = 100 \,; 8(200) + 5(-300) = 100$

$\Rightarrow \boxed{S = \{(5k + 200 \,;\, -8k - 300)\} \,;\, k \in \mathbb{Z}}$

4. تعيين عدد الذكور و عدد الإناث في المجموعة

$$\begin{cases} 8x + 5y = 100 \\ x > 0 \text{ و } y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5k + 200 > 0 \\ -8k - 300 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > -40 \\ k < -37{,}5 \end{cases}$$

$\Rightarrow k \in \{-38, -39\} \Rightarrow \boxed{(x, y) \in \{(10,4); (5,12)\}}$

حل التمرين 43 :

1. **بيان أنّ العددين n و $2n+1$ أوليان فيما بينهما**

$(2n+1) - 2(n) = 1 \Rightarrow PGCD(n\,, 2n+1) = 1$ (بيزو)

2. $\boldsymbol{\alpha = n+3}$ ، $\boldsymbol{\beta = 2n+1}$ و $\boldsymbol{PGCD(\alpha, \beta) = d}$

أ. **تعيين القيم الممكنة للعدد d**

$d|\,\alpha$ و $d|\,\beta \Rightarrow d|\,2\alpha - \beta \Rightarrow d|\,5 \Rightarrow \boxed{d = 1 \text{ أو } d = 5}$

ب. **بيان أنّ α و β مضاعفان للعدد 5 إذا و فقط إذا كان $(n-2)$ مضاعفا للعدد 5**

$\begin{cases}\alpha \equiv 0[5] \\ \beta \equiv 0[5]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n+3 \equiv 0[5] \\ 2n+1 \equiv 0[5]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \equiv 2[5] \\ 2n \equiv 4[5]\end{cases} \Rightarrow n \equiv 2[5]$

$\Rightarrow \boxed{n-2 \equiv 0[5]}$

3. **بيان أنّ العددين a و b يقبلان القسمة على $(n-1)$**

$a = n^3 + 2n^2 - 3n = (n-1)(n^2+3n)$

$b = 2n^2 - n - 1 = (n-1)(2n+1)$

منه ، نستنتج أنّ العددين a و b يقبلان القسمة على $(n-1)$

4. $\boldsymbol{PGCD[n(n+3), (2n+1)] = d'}$

أ. **بيان أنّ $d = d'$**

$d\,|\,n+3$ و $d\,|\,2n+1 \Rightarrow d\,|\,n(n+3)$ و $d\,|\,2n+1$

$\Rightarrow d\,|\,PGCD[n(n+3), (2n+1)] \Rightarrow d\,|\,d'$

$d'|\,n(n+3)$ و $d'|\,2n+1 \Rightarrow d'|\,n+3$ و $d'|\,2n+1$

$\Rightarrow d'|\,PGCD(n+3\,, 2n+1) \Rightarrow d'|\,d$

$d\,|\,d'$ و $d'|\,d \Rightarrow \boxed{d = d'}$

ب. **استنتاج $PGCD(a, b)$**

$PGCD(a, b) = (n-1)PGCD[n(n+3), (2n+1)]$

$PGCD(a, b) = (n-1)d' = (n-1)d$

- $n = 5k+2 : d = 5 \Rightarrow \boxed{PGCD(a, b) = 5(n-1)}$
- $n \neq 5k+2 : d = 1 \Rightarrow \boxed{PGCD(a, b) = n-1}$

ج. تحديد $PGCD(a, b)$ من أجل $n = 2001$ ثمّ من أجل $n = 2002$

$n = 2001 = 5(400) + 1 \Rightarrow PGCD(a, b) = 2001 - 1 = \boxed{2000}$

$n = 2002 = 5(400) + 2 \Rightarrow PGCD(a, b) = 5(2002 - 1) = \boxed{10005}$

حل التمرين 44 :

$a = 3n + 4$ و $b = 2n + 1$

1) التحقق أنّ $2a - 3b = 5$ ، $a - b = n + 3$ ، $3(n + 3) - 5 = a$ ، $2(n + 3) - 5 = b$

- $2a - 3b = 2(3n + 4) - 3(2n + 1) = 5$
- $a - b = 3n + 4 - 2n - 1 = n + 3$
- $3(n + 3) - 5 = 3(a - b) - (2a - 3b) = a$
- $2(n + 3) - 5 = 2(a - b) - (2a - 3b) = b$

استنتاج أنّ: $PGCD(a; b) = PGCD(n + 3; 5)$

$PGCD(a; b) = d \; ; PGCD(n + 3; 5) = d'$

$\begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid a - b \\ d \mid 2a - 3b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid n + 3 \\ d \mid 5 \end{cases} \Rightarrow d \mid PGCD(n + 3; 5) \Rightarrow d \mid d'$

$\begin{cases} d' \mid n + 3 \\ d' \mid 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d' \mid 3(n + 3) - 5 \\ d' \mid 2(n + 3) - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d' \mid a \\ d' \mid b \end{cases} \Rightarrow d' \mid PGCD(a; b) \Rightarrow d' \mid d$

$d \mid d'$ و $d' \mid d \Rightarrow d = d' \Rightarrow \boxed{PGCD(a; b) = PGCD(n + 3; 5)}$

2) استنتاج قيم $PGCD(a; b)$

$PGCD(a; b) = PGCD(n + 3; 5) = d \Rightarrow d \mid 5 \Rightarrow d = 1 \vee d = 5$

$d = 5 \Rightarrow n + 3 \equiv 0[5] \Rightarrow n \equiv 2[5] \Rightarrow n = 5k + 2 \; ; k \in \mathbb{N}$

- $n = 5k + 2 : \boxed{PGCD(a; b) = 5}$
- $n \neq 5k + 2 : \boxed{PGCD(a; b) = 1}$

3) تعيين الأعداد q ، y ، x ، z علما أنّ: $PGCD(3z + 4y; 2z + y) = 10$

$y = qx \; ; z = qy$

$PGCD(3z + 4y; 2z + y) = PGCD(3qy + 4y; 2qy + y)$

$\qquad = y.PGCD(3q + 4; 2q + 1)$

- $q = 5k + 2 : PGCD(3q + 4; 2q + 1) = 5 \Rightarrow y = 2$

  $y = qx \Rightarrow x = \dfrac{y}{q} \Rightarrow q \mid y \Rightarrow q \mid 2 \Rightarrow q = 2$

$q = 2 \Rightarrow x = 1;\ y = 2;\ z = 4$;
$PGCD(3z + 4y; 2z + y) = PGCD(20; 10) = 10$

- $q \neq 5k + 2 :\ PGCD(3q + 4; 2q + 1) = 1 \Rightarrow y = 10$

$y = qx \Rightarrow x = \dfrac{y}{q} \Rightarrow q \mid y \Rightarrow q \mid 10 \Rightarrow q \in \{1; 5; 10\}\ (q \neq 2)$
$q = 1\ \Rightarrow x = 10;\ y = 10;\ z = 10$;
$PGCD(3z + 4y; 2z + y) = PGCD(70; 30) = 10$
$q = 5\ \Rightarrow x = 2;\ y = 10;\ z = 50$;
$PGCD(3z + 4y; 2z + y) = PGCD(170; 110) = 10$
$q = 10\ \Rightarrow x = 1;\ y = 10;\ z = 100$;
$PGCD(3z + 4y; 2z + y) = PGCD(340; 110) = 10$

4) تعيين العددين الطبيعيين m ، n علما أنّ n أولي و $m^2 = a$

$m^2 = a \Rightarrow m^2 = 3n + 4 \Rightarrow m^2 - 4 = 3n \Rightarrow (m - 2)(m + 2) = 3n \Rightarrow 3 \mid (m - 2)(m + 2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 \mid (m-2) \\ \text{أو} \\ 3 \mid (m+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 3k + 2 \\ \text{أو} \\ m = 3k' - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n = (3k+2)^2 - 4 \\ \text{أو} \\ 3n = (3k'-2)^2 - 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = k(3k + 4) \\ \text{أو} \\ n = k'(3k' - 4) \end{cases}$$

بما أنّ n أولي، فإنّ القيمة الوحيدة الممكنة للعددين k و k' هي 1 ، منه $n = 7$ أو $n = -1$ (مستحيل لأنّ n عدد طبيعي) ، نستنتج إذن أنّ : $\boxed{m = 5 \text{ و } n = 7}$

حل التمرين 45 :

$A = \overline{abcd}^9$ و $B = \overline{bcda}^9$ ، حيث $B \equiv 0[7]$

1) بيان أنّه إذا كان $a = 7$ فإنّ حيث $A \equiv 0[7]$

$A = 9^3a + 9^2b + 9c + d \Rightarrow 9A = 9^4a + 9^3b + 9^2c + 9d$
$9A = 6560a + 9^3b + 9^2c + 9d + a$
$9A = 6560a + B$

$a = 7 \Rightarrow 6560a \equiv 0[7] \Rightarrow 9A \equiv 0[7]$(تأل $B \equiv 0[7]$)

$\Rightarrow \boxed{A \equiv 0[7]}$ (لأنّ 7 و 9 أوليان فيما بينهما)

2) بيان أنّ العدد $9A - a$ يقبل القسمة على 7

$$9A - a = 6559a + B = \underbrace{7(937a)}_{\equiv 0[7]} + \underbrace{B}_{\equiv 0[7]} \Rightarrow \boxed{9A - a \equiv 0[7]}$$

3) استنتاج أنّه إذا كان A قابلا للقسمة على 7 فإنّ $a = 7$

$$\begin{cases} A \equiv 0[7] \\ 9A - a \equiv 0[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9A \equiv 0[7] \\ 9A - a \equiv 0[7] \end{cases} \Rightarrow a \equiv 0[7] \Rightarrow \boxed{a = 7}$$

4) حل المعادلة $7x - 4y = 1$

$$\begin{cases} 7x - 4y = 1 \\ 7(3) - 4(5) = 1 \end{cases} \Rightarrow 7(x-3) = 4(y-5)$$

$$\begin{cases} 4 \mid 7(x-3) \\ PGCD(4;7) = 1 \end{cases} \Rightarrow 4 \mid x - 3 \Rightarrow x - 3 = 4k \Rightarrow x = 4k + 3$$

$$7(x-3) = 4(y-5) \Rightarrow y - 5 = 7k \Rightarrow y = 7k + 5$$

$$\boxed{S = \{(4k+3; 7k+5)\}; k \in \mathbb{Z}}$$

5) تعيين العدد A حيث $A \equiv 0[7]$

$$c = 0, d = 1, A \equiv 0[7] \Rightarrow a = 7$$

$$\Rightarrow A = 81b + 5104, B = 729b + 16$$

$$\begin{cases} A \equiv 0[7] \\ B \equiv 0[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 81b + 5104 \equiv 0[7] \\ 729b + 16 \equiv 0[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4b + 1 \equiv 0[7] \\ b + 2 \equiv 0[7] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4b \equiv 6[7] \\ b \equiv 5[7] \end{cases} \Rightarrow b \equiv 5[7] \Rightarrow b = 5 \Rightarrow \boxed{A = 5509}$$

حل التمرين 46 :

$\alpha \in \mathbb{R}$ ، $35x - 42y = \alpha \ldots (1)$

1) **تعيين الشرط اللازم والكافي حتى تكون للمعادلة (1) حلول في $\mathbb{Z}^2$**

$PGCD(35, 42) = 7 ; 7 \mid \alpha \Rightarrow \alpha = 7\alpha' ; \alpha' \in \mathbb{R}$

الشرط اللازم والكافي حتى تكون للمعادلة (1) حلول في $\mathbb{Z}^2$ هو أن يكون العدد α مضاعفا للعدد 7

2) $\alpha = 21$

أ- بيان أنّه إذا كان $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإنّ x مضاعف 3

$$35x - 42y = 21 \Rightarrow 5x - 6y = 3 \Rightarrow 5x = 3(2y + 1)$$

$$\begin{cases} 3 \mid 5x \\ PGCD(3; 5) = 1 \end{cases} \Rightarrow 3 \mid x \Rightarrow \boxed{x = 3k}$$

استنتاج حل خاص للمعادلة

$$k = 1 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow 6y = 12 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \boxed{(x_0; y_0) = (3; 2)}$$

ب- حل المعادلة (1)

$$\begin{cases} 5x - 6y = 3 \\ 5(3) - 6(2) = 3 \end{cases} \Rightarrow 5(x - 3) = 6(y - 2)$$

$$\begin{cases} 6 \mid 5(x - 3) \\ PGCD(6; 5) = 1 \end{cases} \Rightarrow 6 \mid x - 3 \Rightarrow x - 3 = 6k \Rightarrow x = 6k + 3$$

$$5(x - 3) = 6(y - 2) \Rightarrow y - 2 = 5k \Rightarrow y = 5k + 2$$

$$\boxed{S_{(1)} = \{(6k + 3; 5k + 2)\} ; k \in \mathbb{Z}}$$

ج- تعيين المجموعة E

$$x^2 - y^2 < 96 \Rightarrow (6k + 3)^2 - (5k + 2)^2 < 96$$

$$\Rightarrow 11k^2 + 16k - 91 < 0 \Rightarrow -3{,}7 < k < 2{,}3$$

$$\Rightarrow k \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \{(-15; -13); (-9; -8); (-3; -3); (3; 2); (9; 7); (15; 12)\}}$$

3) $a = \overline{21}^C$ و $b = \overline{15}^C$ على الترتيب في نظام التعداد ذي الأساس c

أ- تعيين c ، a و b

$$(a ; b) \in S_{(1)} \Rightarrow \begin{cases} 2c + 1 = 6k + 3 \\ c + 5 = 5k + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c + 1 = 6k + 3 \\ 2c + 10 = 10k + 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4k + 1 = 9 \Rightarrow k = 2$$

$$\boxed{c = 5k - 3 = 7 ; a = 2c + 1 = 15 ; b = c + 5 = 12}$$

ب- التحقق أنّ $(a; b)$ تنتمي إلى المجموعة E

$$(15 ; 12) \in E \Rightarrow \boxed{(a; b) \in E}$$

حل التمرين 47 :

$$\boldsymbol{5x - 3y = 2 \ldots (1)}$$

1) بيان أنّ المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا

$PGCD(5;3) = 1 \Rightarrow$ المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا

2) إثبات أنّه إذا كان $(x\,;y)$ حلا للمعادلة (1) فإنّ: $x \equiv 1[3]$

$$5x - 3y = 2 \Rightarrow 2x - 2 = 3y - 3x$$
$$\Rightarrow 2(x-1) = 3(y-x)$$
$$\begin{cases} 3 \mid 2(x-1) \\ PGCD(3;2) = 1 \end{cases} \Rightarrow 3 \mid (x-1) \Rightarrow x - 1 \equiv 0[3] \Rightarrow \boxed{x \equiv 1[3]}$$

<u>طريقة ثانية:</u>

$$5x - 3y = 2 \Rightarrow 5x - 2 = 3y \Rightarrow 5x - 2 \equiv 0[3] \Rightarrow 5x \equiv 2[3]$$
$$\Rightarrow 2x \equiv 2[3] \Rightarrow \boxed{x \equiv 1[3]}$$

3) استنتاج حلول المعادلة (1)

$$5x - 3y = 2 \Rightarrow 3y = 5x - 2 \Rightarrow 3y = 5(3k+1) - 2$$
$$\Rightarrow 3y = 15k + 3 \Rightarrow y = 5k + 1$$
$$\boxed{S_{(1)} = \{(3k+1; 5k+1)\}\,; k \in \mathbb{Z}}$$

4) أ. بيان أنّ $PGCD(x;y) = PGCD(x;2)$

$$PGCD(x;y) = d\,;\ PGCD(x;2) = d'$$
$$\begin{cases} d \mid x \\ d \mid y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid x \\ d \mid 5x - 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid x \\ d \mid 2 \end{cases} \Rightarrow d \mid PGCD(x;2) \Rightarrow d \mid d'$$
$$\begin{cases} d' \mid x \\ d' \mid 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d' \mid x \\ d' \mid x + 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d' \mid x \\ d' \mid y \end{cases} \Rightarrow d' \mid PGCD(x;y) \Rightarrow d' \mid d$$

$d \mid d'$ و $d' \mid d \Rightarrow \boxed{d = d'}$

ب. استنتاج القيم الممكنة لـ $PGCD(x;y)$

$d = PGCD(x;y) \Rightarrow d = PGCD(x;2) \Rightarrow d \mid 2 \Rightarrow$ $\boxed{d = 1 \text{ أو } d = 2}$

ج. تعيين الثنائيات $(x;y)$ التي تحقق: $PGCD(x;y) = 2$

$$PGCD(x\,;y) = 2 \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 0[2] \\ y \equiv 0[2] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3k+1 \equiv 0[2] \\ 5k+1 \equiv 0[2] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \equiv 1[2] \\ k \equiv 1[2] \end{cases}$$
$$\Rightarrow k = 2m + 1\,; m \in \mathbb{Z}$$
$$x = 3(2m+1) + 1 = 6m + 4\,; y = 5(2m+1) + 1 = 10m + 6$$

$$\boxed{S'_{(1)} = \{(6m+4; 10m+6)\}; m \in \mathbb{Z}}$$

حل التمرين 48 :

1. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 8^n على 10

$$8^0 \equiv 1[10]; 8^1 \equiv 8[10]; 8^2 \equiv 4[10]; 8^3 \equiv 2[10]; 8^4 \equiv 6[10];$$
$$8^5 \equiv 8[10]; 8^6 \equiv 4[10]; 8^7 \equiv 2[10]; 8^8 \equiv 6[10]$$

نلاحظ أنّ البواقي دورية باستثناء 1 ، نستنتج إذن أنّ بواقي قسمة 8^n على 10 هي :

$$\boxed{8^{4k} \equiv 6[10]; 8^{4k+1} \equiv 8[10]; 8^{4k+2} \equiv 4[10]; 8^{4k+3} \equiv 2[10]\ ; (k \in \mathbb{N}^*)}$$

2. تعيين باقي قسمة العددين 2^{192} ; 8^{341} على 10

$$8^{341} = 8^{4(85)+1} \Rightarrow \boxed{8^{341} \equiv 8[10]}$$

$$2 \equiv -8[10] \Rightarrow 2^{192} \equiv (-8)^{192}[10] \Rightarrow 2^{192} \equiv 8^{4(48)}[10] \Rightarrow \boxed{2^{192} \equiv 6[10]}$$

<u>طريقة ثانية :</u>

$$2^{192} = (2^3)^{64} = 8^{64} = 8^{4(16)} \Rightarrow 2^{192} \equiv 6[10]$$

3. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $3 \times 8^{4n} + 2^{12n+9} \equiv 0[10]$

$$8^{4n} \equiv 6[10] \Rightarrow 3 \times 8^{4n} \equiv 18[10]\ ; \Rightarrow 3 \times 8^{4n} \equiv 8[10]$$
$$2^{12n+9} = 2^{3(4n+3)} = 8^{4n+3} \Rightarrow 2^{12n+9} \equiv 2[10]$$
$$3 \times 8^{4n} + 2^{12n+9} \equiv 8+2[10] \Rightarrow \boxed{3 \times 8^{4n} + 2^{12n+9} \equiv 0[10]}$$

حل التمرين 49 :

1. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على كل من 5 و 7

$$2^0 \equiv 1[5]; 2^1 \equiv 2[5]; 2^2 \equiv 4[5]; 2^3 \equiv 3[5]; 2^4 \equiv 1[5]$$
$$2^{4k} \equiv 1[5]; 2^{4k+1} \equiv 2[5]; 2^{4k+2} \equiv 4[5]; 2^{4k+3} \equiv 3[5];\ k \in \mathbb{N}$$
$$2^0 \equiv 1[7]; 2^1 \equiv 2[7]; 2^2 \equiv 4[7]; 2^3 \equiv 1[7]$$
$$2^{3k} \equiv 1[7]; 2^{3k+1} \equiv 2[7]; 2^{3k+2} \equiv 4[7]; k \in \mathbb{N}$$

2. تعيين مجموعة قيّم n حتى يكون باقي قسمة 2^n على كل من 5 و 7 هو 2

$$\begin{cases} 2^n \equiv 2[5] \\ 2^n \equiv 2[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 4k+1 \\ n = 3k'+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \equiv 1[4] \\ n \equiv 1[3] \end{cases} \Rightarrow n \equiv 1[12]$$
$$\Rightarrow \boxed{n = 12\alpha + 1\ ;\ \alpha \in \mathbb{N}}$$

3. حل في $\mathbb{N}$ الجملة التالية : $\begin{cases} n-1 \equiv 0[3] \\ (n-1)2^n \equiv 0[7] \end{cases}$

$$\begin{cases} n-1 \equiv 0[3] \\ (n-1)2^n \equiv 0[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 3k+1 \\ 2^{3k+1} \times 3k \equiv 0[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 3k+1 \\ 2 \times 3k \equiv 0[7] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 3k+1 \\ k \equiv 0[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 3k+1 \\ k = 7k' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 21k' + 1\ ;\ k' \in \mathbb{N}}$$

حل التمرين 50 :

1. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n :

أ) $n^3 - n \equiv 0[3]$

$n \equiv$	0	1	2	[3]
$n^3 \equiv$	0	1	2	[3]
$n^3 - n \equiv$	0	0	0	[3]

طريقة ثانية:

$n^3 - n = n(n^2-1) = n(n-1)(n+1)$

- $n \equiv 0[3] \Rightarrow n^3 - n \equiv 0[3]$
- $n \equiv 1[3] \Rightarrow n-1 \equiv 0[3] \Rightarrow n^3 - n \equiv 0[3]$
- $n \equiv 2[3] \Rightarrow n+1 \equiv 0[3] \Rightarrow n^3 - n \equiv 0[3]$

ب) $n^2(n^2-1) \equiv 0[12]$

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n^2 \equiv$	0	1	4	9	4	1	0	1	4	9	4	1
$n^2 - 1 \equiv$	11	0	3	8	3	0	11	0	3	8	3	0
$n^2\ (n^2-1) \equiv$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

طريقة ثانية:

$n^2(n^2-1) \equiv 0[12] \Rightarrow n^2(n^2-1) \equiv 0[3]$ و $n^2(n^2-1) \equiv 0[4]$

$n(n^2-1) \equiv 0[3] \Rightarrow n^2(n^2-1) \equiv 0[3]$

$n^2(n^2-1) \equiv 0[4] \Rightarrow n^2(n-1)(n+1) \equiv 0[4]$

- $n \equiv 0[4] \Rightarrow n^2 \equiv 0[4] \Rightarrow n^2(n^2-1) \equiv 0[4]$
- $n \equiv 1[4] \Rightarrow n-1 \equiv 0[4] \Rightarrow n^2(n^2-1) \equiv 0[4]$
- $n \equiv 2[4] \Rightarrow n^2 \equiv 0[4] \Rightarrow n^2(n^2-1) \equiv 0[4]$
- $n \equiv 3[4] \Rightarrow n+1 \equiv 0[4] \Rightarrow n^2(n^2-1) \equiv 0[4]$

ج) $7n^3 + 35n \equiv 0[42]$

$7n^3 + 35n \equiv 0[42] \Rightarrow 7n^3 + 35n \equiv 0[7]$ و $7n^3 + 35n \equiv 0[6]$

- $7n^3 + 35n = 7n(n^2 + 5) \Rightarrow 7n^3 + 35n \equiv 0[7]$
- $7n^3 + 35n \equiv 0[6] \Rightarrow n^3 - n \equiv 0[6]$

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	[6]
$n^3 \equiv$	0	1	2	3	4	5	[6]
$n^3 - n \equiv$	0	0	0	0	0	0	[6]

2. تعيين قيم العدد الطبيعي n حيث :

أ) $n^2 - 3n + 6 \equiv 0[5]$

$n^2 - 3n + 6 \equiv 0[5] \Rightarrow n^2 - 3n \equiv 4[5]$

$n \equiv$	0	1	2	3	**4**	[5]
$3n \equiv$	0	3	1	4	**2**	[5]
$n^2 \equiv$	0	1	4	4	**1**	[5]
$n^2 - 3n \equiv$	0	3	3	0	**4**	[5]

$n^2 - 3n \equiv 4[5] \Rightarrow n \equiv 4[5] \Rightarrow \boxed{n = 5k + 4\ ;\ k \in \mathbb{N}}$

<u>طريقة ثانية:</u>

$n^2 - 3n + 6 \equiv 0[5] \Rightarrow n^2 - 3n + 6 - 5n + 10 \equiv 0[5] \Rightarrow n^2 - 8n + 16$
$\equiv 0[5] \Rightarrow (n-4)^2 \equiv 0[5]$

$\Rightarrow n - 4 \equiv 0[5] \Rightarrow n \equiv 4[5] \Rightarrow \boxed{n = 5k + 4\ ;\ k \in \mathbb{N}}$

ب) $n + 9 \equiv 0[n+1]$

$n + 9 \equiv 0[n+1] \Rightarrow n + 9 \equiv n + 1[n+1] \Rightarrow 8 \equiv 0[n+1] \Rightarrow (n+1)/8$
$\Rightarrow (n+1) \in \{1; 2; 4; 8\}$
$\Rightarrow \boxed{n \in \{0; 1; 3; 7\}}$

ج) $n^2 + 3n + 8 \equiv 0[n+1]$

$n^2 + 3n + 8 \equiv 0[n+1] \Rightarrow n^2 + 3n + 8 \equiv (n+1)^2 + n + 1[n+1]$

$\Rightarrow n^2 + 3n + 8 \equiv n^2 + 3n + 2[n+1]$

$\Rightarrow 6 \equiv 0[n+1] \Rightarrow (n+1)/6 \Rightarrow (n+1) \in \{1; 2; 3; 6\} \Rightarrow \boxed{n \in \{0; 1; 2; 5\}}$

<u>طريقة ثانية:</u>

$n^2 + 3n + 8 = (n+1)(n+2) + 6\ ;\ n^2 + 3n + 8 \equiv 0[n+1]$

$\Rightarrow 6 \equiv 0[n+1] \Rightarrow (n+1) \mid 6 \Rightarrow (n+1) \in \{1; 2; 3; 6\} \Rightarrow \boxed{n \in \{0; 1; 2; 5\}}$

حل التمرين 51 :

1. **بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $2^{2n-1} \times 3^{n+2} + 1 \equiv 0[11]$**

$2 \equiv -9[11] \Rightarrow 2^{2n-1} \equiv -9^{2n-1}[11] \Rightarrow 2^{2n-1} \equiv -3^{4n-2}[11]$

$\Rightarrow 2^{2n-1} \times 3^{n+2} + 1 \equiv -3^{4n-2} \times 3^{n+2} + 1[11]$

$\Rightarrow 2^{2n-1} \times 3^{n+2} + 1 \equiv -3^{5n} + 1[11]$

$3^5 = 243 \Rightarrow 3^5 \equiv 1[11] \Rightarrow 3^{5n} \equiv 1[11] \Rightarrow -3^5 + 1 \equiv 0[11]$

$\Rightarrow \boxed{2^{2n-1} \times 3^{n+2} + 1 \equiv 0[11]}$

2. **بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $7^n + 12n - 1 \equiv 0[9]$**

$7^0 \equiv 1[9]\ ;\ 7^1 \equiv 7[9]\ ;\ 7^2 \equiv 4[9]\ ;\ 7^3 \equiv 1[9]$

$\boxed{7^{3k} \equiv 1[9]\ ;\ 7^{3k+1} \equiv 7[9]\ ;\ 7^{3k+2} \equiv 4[9]}$

- $n = 3k : 7^n + 12n - 1 = \underbrace{7^{3k}}_{\equiv 1[9]} + \underbrace{36k}_{\equiv 0[9]} - 1 \equiv 0[9]$
- $n = 3k + 1 : 7^n + 12n - 1 = \underbrace{7^{3k+1}}_{\equiv 7[9]} + \underbrace{36k}_{\equiv 0[9]} + \underbrace{11}_{\equiv 2[9]} \equiv 0[9]$
- $n = 3k + 2 : 7^n + 12n - 1 = \underbrace{7^{3k+2}}_{\equiv 4[9]} + \underbrace{36k}_{\equiv 0[9]} + \underbrace{23}_{\equiv 5[9]} \equiv 0[9]$

حل التمرين 52 :

1. **دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 7**

$5^0 \equiv 1[7]\ ;\ 5^1 \equiv 5[7]\ ;\ 5^2 \equiv 4[7]\ ;\ 5^3 \equiv 6[7]\ ;\ 5^4 \equiv 2[7]\ ;$
$5^5 \equiv 3[7]\ ;\ 5^6 \equiv 1[7]$

$5^{6k} \equiv 1[7]\ ;\ 5^{6k+1} \equiv 5[7]\ ;\ 5^{6k+2} \equiv 4[7]\ ;$

$5^{6k+3} \equiv 6[7]\ ;\ 5^{6k+4} \equiv 2[7]\ ;\ 5^{6k+5} \equiv 3[7]$

2. **اثبات أنّ: $19^{6n+3} + 26^{6n+4} + 54^{6n+1} + 1 \equiv 0[7]$**

$19 \equiv 5[7] \Rightarrow 19^{6n+3} \equiv 5^{6n+3}[7] \Rightarrow 19^{6n+3} \equiv 6[7]$
$26 \equiv 5[7] \Rightarrow 26^{6n+4} \equiv 5^{6n+4}[7] \Rightarrow 26^{6n+4} \equiv 2[7]$
$54 \equiv 5[7] \Rightarrow 54^{6n+1} \equiv 5^{6n+1}[7] \Rightarrow 54^{6n+1} \equiv 5[7]$
$19^{6n+3} + 26^{6n+4} + 54^{6n+1} + 1 \equiv 6 + 2 + 5 + 1[7]$

$\Rightarrow \boxed{19^{6n+3} + 26^{6n+4} + 54^{6n+1} + 1 \equiv 0[7]}$

3. تعيين قيم العدد الطبيعي n حيث : $19^{6n+3}+26^{6n+4}+4n^2+4\equiv 0[7]$

$19^{6n+3}+26^{6n+4}+4n^2+4\equiv 0[7]\Rightarrow 8+4n^2+4\equiv 0[7]\Rightarrow 4n^2+12$
$\equiv 0[7]\Rightarrow 4(n^2+3)\equiv 0[7]$

$\Rightarrow n^2+3\equiv 0[7]$ (لأنّ 7 أولي مع 4) $\Rightarrow n^2\equiv 4[7]$

$n\equiv$	0	1	**2**	3	4	**5**	6	[7]
$n^2\equiv$	0	1	**4**	2	2	**4**	1	[7]

$n^2\equiv 4[7]\Rightarrow n\equiv 2[7]$ أو $n\equiv 5[7]\Rightarrow$ $\boxed{n=7k+2 \text{ أو } n=7k+5}$

<u>طريقة ثانية :</u>

$n^2+3\equiv 0[7]\Rightarrow n^2-4\equiv 0[7]\Rightarrow (n-2)(n+2)\equiv 0[7]$

$\Rightarrow n\equiv 2[7]$ أو $n\equiv 5[7]\Rightarrow$ $\boxed{n=7k+2 \text{ أو } n=7k+5}$

حل التمرين 53 :

1. دراسة بواقي قسمة العدد 5^n على 7

$5^0\equiv 1[7]\ ;\ 5^1\equiv 5[7]\ ;\ 5^2\equiv 4[7]\ ;\ 5^3\equiv 6[7]\ ;$
$5^4\equiv 2[7]\ ;\ 5^5\equiv 3[7]\ ;\ 5^6\equiv 1[7]$

$$\boxed{\begin{array}{c}5^{6k}\equiv 1[7]\ ;\ 5^{6k+1}\equiv 5[7]\ ;\ 5^{6k+2}\equiv 4[7]\ ;\ 5^{6k+3}\equiv 6[7]\\ 5^{6k+4}\equiv 2[7]\ ;\ 5^{6k+5}\equiv 3[7]\end{array}}$$

2. تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد 6^{2n} على 7

$6\equiv -1[7]\ \Rightarrow\ 6^{2n}\equiv(-1)^{2n}[7]\Rightarrow\ 6^{2n}\equiv 1[7]$

منه نستنتج أنّ باقي القسمة الإقليدية للعدد 6^{2n} على 7 هو 1

3. تعيين قيم n حيث يقبل العدد $(5^n+6^{2n}+3)$ القسمة على 7

$5^n+\ 6^{2n}+3\equiv 0[7]\Rightarrow 5^n+\ 1+3\equiv 0[7]$
$\Rightarrow 5^n+\ 4\equiv 0[7]\Rightarrow 5^n\equiv 3[7]$
$\Rightarrow$ $\boxed{n=6k+5\ ,k\in\mathbb{N}}$

حل التمرين 54 :

1. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة كل من 3^n و 5^n على 16

$3^0 \equiv 1[16]\ ;\ 3^1 \equiv 3[16]\ ;\ 3^2 \equiv 9[16]\ ;\ 3^3 \equiv 11[16]\ ;\ 3^4 \equiv 1[16]$

$3^{4k} \equiv 1[16]\ ;\ 3^{4k+1} \equiv 3[16]\ ;\ 3^{4k+2} \equiv 9[16]\ ;\ 3^{4k+3} \equiv 11[16]$

$5^0 \equiv 1[16]\ ;\ 5^1 \equiv 5[16]\ ;\ 5^2 \equiv 9[16]\ ;\ 5^3 \equiv 13[16]\ ;\ 5^4 \equiv 1[16]$

$5^{4k} \equiv 1[16]\ ;\ 5^{4k+1} \equiv 5[16]\ ;\ 5^{4k+2} \equiv 9[16]\ ;\ 5^{4k+3} \equiv 13[16]$

2. تعيين باقي قسمة العدد $6^{1996} + 5^{1995} + 3^{1993} + 2^{1992}$ على 16

$2^{1992} = (2^4)^{498} = 16^{498} \Rightarrow 2^{1992} \equiv 0[16]$

$3^{1993} = 3^{4(498)+1} \Rightarrow 3^{1993} \equiv 3[16]$

$5^{1995} = 5^{4(498)+3} \Rightarrow 5^{1995} \equiv 13[16]$

$$6^{1996} = 2^{1996} \times 3^{1996} = 2^{4(499)} \times 3^{4(499)} = \underbrace{16^{499}}_{\equiv 0[16]} \times \underbrace{3^{4(499)}}_{\equiv 1[16]}$$

$\Rightarrow 6^{1996} \equiv 0[16]$

$2^{1992} + 3^{1993} + 5^{1995} + 6^{1996} \equiv 3 + 13[16]$

$$\Rightarrow \boxed{2^{1992} + 3^{1993} + 5^{1995} + 6^{1996} \equiv 0[16]}$$

3. تعيين جميع الثنائيات (x, y) من الأعداد الطبيعية حيث : $3^x + 5^y \equiv 0[16]$

	$x =$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
$y =$	$3^x \equiv$ / $5^y \equiv$	1	3	9	11
$4k'$	1	2	4	10	12
$4k'+1$	5	6	8	14	0
$4k'+2$	9	10	12	2	4
$4k'+3$	13	14	0	6	8

$$\boxed{(x, y) \in \{(4k+1; 4k'+3), (4k+3; 4k'+1)\}\ ;\ (k, k') \in \mathbb{N}^2}$$

حل التمرين 55 :

1. دراسة بواقي قسمة العدد 5^n على 7

$5^0 \equiv 1[7]\ ;\ 5^1 \equiv 5[7]\ ;\ 5^2 \equiv 4[7]\ ;\ 5^3 \equiv 6[7]$

$5^4 \equiv 2[7]\ ;\ 5^5 \equiv 3[7]\ ;\ 5^6 \equiv 1[7]$

$$\boxed{\begin{array}{c} 5^{6k} \equiv 1[7]\ ;\ 5^{6k+1} \equiv 5[7]\ ;\ 5^{6k+2} \equiv 4[7]\ ;\ 5^{6k+3} \equiv 6[7] \\ 5^{6k+4} \equiv 2[7]\ ;\ 5^{6k+5} \equiv 3[7] \end{array}}$$

.2 إثبات أنّ $\mathbf{26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3 \equiv 0[7]}$

$26 \equiv 5[7] \Rightarrow 26^{6n+5} \equiv 5^{6n+5}[7] \Rightarrow \mathbf{26^{6n+5} \equiv 3[7]}$
$47 \equiv 5[7] \Rightarrow 47^{12n+2} \equiv 5^{12n+2}[7]$
$\Rightarrow 47^{12n+2} \equiv 5^{6(2n)+2}[7] \Rightarrow 47^{12n+2} \equiv 4[7]$
$\Rightarrow \mathbf{2 \times 47^{12n+2} \equiv 1[7]}$
$26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3 \equiv 3 + 1 + 3[7]$
$\Rightarrow \boxed{26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3 \equiv 0[7]}$

.3 تعيين قيم $\boldsymbol{n}$ حيث $\mathbf{26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 5n \equiv 0[7]}$

$26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 5n \equiv 0[7]$
$\Rightarrow 3 + 1 + 5n \equiv 0[7] \Rightarrow 5n + 4 \equiv 0[7] \Rightarrow 5n \equiv 3[7]$

$n \equiv$	0	1	**2**	3	4	5	6	[7]
$5n \equiv$	0	5	**3**	1	6	4	2	[7]

$$5n \equiv 3[7] \Rightarrow n \equiv 2[7] \Rightarrow \boxed{n = 7k + 2\ ; k \in \mathbb{N}}$$

<u>طريقة ثانية:</u> لمّا يكون معامل المجهول في الطرف الأول للمعادلة (5) **<u>أوليا</u>** مع الترديد (7)، نضيف الترديد إلى الطرف الثاني للمعادلة (3) حتى نحصل على عدد قابل للقسمة على معامل المجهول ، فيكون حل المعادلة كالتالي:

$$5n \equiv 3[7] \Rightarrow 5n \equiv \underbrace{10}_{3+7}[7] \Rightarrow n \equiv 2[7] \Rightarrow \boxed{n = 7k + 2\ ; k \in \mathbb{N}}$$

حل التمرين 56 :

.1 دراسة حسب قيم العدد الطبيعي $\boldsymbol{n}$ بواقي قسمة العددين $\mathbf{4^n}$ و $\mathbf{5^n}$ على 9

$4^0 \equiv 1[9]\ ;\ 4^1 \equiv 4[9]\ ;\ 4^2 \equiv 7[9]\ ;\ 4^3 \equiv 1[9]$
$\Rightarrow 4^{3k} \equiv 1[9]\ ;\ 4^{3k+1} \equiv 4[9]\ ;\ 4^{3k+2} \equiv 7[9]; k \in \mathbb{N}$
$8^0 \equiv 1[9];\ 8^1 \equiv 8[9];\ 8^2 \equiv 1[9] \Rightarrow 8^{2k} \equiv 1[9];\ 8^{2k+1} \equiv 8[9]\ ; k \in \mathbb{N}$

2. تعيين باقي قسمة الأعداد التالية على 9 : 32^{2006}; 16^{197}; 22^{301}; 10^{35}

$32 \equiv -4[9] \Rightarrow 32^{2006} \equiv (-4)^{2006}[9] \Rightarrow 32^{2006} \equiv 4^{3(668)+2}[9] \Rightarrow 32^{2006} \equiv 7[9]$

$16^{197} = (4^2)^{197} = 4^{394} = 4^{3(131)+1} \Rightarrow 16^{197} \equiv 4[9]$

$22 \equiv 4[9] \Rightarrow 22^{301} \equiv 4^{301}[9] \Rightarrow 22^{301} \equiv 4^{3(100)+1}[9] \Rightarrow 22^{301} \equiv 4[9]$

$10 \equiv 1[9] \Rightarrow 10^{35} \equiv 1[9]$

3. إثبات أنّ العدد $(3 \times 64^n + 2006^{2n+1} - 2 \times 2002^{3n+1} + 6)$ يقبل القسمة على 9

$64 \equiv 1[9] \Rightarrow 64^n \equiv 1[9] \Rightarrow 3 \times 64^n \equiv 3[9]$

$2006 \equiv 8[9] \Rightarrow 2006^{2n+1} \equiv 8^{2n+1}[9] \Rightarrow 2006^{2n+1} \equiv 8[9]$

$2002 \equiv 4[9] \Rightarrow 2002^{3n+1} \equiv 4^{3n+1}[9] \Rightarrow 2002^{3n+1} \equiv 4[9]$

$\Rightarrow 2 \times 2002^{3n+1} \equiv 8[9]$

$3 \times 64^n + 2006^{2n+1} - 2 \times 2002^{3n+1} + 6 \equiv 3 + 8 - 8 + 6[9] \equiv 0[9]$

4. تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون 6 باقي قسمة $(2006^n - 2002^n)$ على 9

$2006^n \equiv 8^n[9]\,;\; 2002^n \equiv 4^n[9]\,;\; 2006^n - 2002^n \equiv 6[9]$

$\Rightarrow 8^n - 4^n \equiv 6[9]$

بما أن بواقي قسمة 4^n و 8^n على 9 لها دورين مختلفين (2 و 3) ، نأخذ المضاعف المشترك الأصغر لهذين الدورين :

$n =$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$\boldsymbol{6k+4}$	$6k+5$	
$8^n \equiv$	1	8	1	8	**1**	8	[9]
$4^n \equiv$	1	4	7	1	**4**	7	[9]
$8^n - 4^n \equiv$	0	4	3	7	**6**	1	[9]

$$\boxed{8^n - 4^n \equiv 6[9] \Rightarrow n = 6k + 4\,;\, k \in \mathbb{N}}$$

حل التمرين 57 :

1. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 13

$5^0 \equiv 1[13];\; 5^1 \equiv 5[13];\; 5^2 \equiv 12[13];\; 5^3 \equiv 8[13];\; 5^4 \equiv 1[13]$

$$\boxed{5^{4k} \equiv 1[13];\; 5^{4k+1} \equiv 5[13];\; 5^{4k+2} \equiv 12[13];\; 5^{4k+3} \equiv 8[13]\,;\, k \in \mathbb{N}}$$

2. إثبات أنّ: $\mathbf{18^{4n} + 31^{4n+1} + 57^{4n+3} - 1 \equiv 0[13]}$

$18 \equiv 5[13] \Rightarrow 18^{4n} \equiv 5^{4n}[13] \Rightarrow 18^{4n} \equiv 1[13]$
$31 \equiv 5[13] \Rightarrow 31^{4n+1} \equiv 5^{4n+1}[13] \Rightarrow 31^{4n+1} \equiv 5[13]$
$57 \equiv 5[13] \Rightarrow 57^{4n+3} \equiv 5^{4n+3}[13] \Rightarrow 57^{4n+3} \equiv 8[13]$
$18^{4n} + 31^{4n+1} + 57^{4n+3} - 1 \equiv 1 + 5 + 8 - 1[13]$

$$\Rightarrow \boxed{18^{4n} + 31^{4n+1} + 57^{4n+3} - 1 \equiv 0[13]}$$

3. تعيين قيم العدد الطبيعي n حيث :

$\mathbf{10 \leq n \leq 40}$ و $\mathbf{18^{4n} + 31^{4n+1} + 2n \equiv 0[13]}$

$18^{4n} + 31^{4n+1} + 2n \equiv 0[13] \Rightarrow 2n + 6 \equiv 0[13] \Rightarrow 2n \equiv 7[13]$

$$\Rightarrow 2n \equiv 20[13] \Rightarrow n \equiv 10[13] \Rightarrow n = 13k + 10$$

- $k = 0 : n = 10$
- $k = 1 : n = 23$
- $k = 2 : n = 36$

4. تعيين الأعداد الطبيعية n حتى يكون $\mathbf{n^2 - 57^{4n}}$ قابلا للقسمة على 13

$n^2 - 57^{4n} \equiv 0[13] \Rightarrow n^2 - 1 \equiv 0[13] \Rightarrow n^2 \equiv 1[13]$

$n \equiv$	0	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	**12**
$n^2 \equiv$	0	**1**	4	9	3	12	10	10	12	3	9	4	**1**

$n^2 \equiv 1[13] \Rightarrow n \equiv 1[13]$ أو $n \equiv 12[13]$

$\Rightarrow \boxed{n = 13k + 1 \text{ أو } n = 13k + 12 \,;\, k \in \mathbb{N}}$

<u>طريقة ثانية (تُستعمل لمّا يكون الترديد عددا أوليا) :</u>

$n^2 - 1 \equiv 0[13] \Rightarrow (n-1)(n+1) \equiv 0[13] \Rightarrow n - 1 \equiv 0[13]$ أو $n + 1 \equiv 0[13]$

$\Rightarrow n \equiv 1[13]$ أو $n \equiv 12[13]$

حل التمرين 58 :

1. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد $\mathbf{3^n}$ على 7

$3^{6k} \equiv 1[7]\,;\; 3^{6k+1} \equiv 3[7]\,; 3^{6k+2} \equiv 2[7]\,; 3^{6k+3} \equiv 6[7]\,;$
$3^{6k+4} \equiv 4[7]\,; 3^{6k+5} \equiv 5[7]$

2. برهان أنّ : $\mathbf{25^{3n} \times 4^{3n+1} + 100^{3n+1} + 1 \equiv 0[7]}$

$25 \equiv 4[7] \Rightarrow 25^{3n} \equiv 4^{3n}[7] \Rightarrow 25^{3n} \times 4^{3n+1} \equiv 4^{6n+1}[7]$

$$\Rightarrow 25^{3n} \times 4^{3n+1} \equiv -3^{6n+1}[7]$$

$100 \equiv 3^2[7] \Rightarrow 100^{3n+1} \equiv 3^{6n+2}[7] \Rightarrow 100^{3n+1} \equiv 2[7]$

$25^{3n} \times 4^{3n+1} + 100^{3n+1} + 1 \equiv -3 + 2 + 1[7]$

$\Rightarrow \boxed{25^{3n} \times 4^{3n+1} + 100^{3n+1} + 1 \equiv 0[7]}$

3. تعيين قيّم n بحيث يقبل العدد $n^2 + n \times 71^{6n} + 31^{6n+3} - 5$ القسمة على 7

$71 \equiv 1[7] \Rightarrow 71^{6n} \equiv 1[7]$

$31 \equiv 3[7] \Rightarrow 31^{6n+3} \equiv 3^{6n+3}[7] \Rightarrow 31^{6n+3} \equiv 6[7]$

$n^2 + n \times 71^{6n} + 31^{6n+3} - 5 \equiv 0[7] \Rightarrow n^2 + n + 1 \equiv 0[7]$

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$n^2 \equiv$	0	1	4	2	2	4	1	[7]
$n^2 + n + 1 \equiv$	1	3	0	6	0	3	1	[7]

$n^2 + n + 1 \equiv 0[7] \Rightarrow n \equiv 2[7]$ أو $n \equiv 4[7]$

$\Rightarrow$ $\boxed{n = 7\alpha + 2 \text{ أو } n = 7\alpha + 4\, ; \alpha \in \mathbb{N}}$

4. إيجاد الأعداد الصحيحة x التي تحقق : $17^{3n+2} \times 2x - 38^{3n+1} \equiv 0[7]$ ،

$17 \equiv 3[7] \Rightarrow 17^{3n+2} \equiv 3^{3n+2}[7]\, ; 38 \equiv 3[7] \Rightarrow 38^{3n+1} \equiv 3^{3n+1}[7]$

$17^{3n+2} \times 2x - 38^{3n+1} \equiv 0[7] \Rightarrow 3^{3n+2} \times 2x - 3^{3n+1} \equiv 0[7]$

$\Rightarrow 3^{3n+1}(6x - 1) \equiv 0[7] \xRightarrow[\text{لأنّ 3 أولي مع 7}]{} 6x - 1 \equiv 0[7] \Rightarrow -x \equiv 1[7]$

$\Rightarrow x \equiv 6[7] \Rightarrow \boxed{x = 7k + 6\, ; k \in \mathbb{Z}}$

استنتاج قيم x حيث $|x - 4| \leq 10$

$|x - 4| \leq 10 \Rightarrow -10 \leq x - 4 \leq 10 \Rightarrow -10 \leq 7k + 2 \leq 10$

$\Rightarrow -\dfrac{12}{7} \leq k \leq \dfrac{8}{7} \Rightarrow k \in \{-1; 0; 1\} \quad \Rightarrow \boxed{x \in \{-1; 6; 13\}}$

5. $A = \overline{2n1n2n1n}^3$ و $B = \overline{20102010}^3$

أ. تعيين العدد الطبيعي n حيث : $A \equiv 0[7]$

$A = \overline{2n1n2n1n}^3 = 4674 + 820n\, ;\ B = \overline{20102010}^3 = 4674$

$A \equiv 0[7] \Rightarrow 4674 + 820n \equiv 0[7] \Rightarrow 5 + n \equiv 0[7] \Rightarrow n \equiv 2[7] \Rightarrow \boxed{n = 2}$

ب. حساب $A + B$ في النظام ذي الأساس 3

$A + B = \overline{22122212}^3 + \overline{20102010}^3$

$A + B = 4(3^7) + 2(3^6) + 2(3^5) + 2(3^4) + 4(3^3) + 2(3^2) + 2(3) + 2$

$= (3 + 1)(3^7) + 2(3^6) + 2(3^5) + 2(3^4) + (3 + 1)(3^3) + 2(3^2) + 2(3) + 2$

$= 3^8 + 3^7 + 2(3^6) + 2(3^5) + 2(3^4) + 3^4 + 3^3 + 2(3^2) + 2(3) + 2$

$= 3^8 + 2(3^7) + 3^3 + 2(3^2) + 2(3) + 2 \Rightarrow \boxed{A + B = \overline{120001222}^3}$

طريقة ثانية : نجمع العددين في النظام ذي الأساس 3 ونحتفظ بما زاد عن 3 إذا كان المجموع أكبر من 3

الاحتفاظ	1	1	1	1	1				
$A =$		2	2	1	2	2	2	1	2
$B =$		2	0	1	0	2	0	1	0
$A+B =$	1	2	0	0	0	1	2	2	2

ج. كتابة $A+B$ في النظام ذي الأساس 7

$$A+B = 4674 + 820(2) + 4674 = 10988 = \boxed{\overline{44015}^{7}}$$

حل التمرين 59 :

1. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $3x+5y=65 \dots (1)$

أ. بيان أنّه إذا كان $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإنّ x مضاعف للعدد 5

$$3x+5y=65 \Rightarrow 3x = 5(13-y) \Rightarrow 3x \equiv 0[5]$$

$$\Rightarrow x \equiv 0[5] (\text{لأنّ 3 أولي مع 5}) \Rightarrow \boxed{x=5k}$$

ب. استنتاج حلول المعادلة (1)

$$x=5k \Rightarrow 5y = -3(5k)+65 \Rightarrow 5y = 5(-3k+13) \Rightarrow y = -3k+13$$

$$\boxed{S = \{(5k; -3k+13)\}; k \in \mathbb{Z}}$$

2. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9

$$7^0 \equiv 1[9]\ ;\ 7^1 \equiv 7[9]\ ;\ 7^2 \equiv 4[9]\ ;\ 7^3 \equiv 1[9]$$

$$\Rightarrow \boxed{7^{3k} \equiv 1[9]\ ;\ 7^{3k+1} \equiv 7[9]\ ;\ 7^{3k+2} \equiv 4[9]}$$

3. تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $5+7^{67-5n} \equiv 0[9]$

$$7^{67-5n} = 7^{3(22-2n)+n+1} = \underbrace{7^{3(22-2n)}}_{\equiv 1[9]} \times 7^{n+1} \Rightarrow 7^{67-5n} \equiv 7^{n+1}[9]$$

$$5+7^{67-5n} \equiv 0[9] \Rightarrow \begin{cases} 5+7^{n+1} \equiv 0[9] \\ 67-5n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7^{n+1} \equiv 4[9] \\ 0 \leq n \leq \dfrac{67}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+1 = 3k+2 \\ 0 \leq n \leq \dfrac{67}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 3k+1 \\ 0 \leq 3k+1 \leq \dfrac{67}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 3k+1 \\ -0{,}33 \leq k \leq 4{,}13 \end{cases} \Rightarrow k \in \{0;1;2;3;4\} \Rightarrow \boxed{n \in \{1;4;7;10;13\}}$$

حل التمرين 60 :

1. **تعيين الأعداد الصحيحة x حيث : $7x \equiv -19[9]$**

$7x \equiv -19[9] \Rightarrow 7x \equiv 35[9] \Rightarrow x \equiv 5[9] \Rightarrow x = 9k + 5\,; k \in \mathbb{Z}$

2. **استنتاج في مجموعة الأعداد الصحيحة حلول المعادلة (1) ... $7x - 9y = -19$**

$7x - 9y = -19 \Rightarrow 7x = 9y - 19 \Rightarrow 7x \equiv -19[9]$

$\Rightarrow x = 9k + 5\,; k \in \mathbb{Z}$

$9y = 7x + 19 \Rightarrow 9y = 7(9k + 5) + 19 \Rightarrow 9y = 63k + 54$

$\Rightarrow y = 7k + 6\ \ ; k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{S = \{(9k + 5\,; 7k + 6)\}\,; k \in \mathbb{Z}}$

3. **تعيين حلول المعادلة (1) التي تحقق: $x \equiv 0[y]$ (أي y يقسم x)**

$y \mid x \Rightarrow (7k + 6) \mid (9k + 5) \Rightarrow (7k + 6) \mid 9(7k + 6) - 7(9k + 5)$

$\Rightarrow (7k + 6) \mid 19$

$\Rightarrow (7k + 6) \in \{-19; -1; 1; 19\} \Rightarrow 7k \in \{-25; -7; -5; 13\} \Rightarrow k = -1$

$\Rightarrow \boxed{(x; y) = (-4; -1)}$

4. **تعيين α و β ، ثمّ كتابة العدد n في النظام العشري**

$n = \overline{2\alpha5}^7 = \overline{1\beta3}^9 \Rightarrow 2(7)^2 + 7\alpha + 5 = 9^2 + 9\beta + 3$

$\Rightarrow 7\alpha - 9\beta = -19 \Rightarrow (\alpha; \beta) = (9k + 5\,; 7k + 6)$

$\begin{cases} 0 \le \alpha < 7 \\ 0 \le \beta < 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le 9k + 5 < 7 \\ 0 \le 7k + 6 < 9 \end{cases} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 5\,;\ \beta = 6\,; n = 138}$

حل التمرين 61 :

1. **دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 4^n على 7**

$4^0 \equiv 1[7]\,;\ 4^1 \equiv 4[7]\,;\ 4^2 \equiv 2[7]\,;\ 4^3 \equiv 1[7]$

$\Rightarrow \boxed{4^{3k} \equiv 1[7]\,;\ 4^{3k+1} \equiv 4[7]\,;\ 4^{3k+2} \equiv 2[7]}$

2. **استنتاج باقي قسمة العدد $(3 \times 11^{3n-1} - 3^{2004})$ على 7**

$11 \equiv 4[7] \Rightarrow 11^{3n-1} \equiv 4^{3(n-1)+2}[7] \Rightarrow 11^{3n-1} \equiv 2[7]$

$\Rightarrow 3 \times 11^{3n-1} \equiv 6[7]$

$3 \equiv -4[7] \Rightarrow 3^{2004} \equiv (-4)^{2004}[7] \Rightarrow 3^{2004} \equiv 4^{3(668)}[7] \quad \Rightarrow 3^{2004}$

$\equiv 1[7]$

$3 \times 11^{3n-1} - 3^{2004} \equiv 6 - 1[7] \Rightarrow \boxed{3 \times 11^{3n-1} - 3^{2004} \equiv 5[7]}$

3. تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(6^{n^2+n+1}+18^{n+1}\right)$ مضاعفا لـ 7

$6\equiv -1[7] \Rightarrow 6^{n^2+n+1}\equiv(-1)^{n(n+1)+1}[7] \Rightarrow 6^{n^2+n+1}\equiv -1[7]$

$18\equiv 4[7] \Rightarrow 18^{n+1}\equiv 4^{n+1}[7]$

$6^{n^2+n+1}+18^{n+1}\equiv 0[7] \Rightarrow 4^{n+1}-1\equiv 0[7] \Rightarrow 4^{n+1}\equiv 1[7]$

$\Rightarrow n+1=3k \Rightarrow \boxed{n=3k-1\,;k\in\mathbb{N}^*}$

4. برهان أنّ العدد $4^a\times 4^b\times 4^c-1$ يقبل القسمة على 7

$4^a\times 4^b\times 4^c-1=4^{a+b+c}-1=4^{3b}-1$

$\Rightarrow 4^a\times 4^b\times 4^c-1\equiv 4^{3b}-1[7]$

$4^{3b}\equiv 1[7] \Rightarrow 4^{3b}-1\equiv 0[7] \Rightarrow \boxed{4^a\times 4^b\times 4^c-1\equiv 0[7]}$

حل التمرين 62 :

1. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على 7

$3^0\equiv 1[7]\,;\ 3^1\equiv 3[7]\,;\ 3^2\equiv 2[7]\,;\ 3^3\equiv 6[7]\,;\ 3^4\equiv 4[7]\,;$

$3^5\equiv 5[7]\,;\ 3^6\equiv 1[7]$

$$\boxed{\begin{matrix}3^{6k}\equiv 1[7]\,;\ 3^{6k+1}\equiv 3[7]\,;\ 3^{6k+2}\equiv 2[7]\,;\\ 3^{6k+3}\equiv 6[7]\,;\ 3^{6k+4}\equiv 4[7]\,;\ 3^{6k+5}\equiv 5[7]\end{matrix}}$$

2. استنتاج باقي قسمة العدد 2005^{2007} على 7

$2005\equiv 3[7] \Rightarrow 2005^{2007}\equiv 3^{2007}[7] \Rightarrow 2005^{2007}\equiv 3^{6(334)+3}[7]$

$\Rightarrow \boxed{2005^{2007}\equiv 6[7]}$

3. برهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $n\times 3^{2n}+3n\equiv 0[4]$

$3\equiv -1[4] \Rightarrow 3^{2n}\equiv(-1)^{2n}[4] \Rightarrow 3^{2n}\equiv 1[4] \Rightarrow n\times 3^{2n}\equiv n[4]$

$3\equiv -1[4] \Rightarrow 3n\equiv -n[4] \Rightarrow \boxed{n\times 3^{2n}+3n\equiv 0[4]}$

4. تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $(n\times 3^{2n}+3n)$ مضاعفا للعدد 28

$n\times 3^{2n}+3n\equiv 0[28] \Rightarrow \begin{cases} n\times 3^{2n}+3n\equiv 0[4]\text{(محقّقة)}\\ n\times 3^{2n}+3n\equiv 0[7]\end{cases}$

$n\times 3^{2n}+3n\equiv 0[7] \Rightarrow 3n(3^{2n-1}+1)\equiv 0[7]$

$\Rightarrow n\equiv 0[7]$ أو $3^{2n-1}+1\equiv 0[7]$

$3^{2n-1}+1\equiv 0[7] \Rightarrow 3^{2n-1}\equiv 6[7] \Rightarrow 2n-1=6k+3 \Rightarrow n=3k+2$

$\boxed{n\times 3^{2n}+3n\equiv 0[28] \Rightarrow n=7k \text{ أو } n=3k+2\,;k\in\mathbb{N}}$

حل التمرين 63 :

1. **دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على 63**

$2^0 \equiv 1[63]\ ;\ 2^1 \equiv 2[63]\ ;\ 2^2 \equiv 4[63]\ ;\ 2^3 \equiv 8[63]\ ;\ 2^4 \equiv 16[63]\ ;$
$2^5 \equiv 32[63]\ ;\ 2^6 \equiv 1[63]$

$$\boxed{\begin{array}{c} 2^{6k} \equiv 1[63]\ ;\ 2^{6k+1} \equiv 2[63]\ ;\ 2^{6k+2} \equiv 4[63]\ ; \\ 2^{6k+3} \equiv 8[63]\ ;\ 2^{6k+4} \equiv 16[63]\ ;\ 2^{6k+5} \equiv 32[63] \end{array}}$$

2. **نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:**

$$\boldsymbol{Y_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n+1}} \text{ ، } \boldsymbol{X_n = 4^{3n} + 4^{3n+1} + 4^{3n+2} - 84}$$

أ. **برهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $\boldsymbol{X_n \equiv 0[63]}$**

$X_n = 4^{3n} + 4^{3n+1} + 4^{3n+2} - 84 = 2^{6n} + 2^{6n+2} + 2^{6n+4} - 84$

$84 \equiv 21[63] \Rightarrow X_n \equiv 1 + 4 + 16 - 21[63] \Rightarrow \boxed{X_n \equiv 0[63]}$

اثبات أنّ X_n مضاعف للعدد 252

$X_n = 4^{3n} + 4^{3n+1} + 4^{3n+2} - 84 = 4(4^{3n-1} + 4^{3n} + 4^{3n+1} - 21)$
$\Rightarrow X_n \equiv 0[4]$

$\begin{cases} X_n \equiv 0[63] \\ X_n \equiv 0[4] \end{cases} \Rightarrow X_n \equiv 0[63 \times 4]\big($لأنّ 63 أولي مع 4$\big) \Rightarrow \boxed{X_n \equiv 0[252]}$

ب. **تعيين قيم العدد الطبيعي n حيث :** $\begin{cases} \boldsymbol{X_n \equiv 0[7]} \\ \boldsymbol{Y_n \equiv 0[63]} \end{cases}$

$Y_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 2$

$X_n \equiv 0[63] \Rightarrow X_n \equiv 0[7]$ و $X_n \equiv 0[9]$ (محقّقة من أجل كل عدد طبيعي n)

$Y_n \equiv 0[63] \Rightarrow 2^{n+2} - 2 \equiv 0[63] \Rightarrow 2^{n+2} \equiv 2[63] \Rightarrow n + 2 = 6k + 1$
$\Rightarrow \boxed{n = 6k - 1\ ; k \in \mathbb{N}^*}$

حل التمرين 64 :

1. **دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 9^n على 13**

$9^0 \equiv 1[13]\ ;\ 9^1 \equiv 9[13]\ ;\ 9^2 \equiv 3[13]\ ;\ 9^3 \equiv 1[13]$

$\boxed{9^{3k} \equiv 1[13]\ ;\ 9^{3k+1} \equiv 9[13]\ ;\ 9^{3k+2} \equiv 3[13]}$

2. **برهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $\boldsymbol{12^{2n} + 9^{3n+1} + 3^{3n-2} \equiv 0[13]}$**

$12 \equiv -1[13] \Rightarrow 12^{2n} \equiv 1[13]\ ;\ 9^{3n+1} \equiv 9[13]$

$3^{3n-2} = 3^{3(n-1)+1} = 3 \times 3^{3(n-1)} = 3 \times 27^{n-1}\ ; 27 \equiv 1[13]$

$\Rightarrow 27^{n-1} \equiv 1[13] \Rightarrow 3 \times 27^{n-1} \equiv 3[13]$

$12^{2n} + 9^{3n+1} + 3^{3n-2} \equiv 1 + 9 + 3[13]$

$\Rightarrow \boxed{12^{2n} + 9^{3n+1} + 3^{3n-2} \equiv 0[13]}$

3. تعيين قيم العدد الطبيعي n حيث : $22^{3n+2} + 2 \times 35^{6n+2} + 5n \equiv 0[13]$

$22 \equiv 9[13] \Rightarrow 22^{3n+2} \equiv 9^{3n+2}[13] \Rightarrow 22^{3n+2} \equiv 3[13]$

$35 \equiv 9[13] \Rightarrow 35^{6n+2} \equiv 9^{3(2n)+2}[13] \Rightarrow 35^{6n+2} \equiv 3[13] \Rightarrow 2 \times 35^{6n+2} \equiv 6[13]$

$22^{3n+2} + 2 \times 35^{6n+2} + 5n \equiv 0[13] \Rightarrow 5n + 9 \equiv 0[13] \Rightarrow 5n \equiv 4[13]$

$\Rightarrow 5n \equiv 30[13] \Rightarrow n \equiv 6[13] \Rightarrow \boxed{n = 13k + 6\,; k \in \mathbb{N}}$

4. تعيين قيم العدد الطبيعي n حيث : $\begin{cases} n + 7 \equiv 0[13] \\ 9^n + 10 \equiv 0[13] \end{cases}$

$\begin{cases} n + 7 \equiv 0[13] \\ 9^n + 10 \equiv 0[13] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \equiv 6[13] \\ 9^n \equiv 3[13] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 13k + 6 \\ n = 3k' + 2 \end{cases}$

$13k + 6 = 3k' + 2 \Rightarrow 13k = 3k' - 4 \Rightarrow 13k \equiv -4[3] \Rightarrow k \equiv 2[3]$

$\Rightarrow k = 3\alpha + 2 \Rightarrow n = 13(3\alpha + 2) + 6 \Rightarrow \boxed{n = 39\alpha + 32\,;\ \alpha \in \mathbb{N}}$

حل التمرين 65 :

1. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^{3n} على 31

$5^{3n} = (5^3)^n = 125^n\,; 125 \equiv 1[31] \Rightarrow 125^n \equiv 1[31] \Rightarrow \boxed{5^{3n} \equiv 1[31]}$

2. استنتاج باقي قسمة العددين 5^{3n+1} و 5^{3n+2} على 31

$5^{3n+1} = 5^{3n} \times 5 \Rightarrow \boxed{5^{3n+1} \equiv 5[31]}$

$5^{3n+2} = 5^{3n} \times 5^2 \Rightarrow \boxed{5^{3n+2} \equiv 25[31]}$

3. تعيين باقي قسمة العدد $5^{3n+2} + 36^{3n+1} + 6^{6n+2}$ على 31

$36 \equiv 5[31] \Rightarrow 36^{3n+1} \equiv 5^{3n+1}[31] \Rightarrow 36^{3n+1} \equiv 5[31]$

$6^{6n+2} = 6^{2(3n+1)} = 36^{3n+1} \Rightarrow 6^{6n+2} \equiv 5^{3n+1}[31] \Rightarrow 6^{6n+2} \equiv 5[31]$

$5^{3n+2} + 36^{3n+1} + 6^{6n+2} \equiv 25 + 5 + 5[31]$

$\Rightarrow \boxed{5^{3n+2} + 36^{3n+1} + 6^{6n+2} \equiv 4[31]}$

4. حل في المجموعة $\mathbb{Z}$ المعادلة : $\mathbf{5^{3n+2} + 36^{3n+1} + x \equiv 0[31]}$

$$\underbrace{5^{3n+2}}_{\equiv 25[31]} + \underbrace{36^{3n+1}}_{\equiv 5[31]} + x \equiv 0[31] \Rightarrow x + 30 \equiv 0[31] \Rightarrow x \equiv 1[31]$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 31k + 1\,; k \in \mathbb{Z}}$$

5. تعيين قيم العدد الصحيح m حيث : $\mathbf{5^{3m} + 36^{3m+1} + m^2 \equiv 3[31]}$

$$\underbrace{5^{3m}}_{\equiv 1[31]} + \underbrace{36^{3m+1}}_{\equiv 5[31]} + m^2 \equiv 3[31] \Rightarrow m^2 + 6 \equiv 3[31] \Rightarrow m^2 + 3 \equiv 0[31]$$

$$\Rightarrow m^2 - 121 \equiv 0[31]$$

$$\Rightarrow (m-11)(m+11) \equiv 0[31] \Rightarrow m \equiv 11[31] \text{ أو } \Rightarrow m \equiv 20[31]$$

$$\Rightarrow \boxed{m = 31k + 11 \text{ أو } m = 31k + 20}$$

6. n عدد طبيعي لا يقبل القسمة على 3

أ. القيم الممكنة للعدد n هي : $n = 3\alpha + 1$ أو $n = 3\alpha + 2$ حيث $\alpha \in \mathbb{N}$

ب. اثبات أنّ : $\mathbf{5^{2n} + 5^n + 1 \equiv 0[31]}$

- $\underline{\boldsymbol{n = 3\alpha + 1}}$: $5^{2n} + 5^n + 1 = 5^{6\alpha+2} + 5^{3\alpha+1} + 1$

$$= 5^{3(2\alpha)+2} + 5^{3\alpha+1} + 1$$

$$5^{3(2\alpha)+2} + 5^{3\alpha+1} + 1 \equiv 25 + 5 + 1[31] \Rightarrow \boxed{5^{2n} + 5^n + 1 \equiv 0[31]}$$

- $\underline{\boldsymbol{n = 3\alpha + 2}}$: $5^{2n} + 5^n + 1 = 5^{6\alpha+4} + 5^{3\alpha+2} + 1$

$$= 5^{3(2\alpha+1)+1} + 5^{3\alpha+2} + 1$$

$$5^{3(2\alpha+1)+1} + 5^{3\alpha+2} + 1 \equiv 5 + 25 + 1[31]$$

$$\Rightarrow \boxed{5^{2n} + 5^n + 1 \equiv 0[31]}$$

حل التمرين 66 :

1. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العددين 2^n و3^n على 7

$$2^0 \equiv 1[7]\,; 2^1 \equiv 2[7]\,; 2^2 \equiv 4[7]\,; 2^3 \equiv 1[7]$$

$$\Rightarrow \boxed{2^{3k} \equiv 1[7]\,; 2^{3k+1} \equiv 2[7]\,; 2^{3k+2} \equiv 4[7]}$$

$$3^0 \equiv 1[7]\,; 3^1 \equiv 3[7]\,; 3^2 \equiv 2[7]\,; 3^3 \equiv 6[7]\,; 3^4 \equiv 4[7]\,; 3^5 \equiv 5[7]\,;$$
$$3^6 \equiv 1[7]$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 3^{6k} \equiv 1[7]\,; 3^{6k+1} \equiv 3[7]\,; 3^{6k+2} \equiv 2[7] \\ 3^{6k+3} \equiv 6[7]\,; 3^{6k+4} \equiv 4[7]\,; 3^{6k+5} \equiv 5[7] \end{array}}$$

2. استنتاج باقي قسمة العدد $2956 \times 2005^{2004} - 1426^{1425} + 5$ على 7

$$2956 \times 2005^{2004} \equiv 2 \times 3^{6(334)}[7] \equiv 2[7]$$
$$1426^{1425} \equiv -2^{3(475)}\ [7] \Rightarrow 1426^{1425} \equiv -1\ [7]$$
$$2956 \times 2005^{2004} - 1426^{1425} + 5 \equiv 2 + 1 + 5[7] \equiv 1[7]$$

3. تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون S_n قابلا للقسمة على 7

$$S_n = (2^0 - 4) + (2^1 - 4) + \cdots + (2^n - 4) = 2^{n+1} - 1 - 4(n+1)$$
$$= 2^{n+1} - 4n - 5$$
$$S_n \equiv 0[7] \Rightarrow 2^{n+1} - 4n - 5 \equiv 0[7] \Rightarrow 4(2^{n-1} - n) \equiv 5[7] \Rightarrow 2^{n-1} - n \equiv 3[7]$$

- $n - 1 = 3k \ \Rightarrow n = 3k + 1 :\ 2^{n-1} - n \equiv 3[7]$
  $\Rightarrow 2^{3k} - 3k - 1 \equiv 3[7] \Rightarrow -3k \equiv 3[7]$
  $\Rightarrow k \equiv -1[7] \Rightarrow k \equiv 6[7] \Rightarrow k = 7\alpha + 6$
  $\Rightarrow n = 3(7\alpha + 6) + 1 = 21\alpha + 19$
- $n - 1 = 3k + 1 \ \Rightarrow n = 3k + 2 :\ 2^{n-1} - n \equiv 3[7]$
  $\Rightarrow 2^{3k+1} - 3k - 2 \equiv 3[7] \Rightarrow -3k \equiv 3[7]$
  $\Rightarrow k \equiv -1[7] \Rightarrow k \equiv 6[7] \Rightarrow k = 7\alpha + 6$
  $\Rightarrow n = 3(7\alpha + 6) + 2 = 21\alpha + 20$
- $n - 1 = 3k + 2 \ \Rightarrow n = 3k + 3 :\ 2^{n-1} - n \equiv 3[7]$
  $\Rightarrow 2^{3k+2} - 3k - 3 \equiv 3[7] \Rightarrow -3k + 1 \equiv 3[7]$
  $\Rightarrow -3k \equiv 2[7] \Rightarrow k \equiv 4[7] \Rightarrow k = 7\alpha + 4$
  $\Rightarrow n = 3(7\alpha + 4) + 3 = 21\alpha + 15$

$$\boxed{S_n \equiv 0[7] \Rightarrow n \in \{21\alpha + 15\ ;\ 21\alpha + 19\ ;\ 21\alpha + 20\}\ ;\ \alpha \in \mathbb{N}}$$

4. تعيين قيّم العدد الطبيعي x حيث : $2004^x - 2005^x \equiv 2[7]$

$$2004^x - 2005^x \equiv 2[7] \Rightarrow 2^x - 3^x \equiv 2[7]$$

x	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
$2^x \equiv$	1	2	4	1	2	4
$3^x \equiv$	1	3	2	6	4	5
$2^x - 3^x \equiv$	0	6	2	2	5	6

$2^x - 3^x \equiv 2[7] \Rightarrow x = 6k + 2$ أو $x = 6k + 3\ ;\ k \in \mathbb{N}$

5. تعيين الثنائيات (x, y) من $\mathbb{N}^2$ حيث : $2^x + 2^y \equiv 2[7]$

	$x =$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
$y =$	$2^x \equiv$ / $2^y \equiv$	1	2	4
$3k'$	1	2	3	5
$3k'+1$	2	3	4	6
$3k'+2$	4	5	6	2

$$\boxed{(x, y) \in \{(3k; 3k'), (3k+2; 3k'+2)\}\ ;\ (k, k') \in \mathbb{N}^2}$$

حل التمرين 67 :

1. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على 11

$3^0 \equiv 1[11]\ ;\ 3^1 \equiv 3[11]\ ;\ 3^2 \equiv 9[11]\ ;\ 3^3 \equiv 5[11]\ ;\ 3^4 \equiv 4[11]\ ;$
$3^5 \equiv 1[11]$

$$\boxed{\begin{array}{c} 3^{5k} \equiv 1[11]\ ;\ 3^{5k+1} \equiv 3[11]\ ;\ 3^{5k+2} \equiv 9[11]\ ; \\ 3^{5k+3} \equiv 5[11]\ ;\ 3^{5k+4} \equiv 4[11] \end{array}}$$

2. تعيين باقي قسمة العدد $4 \times 69^{10n+6} + 7 \times 58^{20n+13} - 8$ على 11

$69^{10n+6} \equiv 3^{5(2n+1)+1}[11] \equiv 3[11] \Rightarrow \underline{4.69^{10n+6} \equiv 1[11]}$

$58^{20n+13} \equiv 3^{5(4n+2)+3}[11] \equiv 5[11] \Rightarrow \underline{7.58^{20n+13} \equiv 2[11]}$

$$\boxed{4 \times 69^{10n+6} + 7 \times 58^{20n+13} - 8 \equiv 1 + 2 - 8[11] \equiv -5[11] \equiv 6[11]}$$

3. تعيين قيم العدد الطبيعي n حيث : $n^2 + 36^{5n} \times n + 14^{5n+3} + 5 \equiv 0[11]$

$36^{5n} \equiv 3^{5n} \equiv 1[11]\ ;\ 14^{5n+3} \equiv 3^{5n+3} \equiv 5[11]\ ;$

$n^2 + 36^{5n} \times n + 14^{5n+3} + 5 \equiv 0[11] \Rightarrow n^2 + n + 10 \equiv 0[11]$

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n^2 \equiv$	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1
$n^2 + n + 10 \equiv$	10	1	5	0	8	7	8	0	5	1	10

4. **إيجاد الأعداد الصحيحة β التي تحقق من أجل كل n من ℕ :**

$$\begin{cases} 80^{3n+2} \times \beta + 91^{3n+1} \equiv 0[11] \\ |\beta| \le 20 \end{cases}$$

$80^{3n+2} \equiv 3^{3n+2}[11]\ ;\ 91^{3n+1} \equiv 3^{3n+1}[11]$

$80^{3n+2}\beta + 91^{3n+1} \equiv 0[11] \Rightarrow 3^{3n+2}\beta + 3^{3n+1} \equiv 0[11]$

$\Rightarrow 27^n \times 9\beta + 27^n \times 3 \equiv 0[11]$

$27 \equiv 5[11] \Rightarrow 27^n \equiv 5^n[11] \Rightarrow 3.5^n(3\beta + 1) \equiv 0[11]$

$\Rightarrow 3\beta + 1 \equiv 0[11] \Rightarrow 3\beta \equiv 10[11] \Rightarrow \beta \equiv 7[11] \Rightarrow \beta = 11k + 7$

$|\beta| \le 20 \Rightarrow -20 \le 11k + 7 \le 20 \Rightarrow -2{,}46 \le k \le 1{,}18$

$\Rightarrow k \in \{-2; -1; 0; 1\} \Rightarrow \boxed{\beta \in \{-15; -4; 7; 18\}}$

5. **تعيين الثنائيات (x, y) من $\mathbb{N}^2$ حيث : $14^x + 25^y \equiv 8[11]$**

$14 \equiv 3[11] \Rightarrow 14^x \equiv 3^x[11]\ ;\ 25 \equiv 3[11] \Rightarrow 25^y \equiv 3^y[11];$

$14^x + 25^y \equiv 8[11] \Rightarrow 3^x + 3^y \equiv 8[11]$

	$x =$	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$
$y =$	$3^x \equiv$ / $3^y \equiv$	1	3	9	5	4
$5k'$	1	2	4	10	6	5
$5k'+1$	3	4	6	1	**8**	7
$5k'+2$	9	10	1	7	3	2
$5k'+3$	5	6	**8**	3	10	9
$5k'+4$	4	5	1	2	9	**8**

$$\boxed{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \{(\mathbf{5k+1}; \mathbf{5k'+3}), (\mathbf{5k+3}; \mathbf{5k'+1}), (\mathbf{5k+4}; \mathbf{5k'+4})\}\ ;\ (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k'}) \in \mathbb{N}^2}$$

6. **تعيين الثلاثيات (x, y, z) من $\mathbb{N}^3$ حيث : $3^x + 14^y \times 47^z \equiv 2[11]$**

$14 \equiv 3[11] \Rightarrow 14^y \equiv 3^y[11]\ ;\ 47 \equiv 3[11] \Rightarrow 47^z \equiv 3^z[11]\ ;$

$3^x + 14^y \times 47^z \equiv 2[11] \Rightarrow 3^x + 3^{y+z} \equiv 2[11]$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 5k \\ y + z = 5k' \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = 5k + 2 \\ y + z = 5k' + 4 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = 5k + 4 \\ y + z = 5k' + 2 \end{cases}$ (حسب الجدول السابق)

1) $\begin{cases} x = 5k \\ y + z = 5k' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 0[5] \\ y + z \equiv 0[5] \end{cases}$

$\Rightarrow (x, y, z) \in \begin{Bmatrix} (5a; 5b; 5c), (5a; 5b+1; 5c+4)\ , (5a; 5b+2; 5c+3)\ , \\ (5a; 5b+3; 5c+2)\ , (5a; 5b+4; 5c+1) \end{Bmatrix}$

$(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$

2) $\begin{cases} x = 5k+2 \\ y+z = 5k'+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 2[5] \\ y+z \equiv 4[5] \end{cases}$

$\Rightarrow (x,y,z) \in \{(5a+2; 5b; 5c+4), (5a+2; 5b+1; 5c+3)$,
$(5a+2; 5b+2; 5c+2)$, $(5a+2; 5b+3; 5c+1)$, $(5a+2; 5b+4; 5c)\}$
$(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$

3) $\begin{cases} x = 5k+4 \\ y+z = 5k'+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 4[5] \\ y+z \equiv 2[5] \end{cases}$

$\Rightarrow (x,y,z) \in \{(5a+4; 5b; 5c+2), (5a+4; 5b+1; 5c+1)$,
$(5a+4; 5b+2; 5c)\}$; $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$

حل التمرين 68 :

1. حل المعادلة : (I) ... $8x - 5y = 3$

$8(1) - 5(1) = 3 \Rightarrow 8(x-1) - 5(y-1) = 0$
$\Rightarrow 8(x-1) = 5(y-1)$

$\begin{cases} 5 \mid 8(x-1) \\ PGCD(5;8) = 1 \end{cases} \Rightarrow 5 \mid (x-1) \Rightarrow x-1 = 5k$

$\Rightarrow x = 5k+1$
$8(x-1) = 5(y-1) \Rightarrow 8(5k) = 5(y-1) \Rightarrow y-1 = 8k$
$\Rightarrow y = 8k+1$

$\boxed{S = \{(5k+1\ ;\ 8k+1)\}\ ;\ k \in \mathbb{Z}}$

2. $m = 8p+1$ و $m = 5q+4$

أ- بيان أنّ الثنائية (p,q) هي حل للمعادلة (I)

$m = 8p+1 = 5q+4 \Rightarrow 8p - 5q = 3 \Rightarrow \boxed{(p;q) \in S}$

استنتاج أنّ : $m \equiv 9[40]$

$m = 8p+1 = 8(5k+1)+1 = 40k+9 \Rightarrow \boxed{m \equiv 9[40]}$

ب- تعيين أصغر عدد طبيعي m أكبر 2000

$m > 2000 \Rightarrow 40k+9 > 2000 \Rightarrow 40k > 1991 \Rightarrow k > \dfrac{1991}{40}$

$\Rightarrow k > 49{,}775 \Rightarrow k = 50 \Rightarrow \boxed{m = 2009}$

.3

أ- **إثبات أنّ: $2^{3k} \equiv 1[7]$**

$2^{3k} = (2^3)^k = 8^k \,; 8 \equiv 1[7] \Rightarrow 8^k \equiv 1[7] \Rightarrow \boxed{2^{3k} \equiv 1[7]}$

ب- **تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{2009} على 7**

$2^{2009} = 2^2 \times 2^{2007} = 4 \times 2^{3(669)} \Rightarrow \boxed{2^{2009} \equiv 4[7]}$

.4 $\boldsymbol{N = \overline{a00b} = a \times 10^3 + b}$

أ- **التحقق من أنّ : $10^3 \equiv -1[7]$**

$10 \equiv 3[7] \Rightarrow 10^3 \equiv 3^3[7] \Rightarrow 10^3 \equiv 27[7]$

$\Rightarrow 10^3 \equiv 27 - 28[7] \Rightarrow 10^3 \equiv -1[7]$

ب- **استنتاج الأعداد الطبيعية N التي تقبل القسمة على 7**

$10^3 \equiv -1[7] \Rightarrow 10^3 a + b \equiv -a + b[7] \Rightarrow N \equiv -a + b[7]$

$N \equiv 0[7] \Rightarrow -a + b \equiv 0[7] \Rightarrow a \equiv b[7]$

$$(a,b) \in \begin{Bmatrix} (1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(5,5);(6,6);(7,7) \\ (8,8);(9,9);(7,0);(1,8);(8,1);(2,9);(9,2) \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{N \in \begin{Bmatrix} 1001;2002;3003;4004;5005;6006;7007 \\ 8008;9009;7000;1008;8001;2009;9002 \end{Bmatrix}}$$

حل التمرين 69 :

.1 $x^2 + x + 3 \equiv 0[5] \Rightarrow x^2 + x + 3 - 5x \equiv 0[5]$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 \equiv 0[5] \Rightarrow (x-1)(x-3) \equiv 0[5]$

$\Rightarrow x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 3[5]$ $\boxed{\text{(الجواب د)}}$

.2 $24(17k - 7) + 34(5 - 12k)$

$= 408k - 168 + 170 - 408k = 2$ $\boxed{\text{(الجواب أ)}}$

.3 $N = N = \overline{421}^5 = 1 + (2 \times 5) + (4 \times 5^2) = 111$

$18 \times 6 + 3 = (3 \times 6^2) + 3 = \overline{303}_6$ $\boxed{\text{(الجواب جـ)}}$

.4 $1432 \equiv 1[3] \Rightarrow 1432^{2011} \equiv 1[3]$ $\boxed{\text{(الجواب ب)}}$

.5 $a = n(n+2); b = n + 1 \,; b^2 - a = 1$

$\Rightarrow PGCD(a,b) = 1$ (بيزو) $\boxed{\text{(الجواب جـ)}}$

حل التمرين 70 :

1. **دراسة بواقي القسمة الإقليمية للعدد 3^n على 10**

$3^0 \equiv 1[10]\ ;\ 3^1 \equiv 3[10]\ ;\ 3^2 \equiv 9[10]\ ;\ 3^3 \equiv 7[10]\ ;\ 3^4 \equiv 1[10]$

$\boxed{3^{4k} \equiv 1[10]\ ;\ 3^{4k+1} \equiv 3[10]\ ;\ 3^{4k+2} \equiv 9[10]\ ;\ 3^{4k+3} \equiv 7[10]}$

2. **استنتاج باقي القسمة الإقليمية على 10 للعدد $63 \times 9^{2002} - 7^{1422}$**

$63 \equiv 3[10]; 9 \equiv -1[10] \Rightarrow 9^{2002} \equiv 1[10]$

$7 \equiv -3[10] \Rightarrow 7^{1422} \equiv 3^{4(355)+2}[10] \Rightarrow 7^{1422} \equiv 9[10]$

$\underbrace{63}_{\equiv 3[10]} \times \underbrace{9^{2002}}_{\equiv 1[10]} - \underbrace{7^{1422}}_{\equiv 9[10]} \equiv -6[10] \Rightarrow \boxed{63 \times 9^{2002} - 7^{1422} \equiv 4[10]}$

3. **بيان أنّ $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1) \times 3^{2n+1}[10]$**

$3n \times 9^n = 3n \times 3^{2n} = 3^{2n+1} \times n$

$7 \equiv -3[10] \Rightarrow 7^{2n+1} \equiv -3^{2n+1}[10]$

$3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 3^{2n+1} \times n - 3^{2n+1}[10]$

$\Rightarrow \boxed{3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1) \times 3^{2n+1}[10]}$

4. **تعيين قيم n حتى يكون : $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10]$**

$3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10] \Rightarrow (n-1) \times 3^{2n+1} \equiv 0[10]$

بما أنّ العدد $2n+1$ فردي ، فإنّ $3^{2n+1} \equiv 3[10]$ أو $3^{2n+1} \equiv 7[10]$ ، نستنتج أنّ الموافقة السابقة تتحقق لمّا $(n-1) \equiv 0[10]$ أي $n \equiv 1[10]$

حل التمرين 71 :

1. **دراسة بواقي القسمة الإقليمية للعدد 4^n على 11**

$4^0 \equiv 1[11]\ ;\ 4^1 \equiv 4[11]\ ;\ 4^2 \equiv 5[11]\ ;\ 4^3 \equiv 9[11]\ ;$

$4^4 \equiv 3[11]\ ;\ 4^5 \equiv 1[11]$

$4^{5k} \equiv 1[11]\ ;\ 4^{5k+1} \equiv 4[11]\ ;\ 4^{5k+2} \equiv 5[11]\ ;$

$4^{5k+3} \equiv 9[11]\ ;\ 4^{5k+4} \equiv 3[11]$

2. **برهان أنّ $k \equiv 0[11]$**

$15 \equiv 4[11] \Rightarrow 15^{5n+1} \equiv 4^{5n+1}[11] \Rightarrow 15^{5n+1} \equiv 4[11]$

$26 \equiv 4[11] \Rightarrow 26^{5n+2} \equiv 4^{5n+2}[11] \Rightarrow 26^{5n+2} \equiv 5[11]$

$\Rightarrow 2 \times 26^{5n+2} \equiv 10[11]$

$125 \equiv 4[11] \Rightarrow 125^{5n+3} \equiv 4^{5n+3}[11] \Rightarrow 125^{5n+3} \equiv 9[11]$

$\Rightarrow 3 \times 125^{5n+3} \equiv 5[11]$

$k = 15^{5n+1} - 2 \times 26^{5n+2} + 3 \times 125^{5n+3} + 1$

$\Rightarrow k \equiv 4 - 10 + 5 + 1[11] \Rightarrow \boxed{k \equiv 0[11]}$

3. تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث :

$$\begin{cases} 15^{5n+1} + 26^{5n+2} + 3n \equiv 0[11] \\ 8 \leq n \leq 50 \end{cases}$$

$15^{5n+1} + 26^{5n+2} + 3n \equiv 0[11] \Rightarrow 4 + 5 + 3n \equiv 0[11]$

$\Rightarrow 3n + 9 \equiv 0[11] \Rightarrow 3n \equiv 2[11]$

$\Rightarrow 3n \equiv 24[11] \Rightarrow n \equiv 8[11] \Rightarrow n = 11k + 8$

$8 \leq n \leq 50 \Rightarrow 8 \leq 11k + 8 \leq 50 \Rightarrow 0 \leq 11k \leq 42$

$\Rightarrow 0 \leq k \leq 3{,}8 \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3\} \Rightarrow \boxed{n \in \{8; 19; 30; 41\}}$

حل التمرين 72 :

1. أ. تعيين باقي القسمة الإقليمية للعدد 6^{10} على 11

$6^{10} = (6^2)^5 = 36^5 \,; 36 \equiv 3[11] \Rightarrow 36^5 \equiv 3^5[11];$

$3^5 = 243 \Rightarrow 3^5 \equiv 1[11] \Rightarrow \boxed{6^{10} \equiv 1[11]}$

ب. تعيين باقي القسمة الإقليمية للعدد 6^4 على 5

$6 \equiv 1[5] \Rightarrow \boxed{6^4 \equiv 1[5]}$

ج. استنتاج أنّ $6^{40} \equiv 1[11]$ و أنّ $6^{40} \equiv 1[5]$

$6^{10} \equiv 1[11] \Rightarrow (6^{10})^4 \equiv 1[11] \Rightarrow \boxed{6^{40} \equiv 1[11]}$

$6^4 \equiv 1[5] \Rightarrow (6^4)^{10} \equiv 1[5] \Rightarrow \boxed{6^{40} \equiv 1[5]}$

د. بيان أنّ $6^{40} - 1$ يقبل القسمة على 55

$$\begin{cases} 6^{40} \equiv 1[11] \\ 6^{40} \equiv 1[5] \end{cases} \underset{[PGCD(11,5)=1]}{\Rightarrow} 6^{40} \equiv 1[55] \Rightarrow \boxed{6^{40} - 1 \equiv 0[55]}$$

.2

أ. بيان أنّ المعادلة (E) ليس لها حلول

$65x - 40y = 1 \ldots (E) \,; PGCD(65{,}40) = 5$

بما أنّ 5 لا يقسم 1 ، فإنّ المعادلة (E) ليس لها حلول

ب. بيان أنّ المعادلة (E') تقبل على الأقل حلا

$17x-40y=1 \dots (E')\ ; PGCD(17,40)=1$

المعادلة (E') تقبل على الأقل حلا

ج. تعيين حل خاص للمعادلة (E')

$40=17\times 2+6 \ \Rightarrow 6=40-17\times 2$

$17=6\times 2+5 \ \Rightarrow 5=17-6\times 2$

$6=5+1 \Rightarrow 1=6-5$

$1=6-5=6-(17-6\times 2)=17(-1)+6(3)$

$1=17(-1)+3(40-17\times 2)=17(-7)-40(-3)$

$\Rightarrow \boxed{(x_0,y_0)=(-7,-3)}$

د. حل المعادلة (E')

$\begin{cases} 17x-40y=1 \\ 17(-7)-40(-3)=1 \end{cases} \Rightarrow 17(x+7)-40(y+3)=0$

$\Rightarrow 17(x+7)=40(y+3)$

$\begin{cases} 40 \mid 17(x+7) \\ PGCD(40;17)=1 \end{cases} \Rightarrow 40 \mid (x+7) \Rightarrow x+7=40k \Rightarrow x=40k-7$

$17(40k)=40(y+3) \Rightarrow y+3=17k \Rightarrow y=17k-3$

$\boxed{S=\{(40k-7;17k-3)\}\ ; k\in\mathbb{Z}}$

استنتاج وجود x_0 حيث : $x_0<40$ و $17x_0\equiv 1[40]$

$17x_0\equiv 1[40] \Rightarrow 17x_0=40\alpha+1 \Rightarrow 17x_0-40\alpha=1$

$\Rightarrow x_0=40k-7$

$0\le x_0\le 40 \Rightarrow 0\le 40k-7\le 40 \Rightarrow 7\le 40k\le 47$

$\Rightarrow 0{,}175\le k\le 1{,}175 \Rightarrow k=1 \Rightarrow \boxed{x_0=33}$

3. بيان أنّه إذا كان $a^{17}\equiv b[55]$ و $a^{40}\equiv 1[55]$ فإنّ $b^{33}\equiv 1[55]$

$\begin{cases} a^{17}\equiv b[55] \\ a^{40}\equiv 1[55] \end{cases} \Rightarrow \ b^{33}\equiv (a^{17})^{33}[55] \Rightarrow \ b^{33}\equiv a^{561}[55]$

$\Rightarrow b^{33}\equiv a^{560}\times a[55] \Rightarrow b^{33}\equiv (a^{40})^{14}\times a[55]$

$\Rightarrow \boxed{b^{33}\equiv a[55]}$

حل التمرين 73 :

1. أ. بيان أنّ a يحقق : $a(2a^2-8a-21)=18$

$$a=\overline{4452}^{a}=\overline{2020}^{(a+2)} \Rightarrow 4a^3+4a^2+5a+2=2(a+2)^3+2(a+2)$$
$$\Rightarrow 4a^3+4a^2+5a+2=2a^3+12a^2+24a+16+2a+4$$
$$\Rightarrow 2a^3-8a^2-21a=18$$
$$\Rightarrow \boxed{a(2a^2-8a-21)=18}$$

ب. استنتاج قيمة a

$$\begin{cases} a(2a^2-8a-21)=18 \\ a>5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \mid 18 \\ a>5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=6}$$

ملاحظة : الحالة $a=9$ مرفوضة لأنّ $2a^2-8a-21=69$ وفي هذه الحالة $a(2a^2-8a-21)\neq 18$

كتابة العدد y في النظام العشري

$$y=2(6+2)^3+2(6+2)=2\times 8^3+2\times 8 \Rightarrow \boxed{y=1040}$$

2. أ. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 9

$5^0\equiv 1[9]$; $5^1\equiv 5[9]$; $5^2\equiv 7[9]$; $5^3\equiv 8[9]$; $5^4\equiv 4[9]$; $5^5\equiv 2[9]$; $5^6\equiv 1[9]$

$5^{6k}\equiv 1[9]$; $5^{6k+1}\equiv 5[9]$; $5^{6k+2}\equiv 7[9]$; $5^{6k+3}\equiv 8[9]$;
$5^{6k+4}\equiv 4[9]$; $5^{6k+5}\equiv 2[9]$

ب. استنتاج باقي قسمة العدد $y^{1434}-3\times y^{2012}+4^{2013}$ على 9

$$y\equiv 5[9] \Rightarrow y^{1434}\equiv 5^{1434}[9] \Rightarrow y^{1434}\equiv 5^{6(239)}[9] \Rightarrow \boldsymbol{y^{1434}\equiv 1[9]}$$
$$y^{2012}\equiv 5^{2012}[9] \Rightarrow y^{2012}\equiv 5^{6(335)+2}[9] \Rightarrow y^{2012}\equiv 7[9]$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{3\times y^{2012}\equiv 3[9]}$$
$$4\equiv -5[9] \Rightarrow 4^{2013}\equiv -5^{2013}[9] \Rightarrow 4^{2013}\equiv -5^{6(335)+3}[9]$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{4^{2013}\equiv -8[9]}$$
$$y^{1434}-3\times y^{2012}+4^{2013}\equiv 1-3-8[9]$$
$$y^{1434}-3\times y^{2012}+4^{2013}\equiv -10[9]$$
$$\boxed{y^{1434}-3\times y^{2012}+4^{2013}\equiv 8[9]}$$

حل التمرين 74 :

-1 دراسة بواقي قسمة 9^n على 11

$9^0 \equiv 1[11]\,; 9^1 \equiv 9[11]\,; 9^2 \equiv 4[11]\,; 9^3 \equiv 3[11]\,;$
$9^4 \equiv 5[11]\,; 9^5 \equiv 1[11]$
$9^{5k} \equiv 1[11]\,; 9^{5k+1} \equiv 9[11]\,; 9^{5k+2} \equiv 4[11]\,;$
$9^{5k+3} \equiv 3[11]\,; 9^{5k+4} \equiv 5[11]$

-2 بيان أنّ $(1431)^n + (1993)^{10n} + (2011)^{5n+1} \equiv 0[11]$

$1431 \equiv 1[11] \Rightarrow \underline{1431^n \equiv 1[11]}\,; 1993 \equiv -9[11]$
$\Rightarrow 1993^{10n} \equiv 9^{5(2n)}[11] \Rightarrow \underline{1993^{10n} \equiv 1[11]}$
$2011 \equiv 9[11] \Rightarrow 2011^{5n+1} \equiv 9^{5n+1}[11]$
$\Rightarrow \underline{2011^{5n+1} \equiv 9[11]}$

$1431^n + 1993^{10n} + 2011^{5n+1} \equiv 1 + 1 + 9[11]$
$\boxed{1431^n + 1993^{10n} + 2011^{5n+1} \equiv 0[11]}$

-3 تعيين n حيث : $\begin{cases}(1431)^n + 5n + (2011)^{5n+1} \equiv 0[11] \\ 90 < n < 100\end{cases}$

$$\begin{cases}1431^n + 5n + 2011^{5n+1} \equiv 0[11] \\ 90 < n < 100\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}5n + 10 \equiv 0[11] \\ 90 < n < 100\end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases}5n \equiv 1[11] \\ 90 < n < 100\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}n \equiv 9[11] \\ 90 < n < 100\end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases}n = 11k + 9 \\ 90 < n < 100\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}n = 11k + 9 \\ 90 < 11k + 9 < 100\end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases}n = 11k + 9 \\ 7{,}36 < k < 8{,}27\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}n = 11k + 9 \\ k = 8\end{cases} \Rightarrow \boxed{n = 97}$$

حل التمرين 75 :

-1 دراسة باقي قسمة 4^{2n} على 5

$4 \equiv -1[5] \Rightarrow \boxed{4^{2n} \equiv 1[5]}$

-2 تعيين باقي قسمة 3^n على 5

$3^0 \equiv 1[5]\ ;\ 3^1 \equiv 3[5]\ ;\ 3^2 \equiv 4[5]\ ;\ 3^3 \equiv 2[5]\ ;\ 3^4 \equiv 1[5]$

$\boxed{3^{4k} \equiv 1[5]\ ;\ 3^{4k+1} \equiv 3[5]\ ;\ 3^{4k+2} \equiv 4[5]\ ;\ 3^{4k+3} \equiv 2[5]}$

-3 تعيين باقي قسمة 1428^{2009} على 5

$1428 \equiv 3[5] \Rightarrow 1428^{2009} \equiv 3^{2009}[5]$

$\Rightarrow 1428^{2009} \equiv 3^{4(502)+1}[5] \Rightarrow \boxed{1428^{2009} \equiv 3[5]}$

-4 $A_n = 2 + 4^{2n} + 3^n$

تعيين قيم العدد الطبيعي n حيث $A_n \equiv 0[5]$

$A_n \equiv 0[5] \Rightarrow 3^n + 3 \equiv 0[5] \Rightarrow 3^n \equiv 2[5] \Rightarrow \boxed{n = 4k + 3\ ;\ k \in \mathbb{N}}$

حل التمرين 76 :

-1 كتابة N_1 في النظام العشري

$N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12} = 10 + 12 + 11 \times 12^2 = 1606$

-2 كتابة N_2 في النظام ذي الأساس 12

$N_2 = 1131 = 7 \times 12^2 + 10 \times 12 + 3 = \overline{7\alpha 3}^{12}$

-3 $N = \overline{a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0}^{12}$

أ. بيان أنّ $N \equiv a_0[3]$

$N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}^{12} = a_0 + \underbrace{a_1 \times 12}_{\equiv 0[12]} + \cdots + \underbrace{a_n \times 12^n}_{\equiv 0[12]}$

$\Rightarrow N \equiv a_0[12] \Rightarrow N = 12k + a_0 = 3(4k) + a_0 = 3k' + a_0$

$\Rightarrow \boxed{N \equiv a_0[3]}$

استنتاج خاصية قابلية القسمة على 3

يقبل عدد القسمة على 3 إذا كان رقم آحاده في النظام ذي الأساس 12 مضاعفا لـ3

- **التأكد باستعمال كتابة N_2 في النظام ذي الأساس 12**

$N_2 = \overline{7\alpha 3}^{12} \Rightarrow N_2 \equiv 3[3] \Rightarrow N_2 \equiv 0[3]\ (1131 = 3 \times 377)$

ب. بيان أنّ $N \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0[11]$

$12 \equiv 1[11] \Rightarrow 12^p \equiv 1[11] \Rightarrow a_p 12^p \equiv a_p[11]$
$N = a_0 + a_1 \times 12 + \cdots + a_n \times 12^n$
$\Rightarrow \boxed{N \equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_n[11]}$

استنتج خاصية قابلية القسمة على 11

يقبل عدد القسمة على 11 إذا كان مجموع أرقامه في النظام ذي الأساس 12 مضاعفا لـ11

- **التأكد باستعمال كتابة N_1 في النظام ذي الأساس 12**

$N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$; $\beta + 1 + \alpha = 11 + 1 + 10 = 22 = 2 \times 11$
$\Rightarrow N_1 \equiv 0[11]$ $(1606 = 11 \times 146)$

4- تعيين قيم x و y حيث $N \equiv 0[33]$

$$N = \overline{x4y}^{12} ; N \equiv 0[33] \Rightarrow \begin{cases} N \equiv 0[3] \\ N \equiv 0[11] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \equiv 0[3] \\ x + y + 4 \equiv 0[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \in \{0; 3; 6; 9\} \\ x + y + 4 \equiv 0[11] \end{cases}$$

- $y = 0: x + 4 \equiv 0[11] \Rightarrow x \equiv 7[11] \Rightarrow x = 7$
$\Rightarrow \boxed{(x; y) = (7; 0)}$
- $y = 3: x + 7 \equiv 0[11] \Rightarrow x \equiv 4[11] \Rightarrow x = 4$
$\Rightarrow \boxed{(x; y) = (4; 3)}$
- $y = 6: x + 10 \equiv 0[11] \Rightarrow x \equiv 1[11] \Rightarrow x = 1$
$\Rightarrow \boxed{(x; y) = (1; 6)}$
- $y = 9: x + 2 \equiv 0[11] \Rightarrow x \equiv 9[11] \Rightarrow x = 9$
$\Rightarrow \boxed{(x; y) = (9; 9)}$

حل التمرين 77 :

1) من أجل كل عدد طبيعي n ، 3 يقسم $2^{2n} - 1$

$2^2 \equiv 1[3] \Rightarrow 2^{2n} \equiv 1[3] \Rightarrow 2^{2n} - 1 \equiv 0[3] \Rightarrow$ 3 يقسم $2^{2n} - 1$

منه الجملة (1) صحيحة

2) إذا كان العدد الصحيح x حلا للمعادلة $x^2 + x \equiv 0[6]$ ، فإنّ $x \equiv 0[3]$

$2^2 + 2 \equiv 0[6]$ و $2 \not\equiv 0[3]$ (مثال مضاد)

منه الجملة (2) خاطئة

3) **مجموعة حلول المعادلة $12x - 5y = 3$ في $\mathbb{Z}^2$ هي:**

$\{(10k + 4; 24k + 9)\}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} 12x - 5y = 3 \\ 12(4) - 5(9) = 3 \end{cases} \Rightarrow 12(x-4) = 5(y-9)$$

$$\Rightarrow x = 5k + 4 \,;\, y = 12k + 9$$

منه الجملة (3) خاطئة

4) توجد ثنائية وحيدة $(a;b)$ في $\mathbb{N}^2$ حيث :

$$\begin{cases} a < b \\ PPCM(a;b) - PGCD(a;b) = 1 \end{cases}$$

$$m - d = 1 \Rightarrow da'b' - d = 1 \Rightarrow d(a'b' - 1) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ a'b' - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ a'b' = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ ab = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \,;\, b = 2$$

منه الجملة (4) صحيحة

حل التمرين 78 :

1) $a \in \{2;3;4;5\}$ و $n \in \mathbb{N}$

أ- برهان أنّ $a^6 - 1 \equiv 0[7]$

a	2	3	4	5	
$a^6 \equiv$	1	1	1	1	[7]
$a^6 - 1 \equiv$	0	0	0	0	[7]

ب- برهان أنّ $A_{n+6} \equiv A_n[7]$

$$A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$$
$$A_{n+6} = 2^{n+6} + 3^{n+6} + 4^{n+6} + 5^{n+6}$$
$$A_{n+6} = 2^6.2^n + 3^6.3^n + 4^6.4^n + 5^6.5^n$$
$$2^6 \equiv 1[7] \,;\, 3^6 \equiv 1[7] \,;\, 4^6 \equiv 1[7] \,;\, 5^6 \equiv 1[7]$$
$$\Rightarrow 2^{n+6} + 3^{n+6} + 4^{n+6} + 5^{n+6} \equiv 2^n + 3^n + 4^n + 5^n[7]$$
$$\Rightarrow \boxed{A_{n+6} \equiv A_n[7]}$$

2) $n = 6q + r$

أ- برهان أنّ: $A_n \equiv A_r[7]$

$A_n = A_{6q+r} = 2^{6q+r} + 3^{6q+r} + 4^{6q+r} + 5^{6q+r}$
$A_n = 2^{6q}.2^r + 3^{6q}.3^r + 4^{6q}.4^r + 5^{6q}.5^r$
$2^{6q} \equiv 1[7]; 3^{6q} \equiv 1[7]; 4^{6q} \equiv 1[7]; 5^{6q} \equiv 1[7]$
$\Rightarrow A_{6q+r} \equiv 2^r + 3^r + 4^r + 5^r[7] \Rightarrow \boxed{A_n \equiv A_r[7]}$

ب- تعيين مجموعة قيم n حيث $A_n \equiv 0[7]$

$A_n \equiv 0[7] \Rightarrow A_r \equiv 0[7]$

r	0	1	2	3	4	5	
$A_r \equiv$	4	0	5	0	5	0	[7]

$A_r \equiv 0[7] \Rightarrow r \in \{1; 3; 5\} \Rightarrow \boxed{n \in \{6q+1; 6q+3; 6q+5\}\ ; q \in \mathbb{N}}$

3) $B_n = 100^n + 101^n + 102^n + 103^n$

أ- برهان أنّ $B_n \equiv A_n[7]$

$$\begin{cases} 100 \equiv 2[7] \\ 101 \equiv 3[7] \\ 102 \equiv 4[7] \\ 103 \equiv 5[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 100^n \equiv 2^n[7] \\ 101^n \equiv 3^n[7] \\ 102^n \equiv 4^n[7] \\ 103^n \equiv 5^n[7] \end{cases} \Rightarrow \boxed{B_n \equiv A_n[7]}$$

ب- استنتاج مجموعة قيم n حيث $B_n \equiv 0[7]$

$B_n \equiv 0[7] \Rightarrow A_n \equiv 0[7] \Rightarrow \boxed{n \in \{6q+1; 6q+3; 6q+5\}\ ; q \in \mathbb{N}}$

حل التمرين 79 :

1. تحليل العدد 1995 إلى جداء عوامل أولية

$1995 = 3 \times 5 \times 7 \times 19$

2. تعيين الأعداد الصحيحة x ، y ، z

$x + y + z \mid 1995 \Rightarrow x + y + z \in \{1; 3; 5; 7; 19\} \Rightarrow 3y \in \{1; 3; 5; 7; 19\}$
$\Rightarrow 3y = 3 \Rightarrow \boxed{y = 1}$

$$\begin{cases} x + z = 2y \\ yz = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 2 \\ x^2 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ x^2 = z \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 4 \end{cases}}$$

ملاحظة : الحالة $(x; y; z) = (1; 1; 1)$ مرفوضة لأنّ الأعداد x ، y ، z متباينة مثنى مثنى.

حل التمرين 80 :

1. **تعيين العددين الطبيعيين q وu_0 علما أنّ q أولي مع u_0 و $5u_0^2 = u_3 - u_1$**

$5u_0^2 = u_3 - u_1 \Rightarrow 5u_0^2 = u_0q^3 - u_0q \Rightarrow q(q^2-1) = 5u_0 \Rightarrow q \mid 5u_0 \Rightarrow q \mid 5$ (لأنّ q أولي مع u_0)

$\Rightarrow \begin{cases} q = 1 \\ u_0 = 0 \end{cases}$ (مرفوضة) أو $\boxed{\begin{cases} q = 5 \\ u_0 = 24 \end{cases}}$

2. **كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n**

$u_n = u_0.q^n \Rightarrow \boxed{u_n = 24.5^n}$

3. **حساب المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-2}$**

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-2} = u_0\left(\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right) \Rightarrow S_n = 24\left(\frac{5^{n-1}-1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n = 6(5^{n-1}-1)}$$

4. **دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 11**

$5^0 \equiv 1[11]\ ;\ 5^1 \equiv 5[11]\ ;\ 5^2 \equiv 3[11]\ ;\ 5^3 \equiv 4[11]\ ;\ 5^4 \equiv 9[11]\ ;$
$5^5 \equiv 1[11]$

$$\boxed{\begin{matrix} 5^{5k} \equiv 1[11]\ ;\ 5^{5k+1} \equiv 5[11]\ ;\ 5^{5k+2} \equiv 3[11]\ ; \\ 5^{5k+3} \equiv 4[11]\ ;\ 5^{5k+4} \equiv 9[11] \end{matrix}}$$

5. **تعيين قيم العدد الطبيعي n حيث : $S_n \equiv 0[11]$**

$$S_n \equiv 0[11] \Rightarrow 6(5^{n-1}-1) \equiv 0[11] \xRightarrow[\text{6 أولي مع 11}]{} 5^{n-1} - 1 \equiv 0[11]$$

$$\Rightarrow 5^{n-1} \equiv 1[11] \Rightarrow n - 1 = 5k \Rightarrow \boxed{n = 5k+1\ ; k \in \mathbb{N}}$$

حل التمرين 81 :

1- **دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 10**

$7^0 \equiv 1[10]\ ;\ 7^1 \equiv 7[10]\ ;\ 7^2 \equiv 9[10]\ ;\ 7^3 \equiv 3[10]\ ;\ 7^4 \equiv 1[10]\ ;$

$$\boxed{7^{4k} \equiv 1[10]\ ;\ 7^{4k+1} \equiv 7[10]\ ;\ 7^{4k+2} \equiv 9[10]\ ;\ 7^{4k+3} \equiv 3[10]}$$

- **استنتاج أنّ $7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3} \equiv 0[10]$**

$7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3} \equiv 1 + 7 + 9 + 3[10]$

$$\boxed{7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3} \equiv 0[10]}$$

-2 $\boldsymbol{S_n = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n}$

- **إثبات أنّ $\boldsymbol{S_{n+4} \equiv S_n[10]}$**

$S_{n+4} - S_n = 7^{n+1} + 7^{n+2} + 7^{n+3} + 7^{n+4}$
$\Rightarrow S_{n+4} - S_n \equiv 0[10] \Rightarrow S_{n+4} \equiv S_n[10]$

- **دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد $\boldsymbol{S_n}$ على 10**

  - $n = 4k : S_n \equiv 1[10]$
  - $n = 4k + 1 : S_n \equiv 8[10]$
  - $n = 4k + 2 : S_n \equiv 7[10]$
  - $n = 4k + 3 : S_n \equiv 0[10]$

حل التمرين 82 :

$\boldsymbol{u_{n+1} = 5u_n - 6}$ ، $\boldsymbol{u_0 = 14}$

1. حساب $\boldsymbol{u_4}$ ، $\boldsymbol{u_3}$ ، $\boldsymbol{u_2}$ ، $\boldsymbol{u_1}$

$$\boxed{u_1 = 64\ ;\ u_2 = 314\ ;\ u_3 = 1564\ ;\ u_4 = 7814}$$

يظهر أنّ الرقمين الأخيرين للعدد u_n هما 64 من أجل n فردي و14 من أجل n زوجي

2. برهان أنّ $\boldsymbol{u_{n+2} \equiv u_n[4]}$

$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5(5u_n - 6) - 6 = 25u_n - 36$

$$\begin{cases} 25 \equiv 1[4] \\ 36 \equiv 0[4] \end{cases} \Rightarrow 25u_n - 36 \equiv u_n[4] \Rightarrow \boxed{u_{n+2} \equiv u_n[4]}$$

استنتاج أنّ: $\boldsymbol{u_{2k} \equiv 2[4]}$ و $\boldsymbol{u_{2k+1} \equiv 0[4]}$

نبرهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا : $u_{2k} \equiv 2[4]$

- تحقيق التراجع: $u_0 = 14 = 4(3) + 2 \Rightarrow u_0 \equiv 2[4]$
  منه القضية محققة من أجل $k = 0$
- فرض التراجع: نفرض أنّ القضية محققة من أجل عدد طبيعي k أي: $u_{2k} \equiv 2[4]$
- برهان التراجع: نبرهن أنّ القضية محققة من أجل العدد الطبيعي $k+1$ أي : $u_{2k+2} \equiv 2[4]$

$$\begin{cases} u_{2k} \equiv 2[4] \\ u_{n+2} \equiv u_n[4] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{2k} \equiv 2[4] \\ u_{2k+2} \equiv u_{2k}[4] \end{cases} \Rightarrow u_{2k+2} \equiv 2[4]$$

نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا : $\boxed{u_{2k} \equiv 2[4]}$

$$\begin{cases} u_{2k+1} = 5u_{2k} - 6 \\ u_{2k} \equiv 2[4] \end{cases} \Rightarrow u_{2k+1} \equiv 5(2) - 6[4] \Rightarrow \boxed{u_{2k+1} \equiv 0[4]}$$

3. **برهان بالتراجع أنّ $2u_n = 5^{n+2} + 3$**

- تحقيق التراجع: $2u_0 = 28 = 5^2 + 3$ ، منه القضية محققة من أجل $n = 0$
- فرض التراجع: نفرض أنّ القضية محققة من أجل عدد طبيعي n أي:
$2u_n = 5^{n+2} + 3$
- برهان التراجع: نبرهن أنّ القضية محققة من أجل العدد الطبيعي $n+1$ أي: $2u_{n+1} = 5^{n+3} + 3$

$2u_{n+1} = 2(5u_n - 6) = 5(2u_n) - 12 = 5(5^{n+2} + 3) - 12$

$2u_{n+1} = 5^{n+3} + 3 \Rightarrow 2u_{n+1} = 5^{n+3} + 3$

نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $\boxed{2u_n = 5^{n+2} + 3}$

استنتاج أنّ $2u_n \equiv 28[100]$

نبرهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $2u_n \equiv 28[100]$

- تحقيق التراجع: $5^2 + 3 = 28 \Rightarrow 2u_0 \equiv 28[100]$
منه القضية محققة من أجل $n = 0$
- فرض التراجع: نفرض أنّ القضية محققة من أجل عدد طبيعي nأي $2u_n \equiv 28[100]$
- برهان التراجع: نبرهن أنّ القضية محققة من أجل العدد الطبيعي $n+1$
أي $2u_{n+1} \equiv 28[100]$

$2u_n \equiv 28[100] \Rightarrow 5^{n+2} + 3 \equiv 28[100] \Rightarrow 5^{n+2} \equiv 25[100]$

$2u_{n+1} = 5^{(n+1)+2} + 3 = 5.5^{n+2} + 3 = 5(100k + 25) + 3$

$2u_{n+1} = 5(100k) + 128 = 100(5k + 1) + 28 = 100k' + 28$

$\Rightarrow 2u_{n+1} \equiv 28[100]$

نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $\boxed{2u_n \equiv 28[100]}$

4. **تعيين الرقمين الأخيرين للكتابة العشرية للعدد u_n تبعا لشفعية n**

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $2u_n \equiv 28[100]$ ،
منه $2u_n = 100k + 28$ أي $u_n = 50k + 14$

- من أجل k زوجي ، لدينا: $k = 2k'$ منه $u_n = 100k' + 14$ ، أي الرقمين الأخيرين هما 14
- من أجل k فردي ، لدينا: $k = 2k' + 1$ منه $u_n = 100k' + 64$ ، أي الرقمين الأخيرين هما 64

وبما أنّ $100k' + 14 \equiv 2[4]$ و $100k' + 64 \equiv 0[4]$، نستنتج من السؤال (2) أنّ الرقمين الأخيرين للكتابة العشرية للعدد u_n هما 14 من أجل n زوجي و64 من أجل n فردي.

حل التمرين 83 :

1) تعيين u_0 و q

$$3u_0^2 = u_3 - u_1 \Rightarrow 3u_0^2 = u_0q^3 - u_0q \Rightarrow 3u_0 = q(q^2-1)$$

$$\begin{cases} q \mid 3u_0 \\ PGCD(q;u_0) = 1 \end{cases} \Rightarrow q \mid 3 \Rightarrow q = 1 \text{ أو } q = 3$$

بما أنّ $u_0 \neq 0$ فإنّ $q \neq 1$ منه $\boxed{q = 3}$

$$3u_0 = q(q^2-1) \Rightarrow 3u_0 = 24 \Rightarrow \boxed{u_0 = 8}$$

2) $u_0 = 8$ ، $q = 3$

أ- حساب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3

$$\boxed{u_1 = u_0.q = 24}\ ;\ \boxed{u_2 = u_1.q = 72}\ ;\boxed{u_3 = u_2.q = 216}$$

ب- تعيين عبارة u_n بدلالة n

$$u_n = u_0.q^n \Rightarrow \boxed{u_n = 8.3^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} 8.3^n = +\infty \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متباعدة}}$$

ج- حساب P_n بدلالة n

$$P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n = u_0 \times u_0.q \times u_0.q^2 \times \dots \times u_0.q^n$$

$$P_n = u_0^{n+1}.q^{1+2+\cdots+n} = u_0^{n+1}.q^{\frac{n(n+1)}{2}} \Rightarrow \boxed{P_n = 8^{n+1} \times 3^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

3) $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

أ- التحقق أنّ: $S_n = 4(3^{n+1} - 1)$

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 + u_0.q + \cdots + u_0.q^n$$

$$S_n = u_0(1 + q + \cdots + q^n) = u_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$$

$$\boxed{S_n = 8\left(\frac{3^{n+1}-1}{3-1}\right) = 4(3^{n+1}-1)}$$

ب- دراسة بواقي قسمة 3^n على 13

$$3^0 \equiv 1[13]\ ;\ 3^1 \equiv 3[13]\ ; 3^2 \equiv 9[13]\ ; 3^3 \equiv 1[13]$$

$$\boxed{3^{3k} \equiv 1[13]\ ; 3^{3k+1} \equiv 3[13]\ ; 3^{3k+2} \equiv 9[13]}$$

ج- تعيين قيم n حيث $S_n \equiv 0[13]$

$$S_n \equiv 0[13] \Rightarrow 4(3^{n+1}-1) \equiv 0[13]$$

$n+1$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$	
$3^{n+1} \equiv$	1	3	9	[13]
$3^{n+1}-1 \equiv$	0	2	8	[13]
$4(3^{n+1}-1) \equiv$	0	8	6	[13]

$$S_n \equiv 0[13] \Rightarrow n+1 = 3k \Rightarrow \boxed{n = 3k-1\,;\, k \in \mathbb{N}^*}$$

حل التمرين 84 :

$$q < u_0 \text{ ، } u_5 - 31u_1 - 6u_0^3 = 0 \ldots (1)$$

1) التحقق أنّ المعادلة (1) تكافئ : $q(q^4-31) = 6u_0^2$

$$u_5 - 31u_1 - 6u_0^3 = 0 \Rightarrow u_0.q^5 - 31u_0.q - 6u_0^3 = 0$$

$$\Rightarrow q^5 - 31q - 6u_0^2 = 0 \Rightarrow \boxed{q(q^4-31) = 6u_0^2}$$

2) تعيين u_0 و q علما أنّهما أوليان فيما بينهما

$$\begin{cases} q \mid 6u_0^2 \\ PGCD(q;u_0) = 1 \end{cases} \Rightarrow q \mid 6 \Rightarrow q \in \{1;2;3;6\}$$

$q = 1: u_0^2 = -5$(مستحيل); $q = 2: u_0^2 = -5$(مستحيل)

$$\boxed{q = 3: u_0^2 = 25 \Rightarrow u_0 = 5}$$

$q = 6: u_0^2 = 1265$(مستحيل لأنه ليس مربع تام)

3) كتابة الحد u_{30} في نظام التعداد ذي الأساس 3

$$u_{30} = u_0.q^{30} = 5.3^{30} = (3+2).3^{30} + 0.3^{29} + 0.3^{28} + \cdots + 0$$

$$u_{30} = 3^{31} + 2.3^{30} + 0.3^{29} + 0.3^{28} + \cdots + 0 \Rightarrow \boxed{u_{30} = \overline{12\underbrace{000\ldots000}_{\text{30 صفرا}}}^{3}}$$

4) $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

أ- حساب المجموع S_n بدلالة n

$$S_n = u_0 + u_0.q + \cdots + u_0.q^n = u_0(1 + q + \cdots + q^n)$$

$$S_n = u_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right) = \boxed{\frac{5}{2}(3^{n+1}-1)}$$

ب- دراسة بواقي قسمة 3^n على 7

$3^0 \equiv 1[7]\ ;\ 3^1 \equiv 3[7]\ ; 3^2 \equiv 2[7]\ ; 3^3 \equiv 6[7]\ \ ;\ 3^4 \equiv 4[7]$

$3^5 \equiv 5[7]\ ; 3^6 \equiv 1[7]$

$$\boxed{\begin{array}{c} 3^{6k} \equiv 1[7]\ ;\ 3^{6k+1} \equiv 3[7]\ ; 3^{6k+2} \equiv 2[7]\ ; 3^{6k+3} \equiv 6[7] \\ 3^{6k+4} \equiv 4[7]\ ; 3^{6k+5} \equiv 5[7] \end{array}}$$

ج- تعيين قيم n حيث $S_n \equiv 0[7]$

$$S_n \equiv 0[7] \Rightarrow 5\left(\frac{3^{n+1}-1}{2}\right) \equiv 0[7]$$

$$\Rightarrow \frac{3^{n+1}-1}{2} \equiv 0[7]\ \left(\text{لأنّ 5 أولي مع 7}\right)$$

$$\Rightarrow 3^{n+1}-1 \equiv 0[7]\ \left(\text{لأنّ } 3^{n+1}-1 \text{ زوجي و 2 أولي مع 7}\right)$$

$$\Rightarrow 3^{n+1} \equiv 1[7] \Rightarrow n+1 = 6k \Rightarrow \boxed{n = 6k-1; k \in \mathbb{N}^*}$$

حل التمرين 85 :

1) إثبات أنّ $5n+1$ و $14n+3$ أوليان فيما بينهما

$$5(14n+3) - 14(5n+1) = 1 \Rightarrow PGCD(14n+3\ ,5n+1) = 1$$

2) $87x + 31y = 2 \dots (E)$

أ- التحقق أنّ العددين 31 و 87 أوليان فيما بينهما

$$\begin{cases} 87 = 2(31) + 25 \\ 31 = 25 + 6 \\ 25 = 4(6) + 1 \\ 6 = 6(1) + 0 \end{cases} \Rightarrow PGCD(87; 31) = 1$$

تعيين حل خاص للمعادلة (E)

$$1 = 25 - 4(6) = 25 - 4(31-25) = 5(25) - 4(31)$$

$$= 5[87 - 2(31)] - 4(31) = 87(5) + 31(-14)$$

$$87(5) + 31(-14) = 1 \Rightarrow 87(10) + 31(-28) = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{(x_0; y_0) = (10; -28)}$$

ب- حل المعادلة (E)

$$\begin{cases} 87x + 31y = 2 \\ 87(10) + 31(-28) = 2 \end{cases} \Rightarrow 87(x-10) + 31(y+28) = 0$$

$$\Rightarrow 87(x-10) = 31(-y-28)$$

$$\begin{cases} 31 \mid 87(x-10) \\ PGCD(31;87)=1 \end{cases} \Rightarrow 31 \mid (x-10) \Rightarrow x-10=31k$$
$\Rightarrow x = 31k + 10$

$87(x-10) = 31(-y-28) \Rightarrow -y-28 = 87k$

$\Rightarrow y = -87k - 28$

$\boxed{S_{(E)} = \{(31k+10;-87k-28)\}\ ; k \in \mathbb{Z}}$

3) تعيين نقط (Δ) التي إحداثياها أعداد صحيحة وفواصلها محصورة بين 0 و 100

$M(x;y) \in (\Delta) \Rightarrow 87x + 31y - 2 = 0 \Rightarrow x = 31k + 10$

$0 \le x \le 100 \Rightarrow 0 \le 31k + 10 \le 100 \Rightarrow -10 \le 31k \le 90$

$\Rightarrow -\dfrac{10}{31} \le k \le \dfrac{90}{31} \Rightarrow 0 \le k \le 2$

$\Rightarrow \boxed{(x;y) \in \{(10;-28);(41;-115);(72;-202)\}}$

حل التمرين 86 :

1. تعيين PGCD (2688 ; 3024)

$2688 = 2^7 \times 3 \times 7\ ; 3024 = 2^4 \times 3^3 \times 7$

$PGCD(2688;3024) = 2^4 \times 3 \times 7 = \boxed{336}$

2. أ. التحقق أنّ المعادلتين (1) و (2) متكافئتان

$2688x + 3024y = -3360 \dots (1) \Rightarrow 8x + 9y = -10 \dots (2)$

(بعد القسمة على 336) ، منه المعادلتان (1) و (2) متكافئتان

ب. التحقق أنّ (2- ; 1) حل خاص للمعادلة (2)

$8(1) + 9(-2) = -10 \Rightarrow$ $\boxed{\text{الثنائية } (1;-2) \text{ حل خاص للمعادلة } (2)}$

3. $(P): x + 2y - z = -2$ و $(P'): 3x - y + 5z = 0$

أ. بيان أنّ المستويين (P) و (P') يتقاطعان وفق مستقيم (d)

$\vec{n}(1;2;-1)\ ;\ \overrightarrow{n'}(3;-1;5)\ ; \dfrac{1}{3} \neq \dfrac{2}{-1} \Rightarrow \vec{n} \nparallel \overrightarrow{n'} \Rightarrow (P) \cap (P') = (d)$

ب. بيان أنّ إحداثيات نقط (d) تحقق المعادلة (2)

$$M(x;y;z) \in (d) \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x + 10y - 5z = -10 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow 8x + 9y = -10$$

نستنتج أنّ إحداثيات نقط (d) تحقق المعادلة (2)

استنتاج (E) مجموعة نقط (d) التي إحداثياتها أعداد صحيحة

$$\begin{cases} 8x + 9y = -10 \\ 8(1) + 9(-2) = -10 \end{cases} \Rightarrow 8(x-1) + 9(y+2) = 0$$

$$\Rightarrow 8(x-1) = 9(-y-2)$$

$$\begin{cases} 9 \mid 8(x-1) \\ PGCD(8;9) = 1 \end{cases} \Rightarrow 9 \mid (x-1) \Rightarrow x - 1 = 9k \Rightarrow x = 9k + 1\,; k \in \mathbb{Z}$$

$$8(9k) = 9(-y-2) \Rightarrow -y - 2 = 8k \Rightarrow y = -8k - 2\,; k \in \mathbb{Z}$$

نستنتج أنّ مجموعة نقط (d) التي إحداثياتها أعداد صحيحة هي :

$\boxed{(E) = \{M(9k+1; -8k-2; z)\}}$ حيث $(k; z) \in \mathbb{Z}^2$

حل التمرين 87 :

1. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : (E) ... $48x + 35y = 1$

أ. تعيين حلا خاصا للمعادلة (E)

$$48 = 35 + 13 \quad \Rightarrow \quad 13 = 48 - 35$$

$$35 = 2(13) + 9 \quad \Rightarrow \quad 9 = 35 - 2(13)$$

$$13 = 9 + 4 \quad \Rightarrow \quad 4 = 13 - 9$$

$$9 = 2(4) + 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 9 - 2(4)$$

$$1 = 9 - 2(4) = 9 - 2(13 - 9) = 3(9) - 2(13)$$

$$= 3[35 - 2(13)] - 2(13) = 3(35) - 8(13)$$

$$1 = 3(35) - 8(48 - 35) = 48(-8) + 35(11) \Rightarrow (x_0, y_0) = (-8,11)$$

ب. استنتاج الحل العام للمعادلة (E)

$$\begin{cases} 48x + 35y = 1 \\ 48(-8) + 35(11) = 1 \end{cases} \Rightarrow 48(x+8) + 35(y-11) = 0 \Rightarrow 48(x+8)$$

$$= 35(-y+11)$$

$$\begin{cases} 35 \mid 48(x+8) \\ PGCD(35;48)=1 \end{cases} \Rightarrow 35 \mid (x+8) \Rightarrow x+8=35k$$

$\Rightarrow x = 35k - 8 \,; k \in \mathbb{Z}$

$48(35k) = 35(-y+11) \Rightarrow -y+11 = 48k$

$\Rightarrow y = -48k + 11 \,; k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{S = \{(35k-8\,; -48k+11)\}\,; k \in \mathbb{Z}}$

.2 $A(-11;35;-13)$ ، $\vec{u}(48;35;24)$

أ. تعيين طبيعة ومعادلة (π) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث :

$$\vec{u}.\overrightarrow{AM} = 0$$

(π) هو المستوي الذي يشمل النقطة A ويعامد $\vec{u}$

$$\vec{u}.\overrightarrow{AM} = 0 \Rightarrow 48(x+11) + 35(y-35) + 24(z+13) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{48x + 35y + 24z - 385 = 0}$$

ب. تعيين جميع النقط من المستقيم (D) التي إحداثياتها أعداد صحيحة من المجال $[-100;100]$

$$(D) = (\pi) \cap (P) \Rightarrow \begin{cases} 48x + 35y + 24z - 385 = 0 \\ z = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 48x + 35y = 1 \\ z = 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 35k - 8 \\ y = -48k + 11 \\ z = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -100 \le x \le 100 \\ -100 \le y \le 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -100 \le 35k - 8 \le 100 \\ -100 \le -48k + 11 \le 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2{,}6 \le k \le 3 \\ -1{,}8 \le k \le 2{,}3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow k \in \{-1,0,1,2\}$$

$$\boxed{M_{-1}(-43;59;16)\,;\ M_0(-8;11;16)\,;\ M_1(27;-37;16)\,;\ M_2(62;-85;16)}$$

ج. النقطة التي إحداثياتها صحيحة والقريبة من المبدأ هي النقطة $M_0(-8;11;16)$.

حل التمرين 88 :

$(\mathbf{Q}): \boldsymbol{x - 2y + 4z - 9 = 0}$ ، $\boldsymbol{\vec{n}(-2\,;1\,;1)}$ ، **B(1 ; 3 ; 5)**

1. بيان أن المستويين (P) و (Q) متعامدان

$\overrightarrow{n'}(1;-2;4)$; $\vec{n}.\overrightarrow{n'} = -2-2+4 = 0 \Rightarrow (P) \perp (Q)$

2. حساب المسافة بين النقطة B والمستقيم (Δ) تقاطع المستويين

$$d\big(B;(\Delta)\big) = d\big(B;(Q)\big) = \frac{|1-2(3)+4(5)-9|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+4^2}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$$

3. تعيين المعادلة الديكارتية للمستوي (P)

$M(x;y;z) \in (P) \Rightarrow \overrightarrow{BM}.\vec{n} = 0$

$\Rightarrow -2(x-1)+(y-3)+(z-5) = 0$

$\Rightarrow \boxed{-2x+y+z-6=0}$

4. $\boldsymbol{M} \in (\Delta)$ ، $\boldsymbol{A(-9;-4;-1)}$

$$(\boldsymbol{\Delta}) : \begin{cases} \boldsymbol{x = 2k-5} \\ \boldsymbol{y = 3k-5} \\ \boldsymbol{z = k+1} \end{cases} ; \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$$

أ. بيان أنّ $\boldsymbol{A \notin (P)}$ و $\boldsymbol{A \notin (Q)}$

$-2(-9)-4-1-6 = 7 \Rightarrow A \notin (P)$

$-9-2(-4)+4(-1)-9 = -14 \Rightarrow A \notin (Q)$

ب. التعبير عن المسافة $\mathbf{AM^2}$ بدلالة $\boldsymbol{k}$

$AM^2 = (2k-5+9)^2+(3k-5+4)^2+(k+1+1)^2$

$= (2k+4)^2+(3k-1)^2+(k+2)^2$

$= 4k^2+16k+16+9k^2-6k+1+k^2+4k+4$

$= 14k^2+14k+21 \Rightarrow \boxed{AM^2 = 7(2k^2+2k+3)}$

ج. $\boldsymbol{f(k) = 2k^2+2k+3}$

- دراسة اتجاه تغيّر الدالة $\boldsymbol{f}$

$f'(k) = 4k+2 = 2(2k+1)$

$k < -\frac{1}{2} : f'(k) < 0 \Rightarrow f(k)$ متناقصة ;

$k \geq -\frac{1}{2} : f'(k) \geq 0 \Rightarrow f(k)$ متزايدة

- تعيين النقطة M حيث تكون المسافة AM أصغرية

AM أصغرية $\Rightarrow f'(k) = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{M\left(-6;-\frac{13}{2};\frac{1}{2}\right)}$

د. **PGCD $(2k-5\ ;\ 3k-5)=d$**

- **تعيين القيم الممكنة لـ d**

$d \mid 2k-5$ و $d \mid 3k-5 \Rightarrow d \mid 2(3k-5)-3(2k-5) \Rightarrow d \mid 5$

$\Rightarrow \boxed{d \in \{1;5\}}$

- **تعيين مجموعة النقط M من (Δ) ذات الإحداثيات الطبيعية**

$$d=5 \Rightarrow \begin{cases} 2k-5 \equiv 0[5] \\ 3k-5 \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2k \equiv 0[5] \\ 3k \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow k \equiv 0[5] \Rightarrow k=5\alpha$$

مجموعة النقط M من المستقيم (Δ) التي تكون إحداثياتها أعدادا طبيعية هي :

$\boxed{M(10\alpha-5;15\alpha-5;5\alpha+1)}$ ، $\alpha \in \mathbb{N}^*$

- **تعيين أول حل طبيعي M_0**

أول حل طبيعي هو : $\boxed{M_0(5;10;6)}$

حل التمرين 89 :

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $6x+7y=57 \ldots (E)$

1. **تعيين (α,β) التي تحقق $6\alpha+7\beta=1$ واستنتاج حل خاص للمعادلة (E)**

$6(-1)+7(1)=1 \Rightarrow 6(-57)+7(57)=57 \Rightarrow (x_0,y_0)=(-57,57)$

2. **حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)**

$$\begin{cases} 6x+7y=57 \\ 6(-57)+7(57)=57 \end{cases} \Rightarrow 6(x+57)+7(y-57)=0$$

$$\Rightarrow 6(x+57)=7(-y+57)$$

$$\begin{cases} 7 \mid 6(x+57) \\ PGCD(6\,;7)=1 \end{cases} \Rightarrow 7 \mid (x+57) \Rightarrow x+57=7k$$

$$\Rightarrow x=7k-57\ ; k \in \mathbb{Z}$$

$$6(7k)=7(-y+57) \Rightarrow -y+57=6k \Rightarrow y=-6k+57\ ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{S=\{(7k-57\ ;-6k+57)\}\ ; k \in \mathbb{Z}}$$

3. **بيان أنّه توجد نقطة وحيدة من (D) إحداثياتها أعداد طبيعية**

$$M(x;y;z) \in (D) \Rightarrow \begin{cases} 6x+7y+8z-57=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x+7y=57 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=7k-57 \\ y=-6k+57 \\ z=0 \end{cases}$$

$$(x;y;z)\in\mathbb{N}^3 \Rightarrow \begin{cases}x\geq 0\\ y\geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}7k-57\geq 0\\ -6k+57\geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k\geq 8{,}14\\ k\leq 9{,}5\end{cases} \Rightarrow k=9$$

$$\Rightarrow \boxed{M_9(6;3;0)}$$

4. بيان أنّ y فردي

$$M(x;y;z)\in(P)\Rightarrow 6x+7y+8z-57=0$$

$$\Rightarrow 7y-1=2(-3x-4z+28)\Rightarrow 7y-1\equiv 0[2]$$

$$\Rightarrow y\equiv 1[2]\Rightarrow \boxed{y \text{ فردي}}$$

5. نضع : $y=2k+1$ حيث k عدد طبيعي

أ. تعيين باقي قسمة العدد $(k+z)$ على 3

$$y=2k+1\Rightarrow 6x+7(2k+1)+8z=57\Rightarrow 6x+14k+8z=50$$

$$\Rightarrow 3x+7k+4z=25\Rightarrow 3x+3k+4k+4z=25$$

$$\Rightarrow 3(x+k)+4(k+z)=25\Rightarrow 4(k+z)=3(-x-k+8)+1$$

$$\Rightarrow 4(k+z)\equiv 1[3]\Rightarrow \boxed{(k+z)\equiv 1[3]}$$

ب. برهان أنّ : $x+k+4p=7$ ، ثمّ استنتاج القيم الممكنة للعدد p

$$3p=k+z-1\Rightarrow z=3p-k+1\ ;\ 6x+7y+8z=57$$

$$\Rightarrow 6x+7(2k+1)+8(3p-k+1)=57$$

$$\Rightarrow 6x+6k+24p=42\Rightarrow \boxed{x+k+4p=7}$$

ج. استنتاج النقط M من (P) ذات الاحداثيات الطبيعية

$$x+k+4p=7\Rightarrow x+k=7-4p \xrightarrow[(\text{لأنّ } x,k,p \text{ أعداد طبيعية})]{} p=0 \text{ أو } p=1$$

$$p=0:\ \begin{cases}k+z=3(0)+1\\ x+k=7-4(0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k+z=1\\ x+k=7\end{cases}\Rightarrow k=0 \text{ أو } k=1$$

$$\Rightarrow \boxed{(x;y;z)=(7;1;1) \text{ أو } (x;y;z)=(6;3;0)}$$

$$p=1:\ \begin{cases}k+z=3(1)+1\\ x+k=7-4(1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k+z=4\\ x+k=3\end{cases}\Rightarrow k\in\{0;1;2;3\}$$

$$\Rightarrow \boxed{(x;y;z)\in\{(3;1;4)\ ;\ (2;3;3)\ ;(1;5;2)\ ;(0;7;1)\}}$$

ملاحظة: الحالة $k=4$ تستلزم $x=-1$ ، فهي إذن مرفوضة.

حل التمرين 90 :

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) ... $35x - 42y = \alpha$ ، حيث α عدد صحيح غير معدوم

1. ذكر الشرط اللازم والكافي حتى يكون للمعادلة (1) حلولا في $\mathbb{Z}^2$

يكون للمعادلة (1) حلولا في $\mathbb{Z}^2$ إذا وفقط إذا : $PGCD(35; 42)$ يقسم α أي :

$$\boxed{\alpha = 7k\ ; k \in \mathbb{Z}^*}$$

2. $\alpha = 21$

أ- بيان أنّه إذا كان $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإنّ x مضاعف للعدد 3

$$35x - 42y = 21 \Rightarrow 5x - 6y = 3 \Rightarrow 5x = 6y + 3 \Rightarrow 5x = 3(2y + 1)$$

$$\begin{cases} 3 \mid 5x \\ PGCD(3; 5) = 1 \end{cases} \Rightarrow 3 \mid x \Rightarrow \boxed{x = 3k}$$

حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1)

$$k = 1 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow 6y = 12 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (x_0; y_0) = (3; 2)$$

$$\begin{cases} 5x - 6y = 3 \\ 5(3) - 6(2) = 3 \end{cases} \Rightarrow 5(x - 3) = 6(y - 2)$$

$$\begin{cases} 6 \mid 5(x - 3) \\ PGCD(6; 5) = 1 \end{cases} \Rightarrow 6 \mid x - 3 \Rightarrow x - 3 = 6k \Rightarrow x = 6k + 3$$

$$5(x - 3) = 6(y - 2) \Rightarrow y - 2 = 5k \Rightarrow y = 5k + 2$$

$$\boxed{S_{(1)} = \{(6k + 3; 5k + 2)\}\ ; k \in \mathbb{Z}}$$

ب- تعيين المجموعة (K)

$$x^2 - y^2 < 96 \Rightarrow (6k + 3)^2 - (5k + 2)^2 < 96 \Rightarrow 11k^2 + 16k - 91 < 0$$

$$\Rightarrow -3{,}7 < k < 2{,}3 \Rightarrow k \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$$

$$\Rightarrow \boxed{(K) = \{(-15; -13); (-9; -8); (-3; -3); (3; 2); (9; 7); (\mathbf{15}; \mathbf{12})\}}$$

3. $a = \overline{21}^{\beta}$ ، $b = \overline{15}^{\beta}$ ، $\beta > 5$

أ. تعيين β ثمّ a وb

$$\begin{cases} a = 2\beta + 1 \\ b = \beta + 5 \end{cases} ;\ (a\ ; b) \in S_{(1)} \Rightarrow \begin{cases} 2\beta + 1 = 6k + 3 \\ \beta + 5 = 5k + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\beta + 1 = 6k + 3 \\ 2\beta + 10 = 10k + 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 9 = 4k + 1 \Rightarrow k = 2\ ;\ \beta + 5 = 5k + 2 \Rightarrow \beta = 5k - 3$$

$$\boxed{\beta = 5k - 3 = 7\ ; a = 2\beta + 1 = 15\ ; b = \beta + 5 = 12}$$

ب. تحقق أن $(a; b)$ تنتمي إلى (K)

$$(a; b) = (15\ ; 12) \Rightarrow \boxed{(a; b) \in (K)}$$

4. $d = PGCD(x; y)$ ، حيث $(x; y)$ حل للمعادلة : (2) ... $5x - 6y = 3$

أ- تعيين القيم الممكنة للعدد d

$$\begin{cases} d \mid x \\ d \mid y \end{cases} \Rightarrow d \mid 5x - 6y \Rightarrow d \mid 3 \Rightarrow \boxed{d \in \{1; 3\}}$$

ب- تعيين مجموعة الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (2) علما أنّ $d = 3$

$$d = 3 \Rightarrow y \equiv 0[3] \Rightarrow 5k + 2 \equiv 0[3] \Rightarrow 2k \equiv 1[3] \Rightarrow k \equiv 2[3]$$

$$\Rightarrow k = 3k' + 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 6(3k' + 2) + 3 \\ y = 5(3k' + 2) + 2 \end{cases}$$

$$\boxed{S_{(2)} = \{(18k' + 15; 15k' + 12)\}\ ; k' \in \mathbb{Z}}$$

استنتاج المضاعف المشترك الأصغر لـ x و y

$$xy = md \Rightarrow m = \frac{xy}{d} = \frac{(18k' + 15)(15k' + 12)}{3} = (6k' + 5)(15k' + 12)$$

$$\boxed{m = 90k'^2 + 147k' + 60}$$

حل التمرين 91 :

1. اثبات أنّه إذا كان $PGCD(a; b) = 1$ ، فإنّ $PGCD(a + b; ab) = 1$

$$d = PGCD(a + b; ab) \Rightarrow \begin{cases} d \mid a + b \\ d \mid ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid a(a + b) - ab \\ d \mid b(a + b) - ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid a^2 \\ d \mid b^2 \end{cases} \Rightarrow d \mid \underbrace{PGCD(a^2; b^2)}_{=1} \Rightarrow \boxed{d = 1}$$

2. تعيين الثنائيات $(x; y)$ من $(\mathbb{N}^*)^2$ بحيث : $\begin{cases} x + y = 56 \\ PPCM(x; y) = 105 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + y = 56 \\ m = 105 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d(x' + y') = 56 \\ dx'y' = 105 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid 56 \\ d \mid 105 \end{cases} \Rightarrow d \mid PGCD(56; 105) \Rightarrow d \mid 7 \Rightarrow \boxed{d = 7}\ [\text{لأنّ } PGCD(x' + y'; x'y') = 1]$$

$$d = 7 \Rightarrow \begin{cases} x' + y' = 8 \\ x'y' = 15 \end{cases} \Rightarrow X^2 - 8X + 15 = 0 \Rightarrow (x'; y') \in \{(3; 5); (5; 3)\}$$

$$\Rightarrow \boxed{(x; y) \in \{(21; 35); (35; 21)\}}$$

3. $11x - 5y = 7 \ldots (1)$

تعيين حل خاص (x_0, y_0) وحل المعادلة (1)

$$11x_0 - 5y_0 = 7 \Rightarrow 11x_0 - 7 = 5y_0 \Rightarrow 11x_0 - 7 \equiv 0[5] \Rightarrow x_0 \equiv 2[5]$$

$$\Rightarrow \boxed{(x_0; y_0) = (2; 3)}$$

$$\begin{cases} 11x - 5y = 7 \\ 11(2) - 5(3) = 7 \end{cases} \Rightarrow 11(x - 2) = 5(y - 3)$$

$$\begin{cases} 5 \mid 11(x-2) \\ PGCD(11;5)=1 \end{cases} \Rightarrow 5 \mid x-2 \Rightarrow x = 5k+2 \,;\, y = 11k+3$$

$$\boxed{S_{(1)} = \{(5k+2;11k+3)\} \,;\, k \in \mathbb{Z}}$$

.4 $\boldsymbol{d = PGCD(x;y)}$

أ- تعيين القيم الممكنة للعدد $\boldsymbol{d}$

$$\begin{cases} d \mid x \\ d \mid y \end{cases} \Rightarrow d \mid 11x - 5y \Rightarrow d \mid 7 \Rightarrow \boxed{d \in \{1;7\}}$$

ب- تعيين كل الثنائيات $\boldsymbol{(x;y)}$ من $\mathbb{N}^2$ حلول المعادلة $(\mathbf{1})$ ، حيث $\boldsymbol{d = 1}$

$$d = 7 \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 0[7] \\ y \equiv 0[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5k+2 \equiv 0[7] \\ 11k+3 \equiv 0[7] \end{cases} \Rightarrow 6k+1 \equiv 0[7] \Rightarrow k \equiv 1[7] \Rightarrow k$$
$$= 7k' + 1$$

$$d = 1 \Rightarrow \boxed{S = \{(5k+2;11k+3)\} \,;\, k \in \mathbb{N} \,;\; k \neq 7k'+1}$$

حل التمرين 92 :

.1 دراسة حسب قيم العدد الطبيعي $\boldsymbol{n}$ بواقي قسمة العدد $\boldsymbol{2^n}$ على 11

$$2^{10k} \equiv 1[11] \qquad 2^{10k+1} \equiv 2[11] \qquad 2^{10k+2} \equiv 4[11] \qquad 2^{10k+3} \equiv 8[11]$$
$$2^{10k+4} \equiv 5[11] \qquad 2^{10k+5} \equiv 10[11] \qquad 2^{10k+6} \equiv 9[11] \qquad 2^{10k+7} \equiv 7[11]$$
$$2^{10k+8} \equiv 3[11] \qquad 2^{10k+9} \equiv 6[11]$$

.2 تعيين الأعداد الطبيعية $\boldsymbol{n}$ حيث : $\boldsymbol{3 \times 2^{n+1} + 36 \equiv 0[11]}$

$$3 \times 2^{n+1} + 36 \equiv 0[11] \Rightarrow 3 \times 2^{n+1} + 3 \equiv 0[11] \Rightarrow 3(2^{n+1}+1) \equiv 0[11]$$
$$\xRightarrow[\text{3 أولي مع 11}]{} 2^{n+1} + 1 \equiv 0[11] \Rightarrow 2^{n+1} \equiv 10[11] \Rightarrow n+1 = 10k+5$$
$$\Rightarrow \boxed{n = 10k+4 \,;\, k \in \mathbb{N}}$$

.3 $\boldsymbol{A = 10^{2n+1} + 4^{5n+1}x}$. تعيين الأعداد الصحيحة $\boldsymbol{x}$ حيث $\boldsymbol{A \equiv 0[11]}$

$$A \equiv 0[11] \Rightarrow 10^{2n+1} + 4^{5n+1}x \equiv 0[11] \Rightarrow (-1)^{2n+1} + 2^{10n+2}x \equiv 0[11]$$
$$\Rightarrow -1 + 4x \equiv 0[11] \Rightarrow 4x \equiv 1[11] \Rightarrow x \equiv 3[11]$$
$$\Rightarrow \boxed{x = 11k+3 \,;\, k \in \mathbb{Z}}$$

.4 تعيين $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ حيث $\boldsymbol{N}$ يقبل القسمة على 2 وعلى 11

$$N = \overline{28x75y} = 2.10^5 + 8.10^4 + x.10^3 + 7.10^2 + 5.10 + y$$
$$= 10^3 x + y + 280750$$

$$\begin{cases} N \equiv 0[2] \\ N \equiv 0[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10^3x + y + 280750 \equiv 0[2] \\ 10^3x + y + 280750 \equiv 0[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \equiv 0[2] \\ -x + y + 8 \equiv 0[11] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \equiv 0[2] \\ x \equiv y + 8[11] \end{cases}$$

- $y = 0 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow N = 288750$
- $y = 2 \Rightarrow x = 10$ (مرفوضة لأنّ $x < 10$)
- $y = 4 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow N = 281754$
- $y = 6 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow N = 283756$
- $y = 8 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow N = 285758$

حل التمرين 93 :

1. $x^3 \equiv x[2]$: صحيح

$x \equiv$	0	1	[2]
$x^3 \equiv$	0	1	[2]

2. إذا كان $x \equiv 2[14]$ فإنّ $x \equiv 1[7]$: خطأ

$x \equiv 2[14] \Rightarrow x = 14k + 2 \Rightarrow x = 7(2k) + 2 \Rightarrow x = 7k' + 2 \Rightarrow x \equiv 2[7]$

3. إذا كان $4x \equiv 10y[5]$ فإنّ $x \equiv 0[5]$: صحيح

$4x \equiv 10y[5] \xRightarrow[10y\equiv 0[5]]{} 4x \equiv 0[5] \xRightarrow[\text{4 أولي مع 5}]{} x \equiv 0[5]$

4. إذا كان $x \equiv 4[5]$ و $y \equiv 5[8]$ فإنّ $8x - 5y = 7$: خطأ

$$\begin{cases} x \equiv 4[5] \\ y \equiv 5[8] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5a + 4 \\ y = 8b + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x = 40a + 32 \\ 5y = 40b + 25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 8x - 5y = 40\underbrace{(a - b)}_{c} + 7 = 40c + 7$$

مثال مضاد : $a = 1 ; b = 0 ;\ x = 9 ; y = 5 ; 8x - 5y = 47$

حل التمرين 94 :

$z_A = 3 + 5i ; z_B = -4 + 2i ; z_C = 1 + 4i ;\ z' = (2 - 2i)z + 1$

1. تعيين طبيعة التحويل f وعناصره المميزة

لدينا : $a = 2 - 2i = 2\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ، منه نستنتج أنّ التحويل f تشابه مباشر نسبته $2\sqrt{2}$ ، زاويته $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ومركزه ω حيث: $z_\omega = \frac{1}{-1+2i} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$

2. لتكن النقطة B' صورة النقطة B بالتحويل f

أ. تعيين لاحقة النقطة B'

$$B' = f(B) \Rightarrow z'_B = (2-2i)z_B + 1 = (2-2i)(-4+2i) + 1 = \boxed{-3+12i}$$

ب. بيان أنّ المستقيمين (CB') و (CA) متعامدان

$$arg\left(\frac{z'_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = arg\left(\frac{-4+8i}{2+i}\right) = \arg(4i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB'}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \boxed{(CA) \perp (CB')}$$

3. بيان أنّ $\overrightarrow{CM'}$ و $\overrightarrow{CA}$ متعامدان إذا وفقط إذا كان $x + 3y = 2$

$$z' = (2-2i)z + 1 \Rightarrow x' + iy' = (2-2i)(x+iy) + 1$$

$$= (2x+2y+1) + (-2x+2y)i \Rightarrow \begin{cases} x' = 2x + 2y + 1 \\ y' = -2x + 2y \end{cases}$$

$$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; \overrightarrow{CM'}\begin{pmatrix} 2x+2y \\ -2x+2y-4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CM'} = 0 \Rightarrow 2x + 6y - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x + 3y = 2}$$

4. $x + 3y = 2 \; ... \; (E)$

أ. تحقق أنّ الثنائية $(-4; 2)$ حل للمعادلة (E)

$$-4 + 6 = 2 \Rightarrow (-4; 2) \in S_{(E)}$$

ب. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ -4 + 3(2) = 2 \end{cases} \Rightarrow x + 4 = 3(-y+2) \Rightarrow x + 4 = 3k \Rightarrow x = 3k - 4$$

$$x + 3y = 2 \Rightarrow y = -k + 2 \Rightarrow \boxed{S_{(E)} = \{(3k-4; -k+2)\} \; ; k \in \mathbb{Z}}$$

ج. استنتاج مجموعة النقط M التي إحداثياتها أعداد صحيحة من المجال $[-5; 5]$ والتي يكون من أجلها الشعاعان $\overrightarrow{CM'}$ و $\overrightarrow{CA}$ متعامدين

$$\begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ -5 \leq y \leq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 \leq 3k - 4 \leq 5 \\ -5 \leq -k + 2 \leq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq k \leq 3 \\ -3 \leq k \leq 7 \end{cases} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3\}$$

$$\boxed{M_0(-4; 2) \; ; \; M_1(-1; 1) \; ; \; M_2(2; 0) \; ; \; M_3(5; -1)}$$

حل التمرين 95 :

1. برهان أنّ n و $2n+1$ أوليان فيما بينهما

$$1(2n+1)-2(n)=1 \Rightarrow \boxed{PGCD(n;2n+1)=1 \ (\text{بيزو})}$$

2. $\alpha=n+3$ ، $\beta=2n+1$ و $\delta=PGCD(\alpha;\beta)$

أ. حساب $2\alpha-\beta$ واستنتاج القيم الممكنة للعدد δ

$$2\alpha-\beta=5\ ;\ \delta=PGCD(\alpha;\beta) \Rightarrow \begin{cases}\delta \mid \alpha \\ \delta \mid \beta\end{cases} \Rightarrow \delta \mid 2\alpha-\beta \Rightarrow \delta \mid 5$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta \in \{1;5\}}$$

ب. برهان أنّ α و β مضاعفان للعدد 5 إذا وفقط إذا كان $n-2$ مضاعف 5

$$\begin{cases}\alpha \equiv 0[5] \\ \beta \equiv 0[5]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n+3 \equiv 0[5] \ldots ① \\ 2n+1 \equiv 0[5] \ldots ②\end{cases} \underset{②-①}{\Longrightarrow} \boxed{n-2 \equiv 0[5]}$$

3. $a=n^3+2n^2-3n$ و $b=2n^2-n-1$

برهان أن العددين a و b يقبلان القسمة على $n-1$

$$a=n^3+2n^2-3n=n(n-1)(n+3) \Rightarrow \boxed{(n-1) \mid a}$$

$$b=2n^2-n-1=(n-1)(2n+1) \Rightarrow \boxed{(n-1) \mid b}$$

4. $d=PGCD(n(n+3);2n+1)$

أ. برهان أنّ δ يقسم d

$$\delta=PGCD(n+3;2n+1) \Rightarrow \begin{cases}\delta \mid n+3 \\ \delta \mid 2n+1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\delta \mid n(n+3) \\ \delta \mid 2n+1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \delta \mid PGCD(n(n+3);2n+1) \Rightarrow \boxed{\delta \mid d}$$

استنتاج أنّ $\delta=d$

$$\begin{cases}d=PGCD(n(n+3);2n+1) \\ \quad PGCD(n;2n+1)=1\end{cases} \Rightarrow d=PGCD(n+3;2n+1) \Rightarrow \boxed{\delta=d}$$

ب. استنتاج قيم Δ بدلالة n

$$\Delta=PGCD(a;b)=(n-1)PGCD(n(n+3);2n+1)=(n-1)d$$
$$=(n-1)\delta$$

- $n-2 \equiv 0[5] \Rightarrow n=5k+2 \Rightarrow \delta=5 \Rightarrow \boxed{\Delta=5(n-1)}$
- $n-2 \not\equiv 0[5] \Rightarrow n \neq 5k+2 \Rightarrow \delta=1 \Rightarrow \boxed{\Delta=n-1}$

ج. حساب Δ من أجل $n=1437$ ، ثمّ من أجل $n=2016$

$$n=1437=5(287)+2 \Rightarrow \boxed{\Delta=5(1436)=7180}$$

$$n=2016=5(403)+1 \Rightarrow \boxed{\Delta=2015}$$

حل التمرين 96 :

.1 $\begin{cases} N \equiv 5[13] \\ N \equiv 1[17] \end{cases}$

أ. تحقق أنّ 239 حل للجملة السابقة

$\begin{cases} 239 = 18 \times 13 + 5 \\ 239 = 14 \times 17 + 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} 239 \equiv 5[13] \\ 239 \equiv 1[17] \end{cases}}$

ب. بيان أنّه يمكن كتابة N على الشكل : $N = 1 + 17x = 5 + 13y$

$\begin{cases} N \equiv 5[13] \\ N \equiv 1[17] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = 13y + 5 \\ N = 17x + 1 \end{cases} \Rightarrow 17x + 1 = 13y + 5 \Rightarrow \boxed{17x - 13y = 4}$

ج. حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $17x - 13y = 4$

$\begin{cases} 17x - 13y = 4 \\ 17(1) - 13(1) = 4 \end{cases} \Rightarrow 17(x-1) = 13(y-1)$

$\begin{cases} 13 \mid 17(x-1) \\ PGCD(13;17) = 1 \end{cases} \Rightarrow 13 \mid x - 1 \Rightarrow x = 13k + 1 \,;\, y = 17k + 1$

$\boxed{S = \{(13k+1; 17k+1)\} \,;\, k \in \mathbb{Z}}$

د. استنتاج أنّه يوجد عدد صحيح نسبي k حيث : $N = 18 + 221k$

$N = 17x + 1 = 17(13k+1) + 1 \Rightarrow \boxed{N = 221k + 18}$

ه. برهان أنّ $N \equiv 18[221]$ تكافئ $\begin{cases} N \equiv 5[13] \\ N \equiv 1[17] \end{cases}$

$N \equiv 18[221] \Rightarrow N = 221k + 18 \Rightarrow \begin{cases} N = 13(17k+1) + 5 \\ N = 17(13k+1) + 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} N \equiv 5[13] \\ N \equiv 1[17] \end{cases} \ldots ①$

$\begin{cases} N \equiv 5[13] \\ N \equiv 1[17] \end{cases} \Rightarrow N = 221k + 18 \Rightarrow N \equiv 18[221] \ldots ②$

من ① و ② نستنتج أنّ $N \equiv 18[221]$ تكافئ $\begin{cases} N \equiv 5[13] \\ N \equiv 1[17] \end{cases}$

.2 إيجاد عدد طبيعي n حيث : $10^n \equiv 1[17]$

$10^n \equiv 1[17] \Rightarrow \boxed{n = 0}$

.3 إيجاد عدد طبيعي m حيث : $10^m \equiv 18[221]$

$10^m \equiv 18[221] \Rightarrow \begin{cases} 10^m \equiv 5[13] \\ 10^m \equiv 1[17] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10^m \equiv 5[13] \\ m = 0 \end{cases} \,;\, 10^0 \not\equiv 5[13]$

$\Rightarrow$ $\boxed{m \text{ غير موجود}}$

حل التمرين 97 :

1. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 10^n على 7

$n =$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
$10^n \equiv [7]$	1	3	2	6	4	5

استنتاج أنّ العدد $(29000^{81}-6)$ يقبل القسمة على 7

$$29000^{81} = 29^{81} \times 10^{243} = 29^{81} \times 10^{6(40)+3}$$

$$\begin{cases} 29 \equiv 1[7] \Rightarrow 29^{81} \equiv 1[7] \\ 10^{6(40)+3} \equiv 6[7] \end{cases} \Rightarrow 29000^{81} \equiv 6[7] \Rightarrow \boxed{29000^{81} - 6 \equiv 0[7]}$$

2. تعيين y حيث يكون العدد A مضاعفا لـ 7

$$A = 29000^{81} + \overline{3y59}\ ;\ A \equiv 0[7] \Rightarrow 3y59 \equiv 1[7]$$

$$\Rightarrow 3.10^3 + y.10^2 + 5.10 + 9 \equiv 1[7] \Rightarrow 3.6 + 2y + 5.3 + 2$$

$$\equiv 1[7] \Rightarrow 2y + 35 \equiv 1[7] \quad \Rightarrow 2y \equiv 1[7] \Rightarrow 2y \equiv 8[7]$$

$$\Rightarrow y \equiv 4[7] \Rightarrow \boxed{y = 4}$$

3. برهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $9n.4^n + 5^{2n+1} \equiv (n-1).2^{2n+1}[7]$

$$\begin{cases} 9n.4^n \equiv 2n.2^{2n}[7] \\ 5^{2n+1} \equiv (-2)^{2n+1}[7] \end{cases} \Rightarrow 9n.4^n + 5^{2n+1} \equiv n.2^{2n+1} - 2^{2n+1}[7]$$

$$\Rightarrow \boxed{9n.4^n + 5^{2n+1} \equiv (n-1).2^{2n+1}[7]}$$

4. تعيين قيّم العدد n بحيث يكون : $9n.4^n + 5^{2n+1} \equiv 0[7]$

$$9n.4^n + 5^{2n+1} \equiv 0[7] \Rightarrow (n-1).2^{2n+1} \equiv 0[7] \Rightarrow \underbrace{n-1 \equiv 0[7]}_{\text{لأنّ 2 أولي مع 7}}$$

$$\Rightarrow n \equiv 1[7] \Rightarrow \boxed{n = 7k+1\ ;k \in \mathbb{N}}$$

حل التمرين 98 :

1. تعيين الأعداد a ، b و c ، علما أنّ : $b + c = \overline{46}^a$ و $bc = \overline{545}^a$

$$\begin{cases} b + c = \overline{46}^a \\ bc = \overline{545}^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c = 4a + 6 \\ bc = 5a^2 + 4a + 5 \end{cases}$$

$$x^2 - 2(2a+3)x + (5a^2+4a+5) = 0\ \left(\text{من الشكل } x^2 - sx + p = 0\right)$$

$$\Delta' = (2a+3)^2 - (5a^2+4a+5) = -a^2 + 8a + 4\ ;$$

$$\Delta' \geq 0 \Rightarrow -a^2 + 8a + 4 \geq 0 \Rightarrow a \in \left[\underbrace{4-\sqrt{20}}_{-0,472}\ ;\underbrace{4+\sqrt{20}}_{8,472}\right]$$

$$\Rightarrow a \in \{7; 8\}\ \left(\text{لأنّ } a > 6\right)$$

- $a=7: \Delta'=11 \Rightarrow$ المعادلة ليس لها حلول في $\mathbb{N}$
- $\boxed{a=8: \Delta'=4 \Rightarrow b=17\,; c=21}$ $(b \le c$ لأنّ$)$

.2 $\mathbf{21x-17y=8 \ldots (1)}$

أ. تعيين الثنائية (x_0, x_0) حل للمعادلة (1)

$21x_0-17x_0=8 \Rightarrow 4x_0=8 \Rightarrow x_0=2 \Rightarrow \boxed{(2;2) \in S_{(1)}}$

ب. حل في $\mathbb{N}^2$ المعادلة (1)

$$\begin{cases} 21x-17y=8 \\ 21(2)-17(2)=8 \end{cases} \Rightarrow 21(x-2)=17(y-2)$$

$$\begin{cases} 17 \mid 21(x-2) \\ PGCD(17;21)=1 \end{cases} \Rightarrow 17 \mid x-2 \Rightarrow x=17k+2\,; y=21k+2$$

$\boxed{S_{(1)}=\{(17k+2;21k+2)\}\,; k \in \mathbb{N}}$

.3 دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 9^n على 13

$\boxed{9^{3k} \equiv 1[13]\,;\ 9^{3k+1} \equiv 9[13]\,;\ 9^{3k+2} \equiv 3[13]}$

.4 برهان أنّه إذا كان $(\alpha;\beta)$ حل للمعادلة (1) فإنّ :

$$\mathbf{3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2 \equiv 0[13]}$$

$(\alpha\,;\beta) \in S_{(1)} \Rightarrow 21\alpha-17\beta=8 \Rightarrow 17\beta+8=21\alpha$

$$3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2=9^{17\beta+10}-9^{21\alpha}-2=9^{(17\beta+8)+2}-9^{21\alpha}-2$$
$$=9^{21\alpha+2}-9^{21\alpha}-2=9^{21\alpha}(9^2-1)-2$$

$$\begin{cases} 9^{21\alpha} \equiv 1[13] \\ 9^2 \equiv 3[13] \end{cases} \Rightarrow 9^{21\alpha}(9^2-1)-2 \equiv 0[13]$$
$$\Rightarrow \boxed{3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2 \equiv 0[13]}$$

.5 برهان أنّه إذا كان $(x;y)$ حل للمعادلة (1) و $x \equiv 0[4]$ فإنّ : $y \equiv 0[4]$

$$\begin{cases} (x\,;y) \in S_{(1)} \\ x \equiv 0[4] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 17y=\underbrace{21x-8}_{\equiv 0[4]} \\ x \equiv 0[4] \end{cases} \Rightarrow 17y \equiv 0[4] \Rightarrow \boxed{y \equiv 0[4]}$$

.6 تعيين $(x;y)$ حلول المعادلة (1) التي يكون من أجلها $PGCD(x;y)=4$

$d=PGCD(x;y) \Rightarrow d \mid 8 \Rightarrow d \in \{1;2;4;8\}$

$$d=4 \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 0[4] \\ y \equiv 0[4] \\ d \neq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 17k+2 \equiv 0[4] \\ 21k+2 \equiv 0[4] \\ d \neq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=4k'+2 \\ d \neq 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 17(4k'+2)+2 \\ y = 21(4k'+2)+2 \\ d \neq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4(17k'+9) \\ y = 4(21k'+11) \\ \underbrace{PGCD(17k'+9; 21k'+11)}_{d'} = 1 \end{cases}$$

بما أنّ $d \in \{1; 2; 4; 8\}$ ، فإنّ $d' \in \{1; 2\}$ ، ويكون $d' = 1$ من أجل k' زوجي أي :

$$k' = 2k'' \Rightarrow \begin{cases} x = 4(34k''+9) \\ y = 4(42k''+11) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \{(136k''+36\,; 168k''+44)\}\,; k'' \in \mathbb{N}}$$

حل التمرين 99 :

1. $(x+1)^2 = 9+5y \ldots (E)$

أ. بيان أنّه إذا كان $(x; y)$ حل للمعادلة (E) فإنّ : $x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 2[5]$

$$(x; y) \in S_{(E)} \Rightarrow (x+1)^2 - 4 = 5(y+1) \Rightarrow (x+1)^2 \equiv 4[5]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1 \equiv 2[5] \\ \text{أو} \\ x+1 \equiv 3[5] \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x \equiv 1[5] \\ \text{أو} \\ x \equiv 2[5] \end{cases}}$$

ب. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

$$x \equiv 1[5] \Rightarrow x = 5k+1 \Rightarrow 5y = (5k+2)^2 - 9 = 25k^2 + 20k - 5 \Rightarrow y = 5k^2 + 4k - 1$$

$$x \equiv 2[5] \Rightarrow x = 5k+2 \Rightarrow 5y = (5k+3)^2 - 9 = 25k^2 + 30k \Rightarrow y = 5k^2 + 6k$$

$$\boxed{S = \{(5k+1; 5k^2+4k-1); (5k+2; 5k^2+6k)\}\,; k \in \mathbb{Z}}$$

2. بيان أنّ $PGCD(x; y)$ يقسم العدد 8

$$(x+1)^2 = 9+5y \Rightarrow x^2 + 2x - 5y = 8$$

$$d = PGCD(x; y) \Rightarrow \begin{cases} d \mid x \\ d \mid y \end{cases} \Rightarrow d \mid x^2 + 2x - 5y \Rightarrow \boxed{d \mid 8}$$

3. حل في $\mathbb{N}^2$ الجملة : $\begin{cases} \overline{121}^x = \overline{59}^y \\ PGCD(x; y) = 8 \\ x \equiv 1[5] \end{cases}$

$$\begin{cases} \overline{121}^x = \overline{59}^y \\ x \equiv 1[5] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = 9+5y \\ x = 5k+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5k+1 \\ y = 5k^2+4k-1 \end{cases}$$

$$PGCD(x;y)=8 \Rightarrow \begin{cases} 5k+1 \equiv 0[8] \\ 5k^2+4k-1 \equiv 0[8] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k(5k+1) \equiv 0[8] \ldots ① \\ 5k^2+4k-1 \equiv 0[8] \ldots ② \end{cases}$$

$$\underset{②-①}{\Longrightarrow} 3k-1 \equiv 0[8] \Rightarrow 3k \equiv 1[8] \Rightarrow 3k \equiv 9[8] \Rightarrow k \equiv 3[8]$$

$$\Rightarrow k = 8k'+3 \Rightarrow \begin{cases} x = 5(8k'+3)+1 \\ y = 5(8k'+3)^2+4(8k'+3)-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{S=\left\{\left(40k'+16; 320k'^2+272k'+56\right)\right\}; k' \in \mathbb{N}}$$

حل التمرين 100 :

$a = 3n+2$ ، $b = 2n+1$ و $c = n+2$ حيث n عدد طبيعي

1. بيان أنّ a و b أوليان فيما بينهما

$2a-3b = 2(3n+2)-3(2n+1) = 1 \Rightarrow PGCD(a;b) = 1$ (بيزو)

2. التحقق أنّ $a = 3c-4$

$3c-4 = 3(n+2)-4 = 3n+2 \Rightarrow \boxed{a = 3c-4}$

استنتاج القيم الممكنة لـ $PGCD(a;c)$

$$d = PGCD(a;c) \Rightarrow \begin{cases} d \mid a \\ d \mid c \end{cases} \Rightarrow d \mid 3c-a \Rightarrow d \mid 4 \Rightarrow \boxed{d \in \{1;2;4\}}$$

3. تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\frac{a}{c}$ عنصرا من $\mathbb{N}$

$$\frac{a}{c} = \frac{3c-4}{c} = 3-\frac{4}{c}; \frac{a}{c} \in \mathbb{N} \Rightarrow \begin{cases} c \mid 4 \\ c \neq 1 \end{cases} \Rightarrow n+2 \in \{2;4\} \Rightarrow \boxed{n \in \{0;2\}}$$

4. تعيين قيمة العدد الطبيعي n التي تحقق : $\begin{cases} PGCD(a;c) = 4 \\ PPCM(a;c) = 8 \end{cases}$

$$\begin{cases} d = 4 \\ m = 8 \end{cases} \Rightarrow ac = 32 \Rightarrow (3n+2)(n+2) = 32 \Rightarrow 3n^2+8n-28 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 2}$$

حل التمرين 101 :

1. $11x-7y = 5 \ldots (E)$

أ. التحقق أنّ الثنائية $(10;15)$ حل للمعادلة (E)

$$11(10)-7(15) = 110-105 = 5 \Rightarrow \boxed{(10;15) \in S_{(E)}}$$

حل المعادلة (E)

$$\begin{cases} 11x-7y = 5 \\ 11(10)-7(15) = 5 \end{cases} \Rightarrow 11(x-10) = 7(y-15)$$

$$\begin{cases} 7 \mid 11(x-10) \\ PGCD(7;11)=1 \end{cases} \Rightarrow 7 \mid x-10 \Rightarrow x = 7k+10\,;\, y = 11k+15$$

$$\boxed{S = \{(7k+10\,;11k+15)\}\,;\ k \in \mathbb{Z}}$$

ب. تعيين عدد الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق الشرطين :
$0 \le x \le 50$ و $0 \le y \le 50$

$$\begin{cases} 0 \le x \le 50 \\ 0 \le y \le 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le 7k+10 \le 50 \\ 0 \le 11k+15 \le 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{10}{7} \le k \le \frac{40}{7} \\ -\frac{15}{11} \le k \le \frac{35}{11} \end{cases}$$

$$\Rightarrow k \in \{-1;0;1;2;3\} \Rightarrow \boxed{\text{عدد الثنائيات هو } 5}$$

2. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على 11

$3^{5k} \equiv 1[11]\,;\ 3^{5k+1} \equiv 3[11]\,;\ 3^{5k+2} \equiv 9[11]\,;\ 3^{5k+3} \equiv 5[11]\,;$
$3^{5k+4} \equiv 4[11]\,;$

3. تعيين باقي قسمة العدد $(4 \times 69^{10n+6} + 7 \times 58^{20n+13} - 8)$ على 11

$$69 \equiv 3[11] \Rightarrow 69^{10n+6} \equiv 3^{5(2n+1)+1}[11] \Rightarrow 69^{10n+6} \equiv 3[11]$$
$$\Rightarrow \mathbf{4 \times 69^{10n+6} \equiv 1[11]}$$
$$58 \equiv 3[11] \Rightarrow 58^{20n+13} \equiv 3^{5(4n+2)+3}[11] \Rightarrow 58^{20n+13} \equiv 5[11]$$
$$\Rightarrow \mathbf{7 \times 58^{20n+13} \equiv 2[11]}$$
$$4 \times 69^{10n+6} + 7 \times 58^{20n+13} - 8 \equiv 1+2-8[11]$$
$$\boxed{4 \times 69^{10n+6} + 7 \times 58^{20n+13} - 8 \equiv 6[11]}$$

4. $y = \overline{131}^x$ و $z = \overline{101}^x$

أ. بيان أنّه يمكن كتابة الجداء $x \times y \times z$ في الأساس x دون معرفة x

$$\begin{cases} y = \overline{131}^x \\ z = \overline{101}^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2+3x+1 \\ z = x^2+1 \end{cases} \Rightarrow xyz = x(x^2+3x+1)(x^2+1)$$
$$xyz = (x^3+3x^2+x)(x^2+1) = x^5+3x^4+2x^3+3x^2+x+1$$
$$\Rightarrow \boxed{xyz = \overline{132311}^x}$$

ب. تعيين الأعداد الطبيعية x ، y ، z علما أنّ : $x+y+z=50$

$$x+y+z=50 \Rightarrow x+x^2+3x+1+x^2+1=50 \Rightarrow 2x^2+4x-48=0$$
$$\Rightarrow \boxed{x=4\,;y=29\,;z=17}$$

حل التمرين 102 :

1. **تعيين القاسم المشترك الأكبر للعددين 324 و 405**

$$\begin{cases} 324 = 2^2 \times 3^4 \\ 405 = 3^4 \times 5 \end{cases} \Rightarrow PGCD(324; 405) = 3^4 = 81$$

2. $\boldsymbol{324x - 405y = \alpha \dots (*)}$ ، $\boldsymbol{\alpha \in \mathbb{Z}^*}$

أ- **تعيين شرط على α حتى تقبل المعادلة $(*)$ حلولا في $\mathbb{Z}^2$**

تقبل المعادلة $(*)$ حلولا في $\mathbb{Z}^2$ إذا وفقط إذا :

$$PGCD(324; 405) \mid \alpha \Rightarrow 81 \mid \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = 81k\ ; k \in \mathbb{Z}}$$

3. $\boldsymbol{\alpha = -81}$

أ- **حل المعادلة $(*)$ علما أنّ $(x_0; y_0)$ حل خاص لها ويحقق $x_0 - y_0 = 0$**

$$\begin{cases} 4x_0 - 5y_0 = -1 \\ x_0 - y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_0 - 5x_0 = -1 \\ x_0 = y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_0 = -1 \\ x_0 = y_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(x_0; y_0) = (1; 1)}$$

$$\begin{cases} 4x - 5y = -1 \\ 4(1) - 5(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow 4(x-1) = 5(y-1)$$

$$\begin{cases} 5 \mid 4(x-1) \\ PGCD(4; 5) = 1 \end{cases} \Rightarrow 5 \mid x - 1 \Rightarrow x = 5k + 1\ ; y = 4k + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \{(5k+1; 4k+1)\}\ ; k \in \mathbb{Z}}$$

ب- **تعيين كل الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة $(*)$ حيث يكون العدد $\frac{8x+24}{y+1}$ صحيحا**

$$\frac{8x+24}{y+1} = \frac{8(5k+1)+24}{(4k+1)+1} = \frac{40k+32}{4k+2} = \frac{10(4k+2)+12}{4k+2}$$

$$= 10 + \frac{12}{4k+2} = 10 + \frac{6}{2k+1}$$

$$\frac{8x+24}{y+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2k+1 \mid 6 \Rightarrow 2k+1 \in \{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\}$$

$$\Rightarrow 2k \in \{-7; -4; -3; -2; 0; 1; 2; 5\} \Rightarrow k \in \{-2; -1; 0; 1\}$$

$$\Rightarrow \boxed{(x; y) \in \{(-9; -7); (-4; -3); (1; 1); (6; 5)\}}$$

4. **تعيين a و b ، ثمّ حساب العدد N**

$$N = \overline{a6}^9 = \overline{b1ba}^2 \Rightarrow 9a + 6 = 8b + 4 + 2b + a \Rightarrow 8a - 10b = -2$$

$$\Rightarrow 4a - 5b = -1 \Rightarrow \begin{cases} a = 5k + 1 \\ b = 4k + 1 \end{cases} \Rightarrow a = b = 1$$ (لأنّ a و b أصغر من 2)

$$\Rightarrow \boxed{N = 15}$$

حل التمرين 103 :

1. $3x - 5y = 6 \dots (E)$

أ. **بيان أنّه إذا كان $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإنّ y مضاعف للعدد 3**

$$3x - 5y = 6 \Rightarrow 5y = 3(x-2) \Rightarrow 5y \equiv 0[3] \Rightarrow \boxed{y \equiv 0[3]}$$

ب. **تعيين حل خاص للمعادلة (E) ، ثمّ حل في $\mathbb{Z}^2$ هذه المعادلة**

من أجل $y = 0$ نجد $x = 2$ ، منه $(2;0)$ حل خاص للمعادلة (E)

$$\begin{cases} 3x - 5y = 6 \\ 3(2) - 5(0) = 6 \end{cases} \Rightarrow 3(x-2) = 5y \Rightarrow \boxed{S = \{(5k+2; 3k)\}\,; k \in \mathbb{Z}}$$

2. **تعيين جميع الثنائيات $(x;y)$ حلول الجملة :** $\begin{cases} 3x - 5y = 6 \\ y \equiv x^2[5] \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x - 5y = 6 \\ y \equiv x^2[5] \end{cases} \Rightarrow 3k \equiv (5k+2)^2[5] \Rightarrow 3k \equiv 2k^2 + 20k + 4[5]$$

$$\Rightarrow 3k \equiv 4[5] \Rightarrow k \equiv 3[5] \Rightarrow k = 5k' + 3$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \{(25k' + 17; 15k' + 9)\}\,; k' \in \mathbb{Z}}$$

حل التمرين 104 :

1. **تعيين قيم العدد الصحيح x الذي يحقق :** $13x + 1 \equiv 0[4x+1]$

$$13x + 1 \equiv 0[4x+1] \Rightarrow -4(13x+1) + 13(4x+1) \equiv 0[4x+1]$$

$$\Rightarrow 9 \equiv 0[4x+1] \Rightarrow 4x + 1 \mid 9 \Rightarrow 4x + 1 \in \{-9; -3; -1; 1; 3; 9\}$$

$$\Rightarrow 4x \in \{-10; -4; -2; 0; 2; 8\} \Rightarrow \boxed{x \in \{-1; 0; 2\}}$$

2. **حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 1885 و 580**

$$\begin{cases} 1885 = 5 \times 13 \times 29 \\ 580 = 2^2 \times 5 \times 29 \end{cases} \Rightarrow PGCD(1885; 580) = 5 \times 29 = \boxed{145}$$

3. $1885x - 580y = \alpha \dots (E)$

إيجاد الشرط اللازم والكافي الذي يحققه α حتى يكون للمعادلة (E) حلولا في $\mathbb{Z}^2$

يكون للمعادلة (E) حلولا في $\mathbb{Z}^2$ إذا وفقط إذا $\alpha \mid PGCD(1885; 580)$ ،

أي $\alpha \mid 145$ ، ومنه $\alpha = 145k$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$

4. $\alpha = 1305$

أ- **تعيين $(x_0; y_0)$ حلا خاصا للمعادلة (E) الذي يحقق :** $x_0 + y_0 = 2$

$$\begin{cases} 13x_0 - 4y_0 = 9 \\ x_0 + y_0 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13x_0 - 4y_0 = 9 \\ 4x_0 + 4y_0 = 8 \end{cases} \Rightarrow 17x_0 = 17 \Rightarrow \boxed{(x_0; y_0) = (1; 1)}$$

ب- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

$$\begin{cases} 13x - 4y = 9 \\ 13(1) - 4(1) = 9 \end{cases} \Rightarrow 13(x-1) = 4(y-1)$$

$$\begin{cases} 4 \mid 13(x-1) \\ PGCD(4;13) = 1 \end{cases} \Rightarrow 4 \mid x-1 \Rightarrow x = 4x+1\,;\, y = 13k+1$$

$$\boxed{S_{(E)} = \{(4k+1; 13k+1)\}\,;\, k \in \mathbb{Z}}$$

ج- تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي يكون من أجلها x قاسما لـ y

$$x \mid y \Rightarrow 13k+1 \equiv 0[4k+1] \Rightarrow k \in \{-1;0;2\}$$

$$\boxed{(x;y) \in \{(-3;-12);(1;1);(5;14)\}}$$

حل التمرين 105 :

1. تعيين باقي قسمة العدد 5^{3n} على 31 من أجل كل عدد طبيعي n

$$5^3 \equiv 1[31] \Rightarrow \boxed{5^{3n} \equiv 1[31]}$$

2. استنتاج باقي قسمة 5^{3n+1} و 5^{3n+2} على 31

$$5^{3n+1} = 5^{3n}.5 \Rightarrow \boxed{5^{3n+1} \equiv 5[31]}\ ;\ 5^{3n+2} = 5^{3n}.5^2 \Rightarrow \boxed{5^{3n+2} \equiv 25[31]}$$

تعيين باقي قسمة العدد 1431^{2009} على 31

$$1431 \equiv 5[31] \Rightarrow 1431^{2009} \equiv 5^{3(669)+2}[31] \Rightarrow \boxed{1431^{2009} \equiv 25[31]}$$

3. تعيين باقي قسمة العدد $6^{6n+2} + 36^{3n+1} + 5^{3n+2}$ على 31

$$5^{3n+2} + 36^{3n+1} + 6^{6n+2} = 5^{3n+2} + 36^{3n+1} + 36^{3n+1} = 5^{3n+2} + 2.36^{3n+1}$$

$$36 \equiv 5[31] \Rightarrow 36^{3n+1} \equiv 5^{3n+1}[31] \Rightarrow 36^{3n+1} \equiv 5[31]$$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{5^{3n+2}}_{\equiv 25[31]} + \underbrace{2.36^{3n+1}}_{\equiv 10[31]} \equiv 4[31]}$$

4. حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة $5^{3n+2} + 36^{3n+1} + x \equiv 0[31]$

$$\underbrace{5^{3n+2}}_{\equiv 25[31]} + \underbrace{36^{3n+1}}_{\equiv 5[31]} + x \equiv 0[31] \Rightarrow 30 + x \equiv 0[31] \Rightarrow x \equiv 1[31]$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 31k+1\,;\, k \in \mathbb{Z}}$$

5. تعيين قيم العدد الصحيح m حتى يكون : $5^{3m} + 36^{3m+1} + m^2 \equiv 3[31]$

$$\underbrace{5^{3m}}_{\equiv 1[31]} + \underbrace{36^{3m+1}}_{\equiv 5[31]} + m^2 \equiv 3[31] \Rightarrow 6 + m^2 \equiv 3[31] \Rightarrow m^2 \equiv 28[31]$$

$$\Rightarrow m^2 \equiv 121[31] \Rightarrow (m-11)(m+11) \equiv 0[31]$$

$\Rightarrow m \equiv 11[31]$ أو $m \equiv 20[31] \Rightarrow \boxed{m = 31k+11 \text{ أو } m = 31k+20}$

.6 تعيين القيم الممكنة للعدد n ، واثبات أنّ : $5^{2n}+5^{n}+1\equiv 0[31]$

$n=3\alpha+2\ ;\ \alpha\in\mathbb{N}$ أو $n=3\alpha+1$

• $n=3\alpha+1\Rightarrow 5^{6\alpha+2}+5^{3\alpha+1}+1\equiv\underbrace{5^{3(2\alpha)+2}}_{\equiv 25[31]}+\underbrace{5^{3\alpha+1}}_{\equiv 5[31]}+1\equiv 0[31]$

• $n=3\alpha+2\Rightarrow 5^{6\alpha+4}+5^{3\alpha+2}+1\equiv\underbrace{5^{3(2\alpha+1)+1}}_{\equiv 5[31]}+\underbrace{5^{3\alpha+2}}_{\equiv 25[31]}+1\equiv 0[31]$

حل التمرين 106 :

.1 التحقق أنّ العدد 67 أولي وتحليل العدد 2010 إلى جداء عوامل أولية

$\sqrt{67}\approx 8{,}185$. بما أنّ العدد 67 لا يقبل القسمة على 2 ، 3 ، 5 و 7 فهو أوّلي

$2010=2\times 3\times 5\times 67$

.2 $14x+67y=2010\ ...\ (1)$

أ. تحقق أنّ للمعادلة (1) حلولا في $\mathbb{Z}^2$

بما أنّ $PGCD(14;67)=1$ ، فإنّ للمعادلة (1) حلولا في $\mathbb{Z}^2$

ب. بيان أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإنّ x مضاعف للعدد 67

$14x+67y=2010\Rightarrow 14x=67(30-y)\Rightarrow 14x\equiv 0[67]\Rightarrow\boxed{x\equiv 0[67]}$

استنتاج حلول المعادلة (1)

$$\begin{cases}x=67k\\67y=-14x+2010\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=67k\\y=-14k+30\end{cases}$$

$$\Rightarrow\boxed{S_{(1)}=\{(67k;-14k+30)\}\ ;k\in\mathbb{Z}}$$

ج. تعيين الحلول الطبيعية للمعادلة (1)

$$(x;y)\in\mathbb{N}^2\Rightarrow\begin{cases}67k\geq 0\\-14k+30\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k\geq 0\\k\leq 2{,}14\end{cases}\Rightarrow k\in\{0;1;2\}$$

$$\Rightarrow\boxed{S_{(1)}=\{(0;30)\ ;(67;16)\ ;(134;2)\}}$$

.3 تعيين قيم a و b حيث : $14m+67d=2010$

$$14m+67d=2010\Rightarrow(m;d)=(134;2)\Rightarrow a'\times b'=\frac{m}{d}=67$$

$$\Rightarrow(a';b')\in\{(1;67);(67;1)\}\Rightarrow\boxed{(a;b)\in\{(2;134);(134;2)\}}$$

ملاحظة : الحالة $(m;d)=(0;30)$ مرفوضة لأنّ a و b غير معدومين

وأمّا الحالة $(m;d)=(67;16)$ مرفوضة لأنّ 16 لا يقسم 67

حل التمرين 107 :

1. **تعيين $PGCD(2405; 407; 111)$**

$$\begin{cases} 2405 = 5 \times 13 \times 37 \\ 407 = 11 \times 37 \\ 111 = 3 \times 37 \end{cases} \Rightarrow \boxed{PGCD(2405; 407; 111) = 37}$$

2. **$407x + 111y = 2405 \ldots (1)$**

أ. **إيجاد الثنائية $(x_0; y_0)$ من (E) حيث : $2x_0^2 - 3y_0 = 11$**

$$\begin{cases} 407x_0 + 111y_0 = 2405 \\ 2x_0^2 - 3y_0 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11x_0 + 3y_0 = 65 \\ 2x_0^2 - 3y_0 = 11 \end{cases} \Rightarrow 2x_0^2 + 11x_0 - 76 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(x_0; y_0) = (4; 7)}$$

ب. **حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1)**

$$\begin{cases} 11x + 3y = 65 \\ 11(4) + 3(7) = 65 \end{cases} \Rightarrow 11(x-4) = 3(-y+7)$$

$$\begin{cases} 3 \mid 11(x-4) \\ PGCD(3; 11) = 1 \end{cases} \Rightarrow 3 \mid x-4 \Rightarrow x = 3k+4 \; ; y = -11k+7$$

$$\boxed{S = \{(3k+4\; ; -11k+7)\}\; ; k \in \mathbb{Z}}$$

3. **تعيين الثنائيات $(x; y)$ من (E) التي تحقق : $x > -5$ و $y > -5$**

$$\begin{cases} x > -5 \\ y > -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3k+4 > -5 \\ -11k+7 > -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > -3 \\ k < 1{,}09 \end{cases} \Rightarrow k \in \{-2; -1; 0; 1\}$$

$$\Rightarrow \boxed{(x; y) \in \{(-2; 29)\; ;\; (1; 18)\; ;\; (4; 7)\; ;\; (7; -4)\}}$$

4. **تعيين القيم الممكنة لـ $PGCD(x; y)$**

$$d = PGCD(x; y) \Rightarrow \begin{cases} d \mid x \\ d \mid y \end{cases} \Rightarrow d \mid 11x + 3y \Rightarrow d \mid 65 \Rightarrow \boxed{d \in \{1; 5; 13; 65\}}$$

5. **تعيين الثنائيات $(a; b)$ الطبيعية الأولية فيما بينها حيث : $11d + 3m = 65$**

$$\begin{cases} 11d + 3m = 65 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 18 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow ab = 18$$

$$\Rightarrow \boxed{(a; b) \in \{(1; 18)\; ;\; (18; 1)\; ;\; (2; 9)\; ;\; (9; 2)\}}$$

حل التمرين 108 :

1. **دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10**

$$3^{4k} \equiv 1[10]\; ;\; 3^{4k+1} \equiv 3[10]\; ;\; 3^{4k+2} \equiv 9[10]\; ;\; 3^{4k+3} \equiv 7[10]$$

.2 بيان أنّ العدد : $(33^{16n+2}-2\times109^{8n+1}-11)$ يقبل القسمة على 10

$$\begin{cases}33\equiv3[10]\\109\equiv3^2[10]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}33^{16n+2}\equiv3^{4(4n)+2}[10]\\109^{8n+1}\equiv3^{4(4n)+2}[10]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}33^{16n+2}\equiv9[10]\\109^{8n+1}\equiv9[10]\end{cases}$$

$$\Rightarrow\boxed{\underbrace{33^{16n+2}-2\times109^{8n+1}-11}_{\equiv-20[10]}\equiv0[10]}$$

.3 تعيين قيم العدد الطبيعي n حيث : $\begin{cases}7\times3^{n+1}-1\equiv0[10]\\10<n\leq25\end{cases}$

$$\begin{cases}7\times3^{n+1}-1\equiv0[10]\\10<n\leq25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3\times3^{n+1}\equiv-9[10]\\10<n\leq25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3^{n+1}\equiv3[10]\\10<n\leq25\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}n=4k\\10<n\leq25\end{cases}\Rightarrow\boxed{n\in\{12;16;20;24\}}$$

.4 $A=\overline{xx02102}^3=\overline{y67y}^9$

أ. تعيين العددين الطبيعيين x و y

$A=\overline{xx02102}^3=\overline{y67y}^9$

$\Rightarrow3^6x+3^5x+2(3^3)+3^2+2=9^3y+6(9^2)+7(9)+y$

$\Rightarrow972x-730y=484\Rightarrow486x-365y=242\Rightarrow\boxed{(x;y)=(2;2)}$

لأنّ x عدد طبيعي أصغر من 3 والحالتان $x=0$ و $x=1$ مرفوضتان لأنّ $y\in\mathbb{N}$

ب. حساب A في النظام العشري

$A=2(9^3)+6(9^2)+7(9)+2\Rightarrow\boxed{A=2009}$

ج. كتابة A في النظام ذي الأساس 7

$\boxed{A=\overline{5600}^7}$

حل التمرين 109 :

.1 $\alpha=n^2+4n+7$ و $\beta=n+1$

أ. بيان أنّ : $PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(\beta;4)$

$n^2+4n+7=(n+1)(n+3)+4\Rightarrow\alpha=\beta(n+3)+4$

$\Rightarrow\boxed{PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(\beta;4)}$; (لأنّ $PGCD(a;b)=PGCD(b;r)$)

ب. مناقشة حسب قيم n ، القاسم المشترك الأكبر للعددين α وβ

$d=PGCD(\alpha;\beta)\Rightarrow d\mid4\Rightarrow d\in\{1;2;4\}$

$d=4\Rightarrow n+1\equiv0[4]\Rightarrow n\equiv3[4]\Rightarrow n=4k+3\,;k\in\mathbb{Z}$

$$d=2\Rightarrow\begin{cases}n+1\equiv0[2]\\n\neq4k+3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n\equiv1[2]\\n\neq4k+3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=2k'+1\\n\neq2(2k+1)+1\end{cases}$$

$\Rightarrow k'=2k\Rightarrow n=4k+1\,;k\in\mathbb{Z}$

- من أجل $n = 4k$ أو $n = 4k + 2$: $PGCD(\alpha;\beta) = 1$
- من أجل $n = 4k + 1$: $PGCD(\alpha;\beta) = 2$
- من أجل $n = 4k + 3$: $PGCD(\alpha;\beta) = 4$

ج. تعيين مجموعة قيم العدد n بحيث يكون الكسر $\frac{\alpha}{\beta}$ غير قبال للاختزال

يكون الكسر $\frac{\alpha}{\beta}$ غير قبال للاختزال لمّا يكون $PGCD(\alpha;\beta) = 1$ وذلك من أجل $n = 4k$ أو $n = 4k + 2$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$

2. تعيين مجموعة الأعداد الصحيحة n بحيث يكون : $\alpha \equiv 0[\beta]$

طريقة أولى :

$$\alpha \equiv 0[\beta] \Rightarrow \beta \mid \alpha \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Z}\ ;\ \alpha = \beta(n+3) + 4 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = n + 3 + \frac{4}{n+1}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n + 1 \mid 4 \Rightarrow n + 1 \in \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$$

$$\Rightarrow \boxed{n \in \{-5; -3; -2; 0; 1; 3\}}$$

طريقة ثانية :

$$\alpha \equiv 0[\beta] \Rightarrow n^2 + 4n + 7 \equiv 0[n+1]$$

$$\Rightarrow (n^2 + 4n + 7) - (n+1)(n+3) \equiv 0[n+1] \Rightarrow 4 \equiv 0[n+1]$$

$$\Rightarrow n + 1 \in \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\} \Rightarrow \boxed{n \in \{-5; -3; -2; 0; 1; 3\}}$$

3. $A = n^3 + n^2 - 5n - 21$ ، $B = n^2 - 2n - 3$ ، $n > 3$

أ. بيان أنّ كلا من العددين A وB يقبل القسمة على $(n-3)$

$$A = (n-3)(n^2 + 4n + 7) \Rightarrow \boxed{(n-3) \mid A}$$

$$B = (n-3)(n+1) \Rightarrow \boxed{(n-3) \mid B}$$

ب. استنتاج تبعا لقيم n وبدلالة n ، $PGCD(A;B)$

$$PGCD(A;B) = (n-3)PGCD(\alpha;\beta)$$

- $n = 4k$ أو $n = 4k + 2$: $PGCD(A;B) = n - 3$
- $n = 4k + 1$: $PGCD(A;B) = 2(n-3)$
- $n = 4k + 3$: $PGCD(A;B) = 4(n-3)$

حل التمرين 110 :

1. تعيين مجموعة الأعداد الصحيحة x بحيث : $4x \equiv 33[5]$

$$4x \equiv 33[5] \Rightarrow 4x \equiv 3[5] \Rightarrow 4x \equiv 8[5] \Rightarrow x \equiv 2[5]$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 5k + 2\ ;\ k \in \mathbb{Z}}$$

2. $4x-5y=33 \ldots (E)$

أ. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

$4x-5y=33 \Rightarrow 4x-33=5y \Rightarrow 4x \equiv 33[5] \Rightarrow x=5k+2$

$5y=4(5k+2)-33=20k-25 \Rightarrow y=4k-5$

$\boxed{S=\{(5k+2\,;4k-5)\}\,;k\in\mathbb{Z}}$

ب. استنتاج حلول الجملة $\begin{cases}\lambda\equiv 55[5]\\ \lambda\equiv 22[4]\end{cases}$

$\begin{cases}\lambda\equiv 55[5]\\ \lambda\equiv 22[4]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda=5y+55\\ \lambda=4x+22\end{cases} \Rightarrow 4x-5y=33 \Rightarrow x=5k+2$

$\lambda=4(5k+2)+22 \Rightarrow \boxed{\lambda=20k+30\,;\ k\in\mathbb{Z}}$

تعيين باقي قسمة λ على 20

$\lambda=20k+30=20(k+1)+10 \Rightarrow \boxed{\lambda\equiv 10[20]}$

ج. تعيين حلول المعادلة (E) التي تحقق : $|x+y+3|<27$

$|x+y+3|<27 \Rightarrow |5k+2+4k-5+3|<27 \Rightarrow |9k|<27$

$\Rightarrow |k|<3 \Rightarrow -3<k<3 \Rightarrow k\in\{-2;-1;0;1;2\}$

$\Rightarrow (x;y)\in\{(-8;-13)\ ;\ (-3;-9)\ ;\ (2;-5)\ ;\ (7;-1)\ ;\ (12;3)\}$

3. أ. تعيين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 11

$5^{5k}\equiv 1[11]; 5^{5k+1}\equiv 5[11]; 5^{5k+2}\equiv 3[11]; 5^{5k+3}\equiv 4[11]; 5^{5k+4}\equiv 9[11]$

ب. برهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$\underbrace{\mathbf{10^{10n}+16^{5n-4}+27^{5n+2}+38^{5n+3}+49^{5n-1}}}_{A}\equiv \mathbf{0[11]}$$

$10\equiv -1[11] \Rightarrow \mathbf{10^{10n}\equiv 1[11]}$

$16\equiv 5[11] \Rightarrow 16^{5n-4}\equiv 5^{5(n-1)+1}[11] \Rightarrow \mathbf{16^{5n-4}\equiv 5[11]}$

$27\equiv 5[11] \Rightarrow \mathbf{27^{5n+2}\equiv 3[11]}\,; 38\equiv 5[11] \Rightarrow \mathbf{38^{5n+3}\equiv 4[11]}$

$49\equiv 5[11] \Rightarrow 49^{5n-1}\equiv 5^{5(n-1)+4}[11] \Rightarrow \mathbf{49^{5n-1}\equiv 9[11]}$

$A\equiv 1+5+3+4+9[11] \Rightarrow \boxed{A\equiv 0[11]}$

ج. تعيين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية : $\begin{cases}\mathbf{n-5^n\equiv 0[11]}\\ \mathbf{n\equiv 2[5]}\end{cases}$

$\begin{cases}n-5^n\equiv 0[11]\\ n\equiv 2[5]\end{cases} \Rightarrow n-5^{5k+2}\equiv 0[11] \Rightarrow n\equiv 3[11]$

$\Rightarrow \boxed{n=11\alpha+3\,;\ \alpha\in\mathbb{N}}$

4. تعيين العددين الطبيعيين a و b بحيث يكون N قابلا للقسمة على 33

$N=\overline{abbaba}^4=(4^5+4^2+1)a+(4^4+4^3+4)b$

$N \equiv 0[33] \Rightarrow \begin{cases} N \equiv 0[3] \\ N \equiv 0[11] \end{cases}$

$4 \equiv 1[3] \Rightarrow \begin{cases} 4^5 + 4^2 + 1 \equiv 0[3] \\ 4^4 + 4^3 + 4 \equiv 0[3] \end{cases} \Rightarrow N \equiv 0[3]$ (محققة دوما)

$N \equiv 0[11] \Rightarrow 1041a + 324b \equiv 0[11] \Rightarrow 7a + 5b \equiv 0[11] \Rightarrow 5b \equiv 4a[11]$

بما أنّ $a < 4$ و $a \neq 0$ ، فإنّ القيم الممكنة للعدد a هي : 1 ، 2 و 3

- $a = 1: 5b \equiv 4[11] \Rightarrow b \equiv 3[11] \Rightarrow b = 3 \Rightarrow \boxed{(a;b) = (1;3)}$
- $a = 2: 5b \equiv 8[11] \Rightarrow b \equiv 6[11]$ (مرفوضة لأنّ $b < 4$)
- $a = 3: 5b \equiv 1[11] \Rightarrow b \equiv 9[11]$ (مرفوضة لأنّ $b < 4$)

كتابة N في النظام العشري

$\boxed{N = 1041 + 324(3) = 2013}$

حل التمرين 111 :

1. دراسة حسب قيم n بواقي قسمة 3^n على 5

$3^{4k} \equiv 1[5]$; $3^{4k+1} \equiv 3[5]$; $3^{4k+2} \equiv 4[5]$; $3^{4k+3} \equiv 2[5]$

2. تعيين u_0 و r علما أنّ u_0 و r أوليان فيما بينهما و $u_0^2 = u_{10} - u_1$

$u_0^2 = u_{10} - u_1 \Rightarrow u_0^2 = u_0 + 10r - u_0 - r \Rightarrow u_0^2 = 9r \xRightarrow[r \text{ أولي مع } u_0]{} u_0^2 \mid 9$

$\Rightarrow \boxed{u_0 = 3\,; r = 1}$

ملاحظة : الحالة $u_0 = 1$ مرفوضة لأنّ r عدد طبيعي

3. $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ و $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$

أ. حساب S_n و P_n بدلالة n

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n) = \frac{n+1}{2}(3 + 3 + n)$$

$$= \frac{(n+1)(n+6)}{2} \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{n^2 + 7n + 6}{2}}$$

$$P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n = 3 \times 4 \times 5 \times \ldots \times n \Rightarrow \boxed{P_n = \frac{n!}{2}}$$

ب. تعيين العدد q بحيث : $2P_q = 2014!$

$2P_q = 2014! \Rightarrow q! = 2014! \Rightarrow \boxed{q = 2014}$

التحقق أنّ : $3^q \equiv 4[5]$

$3^{2014} \equiv 3^{4(503)+2}[5] \Rightarrow 3^{2014} \equiv 4[5]$

ج. تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $2S_n + 3 \equiv 3^q[5]$

$2S_n + 3 \equiv 3^q[5] \Rightarrow n^2 + 7n + 9 \equiv 4[5] \Rightarrow n^2 + 2n \equiv 0[5] \Rightarrow n(n+2)$
$\equiv 0[5] \Rightarrow n \equiv 0[5]$ أو $n \equiv 3[5]$
$\Rightarrow \boxed{n = 5k \text{ أو } n = 5k+3\ ;\ k \in \mathbb{N}}$

حل التمرين 112 :

1. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7

$5^{6k} \equiv 1[7]\ ;\ 5^{6k+1} \equiv 5[7]\ ;\ 5^{6k+2} \equiv 4[7]\ ;\ 5^{6k+3} \equiv 6[7]\ ;$
$5^{6k+4} \equiv 2[7];\ 5^{6k+5} \equiv 3[7]$

2. تعيين قيم n حتى يكون العدد : $(1 + 4n^2 + 5^{6n+4} - 19^{6n+3})$ قابلا للقسمة على 7

$19 \equiv 5[7] \Rightarrow 19^{6n+3} \equiv 5^{6n+3}[7] \Rightarrow 19^{6n+3} \equiv 6[7]\ ;\ 5^{6n+4} \equiv 2[7]$
$19^{6n+3} - 5^{6n+4} + 4n^2 + 1 \equiv 0[7] \Rightarrow 4n^2 + 5 \equiv 0[7] \Rightarrow 4n^2 \equiv 2[7]$
$\Rightarrow 4n^2 - 16 \equiv 0[7] \Rightarrow 4(n^2 - 4) \equiv 0[7] \Rightarrow n \equiv 2[7]$ أو $n \equiv 5[7]$
$\Rightarrow \boxed{n = 7k+2 \text{ أو } n = 7k+5\ ;k \in \mathbb{N}}$

ملاحظة: يمكن حل الموافقة السابقة باستعمال الجدول التالي :

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$4n^2 \equiv$	0	4	2	1	1	2	4	[7]

3. تعيين x حتى يكون A قابلا للقسمة على 35

$A = \overline{1xx0}^5 = 5x + 5^2x + 5^3$

$A \equiv 0[35] \Rightarrow \begin{cases} A \equiv 0[5]\ (\text{محققة دوما}) \\ A \equiv 0[7] \end{cases} \Rightarrow 5x + 5^2x + 5^3 \equiv 0[7]$

$\Rightarrow 5x + 4x + 6 \equiv 0[7] \Rightarrow 2x \equiv 1[7] \Rightarrow x \equiv 4[7] \Rightarrow \boxed{x = 4}$

كتابة A في النظام العشري

$A = 5(4) + 5^2(4) + 5^3 = \boxed{245}$

حل التمرين 113 :

1. بيان أنّ N يحقق : $309a + 15c = 226b$

$\overline{abcca}^5 = \overline{bbab}^8 \Rightarrow (5^4+1)a + 5^3 b + (5^2+5)c = (8^3+8^2+1)b + 8a$

$\Rightarrow 618a + 30c = 452b \Rightarrow \boxed{309a + 15c = 226b}$

2. بيان أنّ 3 قاسم للعدد b

$309a + 15c = 226b \Rightarrow 3(103a + 5c) = 226b$

$\begin{cases} 3 \mid 226b \\ PGCD(3;226) = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{3 \mid b}$

3. $b = 3$

أ. بيان أنّ : $309(a-2) = 60 - 15c$

$b = 3 \Rightarrow 309a + 15c = 678 \Rightarrow 309a - 618 = 60 - 15c$

$\Rightarrow \boxed{309(a-2) = 60 - 15c}$

ب. بيان أنّ 5 قاسم للعدد $a - 2$

$309(a-2) = 60 - 15c \Rightarrow 309(a-2) = 5(12 - 3c)$

$\begin{cases} 5 \mid 309(a-2) \\ PGCD(5;309) = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{5 \mid a-2}$

استنتاج كلا من a و c

$5 \mid a-2 \Rightarrow a = 5k + 2 \Rightarrow \boxed{a = 2}\ ; 60 - 15c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 4}$

ج. كتابة العدد N في النظام العشري

$N = (8^3 + 8^2 + 1)(3) + 8(2) \Rightarrow \boxed{N = 1747}$

حل التمرين 114 :

1. أ. حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (I) ... $41x + 5y = 301$

$41x + 5y = 301 \Rightarrow 41x - 301 \equiv 0[5] \Rightarrow x \equiv 1[5] \Rightarrow x = 5k + 1$

$5y = 301 - 41(5k+1) \Rightarrow y = -41k + 52$

$\boxed{S = \{(5k+1\,; -41k+52)\}\ ;\ k \in \mathbb{Z}}$

ب. إيجاد الثنائيات $(x;y)$ التي من أجلها $x - y$ يقبل القسمة على 5

$x - y \equiv 0[5] \Rightarrow 46k - 51 \equiv 0[5] \Rightarrow k \equiv 1[5] \Rightarrow k = 5k' + 1$

$\Rightarrow \boxed{(x;y) = (25k' + 6; -205k' + 11)\ ;\ k' \in \mathbb{Z}}$

2. أ. إيجاد القاسم المشترك الأكبر للعددين 205 و 25

$\begin{cases} 25 = 5^2 \\ 205 = 5 \times 41 \end{cases} \Rightarrow \boxed{PGCD(25;205) = 5}$

ب. تعيين عدد الكتب والكراريس التي اشتراها التلميذ

ليكن x عدد الكتب و y عدد الكراريس. لدينا :

$$205x + 25y = 1505 \Rightarrow 41x + 5y = 301 \Rightarrow (x; y) = (5k + 1 ; -41k + 52)$$

- $k = 0 :\ (x; y) = (1 ; 52)$
- $k = 1 :\ (x; y) = (6 ; 11)$

3. أ. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7

$5^{6k} \equiv 1[7]$; $5^{6k+1} \equiv 5[7]$; $5^{6k+2} \equiv 4[7]$; $5^{6k+3} \equiv 6[7]$;
$5^{6k+4} \equiv 2[7]$; $5^{6k+5} \equiv 3[7]$

ب. تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد 7 قاسما للعدد
$(\mathbf{1440^n + 3 \times 5^n + 97})$

$1440 \equiv 5[7] \Rightarrow 1440^n \equiv 5^n[7]$; $97 \equiv -1[7]$

$1440^n + 3 \times 5^n + 97 \equiv 0[7] \Rightarrow 4 \times 5^n \equiv 1[7] \Rightarrow 5^n \equiv 2[7]$

$\Rightarrow \boxed{n = 6k + 4 ;\ k \in \mathbb{N}}$

4. تعيين قيم العدد الطبيعي α التي من أجلها يكون باقي قسمة x على 7 هو 1

$x = 2\alpha\alpha6 = 2 \times 10^3 + 10^2\alpha + 10\alpha + 6 = 110\alpha + 2006$

$x \equiv 1[7] \Rightarrow 110\alpha + 2006 \equiv 1[7] \Rightarrow 5\alpha + 4 \equiv 1[7] \Rightarrow 5\alpha \equiv 4[7]$

$\Rightarrow \alpha \equiv 5[7] \Rightarrow \boxed{\alpha = 5}$

تعيين x

$x = 110(5) + 2006 \Rightarrow \boxed{x = 2556}$

حل التمرين 115 :

1. إيجاد القاسم المشترك الأكبر للأعداد 2772 ، 1260 و 504

$$\begin{cases} 2772 = 2^2 \times 3^2 \times 7 \times 11 \\ 1260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \\ 504 = 2^3 \times 3^2 \times 7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{PGCD(2772; 1260; 504) = 252}$$

2. $\mathbf{2772x - 1260y = 504} \ldots (I)$

أ. تعيين الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (I) الذي يحقق: $\mathbf{2x_0^2 - 3y_0 = -4}$

$$\begin{cases} 11x_0 - 5y_0 = 2 \\ 2x_0^2 - 3y_0 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -33x_0 + 15y_0 = -6 \\ 10x_0^2 - 15y_0 = -20 \end{cases} \Rightarrow 10x_0^2 - 33x_0 + 26 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(x_0; y_0) = (2; 4)}$$

ب. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (I)

$$\begin{cases} 11x-5y=2 \\ 11(2)-5(4)=2 \end{cases} \Rightarrow 11(x-2)=5(y-4)$$

$$\begin{cases} 5 \mid 11(x-2) \\ PGCD(5;11)=1 \end{cases} \Rightarrow 5 \mid x-2 \Rightarrow x=5k+2\,;y=11k+4$$

$$\boxed{S=\{(5k+2\,;11k+4)\}\,;\ k\in\mathbb{Z}}$$

3. نفرض أنّ x و y عددان طبيعيان حيث $(x;y)$ حل للمعادلة (I)

أ. تعيين القيم الممكنة لـ $PGCD(x;y)$

$$d=PGCD(x;y) \Rightarrow \begin{cases} d \mid x \\ d \mid y \end{cases} \Rightarrow d \mid 11x-5y \Rightarrow d \mid 2 \Rightarrow \boxed{d\in\{1;2\}}$$

ب. تعيين كل الثنائيات $(x;y)$ بحيث يكون العددان x و y أوليين فيما بينهما

يكون العددان x و y أوليين فيما بينهما من أجل k فردي (من أجل k زوجي يكون العددان x و y زوجيين وفي هذه الحالة $d=2$) ، أي $k=2k'+1$ حيث :

$k'\in\mathbb{Z}$ ، ومنه : $\boxed{(x;y)=(10k'+7;22k'+15)}$

.4

أ. تعيين رقم آحاد الأعداد المختلفة والمشكّلة من قوى العدد 2

(رقم آحاد أي عدد هو باقي قسمته على 10)

$$2^{4k}\equiv 6[10]\,;\ 2^{4k+1}\equiv 2[10]\,;\ 2^{4k+2}\equiv 4[10]\,;\ 2^{4k+3}\equiv 8[10]\,;$$

استنتاج رقم آحاد العدد 2018^{1439}

$$2018\equiv 8[10] \Rightarrow 2018^{1439}\equiv (2^3)^{1439}[10] \Rightarrow 2018^{1439}\equiv 2^{4(1079)+1}[10]$$

$$\Rightarrow \boxed{2018^{1439}\equiv 2[10]}$$

ب. تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول للمعادلة (I) والتي تحقق: $2^{y-2x}\equiv 8[10]$

$$\begin{cases} (x;y)\in S_{(I)} \\ 2^{y-2x}\equiv 8[10] \end{cases} \Rightarrow 2^{11k+4-2(5k+2)}\equiv 8[10] \Rightarrow 2^k\equiv 8[10] \Rightarrow k=4\alpha+3$$

$$\boxed{S=\{(20\alpha+17\,;44\alpha+37)\}\,;\ \alpha\in\mathbb{Z}}$$

حل التمرين 116 :

1. حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ... $4x-5y=1$

$$\begin{cases} 4x-5y=1 \\ 4(-1)-5(-1)=1 \end{cases} \Rightarrow 4(x+1)=5(y+1)$$

$$\begin{cases} 5 \mid 4(x+1) \\ PGCD(4;5)=1 \end{cases} \Rightarrow 5 \mid x+1 \Rightarrow x=5k-1\,;y=4k-1$$

$\boxed{S = \{(5k-1\,;4k-1)\}\,;\ k \in \mathbb{Z}}$

.2 $\boldsymbol{a = 4n+3}$ ، $\boldsymbol{b = 3n+1}$ ، $\boldsymbol{PGCD(a;b) = d}$

أ. تعيين القيم الممكنة للعدد $\boldsymbol{d}$

$$d = PGCD(a;b) \Rightarrow \begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases} \Rightarrow d \mid 3a-4b \Rightarrow d \mid 5 \Rightarrow \boxed{d \in \{1;5\}}$$

ب. برهان أنّه إذا كان $\boldsymbol{d = 5}$ فإنّ $\boldsymbol{n \equiv 3[5]}$

$$d = 5 \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0[5] \\ b \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4n+3 \equiv 0[5] \\ 3n+1 \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow n+2 \equiv 0[5] \Rightarrow \boxed{n \equiv 3[5]}$$

ج. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي $\boldsymbol{n}$ باقي القسمة الإقليدية للعدد $\boldsymbol{2^n}$ على $\boldsymbol{5}$

$2^{4k} \equiv 1[5]\,;\ 2^{4k+1} \equiv 2[5]\,;\ 2^{4k+2} \equiv 4[5]\,; 2^{4k+3} \equiv 3[5]\,;$

د. إيجاد أصغر عدد طبيعي $\boldsymbol{n > 2015}$ حيث: $\begin{cases} \boldsymbol{2^a + 3^b \equiv 0[5]} \\ \boldsymbol{PGCD(a;b) = 5} \end{cases}$

$$\begin{cases} 2^a + 3^b \equiv 0[5] \\ PGCD(a;b) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{4(5k+3)+3} + 3^{3(5k+3)+1} \equiv 0[5] \\ n = 5k+3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2^{20k+15} + 3^{15k+10} \equiv 0[5] \Rightarrow 2^{4(5k+3)+3} + 3^{5(3k+2)} \equiv 0[5]$$

$$\Rightarrow 3^{5(3k+2)} \equiv 2[5] \Rightarrow 3^{3k+2} \equiv 2[5] \Rightarrow 9 \times 27^k \equiv 2[5] \Rightarrow 2^{k+2} \equiv 2[5]$$

$$\Rightarrow k+2 = 4k'+1 \Rightarrow k = 4k'-1 \Rightarrow n = 5(4k'-1)+3 = 20k'-2$$

$$n > 2015 \Rightarrow 20k'-2 > 2015 \Rightarrow k' > 100{,}85 \Rightarrow k' = 101 \Rightarrow \boxed{n = 2018}$$

.3 $\boldsymbol{1 \le \alpha \le \beta \le \gamma}$ ، $\boldsymbol{(E'): x^2 - (\beta+\gamma)x + \beta\gamma = 0}$

أ. برهان أنّ $\boldsymbol{\beta}$ و $\boldsymbol{\gamma}$ هما حلان للمعادلة $\boldsymbol{(E')}$

$$\beta^2 - (\beta+\gamma)\beta + \beta\gamma = 0 \Rightarrow \boxed{\beta \in S_{(E')}}$$

$$\gamma^2 - (\beta+\gamma)\gamma + \beta\gamma = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma \in S_{(E')}}$$

ب. تعيين الأعداد الطبيعية $\boldsymbol{\alpha}$ ، $\boldsymbol{\beta}$ و $\boldsymbol{\gamma}$

$$\begin{cases} \beta+\gamma = \overline{46}^{\alpha} \\ \beta\gamma = \overline{545}^{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta+\gamma = 4\alpha+6 \\ \beta\gamma = 5\alpha^2+4\alpha+5 \end{cases}$$

$x^2 - 2(2\alpha+3)x + 5\alpha^2 + 4\alpha + 5 = 0\,;\ \Delta' = (2a+3)^2 - (5\alpha^2+4\alpha+5)$

$\Delta' = -\alpha^2 + 8\alpha + 4\,;\ \Delta' > 0 \Rightarrow 0 \le \alpha \le 8 \Rightarrow \alpha \in \{7;8\}$ (لأنّ $\alpha > 6$)

- $\alpha = 7 : \Delta' = 11$ (مرفوضة)
- $\boxed{\alpha = 8 : \Delta' = 4 \Rightarrow \beta = 17\,;\ \gamma = 21}$

حل التمرين 117 :

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = 2x_n - 1 \end{cases}$$

1. برهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $x_n = 2^{n+1} + 1$

تحقيق التراجع: $x_0 = 2 + 1 = 3$ (محققة)

فرض التراجع: نفرض أنّ $x_n = 2^{n+1} + 1$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $x_{n+1} = 2^{n+2} + 1$

$$x_{n+1} = 2x_n - 1 = 2(2^{n+1} + 1) - 1 = 2^{n+2} + 2 - 1 = 2^{n+2} + 1$$

منه، نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $x_n = 2^{n+1} + 1$

2. حساب $PGCD(x_8; x_9)$

$$\begin{cases} x_8 = 2^9 + 1 \\ x_9 = 2^{10} + 1 \end{cases} ; 2x_8 - x_9 = 1 \Rightarrow \boxed{PGCD(x_8; x_9) = 1}$$

3. بيان أنّ العددين x_n و x_{n+1} أوّليان فيما بينهما من أجل كل عدد طبيعي n

$$\begin{cases} x_n = 2^{n+1} + 1 \\ x_{n+1} = 2^{n+2} + 1 \end{cases} ; 2x_n - x_{n+1} = 1 \Rightarrow \boxed{PGCD(x_n; x_{n+1}) = 1}$$

4. تعيين $PGCD(x_{2014}; x_{2015})$

$PGCD(x_{2014}; x_{2015}) = 1$ (حسب السؤال 3 من أجل $n = 2014$)

5. أ. برهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $2x_n - y_n = 5$

تحقيق التراجع: $2x_0 - y_0 = 6 - 1 = 5$ (محققة)

فرض التراجع: نفرض أنّ $2x_n - y_n = 5$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $2x_{n+1} - y_{n+1} = 5$

$$2x_{n+1} - y_{n+1} = 2(2x_n - 1) - (2y_n + 3) = 2(2x_n - y_n) - 5 = 2(5) - 5 = 5$$

منه، نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $2x_n - y_n = 5$

ب. عبّر عن y_n بدلالة n

$$2x_n - y_n = 5 \Rightarrow y_n = 2x_n - 5 = 2(2^{n+1} + 1) - 5 = \boxed{2^{n+2} - 3}$$

6. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي p باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^p على 5

$2^{4k} \equiv 1[5]$; $2^{4k+1} \equiv 2[5]$; $2^{4k+2} \equiv 4[5]$; $2^{4k+3} \equiv 3[5]$;

7. $d_n = PGCD(x_n; y_n)$

برهان أنّ $d_n = 1$ أو $d_n = 5$

$$d_n = PGCD(x_n; y_n) \Rightarrow \begin{cases} d_n \mid x_n \\ d_n \mid y_n \end{cases} \Rightarrow d_n \mid 2x_n - y_n \Rightarrow d_n \mid 5$$

$$\Rightarrow \boxed{d_n \in \{1; 5\}}$$

استنتاج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها $PGCD(x_n; y_n) = 1$

$$d_n = 5 \Rightarrow \begin{cases} x_n \equiv 0[5] \\ y_n \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{n+1} + 1 \equiv 0[5] \\ 2^{n+2} - 3 \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{n+1} \equiv 4[5] \\ 2^{n+2} \equiv 3[5] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n + 1 = 4k + 2 \\ n + 2 = 4k + 3 \end{cases} \Rightarrow n = 4k + 1$$

$$d_n = 1 \Rightarrow \boxed{n = 4k \text{ أو } n = 4k + 2 \text{ أو } n = 4k + 3 \ ; \ k \in \mathbb{N}}$$

حل التمرين 118 :

$a = 3n + 2$ و $b = 2n + 1$

1. **اثبات أن a و b أوّليان فيما بينهما**

$2a - 3b = 1 \Rightarrow \boxed{PGCD(a; b) = 1}$ (بيزو)

2. **$3x - 4y = 304 \ldots (1)$**

أ. **تعيين قيم العدد الطبيعي n حيث $(a; b)$ حل للمعادلة (1)**

$3(3n + 2) - 4(2n + 1) = 304 \Rightarrow \boxed{n = 302}$

ب. **استنتاج حل خاص للمعادلة (1) ، ثمّ حلها في المجموعة $\mathbb{Z}^2$**

$n = 302 \Rightarrow \boxed{(a; b) = (908; 605)}$

$$\begin{cases} 3x - 4y = 304 \\ 3(908) - 4(605) = 304 \end{cases} \Rightarrow 3(x - 908) = 4(y - 605)$$

$$\begin{cases} 4 \mid 3(x - 908) \\ PGCD(3; 4) = 1 \end{cases} \Rightarrow 4 \mid x - 908 \Rightarrow x = 4k + 908 \ ; y = 3k + 605$$

$$\boxed{S = \{(4k + 908 \ ; 3k + 605)\} \ ; \ k \in \mathbb{Z}}$$

3. **تعيين الثنائية $(x_0; y_0)$ التي تحقق : $\begin{cases} 3x_0 - 4y_0 = 304 \\ PPCM(x_0; y_0) = 2883196 \end{cases}$**

$$\begin{cases} 3x_0 - 4y_0 = 304 \\ PPCM(x_0; y_0) = 2883196 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid 304 \\ d \mid 2883196 \end{cases} [d = PGCD(x_0; y_0)]$$

$$\Rightarrow d \mid PGCD(304; 2883196) \Rightarrow d \mid 4 \Rightarrow d \in \{1; 2; 4\}$$

- $d = 1: x_0 y_0 = 2883196 \Rightarrow (4k + 908)(3k + 605) = 2883196$

$$\Rightarrow 12k^2 + 5144k - 2333856 = 0 \Rightarrow k = 276$$

$$\Rightarrow \boxed{(x_0; y_0) = (2012; 1433)}$$

$\bullet\, d = 2 : x_0y_0 = 1441598 \Rightarrow (4k + 908)(3k + 605) = 1441598$

$\Rightarrow 12k^2 + 5144k - 892258 = 0$ (ليس لها حلول في $\mathbb{N}$)

$\bullet\, d = 4 : x_0y_0 = 720799 \Rightarrow (4k + 908)(3k + 605) = 720799$

$\Rightarrow 12k^2 + 5144k - 171459 = 0$ (ليس لها حلول في $\mathbb{N}$)

حل التمرين 119 :

1. **دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5**

$2^{4k} \equiv 1[5]\ ;\ 2^{4k+1} \equiv 2[5]\ ;\ 2^{4k+2} \equiv 4[5]\ ;\ 2^{4k+3} \equiv 3[5]\ ;$

2. **تعيين باقي قسمة $(2017^{4n+3} - 2 \times 2016^{8n} + 2014^{2n+1})$ على 5**

$2017 \equiv 2[5] \Rightarrow 2017^{4k+3} \equiv 2^{4k+3}[5] \Rightarrow \boldsymbol{2017^{4k+3} \equiv 3[5]}$

$2016 \equiv 1[5] \Rightarrow 2016^{8n} \equiv 1[5] \Rightarrow \boldsymbol{2 \times 2016^{8n} \equiv 2[5]}$

$2014 \equiv -1[5] \Rightarrow 2014^{2n+1} \equiv -1[5] \Rightarrow \boldsymbol{2014^{2n+1} \equiv 4[5]}$

$2017^{4n+3} - 2 \times 2016^{8n} + 2014^{2n+1} \equiv 3 - 2 + 4[5]$

$\Rightarrow \boxed{2017^{4n+3} - 2 \times 2016^{8n} + 2014^{2n+1} \equiv 0[5]}$

3. **بيان أنّ العدد 131 أولي**

$\sqrt{131} \approx 11{,}45$. بما أنّ العدد 131 لا يقبل القسمة على كل من 2 ، 3 ، 5 ، 7 و11 فهو إذن أوّلي

4. **تعيين الأعداد الطبيعية n التي تحقق :** $\begin{cases} \boldsymbol{3m + 7d = 2^n - 48} \\ \boldsymbol{ab = 5m} \end{cases}$

$ab = 5m \Rightarrow md = 5m \Rightarrow d = 5 \Rightarrow a = 5a'; b = 5b'; PGCD(a'; b') = 1$

$ab = 5m \Rightarrow 5a' \times 5b' = 5m \Rightarrow m = 5a'b'$

$3m + 7d = 2^n - 48 \Rightarrow 3(5a'b') + 7(5) = 2^n - 48$

$\Rightarrow 5(3a'b' + 7) = 2^n - 48 \Rightarrow 5 \mid 2^n - 48 \Rightarrow 2^n - 48 \equiv 0[5]$

$\Rightarrow 2^n \equiv 3[5] \Rightarrow \boxed{n = 4k + 3\ ;\ k \in \mathbb{N}}$

5. **تعيين قيم n بحيث يكون $7 < n < 15$**

$7 < n < 15 \Rightarrow 7 < 4k + 3 < 15 \Rightarrow 4 < 4k < 12 \Rightarrow 1 < k < 3$

$\Rightarrow k = 2 \Rightarrow \boxed{n = 11}$

استنتاج الثنائيات $(a; b)$

$n = 11 \Rightarrow 5(3a'b' + 7) = 2^{11} - 48 = 2000 \Rightarrow a'b' = 131$

$\Rightarrow (a'; b') \in \{(1; 131); (131; 1)\} \Rightarrow \boxed{(a; b) \in \{(5; 655); (655; 5)\}}$

حل التمرين 120 :

.1 $\mathbf{11x + 8y = 79} \dots (E_1)$

أ. بيان أنّه إذا كان $(x;y)$ حلا للمعادلة (E_1) فإنّ $y \equiv 3[11]$

$$11x + 8y = 79 \Rightarrow 8y = 11(x-7) + 2 \Rightarrow 8y \equiv 2[11] \Rightarrow 8y \equiv 24[11]$$
$$\Rightarrow \boxed{y \equiv 3[11]}$$

ب. حل المعادلة (E_1)

$$y \equiv 3[11] \Rightarrow y = 11k + 3 \Rightarrow 11x = 79 - 8(11k+3) = -88k + 55$$
$$\Rightarrow x = -8k + 5 \Rightarrow \boxed{S_1 = \{(-8k+5; 11k+3)\}\ ;\ k \in \mathbb{Z}}$$

.2 $\mathbf{3y + 11z = 372} \dots (E_2)$

أ. بيان أنّه إذا كان $(y;z)$ حلا للمعادلة (E_2) فإنّ $z \equiv 0[3]$

$$3y + 11z = 372 \Rightarrow 11z = 3(124 - y) \Rightarrow 11z \equiv 0[3] \Rightarrow \boxed{z \equiv 0[3]}$$

ب. حل المعادلة (E_2)

$$z \equiv 0[3] \Rightarrow z = 3k' \Rightarrow 3y = -33k' + 372 \Rightarrow y = -11k' + 124$$
$$\Rightarrow \boxed{S_2 = \{(-11k' + 124; 3k')\}\ ;\ k' \in \mathbb{Z}}$$

.3 حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $\mathbf{3x - 8z = -249} \dots (E_3)$

$$3x - 8z = -249 \Rightarrow 8z = 3(x + 83) \Rightarrow 8z \equiv 0[3] \Rightarrow \boxed{z \equiv 0[3]}$$
$$z \equiv 0[3] \Rightarrow z = 3k'' \Rightarrow 3(x+83) = 8(3k'') \Rightarrow x = 8k'' - 83$$
$$\Rightarrow \boxed{S_3 = \{(8k'' - 83; 3k'')\}\ ;\ k'' \in \mathbb{Z}}$$

.4 تعيين عدد القطع لكل صنف

نسمّي : x عدد القطع من الصنف الأول ، y عدد القطع من الصنف الثاني و z عدد القطع من الصنف الثالث.

$$\begin{cases} x + y + z = 41 \\ 48x + 36y + 4z = 480 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 41 \dots ① \\ 12x + 9y + z = 120 \dots ② \end{cases}$$

$$② - ① \Rightarrow 11x + 8y = 79 \Rightarrow \begin{cases} x = -8k + 5 \\ y = 11k + 3 \\ (x;y) \in \mathbb{N}^2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ z = 33 \end{cases}}$$

حلول مواضيع

القسمة والموافقات

في البكالوريا

حل التمرين 01 : بكالوريا 1991

1. حل المعادلة $18x + 4y = 84$

$18x + 4y = 84 \Rightarrow 9x + 2y = 42$

$9(4) + 2(3) = 42 \Rightarrow 9(x-4) + 2(y-3) = 0$

$\Rightarrow 9(x-4) = 2(-y+3)$

$\begin{cases} 2 \mid 9(x-4) \\ PGCD(2;9) = 1 \end{cases} \Rightarrow 2 \mid (x-4) \Rightarrow x - 4 = 2k$

$\Rightarrow x = 2k + 4$

$9(x-4) = 2(-y+3) \Rightarrow -y + 3 = 9k \Rightarrow y = -9k + 3$

$\boxed{S = \{(2k+4; -9k+3)\}}\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

تعيين مجموعة الحلول $(x\ ;\ y)$ التي تحقق $x\,y > 0$

$xy > 0 \Rightarrow (2k+4)(-9k+3) > 0$

$\Rightarrow -18k^2 - 30k + 12 > 0 \Rightarrow 3k^2 + 5k - 2 < 0$

$\Delta = 49\ ; k' = -2\ ; k'' = \frac{1}{3}\ ;\ 3k^2 + 5k - 2 < 0$

$\Rightarrow -2 < k < \frac{1}{3} \Rightarrow k \in \{-1; 0\} \Rightarrow \boxed{(x; y) \in \{(2; 12); (4; 3)\}}$

2. $N = \overline{30\alpha\beta\gamma}^5 = \overline{55\alpha\beta}^7$

تعيين الأعداد α و β و γ

$\begin{cases} n = \overline{30\alpha\beta\gamma}^5 \\ n = \overline{55\alpha\beta}^7 \end{cases}$

$\Rightarrow \gamma + 5\beta + 5^2\alpha + 3.5^4 = \beta + 7\alpha + 5.7^2 + 5.7^3$

$\Rightarrow 18\alpha + 4\beta = 85 - \gamma$

$18\alpha + 4\beta = 85 - \gamma \Rightarrow 2(9\alpha + 2\beta) = 85 - \gamma$

$\Rightarrow 85 - \gamma$ عدد زوجي $\Rightarrow \gamma$ عدد فردي $\Rightarrow \gamma = 1$ أو $\gamma = 3$ (لأنّ $\gamma < 5$)

- $\gamma = 1 \Rightarrow 18\alpha + 4\beta = 84 \Rightarrow \alpha = 4\ ;\ \beta = 3$
- $\gamma = 3 \Rightarrow 18\alpha + 4\beta = 82 \Rightarrow 9\alpha + 2\beta = 41$

$\Rightarrow 9\alpha - 1 = 2(20-\beta) \Rightarrow 9\alpha \equiv 1[2] \Rightarrow \alpha \equiv 1[2]$

$\Rightarrow \alpha = 1$ أو $\alpha = 3 \Rightarrow \beta = 16$ أو $\beta = 7$ ($\beta < 5$ مستحيل لأنّ)

$$\boxed{(\alpha, \beta, \gamma) = (4,3,1)}$$

كتابة العدد n في النظام العشري

$n = 3 + 4.7 + 5.7^2 + 5.7^3 \Rightarrow \boxed{n = 1991}$

حل التمرين 02 : بكالوريا 1994

1. دراسة بواقي القسمة الإقليمية للعدد 2^n على 10

$2^0 \equiv 1[10]\ ;\ 2^1 \equiv 2[10]\ ;\ 2^2 \equiv 4[10]\ ;\ 2^3 \equiv 8[10]\ ;$

$2^4 \equiv 6[10]\ ;\ 2^5 \equiv 2[10]\ ;$

$$2^{4k} \equiv 6[10]\ ;\ 2^{4k+1} \equiv 2[10]\ ;\ 2^{4k+2} \equiv 4[10]\ ;$$

$$2^{4k+3} \equiv 8[10]\ ; k \in \mathbb{N}^*$$

استنتاج رقم آحاد العدد 1994^{1414}

$1994 \equiv 4[10] \Rightarrow 1994^{1414} \equiv 2^{2828}[10]$

$\Rightarrow 1994^{1414} \equiv 2^{4(707)}[10] \Rightarrow 1994^{1414} \equiv 6[10]$

منه نستنتج أنّ رقم آحاد العدد 1994^{1414} هو 6

2. $u_n = 2^n$

أ. التحقق أنّ (u_n) هندسية

$u_{n+1} = 2^{n+1} = 2.2^n = 2u_n$

منه المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q = 2$

ب. حساب S_n بدلالة n

$S_n = (5 + 2^1) + (5 + 2^2) + (5 + 2^3) + \cdots + (5 + 2^n)$

$S_n = (5 + \cdots + 5) + (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n)$

$S_n = 5n + 2\dfrac{2^n - 1}{2 - 1} \Rightarrow \boxed{S_n = 5n + 2.2^n - 2}$

ج. إيجاد قيم n حيث $S_n \equiv 0[10]$

$S_n \equiv 0[10] \Rightarrow 5n + 2.2^n - 2 \equiv 0[10] \Rightarrow 5n + 2.2^n \equiv 2[10]$

n	$\boldsymbol{4k}$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$5n \equiv$	**0**	5	0	5	[10]
$2^n \equiv$	**6**	2	4	8	[10]
$5n + 2.2^n \equiv$	**2**	9	8	1	[10]

$$\boxed{S_n \equiv 0[10] \Rightarrow n = 4k \; ; \; k \in \mathbb{N}^*}$$

حل التمرين 03 : بكالوريا 1996

1. تحليل 1995 و 105 إلى جداء عوامل أولية

$1995 = 3 \times 5 \times 7 \times 19 \; ; \; 105 = 3 \times 5 \times 7$

2. حل المعادلة $\alpha\beta = 105$

$\alpha\beta = 105 \Rightarrow (\alpha, \beta) \in \{(1,105); (3,35); (5,21); (7,15)\}$

3. تعيين a و b

$95d + 19m = 1995 \Rightarrow 95d + 19da'b' = 1995$

$\Rightarrow d(95 + 19a'b') = 1995 \Rightarrow d \mid 1995 \Rightarrow d = 3$ أو $d = 5$

- $d = 3 \Rightarrow 95 + 19a'b' = 665 \Rightarrow 19a'b' = 570$
  $\Rightarrow a'b' = 30 \Rightarrow (a', b') \in \{(1,30); (2,15); (3,10); (5,6)\}$

$\Rightarrow \boxed{(a, b) \in \{(3,90); (6,45); (9,30); (15,18)\}}$

- $d = 5 \Rightarrow 95 + 19a'b' = 399 \Rightarrow 19a'b' = 304$
  $\Rightarrow a'b' = 16 \Rightarrow (a', b') = (1,16) \Rightarrow \boxed{(a, b) = (5,80)}$

حل التمرين 04 : بكالوريا 2000 ر

1. حل المعادلة (1) ... $9x - 14y = 13$

$9(3) - 14(1) = 13 \Rightarrow 9(x - 3) - 14(y - 1) = 0$

$\Rightarrow 9(x - 3) = 14(y - 1)$

$\begin{cases} 14 \mid 9(x-3) \\ PGCD(9; 14) = 1 \end{cases} \Rightarrow 14 \mid (x - 3) \Rightarrow x - 3 = 14k \Rightarrow x = 14k + 3$

$9(x - 3) = 14(y - 1) \Rightarrow y - 1 = 9k \Rightarrow y = 9k + 1$

$$\boxed{S_{(1)} = \{(14k + 3; 9k + 1)\}} \; ; \; k \in \mathbb{Z}$$

2. $45x - 28y = 130 \ldots (2)$

أ. بيان أنّه إذا كان $(x\ ;\ y) \in S_{(2)}$ فإنّ $x \equiv 0[2]$ و $y \equiv 0[5]$

$(x, y) \in S_{(2)} \Rightarrow 45x - 28y = 130 \Rightarrow 45x = 2(14y + 65)$

$\Rightarrow x \equiv 0[2] \Rightarrow x = 2a$

$(x, y) \in S_{(2)} \Rightarrow 45x - 28y = 130$

$\Rightarrow 28y = 5(9x - 26) \Rightarrow y \equiv 0[5] \Rightarrow y = 5b$

ب. تعيين مجموعة حلول المعادلة (2)

$45x - 28y = 130 \Rightarrow 45(2a) - 28(5b) = 130$

$\Rightarrow 90a - 140b = 130 \Rightarrow 9a - 14b = 13$

$\Rightarrow (a, b) = (14k + 3; 9k + 1)$

$\Rightarrow (x, y) = (28k + 6; 45k + 5);\ k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{S_{(2)} = \{(28k + 6; 45k + 5)\}\ ;\ k \in \mathbb{Z}}$$

3. تعيين α و β و كتابة العدد n في النظام العشري

$n = \overline{2\alpha\alpha3}^9 = \overline{5\beta\beta6}^7$

$\Rightarrow 3 + 9\alpha + 9^2\alpha + 2.9^3 = 6 + 7\beta + 7^2.\beta + 5.7^3$

$\Rightarrow 90\alpha - 56\beta = 260 \Rightarrow 45\alpha - 28\beta = 130$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 28k + 6 \\ \beta = 45k + 5 \\ \alpha < 9\ ; \beta < 7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = 6\ ;\ \beta = 5\ ; n = 3 + 6.9 + 6.9^2 + 2.9^3 = 2001}$$

حل التمرين 05 : بكالوريا 2001

1. تعيين $PGCD(225; 180)$

$225 = 180 + 45\ ; 180 = 45 \times 4 \Rightarrow \boxed{PGCD(225; 180) = 45}$

2. حل المعادلة (1) ... $225x - 180y = 90$

$225x - 180y = 90 \Rightarrow 5x - 4y = 2$

$\begin{cases} 5x - 4y = 2 \\ 5(2) - 4(2) = 2 \end{cases} \Rightarrow 5(x-2) - 4(y-2) = 0$

$\Rightarrow 5(x-2) = 4(y-2)$

$\begin{cases} 4 \mid 5(x-2) \\ PGCD(4;5) = 1 \end{cases} \Rightarrow 4 \mid (x-2) \Rightarrow x - 2 = 4k \Rightarrow x = 4k + 2$

$5(x-2) = 4(y-2) \Rightarrow y - 2 = 5k \Rightarrow y = 5k + 2$

$$\boxed{S = \{(4k+2; 5k+2)\}}\ ;\ k \in \mathbb{Z}$$

3. تعيين مجموعة الثنائيات $(x\ ;\ y)$ حيث $|x - y + 1| < 2$

$|x - y + 1| < 2 \Rightarrow |4k + 2 - 5k - 2 + 1| < 2$

$\Rightarrow |-k + 1| < 2 \Rightarrow |k - 1| < 2 \Rightarrow -2 < k - 1 < 2$

$\Rightarrow -1 < k < 3 \Rightarrow k \in \{0; 1; 2\}$

$\boxed{(x, y) \in \{(2,2); (6,7); (10,12)\}}$

4. تعيين α و β ثمّ a و b

$\begin{cases} a = \overline{52}^{\alpha} = \overline{44}^{\beta} \\ b = \overline{252}^{\alpha} = \overline{206}^{\beta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\alpha + 2 = 4\beta + 4 \\ 2\alpha^2 + 5\alpha + 2 = 2\beta^2 + 6 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 5\alpha - 4\beta = 2 \\ 2\alpha^2 + 5\alpha - 2\beta^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4k + 2\ ;\ \beta = 5k + 2 \\ 2\alpha^2 + 5\alpha - 2\beta^2 = 4 \end{cases}$

$2\alpha^2 + 5\alpha - 2\beta^2 = 4$

$\Rightarrow 2(4k+2)^2 + 5(4k+2) - 2(5k+2)^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow -18k^2 + 12k + 6 = 0 \Rightarrow 3k^2 - 2k - 1 = 0$

$\Rightarrow k = 1$ أو $k = -\frac{1}{3}$ (مرفوضة)

$\boxed{k = 1 \Rightarrow \alpha = 6\ ;\ \beta = 7\ ; a = 32\ ; b = 104}$

حل التمرين 06 : بكالوريا 2001 ر

1. **تعيين α و β**

$\beta(\beta^3-1)=28\alpha^2$

$\begin{cases} \beta \mid 28\alpha^2 \\ PGCD(\alpha;\beta)=1 \end{cases} \Rightarrow \beta \mid 28 \Rightarrow \beta \in \{1,2,4,7,14,28\}$

- $\beta=1 \Rightarrow 28\alpha^2=0 \Rightarrow \alpha=0$ (مستحيل)
- $\beta=2 \Rightarrow 28\alpha^2=14 \Rightarrow \alpha^2=\frac{1}{2}$ (مستحيل)
- $\beta=4 \Rightarrow 28\alpha^2=252 \Rightarrow \alpha^2=9 \Rightarrow \alpha=3$

$$\Rightarrow \boxed{(\alpha,\beta)=(3,4)}$$

- $\beta=7 \Rightarrow 28\alpha^2=2394 \Rightarrow \alpha^2=85{,}5$ (مستحيل)
- $\beta=14 \Rightarrow 28\alpha^2=38402 \Rightarrow \alpha^2=1371{,}5$ (مستحيل)
- $\beta=28 \Rightarrow \alpha^2=21951 \Rightarrow \alpha=148{,}2$ (مستحيل)

2. **تعيين q ، a ، b ، c ، d و e**

$b=a.q\ ; c=a.q^2\ ; d=a.q^3\ ;\ e=a.q^4\ ;$

$28a^3=e-b \Rightarrow 28a^3=aq^4-aq=aq(q^3-1)$

$\Rightarrow 28a^2=q(q^3-1) \Rightarrow \boxed{(a,q)=(3,4)}$

$\boxed{a=3\ ;\ b=12\ ; c=48\ ; d=192\ ;\ e=768}$

حل التمرين 07 : بكالوريا 2003 ر

1. **تعيين α و β**

$\alpha(\alpha^2-19)=35\beta$

$\begin{cases} \alpha \mid 35\beta \\ PGCD(\alpha;\beta)=1 \end{cases} \Rightarrow \alpha \mid 35 \Rightarrow \alpha \in \{1,5,7,35\}$

- $\alpha=1 \Rightarrow 35\beta=-18$ (مستحيل)
- $\alpha=5 \Rightarrow 35\beta=30$ (مستحيل)
- $\alpha=7 \Rightarrow 35\beta=210 \Rightarrow \beta=6 \Rightarrow \boxed{(\alpha,\beta)=(7,6)}$
- $\alpha=35 \Rightarrow \beta=1206$ (مرفوض $\alpha<\beta$)

.2

أ. تعيين u_0 و q

$35u_0^2 + 19u_1 - u_0q^3 = 0 \Rightarrow u_0q^3 - 19u_0q = 35u_0^2$

$\Rightarrow q(q^2-19) = 35u_0 \Rightarrow \boxed{(q,u_0) = (7,6)}$

ب. حساب S_n بدلالة n

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right) = 6\left(\frac{7^{n+1}-1}{6}\right)$$

$$\boxed{S_n = 7^{n+1}-1}$$

ج. تعيين قيم n حيث $S_n \equiv 0[30]$

$S_n \equiv 0[30] \Rightarrow S_n \equiv 0[5]$ و $S_n \equiv 0[6]$

$7 \equiv 1[6] \Rightarrow 7^{n+1} \equiv 1[6] \Rightarrow 7^{n+1} - 1 \equiv 0[6] \Rightarrow S_n \equiv 0[6]$

$7^0 \equiv 1[5]$; $7^1 \equiv 2[5]$; $7^2 \equiv 4[5]$; $7^3 \equiv 3[5]$; $7^4 \equiv 1[5]$

$7^{4k} \equiv 1[5]$; $7^{4k+1} \equiv 2[5]$; $7^{4k+2} \equiv 4[5]$; $7^{4k+3} \equiv 3[5]$

$n+1$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$7^{n+1} \equiv$	1	2	4	3	[5]
$S_n \equiv$	0	1	3	2	[5]

$$S_n \equiv 0[30] \Rightarrow n+1 = 4k \Rightarrow \boxed{n = 4k-1}, k \in \mathbb{N}^*$$

حل التمرين 08 : بكالوريا 2004 ر

$$\mathbf{43x - 13y = \lambda \ ... (1)}$$

1. التحقق أنّ $(-3\lambda; -10\lambda)$ حل للمعادلة (1)

$43(-3\lambda) - 13(-10\lambda) = -129\lambda + 130\lambda = \lambda \Rightarrow \boxed{(-3\lambda, -10\lambda) \in S_{(1)}}$

حل المعادلة (1)

$$\begin{cases} 43x - 13y = \lambda \\ 43(-3\lambda) - 13(-10\lambda) = \lambda \end{cases} \Rightarrow 43(x+3\lambda) - 13(y+10\lambda) = 0$$

$\Rightarrow 43(x+3\lambda) = 13(y+10\lambda)$

$$\begin{cases} 13 \mid 43(x+3\lambda) \\ PGCD(13;43)=1 \end{cases} \Rightarrow 13 \mid x+3\lambda \Rightarrow x+3\lambda = 13k$$

$$\Rightarrow x = 13k - 3\lambda$$

$$43(x+3\lambda) = 13(y+10\lambda) \Rightarrow y+10\lambda = 43k \Rightarrow y = 43k - 10\lambda$$

$$\boxed{S_{(1)} = \{(13k-3\lambda; 43k-10\lambda)\}\ ; (k,\lambda) \in \mathbb{Z}^2}$$

.2 $\boldsymbol{n = \overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}^{6} = \overline{\beta 0\gamma\gamma\gamma}^{\ 5}}$

أ. التحقق أنّ $\boldsymbol{43\alpha - 13\beta = \gamma}$

$$n = \overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}^{6} = \overline{\beta 0\gamma\gamma\gamma}^{\ 5}$$

$$\Rightarrow \alpha + 6\beta + 6^2\alpha + 6^3\beta + 6^4\alpha = \gamma + 5\gamma + 5^2\gamma + 5^4\beta$$

$$\Rightarrow 1333\alpha - 403\beta = 31\gamma \Rightarrow \boxed{43\alpha - 13\beta = \gamma}$$

ب. تعيين الأعداد $\boldsymbol{\alpha}$ و $\boldsymbol{\beta}$ و $\boldsymbol{\gamma}$

$$43\alpha - 13\beta = \gamma \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 13k - 3\gamma \\ \beta = 43k - 10\gamma \\ \alpha < 6\ ;\ \beta < 5\ ;\ \gamma < 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < \gamma < 5 \\ 0 < \alpha < 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 3\gamma < 15 \\ 0 < 13k - 3\gamma < 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 3\gamma < 15 \\ 3\gamma < 13k < 3\gamma + 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 < 3\gamma < 13k < 3\gamma + 6 < 21 \Rightarrow 0 < 13k < 21$$

$$\Rightarrow 0 < k < \frac{21}{13} \Rightarrow k = 1$$

$$k = 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 13 - 3\gamma \\ \beta = 43 - 10\gamma \\ \alpha < 6\ ;\ \beta < 5\ ;\ \gamma < 5 \end{cases}$$

γ	1	2	3	**4**
α	10	7	4	**1**
β	33	23	13	**3**

$$\boxed{\alpha = 1\ ;\ \beta = 3\ ;\ \gamma = 4}$$

كتابة العدد $\boldsymbol{n}$ في النظام العشري

$$\boxed{n = 1333(1) + 222(3) = 1999}$$

حل التمرين 09 : بكالوريا 2004 ع

1. **دراسة باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 3^n و 4^n على 7**

$3^0 \equiv 1[7]$; $3^1 \equiv 3[7]$; $3^2 \equiv 2[7]$; $3^3 \equiv 6[7]$;
$3^4 \equiv 4[7]$; $3^5 \equiv 5[7]$; $3^6 \equiv 1[7]$

$$3^{6k} \equiv 1[7]\ ;\ 3^{6k+1} \equiv 3[7]\ ;\ 3^{6k+2} \equiv 2[7]\ ;$$
$$3^{6k+3} \equiv 6[7]\ ;\ 3^{6k+4} \equiv 4[7]\ ;\ 3^{6k+5} \equiv 5[7]$$

$4^0 \equiv 1[7]$; $4^1 \equiv 4[7]$; $4^2 \equiv 2[7]$; $4^3 \equiv 1[7]$

$$\boxed{4^{3k} \equiv 1[7]\ ;\ 4^{3k+1} \equiv 4[7]\ ;\ 4^{3k+2} \equiv 2[7]}$$

2. **البرهان أنّ $2 \times 2006^{3n+2} + 1424^{6n+1} \equiv 0[7]$**

$2006 \equiv 4[7] \Rightarrow 2006^{3n+2} \equiv 4^{3n+2}[7] \equiv 2[7]$
$\Rightarrow 2 \times 2006^{3n+2} \equiv 4[7]$
$1424 \equiv 3[7] \Rightarrow 1424^{6n+1} \equiv 3^{6n+1}[7] \Rightarrow 1424^{6n+1} \equiv 3[7]$
$2 \times 2006^{3n+2} + 1424^{6n+1} \equiv 4 + 3[7] \equiv 0[7]$

3. $\boldsymbol{u_n = 2 \times 3^n + 3 \times 4^n}$

- **حساب u_n بدلالة n**

$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
$S_n = 2 \times 3^0 + 3 \times 4^0 + \cdots + 2 \times 3^n + 3 \times 4^n$
$S_n = 2(3^0 + 3^1 + \cdots + 3^n) + 3(4^0 + 4^1 + \cdots + 4^n)$
$$S_n = 2\left(\frac{3^{n+1}-1}{3-1}\right) + 3\left(\frac{4^{n+1}-1}{4-1}\right)$$
$$\boxed{S_n = 3^{n+1} + 4^{n+1} - 2}$$

- **تعيين قيم n حيث $S_n \equiv 0[7]$**

$S_n \equiv 0[7] \Rightarrow 3^{n+1} + 4^{n+1} - 2 \equiv 0[7] \Rightarrow 3^{n+1} + 4^{n+1} \equiv 2[7]$

$n+1$	$\boldsymbol{6k}$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
$3^{n+1} \equiv$	**1**	3	2	6	4	5
$4^{n+1} \equiv$	**1**	4	2	1	4	2
$3^{n+1} + 4^{n+1} \equiv$	**2**	0	4	0	1	0

$$\boxed{S_n \equiv 0[7] \Rightarrow n+1 = 6k \Rightarrow n = 6k-1\ ;\ k \in \mathbb{N}^*}$$

حل التمرين 10 : بكالوريا 2005 ر

$\boldsymbol{d' = PGCD(\beta; n)}$ ، $\boldsymbol{d = PGCD(\alpha; \beta)}$ ، $\boldsymbol{\beta = n + 2}$ ، $\boldsymbol{\alpha = n^2 + n}$

1. برهان أنّ $\boldsymbol{d = d'}$

$$d = PGCD(\alpha; \beta) \Rightarrow \begin{cases} d \mid \alpha \\ d \mid \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid \beta n - \alpha \\ d \mid \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid n \\ d \mid \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow d \mid PGCD(\beta; n) \Rightarrow d \mid d'$$

$$d' = PGCD(\beta; n) \Rightarrow \begin{cases} d' \mid \beta \\ d' \mid n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d' \mid \beta \\ d' \mid \beta n - n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d' \mid \beta \\ d' \mid \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow d' \mid PGCD(\alpha; \beta) \Rightarrow d' \mid d$$

$$\boxed{d \mid d' \text{ و } d' \mid d \Rightarrow d = d'}$$

2. استنتاج القيم الممكنة لـ $\boldsymbol{PGCD(\alpha; \beta)}$

$$d = PGCD(\alpha; \beta) \Rightarrow d = PGCD(\beta; n) \Rightarrow \begin{cases} d \mid \beta \\ d \mid n \end{cases} \Rightarrow d \mid \beta - n \Rightarrow d \mid 2$$

$$\Rightarrow \boxed{d = 1 \text{ أو } d = 2}$$

3. $\boldsymbol{b = \overline{384}^n}$ و $\boldsymbol{a = \overline{3520}^n}$

أ. برهان أنّ العدد $\boldsymbol{3n + 2}$ قاسم مشترك للعددين $\boldsymbol{a}$ وb

$$\begin{cases} a = \overline{3520}^n \\ b = \overline{384}^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3n^3 + 5n^2 + 2n \\ b = 3n^2 + 8n + 4 \end{cases}$$

- $3n^3 + 5n^2 + 2n = (3n + 2)(n^2 + n) \Rightarrow (3n + 2) \mid a$
- $3n^2 + 8n + 4 = (3n + 2)(n + 2) \Rightarrow (3n + 2) \mid b$

ب. استنتاج أنّ $\boldsymbol{PGCD(a; b)}$ هو $\boldsymbol{3n + 2}$ أو $\boldsymbol{2(3n + 2)}$

$$PGCD(a, b) = (3n + 2) \times PGCD(\alpha; \beta) = d(3n + 2)$$

$$\Rightarrow \boxed{PGCD(a, b) = 3n + 2 \text{ أو } PGCD(a, b) = 2(3n + 2)}$$

ج. تعيين العددين α وβ علما أنّ $PGCD(a; b) = 41$

$$PGCD(a, b) = 41 \Rightarrow 3n + 2 = 41 \Rightarrow 3n = 39$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 13 \; ; \; \alpha = 13^2 + 13 = 182 \; ; \; \beta = 13 + 2 = 15}$$

حل التمرين 11 : بكالوريا 2005 ع

1) أ) دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 10

$7^0 \equiv 1[10]\ ;\ 7^1 \equiv 7[10]\ ;\ 7^2 \equiv 9[10]\ ;\ 7^3 \equiv 3[10]\ ;\ 7^4 \equiv 1[10]$

$$\boxed{7^{4k} \equiv 1[10]\ ;\ 7^{4k+1} \equiv 7[10]\ ;\ 7^{4k+2} \equiv 9[10]\ ;\ 7^{4k+3} \equiv 3[10]}$$

ب) استنتاج أنّ $7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3} \equiv 0[10]$

$7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3} \equiv 1 + 7 + 9 + 3[10]$

$\boxed{7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3} \equiv 0[10]}$

2) $S_n = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n$

أ) إثبات أنّ $S_{n+4} \equiv S_n[10]$

$S_{n+4} = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^{n+4}$

$S_{n+4} = S_n + \underbrace{7^{n+1} + 7^{n+2} + 7^{n+3} + 7^{n+4}}_{\equiv 0[10]}$

$\boxed{S_{n+4} \equiv S_n[10]}$

ب) دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد S_n على 10

- $n = 4k : S_n \equiv 1[10]\ ;$
- $n = 4k+1 : S_n \equiv 1 + 7[10] \equiv 8[10];$
- $n = 4k+2 : S_n \equiv 1 + 7 + 9[10] \equiv 7[10]\ ;$
- $n = 4k+3 : S_n \equiv 1 + 7 + 9 + 3[10] \equiv 0[10]$

حل التمرين 12 : بكالوريا 2007

$c = 2n + 3$ ، $b = 4n + 3$ ، $a = 2n + 1$

1. إثبات أنّ العددين a و b أوليان فيما بينهما

$-2a + b = 1 \Rightarrow \boxed{PGCD(a,b) = 1}$ (بيزو)

استنتاج أنّ الأعداد a ، b و c أولية فيما بينها

$PGCD(a,b,c) = PGCD[PGCD(a,b),c] = PGCD(1,c)$

$\Rightarrow \boxed{PGCD(a,b,c) = 1}$

2. تعيين تبعا لقيم العدد n قيمة القاسم المشترك الأكبر للعددين b وc

$$d = PGCD(b,c) \Rightarrow \begin{cases} d \mid b \\ d \mid c \end{cases} \Rightarrow d \mid -b + 2c \Rightarrow d \mid 3 \Rightarrow \boxed{d \in \{1;3\}}$$

$$d = 3 \Rightarrow \begin{cases} 4n + 3 \equiv 0[3] \\ 2n + 3 \equiv 0[3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \equiv 0[3] \\ 2n \equiv 0[3] \end{cases} \Rightarrow n \equiv 0[3]$$

- $n = 3k \; : \; PGCD(b, c) = 3$
- $n \neq 3k \; : \; PGCD(b, c) = 1$

3. تعيين قيمة n بحيث يكون : $\begin{cases} \boldsymbol{PGCD(b;c) = 7} \\ \boldsymbol{PPCM(b;c) = 1305} \end{cases}$

$$\begin{cases} d = 3 \\ m = 1305 \end{cases} \Rightarrow bc = md \Rightarrow (4n+3)(2n+3) = 3915$$

$$\Rightarrow 8n^2 + 18n - 3906 = 0 \Rightarrow \boxed{n = 21}$$

4. كتابة العدد b^2 في نظام العد الذي أساسه a

$$b = 2a + 1 \Rightarrow b^2 = (2a+1)^2 = 4a^2 + 4a + 1 \Rightarrow \boxed{b^2 = \overline{441}^a}$$

5. $\boldsymbol{\omega(a;b;c)}$

أ- بيان أنّ النقطة ω تنتمي إلى مستقيم (Δ)

$$\omega(a,b,c) \Rightarrow \omega \in (\Delta) : \begin{cases} x = 1 + 2n \\ y = 3 + 4n \\ z = 3 + 2n \end{cases} ; n \in \mathbb{N} \, ; A(1,3,3); \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ب- كتابة معادلة المستوي (P)

$$\vec{n}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ ناظمي لـ} (P) \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}.\vec{u} = 0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{OA} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 4\beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta + 3\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 4\beta + 2\gamma = 0 \\ -2\alpha - 6\beta - 6\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -2\gamma \\ \alpha = 3\gamma \end{cases} \Rightarrow \vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M(x,y,z) \in (P) \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{OM} = 0 \Rightarrow \boxed{3x - 2y + z = 0}$$

حل التمرين 13 : بكالوريا 2008 ر

$$\boldsymbol{3x - 21y = 78}$$

1. أ. بيان أنّ (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ $\Leftarrow$ $PGCD(3;21) = 3 \; ; 3 \mid 78$

ب. إثبات أنّ $\boldsymbol{x \equiv 5[7]}$

$$(x;y) \in S_{(E)} \Rightarrow 3x - 21y = 78 \Rightarrow x - 7y = 26$$

$$\Rightarrow x = 7y + 21 + 5 \Rightarrow x = 7(y+3) + 5 \Rightarrow \boxed{x \equiv 5[7]}$$

استنتاج حلول المعادلة (E)

$x \equiv 5[7] \Rightarrow x = 7k+5 \Rightarrow 7(y+3)+5 = 7k+5$

$\Rightarrow y+3 = k \Rightarrow y = k-3$

$$\boxed{S_{(E)} = \{(7k+5; k-3)\} ; k \in \mathbb{Z}}$$

2. أ. **دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7**

$5^0 \equiv 1[7] ; 5^1 \equiv 5[7] ; 5^2 \equiv 4[7] ; 5^3 \equiv 6[7] ; 5^4 \equiv 2[7] ;$

$5^5 \equiv 3[7] ; 5^6 \equiv 1[7]$

$$\boxed{\begin{array}{c} 5^{6k} \equiv 1[7] ; 5^{6k+1} \equiv 5[7] ; 5^{6k+2} \equiv 4[7] ; \\ 5^{6k+3} \equiv 6[7] ; 5^{6k+4} \equiv 2[7] ; 5^{6k+5} \equiv 3[7] \end{array}}$$

ب. **تعيين الثنائيات $(x ; y)$ حيث $5^x + 5^y \equiv 3[7]$**

$5^x + 5^y \equiv 3[7] \Rightarrow 5^{7k+5} + 5^{k-3} \equiv 3[7] \Rightarrow 5^{k-3}\left(\underbrace{5^{6k+8}}_{\equiv 4[7]} + 1\right) \equiv 3[7]$

$\Rightarrow 5.5^{k-3} \equiv 3[7] \Rightarrow 5^{k-2} \equiv 3[7] \Rightarrow k-2 = 6\alpha + 5 \Rightarrow k = 6\alpha + 7$

$k = 6m+1 \Rightarrow x = 7(6m+1)+5 = 42m+12 ;$

$y = 6m+1-3 = 6m-2$

$$\boxed{(x; y) = (42m+12; 6m-2) ; m \in \mathbb{N}^*}$$

حل التمرين 14 : بكالوريا 2008 ت ر

n **عدد طبيعي أكبر من 5.**

1. $\boldsymbol{a = n - 2}$ ، $\boldsymbol{b = 2n + 3}$

أ. **تعيين القيم الممكنة لـ $PGCD(a; b)$**

$\begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases} \Rightarrow d \mid -2a+b \Rightarrow d \mid 7 \Rightarrow \boxed{d = 1 \text{ أو } d = 7}$

ب. **بيان أنّ العددين *a* و *b* من مضاعفات 7 إذا و فقط إذا كان *n* + 5 مضاعفا للعدد 7**

$$\begin{cases} a \equiv 0[7] \\ b \equiv 0[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n-2 \equiv 0[7] \\ 2n+3 \equiv 0[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n-2+7 \equiv 0[7] \\ 2n+3+7 \equiv 0[7] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+5 \equiv 0[7] \\ 2(n+5) \equiv 0[7] \end{cases} \Rightarrow \boxed{n+5 \equiv 0[7]} \; (\text{2 أولي مع 7})$$

ج. **تعيين قيم *n* التي يكون من أجلها $PGCD(a; b) = 7$**

$PGCD(a; b) = 7 \Rightarrow n+5 \equiv 0[7] \Rightarrow n \equiv 2[7] \Rightarrow \boxed{n = 7k+2 ; k \in \mathbb{N}}$

.2 $q = n^2 - 7n + 10$ ، $p = 2n^2 - 7n - 15$

أ. بيان أنّ العددين p و q يقبلان القسمة على $n - 5$

$$2n^2 - 7n - 15 = (n-5)(2n+3) \Rightarrow \boxed{p = (n-5)a}$$

$$n^2 - 7n + 10 = (n-5)(n-2) \Rightarrow \boxed{q = (n-5)b}$$

ب. تعيين $PGCD\ (p\ ;\ q)$ بدلالة n

$$PGCD(p;q) = (n-5)PGCD(a;b)$$

$$\boxed{\begin{cases} n = 7k+2 :\ PGCD(p;q) = 7(n-5) \\ n \neq 7k+2 :\ PGCD(p;q) = (n-5) \end{cases}}$$

حل التمرين 15 : بكالوريا 2008 ت ر

$4x - 9y = 319$ ... ... (I)

.1 التأكد أنّ الثنائية (82 , 1) حل للمعادلة (I)

$$4(82) - 9(1) = 319 \Rightarrow (82;1) \in S_{(\mathrm{I})}$$

حل المعادلة (I)

$$\begin{cases} 4x - 9y = 319 \\ 4(82) - 9(1) = 319 \end{cases} \Rightarrow 4(x-82) - 9(y-1) = 0$$

$$\Rightarrow 4(x-82) = 9(y-1)$$

$$\begin{cases} 9 \mid 4(x-82) \\ PGCD(9;4) = 1 \end{cases} \Rightarrow 9 \mid x - 82 \Rightarrow x - 82 = 9k$$

$$\Rightarrow x = 9k + 82$$

$$4(x-82) = 9(y-1) \Rightarrow y - 1 = 4k \Rightarrow y = 4k + 1$$

$$\boxed{S_{(\mathrm{I})} = \{(9k+82; 4k+1)\}\ ; k \in \mathbb{Z}}$$

.2 تعيين الثنائيات (a,b) الصحيحة حلول المعادلة (II)

$$4a^2 - 9b^2 = 319 \ldots (\mathrm{II}) \Rightarrow (2a)^2 - (3b)^2 = 319$$

$$\Rightarrow (2a-3b)(2a+3b) = 319 \Rightarrow \begin{cases} 2a - 3b \mid 319 \\ 2a + 3b \mid 319 \end{cases}$$

نلاحظ أنّه إذا كان a و b حلين للمعادلة فإنّ $-a$ و $-b$ هما كذلك حلين للمعادلة ، إذن يمكن البحث عن الحلول الموجبة فقط ، وبما أننا اعتبرنا a و b عددين موجبين فإنّ:

$$2a+3b>2a-3b$$

$$D_{319}=\{1;11;29;319\}\Rightarrow\begin{cases}2a-3b=1\\2a+3b=319\end{cases}\text{ أو }\begin{cases}2a-3b=11\\2a+3b=29\end{cases}$$

$$\Rightarrow(a;b)=(80;53)\text{ أو }(a;b)=(10;3)$$

$$\boxed{S_{(\mathrm{II})}=\begin{Bmatrix}(80;53)\,,(-80;53)\,,(80;-53)\,,(-80;-53)\,,\\(10;3)\,,(-10;3)\,,(10;-3)\,,(-10;-3)\end{Bmatrix}}$$

3. استنتاج الثنائيات $(x_0\,,y_0)$

$$\begin{cases}x_0=\alpha^2\\y_0=\beta^2\\4x_0-9y_0=319\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=\alpha^2\\y_0=\beta^2\\4\alpha^2-9\beta^2=319\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=\alpha^2\\y_0=\beta^2\\(\alpha;\beta)\in S_{(\mathrm{II})}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x_0=6400\\y_0=2809\end{cases}\text{ أو }\begin{cases}x_0=100\\y_0=9\end{cases}}$$

حل التمرين 16 : بكالوريا 2009 ر

$$A=\overline{5566}^x$$

1. أ. نشر العبارة $(5x^2+6)(x+1)$

$$(5x^2+6)(x+1)=5x^3+5x^2+6x+6$$

إيجاد العلاقة بين x و y

$$A=\overline{5566}^x\Rightarrow A=5x^3+5x^2+6x+6=(5x^2+6)(x+1)$$

$$A=(5x^2+6)(2+2y)\Rightarrow 2+2y=x+1\Rightarrow\boxed{x=2y+1}$$

ب. حساب x و y

$$\begin{cases}x=2y+1\\6<x<12\\x\text{ أولي}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\dfrac{x-1}{2}\\6<x<12\\x\text{ أولي}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\text{ فردي}\\6<x<12\\x\text{ أولي}\end{cases}$$

$$\Rightarrow x\in\{7;11\}\Rightarrow\boxed{(x;y)\in\{(7;3),(11;5)\}}$$

كتابة العدد A في نظام التعداد العشري

- $x=7\Rightarrow A=5(7)^3+5(7)^2+6(7)+6=2008$
- $x=11\Rightarrow A=5(11)^3+5(11)^2+6(11)+6=7332$

2. أ. **تعيين الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584**

$584 = 2^3 \times 73 = 1^2 \times 2^2 \times 2 \times 73$

الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم 584 هي 1 و2

ب. **تعيين الأعداد الطبيعية a و b**

$PGCD(a;b) = d \Rightarrow a = da'; b = db';\ PGCD(a';b') = 1\ ; a' > b'$

$\begin{cases} a + b = 32 \\ a^2 + b^2 = 584 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d(a' + b') = 32 \\ d^2\left({a'}^2 + {b'}^2\right) = 584 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} d(a' + b') = 32 \\ d^2 \mid 584 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d(a' + b') = 32 \\ d = 1 \text{ أو } d = 2 \end{cases}$

$\bullet\, d = 1 \Rightarrow \begin{cases} a' + b' = 32 \\ {a'}^2 + {b'}^2 = 584 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b' = 32 - a' \\ {a'}^2 + (32 - a')^2 = 584 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} b' = 32 - a' \\ 2a'^2 - 64a' + 440 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b' = 32 - a' \\ a'^2 - 32a' + 220 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow a' = 22\ ; b' = 10\ \left[\text{مستحيل لأنّ } PGCD(a', b') \neq 1\right]$

$\bullet\, d = 2 \Rightarrow \begin{cases} a' + b' = 16 \\ {a'}^2 + {b'}^2 = 146 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b' = 16 - a' \\ {a'}^2 + (16 - a')^2 = 146 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} b' = 16 - a' \\ 2a'^2 - 32a' + 110 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b' = 16 - a' \\ a'^2 - 16a' + 55 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow a' = 11\ ; b' = 5 \Rightarrow \boxed{(a;b) = (22;10)}$

حل التمرين 17 : بكالوريا 2009 ت ر

1. أ. **تعيين الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2009**

$2009 = 7^2 \times 41 \Rightarrow$ الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم 2009 هي 1 و7

ب. **حساب a و u_0**

$u_1^2 + u_2 + 35a^2 = 2009 \Rightarrow a^2u_0^2 + a^2u_0 + 35a^2 = 200$

$\Rightarrow a^2(u_0^2 + u_0 + 35) = 2009 \Rightarrow a^2 \mid 2009 \Rightarrow a = 1 \text{ أو } a = 7$

- $a = 1 :\ u_0^2 + u_0 + 35 = 2009 \Rightarrow u_0^2 + u_0 - 1974 = 0$;
  $\Delta = 7897$ (ليس مربعا تاما)
- $a = 7 :\ u_0^2 + u_0 + 35 = 41 \Rightarrow u_0^2 + u_0 - 6 = 0$;
  $\Delta = 25$; $u_0 = -3$ (مرفوض) أو $u_0 = 2$

$$\boxed{u_1^2 + u_2 + 35a^2 = 2009 \Rightarrow a = 7\ ;\ u_0 = 2}$$

2. حساب u_n بدلالة n

$u_n = u_0 \times a^n \Rightarrow \boxed{u_n = 2 \times 7^n}$

3. $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

أ. التعبير عن S_n بدلالة n

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0\left(\frac{a^{n+1}-1}{a-1}\right) = 2\left(\frac{7^{n+1}-1}{7-1}\right)$$

$$\boxed{S_n = \frac{1}{3}\left(7^{n+1}-1\right)}$$

ب. تعيين العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n = 800$

$S_n = 800 \Rightarrow \frac{1}{3}\left(7^{n+1}-1\right) = 800 \Rightarrow 7^{n+1} - 1 = 2400$

$\Rightarrow 7^{n+1} = 2401 \Rightarrow \ln 7^{n+1} = \ln 2401$

$\Rightarrow (n+1)\ln 7 = \ln 2401 \Rightarrow n + 1 = \frac{\ln 2401}{\ln 7} = 4 \Rightarrow \boxed{n = 3}$

حل التمرين 18 : بكالوريا 2009 ت ر

1. حل المعادلة التفاضلية : $y' = (\ln 2)y$

$y' = y\ln 2 \Rightarrow \boxed{y = ce^{x\ln 2}}$

2. تعيين عبارة $f(x)$

$f(x) = ce^{x\ln 2}$; $f(0) = 1 \Rightarrow c = 1$

$$\boxed{f(x) = e^{x\ln 2} = \left(e^{\ln 2}\right)^x = 2^x}$$

.3

أ. دراسة بواقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد 2^n

$2^0 \equiv 1[7]$; $2^1 \equiv 2[7]$; $2^2 \equiv 4[7]$; $2^3 \equiv 1[7]$

$$\boxed{2^{3k} \equiv 1[7]\ ;\ 2^{3k+1} \equiv 2[7]\ ;\ 2^{3k+2} \equiv 4[7]}$$

ب. استنتاج باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد $f(2009)-4$

$$f(2009)=2^{2009}=2^{3(669)+2}$$

$$f(2009)\equiv 4[7]\Rightarrow \boxed{f(2009)-4\equiv 0[7]}$$

4. أ. حساب المجموع S_n بدلالة n

$$S_n=f(0)+f(1)+\cdots+f(n)=2^0+2^1+\cdots+2^n$$

$$S_n=\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\Rightarrow \boxed{S_n=2^{n+1}-1}$$

ب. تعيين قيم n حيث $S_n\equiv 0[7]$

$$S_n\equiv 0[7]\Rightarrow 2^{n+1}-1\equiv 0[7]\Rightarrow 2^{n+1}\equiv 1[7]$$

$$\Rightarrow n+1=3k\Rightarrow \boxed{n=3k-1\,;k\in\mathbb{N}^*}$$

حل التمرين 19 : بكالوريا 2010 ر

1. $7x+65y=2009\ \ldots\ (1)$

أ. بيانٌ أنّ $y\equiv 0[7]$

$$(x;y)\in S_{(1)}\Rightarrow 7x+65y=2009$$

$$\Rightarrow 65y=-7x+2009=7(-x+287)$$

$$\begin{cases} 7\mid 65y \\ PGCD(7;65)=1\end{cases}\Rightarrow 7\mid y\Rightarrow y=7k$$

ب. حل المعادلة (1)

$$y=7k\Rightarrow 7x=-65(7k)+2009=7(-65k+287)$$

$$\Rightarrow x=-65k+287$$

$$\boxed{S_{(1)}=\{(-65k+287;7k)\}\,;k\in\mathbb{Z}}$$

2. دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9

$$2^0\equiv 1[9]\,;2^1\equiv 2[9]\,;2^2\equiv 4[9]\,;2^3\equiv 8[9]\,;$$

$$2^4\equiv 7[9]\,;2^5\equiv 5[9]\,;2^6\equiv 1[9]$$

$$\boxed{\begin{array}{c}2^{6k}\equiv 1[9]\,;2^{6k+1}\equiv 2[9]\,;2^{6k+2}\equiv 4[9]\,;\\ 2^{6k+3}\equiv 8[9]\,;2^{6k+4}\equiv 7[9]\,;2^{6k+5}\equiv 5[9]\end{array}}$$

3. تعيين قيم n حيث $2^{6n}+3n+2\equiv 0[9]$

$$\underbrace{2^{6n}}_{\equiv 1[9]}+3n+2\equiv 0[9]\Rightarrow 3n+3\equiv 0[9]\Rightarrow 3n\equiv 6[9]$$

$n \equiv$	0	1	**2**	3	4	**5**	6	7	**8**	[9]
$3n \equiv$	0	3	**6**	0	3	**6**	0	3	**6**	[9]

$$\boxed{\begin{gathered}2^{6n} + 3n + 2 \equiv 0[9] \Rightarrow n \equiv 2[9] \text{ أو } n \equiv 5[9] \text{ أو } n \equiv 8[9] \\ \Rightarrow n = 9k + 2 \text{ أو } n = 9k + 5 \text{ أو } n = 9k + 8 \,;\, k \in \mathbb{N}\end{gathered}}$$

.4 $\boldsymbol{u_n = 2^{6n} - 1}$

أ. التحقّق أنّ $\boldsymbol{u_n \equiv 0[9]}$

$$2^{6n} \equiv 1[9] \Rightarrow 2^{6n} - 1 \equiv 0[9] \Rightarrow \boxed{u_n \equiv 0[9]}$$

ب. حل المعادلة : $\boldsymbol{(7u_1)x + (u_2)y = 126567 \;\ldots (2)}$

$$(7u_1)x + (u_2)y = 126567 \ldots (2)$$
$$\Rightarrow 441x + 4095y = 126567 \Rightarrow 9x + 65y = 2009$$
$$\Rightarrow \boxed{S_{(2)} = S_{(1)}}$$

ج. تعيين الثنائية $\boldsymbol{(x_0 , y_0)}$

$$\begin{cases}(x_0; y_0) \in S_{(2)} \\ x_0 \geq 0 \\ y_0 \geq 25\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-65k + 287 \geq 0 \\ 7k \geq 25\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k \leq \dfrac{287}{65} \\ k \geq \dfrac{25}{7}\end{cases}$$

$$\Rightarrow 3{,}5 \leq k \leq 4{,}4 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow \boxed{(x_0; y_0) = (27; 28)}$$

حل التمرين 20 : بكالوريا 2010 ر

.1 برهان أنّ $\boldsymbol{3^{3n} - 1 \equiv 0[13]}$

$$3^3 \equiv 1[13] \Rightarrow 3^{3n} \equiv 1[13] \Rightarrow \boxed{3^{3n} - 1 \equiv 0[13]}$$

.2 استنتاج أنّ $\boldsymbol{3^{3n+1} - 3 \equiv 0[13]}$ **و** $\boldsymbol{3^{3n+2} - 9 \equiv 0[13]}$

$$3^{3n} - 1 \equiv 0[13] \Rightarrow 3(3^{3n} - 1) \equiv 0[13] \Rightarrow \boxed{3^{3n+1} - 3 \equiv 0[13]}$$

$$3^{3n} - 1 \equiv 0[13] \Rightarrow 3^2(3^{3n} - 1) \equiv 0[13] \Rightarrow \boxed{3^{3n+2} - 9 \equiv 0[13]}$$

3. تعيين حسب قيم n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13

$$3^0 \equiv 1[13]\ ;\ 3^1 \equiv 3[13]\ ;\ 3^2 \equiv 9[13]\ ;\ 3^3 \equiv 1[13]$$

$$\boxed{3^{3k} \equiv 1[13]\ ;\ 3^{3k+1} \equiv 3[13]\ ;\ 3^{3k+2} \equiv 9[13]}$$

استنتاج باقي قسمة 2005^{2010} على 13

$$2005 \equiv 3[13] \Rightarrow 2005^{2010} \equiv 3^{3(670)}[13] \Rightarrow \boxed{2005^{2010} \equiv 1[13]}$$

4. $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p}$

أ. تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13 من أجل $p = 3n$

$$p = 3n \Rightarrow A_p = 3^{3n} + 3^{6n} + 3^{9n}$$

$$\Rightarrow A_p = \underbrace{3^{3n}}_{\equiv 1[13]} + \underbrace{3^{3(2n)}}_{\equiv 1[13]} + \underbrace{3^{3(3n)}}_{\equiv 1[13]} \Rightarrow \boxed{A_p \equiv 3[13]}$$

ب. برهان أنّه إذا كان $p = 3n + 1$ ، فإنّ $A_p \equiv 0[13]$

$$p = 3n + 1 \Rightarrow A_p = 3^{3n+1} + 3^{6n+2} + 3^{9n+3}$$

$$\Rightarrow A_p = \underbrace{3^{3n+1}}_{\equiv 3[13]} + \underbrace{3^{3(2n)+2}}_{\equiv 9[13]} + \underbrace{3^{3(3n+1)}}_{\equiv 1[13]} \Rightarrow \boxed{A_p \equiv 0[13]}$$

ج. تعيين باقي قسمة A_p على 13 من أجل $p = 3n + 2$

$$p = 3n + 2 \Rightarrow A_p = 3^{3n+2} + 3^{6n+4} + 3^{9n+6}$$

$$\Rightarrow A_p = \underbrace{3^{3n+2}}_{\equiv 9[13]} + \underbrace{3^{3(2n+1)+1}}_{\equiv 3[13]} + \underbrace{3^{3(3n+2)}}_{\equiv 1[13]} \Rightarrow \boxed{A_p \equiv 0[13]}$$

.5 $a = \overline{1001001000}$ ، $b = \overline{1000100010000}$

أ. التحقق أنّ a وb يكتبان على الشكل A_p في النظام العشري

$$a = \overline{1001001000}^3 \Rightarrow a = 3^3 + 3^6 + 3^9 \Rightarrow \boxed{a = A_3}$$

$$b = \overline{1000100010000}^3 \Rightarrow b = 3^4 + 3^8 + 3^{12} \Rightarrow \boxed{b = A_4}$$

ب. استنتاج باقي القسمة الإقليدية لكل من a و b على 13

$$a = A_3 \Rightarrow \boxed{a \equiv 3[13]}\ ;\ b = A_4 = A_{3(1)+1} \Rightarrow \boxed{b \equiv 0[13]}$$

حل التمرين 21 : بكالوريا 2010 ت ر

1. **تعيين α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3**

$$n \equiv 0[3] \Rightarrow \underbrace{7^2}_{\equiv 1[3]} \alpha + \underbrace{7^3}_{\equiv 1[3]} + \underbrace{7^4}_{\equiv 1[3]} \equiv 0[3] \Rightarrow \alpha + 2 \equiv 0[3]$$

$$\Rightarrow \alpha \equiv 1[3] \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3k+1 \\ 0 \leq \alpha < 7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = 1 \text{ أو } \alpha = 4}$$

2. **تعيين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5**

$$n \equiv 0[5] \Rightarrow 7^2\alpha + 7^3 + 7^4 \equiv 0[5] \Rightarrow 7^2(\alpha + 7 + 7^2) \equiv 0[5]$$

$$\Rightarrow 2^2(\alpha + 2 + 2^2) \equiv 0[5]\ (7 \equiv 2[5])$$

$$n \equiv 0[5] \Rightarrow 4(\alpha + 1) \equiv 0[5] \Rightarrow \alpha + 1 \equiv 0[5] \Rightarrow \alpha \equiv 4[5]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 5k+4 \\ 0 \leq \alpha < 7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = 4}$$

استنتاج قيمة α حتى يكون n قابلا للقسمة على 15

$$n \equiv 0[15] \Rightarrow \begin{cases} n \equiv 0[3] \\ n \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = 4}$$

3. **كتابة العدد n في النظام العشري.**

$$n = \overline{11400}^7 = 4.7^2 + 7^3 + 7^4 \Rightarrow \boxed{n = 2940}$$

حل التمرين 22 : بكالوريا 2010 ت ر

1. **تعيين بواقي القسمة الإقليدية للعدد 10^n على 13**

$$10^0 \equiv 1[13]\ ; 10^1 \equiv 10[13]\ ; 10^2 \equiv 9[13]\ ;$$

$$10^3 \equiv 12[13]\ ; 10^4 \equiv 3[13]\ ; 10^5 \equiv 4[13]\ ; 10^6 \equiv 1[13]$$

$$\boxed{\begin{matrix} 10^{6k} \equiv 1[13]\ ; 10^{6k+1} \equiv 10[13]\ ; 10^{6k+2} \equiv 9[13]\ ; \\ 10^{6k+3} \equiv 12[13]\ ; 10^{6k+4} \equiv 3[13]\ ; 10^{6k+5} \equiv 4[13] \end{matrix}}$$

2. **التحقّق أنّ : $(10^{2008})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 0[13]$**

$$2008 = 6(334) + 4 \Rightarrow 10^{2008} \equiv 3[13]$$

$$\Rightarrow (10^{2008})^2 \equiv 9[13] \Rightarrow \underbrace{(10^{2008})^2}_{\equiv 9[13]} + \underbrace{10^{2008}}_{\equiv 3[13]} + 1 \equiv 0[13]$$

3. تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0[13]$

$$10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0[13] \Rightarrow (10^n)^2 + 10^n \equiv 12[13]$$

$n =$	$6k$	$6k+1$	$\boldsymbol{6k+2}$	$6k+3$	$\boldsymbol{6k+4}$	$6k+5$
$10^n \equiv$	1	10	**9**	12	**3**	4
$(10^n)^2 \equiv$	1	9	**3**	1	**9**	3
$(10^n)^2 + 10^n \equiv$	2	6	**12**	0	**12**	7

$$\boxed{10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0[13] \Rightarrow n = 6k + 2 \text{ أو } n = 6k + 4 \; ; k \in \mathbb{N}}$$

حل التمرين 23 : بكالوريا 2011 ر

1. تعيين الحدين u_3 و u_5

$$u_3 = du'_3 \; ; \; u_5 = du'_5 \; ; m.d = u_3.u_5$$

$$\Rightarrow m = \frac{u_3.u_5}{d} = \frac{d^2.u'_3.u'_5}{d} = d.u'_3.u'_5$$

$$\begin{cases} u_4 = 15 \\ m + d = 42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_3 + u_5 = 30 \\ m + d = 42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d(u'_3 + u'_5) = 30 \\ d(u'_3 \times u'_5 + 1) = 42 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d \mid 30 \\ d \mid 42 \end{cases} \Rightarrow d|PGCD(30;42) \Rightarrow d|6 \Rightarrow d \in \{1,2,3,6\}$$

- $d = 1: \begin{cases} (u'_3 + u'_5) = 30 \\ (u'_3 \times u'_5) = 41 \end{cases} \; ; \; x^2 - 30x + 41 = 0 \; ; \; \sqrt{\Delta} \notin \mathbb{N}$
- $d = 2: \begin{cases} (u'_3 + u'_5) = 15 \\ (u'_3 \times u'_5) = 20 \end{cases} \; ; \; x^2 - 15x + 20 = 0 \; ; \; \sqrt{\Delta} \notin \mathbb{N}$
- $d = 3: \begin{cases} (u'_3 + u'_5) = 10 \\ (u'_3 \times u'_5) = 13 \end{cases} \; ; \; x^2 - 10x + 13 = 0 \; ; \; \sqrt{\Delta} \notin \mathbb{N}$
- $d = 6: \begin{cases} (u'_3 + u'_5) = 5 \\ (u'_3 \times u'_5) = 6 \end{cases} \; ; \; u'_3 = 2 \; ; \; u'_5 = 3$

$$\boxed{u_3 = 12 \; ; \; u_5 = 18}$$

استنتاج u_0

$u_5 = u_3 + 2r \Rightarrow 2r = u_5 - u_3 = 6 \Rightarrow \boxed{r = 3}$;
$u_0 = u_3 - 3r = 12 - 9 \Rightarrow \boxed{u_0 = 3}$

.2 كتابة (u_n) بدلالة n

$$u_n = u_0 + nr = 3 + 3n \Rightarrow \boxed{u_n = 3(n+1)}$$

بيان أنّ 2010 حد من حدود (u_n) و تعيين رتبته

$$u_n = 2010 \Rightarrow 3(n+1) = 2010 \Rightarrow n + 1 = 670 \Rightarrow \boxed{n = 669}$$

منه 2010 حد من حدود (u_n) و رتبته هي 670

.3 تعيين الحد الذي ابتداءً منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة من (u_n) يساوي 10080

$$u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + u_{k+4} = 10080$$
$$\Rightarrow u_k + u_k + 3 + u_k + 6 + u_k + 9 + u_k + 12 = 10080$$
$$\Rightarrow 5u_k + 30 = 10080 \Rightarrow u_k = \frac{10050}{5} \Rightarrow \boxed{u_k = 2010}$$

أ- حساب المجموع S بدلالة n

$$S = u_0 + u_1 + u_2 \dots + u_{2n} = \frac{2n+1}{2}(u_0 + u_{2n})$$
$$S = \frac{2n+1}{2}(3 + 3 + 6n) \Rightarrow \boxed{S = (2n+1)(3n+3)}$$

ب-استنتاج بدلالة n المجموعين S_1 و S_2

$$S_1 = u_0 + u_2 + \cdots + u_{2n}$$
$$S_1 = u_0 + u_0 + 2r + u_0 + 4r + \cdots + u_0 + 2nr$$
$$S_1 = (n+1)u_0 + 2r(1 + 2 + \cdots + n)$$
$$S_1 = 3(n+1) + 2r\left[\frac{n}{2}(1+n)\right] = 3(n+1) + 3n(n+1)$$
$$S_1 = 3(n+1)(1+n) \Rightarrow \boxed{S_1 = 3(n+1)^2}$$
$$S_2 = S - S_1 = 3(2n+1)(n+1) - 3(n+1)^2$$
$$S_2 = 3(n+1)(2n+1-n-1) \Rightarrow \boxed{S_2 = 3n(n+1)}$$

حل التمرين 24 : بكالوريا 2011 ر

1. حلّ المعادلة (E) ... $\mathbf{13x-7y=-1}$

$$\begin{cases} 13x-7y=-1 \\ 13(1)-7(2)=-1 \end{cases} \Rightarrow 13(x-1)-7(y-2)=0$$

$$\Rightarrow 13(x-1)=7(y-2)$$

$$\begin{cases} 7 \mid 13(x-1) \\ PGCD(7;13)=1 \end{cases} \Rightarrow 7 \mid x-1 \Rightarrow x-1=7k \Rightarrow x=7k+1$$

$$13(x-1)=7(y-2) \Rightarrow y-2=13k \Rightarrow y=13k+2\,;$$

$$\boxed{S=\{(7k+1;13k+2)\}\,;k\in\mathbb{Z}}$$

2. تعيين الأعداد الصحيحة النسبية a بحيث : $\begin{cases} \boldsymbol{a\equiv -1[7]} \\ \boldsymbol{a\equiv 0[13]} \end{cases}$

$$\begin{cases} a\equiv -1[7] \\ a\equiv 0[13] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=7\alpha-1 \\ a=13\beta \end{cases} \Rightarrow 13\beta-7\alpha=-1$$

$$\Rightarrow (\beta;\alpha)=(7k+1;13k+2) \Rightarrow \boxed{a=91k+13\,;k\in\mathbb{Z}}$$

3. دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على كل من 7 و13

$$9^0\equiv 1[7]\,;9^1\equiv 2[7]\,;9^2\equiv 4[7]\,;9^3\equiv 1[7]$$

$$\boxed{9^{3k}\equiv 1[7]\,;9^{3k+1}\equiv 2[7]\,;9^{3k+2}\equiv 4[7]}$$

$$9^0\equiv 1[13]\,;9^1\equiv 9[13]\,;9^2\equiv 3[13]\,;9^3\equiv 1[13]$$

$$\boxed{9^{3k}\equiv 1[13]\,;9^{3k+1}\equiv 9[13]\,;9^{3k+2}\equiv 3[13]}$$

4. تعيين α وβ حيث $\boldsymbol{b\equiv 0[91]}$

$$b=\overline{\alpha00\beta086}^9 \Rightarrow b=6+8(9)+\beta(9)^3+\alpha(9)^6$$

$$b\equiv 0[91] \Rightarrow \begin{cases} b\equiv 0[7] \\ b\equiv 0[13] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underbrace{(9)^6}_{\equiv 1[7]}\alpha+\underbrace{(9)^3}_{\equiv 1[7]}\beta+\underbrace{78}_{\equiv 1[7]}\equiv 0[7] \\ \underbrace{(9)^6}_{\equiv 1[13]}\alpha+\underbrace{(9)^3}_{\equiv 1[13]}\beta+\underbrace{78}_{\equiv 0[13]}\equiv 0[13] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+1 \equiv 0[7] \\ \alpha+\beta \equiv 0[13] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta \equiv -1[7] \\ \alpha+\beta \equiv 0[13] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 91k+13 \\ 0 < \alpha+\beta < 18 \end{cases} \Rightarrow \alpha+\beta = 13$$

$$\Rightarrow \boxed{(\alpha;\beta) \in \{(5;8);(8;5);(6;7);(7;6)\}}$$

حل التمرين 25 : بكالوريا 2011 ت ر

1. المعادلة $21x + 14y = 40$ لا تقبل حلولا في مجموعة الأعداد الصحيحة

$\boxed{\text{صحيح}}$ لأنّ $PGCD(21;14) = 7$ و العدد 7 لا يقسم 40

2. في نظام التعداد ذي الأساس 7 يكون : $\overline{3421} + \overline{1562} = \overline{5413}$

$\boxed{\text{خطأ}}$ لأنّ : $\overline{3421}^7 + \overline{1562}^7 = 1240 + 632 = 1872$

و $\overline{5413}^7 = 1921$

3. باقي القسمة الإقليدية للعدد : $1 + 3 + 32 + \cdots + 3^{2011}$ على 7 هو 6

$\boxed{\text{خطأ}}$ لأنّ :

$3^0 \equiv 1[7]$; $3^1 \equiv 3[7]$; $3^2 \equiv 2[7]$; $3^3 \equiv 6[7]$;
$3^4 \equiv 4[7]$; $3^5 \equiv 5[7]$; $3^6 \equiv 1[7]$
$3^{6k} \equiv 1[7]$; $3^{6k+1} \equiv 3[7]$; $3^{6k+2} \equiv 2[7]$;
$3^{6k+3} \equiv 6[7]$; $3^{6k+4} \equiv 4[7]$; $3^{6k+5} \equiv 5[7]$

$$3^{6k} + 3^{6k+1} + 3^{6k+2} + 3^{6k+3} + 3^{6k+4} + 3^{6k+5} \equiv 0[7]$$

$$1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{2009} + 3^{2010} + 3^{2011}$$

$$\equiv \underbrace{1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{6(334)+5}}_{\equiv 0[7]} + \underbrace{3^{6(335)}}_{\equiv 1[7]} + \underbrace{3^{6(335)+1}}_{\equiv 3[7]} [7]$$

$$1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{2011} \equiv 4[7]$$

حل التمرين 26 : بكالوريا 2011 ت ر

1. التحقّق أنّ : $4 \equiv -3[7]$

$$4+3 \equiv 0[7] \Rightarrow \boxed{4 \equiv -3[7]}$$

بيان أنّ : $A_3 \equiv 6[7]$

$$A_3 = 2^3+3^3+4^3+5^3+6^3$$

$$\begin{cases} 4 \equiv -3[7] \\ 5 \equiv -2[7] \\ 6 \equiv -1[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4^3 \equiv -3^3[7] \\ 5^3 \equiv -2^3[7] \\ 6^3 \equiv -1[7] \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_3 \equiv 2^3+3^3-3^3-2^3-1[7] \Rightarrow A_3 \equiv -1[7]$$

$$\Rightarrow \boxed{A_3 \equiv 6[7]}$$

2. دراسة بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2^n و 3^n على 7

$2^0 \equiv 1[7]\ ;\ 2^1 \equiv 2[7]\ ; 2^2 \equiv 4[7]\ ; 2^3 \equiv 1[7]$

$\boxed{2^{3k} \equiv 1[7]\ ;\ 2^{3k+1} \equiv 2[7]\ ; 2^{3k+2} \equiv 4[7]}$

$3^0 \equiv 1[7]\ ;\ 3^1 \equiv 3[7]\ ; 3^2 \equiv 2[7]\ ; 3^3 \equiv 6[7]\ ;$

$3^4 \equiv 4[7]\ ; 3^5 \equiv 5[7]\ ; 3^6 \equiv 1[7]$

$$\boxed{\begin{array}{l} 3^{6k} \equiv 1[7]\ ;\ 3^{6k+1} \equiv 3[7]\ ; 3^{6k+2} \equiv 2[7]\ ; \\ 3^{6k+3} \equiv 6[7]\ ; 3^{6k+4} \equiv 4[7]\ ; 3^{6k+5} \equiv 5[7] \end{array}}$$

3. بيان أنّه إذا كان n فرديا فإنّ : $A_n + 1$ يقبل القسمة على 7

n فردي $\Rightarrow \begin{cases} 4^n \equiv -3^n[7] \\ 5^n \equiv -2^n[7] \Rightarrow A_n \equiv 2^n+3^n-3^n-2^n-1[7] \\ 6^n \equiv -1[7] \end{cases}$

$$\Rightarrow A_n \equiv -1[7] \Rightarrow \boxed{A_n+1 \equiv 0[7]}$$

استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{2011} على 7

$$A_{2011}+1 \equiv 0[7] \Rightarrow \boxed{A_{2011} \equiv 6[7]}$$

4. تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{1432} على 7

$$\begin{cases} 4 \equiv -3[7] \\ 5 \equiv -2[7] \\ 6 \equiv -1[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4^{1432} \equiv 3^{1432}[7] \\ 5^{1432} \equiv 2^{1432}[7] \\ 6^{1432} \equiv 1[7] \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_{1432} \equiv 2.2^{1432} + 2.3^{1432} + 1[7]$$

$$\Rightarrow A_{1432} \equiv 2^{1433} + 2.3^{1432} + 1[7]$$

$$\Rightarrow A_{1432} \equiv \underbrace{2^{3(477)+2}}_{\equiv 4[7]} + 2.\underbrace{3^{6(238)+4}}_{\equiv 4[7]} + 1[7]$$

$$\Rightarrow A_{1432} \equiv 4 + 1 + 1[7] \Rightarrow \boxed{A_{1432} \equiv 6[7]}$$

حل التمرين 27 : بكالوريا 2012 ر

1) $\mathbf{2011x - 1432y = 31} \dots (1)$

أ. إثبات أن العدد 2011 أولي

$\sqrt{2011} \approx 44,8$

بما أنّ 2011 لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية الأصغر من 44، فهو إذن أولي

ب. تعيين حل خاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (1)

$$2011 = 1432 + 579 \Rightarrow 579 = 2011 - 1432$$

$$1432 = 2(579) + 274 \Rightarrow 274 = 1432 - 2(579)$$

$$579 = 2(274) + 31 \Rightarrow 31 = 579 - 2(274)$$

$$31 = 579 - 2[1432 - 2(579)] = 5(579) - 2(1432)$$

$$31 = 5(2011 - 1432) - 2(1432) = 2011(5) - 1432(7)$$

$$\Rightarrow \boxed{(x_0; y_0) = (5; 7)}$$

حل المعادلة (1)

$$\begin{cases} 2011x - 1432y = 31 \\ 2011(5) - 1432(7) = 31 \end{cases} \Rightarrow 2011(x-5) - 1432(y-7) = 0$$

$$\Rightarrow 2011(x-5) = 1432(y-7)$$

$$\begin{cases} 1432 \mid 2011(x-5) \\ PGCD(1432; 2011) = 1 \end{cases} \Rightarrow 1432 \mid x-5 \Rightarrow x-5 = 1432k$$

$\Rightarrow x = 1432k + 5 \,; k \in \mathbb{Z}$

$2011(x-5) = 1432(y-7) \Rightarrow y - 7 = 2011k$

$\Rightarrow y = 2011k + 7 \,; k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{S = \{(1432k+5; 2011k+7)\} \,; k \in \mathbb{Z}}$$

2) أ. تعيين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7

$2^0 \equiv 1[7] \,;\; 2^1 \equiv 2[7] \,; 2^2 \equiv 4[7] \,; 2^3 \equiv 1[7]$

$\boxed{2^{3k} \equiv 1[7] \,;\; 2^{3k+1} \equiv 2[7] \,; 2^{3k+2} \equiv 4[7]}$

إيجاد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7

$1432 \equiv 1[3] \Rightarrow 1432^{2012} \equiv 1[3] \Rightarrow 1432^{2012} = 3k + 1$

$2011 \equiv 2[7] \Rightarrow 2011^{1432^{2012}} \equiv 2^{3k+1}[7] \Rightarrow \boxed{2011^{1432^{2012}} \equiv 2[7]}$

ب. تعيين قيم n حيث $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0[7]$

$$\begin{cases} 2010 \equiv 1[7] \\ 2011 \equiv 2[7] \\ 1432 \equiv 4[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2010^n \equiv 1[7] \\ 2011^n \equiv 2^n[7] \\ 1432^n \equiv 4^n[7] \end{cases}$$

$\Rightarrow 2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 1 + 2^n + (2^n)^2[7]$

$n =$	$3k$	$\mathbf{3k+1}$	$\mathbf{3k+2}$	
$2^n \equiv$	1	**2**	**4**	[7]
$(2^n)^2 \equiv$	1	**4**	**2**	[7]
$1 + 2^n + (2^n)^2 \equiv$	3	**0**	**0**	[7]

$\boxed{1 + 2^n + (2^n)^2 \equiv 0[7] \Rightarrow n = 3k+1 \text{ أو } n = 3k+2 \,; k \in \mathbb{N}}$

3) تعيين α ، β و γ و كتابة N في النظام العشري

$N = \overline{2\gamma\alpha\beta}^9 \Rightarrow N = \beta + 9\alpha + 81\gamma + 1458$

$$\begin{cases} \alpha+\gamma=2\beta \\ (\beta;\gamma)=(1432k+5;2011k+7) \\ 0\le \alpha;\beta;\gamma<9 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(\alpha;\beta;\gamma)=(3;5;7)\Rightarrow N=2057}$$

حل التمرين 28 : بكالوريا 2012 ر

1) أ. حساب بواقي قسمة كل من u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 على 7

$u_0=16\Rightarrow \boxed{u_0\equiv 2[7]}$

$u_1=6u_0-9\Rightarrow u_1\equiv 6(2)-9[7]\Rightarrow \boxed{u_1\equiv 3[7]}$

$u_2=6u_1-9\Rightarrow u_2\equiv 6(3)-9[7]\Rightarrow \boxed{u_2\equiv 2[7]}$

$u_3=6u_2-9\Rightarrow u_3\equiv 6(2)-9[7]\Rightarrow \boxed{u_3\equiv 3[7]}$

$u_4=6u_3-9\Rightarrow u_4\equiv 6(3)-9[7]\Rightarrow \boxed{u_4\equiv 2[7]}$

ب. تخمين قيمة لـ a و b حيث $u_{2k}\equiv a[7]$ و $u_{2k+1}\equiv b[7]$

$\begin{cases} u_{2k}\equiv 2[7] \\ u_{2k+1}\equiv 3[7] \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$

2) أ. برهان أنّ $u_{n+2}\equiv u_n[7]$

$u_{n+2}-u_n=6u_{n+1}-9-u_n=6(6u_n-9)-9-u_n$

$u_{n+2}-u_n=35u_n-63=7(5u_n-9)$

$u_{n+2}-u_n\equiv 0[7]\Rightarrow \boxed{u_{n+2}\equiv u_n[7]}$

ب. برهان بالتراجع أنّ $u_{2k}\equiv 2[7]$

$P(k)$: "$u_{2k}\equiv 2[7]$"

<u>**تحقيق التراجع:**</u> من أجل $k=0$ لدينا $u_0\equiv 2[7]$ (القضية محققة)

<u>**فرض التراجع:**</u> نفرض أنّ $P(k)$ صحيحة أي $u_{2k}\equiv 2[7]$

<u>**برهان التراجع:**</u> نبرهن أنّ $P(k+1)$ صحيحة أي $u_{2(k+1)}\equiv 2[7]$

$$\begin{cases} u_{2(k+1)} = u_{2k+2} \\ u_{2k+2} \equiv u_{2k}[7] \text{(حسب السؤال السابق)} \\ u_{2k} \equiv 2[7] \text{(حسب فرض التراجع)} \end{cases} \Rightarrow u_{2(k+1)} \equiv 2[7]$$

$\Rightarrow P(k+1)$ صحيحة $\Rightarrow \boxed{u_{2k} \equiv 2[7]}$

استنتاج أنّ : $u_{2k+1} \equiv 3[7]$

$$u_{2k+1} = 6u_{2k} - 9 \Rightarrow u_{2k+1} \equiv 6(2) - 9[7] \Rightarrow \boxed{u_{2k+1} \equiv 3[7]}$$

3) $v_n = u_n - \frac{9}{5}$

أ. بيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية وتعيين أساسها وحدها الأول

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{9}{5} = 6u_n - 9 - \frac{9}{5} = 6u_n - \frac{63}{5} = 6\left(u_n - \frac{9}{5}\right) = 6v_n$$

$v_{n+1} = 6v_n$ منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = 6}$ و حدها الأول $v_0 = u_0 - \frac{9}{5} = 16 - \frac{9}{5} = \boxed{\frac{71}{5}}$

ب. حساب u_n و S_n بدلالة n

$$v_n = v_0 . q^n = \frac{71}{5}(6)^n \Rightarrow u_n = v_n + \frac{9}{5} \Rightarrow \boxed{u_n = \frac{71}{5}(6)^n + \frac{9}{5}}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = v_0 + \frac{9}{5} + v_1 + \frac{9}{5} + \cdots + v_n + \frac{9}{5}$$

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n + \frac{9}{5}(n+1)$$

$$S_n = v_0\left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\right) + \frac{9}{5}(n+1)$$

$$S_n = \frac{71}{5}\left(\frac{6^{n+1} - 1}{5}\right) + \frac{9}{5}(n+1)$$

$$\boxed{S_n = \frac{71}{25}(6^{n+1} - 1) + \frac{9}{5}(n+1)}$$

حل التمرين 29 : بكالوريا 2012 ت ر

1. دراسة بواقي قسمة 9^n على 11

$9^0 \equiv 1[11]\ ;9^1 \equiv 9[11]\ ;9^2 \equiv 4[11]\ ;9^3 \equiv 3[11]\ ;$
$9^4 \equiv 5[11]\ ;9^5 \equiv 1[11]$

$$\boxed{\begin{array}{c}9^{5k} \equiv 1[11]\ ;9^{5k+1} \equiv 9[11]\ ;9^{5k+2} \equiv 4[11]\ ;\\ 9^{5k+3} \equiv 3[11]\ ;9^{5k+4} \equiv 5[11]\end{array}}$$

2. تعيين باقي قسمة 2011^{2012} على 11

$$2011 \equiv 9[11] \Rightarrow 2011^{2012} \equiv 9^{5(402)+2}[11] \Rightarrow \boxed{2011^{2012} \equiv 4[11]}$$

3. برهان أنّ $(4 \times 9^{15n+1} + 4 \times 2011^{10n} + 2011^{2012}) \equiv 0[11]$

$$\begin{cases}9^{15n+1} \equiv 9^{5(3n)+1}[11]\\ 2011^{10n} \equiv 9^{5(2n)}[11]\\ 2011^{2012} \equiv 4[11]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4 \times 9^{15n+1} \equiv 3[11]\\ 4 \times 2011^{10n} \equiv 4[11]\\ 2011^{2012} \equiv 4[11]\end{cases}$$
$$\Rightarrow \boxed{4 \times 9^{15n+1} + 4 \times 2011^{10n} + 2011^{2012} \equiv 0[11]}$$

4. تعيين قيم n حيث $(2011^{2012} + 2n + 2) \equiv 0[11]$

$$2011^{2012} + 2n + 2 \equiv 0[11] \Rightarrow 2n + 6 \equiv 0[11]$$

$$\Rightarrow 2n \equiv 5[11] \Rightarrow 2n \equiv 16[11] \Rightarrow n \equiv 8[11]$$

$$\boxed{n = 11k + 8\ ; k \in \mathbb{N}}$$

حل التمرين 30 : بكالوريا 2012 ت ر

1. بيان أنّ العدد 153 حل للجملة $(S) : \begin{cases}x \equiv 3[15]\\ x \equiv 6[7]\end{cases}$

$$\begin{cases}153 - 3 = 150 = 15 \times 10\\ 153 - 6 = 147 = 7 \times 21\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}153 \equiv 3[15]\\ 153 \equiv 6[7]\end{cases} \Rightarrow$$ العدد 153 حل للجملة (S)

2. **بيان أنّ : (x حل لـ (S)) يكافئ** $\begin{pmatrix} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} (S) \text{ حل لـ } x \\ (S) \text{ حل لـ } x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \\ x_0 \equiv 3[15] \\ x_0 \equiv 6[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \\ (S) \text{ حل لـ } x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv x_0[15] \\ x \equiv x_0[7] \\ x_0 \equiv 3[15] \\ x_0 \equiv 6[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases} \Rightarrow (S) \text{ حل لـ } x$$

خلاصة:

إذا كان x_0 حلا لـ (S) فإنّ : $\big(x$ حل لـ $(S)\big)$ يكافئ $\begin{pmatrix} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{pmatrix}$

3. حل الجملة (S)

$$(S) \text{ حل لـ } 153 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 153 \equiv 0[15] \\ x - 153 \equiv 0[7] \end{cases} \Leftrightarrow x - 153 \equiv 0[105]$$

$$\Leftrightarrow x \equiv 48[105] \Leftrightarrow \boxed{x = 105k + 48 \,;\, k \in \mathbb{Z}}$$

4. تعيين عدد الكتب

$$\begin{cases} x = 15\alpha + 3 \\ x = 7\beta + 6 \\ 500 \le x \le 600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \\ 500 \le x \le 600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 105k + 48 \\ 500 \le x \le 600 \end{cases}$$

$$500 \le 105k + 48 \le 600 \Rightarrow 452 \le 105k \le 552$$

$$\Rightarrow 4{,}3 \le k \le 5{,}3 \Rightarrow k = 5 \Rightarrow \boxed{x = 573}$$

حل التمرين 31 : بكالوريا 2013 ر

1) $\alpha = 2n^3 - 14n + 2$ و $\beta = n + 3$

$$\alpha = (2n^2 - 6n + 4)\beta - 10$$

أ) بيان أنّ: $\boldsymbol{PGCD(\alpha;\beta) = PGCD(\beta;10)}$

$d = PGCD(\alpha;\beta)\ ;\ d' = PGCD(\beta;10)$

$$\begin{cases} d \mid \alpha \\ d \mid \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid (2n^2-6n+4)\beta-\alpha \\ d \mid \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid 10 \\ d \mid \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow d \mid PGCD(\beta;10) \Rightarrow \boxed{d \mid d'}$$

$$\begin{cases} d' \mid \beta \\ d' \mid 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d' \mid (2n^2-6n+4)\beta-10 \\ d' \mid \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d' \mid \alpha \\ d' \mid \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow d' \mid PGCD(\alpha;\beta) \Rightarrow d' \mid d$$

$$\begin{cases} d \mid d' \\ d' \mid d \end{cases} \Rightarrow d = d' \Rightarrow \boxed{PGCD(\alpha;\beta) = PGCD(\beta;10)}$$

ب) تعيين القيم الممكنة للعدد $\boldsymbol{PGCD(\alpha;\beta)}$

$$PGCD(\alpha;\beta) = PGCD(\beta;10) = d \Rightarrow d \mid 10 \Rightarrow \boxed{d \in \{1;2;5;10\}}$$

ج) تعيين قيم $\boldsymbol{n}$ حيث: $\boldsymbol{PGCD(\alpha;\beta) = 5}$

$d = 5 \Rightarrow PGCD(\beta;10) = 5 \Rightarrow \beta = 5k$ (حيث k فردي)

$$\Rightarrow \beta = 5(2m+1) = 10m+5 \Rightarrow n+3 = 10m+5$$

$$\boxed{n = 10m+2\ ;\ m \in \mathbb{N}}$$

2) أ) دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد $\boldsymbol{4^n}$ على $\boldsymbol{11}$

$4^0 \equiv 1[11]\ ;\ 4^1 \equiv 4[11]\ ;\ 4^2 \equiv 5[11]\ ;\ 4^3 \equiv 9[11]\ ;$

$4^4 \equiv 3[11]\ ;\ 4^5 \equiv 1[11]$

$$\boxed{\begin{gathered} 4^{5k} \equiv 1[11]\ ;\ 4^{5k+1} \equiv 4[11]\ ;\ 4^{5k+2} \equiv 5[11]\ ; \\ 4^{5k+3} \equiv 9[11]\ ;\ 4^{5k+4} \equiv 3[11] \end{gathered}}$$

ب) تعيين قيم $\boldsymbol{n}$ حيث: $\begin{cases} \boldsymbol{4^{5n}+4^n+n \equiv 0[11]} \\ \boldsymbol{n \equiv 2[10]} \end{cases}$

$$\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[10] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4^{5(10m+2)} + 4^{5(2m)+2} + 10m + 2 \equiv 0[11] \\ n = 10m + 2 \end{cases}$$

$$\underbrace{4^{5(10m+2)}}_{\equiv 1[11]} + \underbrace{4^{5(2m)+2}}_{\equiv 5[11]} + 10m + 2 \equiv 0[11]$$

$$\Rightarrow 10m + 8 \equiv 0[11] \Rightarrow 10m \equiv 3[11] \Rightarrow 10m \equiv 80[11]$$

$$\Rightarrow m \equiv 8[11] \Rightarrow m = 11k + 8 \Rightarrow n = 10(11k + 8) + 2$$
$$\Rightarrow \boxed{n = 110k + 82\ ; k \in \mathbb{N}}$$

حل التمرين 32 : بكالوريا 2013 ر

1) أ) تعيين الأعداد الطبيعية n التي تحقق: $2n + 27 \equiv 0[n + 1]$

$$2n + 27 \equiv 0[n + 1] \Rightarrow 2n + 2 + 25 \equiv 0[n + 1]$$

$$\Rightarrow \underbrace{2(n + 1)}_{\equiv 0[n+1]} + 25 \equiv 0[n + 1] \Rightarrow 25 \equiv 0[n + 1]$$

$$\Rightarrow (n + 1) \in D_{25} \Rightarrow (n + 1) \in \{1; 5; 25\} \Rightarrow \boxed{n \in \{0; 4; 24\}}$$

ب) تعيين الثنائيات (a, b) حيث: $(b - a)(a + b) = 24$

$$(a, b) \in \mathbb{N}^2 \Rightarrow b + a > b - a$$

$$(b - a)(a + b) = 24$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{cases} b - a = 1 \\ b + a = 24 \end{cases}}_{\text{لا تقبل حلول}} \text{ أو } \begin{cases} b - a = 2 \\ b + a = 12 \end{cases} \text{ أو } \underbrace{\begin{cases} b - a = 3 \\ b + a = 8 \end{cases}}_{\text{لا تقبل حلول}} \text{ أو } \begin{cases} b - a = 4 \\ b + a = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 7 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(a; b) \in \{(1; 5); (5; 7)\}}$$

ج) استنتاج طريقة لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$

$$(b - a)(b + a) = 24 \Rightarrow b^2 - a^2 = 24 \Rightarrow b^2 = a^2 + \left(\sqrt{24}\right)^2$$

لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$ ، نرسم مثلثا قائما طول وتره b أي 5 أو 7 وطول أحد ضلعيه القائمين a أي 1 أو 5 على الترتيب و تكون القطعة المستقيمة التي طولها $\sqrt{24}$ هي الضلع القائم الثاني لهذا المثلث

2) $\beta = \overline{3403}^5$ و $\alpha = \overline{10141}^5$

أ) كتابة العددين α و β في النظام العشري

$$\alpha = \overline{10141}^5 = 1 + 4(5) + (5)^2 + (5)^4 \Rightarrow \boxed{\alpha = 671}$$
$$\beta = \overline{3403}^5 = 3 + 4(5)^2 + 3(5)^3 \Rightarrow \boxed{\beta = 478}$$

ب) تعيين الثنائية $(,b)$ حيث: $\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ \alpha a - \beta b = 9 \end{cases}$

$$\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ \alpha a - \beta b = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a; b) \in \{(1;5);(5;7)\} \\ 671a - 478b = 9 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(a; b) = (5; 7)}$$

3) أ) تعيين $PGCD(2013; 1434)$

$2013 = 1434 + \underline{579}$; $1434 = 579 \times 2 + \underline{276}$;
$579 = 276 \times 2 + \underline{27}$; $276 = 27 \times 10 + \underline{6}$;
$27 = 6 \times 4 + \underline{3}$; $6 = 3 \times 2 \Rightarrow \boxed{PGCD(2013; 1434) = 3}$

استنتاج $PGCD(671; 478)$

$$PGCD(2013; 1434) = 3 \Rightarrow PGCD(671 \times 3; 478 \times 3) = 3$$

$$\Rightarrow 3PGCD(671; 478) = 3 \Rightarrow \boxed{PGCD(671; 478) = 1}$$

ب) حل المعادلة: $2013x - 1434y = 27$

$$2013x - 1434y = 27 \Rightarrow 671x - 478y = 9 \Rightarrow \boxed{(x_0; y_0) = (5; 7)}$$

$$\begin{cases} 671x - 478y = 9 \\ 671(5) - 478(7) = 9 \end{cases} \Rightarrow 671(x - 5) - 478(y - 7) = 0$$

$$\Rightarrow 671(x - 5) = 478(y - 7)$$

$$\begin{cases} 478 \mid 671(x-5) \\ PGCD(671;478) = 1 \end{cases} \Rightarrow 478 \mid x-5 \Rightarrow x-5 = 478k$$

$$\Rightarrow x = 478k + 5$$

$$671(x-5) = 478(y-7) \Rightarrow y-7 = 671k$$

$$\Rightarrow y = 671k + 7$$

$$\boxed{S = \{(478k+5; 671k+7)\}\,; k \in \mathbb{Z}}$$

التمرين 33 : بكالوريا 2013 ت ر

1) $\boldsymbol{11x + 7y = 1}$

أ) تعيين $(x_0; y_0)$ **حل المعادلة (E) الذي يحقق:** $\boldsymbol{x_0 + y_0 = -1}$

$$\begin{cases} 11x_0 + 7y_0 = 1 \\ x_0 + y_0 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11x_0 + 7y_0 = 1 \\ 7x_0 + 7y_0 = -7 \end{cases} \Rightarrow 4x_0 = 8 \Rightarrow x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -3$$
$$\Rightarrow \boxed{(x_0; y_0) = (2; -3)}$$

ب) استنتاج حلول المعادلة (E)

$$\begin{cases} 11x + 7y = 1 \\ 11(2) + 7(-3) = 1 \end{cases} \Rightarrow 11(x-2) + 7(y+3) = 0 \Rightarrow 11(x-2) = 7(-y-3)$$

$$\begin{cases} 7 \mid 11(x-2) \\ PGCD(7;11) = 1 \end{cases} \Rightarrow 7 \mid x-2 \Rightarrow x-2 = 7k \Rightarrow x = 7k+2$$

$$11(x-2) = 7(-y-3) \Rightarrow -y-3 = 11k \Rightarrow y = -11k - 3$$

$$\boxed{S_{(E)} = \{(7k+2; -11k-3)\}\,; k \in \mathbb{Z}}$$

2) $\begin{cases} \boldsymbol{S = 11a + 1} \\ \boldsymbol{S = 7b + 2} \end{cases}$

أ) بيان أنّ $(\boldsymbol{a}; -\boldsymbol{b})$ **حل للمعادلة (E)**

$$\begin{cases} S = 11a + 1 \\ S = 7b + 2 \end{cases} \Rightarrow 11a + 1 = 7b + 2 \Rightarrow 11a + 7(-b) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{(a; -b) \in S_{(E)}}$$

ب) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد S على 77

$$S = 11a + 1 \Rightarrow S = 11(7k + 2) + 1 \Rightarrow S = 77k + 23 \Rightarrow \boxed{S \equiv 23[77]}$$

3) تعيين أكبر قيمة للعدد n حتى يكون $n < 2013$

$$\begin{cases} n = 11\alpha + 1 \\ n = 7\beta + 2 \end{cases} \Rightarrow n = 77k + 23 \; ; k \in \mathbb{N}$$

$$n < 2013 \Rightarrow 77k + 23 < 2013 \Rightarrow 77k < 1990 \Rightarrow k < 25{,}8 \Rightarrow k = 25$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 1948}$$

حل التمرين 34 : بكالوريا 2014 ر

1. $\boldsymbol{2013x - 1962y = 54 \ldots (E)}$

أ. حساب $\boldsymbol{PGCD(2013; 1962)}$

$$\begin{cases} 2013 = 3 \times 11 \times 61 \\ 1962 = 2 \times 3^2 \times 109 \end{cases} \Rightarrow \boxed{PGCD(2013; 1962) = 3}$$

ب. استنتاج أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا

بما أنّ $PGCD(2013; 1962)$ يقسم 54 فإنّ المعادلة (E) تقبل حلولا

ج. بيان أنّه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ: $\boldsymbol{x \equiv 0[6]}$

$$2013x - 1962y = 54 \Rightarrow 671x - 654y = 18 \Rightarrow 671x = 6(109y + 3)$$

$$\Rightarrow 671x \equiv 0[6] \xRightarrow[671 \equiv 5[6]]{} 5x \equiv 0[6] \xRightarrow[\text{5 أولي مع 6}]{} \boxed{x \equiv 0[6]}$$

د. استنتاج حل خاص $(x_0; y_0)$ حيث $\boldsymbol{74 < x_0 < 80}$

$$\begin{cases} 74 < x_0 < 80 \\ x \equiv 0[6] \end{cases} \Rightarrow x_0 = 78 \; ; 654y_0 = 671x_0 - 18 \Rightarrow y_0 = 80$$

$$\Rightarrow \boxed{(x_0; y_0) = (78; 80)}$$

حل المعادلة (E)

$$\begin{cases} 671x - 654y = 18 \\ 671(78) - 654(80) = 18 \end{cases} \Rightarrow 671(x - 78) = 654(y - 80)$$

$$\begin{cases} 654 \mid 671(x - 78) \\ PGCD(654; 671) = 1 \end{cases} \Rightarrow 654 \mid x - 78 \Rightarrow \begin{cases} x = 654k + 78 \\ y = 671k + 80 \end{cases}$$

$$\boxed{S = \{(654k + 78; 671k + 80)\}; \; k \in \mathbb{Z}}$$

2. $d = PGCD(x; y)$

أ. تعيين القيم الممكنة للعدد d

$$d = PGCD(x; y) \Rightarrow \begin{cases} d \mid x \\ d \mid y \end{cases} \Rightarrow d \mid 18 \Rightarrow \boxed{d \in \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}}$$

ب. تعيين قيّم a و b حيث: $671a - 654b = 18$ و $PGCD(a; b) = 18$

$$d = 18 \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0[18] \\ b \equiv 0[18] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 654k + 78 \equiv 0[18] \\ 671k + 80 \equiv 0[18] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6k + 6 \equiv 0[18] \\ 5k + 8 \equiv 0[18] \end{cases}$$

$$\Rightarrow k - 2 \equiv 0[18] \Rightarrow k \equiv 2[18] \Rightarrow k = 18k' + 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 654(18k' + 2) + 78 = \boxed{11772k' + 1386} \\ b = 671(18k' + 2) + 80 = \boxed{12078k' + 1422} \end{cases}$$

حل التمرين 35 : بكالوريا 2014 ت ر

1. دراسة حسب قيم n ، بواقي القسمة الإقليدية على 16 للعدد 5^n

$$5^{4k} \equiv 1[16]\ ;\ 5^{4k+1} \equiv 5[16]\ ;\ 5^{4k+2} \equiv 9[16]\ ;\ 5^{4k+3} \equiv 13[16]\ ;$$

2. $C_n = 16n + 9$ و $D_p = 5^p$

أ. بيان أنّه يوجد عدد طبيعي n يحقق $C_n = D_p$

$$C_n = D_p \Rightarrow 5^p = 16n + 9 \Rightarrow 5^p \equiv 9[16] \Rightarrow \boxed{p = 4k + 2\ ;\ k \in \mathbb{N}}$$

ب. تعيين n من أجل $p = 6$

$$16n + 9 = 5^6 \Rightarrow 16n = 15616 \Rightarrow \boxed{n = 976}$$

3. $f(x) = 5^{(4x+2)} - 9$ ، $D_f = [0; +\infty[$

دراسة تغيّرات الدالة f

$$f(x) = e^{\ln 5^{(4x+2)}} - 9 = e^{(4x+2)\ln 5} - 9\ ; f'(x) = (4\ln 5)e^{(4x+2)\ln 5}$$

بما أنّ $f'(x) > 0$ ، فإنّ الدالة f متزايدة تماما على D_f

$$f(0) = 16\ ;\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{(4x+2)\ln 5} - 9 = +\infty$$

x	$0 \qquad +\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$16 \nearrow +\infty$

استنتاج إشارة $f(x)$

من جدول التغيّرات ، نستنتج أنّ $f(x) > 0$ من أجل $x \in D_f$

.4 $\boldsymbol{u_0 = 1}$ ، $\boldsymbol{u_{n+1} = 5^4\left(u_n + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{16}}$

أ. **برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي $\boldsymbol{n}$ ، $\boldsymbol{u_n = \frac{5^{(4n+2)}-9}{16}}$**

تحقيق التراجع : $u_0 = \frac{5^2-9}{16} = 1$ (محققة)

فرض التراجع : نفرض أنّ $u_n = \frac{5^{(4n+2)}-9}{16}$

برهان التراجع : نبرهن أنّ $u_{n+1} = \frac{5^{(4n+6)}-9}{16}$

$$u_{n+1} = 5^4\left(u_n + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{16} = 5^4\left(\frac{5^{(4n+2)}-9}{16} + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{16}$$

$$= \frac{5^4 \times 5^{(4n+2)} - 9}{16} = \boxed{\frac{5^{(4n+6)}-9}{16}}$$

منه، نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{5^{(4n+2)}-9}{16}$

ب. **برهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي $\boldsymbol{n}$ ، فإنّ $\boldsymbol{u_n}$ عدد طبيعي**

$$5^{4k+2} \equiv 9[16] \Rightarrow 5^{4k+2} - 9 \equiv 0[16] \Rightarrow 16 \mid (5^{4k+2} - 9) \Rightarrow \boxed{u_n \in \mathbb{N}}$$

.5 استنتاج اتجاه تغيّر المتتالية $\boldsymbol{(u_n)}$

بما أنّ $u_n = \frac{1}{16}f(n)$ ، $\frac{1}{16} > 0$ والدالة $f(n)$ متزايدة ، نستنتج أنّ المتتالية (u_n) متزايدة.

حل التمرين 36 : بكالوريا 2015 ر

.1 أ. تعيين حسب قيم العدد الطبيعي $\boldsymbol{n}$ ، باقي القسمة الإقليدية للعدد $\boldsymbol{2^n}$ على 7

$2^{3k} \equiv 1[7]\ ;\ 2^{3k+1} \equiv 2[7]\ ;\ 2^{3k+2} \equiv 4[7]\ ;$

ب. استنتاج باقي قسمة العدد $\boldsymbol{[1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53}]}$ على 7

$1962 \equiv 2[7] \Rightarrow 1962^{1954} \equiv 2^{3(651)+1}[7] \Rightarrow \boldsymbol{1962^{1954} \equiv 2[7]}$

$1954 \equiv 1[7] \Rightarrow \boldsymbol{1954^{1962} \equiv 1[7]}\ ;\ 2015 \equiv -1[7] \Rightarrow \boldsymbol{2015^{53} \equiv -1[7]}$

$1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53} \equiv 2 - 1 - 1[7]$

$\boxed{1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53} \equiv 0[7]}$

.2 أ. بيان أنّ 89 عدد أولي

$\sqrt{89} \approx 9{,}4$. بما أنّ العدد 89 لا يقبل القسمة على كل من 2 ، 3 ، 5 و 7 ، فهو أولي

ب. تعيين كل القواسم الطبيعية للعدد 7832

لدينا : $7832 = 2^3 \times 11 \times 89$ ، ومنه نستنتج أنّ عدد القواسم الطبيعية للعدد 7832 هو $(3+1)(1+1)(1+1) = 16$ ، وهي كالتالي :

2^0	11^0	89^0	1
		89^1	89
	11^1	89^0	11
		89^1	979
2^1	11^0	89^0	2
		89^1	178
	11^1	89^0	22
		89^1	1958
2^2	11^0	89^0	4
		89^1	356
	11^1	89^0	44
		89^1	3916
2^3	11^0	89^0	8
		89^1	712
	11^1	89^0	88
		89^1	7832

$(2^0 \times 11^0 \times 89^0 = 1)$

جـ. بيان أنّ العددين 981 و977 أوّليان فيما بينهما

$$d = PGCD(977; 981) \Rightarrow d \mid (981 - 977) \Rightarrow d \mid 4 \Rightarrow d \in \{1; 2; 4\}$$

بما أنّ العددين 2 و 4 ليسا قاسمين للعددين 977 و 981 ، نستنتج أنّ $\boxed{d = 1}$

3. تعيين x وy علما أنّ: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8[22] \end{cases}$ و $PGCD(x; y) = 2$

$$PGCD(x; y) = 2 \Rightarrow x = 2x';\ y = 2y'\ ;\ PGCD(x'; y') = 1$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8[22] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\left(x'^2 - y'^2\right) = 31328 \\ 2(x' - y') \equiv 8[22] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'^2 - y'^2 = 7832 \\ x' - y' \equiv 4[11] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x' - y')(x' + y') = 7832 \\ x' - y' \equiv 4[11] \end{cases} \underset{①}{\Rightarrow} \begin{cases} x' - y' = 4 \\ x' + y' = 1958 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x' - y' = 356 \\ x' + y' = 22 \end{cases}$$

$$\underset{②}{\Rightarrow} (x'; y') = (981; 977) \Rightarrow \boxed{(x; y) = (1962; 1954)}$$

①: قاسما العدد 7832 اللذان يوافقان 4 بترديد 11 هما 4 و 356

②: حل الجملة الثانية هو $(189; -167)$ وهو مرفوض لأنّ x وy عددان طبيعيان

.4 $PGCD(a;b)=1$ ، $PGCD(a;c)=1$

أ. برهان أنّ a أوّلي مع $b\times c$

$$\begin{cases}PGCD(a;b)=1\\PGCD(a;c)=1\end{cases}\underset{\text{بيزو}}{\Rightarrow}\begin{cases}\alpha a+\beta b=1\\\gamma a+\delta c=1\end{cases}\Rightarrow(\alpha a+\beta b)(\gamma a+\delta c)=1$$

$$\Rightarrow \alpha\gamma a^2+\alpha\delta ac+\beta\gamma ab+\beta\delta bc=1$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\alpha\gamma a+\alpha\delta c+\beta\gamma b)}_{k}a+\underbrace{\beta\delta}_{k'}bc=1\Rightarrow ka+k'bc=1$$

$$\Rightarrow \boxed{PGCD(a;bc)=1}$$

ب. اثبات باستعمال الاستدلال بالتراجع أنّ : $PGCD(a;b^n)=1$

تحقيق التراجع: $PGCD(a;b)=1$ (محققة)

فرض التراجع: نفرض أنّ : $PGCD(a;b^n)=1$

برهان التراجع: نبرهن أنّ : $PGCD(a;b^{n+1})=1$

$$\begin{cases}PGCD(a;b)=1\\PGCD(a;b^n)=1\end{cases}\Rightarrow PGCD(a;b\times b^n)=1\Rightarrow PGCD(a;b^{n+1})=1$$

منه، نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غر معدوم : $PGCD(a;b^n)=1$

جـ. استنتاج القاسم المشترك الأكبر للعددين 1962^{1954} و 1954^{1962}

$$PGCD(1954;1962)=PGCD(2\times977;2\times981)$$

$$PGCD(1954^{1962};1962^{1954})=PGCD(2^{1962}\times977^{1962};2^{1954}\times981^{1954})$$

$$PGCD(1954^{1962};1962^{1954})=2^{1954}PGCD(2^8\times977^{1962};981^{1954})$$

$$\begin{cases}PGCD(977;981)=1\\PGCD(2;981)=1\end{cases}\underset{\text{حسب (ب)}}{\Longrightarrow}\begin{cases}PGCD(977^{1962};981^{1954})=1\\PGCD(2^8;981^{1954})=1\end{cases}$$

$$\underset{\text{بسح (أ)}}{\Longrightarrow}PGCD(2^8\times977^{1962};981^{1954})=1$$

$$\Rightarrow\boxed{PGCD(1954^{1962};1962^{1954})=2^{1954}}$$

حل التمرين 37 : بكالوريا 2015 ر

يكون العدد $\overline{abcd}$ يقبل القسمة على 11 إذا وفقط إذا كان العدد $(a-b+c-d)$ يقبل القسمة على 11 (الإجابة أ)

التعليل:

$$\overline{abcd}\equiv0[11]\Rightarrow10^3a+10^2b+10c+d\equiv0[11]$$

$$\begin{cases}10\equiv-1[11]\\10^2\equiv1[11]\\10^3\equiv-1[11]\end{cases}\Rightarrow -a+b-c+d\equiv0[11]\Rightarrow\boxed{a-b+c-d\equiv0[11]}$$

التمرين 38 : بكالوريا 2015 ت ر

1. **أ. تعيين حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على 13**

$8^{4k} \equiv 1[13]\ ;\ 8^{4k+1} \equiv 8[13]\ ;\ 8^{4k+2} \equiv 12[13]\ ; 8^{4k+3} \equiv 5[13]\ ;$

ب. استنتاج باقي قسمة العدد $42 \times 138^{2015} + 2014^{2037} - 3$ على 13

$$\begin{cases} 42 \equiv 3[13] \\ 138 \equiv 8[13] \end{cases} \Rightarrow 42 \times 138^{2015} \equiv 3 \times \underbrace{8^{4(503)+3}}_{\equiv 5[13]}[13]$$

$$\Rightarrow \mathbf{42 \times 138^{2015} \equiv 2[13]}$$

$2014 \equiv -1[13] \Rightarrow \mathbf{2014^{2037} \equiv -1[13]}$

$42 \times 138^{2015} + 2014^{2037} - 3 \equiv 2 - 1 - 3[13]$

$\boxed{42 \times 138^{2015} + 2014^{2037} - 3 \equiv 11[13]}$

2. **أ. بيان أنّ: $(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+6)8^{2n}[13]$**

$5 \equiv -8[13] \Rightarrow 5^{2n+3} \equiv -8^{2n+3}[13]$

$(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+1)8^{2n} + 8^{2n+3}[13]$

$$(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+1)8^{2n} + 8^{2n} \times \underbrace{8^3}_{\equiv 5[13]}\ [13]$$

$\boxed{(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+6)8^{2n}[13]}$

ب. تعيين مجموعة قيم n حتى يكون: $(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv 0[13]$

$(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv 0[13] \Rightarrow (5n+6)8^{2n}[13] \equiv 0[13]$

$$\xRightarrow[8^{2n}\text{ أولي مع } 13]{} 5n+6 \equiv 0[13] \Rightarrow 5n \equiv 7[13] \Rightarrow n \equiv 4[13]$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 13k + 4\ ;\ k \in \mathbb{N}}$$

حل التمرين 39 : بكالوريا 2016 ر

1. **حساب u_1 و u_2 ، ثمّ استنتاج قيمة الأساس q**

$$\begin{cases} \ln u_1 + \ln u_2 = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1+e^3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(u_1 \times u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1+e^3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 \times u_2 = e^{11} \\ u_1 + u_2 = e^4(1+e^3) \end{cases}$$

$$\underbrace{x^2 - e^4(1+e^3)x + e^{11} = 0}_{u_1 \text{ و } u_2 \text{ هما حلا هذه المعادلة حيث } u_1 < u_2}\ ;\ \Delta = e^8(1+e^3)^2 - 4e^{11}$$

$\Delta = e^8(e^6 - 2e^3 + 1) = e^8(e^3-1)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = e^4(e^3-1)$

$$u_1=\frac{e^4(1+e^3)-e^4(e^3-1)}{2}=e^4\ ;\ u_2=\frac{e^4(1+e^3)+e^4(e^3-1)}{2}=e^7$$

$$q=\frac{u_2}{u_1}=\frac{e^7}{e^4}\Rightarrow \boxed{q=e^3}$$

.2 $\boldsymbol{q=e^3}$ و $\boldsymbol{u_1=e^4}$

أ. كتابة $\boldsymbol{u_n}$ بدلالة $\boldsymbol{n}$

$$u_n=u_1q^{n-1}=e^4.e^{3n-3}\Rightarrow \boxed{u_n=e^{3n+1}}$$

ب. حساب $\boldsymbol{S_n}$ بدلالة $\boldsymbol{n}$

$$S_n=\ln u_0+\ln u_1+\cdots+\ln u_n=\underbrace{1+4+7+\cdots+3n+1}_{\text{حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها 3}}$$

$$S_n=\frac{n+1}{2}(1+3n+1)=\boxed{\frac{3n^2+5n+2}{2}}$$

.3 $\boldsymbol{a_n=n+3}$

أ. بيان أنّ $\boldsymbol{PGCD(2S_n;a_n)=PGCD(a_n;14)}$

$$2S_n=3n^2+5n+2=(n+3)(3n-4)+14=(3n-4)a_n+14$$

$$\xRightarrow[PGCD(a;b)=PGCD(b;r)]{}\boxed{PGCD(2S_n;a_n)=PGCD(a_n;14)}$$

ب. تعيين القيم الممكنة لـ: $\boldsymbol{PGCD(2S_n;a_n)}$

$$d=PGCD(2S_n;a_n)=PGCD(a_n;14)\Rightarrow d\mid 14\Rightarrow \boxed{d\in\{1;2;7;14\}}$$

ج. تعيين قيم الأعداد الطبيعية $\boldsymbol{n}$ التي من أجلها: $\boldsymbol{PGCD(2S_n;a_n)=7}$

$$d=7\Rightarrow\begin{cases}a_n\equiv 0[7]\\ a_n\not\equiv 0[14]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n+3\equiv 0[7]\\ n+3\not\equiv 0[14]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n\equiv 4[7]\\ n\not\equiv 11[14]\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}n=7k+4\\ n\neq 14k+11\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=7k+4\\ k=2k'\end{cases}\Rightarrow\boxed{n=14k'+4\ ;\ k\in\mathbb{N}}$$

.4 دراسة تبعا لقيم العدد الطبيعي $\boldsymbol{n}$ ، باقي القسمة الإقليدية للعدد $\boldsymbol{2^n}$ على 7

$2^{3k}\equiv 1[7]\ ;\ 2^{3k+1}\equiv 2[7]\ ;\ 2^{3k+2}\equiv 4[7]\ ;$

.5 $\boldsymbol{b_n=3na_n-2S_n+1437^{2016}+1}$

تعيين قيم العدد الطبيعي $\boldsymbol{n}$ التي من أجلها يكون : $\begin{cases}\boldsymbol{b_n\equiv 0[7]}\\ \boldsymbol{n\equiv 0[5]}\end{cases}$

$$\begin{cases}b_n\equiv 0[7]\\ n\equiv 0[5]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3na_n-2S_n+\underbrace{1437^{2016}}_{\equiv 2^{3(672)}[7]}+1\equiv 0[7]\\ n\equiv 0[5]\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3na_n-2(3n-4)a_n-14+1+1\equiv 0[7]\\ n\equiv 0[5]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4a_n+2\equiv 0[7]\\ n\equiv 0[5]\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n \equiv 3[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n+3 \equiv 3[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow n \equiv 0[35]$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 35k\ ;\ k \in \mathbb{N}}$$

6. بيان أنّ العدد $(\mathbf{1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52})$ يقبل القسمة على 7

$1437 \equiv 2[7] \Rightarrow 1437^{9n+1} \equiv 2^{3(3n)+1}[7] \Rightarrow \mathbf{1437^{9n+1} \equiv 2[7]}$

$4^{12n+1} \equiv 2^{24n+2}[7] \Rightarrow 4^{12n+1} \equiv 4[7] \Rightarrow \mathbf{3 \times 4^{12n+1} \equiv 5[7]}$

$1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52 \equiv 2 - 5 + 3[7]$

$\boxed{1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52 \equiv 0[7]}$

حل التمرين 40 : بكالوريا 2016 ر

1. أ. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي قسمة 3^n و 7^n على 11

$3^{5k} \equiv 1[11]; 3^{5k+1} \equiv 3[11]; 3^{5k+2} \equiv 9[11]; 3^{5k+3} \equiv 5[11]; 3^{5k+4} \equiv 4[11]$

$7^{10k} \equiv 1[11]\ ; 7^{10k+1} \equiv 7[11]\ ; 7^{10k+2} \equiv 5[11]\ ; 7^{10k+3} \equiv 2[11]\ ;$

$7^{10k+4} \equiv 3[11]\ ; 7^{10k+5} \equiv 10[11]\ ; 7^{10k+6} \equiv 4[11]\ ; 7^{10k+7} \equiv 6[11]\ ;$

$7^{10k+8} \equiv 9[11]\ ; 7^{10k+9} \equiv 8[11]\ ;$

ب. برهان أنّ العدد $\mathbf{1437^{10n+4} + 2016^{5n+4} \times 2}$ مضاعف للعدد 11

$2016 \equiv 3[11] \Rightarrow 2016^{5n+4} \equiv 3^{5n+4}[11] \Rightarrow \mathbf{2 \times 2016^{5n+4} \equiv 8[11]}$

$1437 \equiv 7[11] \Rightarrow 1437^{10n+4} \equiv 7^{10n+4}[11] \Rightarrow \mathbf{1437^{10n+4} \equiv 3[11]}$

$2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4} \equiv 8 + 3[11]$

$\boxed{2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4} \equiv 0[11]}$

2. $\mathbf{7x - 3y = 8 \ldots (E)}$

أ. حل المعادلة (E)

$$\begin{cases} 7x - 3y = 8 \\ 7(2) - 3(2) = 8 \end{cases} \Rightarrow 7(x-2) = 3(y-2)$$

$$\begin{cases} 3 \mid 7(x-2) \\ PGCD(3;7) = 1 \end{cases} \Rightarrow 3 \mid x-2 \Rightarrow x = 3k+2\ ; y = 7k+2$$

$\boxed{S = \{(3k+2\ ; 7k+2)\}\ ;\ k \in \mathbb{N}}$

ب. $\mathbf{d = PGCD(x;y)}$

- **تعيين القيّم الممكنة للعدد d**

$$d = PGCD(x;y) \Rightarrow \begin{cases} d \mid x \\ d \mid y \end{cases} \Rightarrow d \mid 7x - 3y \Rightarrow d \mid 8 \Rightarrow \boxed{d \in \{1; 2; 4; 8\}}$$

• تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) من أجل $d=4$

$$d=4 \Rightarrow \begin{cases} x\equiv 0[4] \\ y\equiv 0[4] \\ d\neq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3k+2\equiv 0[4] \\ 7k+2\equiv 0[4] \\ d\neq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k\equiv 2[4] \\ d\neq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=4k'+2 \\ d\neq 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=12k'+8 \\ y=28k'+16 \\ d\neq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4(3k'+2) \\ y=4(7k'+4) \\ PGCD(3k'+2;7k'+4)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4(3k'+2) \\ y=4(7k'+4) \\ \underbrace{k'=2k''+1}_{\text{أي } k' \text{ فردي}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=24k''+20 \\ y=56k''+44 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(x;y)=(24k''+20\ ;\ 56k''+44)\ ;\ k''\in\mathbb{N}}$$

ج. تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق :

$$\mathbf{2016^{7x}+1437^{3y}\equiv 0[11]}$$

$$\underbrace{2016}_{\equiv 3[11]}{}^{7x}+\underbrace{1437}_{\equiv 7[11]}{}^{3y}\equiv 0[11] \Rightarrow 3^{7(3k+2)}+7^{3(7k+2)}\equiv 0[11]$$

$$\Rightarrow \underbrace{3^{14}}_{\equiv 4[11]}\times 3^{21k}+\underbrace{7^{6}}_{\equiv 4[11]}\times 7^{21k}\equiv 0[11] \Rightarrow 4(3^{21k}+7^{21k})\equiv 0[11]$$

$$\Rightarrow \underbrace{3^{21k}+7^{21k}}_{A}\equiv 0[11]$$ (لأنّ 4 أولي مع 11)

$21k\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	[10]
$3^{21k}\equiv$	1	3	9	5	4	1	3	9	5	4	[11]
$7^{21k}\equiv$	1	7	5	2	3	10	4	6	9	8	[11]
$A\equiv$	2	10	3	7	7	0	7	4	3	1	[11]

$$A\equiv 0[11] \Rightarrow 21k\equiv 5[10] \Rightarrow k\equiv 5[10] \Rightarrow k=10\alpha+5$$

$$\Rightarrow \boxed{(x;y)=(30\alpha+17\ ;70\alpha+37)\ ;\ \alpha\in\mathbb{N}}$$

حل التمرين 41 : بكالوريا 2016 ت ر

$$\mathbf{6x-7y=19\ ...\ (E)}$$

1. **تعيين الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) بحيث $x_0=y_0$**

$$6x_0-7x_0=19 \Rightarrow x_0=-19 \Rightarrow \boxed{(x_0;y_0)=(-19;-19)}$$

حل المعادلة (E)

$$\begin{cases} 6x-7y=19 \\ 6(-19)-7(-19)=19 \end{cases} \Rightarrow 6(x+19)=7(x+19)$$

$$\begin{cases} 7 \mid 6(x+19) \\ PGCD(6;7)=1 \end{cases} \Rightarrow 7 \mid x+19 \Rightarrow x=7k-19\,;\, y=6k-19$$

$$\boxed{S=\{(7k-19\,;6k-19)\}\,;\ k\in\mathbb{Z}}$$

2. **استنتاج قيم العدد الصحيح λ والتي تحقق :** $\begin{cases} \lambda\equiv 24[7] \\ \lambda\equiv 5[6] \end{cases}$

$$\begin{cases} \lambda\equiv 24[7] \\ \lambda\equiv 5[6] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=7y+24 \\ \lambda=6x+5 \end{cases} \Rightarrow 6x-7y=19$$

$$\Rightarrow (x;y)=(7k-19\,;6k-19) \Rightarrow \lambda=6(7k-19)+5$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda=42k-109\,;\ k\in\mathbb{Z}}$$

تعيين باقي قسمة العدد λ على 42

طريقة أولى:

$$\lambda=42k-109=42(k-3)+17 \Rightarrow \boxed{\lambda\equiv 17[42]}$$

طريقة ثانية:

$$\begin{cases} \lambda\equiv 24[7] \\ \lambda\equiv 5[6] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6\lambda\equiv 144[42] \\ 7\lambda\equiv 35[42] \end{cases} \Rightarrow \lambda\equiv -109[42] \Rightarrow \boxed{\lambda\equiv 17[42]}$$

3. **تعيين جميع الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) حيث: $|x+y-1|\le 13$**

$$|x+y-1|\le 13 \Rightarrow |7k-19+6k-19-1|\le 13 \Rightarrow |13k-39|\le 13$$

$$-13\le 13k-39\le 13 \Rightarrow -1\le k-3\le 1 \Rightarrow 2\le k\le 4 \Rightarrow k\in\{2;3;4\}$$

$$\Rightarrow \boxed{(x;y)\in\{(-5;-7);(2;-1);(9;5)\}}$$

4. **أ. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7**

$5^{6k}\equiv 1[7]\,;\ 5^{6k+1}\equiv 5[7]\,;\ 5^{6k+2}\equiv 4[7]\,;\ 5^{6k+3}\equiv 6[7]\,;$
$5^{6k+4}\equiv 2[7]\,;\ 5^{6k+5}\equiv 3[7]$

ب. تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $\begin{cases} n-5^n\equiv 2020[7] \\ n\equiv 1437[6] \end{cases}$

$$\begin{cases} n-5^n\equiv 2020[7] \\ n\equiv 1437[6] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n-5^n\equiv 4[7] \\ n\equiv 3[6] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^n\equiv n+3[7] \\ n=6k+3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5^{6k+3}\equiv 6k+6[7] \Rightarrow 6\equiv 6k+6[7] \Rightarrow k\equiv 0[7] \Rightarrow k=7k'$$

$$\Rightarrow \boxed{n=42k'+3\,;\ k'\in\mathbb{N}}$$

حل التمرين 42 : بكالوريا 2017 ر

.1 $104x - 20y = 272 \ldots (E)$

أ. حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 20 و 104

$$\begin{cases} 20 = 2^2 \times 5 \\ 104 = 2^3 \times 13 \end{cases} \Rightarrow \boxed{PGCD(20;104) = 4}$$

بيان أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا

بما أنّ $PGCD(20;104)$ يقسم 272 ، فإنّ المعادلة (E) تقبل حلولا

ب. بيان أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $x \equiv 3[5]$

$$104x - 20y = 272 \Rightarrow 26x - 5y = 68 \Rightarrow 26x - 68 = 5y$$

$$\Rightarrow \underbrace{26}_{\equiv 1[5]}\ x \equiv \underbrace{68}_{\equiv 3[5]}\ [5] \Rightarrow \boxed{x \equiv 3[5]}$$

استنتاج حلول المعادلة (E)

$$x \equiv 3[5] \Rightarrow x = 5k + 3\ ; 5y = 26(5k+3) - 68 \Rightarrow y = 26k + 2$$

$$\boxed{S = \{(5k+3; 26k+2)\}\ ;\ k \in \mathbb{Z}}$$

.2 تعيين α و β وكتابة λ في النظام العشري

$$\begin{cases} \lambda = \overline{1\alpha\alpha\beta01}^4 \\ \lambda = \overline{1\alpha\beta01}^6 \end{cases} \Rightarrow 4^5 + (4^4 + 4^3)\alpha + 4^2\beta + 1 = 6^4 + 6^3\alpha + 6^2\beta + 1$$

$$\Rightarrow 104\alpha - 20\beta = 272 \Rightarrow \boxed{(\alpha;\beta) = (3;2) \Rightarrow N = 2017}$$

(لاحظ أنّ α و β هما الحلان الطبيعيان للمعادلة (E) الأصغر من 4)

.3 التحقق أنّ كلا من 2017 و 1009 عدد أوّلي

لدينا : $\sqrt{2017} \approx 44{,}9$ و $\sqrt{1009} \approx 31{,}8$

بما أنّ العدد 2017 لا يقبل القسمة على كل من 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 ، 19 23 ، 29 ، 31 و 37 ، كما أنّ العدد 1009 لا يقبل القسمة على كل من 2 ، 3 ، 5 ، 7 11 ، 13 ، 17 ، 19 ، 23 ، 29 و 31 ، فهما إذن أوّليان.

تعيين الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق: $2m - d = 2017$

$$2m - d = 2017 \Rightarrow 2da'b' - d = 2017 \Rightarrow d(2a'b' - 1) = 2017 \quad \Rightarrow d \mid 2017 \Rightarrow d \in \{1; 2017\}$$

- $d = 1: 2a'b' = 2018 \Rightarrow a'b' = 1009 \Rightarrow (a';b') \in \{(1;1009);(1009;1)\}$

$$\Rightarrow \boxed{(a;b) \in \{(1;1009);(1009;1)\}}$$

- $d = 2017: 2a'b' = 2 \Rightarrow a'b' = 1 \Rightarrow (a';b') \in \{(1;1)\}$

$$\Rightarrow \boxed{(a;b) \in \{(2017;2017)\}}$$

حل التمرين 43 : بكالوريا 2017 ر

$\boldsymbol{u_{n+1} = 7u_n + 8}$ ، $\boldsymbol{u_0 = 1}$

.1 برهان بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي $\boldsymbol{n}$: $\boldsymbol{3u_n = 7^{n+1} - 4}$

تحقيق التراجع : $3u_0 = 3$ (محققة لأنّ $u_0 = 1$)

فرض التراجع : نفرض أنّ : $3u_n = 7^{n+1} - 4$

برهان التراجع : نبرهن أنّ : $3u_{n+1} = 7^{n+2} - 4$

$$3u_{n+1} = 21u_n + 24 = 7(3u_n) + 24 = 7(7^{n+1} - 4) + 24 = 7^{n+2} - 4$$

منه، نستنتج أنّ من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n = 7^{n+1} - 4$

.2 $\boldsymbol{S_n = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n}$ و $\boldsymbol{S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n}$

أ. حساب بدلالة $\boldsymbol{n}$ المجموع $\boldsymbol{S_n}$

S_n هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية حدّها الأول 1 وأساسها 7

$$S_n = \frac{7^{n+1} - 1}{7 - 1} = \boxed{\frac{7^{n+1} - 1}{6}}$$

إيجاد علاقة بين $\boldsymbol{S_n}$ و $\boldsymbol{S'_n}$

$$S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{1}{3}(7 - 4 + 7^2 - 4 + 7^3 - 4 + \cdots 7^{n+1} - 4)$$

$$S'_n = \frac{1}{3}\left[7\left(\frac{7^{n+1} - 1}{6}\right) - 4(n + 1)\right] = \boxed{\frac{1}{3}[7S_n - 4(n + 1)]}$$

ب. استنتاج أنّ من أجل كل عدد طبيعي $\boldsymbol{n}$: $\boldsymbol{18S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31}$

$$18S'_n = 6[7S_n - 4(n + 1)] = 6\left[7\left(\frac{7^{n+1} - 1}{6}\right) - 4(n + 1)\right]$$

$$= 7(7^{n+1} - 1) - 24(n + 1) = \boxed{7^{n+2} - 24n - 31}$$

.3 أ. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي $\boldsymbol{n}$ بواقي قسمة العدد $\boldsymbol{7^n}$ على 5

$$7^{4k} \equiv 1[5]\ ;\ 7^{4k+1} \equiv 2[5]\ ;\ 7^{4k+2} \equiv 4[5]\ ;\ 7^{4k+3} \equiv 3[5]$$

ب. تعيين قيم $\boldsymbol{n}$ الطبيعية حتى يكون $\boldsymbol{S'_n}$ قابلا للقسمة على 5

$$S'_n \equiv 0[5] \Rightarrow 18S'_n \equiv 0[5] \Rightarrow 7^{n+2} - \underbrace{24}_{\equiv -1[5]} n - \underbrace{31}_{\equiv 1[5]} \equiv 0[5]$$

$$\Rightarrow 7^{n+2} + n \equiv 1[5]$$

طريقة أولى:

بما أنّ بواقي قسمة 7^n على 5 دورية (دورها 4) ، وبواقي قسمة n على 5 دورية (دورها 5) نأخذ المضاعف المشترك الأصغر للدورين وهو 20 ، ونحل الموافقة باستعمال الجدول التالي:

$n \equiv [20]$	$7^{n+2} \equiv [5]$	$7^{n+2} + n \equiv [5]$	$n \equiv [20]$	$7^{n+2} \equiv [5]$	$7^{n+2} + n \equiv [5]$
0	4	4	10	1	**1**
1	3	4	11	2	3
2	1	3	12	4	**1**
3	2	0	13	3	**1**
4	4	3	14	1	0
5	3	3	15	2	2
6	1	2	16	4	0
7	2	4	17	3	0
8	4	2	18	1	4
9	3	2	19	2	**1**

$$\boxed{S'_n \equiv 0[5] \Rightarrow n = 20k + 10\,; 20k + 12\,; 20k + 13\,; 20k + 19\,;\ k \in \mathbb{N}}$$

طريقة ثانية: نكتب n بدلالة k ، ثمّ نحل الموافقة الناتجة :

$$n = 4k: 7^{n+2} + n \equiv 1[5] \Rightarrow \underbrace{7^{4k+2}}_{\equiv 4[5]} + 4k \equiv 1[5] \Rightarrow 4k \equiv 2[5]$$

$$\Rightarrow k \equiv 3[5] \Rightarrow k = 5\alpha + 3 \Rightarrow n = 4(5\alpha + 3) = \boxed{20\alpha + 12}$$

$$n = 4k + 1: 7^{n+2} + n \equiv 1[5] \Rightarrow \underbrace{7^{4k+3}}_{\equiv 3[5]} + 4k + 1 \equiv 1[5] \Rightarrow 4k \equiv 2[5]$$

$$\Rightarrow k \equiv 3[5] \Rightarrow k = 5\alpha + 3 \Rightarrow n = 4(5\alpha + 3) + 1 = \boxed{20\alpha + 13}$$

$$n = 4k + 2: 7^{n+2} + n \equiv 1[5] \Rightarrow \underbrace{7^{4(k+1)}}_{\equiv 1[5]} + 4k + 2 \equiv 1[5] \Rightarrow 4k \equiv 3[5]$$

$$\Rightarrow k \equiv 2[5] \Rightarrow k = 5\alpha + 2 \Rightarrow n = 4(5\alpha + 2) + 2 = \boxed{20\alpha + 10}$$

$$n = 4k + 3: 7^{n+2} + n \equiv 1[5] \Rightarrow \underbrace{7^{4(k+1)+1}}_{\equiv 2[5]} + 4k + 3 \equiv 1[5] \Rightarrow 4k \equiv 1[5]$$

$$\Rightarrow k \equiv 4[5] \Rightarrow k = 5\alpha + 4 \Rightarrow n = 4(5\alpha + 4) + 3 = \boxed{20\alpha + 19}$$

حل التمرين 44 : بكالوريا 2017 ت ر

1. بيان أنّ من أجل كل عدد طبيعي k ، $4^{5k} \equiv 1[11]$

$$4^5 = 1024 = 93(11) + 1 \Rightarrow 4^5 \equiv 1[11] \Rightarrow \boxed{4^{5k} \equiv 1[11]}$$

2. استنتاج تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11

$$4^{5k+1} = 4^{5k} \times 4 \Rightarrow 4^{5k+1} \equiv 4[11]$$
$$4^{5k+2} = 4^{5k} \times 4^2 \Rightarrow 4^{5k+2} \equiv 5[11]$$
$$4^{5k+3} = 4^{5k} \times 4^3 \Rightarrow 4^{5k+3} \equiv 9[11]$$
$$4^{5k+4} = 4^{5k} \times 4^4 \Rightarrow 4^{5k+4} \equiv 3[11]$$

3. **بيان أنّ العدد $(2\times 2017^{5n+3}+3\times 1438^{10n}+1)$ يقبل القسمة على 11**

$$2017=(183\times 11)+4\Rightarrow 2017\equiv 4[11]\Rightarrow 2017^{5n+3}\equiv 4^{5n+3}[11]$$
$$\Rightarrow 2017^{5n+3}\equiv 9[11]]\Rightarrow \mathbf{2\times 2017^{5n+3}\equiv 7[11]}$$
$$1438=(130\times 11)+8\Rightarrow 1438\equiv 8[11]\Rightarrow 1438^{10n}\equiv (2\times 4)^{10n}[11]$$
$$\Rightarrow 1438^{10n}\equiv \underbrace{(2^{10})^n}_{\equiv 1[11]}\times \underbrace{4^{5(2n)}}_{\equiv 1[11]}[11]\Rightarrow \mathbf{3\times 1438^{10n}\equiv 3[11]}$$
$$2\times 2017^{5n+3}+3\times 1438^{10n}+1\equiv 7+3+1[11]$$
$$2\times 2017^{5n+3}+3\times 1438^{10n}+1\equiv 0[11]$$

4. **تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(2\times 2017^{5n+2}+n-3)$ قابلا للقسمة على 11**

$$2017\equiv 4[11]\Rightarrow 2017^{5n+2}\equiv 5^{5n+2}[11]\Rightarrow \mathbf{2\times 2017^{5n+3}\equiv 10[11]}$$
$$2\times 2017^{5n+2}+n-3\equiv 0[11]\Rightarrow n+7\equiv 0[11]\Rightarrow n\equiv 4[11]$$
$$\Rightarrow \boxed{n=11k+4\ ;\ k\in\mathbb{N}}$$

حل التمرين 45 : بكالوريا 2018 ر

1. **تعيين العددين α و β**

$$\begin{cases}\alpha+\beta=4035\\ \alpha-\beta=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\alpha=4036\\ \beta=\alpha-1\end{cases}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}\alpha=2018\\ \beta=2017\end{cases}}$$

بيان أنّ العددين $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما

$$\alpha-\beta=1\Rightarrow 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\beta=1\Rightarrow PGCD\left(\frac{\alpha}{2};\beta\right)=1\ (\text{بيزو})$$

2. **تعيين كل الثنائيات الصحيحة $(x\,,y)$ التي تحقق المعادلة: $1009x-2017y=1$**

$$\begin{cases}1009x-2017y=1\\ 1009(2)-2017(1)=1\end{cases}\Rightarrow 1009(x-2)=2017(y-1)$$

$$\begin{cases}2017\mid 1009(x-2)\\ PGCD(1009;2017)=1\end{cases}\Rightarrow 2017\mid (x-2)\Rightarrow\begin{cases}x=2017k+2\\ y=1009k+1\end{cases}$$

$$\boxed{S=\{(2017k+2;1009k+1)\}\ ;k\in\mathbb{Z}}$$

3. **تعيين الأعداد الصحيحة a التي تحقق الجملة: $\begin{cases}a\equiv 2019[2017]\\ a\equiv 2019[1009]\end{cases}$**

$$\begin{cases}a\equiv 2019[2017]\\ a\equiv 2019[1009]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2017k+2019\\ a=1009k'+2019\end{cases}\Rightarrow 2017k=1009k'$$

$$\begin{cases} 1009 \mid 2017k \\ PGCD(1009; 2017) = 1 \end{cases} \Rightarrow 1009 \mid k \Rightarrow k = 1009k''$$

$$a = 2017(1009k'') + 2019 \Rightarrow \boxed{a = 2035153k'' + 2019 \,; k'' \in \mathbb{Z}}$$

4. أ) دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 9

$$7^{3k} \equiv 1[9] \,;\ 7^{3k+1} \equiv 7[9] \,;\ 7^{3k+2} \equiv 4[9]$$

ب) تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد $42L$ على 9

$$L = 7^0 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^{2016} + 7^{2017} = \frac{7^{2018} - 1}{6} \Rightarrow 42L = 7^{2019} - 7$$

$$7^{2019} = 7^{3(673)} \Rightarrow 7^{2019} \equiv 1[9] \Rightarrow 7^{2019} - 7 \equiv -6[9] \Rightarrow \boxed{42L \equiv 3[9]}$$

حل التمرين 46 : بكالوريا 2018 ت ر

$$\boldsymbol{w_n = \frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2} \text{ ، } v_{n+1} = 5v_n + u_n \text{ ، } v_0 = 4 \text{ ، } u_n = 2(3)^n}$$

1. اثبات أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{3}$، يُطلب تعيين حدها الأول

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} + \frac{1}{2} = \frac{5v_n + u_n}{3u_n} + \frac{1}{2} = \frac{5v_n}{3u_n} + \frac{u_n}{3u_n} + \frac{1}{2} = \frac{5}{3}\frac{v_n}{u_n} + \frac{5}{6}$$

$$= \frac{5}{3}\left(\frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{3}w_n$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (w_n) هندسية أساسها $\frac{5}{3}$ وحدها الأول $w_0 = \frac{v_0}{u_0} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

2. كتابة عبارة الحد العام w_n بدلالة n واستنتاج أنّ $v_n = 5^{n+1} - 3^n$

$$w_n = w_0 q^n = \boxed{\frac{5}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^n}$$

$$w_n = \frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2} \Rightarrow v_n = u_n\left(w_n - \frac{1}{2}\right) = 2(3)^n\left[\frac{5}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^n - \frac{1}{2}\right]$$

$$= \boxed{5^{n+1} - 3^n}$$

3. دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعددين 3^n و 5^n على 8

$$3^{2k} \equiv 1[8] \,;\ 3^{2k+1} \equiv 3[8];\ 5^{2k} \equiv 1[8] \,;\ 5^{2k+1} \equiv 5[8]$$

4. تعيين بواقي القسمة الاقليدية للعدد v_n على 8

- $n = 2k: \begin{cases} 5^{n+1} \equiv 5[8] \\ 3^n \equiv 1[8] \end{cases} \Rightarrow \boxed{v_n \equiv 4[8]}$
- $n = 2k+1: \begin{cases} 5^{n+1} \equiv 1[8] \\ 3^n \equiv 3[8] \end{cases} \Rightarrow \boxed{v_n \equiv 6[8]}$

حل التمرين 47 : بكالوريا 2019 ر

1. **حل المعادلة (E) ... $505x - 673y = 1$**

$$\begin{cases} 505x - 673y = 1 \\ 505(4) - 673(3) = 1 \end{cases} \Rightarrow 505(x-4) = 673(y-3)$$

$$\begin{cases} 673 \mid 505(x-4) \\ PGCD(673;505) = 1 \end{cases} \Rightarrow 673 \mid (x-4)$$

$$\Rightarrow x = 673k + 4 \, ; y = 505k + 3$$

$$\boxed{S = \{(673k+4\,;505k+3)\}\,; k \in \mathbb{Z}}$$

2. **بيان أنّه من أجل كل ثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإنّ: x و y من نفس الإشارة**

$$xy = (673k+4)(505k+3) = 339865k^2 + 1178k + 12$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow xy > 0 \Rightarrow \boxed{x \text{ و } y \text{ من نفس الإشارة}}$$

3. **كتابة u_α بدلالة α و v_β بدلالة β**

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 505 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} - u_n = 505 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{u_n = u_0 + 505n}_{(u_n) \text{ متتالية حسابية أساسها } 505}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_\alpha = 3 + 505\alpha}$$

$$\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = v_n + 673 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} - v_n = 673 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{v_n = v_0 + 673n}_{(v_n) \text{ متتالية حسابية أساسها } 673}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_\beta = 4 + 673\beta}$$

4. **أ) تعيين الحدود المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n)**

$$u_\alpha = v_\beta \Rightarrow 3 + 505\alpha = 4 + 673\beta \Rightarrow 505\alpha - 673\beta = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{673k+4} = v_{505k+3}}\,; k \in \mathbb{N}$$

بيان أنّ الحدود المشتركة تشكّل متتالية حسابية (w_n) يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول

$w_n = u_{673n+4}$

$w_{n+1} - w_n = u_{673n+677} - u_{673n+4} = 673 \times 505 = 339865$

منه نستنتج أنّ المتتالية (w_n) حسابية أساسها 339865 وحدها الأول:

$w_0 = u_4 = u_0 + 4(505) = 2023$

ب) حساب الجداء $p = X_1.X_2 \dots .X_n$

$$X_n = \frac{1}{505}(w_n - 2023) = \frac{1}{505}(w_n - w_0) = \frac{339865n}{505} = 673n$$

$p = X_1.X_2 \dots .X_n = 673.673(2) \dots .673(n) = 673^n.2.3 \dots n$

$\boxed{p = 673^n \times n!}$

حل التمرين 48 : بكالوريا 2019 ر

$u_{n+1} = u_n + 2\sqrt{u_n} + 1$ ، $u_1 = 0$

1. أ) التحقق أنّ: $\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} = 1$

$$u_{n+1} = u_n + 2\sqrt{u_n} + 1 = \left(\sqrt{u_n} + 1\right)^2 \Rightarrow \sqrt{u_{n+1}} = \sqrt{u_n} + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} = 1}$$

ب) استنتاج كتابة الحد العام u_n بدلالة n

$v_n = \sqrt{u_n} \Rightarrow v_{n+1} - v_n = 1$

$\Rightarrow$ $\boxed{(v_n) \text{ متتالية حسابية أساسها 1 وحدها الأول } v_1 = 0}$

$v_n = v_1 + (n-1)r = n - 1 \Rightarrow \boxed{u_n = (n-1)^2}$

2. التحقق أنّ: $u_n = n(n-2) + 1$

$u_n = (n-1)^2 = n^2 - 2n + 1 = \boxed{n(n-2) + 1}$

3. تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها: $n - 2$ يقسم $n - 5$

$$\begin{cases} n-2 \mid n-2 \\ n-2 \mid n-5 \end{cases} \Rightarrow n-2 \mid (n-2)-(n-5) \Rightarrow n-2 \mid 3 \Rightarrow n-2 \in D_3$$

$$\Rightarrow n-2 \in \{-3; -1; 1; 3\} \Rightarrow \boxed{n \in \{1; 3; 5\}} \; ; (n-2 \neq -3)$$

4. أ) بيان أنّ: $PGCD(n-2; u_n) = 1$

$u_n = n(n-2) + 1 \Rightarrow u_n - n(n-2) = 1$

$\Rightarrow \boxed{PGCD(n-2; u_n) = 1}$ (بيزو)

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها $(n^2+1)(n-2)$ يقسم $(n-5)u_n$

$$\begin{cases}(n-2)(n^2+1) \mid (n-5)u_n \\ PGCD(n-2;u_n)=1\end{cases} \Rightarrow (n-2) \mid (n-5) \Rightarrow n \in \{1;3;5\}$$

- $n=1: \begin{cases}(n-2)(n^2+1)=-2 \\ (n-5)u_n=0\end{cases}$; $-2 \mid 0$
- $n=3: \begin{cases}(n-2)(n^2+1)=10 \\ (n-5)u_n=-12\end{cases}$; $10 \nmid -12$
- $n=5: \begin{cases}(n-2)(n^2+1)=78 \\ (n-5)u_n=0\end{cases}$; $78 \mid 0$

$(n-2)(n^2+1) \mid (n-5)u_n \Rightarrow \boxed{n \in \{1;5\}}$

حل التمرين 49 : بكالوريا 2019 ت ر

$$\begin{cases}u_0=0 \\ u_{n+1}=7u_n-18n+9\end{cases} \text{ و } v_n=u_n-3n+1$$

1. **اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.**

$v_{n+1}=u_{n+1}-3n-2=7u_n-21n+7=7(u_n-3n+1)=7v_n$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 7 وحدها الأول $v_0=u_0+1=1$

2. **كتابة v_n بدلالة n واستنتاج u_n بدلالة n**

$v_n=v_0q^n \Rightarrow \boxed{v_n=7^n}\ ; u_n=v_n+3n-1 \Rightarrow \boxed{u_n=7^n+3n-1}$

3. **حساب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$**

$S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n=v_0-1+v_1+2+\cdots+v_n+3n-1$

$S_n=(v_0+v_1+\cdots+v_n)+\underbrace{(-1+2+\cdots+3n-1)}_{\text{متتالية حسابية أساسها 3}}$

$$S_n=\frac{7^{n+1}-1}{6}+\frac{(n+1)(3n-2)}{2}$$

$$\boxed{S_n=\frac{7^{n+1}+9n^2+3n-7}{6}}$$

4. **أ) دراسة بواقي القسمة الإقليدية لـ 7^n على 9**

$7^{3k}\equiv 1[9]\ ;\ 7^{3k+1}\equiv 7[9]\ ;\ 7^{3k+2}\equiv 4[9]$

ب) تعيين باقي قسمة العدد $1954^{1962}+1962^{1954}+1442^{2019}$ على 9

$1442\equiv -7[9] \Rightarrow 1442^{2019}\equiv -7^{3(673)}[9] \Rightarrow 1442^{2019}\equiv -1[9]$

$1962\equiv 0[9] \Rightarrow 1962^{1954}\equiv 0[9]$

$1954 \equiv 1[9] \Rightarrow 1954^{1962} \equiv 1[9]$

$$\boxed{1442^{2019} + 1962^{1954} + 1954^{1962} \equiv 0[9]}$$

ج) اثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $6S_n - 7u_n \equiv 0[9]$

$6S_n - 7u_n = 7^{n+1} + 9n^2 + 3n - 7 - 7^{n+1} - 21n + 7 = 9n^2 - 18n$

$= 9n(n-2) \Rightarrow \boxed{6S_n - 7u_n \equiv 0[9]}$

حل التمرين 50 : بكالوريا 2019 ت ر

.1 $5x - 3y = 1 \ldots (E)$

أ) التحقق أن الثنائية $(6n+2\,;\,10n+3)$ حل للمعادلة (E)

$5(6n+2) - 3(10n+3) = 1 \Rightarrow \boxed{(6n+2; 10n+3) \in S_{(E)}}$

ب) استنتاج أنّ العددين $10n+3$ و $6n+2$ أوليان فيما بينهما

$5(6n+2) - 3(10n+3) = 1 \Rightarrow \boxed{PGCD(6n+2; 10n+3) = 1}$ (بيزو)

.2 $a = 10n+3$ ، $b = 3n+5$ ، $d = PGCD(a;b)$

أ) بيان أنّ $d = 1$ أو $d = 41$

$\begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases} \Rightarrow d \mid 10b - 3a \Rightarrow d \mid 41 \Rightarrow \boxed{d \in \{1; 41\}}$

ب) بيان أنّه إذا كان $d = 41$ فإن $n \equiv 12[41]$

$d = 41 \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0[41] \\ b \equiv 0[41] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10n+3 \equiv 0[41] \\ 3n+5 \equiv 0[41] \end{cases}$

$\Rightarrow 10n + 3 - 3(3n+5) \equiv 0[41] \Rightarrow n - 12 \equiv 0[41] \Rightarrow \boxed{n \equiv 12[41]}$

.3 $A = 20n^2 + 36n + 9$ و $B = 6n^2 + 19n + 15$

أ) بيان أن العددين A وB يقبلان القسمة على $2n+3$

$A = 20n^2 + 36n + 9 = (2n+3)(10n+3) = (2n+3)a$

$\Rightarrow \boxed{2n+3 \mid A}$

$B = 6n^2 + 19n + 15 = (2n+3)(3n+5) = (2n+3)b \Rightarrow \boxed{2n+3 \mid B}$

ب) حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين A وB

$PGCD(A;B) = (2n+3)PGCD(a;b) = (2n+3)d$

- $n \equiv 12[41]: d = 41 \Rightarrow PGCD(A;B) = 41(2n+3)$
- $n \not\equiv 12[41]: d = 1 \Rightarrow PGCD(A;B) = (2n+3)$

حل التمرين 51 : بكالوريا 2020 ر

$\boldsymbol{c = 3n + 2}$ و $\boldsymbol{b = 6n + 1}$ ، $\boldsymbol{a = 4n + 1}$

1. اثبات أن العددين $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ أوليان فيما بينهما

$$3a - 2b = 1 \Rightarrow \boxed{PGCD(a;b) = 1}\ (\text{بيزو})$$

2. اثبات أن $\boldsymbol{\alpha}$ يقسم 5 وتعيين الأعداد الطبيعية $\boldsymbol{n}$ بحيث يكون: $\boldsymbol{\alpha = 5}$

$$\alpha = PGCD(a;c) \Rightarrow \begin{cases}\alpha|a\\\alpha|c\end{cases} \Rightarrow \alpha|4c - 3a \Rightarrow \boxed{\alpha|5}$$

$$\alpha = 5 \Rightarrow \begin{cases}a \equiv 0[5]\\c \equiv 0[5]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4n + 1 \equiv 0[5]\\3n + 2 \equiv 0[5]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4n \equiv 4[5]\\3n \equiv 3[5]\end{cases} \Rightarrow n \equiv 1[5]$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 5k + 1; k \in \mathbb{N}}$$

3. أ. اثبات أن $\boldsymbol{\alpha}$ يقسم $\boldsymbol{\beta}$

$$\begin{cases}\alpha|a\\\alpha|c\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha|a\\\alpha|bc\end{cases} \Rightarrow \alpha|PGCD(a;bc) \Rightarrow \boxed{\alpha|\beta}$$

ب. اثبات أن العددين $\boldsymbol{\beta}$ و $\boldsymbol{b}$ أوليان فيما بينهما

$$d = PGCD(\beta;b) \Rightarrow \begin{cases}d|\beta\\d|b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}d|a\\d|b\end{cases} \Rightarrow d|PGCD(a;b) \Rightarrow \boxed{d = 1}$$

استنتاج أنّ: $\boldsymbol{\alpha = \beta}$

$$\beta = PGCD(a;bc) \Rightarrow \begin{cases}\beta|a\\\beta|bc\end{cases} \xRightarrow[PGCD(\beta;b)=1]{} \begin{cases}\beta|a\\\beta|c\end{cases} \Rightarrow \beta|PGCD(a;c) \Rightarrow \boxed{\beta|\alpha}$$

$$\begin{cases}\alpha|\beta\\\beta|\alpha\end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = \beta}$$

4. $\boldsymbol{A = 4n^2 - 3n - 1}$ و $\boldsymbol{B = 18n^3 - 3n^2 - 13n - 2}$

أ. بيان أنّ كلا من العددين $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$ مضاعف للعدد الطبيعي $\boldsymbol{(n - 1)}$

$$A = 4n^2 - 3n - 1 = (n - 1)(4n + 1) = \boxed{a(n - 1)}$$

$$B = 18n^3 - 3n^2 - 13n - 2 = (n - 1)(18n^2 + 15n + 2)$$

$$= \boxed{bc(n - 1)}$$

ب. التعبير عن $\boldsymbol{d}$ بدلالة $\boldsymbol{n}$

$$d = PGCD(A;B) = (n - 1)PGCD(a;bc) = (n - 1)\alpha$$

- $n = 5k + 1 : \alpha = 5 \Rightarrow \boxed{d = 5(n - 1)}$
- $n \neq 5k + 1 : \alpha = 1 \Rightarrow \boxed{d = n - 1}$

حل التمرين 52 : بكالوريا 2020 ر

1. **حل المعادلة: $3x - 5y = 2$**

$$\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 3(4) - 5(2) = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{S = \{(5k+4; 3k+2)\}; k \in \mathbb{Z}}$$

2. **أ. دراسة باقي القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي 9^n على 7**

$$9^{3k} \equiv 1[7]\ ;\ \ 9^{3k+1} \equiv 2[7]\ ;\ \ 9^{3k+2} \equiv 4[7]$$

ب. دراسة باقي القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي 4^n على 11

$$4^{5k} \equiv 1[11]; 4^{5k+1} \equiv 4[11]\ ; 4^{5k+2} \equiv 5[11]; 4^{5k+3} \equiv 9[11]; 4^{5k+4} \equiv 3[11]$$

3. **تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون: $14 \times 4^n + 11 \times 9^n - 4 \equiv 0[77]$**

$$14 \times 4^n + 11 \times 9^n - 4 \equiv 0[77] \Rightarrow \begin{cases} 14 \times 4^n + 11 \times 9^n - 4 \equiv 0[7] \\ 14 \times 4^n + 11 \times 9^n - 4 \equiv 0[11] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 \times 9^n - 4 \equiv 0[7] \\ 3 \times 4^n - 4 \equiv 0[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9^n \equiv 1[7] \\ 4^n \equiv 5[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 3\alpha \\ n = 5\beta + 2 \end{cases}$$

$$3\alpha = 5\beta + 2 \Rightarrow 3\alpha - 5\beta = 2 \Rightarrow \alpha = 5k + 4 \Rightarrow \boxed{n = 15k + 12; k \in \mathbb{N}}$$

4. $\boldsymbol{u_n = 3 \times 4^n + 4 \times 9^n}$ و $\boldsymbol{S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{15n}}$

أ. التعبير عن S_n بدلالة n

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \cdots + u_{15n} \\ &= 3(4^1 + 4^2 + \cdots + 4^{15n}) + 4(9^1 + 9^2 + \cdots + 9^{15n}) \\ &= 3 \times 4\left(\frac{4^{15n} - 1}{3}\right) + 4 \times 9\left(\frac{9^{15n} - 1}{8}\right) \\ &= \boxed{4(4^{15n} - 1) + \frac{9}{2}(9^{15n} - 1)} \end{aligned}$$

ب. اثبات أنّ S_n مضاعف للعدد 77

$$S_n \equiv 0[77] \Rightarrow 2S_n \equiv 0[77] \Rightarrow \begin{cases} 2S_n \equiv 0[7] \\ 2S_n \equiv 0[11] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8(4^{15n} - 1) + 9(9^{15n} - 1) \equiv 0[7] \\ 8(4^{15n} - 1) + 9(9^{15n} - 1) \equiv 0[11] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8(4^{15n} - 1) + 9\underbrace{\left(9^{3(5n)} - 1\right)}_{\equiv 0[7]} \equiv 0[7] \\ 8\underbrace{\left(4^{5(3n)} - 1\right)}_{\equiv 0[11]} + 9(9^{15n} - 1) \equiv 0[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4^{15n} - 1 \equiv 0[7] \\ 9^{15n} - 1 \equiv 0[11] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4^3 \equiv 1[7] \Rightarrow (4^3)^{5n} \equiv 1[7] \Rightarrow 4^{15n} - 1 \equiv 0[7] \\ 9^5 \equiv 1[11] \Rightarrow (9^5)^{3n} \equiv 1[11] \Rightarrow 9^{15n} - 1 \equiv 0[11] \end{cases} \Rightarrow \boxed{S_n \equiv 0[77]}$$

حل التمرين 53 : بكالوريا 2020 ت ر

$\boldsymbol{77x - 24y = 82 \ldots (E_2)}$ و $\boldsymbol{693x - 216y = 738 \ldots (E_1)}$

1. حساب $\boldsymbol{PGCD(693; 216)}$ واستنتاج أنّ المعادلتين $\boldsymbol{(E_1)}$ و $\boldsymbol{(E_2)}$ متكافئتان

$PGCD(693; 216) = 9$

$693x - 216y = 738 \Leftrightarrow 77x - 24y = 82$

2. التحقق أن الثنائية $\boldsymbol{(2; 3)}$ حل للمعادلة $\boldsymbol{(E_2)}$ وايجاد حلولها في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$77(2) - 24(3) = 82 \Rightarrow \boxed{S = \{(24k + 2; 77k + 3)\}\, ; k \in \mathbb{Z}}$

3. تعيين الثنائيات $\boldsymbol{(x; y)}$ حلول المعادلة $\boldsymbol{(E_2)}$ التي تحقق: $\boldsymbol{|y - x| \leq 54}$

$|y - x| \leq 54 \Rightarrow |77k + 3 - 24k - 2| \leq 54 \Rightarrow |53k + 1| \leq 54$

$-54 \leq 53k + 1 \leq 54 \Rightarrow -\dfrac{55}{53} \leq k \leq 1 \Rightarrow k \in \{-1; 0; 1\}$

$\boxed{S = \{(-22; -74); (2; 3); (26; 80\}\, ; k \in \mathbb{Z}}$

4. تعيين العددين $\boldsymbol{\alpha}$ و $\boldsymbol{\beta}$ وكتابة العدد $\boldsymbol{N}$ في النظام العشري

$N = \overline{\beta 68 \alpha}^9 = \overline{1\alpha\beta 0\alpha}^6 \Rightarrow 9^3\beta + 6.9^2 + 8.9 + \alpha$

$= 6^4 + 6^3\alpha + 6^2\beta + \alpha \Rightarrow 693\beta - 216\alpha = 738$

$\Rightarrow \boxed{(\beta; \alpha) = (2; 3) \Rightarrow N = 2019}$

حل التمرين 54 : بكالوريا 2020 ت ر

1) أ. دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد $\boldsymbol{3^n}$ على 5

$3^{4k} \equiv 1[5]\, ;\ 3^{4k+1} \equiv 3[5]\, ;\ 3^{4k+2} \equiv 4[5]\, ;\ 3^{4k+3} \equiv 2[5]$

ب. استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد: $\boldsymbol{8^{2020} - 2 \times 3^{1441} - 1}$ على 5

$8 \equiv 3[5] \Rightarrow 8^{2020} \equiv 3^{4(505)}[5] \Rightarrow 8^{2020} \equiv 1[5]$

$3^{1441} = 3^{4(360)+1}[5] \Rightarrow 3^{1441} \equiv 3[5] \Rightarrow 2 \times 3^{1441} \equiv 1[5]$

$8^{2020} - 2 \times 3^{1441} - 1 \equiv -1[5] \Rightarrow \boxed{8^{2020} - 2 \times 3^{1441} - 1 \equiv 4[5]}$

2) تعيين الأعداد الطبيعية $\boldsymbol{n}$ التي من أجلها يكون: $\boldsymbol{a_n \equiv 0[5]}$

$a_n \equiv 0[5] \Rightarrow 3^{n+1} + 4 \equiv 0[5] \Rightarrow 3^{n+1} \equiv 1[5] \Rightarrow n + 1 = 4k$

$\Rightarrow \boxed{n = 4k - 1\, ; k \in \mathbb{N}^*}$

3) $b_n = 7a_n + 5$

أ. تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a_n و b_n

$$d = PGCD(a_n; b_n) \Rightarrow \begin{cases} d|a_n \\ d|b_n \end{cases} \Rightarrow d|b_n - 7a_n \Rightarrow d|5 \Rightarrow \boxed{d \in \{1; 5\}}$$

ب. بيان أنّ: $b_n \equiv 0[5]$ إذا وفقط إذا كان $a_n \equiv 0[5]$

$a_n \equiv 0[5] \Rightarrow 7a_n + 5 \equiv 0[5] \Rightarrow b_n \equiv 0[5] \dots ①$

$b_n \equiv 0[5] \Rightarrow 7a_n + 5 \equiv 0[5] \Rightarrow 7a_n \equiv 0[5] \Rightarrow a_n \equiv 0[5] \dots ②$

ج. استنتاج الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون a_n و b_n أوليين فيما بينهما

$$n = 4k - 1 \Rightarrow \begin{cases} a_n \equiv 0[5] \\ b_n \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow d = 5\ ; \boxed{d = 1 \Rightarrow n \neq 4k - 1\ ; k \in \mathbb{N}^*}$$

حل التمرين 55 : بكالوريا 2021 ر

1) حل المعادلة (E) علما أن الثنائية $(1; 4)$ حل لها

$$\begin{cases} 42x - y = 38 \\ 42(1) - 4 = 38 \end{cases} \Rightarrow 42(x - 1) = (y - 4) \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = k \\ y - 4 = 42k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k + 1 \\ y = 42k + 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{S = \{(k + 1; 42k + 4)\}; k \in \mathbb{Z}}$$

2) $N = \overline{ab0cb}^5 = \overline{a7c5}^8$

أ. بيان أن الأعداد a ، b و c تحقق: $113a = 3(c - 42b + 151)$

$$N = \overline{ab0cb}^5 = \overline{a7c5}^8 \Rightarrow 5^4a + 5^3b + 5c + b = 8^3a + 8^2(7) + 8c + 5$$

$$\Rightarrow 113a = -126b + 3c + 453 \Rightarrow \boxed{113a = 3(c - 42b + 151)}$$

استنتاج أنّ $a = 3$

$$\begin{cases} 3|113a \\ PGCD(3; 113) = 1 \end{cases} \Rightarrow 3|a \Rightarrow \boxed{a = 3}\ ; (0 < a < 5)$$

ب. تعيين العددين الطبيعيين b و c وكتابة العدد N في النظام العشري

$$113a = 3(c - 42b + 151) \Rightarrow c - 42b + 151 = 113 \Rightarrow 42b - c = 38$$

$$\begin{cases} b = k + 1 \\ c = 42k + 4 \end{cases} \xRightarrow[b \text{ و } c \in [0;5[]{} \begin{cases} b = 1 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow N = 8^3(3) + 8^2(7) + 8(4) + 5 = \boxed{2021}$$

3) أ. دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 6

$5^{2k} \equiv 1[6]\ ;\ 5^{2k+1} \equiv 5[6]$

ب. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $2021^{2n} + 1441^n + 4$ مضاعف للعدد 6

$$\begin{cases} 2021 \equiv 5[6] \\ 1441 \equiv 1[6] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2021^{2n} \equiv 1[6] \\ 1441^n \equiv 1[6] \end{cases} \Rightarrow \boxed{\underbrace{2021^{2n} + 1441^n}_{\equiv 2[6]} + 4 \equiv 0[6]}$$

جـ. تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $A_n \equiv 0[6]$

$1442 \equiv 2[6] \Rightarrow 1442^n \equiv 2^n[6]$

$A_n \equiv 0[6] \Rightarrow 2021^{2n} + 1441^n + 2 \times 1442^n \equiv 0[6] \Rightarrow 2 + 2 \times 2^n \equiv 0[6]$

$\Rightarrow 2^{n+1} \equiv 2^2[6] \Rightarrow n + 1 = 2\alpha \Rightarrow \boxed{n = 2\alpha - 1}\ ; \alpha \in \mathbb{N}^*$ (n فردي)

حل التمرين 56 : بكالوريا 2021 ر

1) $7x - 6y = 1 \dots (E)$

أ. حل المعادلة (E) علما أن الثنائية $(1;1)$ حل لها

$$\begin{cases} 7x - 6y = 1 \\ 7(1) - 6(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow 7(x-1) = 6(y-1)$$

$$\begin{cases} 6|7(x-1) \\ PGCD(6;7) = 1 \end{cases} \Rightarrow 6|x-1 \Rightarrow x = 6k+1\ ; y = 7k+1$$

$$\boxed{S_{(E)} = \{(6k+1; 7k+1)\}\ ; k \in \mathbb{Z}}$$

ب. تحقق أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $xy \in \mathbb{N}^*$

$xy = (6k+1)(7k+1) = 42k^2 + 13k + 1\ ; \Delta < 0 \Rightarrow xy > 0 \Rightarrow \boxed{xy \in \mathbb{N}^*}$

2) أ. دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7

$4^{3k} \equiv 1[7]\ ;\ 4^{3k+1} \equiv 4[7]\ ;\ 4^{3k+2} \equiv 2[7]$

ب. بيان أنّ العدد $4 \times 2019^{2021} + 2022^{2022}$ يقبل القسمة على 7

$2019 \equiv -4[7] \Rightarrow 4 \times 2019^{2021} \equiv -4^{3\times 674}[7] \Rightarrow 4 \times 2019^{2021} \equiv -1[7]$

$2022 \equiv -1[7] \Rightarrow 2022^{2022} \equiv 1[7]$

$$\Rightarrow \boxed{4 \times 2019^{2021} + 2022^{2022} \equiv 0[7]}$$

3) البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $4^n \equiv 4[6]$

$P_n: "4^n \equiv 4[6]"\ ;\ n \in \mathbb{N}^*$

- تحقيق التراجع : محققة... $4^1 \equiv 4[6]$
- فرض التراجع : نفرض أن $4^n \equiv 4[6]$
- برهان التراجع : نبرهن أن $4^{n+1} \equiv 4[6]$

$$\begin{cases} 4^n \equiv 4[6] \\ 4^1 \equiv 4[6] \end{cases} \Rightarrow 4^{n+1} \equiv 16[6] \Rightarrow \boxed{4^{n+1} \equiv 4[6]}$$

4) $A = \overline{\underbrace{333\ldots330}_{a\times b}}^{4}$

أ. بيان أنّ: $A = 4^{ab} - 4$

$A = 3\times 4 + 3\times 4^2 + \cdots + 3\times 4^{ab-1} = 3(4 + 4^2 + \cdots + 4^{ab-1})$

$$A = 3\left[4\left(\frac{4^{ab-1}-1}{3}\right)\right] = 4(4^{ab-1}-1) = \boxed{4^{ab}-4}$$

ب. التحقق أنّ: $A \equiv 0[6]$

$$4^n \equiv 4[6] \xRightarrow[ab\in\mathbb{N}^*]{} 4^{ab} \equiv 4[6] \Rightarrow 4^{ab} - 4 \equiv 0[6] \Rightarrow \boxed{A \equiv 0[6]}$$

تعيين كل الثنائيات $(a;b)$ التي من أجلها يكون A قابلا للقسمة على 42

$$A \equiv 0[42] \Rightarrow \begin{cases} \underbrace{A \equiv 0[6]}_{\text{محققة}} \\ A \equiv 0[7] \end{cases} \Rightarrow 4^{ab} - 4 \equiv 0[7] \Rightarrow 4^{ab} \equiv 4[7] \Rightarrow ab$$

$$= 3\alpha + 1$$

$$\Rightarrow ab \equiv 1[3] \Rightarrow \underbrace{42k^2}_{\equiv 0[3]} + 13k + 1 \equiv 1[3] \Rightarrow 13k \equiv 0[3] \Rightarrow k \equiv 0[3]$$

$$\Rightarrow k = 3k' \Rightarrow \boxed{S_{(a;b)} = \{(18k'+1; 21k'+1)\}\,;k' \in \mathbb{N}}$$

حل التمرين 57 : بكالوريا 2021 ت ر

1) **دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 9**

$5^{6k} \equiv 1[9]$; $5^{6k+1} \equiv 5[9]$; $5^{6k+2} \equiv 7[9]$; $5^{6k+3} \equiv 8[9]$;
$5^{6k+4} \equiv 4[9]$; $5^{6k+5} \equiv 2[9]$

2) **تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد 2021^{1442} على 9**

$$2021 \equiv 5[9] \Rightarrow 2021^{1442} \equiv 5^{6(240)+2}[9] \Rightarrow \boxed{2021^{1442} \equiv 7[9]}$$

3) **بيان أنّ العدد $2021^{1442} + 1691^{1954} - 8$ مضاعف للعدد 9**

$1691 \equiv -1[9] \Rightarrow 1691^{1954} \equiv 1[9]$

$$\underbrace{2021^{1442}}_{\equiv 7[9]} + \underbrace{1691^{1954}}_{\equiv 1[9]} - 8 \equiv 0[9]$$

4) **برهان أنّ العدد $5^{6n} + 2021^{6n+1} + 1443$ مضاعف للعدد 9**

$\underline{5^{6n} \equiv 1[9]}$; $2021 \equiv 5[9] \Rightarrow \underline{2021^{6n+1} \equiv 5[9]}$; $\underline{1443 \equiv 3[9]}$

$$\underbrace{5^{6n}}_{\equiv 1[9]} + \underbrace{2021^{6n+1}}_{\equiv 5[9]} + \underbrace{1443}_{\equiv 3[9]} \equiv 0[9]$$

5) **تعيين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون: $A_n \equiv 0[9]$**

$A_n \equiv 0[9] \Rightarrow \underbrace{2021^{1442}}_{\equiv 7[9]} + \underbrace{1691^{1954}}_{\equiv 1[9]} + 5n \equiv 0[9] \Rightarrow 5n \equiv 1[9]$

$\Rightarrow 5n \equiv 10[9] \Rightarrow n \equiv 2[9] \Rightarrow \boxed{n = 9k + 2; k \in \mathbb{N}}$

حل التمرين 58 : بكالوريا 2021 ت ر

1) أ. التحقق أنّه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ: $x \equiv 7[9]$

طريقة ①

$13x - 9y = 1 \Rightarrow 13x = 9y + 1 \Rightarrow 13x \equiv 1[9] \Rightarrow 4x \equiv 1[9]$

$\Rightarrow 4x \equiv 1 + 27[9] \Rightarrow \boxed{x \equiv 7[9]}$

طريقة ②

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	[9]
$4x \equiv$	0	4	8	3	7	2	6	1	5	[9]

ب. استنتاج حلول المعادلة (E)

$x \equiv 7[9] \Rightarrow x = 9k + 7 ; 9y = 13x - 1 = 13(9k + 7) - 1 = 117k + 90$

$\Rightarrow y = 13k + 10 \Rightarrow \boxed{S_{(E)} = \{9k + 7; 13k + 10\}} ; k \in \mathbb{Z}$

2) أ. دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5

$3^0 \equiv 1[5] ;\ 3^1 \equiv 3[5] ;\ 3^2 \equiv 4[5] ;\ 3^3 \equiv 2[5] ; 3^4 \equiv 1[5]$

$\boxed{3^{4k} \equiv 1[5] ;\ 3^{4k+1} \equiv 3[5] ;\ 3^{4k+2} \equiv 4[5] ;\ 3^{4k+3} \equiv 2[5]}$

ب. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، A_n يقبل القسمة على 5

$A_n = \underbrace{3^{4n}}_{\equiv 1[5]} + \underbrace{3^{4n+1}}_{\equiv 3[5]} + \underbrace{3^{4n+2}}_{\equiv 4[5]} - 3 \Rightarrow \boxed{A_n \equiv 0[5]}$

3) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد $n + 3^{y-x} + 2023^{2022}$ القسمة على 5

$3^{y-x} = 3^{13k+10-9k-7} = 3^{4k+3} \Rightarrow 3^{y-x} \equiv 2[5]$

$2023 \equiv 3[5] \Rightarrow 2023^{2022} \equiv 3^{4(505)+2}[5] \Rightarrow 2023^{2022} \equiv 4[5]$

$n + \underbrace{3^{y-x}}_{\equiv 2[5]} + \underbrace{2023^{2022}}_{\equiv 4[5]} \equiv 0[5] \Rightarrow n + 1 \equiv 0[5] \Rightarrow n \equiv 4[5]$

$\Rightarrow \boxed{n = 5\alpha + 4 ; \alpha \in \mathbb{N}}$

حل التمرين 59 : بكالوريا 2022 ر

1) أ. تعيين بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7

$2^0 \equiv 1[7] ;\ 2^1 \equiv 2[7] ;\ 2^2 \equiv 4[7] ;\ 2^3 \equiv 1[7]$

$\boxed{2^{3k} \equiv 1[7]\ ;\ 2^{3k+1} \equiv 2[7]\ ;\ 2^{3k+2} \equiv 4[7]}$

ب. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $6^{2n} \equiv 1[7]$

$6 \equiv -1[7] \Rightarrow \boxed{6^{2n} \equiv 1[7]}$

استنتاج بواقي القسمة الإقليدية للعدد 6^n على 7

$6^{2k} \equiv 1[7] \Rightarrow 6^{2k+1} \equiv 6[7]$

2) بيان أنّ العدد $(2021^{2022} + 1962^{1443})^{1954} - 2$ يقبل القسمة على 7

$2021 \equiv -2[7] \Rightarrow 2021^{2022} \equiv (2^3)^{674}[7] \Rightarrow 2021^{2022} \equiv 1[7]$

$1962 \equiv 2[7] \Rightarrow 1962^{1443} \equiv (2^3)^{481}[7] \Rightarrow 1962^{1443} \equiv 1[7]$

$2021^{2022} + 1962^{1443} \equiv 2[7] \Rightarrow (2021^{2022} + 1962^{1443})^{1954} \equiv 2^{1954}[7]$

$\xRightarrow[2^{1954}=2\times(2^3)^{651}]{} (2021^{2022} + 1962^{1443})^{1954} \equiv 2[7]$

$\Rightarrow (2021^{2022} + 1962^{1443})^{1954} - 2 \equiv 0[7]$

3) $a_n = 2^n + 6^n$ و $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$

أ- استنتاج بواقي القسمة الإقليدية للعدد a_n على 7

بواقي قسمة 2^n على 7 دورها 3 وبواقي قسمة 6^n على 7 دورها 2، وتكون بواقي قسمة a_n على 7 دورها كما يلي:

n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	
$2^n \equiv$	1	2	4	1	2	4	[7]
$6^n \equiv$	1	6	1	6	1	6	[7]
$a_n \equiv$	2	1	5	0	3	3	[7]

ب- بيان أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_{n+6} \equiv S_n[7]$

$a_{n+6} = 2^{n+6} + 6^{n+6} = 2^n.2^6 + 6^n.6^6$

$\begin{cases} 2^6 \equiv 1[7] \\ 6^6 \equiv 1[7] \end{cases} \Rightarrow a_{n+6} \equiv 2^n + 6^n[7] \Rightarrow a_{n+6} \equiv a_n[7]$

$S_{n+6} = S_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + a_{n+5} + a_{n+6}$

$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + a_{n+5} + a_{n+6} \equiv 0[7] \Rightarrow \boxed{S_{n+6} \equiv S_n[7]}$

جـ- اثبات أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n \equiv 2^{n+1} + 3 \times 6^{n+1} + 3[7]$

$S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = (2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n) + (6^0 + 6^1 + \cdots + 6^n)$

$S_n = \dfrac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} + \dfrac{6^{n+1} - 1}{6 - 1} = 2^{n+1} - 1 + \dfrac{6^{n+1} - 1}{5}$

$\underbrace{15}_{\equiv 1[7]}\ S_n = \underbrace{15}_{\equiv 1[7]} \times 2^{n+1} + 3 \times 6^{n+1} \underbrace{-18}_{\equiv 3[7]} \Rightarrow \boxed{S_n \equiv 2^{n+1} + 3 \times 6^{n+1} + 3[7]}$

استنتاج قيم n بحيث $S_n \equiv 0[7]$

$$S_n \equiv 0[7] \Rightarrow 2^{n+1} + 3 \times 6^{n+1} + 3 \equiv 0[7] \Rightarrow \begin{cases} 2^{n+1} \equiv 1[7] \\ 6^{n+1} \equiv 1[7] \end{cases} \Rightarrow n + 1 = 6k$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 6k - 1\ ; k \in \mathbb{N}^*}$$

حل التمرين 60 : بكالوريا 2022 ر

$$\boldsymbol{B_n = n + 2} \text{ و } \boldsymbol{A_n = n^3 + 5n^2 + 7n + 9}$$

1) أ. بيان أنّ $PGCD(A_n; B_n) = PGCD(B_n; 7)$

$$A_n = B_n(n^2 + 3n + 1) + 7 \Rightarrow \underbrace{PGCD(A_n; B_n) = PGCD(B_n; 7)}_{PGCD(a;b)=PGCD(b;r)}$$

ب. استنتاج القيم الممكنة لـ $PGCD(A_n; B_n)$

$$d = PGCD(A_n; B_n) \Rightarrow d \mid 7 \Rightarrow \boxed{d \in \{1; 7\}}$$

جـ. تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون A_n و B_n أوليين فيما بينهما

$$d = 7 \Rightarrow B_n \equiv 0[7] \Rightarrow n + 2 \equiv 0[7] \Rightarrow n \equiv 5[7] \Rightarrow n = 7k + 5\ ; k \in \mathbb{N}$$

$$\boxed{d = 1 \Rightarrow n \neq 7k + 5\ ; k \in \mathbb{N}}$$

2) $A_2x - B_2y = 29 \ldots (E)$

أ. بيان أنّه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (E) فإنّ $x \equiv 3[4]$

$$51x - 4y = 29 \Rightarrow 51x - 29 = 4y \Rightarrow 51x \equiv 29[4] \Rightarrow -x \equiv -3[4]$$

$$\Rightarrow \boxed{x \equiv 3[4]}$$

ب. تعيين حلول المعادلة (E)

$$x \equiv 3[4] \Rightarrow x = 4k + 3 \Rightarrow 4y = 51(4k + 3) - 29 = 204k + 124$$

$$\Rightarrow y = 51k + 31 \Rightarrow \boxed{S_{(E)} = \{(4k + 3; 51k + 31)\}\ ; k \in \mathbb{Z}}$$

3) أ. استنتاج حلول المعادلة $(E') \ldots 51x - 4y = 45$

$$51x - 4y = 45 \Rightarrow 51x - 4y = 29 + 16 \Rightarrow 51x - 4(y + 4) = 29$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4k + 3 \\ y + 4 = 51k + 31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4k + 3 \\ y = 51k + 27 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{(E')} = \{(4k + 3; 51k + 27)\}\ ; k \in \mathbb{Z}}$$

ب. تعيين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E') حيث $|y - 12x| \leq 3$

$$|y - 12x| \leq 3 \Rightarrow |51k + 27 - 12(4k + 3)| \leq 3 \Rightarrow |3k - 9| \leq 3$$

$$\Rightarrow |k - 3| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq k - 3 \leq 1 \Rightarrow 2 \leq k \leq 4 \Rightarrow k \in \{2; 3; 4\}$$

$$\Rightarrow \boxed{(x; y) \in \{(11; 129); (15; 180); (19; 231)\}}$$

حل التمرين 61 : بكالوريا 2022 ت ر

1) **تعيين باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 7**

$2022 = 288 \times 7 + 6 \Rightarrow \boxed{a \equiv 6[7]}$

$124 = 17 \times 7 + 5 \Rightarrow \boxed{b \equiv 5[7]}$

2) **دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7**

$5^{6k} \equiv 1[7];\ 5^{6k+1} \equiv 5[7]; 5^{6k+2} \equiv 4[7];\ 5^{6k+3} \equiv 6[7];$
$5^{6k+4} \equiv 2[7]; 5^{6k+5} \equiv 3[7]$

3) **بيان أنّ العدد $a^a + b^b + 4$ يقبل القسمة على 7**

$$\begin{cases} a \equiv -1[7] \\ b \equiv 5[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^a \equiv (-1)^{2022}[7] \\ b^b \equiv 5^{6(20)+4}[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^a \equiv 1[7] \\ b^b \equiv 2[7] \end{cases} \Rightarrow \boxed{a^a + b^b + 4 \equiv 0[7]}$$

4) $\boldsymbol{A_n = 2021^n + 2022^n + 2023^n + 2024^n}$

بيان أنّ $A_n \equiv 1 + 5^n + 6^n[7]$

$$\begin{cases} 2021 \equiv 5[7] \\ 2022 \equiv 6[7] \\ 2023 \equiv 0[7] \\ 2024 \equiv 1[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2021^n \equiv 5^n[7] \\ 2022^n \equiv 6^n[7] \\ 2023^n \equiv 0[7] \\ 2024^n \equiv 1[7] \end{cases} \Rightarrow \boxed{A_n \equiv 5^n + 6^n + 1[7]}$$

تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $A_n + 1$ مضاعفا للعدد 7

$A_n + 1 \equiv 0[7] \Rightarrow 5^n + 6^n + 2 \equiv 0[7] \Rightarrow 5^n \equiv 5 - (-1)^n[7]$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5^n \equiv 4[7] \\ n \text{ زوجي} \end{cases} \text{أو} \begin{cases} 5^n \equiv 6[7] \\ n \text{ فردي} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{n \in \{6k+2\ ; 6k+3\}\ ; k \in \mathbb{N}}$$

حل التمرين 62 : بكالوريا 2022 ت ر

$\boldsymbol{c = 9n + 2}$ ، $\boldsymbol{b = n + 1}$ ، $\boldsymbol{a = 5n + 2}$

$\boldsymbol{d' = PGCD(b; c)}$ ، $\boldsymbol{d = PGCD(a; b)}$

1) **تعيين القيم الممكنة لكل من d و d' واستنتاج $PGCD(a; b; c)$**

$$d = PGCD(a; b) \Rightarrow \begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases} \Rightarrow d \mid 5b - a \Rightarrow d \mid 3 \Rightarrow \boxed{d \in \{1; 3\}}$$

$$d' = PGCD(b; c) \Rightarrow \begin{cases} d' \mid b \\ d' \mid c \end{cases} \Rightarrow d' \mid 9b - c \Rightarrow d' \mid 7 \Rightarrow \boxed{d' \in \{1; 7\}}$$

$$\begin{cases} PGCD(a; b) \in \{1; 3\} \\ PGCD(b; c) \in \{1; 7\} \end{cases} \Rightarrow \boxed{PGCD(a; b; c) = 1}$$

2) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد b قاسما لـ a

$b \mid a \Rightarrow b \mid 5b - a \Rightarrow b \mid 3 \Rightarrow n + 1 \in \{1; 3\} \Rightarrow \boxed{n \in \{0; 2\}}$

3) $17x - 4y = 29 \ldots (E)$

بيان أنّه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $x \equiv 1[4]$

$17x - 4y = 29 \Rightarrow 17x - 29 = 4y \Rightarrow \underbrace{17}_{\equiv 1[4]} x \equiv \underbrace{29}_{\equiv 1[4]} [4] \Rightarrow \boxed{x \equiv 1[4]}$

حل المعادلة (E)

$x \equiv 1[4] \Rightarrow x = 4k + 1 \Rightarrow 17(4k + 1) - 4y = 29 \Rightarrow 4y = 68k - 12$

$\Rightarrow y = 17k - 3 \Rightarrow \boxed{S = \{(4k + 1; 17k - 3); k \in \mathbb{Z}\}}$

4) تعيين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) والتي تحقق $xy < 279$

$xy < 279 \Rightarrow (4k + 1)(17k - 3) < 279 \Rightarrow 68k^2 + 5k - 282 < 0$

$\Rightarrow k \in \left]-\frac{141}{68}; 2\right[\Rightarrow k \in \{-2; -1; 0; 1\}$

$\Rightarrow \boxed{(x; y) \in \{(-7; -37); (-3; -20); (1; -3); (5; 14)\}}$

فهرس

تم بحمد الله

أتمنى لكم التوفيق والنجاح في البكالوريا

عبد الكريم وائلي

أرحب بجميع استفساراتكم

أو ملاحظاتكم أو تصويباتكم

على العنوان التالي

ouailmaths@gmail.com

0668 177 233