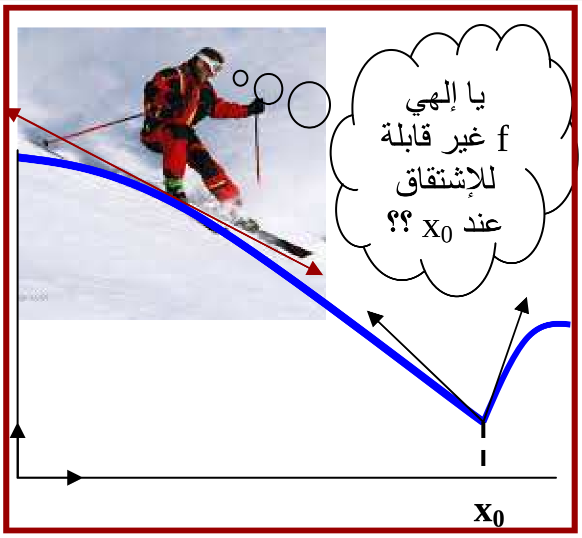
رياضيات
سلسلة 3
2016-2015
المستوى
3 ع ت - 3 ع د
إعداد الأستاذ
مراد لحسن

الاشتقاقية

وقل رب زدني علما



ما يجب
على الطالب أن يعرف

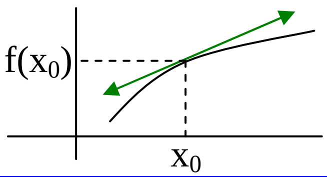
1- مفهوم العدد المشتق
2- التفسير الهندسي للعدد المشتق
3- مفهوم النقطة الزاوية.
4- العلاقة بين الاستمرار و الاشتقاق
5- القيم الحدية لدالة
6- نقطة الانعطاف .
7- قواعد الاشتقاق.

http://bacsuc.blogspot.com

قال رسول الله
صلى الله عليه و سلم

خيركم من تعلم القرآن وعلمه

مفهوم الإشتقاقية

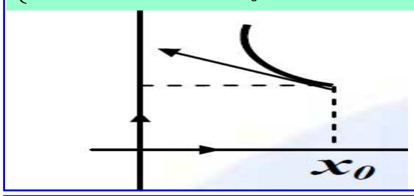
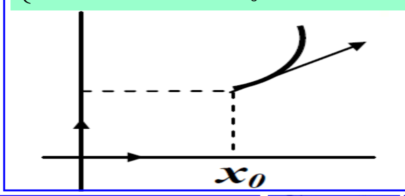
التفسير الهندسي للعدد المشتق	العدد المشتق
إذا قبلت f الاشتقاق عند x_0 فإن تمثيلها البياني يقبل في النقطة: **$A(x_0;f(x_0))$** مماسا معامل توجيهه $f'(x_0)$ معادلته : $$y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$ 	f دالة معرفة على مجال I يشمل x_0 نقول أن الدالة f قابلة للإشتقاق عند x_0 اذا كان : $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$$ أو $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$ $f'(x_0)$ **هو العدد المشتق للدالة f عند x_0**

مثال

1. ادرس قابلية الإشتقاق للدالة f عند 3 حيث : $f(x)=\frac{1}{x}$
2. ادرس قابلية الإشتقاق للدالة f عند 0 حيث : $f(x)=|x|$

ملاحظة : **إن معادلة المماس عند x_0 هو أحسن تقريب تآلفي للدالة f عند x_0**

قالوا عن الاعتذار

قابلية الإشتقاق على اليسار	قابلية الإشتقاق على اليمين
f قابلة للإشتقاق عند x_0 من اليسار إذا كان : $$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_G(x_0)$$ $f'_G(x_0)$ **هو العدد المشتق عند x_0 من اليسار**	f قابلة للإشتقاق عند x_0 من اليمين إذا كان : $$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_D(x_0)$$ $f'_D(x_0)$ **هو العدد المشتق عند x_0 من اليمين**
هندسيا : (C_f) يقبل نصف مماس من اليسار معادلته : $$\begin{cases} y=f'_G(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0) \\ x\le x_0 \end{cases}$$ 	**هندسيا :** (C_f) يقبل نصف مماس من اليمين معادلته : $$\begin{cases} y=f'_D(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0) \\ x\ge x_0 \end{cases}$$ 

نتيجة : **تكون الدالة f قابلة للإشتقاق عند x_0 إذا قبلت نفس العدد المشتق من اليمين و من اليسار** $$f'_D(x_0)=f'_G(x_0)$$

هل تعلم ؟
إذا حفظت في اليوم 3 آيات من القرآن الكريم فإنك ستحفظ القرآن كله في مدة 5 سنوات و 10 أشهر و 13 يوما

الاستمرار و قابلية الإشتقاق

إذا كانت **f** قابلة للاشتقاق عند x_0
فإن **f** مستمرة عند x_0 .

انتبه	العكس غير صحيح

الدالة المشتقة

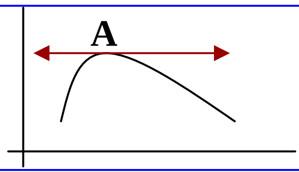
إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل x من مجال I فإن الدالة التي تعطي العدد المشتق من أجل أي قيمة للمتغير x تسمى **الدالة المشتقة** للدالة f و نرمز لها **f'**

اتجاه تغير دالة

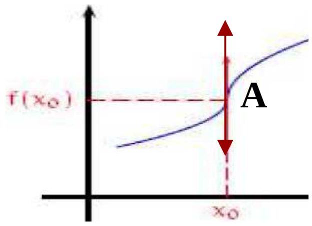
$f'(x) \succ 0$	f متزايدة تماما على I
$f'(x) \prec 0$	f متناقصة تماما على I
$f'(x) = 0$	f ثابتة على I

حالات خاصة

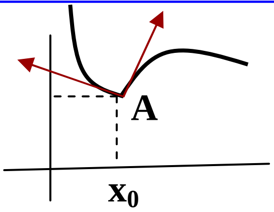
1) إذا كان : $f'(x_0) = 0$
فإن المماس عند النقطة :
A $(x_0;f(x_0))$ يوازي محور الفواصل



2) إذا كان :
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$$
فإن المماس عند النقطة :
A $(x_0;f(x_0))$ يوازي محور التراتيب.



3) إذا كان : العدد المشتق عند x_0 من اليمين يختلف عن العدد المشتق عند x_0 من اليسار
فإن النقطة A ذات الفاصلة x_0 تسمى
نقطة زاوية

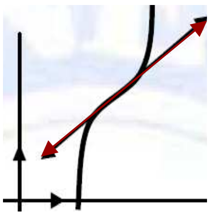


القيم الحدية المحلية

إذا انعدمت الدالة المشتقة مغيرة إشارتها فإن
$f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة f

نقطة الانعطاف

هي نقطة يخترق فيها المماس المنحنى.
و تنعدم المشتقة الثانية عند فاصلتها x_0



$$f''(x_0) \simeq 0$$

قواعد الاشتقاق

$(u+v)' = u' + v'$
$(ku)' = ku'$
$(uv)' = u'v + uv'$
$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$[f(ax+b)]' = a \times f'(ax+b)$

مشتقة الدالة المركبة

مشتقة الدالة f حيث : $f(x) = [u(x)]^n$ ، $n \in \mathbb{N}^*-\{1\}$

هي الدالة f' حيث : $f'(x) = n \cdot [u(x)]^{n-1} \cdot u'(x)$

الدالة	D_f	المشتقة	$D_{f'}$
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$

مفاتيح النجاح الدراسي : 3- غير رأيك في نفسك

الإنسان يملك طاقات كبيرة وقوى خفية يحتاج أن يزيل عنها غبار التقصير والكسل ..فأنت أقدر مما تتصور وأقوى مما تتخيل وأذكى بكثير مما تعتقد .. اشطب كل الكلمات السلبية عن نفسك من مثل " لا أستطيع – لست شاطراً .." وردّد باستمرار " أنا أستحق الأفضل – أنا مبدع – أنا ممتاز – أنا قادر ..".

تمرين 1

ادرس قابلية الإشتقاق للدوال التالية عند القيمة x_0 ثم فسر النتيجة بيانيا .

$$1)\ f(x)=\left(x^2-3x+1\right)^2,\ x_0=1$$

$$2)\ f(x)=\sqrt{x-3},\ x_0=3$$

$$3)\ f(x)=3x+\left|x^2-4\right|,\ x_0=-2$$

$$4)\ f(x)=\sqrt{9-x^2},\ x_0=3$$

$$5)\ f(x)=2x\left|x-1\right|,\ x_0=1$$

تمرين 2

(1 برر التقريب التآلفي المحلي عند 0 في كل حالة من الحالات التالية:

$$1)\ (1+x)^3\approx 1+3x$$

$$2)\ \sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}$$

$$3)\ \frac{1}{1+x}\approx 1-x$$

(2 باستعمال التقريب التآلفي المناسب جد قيمة تقريبية للعدد: $\sqrt{1.00024}$

تمرين 3

(1 جد أحسن تقريب تآلفي للدالة f حيث :

$$f(x)=\frac{1}{x+3}$$

(2 باستعمال هذا التقريب جد قيمة تقريبية للأعداد: $\frac{1}{3.1};\frac{1}{2.99};\frac{1}{3.02}$

تمرين 4

لتكن الدالة المعرفة على $[1;+\infty[$ بالعبارة:

$$f(x)=3+\sqrt{x-1}$$

(1 احسب $\lim\limits_{h\to0^+}\frac{f(h+1)-f(1)}{h}$ ثم فسر النتيجة هندسيا

(2 ادرس تغيرات f و ارسم تمثيلها البياني .

تمرين 5

m: عدد حقيقي .

f دالة عددية معرفة كما يلي :

$$f(x)=\frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2}\quad ;x\neq2$$

$$f(2)=m$$

(1 عين m حتى تكون f مستمرة عند 2 .

(2 هل f قابلة للاشتقاق عند 2 ؟ فسر النتيجة .

تمرين 6

لتكن الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4+2x^3+x^2}}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}\ ;\ x\neq-1 \\ f(-1)=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

(1 ادرس استمرارية f على مجال تعريفها.

(2 هل f مستمرة عند x= -1 ؟

(3 هل f قابلة للإشتقاق عند x= -1 ؟

تمرين 7 بكالوريا أجنبية

لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x و المعرفة على المجال: $[-1;0[\cup]0;1]$

كما يلي :

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

(1 اثبت أنه من اجل x من $[-1;0[\cup]0;1]$ فإن:

$$f(x)=\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$$

(2 اثبت أن f فردية .

(3 ادرس استمرارية الدالة f على مجموعة تعريفها .

(4 احسب : $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ ماذا تستنتج ؟

(5 على أي جزء من $[-1;0[\cup]0;1]$ تكون f قابلة للاشتقاق ؟

(6 ادرس تغيرات الدالة f و ارسم تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس (C)

تمرين 8

لتكن الدالة f المعرفة على $]-1;1[$

بالعلاقة :

$f(x)=x+1+\frac{ax}{x^2-1}$ a عدد حقيقي موجب

عين a حتى يكون المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 موازيا لمحور الفواصل.

تمرين 9

لتكن الدالة f المعرفة على R بالعبارة:

$f(x)=x^2-2x+1$ (C_f) منحناها البياني

1) اثبت أن f قابلة للاشتقاق عند 2 و استنتج $f'(2)$

2) عين معادلة لـ (Δ) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2.

3) ادرس تغيرات fو أنجز جدول تغيراتها.

4) اثبت أن المستقيم ذو المعادلة X=1 محور تناظر للمنحنى (C_f)

5) ارسم (Δ) و (C_f)

تمرين 10

لتكن الدالة f المعرفة على R بالعبارة:

$f(x)=ax^3+bx+c$

عين الأعداد الحقيقية a,b,c بحيث:

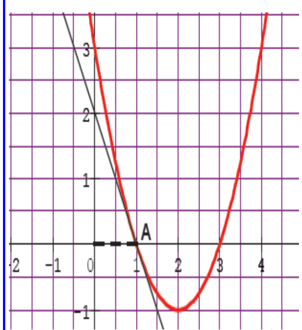
المنحنى (C_f) يشمل النقطة $A(1;-3)$

و يقبل في النقطة $B(0;1)$ مماسا يوازي المستقيم (D) الذي معادلته y=-6x

تمرين 11

لتكن الدالة f المعرفة على R بالعبارة:

$f(x)=ax^3+bx+c$



(C_f) تمثيلها البياني معطى في الشكل المقابل.

1) بقراءة بيانية احسب : $f'(1);f(2);f(1)$

2) عين a,b,c .

تمرين 12

f دالة كثير حدود من الدرجة الثانية حيث: $f'(-2)=-3$

$f'(3)=3;f(1)=2$

عين عبارة f

تمرين 13

لتكن الدالة f المعرفة على R-{2} بالعبارة: $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x-2}$

(C_f) منحناها البياني في معلم (م و م)

1) عين الأعداد الحقيقية a,b,c بحيث يكون للمنحنى (C_f) مستقيم مقارب معادلته y=x-3 و يقبل قيمة حدية عند النقطة التي فاصلتها 3.

2) ادرس تغيرات الدالة f

3) اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (D_1) و (D_2) معامل توجيه كل منهما (-3)يطلب إعطاء احداثيي نقطتي التماس M_1 و M_2 و معادلتي المماسين (D_1) و (D_2)

4) ارسم بدقة المماسين (D_1) و (D_2) ثم المنحنى (C_f)

5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع البيان (C_f) و المستقيم (Δ_m) الذي معادلته : y=-3x+m

تمرين 14

لتكن الدالة f المعرفة على R بالعبارة: $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x^2+1}$

عين العددين الحقيقيين a و b

إذا علمت أن الدالة f تأخذ قيمة حدية محلية قيمتها 5 عند -2 .

تمرين 15

لتكن الدالة f المعرفة على R-{a} بالعبارة: $f(x)=x+\frac{1}{x-a}$

1)أثبت أن f تقبل قيمة حدية محلية عظمى M و قيمة حدية محلية صغرى m

2) كيف يجب اختيار حتى يكون : M=2m ؟

تمرين 16

لتكن الدالة f المعرفة على R-{1} بالعبارة: $f(x)=|x+1|+\frac{1}{x-1}$

(C_f) منحناها البياني في معلم (م و م)

1) احسب : $\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1};\ \lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$ و فسر النتيجة هندسيا.

2) جد معادلتي نصفي المماسين عند النقطة التي فاصلتها -1 .

3) ادرس تغيرات الدالة f .

4) بين أن المنحنى (C_f) يقبل ثلاثة مستقيمات مقاربة يطلب تعيينها.

5) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتاهما.

6) انشيء المنحنى (C_f)

7) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي عدد و إشارة حلول المعادلة: $|x+1|=\frac{m(x-1)-1}{x-1}$

مســـــــائل الدوال العددية (النهايات ، الاستمرار ، الاشتقاق ......و مفاهيم أخرى)

مسألة 1 لتكن الدالة f المعرفة على : $R - \{-1;1\}$

بالعبارة: $f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{x^2 - 1}$ (C_f) تمثيلها البياني .

1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف و استنتج المستقيمات المقاربة الموازية لمحور التراتيب.
2) ادرس اتجاه تغير الدالة و شكل جدول تغيراتها و اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.
3) من جدول التغيرات خمن وجود مركز تناظر للمنحنى (Cf)ثم اثبت صحة أو عدم صحة تخمينك.
4) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته y=x+1 هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .
5) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل
6) بين أن المعادلة f(x)=0 تقبل حلا وحيدا α في المجال]-1,1[ثم اوجد حصرا لـ α سعته 0.1
7) ارسم المستقيمات المقاربة و المنحنى (C_f)
8) ناقش بيانيا عدد و إشارة حلول المعادلة:

$$(m - 1 - x)(x^2 - 1) - x = 0$$

مسألة 2 الجزء 1 : لتكن الدالة g المعرفة على R:

بالعبارة: $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$

1) ادرس تغيرات الدالة g
2) بين أن المعادلة g(x)=0 تقبل حلا وحيدا α $\alpha \in]0.5;0.9[$
3) عين حسب قيم x إشارة g(x)

الجزء 2 : لتكن الدالة g المعرفة على R^* بالعبارة:

$f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 1}{3x}$ (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس . وحدة الطول هي 3 cm .

1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف
2) بين أنه من أجل كل x من R^* فإن إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة g(x)
3) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.
4) بين أن : $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{6} + \dfrac{1}{2\alpha}$ استنتج باستعمال حصر العدد α حصرا للعدد $f(\alpha)$
5) ارسم المنحنى (C_f) .
6) ناقش بيانيا إشارة و عدد حلول المعادلة : $f(x) = m + 1$

محور التناظر

المستقيم $(\Delta): x = a$ محور تناظر :

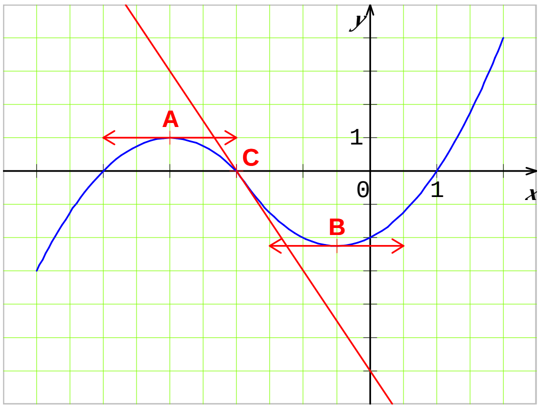
$$f(2a - x) = f(x)$$

مركز التناظر

النقطة $\Omega\ (a;b)$ مركز تناظر :

$$f(2a - x) + f(x) = 2b$$

مسألة 3 لتكن الدالة f المعرفة ببيانها (C_f) المعطى في الشكل:



1) عين مجموعة تعريف الدالة f .
2) بقراءة بيانية عين العدد المشتق للدالة عند كل من : 0.5-، 2.25-، 3-، 2 -
3) استنتج معادلات المماسات للمنحنى (C_f) عند النقط: C;B;A .
4) هل توجد مماسات أخرى للمنحنى (C_f) موازية لمماسه عند النقطة: C ؟
5) جد بيانيا عدد حلول المعادلة f(x)=-1
6) الدالة f هي مشتقة دالة F . أعط تغيرات الدالة F مبررا الجواب .
7) لتكن الدالة المعرفة على] 2 ; 5-] بالعلاقة : $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ اعط جدول تغيرات f و استنتج جدول تغيرات g

مسألة 4

لتكن الدالة f المعرفة على : $\mathbb{R}-\{-1\}$ بالعبارة:

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2}{(x+1)^2}$$

(C_f) تمثيلها البياني .

1. ادرس تغيرات الدالة و استنتج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي .
2. بين أن المستقيم الذي معادلته $y=x$ هو مقارب مائل للمنحنى (C_f) .
3. ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.
4. احسب إحداثيات نقطتي تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل.
5. اكتب معادلة للمماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة 1.
6. انشىء (Δ) ثم المنحنى (C_f)
7. لتكن الدالة المعرفة بالعبارة:

$$g(x)=x^2.\frac{|x|+2}{(|x|+1)^2}$$

أ) برهن أن g زوجية و أن $g=f$ على مجال يطلب تعيينه.

8. ادرس استمرارية الدالة g عند 0 ثم قابلية الاشتقاق للدالة g عند 0.
9. انشىء (C_g) بلون آخر في نفس المعلم .

مسألة 5

لتكن الدالة f المعرفة على : $\mathbb{R}-\{2\}$ بالعبارة:

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x-2}$$

(C_f) تمثيلها البياني .

1. عين الأعداد الحقيقية c;b;a بحيث يكون للمنحنى (C_f) مستقيم مقارب معادلته $y=x-3$ و يقبل قيمة حدية عند النقطة التي فاصلتها 3 .
2. ادرس تغيرات الدالة f .
3. اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (Δ_1) و(Δ_2) معامل توجيه كل منهما -3
عين إحداثيات نقطتي التماس M_1 و M_2 و معادلتي المماسين (Δ_1) و(Δ_2)
4. ارسم بدقة المماسين (Δ_1) و(Δ_2) ثم أنشىء (C_f)
5. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي عدد نقط تقاطع (C_f) و المستقيم (Δ_m) الذي معادلته :
$y+3x-m=0$
6. g دالة معرفة على: $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ بالعبارة:

$$g(x)=f(|x|)$$

أ) بين أن f زوجية
ب) ادرس قابلية الإشتقاق للدالة g عند 0.

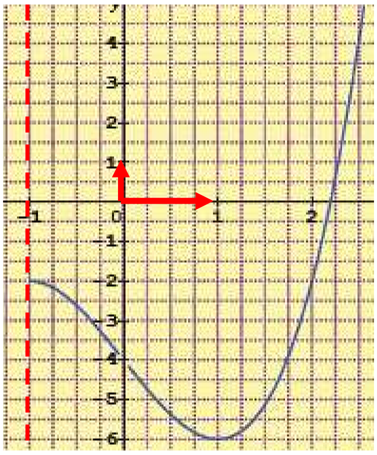
ج) بين أنه يمكن إنشاء (C_g) التمثيل البياني للدالة g إنطلاقا من (C_f) ثم أرسم (C_g) بلون آخر في نفس المعلم

مسألة 6

لتكن الدالة h المعرفة على : $]-1;+\infty[$ بالعبارة:

$$h(x)=ax^3+bx+c$$

(C_h) تمثيلها البياني معطى في الشكل المقابل.



الجزء 1 :

1. عين الأعداد الحقيقية c;b;a
2. بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات h
3. بين أن المعادلة $x^3-3x-4=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]2;2.25[$ استنتج إشارة $h(x)$.

الجزء 2 :

لتكن الدالة f المعرفة على : $]-1;1[\cup]1;+\infty[$ بالعبارة:

$$f(x)=\frac{x^2(x+2)}{x^2-1}$$

(C_f) تمثيلها البياني .

1. احسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف.
2. تأكد أنه من أجل كل x من مجموعة التعريف فإن: $f'(x)=\frac{xh(x)}{(x^2-1)^2}$ ثم استنتج إشارته.
3. انجز جدول تغيرات f ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$.
4. اثبت أن (C_f) يقبل ثلاث مستقيمات مقاربة منها المستقيم المقارب المائل $y=x+2$
5. ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم المقارب المائل.
6. أنشىء المنحنى (C_f) .