



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية



الشعبة : علوم تجريبية
دورة ماي 2021

ثانوية مفدي زكرياء — الأزهرية
إمتحانات بكالوريا تجريبية

المدة: 03 سا و 30 د

إختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = -3$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 3n - 1$$

1 / أ) أحسب u_1, u_2, u_3

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$: $u_n > 0$

ج) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 4$: $u_n > 3n - 4$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n)

2 / لتكن المتتالية العددية (v_n) من أجل كل عدد طبيعي : $v_n = u_n - 9n + 30$

أ) برهن أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0

ب) أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n

3 / أ) أحسب بدلالة n الجداء : $P_n = e^{v_0} \times e^{v_1+1} \times e^{v_2+2} \times \dots \times e^{v_n+n}$

ب) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

صندوق به ثلاث كريات خضراء تحمل الرقم 0 و كريتان حمراون تحملان الرقم 5 و كرية بيضاء تحمل الرقم α (α عدد طبيعي يختلف عن 5 و 10) ، سحب لاعب ثلاث كريات في آن واحد (الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس).

1 / أ) أحسب إحتمال الحوادث التالية :

A : اللاعب يسحب ثلاث كريات من نفس اللون .

B : اللاعب يسحب ثلاث كريات من ألوان مختلفة .

C : اللاعب يسحب كريتين من نفس اللون .

2 / اللاعب يربح مجموع الأعداد المسجلة على الكريات الثلاثة ، نعتبر المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب

ثلاث كريات الربح بالدينار الذي يتحصل عليه اللاعب .

أ) عيّن قيم X و بيّن أن $P(X = \alpha) = \frac{3}{20}$

ب) عيّن قانون إحتمال X

(ج) أحسب بدلالة α الأمل الرياضي $E(X)$ ، ثم عيّن قيمة α حتى يربح اللاعب 20 دينارا .
التمرين الثالث: (04 نقطة)

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب $z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B = iz_A$ ، و $z_C = \overline{z_A}$.

1/ أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الجبري و الأسّي .

2/ أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $(E) \dots \frac{1+i-z}{-1+i-z} = 2e^{i\pi}$.
 ب) استنتج أنّ النقطة A هي صورة النقطة B بالتشابه S الذي مركزه Ω ذات اللاحقة z_Ω (هو حل المعادلة (E)) يطلب تعيين نسبته و زاويته .

3/ عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا موجبا تماما .

4/ أ) عيّن (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $z = z_C - k\frac{z_A}{z_C}$ ، لما k يمسح $\mathbb{R}_+^*$.

ب) عيّن (Γ_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $\arg \left[\left(\frac{z_A - z}{z_B - z} \right)^2 \right] = \pi + 2\pi k$.

التمرين الرابع: (08 نقطة)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بالعلاقة : $f(x) = x + \ln|e^x - 1|$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ ، فسّر النتيجةين بيانيا .

2/ بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x غير معدوم : $f'(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x - 1}$.

ب) أدرس إتجاه تغير f و شكّل جدل تغيراتها .

3/ أ) بيّن أنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) عند $-\infty$ ، يطلب تعيين معادلة له .

ب) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$: $f(x) = 2x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$.

ج) استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ') عند $+\infty$ ، يطلب تعيين معادلة له .

د) حدد نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

هـ) عيّن معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $\ln 2$.

4/ أ) برهن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.4 < \alpha < 0.5$ ، ثم استنتج إشارة $f(x)$.

ب) أثبت أنّ α يحقق : $e^{2\alpha} - e^\alpha - 1 = 0$ ، ثم أبشئ كلا من (C_f) ، (Δ) ، (Δ') .

5/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x) = |m|x$.

6/ h الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ : $h(x) = -2|x| + \ln|1 - e^{|x|}|$.

أ) تحقق أنّ : $h(x) = f(-|x|)$ ، ثم بيّن أنّ h دالة زوجية .

ب) اشرح كيف يمكن رسم (C_h) إنطلاقا من (C_f) ، ثم أرسمه في نفس المعلم (C_h) (منحنى الدالة h) .

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقطة)

- لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}$.
- 1 / أ) أحسب u_1, u_2 ، ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$.
 ب) بين أن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.
 ج) استنتج أن (u_n) متقاربة ، ثم أحسب نهايتها .
- 2 / لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n^2 - 1$.
 أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2v_{n+1} = v_n$.
 ب) استنتج أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0 .
 ج) أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n ، ثم أحسب من جديد نهاية المتتالية (u_n) .
- 3 / أحسب بدلالة n المجاميع التالية :
 $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$ ، $S'_n = v_0 + 2v_1 + 2^2v_2 + \dots + 2^n v_n$ ، $S''_n = \ln(v_0) + \ln(v_1) + \dots + \ln(v_n)$.

التمرين الثاني: (04 نقطة)

- 1 / α عدد مركب ، $\bar{\alpha}$ مرافقه ، أثبت أن $\alpha + \bar{\alpha} = 0$ معناه α تخيلي صرف .
- 2 / a عدد مركب يختلف عن 0 ، نرفق بكل عدد مركب z يختلف عن a العدد المركب $f(z)$ حيث :
 $f(z) = \frac{az}{z-a}$.
 < أثبت أن $f(z)$ تخيلي صرف معناه : $|z|^2 \times \operatorname{Re}(a) = |a|^2 \times \operatorname{Re}(z)$ يرمز إلى الجزء الحقيقي و $|\cdot|$ ترمز إلى الطويلة) .
- 3 / نضع : $a = -1 + i$.
 أ) عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $f(z)$ تخيلي صرف .
 ب) نعتبر (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $\arg(f(z) - a) = \frac{9\pi}{4}$.
 < بين أن (Δ) هي نصف مستقيم باستثناء النقطة A ذات اللاحقة a ، أكتب معادلته الديكارتية .
- 4 / أكتب $f(z)$ على الشكل الجبري ، ثم عيّن B نقطة تقاطع (Γ) و (Δ) .

التمرين الثالث: (04 نقطة)

يحتوي صندوق على كريات متماثلة ، منها n كرية بيضاء تحمل العدد π (n عدد طبيعي ، $n \geq 2$) ، و أربع كريات حمراء تحمل الأعداد $\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ و كرتين خضراوين تحملان العددين $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{3}$ ، نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الصندوق (الكريات لانفرق بينها عند اللمس) .

- 1 أ) أحسب احتمال كل من الحدثين A و B حيث : A : سحب كرتين من نفس اللون ، B : سحب كرتين تحملان نفس العدد .

- ب) عيّن n حتى يكون $P(A) = \frac{17}{55}$.

- 2 نفرض أن $n = 5$ و نسمي α و β العددين الظاهرين على الكرتين المسحوبتين ، نعتبر X المتغير العشوائي

الذي يربط بكل نتيجة سحب العدد $\cos(\alpha)\cos(\beta)$.

(أ) برر أن قيم X هي $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 1$.

(ب) بين أن $P(X=0) = \frac{27}{55}$.

(ج) عرّف قانون إحتمال X ، ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين الرابع: (08 نقطة)

(I) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني و (Γ) المنحنى

الذي معادلته $y = \ln x$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 / أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

2 / بين أنه من أجل كل x من المجال $]1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1 + (\ln x)^2}{x(\ln x)^2}$.

3 / أدرس اتجاه تغير f و شكّل جدول تغيراتها .

4 / أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x]$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا .

5 / أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Γ) .

(II) نريد البحث عن المماسات للمنحنى (C_f) المارة من المبدأ O ، ليكن a عدد حقيقي من المجال $]1; +\infty[$.

1 / برهن أن المماس (T_a) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة a يمر من المبدأ O معناه

$$f(a) - af'(a) = 0 .$$

2 / لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بالعلاقة $g(x) = f(x) - xf'(x)$.

برهن أنه على المجال $]1; +\infty[$ المعادلتين $g(x) = 0$ و $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ لهما نفس الحلول .

3 / لتكن الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$.

(أ) أدرس تغيرات الدالة u و شكّل جدول تغيراتها .

(ب) بين أن الدالة u تنعدم مرة واحدة فقط على $\mathbb{R}$.

(ج) استنتج وجود مماس وحيد للمنحنى (C_f) يمر من المبدأ .

(د) أثبت أن الحل الوحيد α للمعادلة $u(x) = 0$ يحقق : $1.83 < \alpha < 1.84$.

(هـ) استنتج أن معادلة المماس (T_{e^α}) المار من المبدأ هي : $y = \left(\frac{1 + \alpha^2}{e^\alpha \alpha^2} \right) x$.

(III) 1 / أنشئ (C_f) ، (Γ) ، و (T_{e^α}) (يعطى : $\alpha = 1.8$ ، $e^\alpha = 6.26$) .

2 / m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx$.

بالتوفيق في إمتحان شهادة البكالوريا إن شاء الله

الحل المفصل للكالوريا التجريبية 2021 شعبة علوم تجريبية

حل التمرين الأول : (04 نقاط)

$$u_1 = 0, u_2 = 5, u_3 = \frac{34}{3} \quad (أ) / 1$$

(ب) نضع : $u_n > 0 : P(n)$.

$\triangleleft$ من أجل $n = 3$ لدينا $u_3 = \frac{34}{3} > 0$ و $\frac{34}{3} > 0$ و منه $P(3)$ صحيحة .

$\triangleleft$ نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل $n \geq 3$ و نثبت أن $P(n+1)$ صحيحة ($n \geq 3$) .

$u_n > 0$ و $3n - 1 > 0$ و منه $\frac{2}{3}u_n + 3n - 1 > 0$ من أجل $n \geq 3$ و منه $u_{n+1} > 0$ من أجل كل $n \geq 3$ و

منه $P(n+1)$ صحيحة ($n \geq 3$) ، ذن و منه $u_n > 0$ من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$.

(ج) لدينا $u_n - 3n + 4 = \frac{2}{3}u_n + 3$ ، لكن $u_n > 0$ و منه $u_n - 3n + 4 > 0$ و منه $u_n > 3n - 4$ من أجل كل

عدد طبيعي $n \geq 4$ ، لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n - 4) = +\infty$ و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

(أ) / 2 $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ من أجل كل عدد طبيعي n و منه (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ و حدها الأول $v_0 = 27$.

(ب) $v_n = 27 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ، $u_n = 27 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 9n - 30$.

$$P_n = e^{71 \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] + \frac{n(n+1)}{2}} \quad (أ) / 3 \quad P_n = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_n + 1 + 2 + \dots + n}$$

(ب) $S_n = (v_0 + 9 \times 0 - 30) + (v_1 + 9 \times 1 - 30) + \dots + (v_n + 9 \times n - 30)$ و منه

$$S_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + 9 \times (1 + 2 + \dots + n) - 30(n+1)$$

$$S_n = 71 \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] + \frac{9n(n+1)}{2} - 30(n+1)$$

حل التمرين الثاني : (04 نقاط)

$$P(C) = \frac{C_3^2 \times C_3^1 + C_2^2 \times C_4^1}{20} = \frac{10}{20} \quad , \quad P(B) = \frac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{C_6^3} = \frac{6}{20} \quad , \quad P(A) = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20} \quad / 1$$

$$P(X = \alpha) = \frac{C_1^1 \times C_3^2}{20} = \frac{3}{20} \quad , \quad X = \{0, 5, 10, \alpha, \alpha + 5, \alpha + 10\} \quad (أ) / 2$$

X	0	5	10	α	$\alpha + 5$	$\alpha + 10$
$P(X = x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{1}{20}$

$$\frac{100 + 10\alpha}{20} = 20 \quad \text{و منه} \quad E(x) = 20 \quad , \quad E(X) = \frac{30}{20} + \frac{30}{20} + \frac{3\alpha}{20} + \frac{6\alpha + 30}{20} + \frac{\alpha + 10}{20} = \frac{100 + 10\alpha}{20} \quad (ج)$$

و منه $\alpha = 30$ DA

حل التمرين الثالث : (04 نقاط)

$$z_C = \sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{4}} \quad , \quad z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad , \quad z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad / 1$$

$$z_C = 1 - i \quad , \quad z_B = -1 + i \quad , \quad z_A = 1 + i$$

$$z = -\frac{1}{3} + i \quad \text{و منه} \quad 3z = 3i - 1 \quad \text{و منه} \quad 1 + i - z = 2 - 2i + 2z \quad \text{و منه} \quad \frac{1 + i - z}{-1 + i - z} = 2e^{i\pi} \quad (أ) / 2$$

(ب) لدينا $z_\Omega = -\frac{1}{3} + i$ و يحقق المعادلة (E) أي $\frac{1+i-z}{-1+i-z} = 2e^{i\pi}$ و منه $\frac{z_A - z_\Omega}{z_B - z_\Omega} = 2e^{i\pi}$ و منه $\frac{z_A - z_\Omega}{z_B - z_\Omega} = 2e^{i\pi}(z_B - z_\Omega)$ و من A صورة B بالتشابه S الذي مركزه Ω و نسبته $k = 2$ و زاويته $\theta = \pi$.
 3 $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ حقيقي موجب تماما و منه $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \pi k$ و $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) > 0$ و منه $\frac{n\pi}{2} = 2\pi k$ و منه $n = 4k$ مع $k \in \mathbb{N}$.

(أ) $z - z_C = \sqrt{2}ki$ و منه $\vec{CM} = k\sqrt{2}\vec{w}$ حيث $\vec{w} = (0, 1)$ و منه (Γ_1) هي نصف المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مع $y > -1$ (نصف المستقيم (CE)) ، حيث $z_E = 1$.
 (ب) $\arg\left(\frac{z_A - z}{z_B - z}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k$ و منه $\arg\left(\frac{z_A - z}{z_B - z}\right)^2 = \pi + 2\pi k$ و منه $(\vec{MA}, \vec{MB}) = \frac{\pi}{2} + \pi k$ و منه (Γ_2) هي الدائرة التي قطرها $[AB]$.

حل التمرين الرابع : (08 نقاط)

1/ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 (ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ ، التفسير : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب عمودي لـ (C_f) .
 2/ (أ) f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $f'(x) = 1 + \frac{e^x}{e^x - 1}$ أي $f'(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x - 1}$ و إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$+\infty$
$2e^x - 1$	-	0	+	+
$e^x - 1$	-	0	-	+
$f'(x)$	+	0	-	+

و منه الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty, -\ln 2]$ ، $]0, +\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]-\ln 2, 0[$.
 جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(-\ln 2)$	$-\infty$	$+\infty$

3/ (أ) لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$ و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.
 (ب) $f(x) = x + \ln\left|e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)\right|$ و منه $\left|1 - \frac{1}{e^x}\right| = \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$ و منه $f(x) = 2x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$ و منه $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 0$ و منه المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.
 (ج) لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 0$ و منه المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.
 (د) $f(x) = x$ إذن $\ln|e^x - 1| = 0$ و منه $|e^x - 1| = 1$ و منه $e^x - 1 = 1$ أو $e^x - 1 = -1$ و منه $e^x = 2$ أو $e^x = 0$ و منه $x = \ln 2$ ، إذن (C_f) قطع (Δ) في النقطة $(\ln 2, \ln 2)$.

هـ) معادلة (T) هي $y = f'(\ln 2)(x - 2) + f(\ln 2)$ ، لدينا $f'(\ln 2) = 3$ و $f(\ln 2) = \ln 2$ و منه $(T) : y = 3x - 2 \ln 2$.

أ) f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ و خاصة على المجال $[0.4, 0.5]$ و $f(0.4) \times f(0.5) < 0$ ، حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.4 < \alpha < 0.5$ أما على المجال $] -\infty, 0[$ المعادلة $f(x) = 0$ لا تقبل حلا لأن $f(x) < 0$. إشارة $f(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f(x)$		-	-	+

ب) لدينا $f(\alpha) = 0$ و منه $\alpha + \ln |e^\alpha - 1| = 0$ و منه $|e^\alpha - 1| = e^{-\alpha}$ لكن $\alpha > 0.4$ و منه $e^\alpha - 1 > 0$ و منه $e^\alpha - 1 = e^{-\alpha}$ و منه $e^\alpha - 1 - \frac{1}{e^\alpha} = 0$ و منه $\frac{e^{2\alpha} - e^\alpha - 1}{e^\alpha} = 0$ و منه $e^{2\alpha} - e^\alpha - 1 = 0$. الرسم في آخر الورقة .

5/ حلول المعادلة $f(x) = |m|x$ بيانها هي فوصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم الذي معادلته $y = |m|x$: هذا المستقيم يشمل المبدأ مهما تغير m ، من البيان نجد :

إذا كان $|m| \leq 1$ أي $-1 \leq m \leq 1$ فإن المعادلة $f(x) = |m|x$ تقبل حلا وحدا موجبا .

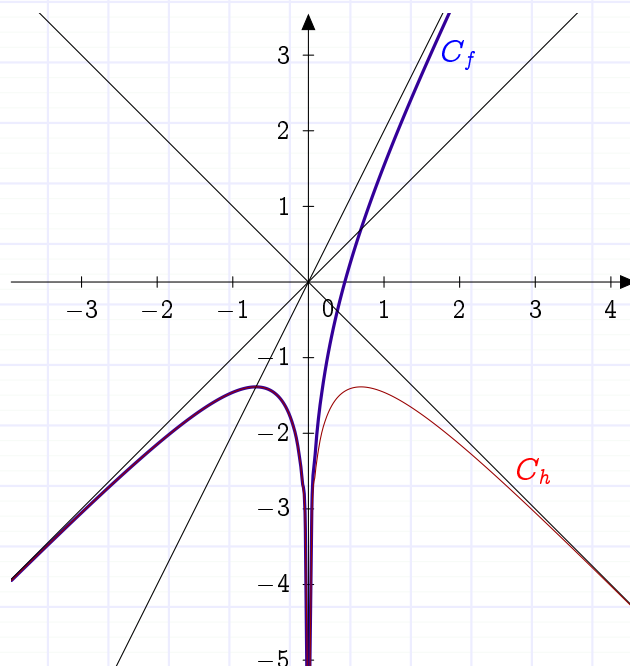
إذا كان $1 < |m| < 2$ أي $m \in]-2, -1[\cup]1, 2[$ المعادلة $f(x) = |m|x$ تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

إذا كان $|m| \geq 2$ أي $m \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ المعادلة $f(x) = |m|x$ تقبل حلا وحدا سالبا .

6/ أ) لدينا $f(-|x|) = -|x| \ln |e^{-|x|} - 1|$ و منه $f(-|x|) = -|x| \ln |e^{-|x|} - 1|$ و منه $f(-|x|) = h(x)$.

، من أجل كل $x \neq 0$ ، $-x \neq 0$ و $h(-x) = f(-|-x|) = f(-|x|) = h(x)$ لأن $|-x| = |x|$ و منه $h(x) = h(-x)$ ، إذن h زوجية .

ب) لدينا من أجل $x \in]-\infty, 0[$ ، $h(x) = f(x)$ و منه (C_h) ينطبق على (C_f) في المجال $] -\infty; 0[$ ، ثم نناظر هذا الجزء بالنسبة إلى حامل محور الترتيب لنتحصل على الجزء الباقي من (C_h) .



حل التمرين الأول : (04 نقاط)

$$u_2 = \sqrt{3}, u_1 = \sqrt{5} \text{ (1/1)}$$

$$P(n): u_n > 1$$

من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = 3$ و $3 > 1$ و منه $P(0)$ صحيحة .

نفرض أن $P(n)$ وثبت أن $P(n+1)$ صحيحة حيث n عدد طبيعي .

$P(n)$ صحيحة معناه $u_n > 1$ و منه $u_n^2 > 1$ و منه $\frac{1+u_n^2}{2} > \frac{2}{2}$ و منه $\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} > 1$ و منه $u_{n+1} > 1$ ، إذن $P(n+1)$ صحيحة .

إذن $u_n > 1$ من أجل كل عدد طبيعي n .

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} - u_n = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{2\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)} \quad \text{ب)}$$

$u_{n+1} - u_n < 0$ من أجل كل عدد طبيعي n و منه (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

(ج) (u_n) محدودة من الأسفل بـ 1 و متناقصة تماما فهي متقاربة نضع : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ ، و منه

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell \text{ و منه } \ell = \sqrt{\frac{1+\ell^2}{2}} \text{ مع } \ell \geq 1 \text{ و منه } \ell^2 = \frac{1+\ell^2}{2} \text{ و منه } \frac{(\ell+1)(\ell-1)}{2} = 0 \text{ و منه } \ell = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \text{ ، إذن } \ell = 1$$

$$2v_{n+1} = 2u_{n+1}^2 - 2 = u_n^2 - 1 = v_n, v_n = u_n^2 - 1 \quad \text{أ) } /2$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n \text{ و منه } (v_n) \text{ هندسية أساسها } q = \frac{1}{2} \text{ و حدها الأول } v_0 = 8$$

$$v_n = v_0 \times q^n \text{ و منه } v_n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n, u_n^2 = v_n + 1 \text{ و منه } u_n = \sqrt{v_n + 1} = \sqrt{8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} \quad \text{ج)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \text{ و منه } (u_n > 0)$$

$$S'_n = 8 + 8 + \dots + 8 = 8(n+1) \text{ و منه } 2^n \times v_n = 8 \text{ لدينا } /3$$

$$S_n = (v_0 + 1) + (v_1 + 1) + \dots + (v_n + 1) \text{ و منه } S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n + n + 1 \text{ و منه}$$

$$S''_n = \ln(v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n), S_n = 16 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + n + 1 \text{ و منه } S_n = v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} + n + 1$$

$$S''_n = \ln \left[(8)^{n+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \right] \text{ و منه}$$

حل التمرين الثاني : (04 نقاط)

$$1/ \alpha \text{ تخيلي صرف معناه } Re(\alpha) = 0, \text{ معناه } 2Re(\alpha) = 0 \text{ معناه } \alpha + \bar{\alpha} = 0 \text{ لأن } \alpha + \bar{\alpha} = 2Re(\alpha)$$

$$Re(.) \text{ يرمز إلى الجزء الحقيقي .}$$

$$2/ f(z) \text{ تخيلي صرف معناه } f(z) + \overline{f(z)} = 0 \text{ و منه } f(z) + \overline{\left(\frac{az}{z-a}\right)} = 0 \text{ و منه } \frac{az}{z-a} + \frac{\bar{a}\bar{z}}{\bar{z}-\bar{a}} = 0$$

$$\text{و منه } \frac{azz - a\bar{a}z + \bar{a}z\bar{z} - a\bar{a}\bar{z}}{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})} = 0 \text{ و منه } z\bar{z}(a + \bar{a}) = a\bar{a}(z + \bar{z}) \text{ لكن } z\bar{z} = |z|^2 \text{ و } a\bar{a} = |a|^2 \text{ و منه}$$

$$|z|^2(a + \bar{a}) = |a|^2(z + \bar{z}) \text{ لكن } |z|^2(a + \bar{a}) = |a|^2(z + \bar{z}) \text{ معناه :}$$

$$|z|^2 \times Re(a) = |a|^2 \times Re(z)$$

$$a = -1 + i/3$$

(أ) $f(z)$ تخيلي صرف معناه $|z|^2 \times \operatorname{Re}(a) = |a|^2 \times \operatorname{Re}(z)$ ، نضع $z = x + iy$ و منه $(x^2 + y^2) \times (-1) = 2x$ و منه $x^2 + y^2 + 2x = 0$ و منه $(x+1)^2 + y^2 = 1$ و منه (Γ) هي الدائرة الت مركزها $(-1, 0)$ و نصف قطرها $r = 1$.

(ب) لدينا $f(z) - a = \frac{a^2}{z-a}$ و منه $\arg(f(z) - a) = \arg\left(\frac{a^2}{z-a}\right) = 2\arg(a) - \arg(z-a)$ و منه $\arg(f(z) - a) = \frac{9\pi}{4}$ معناه $\arg(z-a) = -\frac{3\pi}{4}$ و منه $2\frac{3\pi}{4} - \arg(z-a) = \frac{9\pi}{4}$ و منه $\arg(z-a) = -\frac{3\pi}{4}$

$(\vec{u}, AM) = -\frac{3\pi}{4}$ و منه (Δ) هو نصف المستقيم AC حيث $z_C = -2$ معادلته الديكارتية هي $y = x + 2$ و $x < -1$.

4/ نضع $z = x + iy$ و منه $f(z) = \frac{az}{z-a} = \frac{az(\bar{z}-\bar{a})}{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}$ و منه $f(z) = \frac{az\bar{z} - a\bar{a}z}{|z-a|^2}$ ، لدينا $z-a = (x+1) + i(y-1)$ و منه $|z-a|^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2$ و $z\bar{z} = x^2 + y^2$ و $a\bar{a} = 2$ و منه $f(z) = -\frac{x^2 + y^2 + 2x}{(x+1)^2 + (y-1)^2} + i\frac{x^2 + y^2 - 2y}{(x+1)^2 + (y-1)^2}$ لدينا $x^2 + y^2 + 2x = 0$ و $y = x + 2$ مع $x < -1$ و منه $x^2 + 3x + 2 = 0$ و $x < -1$ و منه $x = -2$ و $y = 0$ ، إذن $B(-2, 0)$.

حل التمرين الثالث : (04 نقاط)

1/ (أ) $P(B) = \frac{C_{n+1}^2 + C_2^2 + C_3^2}{C_{n+6}^2} = \frac{10 + n^2 + n}{n^2 + 11n + 30}$ ، $P(A) = \frac{C_n^2 + C_4^2 + C_2^2}{C_{n+6}^2} = \frac{14 + n^2 - n}{n^2 + 11n + 30}$ (ب) $P(A) = \frac{17}{55}$ معناه $\frac{14 + n^2 - n}{n^2 + 11n + 30} = \frac{17}{55}$ و منه $19n^2 - 121n + 130 = 0$ حلول هذه المعادلة في $\mathbb{N}$ هي $n = 5$.

2/ نفرض أن $n = 5$.

(أ) $\alpha, \beta \in \left\{\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\}$.

الجدول الموالي يبين القيم الممكنة لـ $\cos \alpha \cos \beta$.

$\cos \alpha \backslash \cos \beta$	-1	$\frac{1}{2}$	0
-1	1	$-\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
0	0	0	0

و منه القيم الممكنة لـ X هي $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, 1\right\}$.

(ب) $P(X=0) = \frac{27}{55}$ أي $P(X=0) = \frac{C_3^2 + C_3^1 \times C_8^1}{C_{11}^2}$.

x	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1
$P(X=x)$	$\frac{27}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{1}{55}$	$\frac{15}{55}$

$$E(X) = \frac{1 - 24 + 60}{220} = \frac{37}{220}$$

حل التمرين الرابع : (04 نقاط)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ (I)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty \text{ (ب)}$$

$$f'(x) = \frac{(\ln x)^2 + 1}{x(\ln x)^2} \text{ و } f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x(\ln x)^2} \text{ و }]1; +\infty[\text{ المجال } f/2 \text{ قابلة للإشتقاق على}$$

$$f'(x) > 0 \text{ من أجل كل } x \text{ من المجال }]1; +\infty[\text{ و منه } f \text{ متزايدة تماما على المجال }]1; +\infty[.$$

جدول التغيرات :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] = 0 \text{ و } (C_f) \text{ و } (\Gamma) \text{ متقاربان عند } +\infty .$$

$$f(x) - \ln x = -\frac{1}{\ln x} < 0 \text{ و }]1; +\infty[\text{ المجال } (C_f) \text{ يقع تحت } (\Gamma) \text{ على المجال }]1; +\infty[.$$

$$(T_a) \text{ معادلته } y = f'(a)(x - a) + f(a) \text{ ، يشمل المبدأ معناه } 0 = f'(a)(-a) + f(a) \text{ و منه}$$

$$f(a) - af'(a) = 0 .$$

$$g(x) = 0 \text{ معناه } \ln x - \frac{1}{\ln x} + \frac{1 + (\ln x)^2}{(\ln x)^2} = 0 \text{ و منه } \frac{(\ln x)^2 - (\ln x) - 1 - (\ln x)^2}{(\ln x)^2} = 0 \text{ و منه}$$

$$(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - (\ln x) - 1 = 0 .$$

$$g(x) = 0 \text{ و } (\ln x)^3 - (\ln x)^2 - (\ln x) - 1 = 0 \text{ لهما نفس الحلول .}$$

$$u'(t) = 3t^2 - 2t - 1 \text{ و إشارة } u'(t) \text{ كما يلي :}$$

t	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
$u'(t)$		+	0	-

$$u \text{ متزايدة تماما على المجالين }]-\infty; -\frac{1}{3}[\text{ و }]1; +\infty[\text{ و متناقصة تماما على المجال }]-\frac{1}{3}; 1[.$$

جدول التغيرات :

t	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$u'(t)$		+	0	-
$u(t)$	$-\infty$	$f(-\frac{1}{3})$	$f(1) = -1$	$+\infty$

$$(ب) \text{ الدالة } u \text{ مستمرة و متزايدة تماما على المجال }]1; +\infty[\text{ و }]-1; +\infty[\text{ و منه حسب مبرهنة القيم}$$

$$u(t) = 0 \text{ تقبل حلا وحيدا } \alpha \text{ ، أما على المجال }]-\infty; 1[\text{ المعادلة } u(t) = 0 \text{ لا تقبل حلا لأن}$$

$$u(t) < 0 \text{ و منه } u \text{ تنعدم مرة واحدة على } \mathbb{R} .$$

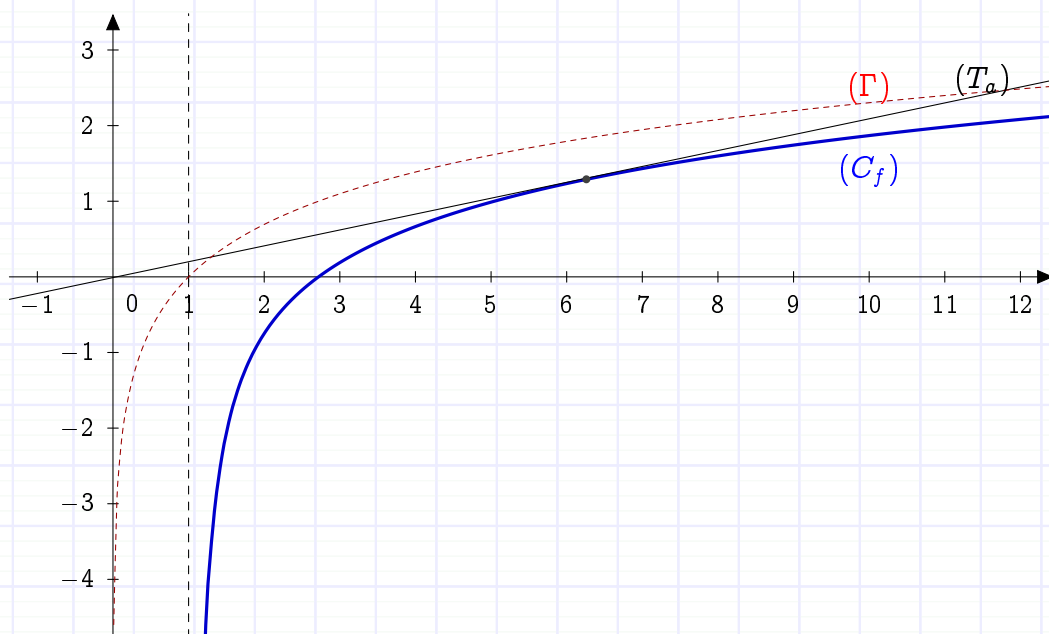
(ج) بوضع $t = \ln x$ تصبح المعادلة $u(t) = 0$ هي $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - (\ln x) - 1 = 0$ لها حل وحيد a و منه المعادلة $g(x) = 0$ لها حل وحيد a أي $f(a) - f'(a)a = 0$ ، إذن يوجد مماس وحيد لـ (C_f) يمر من المبدأ .
(د) لدينا $u(1.83) \times u(1.84) < 0$ و منه $1.83 < \alpha < 1.84$.

(III) 1/ الرسم في آخر الورقة

2/ حلول المعادلة $f(x) = mx$ بيانيا هي فوصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم الذي معادلته : $y = mx$ هذا المستقيم يشمل المبدأ مهما تغير m ، من البيان نجد :

إذا كان $m > \frac{1 + \alpha^2}{e^\alpha \alpha^2}$ المعادلة $f(x) = mx$ لا تقبل حلا .

إذا كان $m \leq \frac{1 + \alpha^2}{e^\alpha \alpha^2}$ المعادلة $f(x) = mx$ تقبل حلا واحدا موجبا .



بالتوفيق في إمتحان شهادة البكالوريا ، التركيز و الثقة في النفس عاملان أساسيان في النجاح



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين :
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{R}$ بعدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n + 4}$.

أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 1$.

ب. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها .

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

أ. أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ ثم أحسب حدها الأول v_0 .

ب. عبر عن v_n و u_n بدلالة n ، و أحسب من جديد $\lim u_n$.

(3) أحسب بدلالة n ، المجموع S_n حيث $S_n = v_{n+1} + v_{n+2} + \dots + v_{n+2021}$ ثم استنتج بدلالة n ،

المجموع S'_n حيث : $S'_n = \frac{1}{u_{n+1} + 2} + \frac{1}{u_{n+2} + 2} + \dots + \frac{1}{u_{n+2021} + 2}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

إناء به 5 كريات متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس : 2 كرية خضراء و 3 كريات حمراء .

(1) نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتان من الإناء . نرمز بـ X إلى المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الكريات الخضراء المسحوبة .

أ. تحقق أن $p(X = 0) = \frac{3}{10}$ ثم عين قانون احتمال X ثم أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

ب. أحسب احتمال الحادثة A : " الكريتان المسحوبتان من نفس اللون " .

(2) نسحب على التوالي كريتين من الإناء بالطريقة التالية : إذا كانت الكرية

المسحوبة حمراء نعيدها إلى الإناء ، وإذا كانت الكرية المسحوبة خضراء لا نعيدها

إلى الإناء . نرمز إلى كرية خضراء بالرمز V وإلى كرية حمراء بالرمز R

أ. انقل ثم أكمل شجرة الاحتمالات المقابلة .

ب. احسب احتمال الحادثتين : B : " الكرية المسحوبة الأولى خضراء " . C : " إحدى الكريتين المسحوبتين خضراء " .

ج. بين أن احتمال أن يوجد في الإناء 2 كرية خضراء هو $\frac{9}{25}$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

$$I \text{ عين العددين المركبين } z_1 \text{ و } z_2 \text{ حيث : } \begin{cases} z_1 + iz_2 = \sqrt{3} + i \\ 2iz_1 - z_2 = 2i\sqrt{3} \end{cases}$$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A = \sqrt{3} - i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = 2i$.

(1) بين أن النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 2 ثم مثل النقط A ، B و C

(2) تحقق أن $\frac{z_A}{z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ثم استنتج طبيعة المثلث OAB واحسب مساحته .

(3) عين z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A;2), (B;-2), (C;1)\}$

(4) عين (Γ_1) مجموعة النقط M التي لاحقتها z حيث: $\|2\overline{MA} - 2\overline{MB} + \overline{MC}\| = 2$

(5) (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z حيث : $\arg(z + 2i) = \frac{\pi}{3}$.

تحقق أن النقطة B تنتمي إلى (Γ_2) ثم عين المجموعة (Γ_2) .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x + (x-1)e^{2x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. أ. أثبت أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$.

ب. أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) .

3. بين أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = 1 + (2x-1)e^{2x}$

4. إليك جدول تغيرات الدالة f' الدالة المشتقة للدالة f .

أ. برر أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين إحداثياتها

ب. حدد حسب قيم x إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات

الدالة f

5. أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α . برر أن $0,8 < \alpha < 0,9$.

6. بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) ثم أكتب معادلة (T) . أرسم (C_f) ، (Δ) و (T) .

7. m وسيط حقيقي ، ناقش بيانها حسب قيم m عدد حلول المعادلة $me^{-2x} - x + 1 = 0$.

انتهى الموضوع الأول



الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n < 4$.
2. أ. تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 3u_n + 4}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$.
ب. استنتج اتجاه تغير (u_n) ثم برر لماذا (u_n) متقاربة .
3. أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$.
ب. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq 4 - u_n \leq \frac{1}{2^n}(4 - u_0)$.
ج. استنتج نهاية (u_n) .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(I) يحتوي كيس على 10 قريصات متماثلة : 7 بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 ، 3 و 3 سوداء تحمل الأرقام 1 ، 4 ، 4 . نسحب في آن واحد قريصتين من هذا الكيس و نعتبر الحوادث :

- A : " الحصول على قريصتين من نفس اللون " .
B : " الحصول على قريصتين تحملان رقمين مختلفين " .
C : " مجموع الرقمين اللذين تحملهما القريصتان المسحوبتان يساوي 5 " .
أ - بين أن احتمال الحادثة B يساوي $\frac{4}{5}$ ثم أحسب احتمال كل من الحادثة A والحادثة C .

- ب - أحسب احتمال الحصول على قريصتين من نفس اللون و تحملان رقمين مختلفتين .
ج - استنتج احتمال الحصول على قريصتين من نفس اللون أو تحملان رقمين مختلفتين .

(II) نضيف إلى الكيس 2 قريصة حمراء . الكيس يحوي إذن 12 قريصة . نسحب الآن 3 قريصات في آن واحد وليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الألوان المحصل عليها .
أ - برر أن قيم المتغير العشوائي X هي : 1 ؛ 2 ؛ 3 .
ب - بين أن $p(X = 2) = \frac{71}{110}$ ثم عين قانون احتمال المتغير X و احسب أمله الرياضي .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

هذا التمرين هو استبيان متعدد الإجابات ، لكل سؤال 4 أحوبة مقترحة واحد منها صحيح ، المطلوب : تحديد الإجابة الصحيحة مع التبرير . المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \overline{OI}, \overline{OJ})$.

A ، B و C نقط لاحتقاتها $z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ و $z_C = -1 + i\sqrt{3}$.



1. الشكل الجبري للعدد z_A هو : أ) $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ب) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ج) $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ د) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
2. الشكل الأسّي لـ z_C هو : أ) $2e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ب) $-e^{\frac{i\pi}{2}}$ ج) $-2e^{\frac{i\pi}{3}}$ د) $\sqrt{2}e^{\frac{2i\pi}{3}}$
3. لاحقة النقطة D بحيث يكون O مرجح الجملة $\{(A;1), (B;-1), (D;1)\}$:

- أ) $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ب) $-1 + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})i$ ج) $1 + i$ د) $1 + \frac{1}{2}i$

1. ليكن n عددا طبيعيا، العدد $(z_B)^n$ حقيقي موجب معناه n من الشكل :

- أ) $4k$ ب) $4k + 1$ ج) $8k + 4$ د) $8k$ ($k \in \mathbb{N}$)

5. مجموعة النقط M التي لاحقتها z حيث : $(z + 1 - i\sqrt{3})(\bar{z} + 1 + i\sqrt{3}) = 4$ هي :

- أ) دائرة ب) نقطة ج) مستقيم د) قطعة مستقيمة

التمرين الرابع: (07 نقاط)

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. أثبت أن : - إذا كان $x > 1$ فإن : $x^2 - 1 + \ln x > 0$.

- إذا كان $0 < x < 1$ فإن : $x^2 - 1 + \ln x < 0$.

2. أ. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$.

ج. شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. أ. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب. أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

ج. بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

4. أنشئ المستقيمين (Δ) ، (T) والمنحني (C_f) .

5. g الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ $g(x) = x - \frac{\ln|x|}{x}$.

أ. بين أن الدالة g فردية ثم باستعمال المنحني (C_f) ارسم المنحني (C_g) .

6. m وسيط حقيقي ، عين مجموعة قيم m حتى يكون للمعادلة $g(x) = m$ حلين متمايزين .

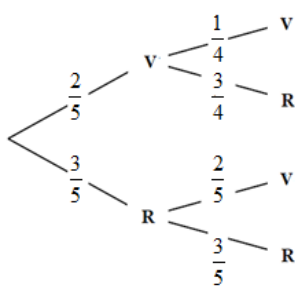
7. h الدالة المعرفة على $]1; +\infty[$ بـ $h(x) = \frac{x^2 - 1 - \ln(x-1)}{x-1}$.

بين أن $h(x) = f(x-1) + 2$ ، اشرح كيف يمكن رسم المنحني (C_h) انطلاقا من (C_f)

انتهى الموضوع الثاني

الإجابة النموذجية لموضوع اختبار مادة : الرياضيات / الشعبة علوم تجريبية / بكالوريا تجريبية 2021

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)							
المجموع	مجزأة								
4	0.50+0.25	التمرين الأول : 1.أ) البرهان بالتراجع							
	2×0.25	ب) $u_{n+1}-u_n = \frac{-(u_n-1)(u_n+2)}{u_n+4}$ بما أن $0 \leq u_n < 1$ فإن $u_{n+1}-u_n > 0$ إذن (u_n) متزايدة تماما							
	0.25	-استنتاج أن (u_n) متقاربة.							
	0.50	-حساب النهاية : (u_n) متقاربة إذن $\lim u_n = l$ و $\lim u_{n+1} = l$ ومنه l حل للمعادلة $l = 3 - \frac{10}{l+4}$ أي $l = 1$ أو $l = -2$. وبما أن $u_0 = 0$ و (u_n) متزايدة فإن : $l = 1$ أي $\lim u_n = 1$.							
	0.50	2. أ) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$.							
	0.25	ب) عبارة v_n بدلالة n : $v_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ و $u_n = \frac{1+2v_n}{1-v_n} = \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n}$.							
	0.25	حساب $\lim u_n$: لدينا $-1 < \frac{2}{5} < 1$ إذن : $\lim \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ ومنه : $\lim u_n = 1$							
	0.5	3. حساب S_n $S_n = v_{n+1} \frac{1-q^{2021}}{1-q} = -\frac{5}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{2021}\right]$							
0.25	استنتاج حساب S'_n حيث : $S'_n = \frac{1}{u_{n+1}+2} + \frac{1}{u_{n+2}+2} + \dots + \frac{1}{u_{n+2021}+2}$ لدينا : $\frac{1}{u_n+2} = \frac{1}{3}(1-v_n)$ إذن :								
0.25	$S'_n = \frac{1}{3}(2021-S_n)$ أي : $S'_n = \frac{1}{3}(1-v_{n+1}) + \frac{1}{3}(1-v_{n+2}) + \dots + \frac{1}{3}(1-v_{n+2021})$								
	0.5	التمرين الثاني : 1. التحقق أن $p(X=0) = \frac{3}{10}$							
	1	قانون احتمال X : $p(X=1) = \frac{C_2^1 \times C_3^1}{10} = \frac{6}{10}$ ، $p(X=2) = \frac{C_2^2}{10} = \frac{1}{10}$							
0.5	<table><tr><td>X_i</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>$p(X=X_i)$</td><td>$\frac{3}{10}$</td><td>$\frac{6}{10}$</td><td>$\frac{1}{10}$</td></tr></table> الأمل الرياضيائي : $E(X) = \frac{4}{5}$.	X_i	0	1	2	$p(X=X_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$
X_i	0	1	2						
$p(X=X_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$						

4		2 أ) الشجرة :
	01	
	2×0.5	ب) $p(B) = \frac{2}{5}$ ، $p(C) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{27}{50}$
	0.5	ج) احتمال أن يبقى في الإناء 2 كرية خضراء يعني سحب كرتين حمراء : $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$
5	2×0.5	التمرين الثالث : I) $z_1 = \sqrt{3} - i$ و $z_2 = 2$
	0.75+1	II) 1. تبين أن النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 2 . تمثيل النقط
	0.25 0.25+0.5	2. التحقق أن $\frac{z_A}{z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ - استنتاج طبيعة المثلث - مساحة المثلث تحقق أن $S_{ABC} = \sqrt{3} u.a$
	0.25	3. $z_D = -2i$.
	0.50	4. (Γ_1) هي الدائرة التي مركزها $D(0; -2)$ ونصف قطرها 2.
	0.25 0.25	5. التحقق أن B تنتمي إلى (Γ_2) $\arg(z + 2i) = \frac{\pi}{3}$. معناه $\arg(z - z_D) = \frac{\pi}{3}$ أي $(\vec{u}; \overrightarrow{DM}) = \frac{\pi}{3}$ إذن (Γ_2) هي نصف المستقيم $[DB)$ باستثناء النقطة D
7	0.25+0.5	التمرين الرابع : 3. 1. تبين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ثم حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
	0.5	2. أ. إثبات أن $y = x$: (Δ) مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$
	0.5	ب. الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)
	0.5	3. بين أن من أجل كل x من $\mathbb{N}$: $f'(x) = 1 + (2x - 1)e^{2x}$
	2×0.25	4. تبرير أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف I (بأي طريقة) تعيين إحداثيات I : $I(0; f(0))$ أي $I(0; -1)$
	2×0.5	ب. إشارة $f(x)$ ؛ جدول التغيرات
	0.5	5. إثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α . تبرير أن $0,8 < \alpha < 0,9$.
	0.50 0.25 1	6. تبين أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) معادلة المماس (T) : - رسم (C_f) ، (Δ) و (T)
		7. المناقشة البيانية حسب قيم m لعدد حلول المعادلة $me^{-2x} - x + 1 = 0$.

0.25	• $f(x) = x + m$ معناه $me^{-2x} - x + 1 = 0$
3×025	• $m < -\frac{e}{2}$ ليس للمعادلة حلا . • $m = -\frac{e}{2}$ أو $m \geq 1$ للمعادلة حل واحد • $-\frac{e}{2} < m < 1$ حلين

التصحيح المفصل للإمتحان التجريبي

الموضوع الثاني

التمرين الأول (04 نقاط):

- 1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.
2. نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n < 4$.
- من أجل $n = 0$ ، $u_0 = 0$ و $0 \leq u_0 < 4$ إذن الخاصية محققة من أجل $n = 0$ 0.25
- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n أي : $0 \leq u_n < 4$ و نبرهن صحة الخاصية من أجل $n + 1$.
- أي : $0 \leq u_{n+1} < 4$
- لدينا : $0 \leq u_n < 4$ ، نضرب أطراف المتباينة في 3 نجد : $0 \leq 3u_n < 12$ نضيف 4 نجد :

$$0.5 \dots\dots\dots 0 \leq u_{n+1} < 4 \text{ و بالتالي } 0 \leq 2 \leq \sqrt{3u_n + 4} < 4 \text{ و منه } 4 \leq 3u_n + 4 < 16$$

$$2. \text{ أ. نتحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 3u_n + 4}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$$

$$0.75 \dots\dots\dots u_{n+1} - u_n = \sqrt{3u_n + 4} - u_n = \frac{(\sqrt{3u_n + 4} - u_n)(\sqrt{3u_n + 4} + u_n)}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n} = \frac{3u_n + 4 - u_n^2}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$$

$$\text{لدينا : } u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 4 - u_n^2}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n} = \frac{-(u_n + 1)(u_n - 4)}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$$

بما أن $0 \leq u_n < 4$ فإن : $1 \leq u_n + 1 \leq 5$ و $-4 \leq u_n - 4 \leq 0$ و $\sqrt{3u_n + 4} + u_n > 0$

إذن : $u_{n+1} - u_n < 0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة تماما 0.5

بما أن (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى فهي متقاربة 0.25

$$4. \text{ أ. نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$$

$$\text{لدينا : } 4 - u_{n+1} = 4 - \sqrt{3u_n + 4} = \frac{(4 - \sqrt{3u_n + 4})(4 + \sqrt{3u_n + 4})}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} = \frac{16 - 3u_n - 4}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} = \frac{3(4 - u_n)}{4 + \sqrt{3u_n + 4}}$$

لدينا أيضا : $0 \leq u_n < 4$ و منه : $4 \leq 3u_n + 4 < 16$ و $2 \leq \sqrt{3u_n + 4} < 4$ و بالتالي :

إذن $6 \leq 4 + \sqrt{3u_n + 4} \leq 8$: $\frac{1}{8} \leq \frac{1}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \leq \frac{1}{6}$ و بما أن $4 - u_n \geq 0$ إذن :

$$0.75 \dots\dots\dots 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n) \text{ ومنه } \frac{3(4 - u_n)}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \leq \frac{3(4 - u_n)}{6}$$

ت. التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq 4 - u_n \leq \frac{1}{2^n}(4 - u_0)$ ،

لدينا : $4 - u_{n-2} \leq \frac{1}{2}(4 - u_{n-3})$ ، $4 - u_{n-1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_{n-2})$ ، $4 - u_n \leq \frac{1}{2}(4 - u_{n-1})$ ،

بالضرب طرفا إلى طرف نجد :

$$(4 - u_n)(4 - u_{n-1})(4 - u_{n-2}) \dots (4 - u_1) \leq \frac{1}{2}(4 - u_{n-1}) \frac{1}{2}(4 - u_{n-2}) \frac{1}{2}(4 - u_{n-3}) \dots \frac{1}{2}(4 - u_0)$$

نختزل الأطراف المتشابهة نجد : $0.5 \dots\dots\dots 0 \leq (4 - u_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - u_0)$

ح. استنتج نهاية (u_n) :

بما أن : $0 \leq (4 - u_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n 4$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n 4 = 0$ و منه حسب النهايات بالمقارنة $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4 - u_n) = 0$

و بالتالي : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$ 0.5

التمرين الثاني (04 نقاط):

(I) يحتوي كيس على 10 قريصات متماثلة : 7 بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 ، 3 و 3 سوداء تحمل

الأرقام 1 ، 4 ، 4 . نسحب في آن واحد قريصتين من هذا الكيس و نعتبر الحوادث :

A : " الحصول على قريصتي من نفس اللون " .

B : " الحصول على قريصتين تحملان رقمين مختلفين " .

C : " مجموع الرقمين اللذين تحملهما القريصتان المسحوبتان يساوي 5 " .

ت نبين أن احتمال الحادثة B يساوي $\frac{4}{5}$: لدينا $\bar{B}$: " الحصول على قريصتين تحملان رقمين متشابهين "

$$0.5 \dots\dots\dots p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - \frac{C_4^2 + C_2^2 + C_2^2 + C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{36}{45} = \frac{4}{5}$$

. حساب احتمال كل من الحادثة A والحادثة C :

$$0.5 \dots\dots\dots p(A) = \frac{C_7^2 + C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$$

$$0.5 \dots\dots\dots p(C) = \frac{C_4^1 \times C_2^1 + C_2^1 \times C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}$$

ب- حساب احتمال الحصول على قريصتين من نفس اللون و تحملان رقمين مختلفتين .

$$0.5 \dots\dots\dots p(A \cap B) = \frac{C_3^1 \times C_2^1 + C_3^1 \times C_2^1 + C_2^1 \times C_2^1 + C_2^1 \times C_1^1}{C_{10}^2} = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}$$

ج- استنتاج احتمال الحصول على قريصتين من نفس اللون أو تحملان رقمين مختلفتين :

$$0.5 \dots\dots\dots p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{8}{15} + \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{14}{15}$$

(II) نضيف إلى الكيس 2 قرصه حمراء. الكيس يحوي إذن 12 قرصة . نسحب الآن 3 قرصات في آن واحد وليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الألوان المحصل عليها .
 أ. تبرير أن قيم المتغير العشوائي X هي : 1 ؛ 2 ؛ 3 :

قيم X هي: $X = 1$ في حالة ظهور 3 كرات بيضاء BBB أو 3 كرات سوداء NNN ، $X = 2$ ظهور لونين أسود و أبيض: NNB أو BBN أو أبيض و أحمر: BBR أو BRR أو أسود و أحمر: NNR أو NRR ، $X = 3$ ظهور 3 ألوان أبيض ، أسود و أحمر: BNR 0.5

ب. بيان أن $p(X = 2) = \frac{71}{110}$

0.25 $p(X = 2) = \frac{C_7^2 \times C_5^1 + C_3^2 \times C_9^1 + C_2^2 \times C_{10}^1}{C_{12}^3} = \frac{142}{220} = \frac{71}{110}$

. قانون احتمال المتغير X : $p(X = 3) = \frac{C_7^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_{12}^3} = \frac{42}{220} = \frac{21}{110}$ ، $p(X = 1) = \frac{C_7^3 + C_{10}^3}{C_{12}^3} = \frac{36}{220} = \frac{9}{55}$

0.5

X	1	2	3
$p(X)$	$\frac{9}{55}$	$\frac{71}{110}$	$\frac{21}{110}$

0.25 $E(X) = 1 \times \frac{9}{55} + 2 \times \frac{71}{110} + 3 \times \frac{21}{110} = \frac{223}{110} = 2.027$ حباب أملة الرياضي:

التمرين الثالث (05 نقاط):

هذا التمرين هو استبيان متعدد الإجابات ، لكل سؤال 4 أحوبة مقترحة واحد منها صحيح ، المطلوب : تحديد الإجابة الصحيحة مع التبرير . المستوي المركب منسوب إلى معلم متعاقد ومتجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

A ، B و C نقط لاحقاتها $z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ و $z_C = -1 + i\sqrt{3}$.

1. الشكل الجبري للعدد z_A هو:

0.75 لدينا : $z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

0.25 إذن الإجابة الصحيحة هي ج) $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2. الشكل الأسّي لـ z_C هو:

لدينا : $z_C = -1 + i\sqrt{3}$ ، $|z_C| = \sqrt{1+3} = 2$ و $\arg(z_C) = \arg(-1 + i\sqrt{3}) = \theta$ بحيث

0.75 $z_C = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$: وبالتالي $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ و $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ و $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

0.25 إذن الإجابة الصحيحة هي: أ) $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

3. لاحقة النقطة D بحيث يكون O مرجح الجملة $\{(A;1), (B;-1), (D;1)\}$ هي:

لدينا : $z_O = \frac{z_A - z_B + z_D}{1-1+1}$ و منه $z_D = z_O - z_A + z_B$ إذن $z_D = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$

0.25 ومنه : $z_D = -1 + i\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ 0.75 إذن الإجابة الصحيحة هي ب) $-1 + \frac{1}{2}(1-\sqrt{3})i$

4. ليكن n عددا طبيعيا، العدد $(z_B)^n$ حقيقي موجب معناه n من الشكل :

الشكل الأساسي لـ z_B هو : $z_B = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ ، $\arg(z_C) = \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \alpha$ و $|z_B| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ بحيث :

$$(z_B)^n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$$

و $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ إذن $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ و بالتالي $z_B = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}$ و منه $(z_B)^n =$

$(z_B)^n$ حقيقي موجب معناه : $\frac{n\pi}{4} = 2k\pi$ و منه : $n = 8k$ حيث k عدد صحيح 0.75

إذن الإجابة الصحيحة هي: د) $8k$ 0.25

5. مجموعة النقط M التي لاحتتها z حيث : $(z + 1 - i\sqrt{3})(\bar{z} + 1 + i\sqrt{3}) = 4$ هي :

لدينا : $(z + 1 - i\sqrt{3})(\bar{z} + 1 + i\sqrt{3}) = (z + 1 - i\sqrt{3})(\overline{z + 1 - i\sqrt{3}}) = |z + 1 - i\sqrt{3}|^2$
 $(z + 1 - i\sqrt{3})(\bar{z} + 1 + i\sqrt{3}) = |z - (-1 + i\sqrt{3})|^2 = |z - z_C|^2 = 4$

معناه $MC^2 = 4$ و منه $MC = 2$ إذن مجموعة النقط هي دائرة ذات المركز C و نصف القطر 2 0.75

إذن الإجابة الصحيحة هي: أ) دائرة 0.25

التمرين الرابع (07 نقاط):

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

4. أثبات أن : - إذا كان $x > 1$ فإن : $x^2 - 1 + \ln x > 0$.

- إذا كان $0 < x < 1$ فإن : $x^2 - 1 + \ln x < 0$.

نضع : لتكن k الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $k(x) = x^2 - 1 + \ln x$

ندرس إتجاه تغير الدالة $k(x) = 2x + \frac{1}{x}$ ، من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ $k'(x)$ موجبة و منه

الدالة k متزايدة تماما على $]0; +\infty[$ 0.25 و $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = -\infty$

x	0	1	$+\infty$
$k'(x)$		+	
$k(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

إذن جدول تغيرات الدالة k : 0.25

و لدينا $k(1) = 0$

إذن $k(x)$ موجبة على $]0; 1[$ و سالبة على

$[1; +\infty[$ و بالتالي : إذا كان $x > 1$ فإن : $x^2 - 1 + \ln x > 0$ و إذا كان $0 < x < 1$ فإن : $x^2 - 1 + \ln x < 0$... 0.5

2. أ. حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$: $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x - \frac{\ln x}{x} \right] = +\infty$ 0.25

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل حامل محور الترتيب مستقيم مقارب 0.25

حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$ 0.25

ب. نرين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$ ،

لدينا : $f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = 1 - \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$ 0.5

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x^2 - 1 + \ln x)$ إذن f متناقصة تماما على المجال $]0; 1]$ و متزايدة تماما

على $[1; +\infty[$ 0.25

ج. شئلي جدول تغيرات الدالة f : 0.25

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

3. أ. نرين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$:

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \frac{\ln x}{x} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$ 0.25

و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب. دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ) : 0.5

لدينا : $f(x) - x = -\frac{\ln x}{x}$ بما أن $x > 0$ إذن إشارة $f(x) - x$ من إشارة $-\ln x$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - x$		0	-
الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)	فوق (C_f) و (Δ)	يتقاطعان في النقطة $(1; 1)$	تحت (C_f) و (Δ)

ج. نرين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) : معناه $f'(x) = 1$... 0.25 و منه $\frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} = 1$

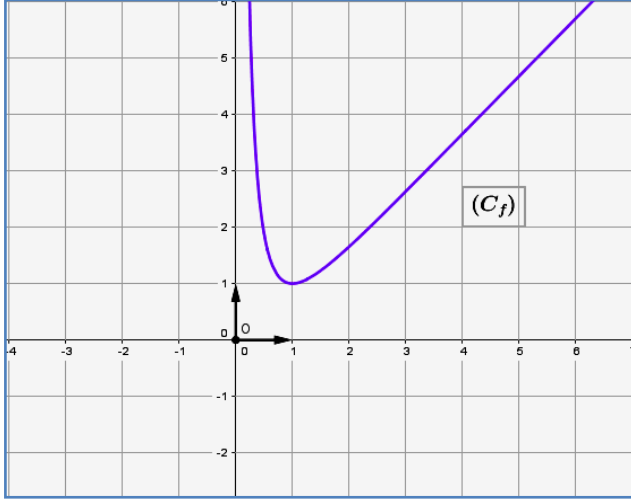
1

و بالتالي : $x^2 - 1 + \ln x = x^2$ و منه $\ln x = 1$ إذن $x = e$ 0.25

كتابة معادلة المماس (T) :

0.25 (T): $y = f'(e)(x - e) + f(e) = (x - e) + e - \frac{1}{e} = x - \frac{1}{e}$

0.5....



4. إنشاء المستقيمين (Δ) ، (T) والمنحنى (C_f)

5. الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ

$$g(x) = x - \frac{\ln|x|}{x}$$

أ. نبين أن الدالة g فردية:

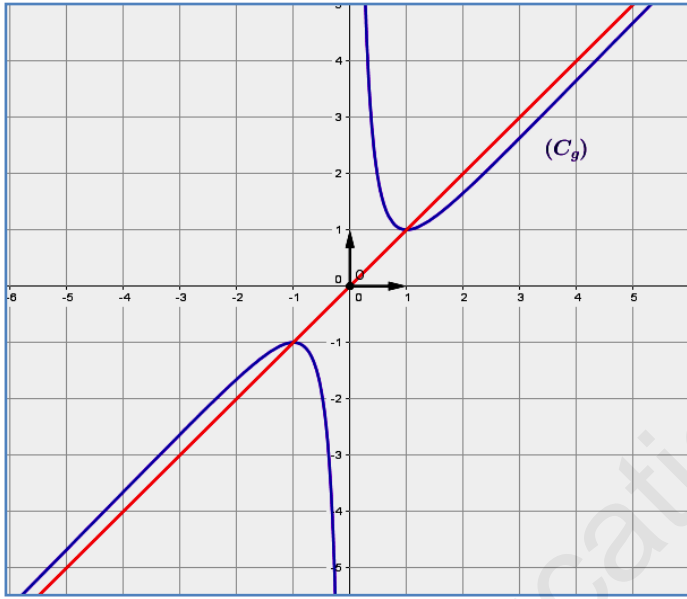
$\mathbb{R} - \{0\}$ متناظر بالنسبة لـ 0

$$g(-x) = -x - \frac{\ln|-x|}{-x} = -x + \frac{\ln|x|}{x}$$

$$: \text{إذن } g(-x) = -\left(x - \frac{\ln|x|}{x}\right) = -g(x)$$

0.5..... دالة فردية g

0.5 لإنشاء (C_g)



لدينا (C_g) منطبق على (C_f) على $]0; +\infty[$ و نظير

(C_f) بالنسبة للمبدأ 0 على $]-\infty; 0[$

8. m وسيط حقيقي ، عين مجموعة قيم m حتى يكون للمعادلة $g(x) = m$ حلين متميزين .

0.5... $m \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ إذا كان $g(x) = m$ حلين متميزين

7. h الدالة المعرفة على $]1; +\infty[$ بـ $h(x) = \frac{x^2 - 1 - \ln(x-1)}{x-1}$

إثبات أن $h(x) = f(x-1) + 2$

$$f(x-1) + 2 = (x-1) - \frac{\ln(x-1)}{x-1} + 2 = \frac{(x-1)^2 - \ln(x-1) + 2(x-1)}{x-1} = \frac{x^2 - 2x + 1 - \ln(x-1) + 2x + 2}{x-1}$$

0.5..... $f(x-1) + 2 = \frac{x^2 - 1 - \ln(x-1)}{x-1} = h(x)$ و منه

. شرح كيف يمكن رسم المنحني (C_h) انطلاقاً من (C_f) : بما أن $h(x) = f(x-1) + 2$ إذن (C_h) هو صورة

(C_f)

بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 0.25

انتهى حل الموضوع الثاني

ency-education.com/exams

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط) : : اختر الإجابة الصحيحة مع التعليل .

1. f دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = 3 \ln^2(x+1) + \ln(x+1) - 4$

$f'(x)$ تساوي : (a) $\frac{6 \ln(x+1)+1}{(x+1)}$ (b) $\frac{6 \ln(x+1)-1}{(x+1)}$ (c) $6 \ln(x+1) + \frac{1}{x+1}$

2. مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \leq 0$ هي :

(a) $[e^{-\frac{4}{3}} - 1, e + 1]$ (b) $]-\infty, e - 1]$ (c) $[e^{-\frac{4}{3}} - 1, e - 1]$

3. θ عدد حقيقي ، الشكل المثلثي للعدد المركب : $z = -3(\sin \theta - i \cos \theta)$ هو :

(a) $3[\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) + i \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)]$ (b) $3[\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) + i \sin(\frac{\pi}{2} + \theta)]$ (c) $3[\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta) + i \sin(\frac{3\pi}{2} - \theta)]$

4. A, B, M نقط من المستوي لواحدهم $z_A = -1 + i, z_B = -1$ و z . (T) مجموعة النقط M بحيث :

$$\arg(\bar{z} + 1 + i) = \frac{\pi}{2}$$

(T) هي : (a) القطعة المستقيمة $[AB]$ (b) الدائرة ذات القطر $[AB]$ (c) نصف المستقيم $]AB]$

التمرين الثاني (04 نقاط) : (v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة معرفة على N بـ $\begin{cases} v_3 - v_1 = -\frac{16}{27} \\ v_1 \times v_2 \times v_3 = \frac{8}{729} \end{cases}$

1. أحسب الحد v_2 ، ثم الأساس q .

2. أحسب v_0 ، ثم جد عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) بدلالة n .

* نعتبر المتتاليتين (u_n) و (w_n) المعرفتين على N بـ $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} \\ u_0 = 10 \end{cases}$ ، $w_n = \alpha u_n + 2\alpha - 1$ ،

3. أوجد قيمة α حتى تكون (w_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$.

4. نضع $\alpha = \frac{1}{4}$. أكتب w_n بدلالة n ، ثم استنتج بدلالة n عبارة u_n . أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

5. أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = (\ln(w_{2021}) + e) + (\ln(w_{2022}) + e) + \dots + (\ln(w_{2021+n}) + e)$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

يحتوي صندوق على 5 كرات بيضاء مرقمة 0, 0, 2, 4, 6 و 3 كرات خضراء مرقمة 1, 2, 8 و 4 كرات سوداء مرقمة 0, 0, 4, 9 ؛
نفرض جميع الكرات مُتماثلة و لا نفرق بينها عند اللمس .

نسحب عشوائيا في آن واحد 4 كرات من هذا الصندوق و نعتبر الأحداث التالية :

A « الكرات المسحوبة من نفس اللون » C « على الأقل كرة تحمل رقم مختلف عن الكرات الأخرى »

B « ظهور الألوان الثلاثة » D « الحصول على أرقام هي حدود مُتتابة لِمُتتالية حَسَابِيَّة أَساسها 2 » .

1. أُم أَحسب إِحتمال الحوادث : A ، B ، C و D ، ثم أَحسب $p(A \cap D)$ ، ثم إِستنتج $p(\overline{A \cup D})$.

2. المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة أصغر الأعداد المحصل عليها.

تأكّد أنّ $p(X=0) = \frac{85}{99}$ ، ثمّ عرف قانون إِحتمال المتغير العشوائي X ، ثمّ أَحسب أمله الرياضي .

3. نُعيد الصندوق إلى وَضْعِهِ الأَوَّل ، ثم نسحب على التوالي و بدون إرجاع أربع كرات من هذا الصندوق لنشكل عَدَد مكون من أربع أرقام .

و نعتبر الحادثة : F " الحصول على عَدَد زوجي و أكبر تَمَامًا من 700 " . أَحسب $p(F)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = \ln(x+2) - \ln(x) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$.

1. أَحسب كلاً من : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2. أُم أدرس إِتجاه تغير الدالة g ، ثمّ شكل جدول تغيراتها .

ب) إِستنتج إشارة g(x) من أجل كل $x \in]0; +\infty[$.

II. لتكن الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $\begin{cases} f(x) = x \ln(\frac{x+2}{x}) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}; x > 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

(C) هو المنحنى المُمثل لِلدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و المتجانس $(\vec{i}; \vec{j}; o)$.

1. أدرس قَابِلِيَّة إِشتقاق الدالة f عند 0 ؟ فسر النتيجة هندسيًا .

2. بَرِهْن أَنَّ $f'(x) = g(x)$ ثمّ إِستنتج إِتجاه تغير الدالة f .

3. أُم برهن أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(\frac{x+2}{x}) = 2$ (ضع $X = \frac{2}{x}$) ، ثمّ إِستنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ب) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = \frac{x}{4} + \frac{5}{2}$ مقارب مَائِل لـ (C) بِجَوَار $+\infty$.

4. شكل جدول تَغْيِرَات الدالة f ، ثم أرسم كلاً من (Δ) و (C) . (تعطى (C) تحت (Δ))

5. لتكن الدالة h المعرفة على $[\ln 2, +\infty[$ بـ : $h(x) = (e^x - 2) \ln(\frac{e^x}{e^x - 2}) + \frac{e^x - 2}{4}$.

عين العَدَدَيْن الحَقِيقِيَيْن a و b بحيث : $h(x) = f(e^x + a) + b$. ثمّ شكل جدول تَغْيِرَات الدالة h .

إِنتَهَى المَوْضُوع الأَوَّل

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

$$\{ \begin{array}{l} u_0 = \frac{5}{2} \\ u_{n+1} = \frac{-2}{u_n - 4} + 1 \end{array} : \text{ كما يلي } \mathbb{N}$$

1. أم برهن بالتراجع أن : $2 < u_n < 3$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؛ ثم استنتج أن $u_n \leq \frac{5}{2}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ج) برر تقارب المتتالية (u_n) .

2. تحقق أن : $0 < u_{n+1} - 2 \leq \frac{2}{3}(u_n - 2)$ لكل n من $\mathbb{N}$ ؛ ثم بين أن $0 < u_n - 2 \leq \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^n$ ؛ استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3. (V_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = \frac{2-u_n}{3-u_n}$.

أ) برهن أن (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول V_0 .

ب) حدّد عبارة V_n بدلالة n ؛ ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n و أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ بطريقة ثانية .

4. أحسب المجاميع التالية : $S = \frac{1}{u_0-3} + \frac{1}{u_1-3} + \dots + \frac{1}{u_n-3}$ و $T = eV_0 + e^2V_1 + e^3V_2 + \dots + e^{2021}V_{2020}$

التمرين الثاني : (05 نقاط)

يحتوي صندوق غير شفاف على 9 قريصات لافترق بينها عند اللمس . منها 4 قريصات حمراء تحمل الأحرف a, a, b, c ، و

3 قريصات بيضاء تحمل الأحرف a, a, b ؛ و قريصتان سوداء تحملان الأحرف a, c

- نسحب عشوائيًا و بدون إرجاع 3 قريصات من الصندوق ، توضع جنبًا إلى جنب لتشكل كلمة مألوفة .

نعتبر الحدثين التاليين : $A \gg$ القريضة المسحوبة الثانية حمراء $\ll B \gg$ توجد قريضة واحدة فقط تحمل الحرف $b \ll$.

1. أحسب كل من : $p(A), p(B)$ ، ثم برهن أن $p(A \cap B) = \frac{19}{84}$ ، ثم استنتج $p(A \cup B)$.

α عدد طبيعي ، و يلعب لاعب اللعبة التالية : بعد سحب القريصات الثلاث إذا تشكلت كلمة bac فإنه يربح $e^{2\alpha}$ دج ، و

إذا لم تشكل كلمة bac فإنه يخسر e^α دج . X متغير عشوائي يتمثل في الربح الصافي للعبة

2. حدّد قيم X ، ثم تأكد أن $p(x = e^{2\alpha}) = \frac{5}{126}$ ، ثم استنتج قانون احتمال X

3. أوجد أصغر عدد طبيعي α كي تكون اللعبة في صالح اللاعبين .

* نعيد الصندوق إلى وضعه الأول و نسحب منه n كُرّة على التوالي بالارجاع ، n عدد طبيعي أكبر تمامًا من 2 .

4. أحسب u_n احتمال الحصول على كُرّتين بيضاء على الأقل ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. فسّر النتيجة .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z + \sqrt{3} - 3i)(z^2 - 6z + 12) = 0$.

2. ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{u}; \vec{v})$.

- نعتبر النقط A ، B ، و C التي لواحقتها على الترتيب $z_A = 3 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 3 - i\sqrt{3}$ و $z_C = -\sqrt{3} + 3i$.
- أكتب كلاً من z_A و z_C و $\frac{z_C}{z_A}$ على الشكل الأسّي . ، ثم إستنتج طبيعة المثلث OAC .
3. أ) أحسب : $(\frac{z_A}{2\sqrt{3}})^{1442} + (\frac{z_B}{2\sqrt{3}})^{2021}$ (تعطى النتيجة النهائية على الشكل الجبري) .
 ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(\frac{z_A}{2\sqrt{3}})^n$ حقيقي سالب .
4. لتكن النقطة D نظيرة C بالنسبة إلى محور الفواصل . عين z_D ، ثم بين أن المستقيمين (AD) و (BC) متعامدان .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (x+2)e^x - \frac{1}{2}$.

- أدرس اتجاه تغير g ، ثم شكّل جدول تغيراتها .
- برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α ، حيث $-0.9 < \alpha < -0.8$ ، ثم إستنتج إشارة $g(x)$.
- لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^2(e^x - \frac{1}{4})$. (C_f) تمثيلها البياني في $M(0, \vec{i}, \vec{j})$.
 3. أحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 4. بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + \frac{1}{4}x^2] = 0$ ، فسّر النتيجة بيانياً .
- أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (T) حيث $(T) : y = -\frac{1}{4}x^2$.
- برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، فإن $f'(x) = xg(x)$ ، ثم أدرس اتجاه تغيرها ثم شكّل جدول التغيرات .
- أوجد نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل ، ثم إستنتج الوضع النسبي للحنين (C_f) و محور الفواصل .
- أحسب $f(1), f(\frac{3}{2})$ ، ثم أنشئ كل من $(C_f), (T)$. تعطى $f(\alpha) \simeq 0.2$.
- عين بيانياً قيم الوسيط الحقيقي m كي تقبل المعادلة : $f(x) = m^2$ ثلاث حلول متميزة .
- * لتكن h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = x^2(\frac{4-e^{|x|}}{4e^{|x|}})$.
 10. جد علاقة بين $h(x)$ و $f(x)$ ، ثم أرسم (C_h) اعتماداً على (C_f) .

انتهى الموضوع الثاني

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين
الموضوع الأول

التمرين الأول (4.5 نقطة):

صندوق يحتوي على تسع قريصات تحمل الأرقام من 1 إلى 9 لا تفرق بينها عند اللمس، نسحب من الصندوق عشوائيا ثلاث قريصات دفعة واحدة، ونعتبر الحادثتين التالية:

A " القريصات المسحوبة تحمل أرقاما زوجية "

B " القريصات المسحوبة تحمل أرقاما تشكل حدودا متعاقبة من متتالية هندسية متزايدة تماما "

1- أ) احسب $P(A)$ ثم بين أن: $P(B) = \frac{1}{21}$

ب) احسب $P(A \cap B)$ ثم استنتج $P(A \cup B)$.

2- نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب أكبر رقم تحمله القريصات المتبقية في الصندوق

أ) عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عرف قانون احتماله.

ب) احسب $P(|X - 1| \leq 7)$

التمرين الثاني (04 نقطة)

1- أ) تحقق أن: $-16 + 8\sqrt{3} = -4(1 - \sqrt{3})^2$

ب) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة: $z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 8 = 0$

2- نعتبر العدد المركب $z = 1 + \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})$

أ) احسب z^2

ب) احسب طويلة وعمدة z^2 ، ثم أكتبه على الشكل الأسّي.

3- أكتب z على الشكل المثلثي، ثم استنتج قيمتي $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

4- احسب z^6 ، ثم عين قيمة n حتى يكون z^n تخيليا صرفا موجبا.

التمرين الثالث (4.5 نقطة):



g دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x + 2 - 2\sqrt{x}$.
المستوي المزدود بمعلم متعامد متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$
في الشكل المقابل التمثيل البياني للدالة g والمستقيم
معادلته: $y = x$

1- (U_n) متتالية معرفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = g(U_n)$
- عين قيمة الحد الأول U_0 التي من أجلها تكون المتتالية (U_n) ثابتة تماما.

نضع: $U_0 = 6$

2- انقل الرسم على ورقة الإجابة، ثم أنشئ على محور الفواصل الحدود U_0, U_1, U_2 ، ثم خمن تقاربها.

3- أ) أثبت من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ أن: $1 \leq U_n \leq 6$.

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) . ثم استنتج تقاربها واحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$

4- أ) بين من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ أن: $0 \leq U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$

ب) استنتج من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ أن: $0 \leq U_n - 1 \leq 5\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثم تحقق من حساب نهاية المتتالية (U_n)

التمرين الرابع (06.5 نقطة):

الجزء الأول : g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (-x + 2)e^x - 2$

1- ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2- بين أن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلا α حيث: $1.5 < \alpha < 1.6$

3- احسب $g(0)$ ، ثم استنتج من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني : f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(0) = 0$ ومن أجل كل $x \neq 0$: $f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$

C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1- عين نهايتي الدالة f عند: $-\infty$ و $+\infty$.

2- أثبت من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ أن: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(e^x - 1)^2}$

3- عين من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ إشارة f' ، شكل جدول تغيرات الدالة f . (نقبل أن f قابلة للاشتقاق عند 0)

4- تحقق أن: $f(\alpha) = \alpha(2 - \alpha)$

5- ارسم C_f ، ثم ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = f(m)$

الموضوع الثاني

التمرين الأول (04.5 نقطة):

كيس يحتوي على 6 قريصات منها قريصة واحدة خضراء تحمل الرقم 3، وثلاث قريصات بيضاء تحمل كل منها الرقم 2، وقريصتين حمراوين تحملان الرقم 1. يسحب لاعب على التوالي دون ارجاع قريصتين من الكيس، بحيث يتحصل على نقاط تساوي مجموع رقمي القريصتين المسحوبتين.

- 1- احسب احتمالات الحوادث التالية:
 - A " الحصول على 4 نقاط والقريصتين المسحوبتين مختلفتي اللون".
 - B " الحصول على 4 نقاط".
 - C " الحصول على قريصتين مختلفتي اللون".
 - D " الحصول على الأقل على 4 نقاط".
- 2- نعتبر المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد النقاط التي يتحصل عليها اللاعب - عرف قانون احتمال المتغير العشوائي، واحسب أمله الرياضي.

التمرين الثاني (05 نقاط):

$$(I) \quad (U_n) \text{ متتالية عددية معرفة من أجل كل } n \in \mathbb{N}^* : U_n = \frac{2n+1}{n}$$

- 1- ادرس رتبة المتتالية (U_n)
- 2- أثبت من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ أن : $2 < U_n \leq 3$ ، ثم استنتج تقارب المتتالية (U_n) واحسب نهايتها.
- 3- أثبت من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ أن : $U_{n+1} = \frac{3U_n - 4}{U_n - 1}$

$$(II) \quad (V_n) \text{ متتالية عددية معرفة من أجل كل } n \in \mathbb{N}^* : V_n = \frac{U_n - 1}{U_n - 2}$$

- 1- احسب $V_{n+1} - V_n$ ، ماذا تستنتج بالنسبة لطبيعة المتتالية (V_n) ؟
 - اكتب V_n بدلالة n ، ثم احسب نهايتها.
- 2- برهن بالتراجع من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ أن : $V_1 + V_2 + \dots + V_n = \frac{n(n+3)}{2}$.
- 3- أ) اكتب U_n بدلالة V_n ، ثم بين من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ أن : $U_n = 2 + \frac{1}{V_{n-1}}$.
ب) تحقق من نتيجة النهاية المحسوبة في السؤال 2 - I.

التمرين الثالث (04 نقاط):

- 1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 6z + 12 = 0$ حيث z عدد مركب
- 2- في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B و C لواحقها على الترتيب $z_A = 1, z_B = 3 - i\sqrt{3}$ و $z_C = 3 + i\sqrt{3}$ على الترتيب.
 أ) احسب الطويلة والعمدة لكل من z_A, z_B و z_C
 ب) أنشئ النقط A, B و C
- 3- احسب طويلة العدد $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC
- 4- أ) عين z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع، ثم أنشئ النقطة D
 ب) عين (γ) مجموعة النقط M من المستوي لواحقها z حيث: $\left| \frac{z - 1 - 2i\sqrt{3}}{z - 1} \right| = 1$

التمرين الرابع (6.5 نقطة)

- 1- دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 1 + x^2 + 2 \ln x$
 أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- 2- بين أن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلا α حيث: $0.52 < \alpha < 0.53$
- 3- استنتج من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ إشارة $g(x)$.
- الجزء الثاني: f دالة معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = -x + \frac{3 + 2 \ln x}{x}$
 أ) (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس (o, i, j) .
- 1- عين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- 2- أ) أثبت من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ أن: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$
 ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- 3- تحقق أن: $f(\alpha) = 2\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)$ ثم جد حصر $f(\alpha)$.
- 4- أ) أثبت أن المستقيم (Δ) معادلته: $y = -x$ مقارب لـ (C_f) ، ثم ادرس الوضع لـ (Δ) مع (C_f)
 ب) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلة له.
- 5- ارسم (T) ، (Δ) و (C_f) نقبل أن $f(0.225) \approx 0$ و $f(2.12) \approx 0$
- 6- ناقش بياننا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $3 + 2 \ln x - mx = 0$



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول (4 نقاط):

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z - 2)(z^2 + 6z + 34) = 0$

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B و C التي لواحقتها

على الترتيب $z_A = 2$ ، $z_B = -3 + 5i$ ، $z_C = \overline{z_B}$.

(1 أ) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ثم على الشكل الأسّي .

(ب) استنتج طبيعة المثلث ABC .

(ج) عين لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع ثم حدد بدقة طبيعته .

(2) عين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق : $|z - 2| = |\overline{z} - z_B|$.

التمرين الثاني (4 نقاط):

يحتوي صندوق على 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس منها 4 كريات تحمل الرقم 2 و 3 كريات تحمل الرقم 1 و

كريتان تحملان الرقم 1- و كرية واحدة تحمل الرقم 2- .

نسحب عشوائيا ثلاث كريات وفي آن واحد من الصندوق .

(1) احسب احتمال الحدثين التاليين :

A : مجموع أرقام الكريات المسحوبة معدوم .

B : جداء أرقام الكريات المسحوبة يساوي 4 .

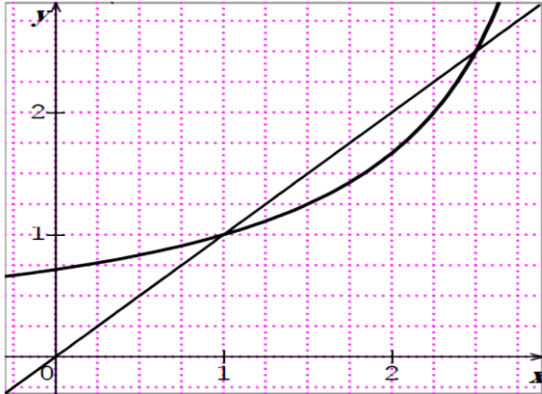
(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب أصغر الأرقام .

(أ) عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي .

(ب) احسب احتمال الحدث " $e^x > 1$ " .

التمرين الثالث (5 نقاط):

في الشكل المقابل (C) التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $\left[0; \frac{5}{2}\right]$ بـ $f(x) = \frac{-5}{2x-7}$ والمنصف الأول. (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{-5}{2u_n-7}$



(1) أ) أنقل الشكل المقابل، ثم مثل على محور

الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 (دون حسابها) وموضعا خطوط الإنشاء).

ب) خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(1) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أن:

$$1 \leq u_n \leq 2$$

(2) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{2u_n-2}{2u_n-5}$

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0 .

ب) أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

(4) أ) أثبت من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 \leq \frac{4}{5}(u_n - 1)$

ب) تحقق من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n - 1 \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين الرابع (7 نقاط):

I. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = (x-1)^2 - 2\ln(x-1)$

(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) حدد إشارة $g(x)$ على المجال $]1; +\infty[$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{x-1}{2} + \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 2cm)

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{2(x-1)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(4) بين أنه توجد نقطة وحيدة B يقبل فيها المنحنى (C_f) مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) ثم أكتب معادلة للمماس (T) .

(5) بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $1.34 < \alpha < 1.35$.

(6) أ) أرسم (Δ) ، (T) و (C_f) .

ب) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $\frac{-1+m}{2} + \frac{1+\ln(x-1)}{x-1} = 0$

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4 نقاط):

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية، مع التبرير:

(1) A و B حدثان .

إذا كان : $P(A) = 0.42$ و $P(B) = 0.39$ و $P(\overline{A \cup B}) = 0.41$ فإن :

(أ) $P(A \cap B) = 0.4$ (ب) $P(A \cap B) = 0.59$ (ج) $P(A \cap B) = 0.22$

(2) (u_n) المتتالية العددية حدها الأول $U_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \ln(3e^{u_n})$

(أ) (u_n) متتالية حسابية (ب) (u_n) متتالية هندسية (ج) (u_n) متتالية لا حسابية ولا هندسية .

(3) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$ بـ: $g(x) = 2x + 4 \ln\left(\frac{x-3}{x+3}\right)$

(أ) الدالة g زوجية (ب) الدالة g فردية (ج) الدالة g لا زوجية ولا فردية

التمرين الثاني (4 نقاط):

يحتوي صندوق على 8 كريات، من بينها 3 كريات حمراء و 3 كريات خضراء و كريتين بيضاوين، كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس. نسحب عشوائيا كريتين على التوالي دون إعادة الكرة المسحوبة إلى الكيس.

(1) أحسب احتمال الحدثين التاليين :

A : الحصول على كريتين من لونين مختلفين.

B : الحصول على كرة بيضاء واحدة فقط في السحبة الثانية.

(2) نسحب الآن عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من الصندوق .

(أ) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الألوان المحصل عليها.

- بين أن $P(X = 2) = \frac{36}{56}$ ثم عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

(ب) يدفع اللاعب 50 DA (DA يعني دينار جزائري) قبل إجراء عملية السحب ويكسب 25 DA لكل لون من الألوان المحصل عليها .

- هل اللعبة في صالح اللاعب ؟ برر إجابتك.

التمرين الثالث (5 نقاط):

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{5u_n-1}{u_n+3}$

(1) أ) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n+3}$

ب) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$.

ج) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ثم استنتج انها متقاربة .

(2) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{u_n-1}$

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين اساسها وحددها الأول .

ب) عبر بدلالة n عن v_n و u_n و احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) احسب المجموع : $S_n = e^{v_0} + e^{v_1} + \dots + e^{v_n}$.

التمرين الرابع (7 نقاط):

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 2 + (x-2)e^{-x+2}$.

(1) أدرس تغيرات الدالة g .

(2) أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ وتحقق أن : $1.14 < \alpha < 1.15$.

(3) حدد إشارة g على $\mathbb{R}$.

II. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x - 1 - (x-1)e^{-x+2}$.

نسمة (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(\vec{O}; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

(2) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أ) بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(4) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) ، يطلب تعيين معادلة له .

(5) أثبت أن : $f(\alpha) = 2\alpha + 1 + \frac{2}{\alpha-2}$ ، واستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

(6) أ) أحسب $f(0)$ ، ثم أنشئ (Δ) ، (T) و (C_f) .

ب) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $2m - 1 - (x-1)e^{-x+2} = 0$

امتحان بلاكوربا تجريبي في مادة الرياضيات

المسئول : 3 ع ث

المدة: 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول (04 نقاط) :

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية ، مع التبرير :

(1) من أجل كل عدد طبيعي n نعتبر S_n مجموع المتتالية الحسابية (U_n) المعرفة بـ :

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n = 4 - 4n^2$$

أساس المتتالية هو :

$$r = -2 \quad (أ) \quad r = -4 \quad (ب) \quad r = -8 \quad (ج)$$

(2) من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ عبارة مشتقة الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right)$ هي :

$$f'(x) = \frac{-1}{4x+4\sqrt{x}} \quad (أ) \quad f'(x) = \frac{-3}{4x+4\sqrt{x}} \quad (ب) \quad f'(x) = \frac{-5}{4x+4\sqrt{x}} \quad (ج)$$

(3) مجموعة حلول المتراجحة : $\ln(2-x) + \ln(x+3) - \ln 4 \geq 0$ هي :

$$S = [1; 2] \quad (أ) \quad S =]-2; 1[\quad (ب) \quad S = [-2; 1] \quad (ج)$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على خمس كرات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 1 ، 0 ، -1 و خمس كرات سوداء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 0 ، 0 ، -1 لا نميز بينها عند اللمس . نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الكيس .
(I) نعتبر الاحداث التالية :

A " الحصول على كرية بيضاء واحدة فقط " ، B " الحصول على كرية بيضاء على الاقل "

C " الكريات الثلاثة المسحوبة لها نفس اللون " ، D " مجموع أرقام الكرات الثلاثة المسحوبة يساوي 0 "

(1) أحسب احتمال الاحداث : A ، B ، C

(2) بين أن : $P(D) = \frac{31}{120}$ و $P(C \cap D) = \frac{7}{120}$

(II) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل مخرج مجموع أرقام الكريات الثلاثة المسحوبة

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X

(ب) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- (I) لتكن (U_n) المتتالية المعرفة بمحدها الاول $U_0 = \alpha$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{U_n - 1}{U_n + 3}$ - عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث تكون المتتالية (U_n) ثابتة على $\mathbb{N}$
- (II) في ما يلي نضع $U_0 = 0$

- (1) عين العدد الحقيقي b بحيث من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 1 + \frac{b}{U_n + 3}$
- (2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 < U_n \leq 0$
- (3) أ () بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} - U_n = \frac{-(U_n + 1)^2}{U_n + 3}$ ، ثم استنتج إتجاه تغير المتتالية (U_n) ب () هل المتتالية (U_n) متقاربة ؟ برر إجابتك
- (4) نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $V_n = \frac{1}{U_n + 1}$ أ () بين أن المتتالية (V_n) حسابية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب تعيين حددها الاول V_0
- ب () أكتب عبارة V_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n ، و أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$
- (5) أحسب المجموع S حيث : $S = \frac{8}{U_0 + 1} + \frac{8}{U_1 + 1} + \dots + \frac{8}{U_{2021} + 1}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- (I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $] -1; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$
- (1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$
- (2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $] -1; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .
- (3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $] -1; +\infty[$
- (II) f الدالة العددية المعرفة على المجال $] -1; +\infty[$ بـ : $f(x) = x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$
- و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- (1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، فسر النتيجة بيانيا ، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$
- (2) أ () بين أنه من أجل كل x من المجال $] -1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$
- ب () استنتج إتجاه تغير الدالة f على المجال $] -1; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها
- ج () بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0 < \alpha < \frac{1}{2}$
- (3) أ () بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$
- ب () أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ)
- (4) نقبل أن المستقيم (T) ذا المعادلة : $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 ، أحسب x_0
- (5) أنشئ (Δ) ، (T) ، (C_f)
- (6) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين متميزين

إتتهى الموضوع الاول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية ، مع التبرير :

(1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب : $f(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x - 3$

على المجال $]0; +\infty[$ الدالة f :

أ () متزايدة تماما ب () متناقصة تماما ج () غير رتيبة

مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \leq 0$ هي :

أ () $[\ln 2; e]$ ب () $[e^{-3}; e]$ ج () $[1; 3]$

(2) (V_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما ، حدها الاول V_0 و أساسها q حيث :

$$V_0 + V_1 = 30 \text{ و } V_0 \cdot V_2 = 576$$

$V_{n+1} - V_n$ يساوي :

أ () $18(4)^n$ ب () $3(4)^n$ ج () $3\left(\frac{1}{4}\right)^n$

المجموع $S_n = \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) + \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{V_n}{V_{n-1}}\right)$ يساوي :

أ () $n \ln 4$ ب () $\ln(3(4)^n)$ ج () $\ln\left(\frac{1-n^2}{2}\right)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يتكون مكتب للدراسات من 20 مهندسا و مهندسة يتوزعون حسب الجنس و التخصص كما هو مبين في الجدول أسفله

الاناث	الذكور	التخصص
3	5	الاعلام
4	8	الهندسة المدنية

تم اختيار ثلاثة عناصر من هذا المكتب عشوائيا و في آن واحد للمشاركة في إحدى الدورات التكوينية نعتبر الحادثتين : A " العناصر التي وقعها عليها الاختيار كلها من الاناث "

B " العناصر التي وقعها عليها الاختيار كلها من نفس التخصص "

(1) بين أن $P(A) = \frac{7}{228}$ ثم أحسب $P(B)$ و $P(A \cap B)$

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد تخصصات العناصر التي وقع عليها الاختيار

أ () عين قيم المتغير العشوائي X

ب () عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[\frac{1}{2}; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = \frac{3x-1}{2x}$

(1) أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجال $[\frac{1}{2}; +\infty[$

(2) (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$

أ (برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > 1$)

ب (بين أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة)

(3) أ (أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$)

ب (بين أنه من أجل كل عد طبيعي n : $U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية (U_n))

(4) لتكن (V_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $V_n = \frac{U_n - 1}{2U_n - 1}$

أ (بين أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . ، ثم أكتب عبارة V_n بدلالة n)

ب (أحسب المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{V_0 - 1}{U_0} + \frac{V_1 - 1}{U_1} + \dots + \frac{V_n - 1}{U_n}$)

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (x+3)e^x - 1$

(1) أ (احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$)

ب (أدرس إتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها)

(2) أ (بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-0,8 < \alpha < -0,7$)

ب (استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$)

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (x+2)(e^x - 1)$

و (C_f) هو تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) أ (بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$)

ب (استنتج إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها)

(3) أ (أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيم مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته)

ب (أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ))

ج (أكتب معادلة (T) مماس (C_f) الموازي للمستقيم (Δ))

(4) أنشئ (T) ، (Δ) و المنحنى (C_f) على المجال $] -\infty; 1]$ (يعطى $f(\alpha) \approx -0,7$)

(5) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = |x|(e^{|x|-2} - 1) + 1$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق

أ (بين أن الدالة h زوجية)

ب (تأكد أنه من أجل كل x من المجال $[0; +\infty[$ فان : $h(x) = f(x-2) + 1$)

ج (اشرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f))

إتهى الموضوع الثاني

موضوع تجريبي للتدرب رقم 02 مع الحل المفصل

التمرين الأول (المتتاليات العددية) : * 05 نقاط *

في الشكل أدناه المنحني (C_f) يمثل الدالة f المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{4x-2}{x+1}$.
والمستقيم (d) ذا المعادلة $y = x$.

(1) عين إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) والمستقيم (d) .
(2) ادرس إتجاه تغير الدالة f على $]-1; +\infty[$ ، ثم بين أنه إذا كان : $x \in [1; 2]$ فإن : $f(x) \in [1; 2]$.

(3) نعرف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ المتتالية (u_n) كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

أ- باستعمال (C_f) و (d) أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مظهرا خطوط الإنشاء ، ثم أعط تخمينا حول إتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n) .

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $1 < u_n < 2$.

ج- ادرس رتبة المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq \frac{3}{2}$ وأن المتتالية (u_n) متقاربة .

(4) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)$.

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $2 - u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5} \right)^n$.

ج- أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

(5) المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$.

أ- برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول v_0 .

ب- أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة الحد العام (u_n) بدلالة n وحدد نهايتها من جديد .

(6) نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \frac{1}{u_0 - 1} + \frac{1}{u_1 - 1} + \dots + \frac{1}{u_n - 1}$.

- عبر عن S_n بدلالة n ، ثم احسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$.

التمرين الثاني (الإحتمالات) : * 04 نقاط *

يحتوي كيس غير شفاف على أربع كريات حمراء تحمل الأرقام : 0 ، 0 ، 1 ، 2 وأربع كريات خضراء تحمل الأرقام : 1 ، 1 ، 1 ، 2 .

(كل الكريات متماثلة ولا يمكن التمييز بينها عند اللمس) .

نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريات على التوالي بدون إرجاع .
- نعتبر الأحداث التالية :

A : "الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون" .

B : "الحصول على ثلاث كريات تحمل نفس الرقم" .

C : "الحصول على ثلاث كريات جداء الأرقام المسجلة عليها غير معدوم" .

- 1) أحسب الإحتمالات التالية : $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(A \cap B)$ ، $P(A \cup B)$ و $P(C)$.
 2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل تجربة جداء الأرقام المسجلة على الكريات المسحوبة .
 أ- حدد قيم X الممكنة ، ثم عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .
 ب- أحسب الإحتمال : $P(e^{X^2-X} > 1)$.

التمرين الثالث (الأعداد المركبة) : * 05 نقاط *

- 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z^2 + 4)(z^2 - 6z + 18) = 0$.
 2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقاط : A ، B ، C و D التي لواحقتها على الترتيب : $z_A = 2i$ ، $z_B = -2i$ ، $z_C = 3 - 3i$ و $z_D = 3 + 3i$.
 أ- ما طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟ أحسب مساحته .
 ب- بين أن النقاط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز ω يطلب تعيين إحداثياتها .
 3) أ- أكتب العدد z_D على الشكل الأسّي ، ثم استنتج الطويلة وعمدة للعدد المركب α إذا علمت أن :

$$\alpha \times z_D = 3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

 ب- أعط الشكل الجبري للعدد المركب α ، ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$.
 ج- عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد α^n تخيليا صرفا .
 د- بين أن العدد $(\sqrt{2}\alpha)^{1440}$ حقيقي .
 4) أ- نعتبر (Π) هي مجموعة النقاط M ذات اللاحقة z حيث : $\arg(z^2 + 4) = \arg(z + 2i) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع $(k \in \mathbb{Z})$
 - عين طبيعة المجموعة (Π) .
 ب- لتكن (C) مجموعة النقاط M ذات اللاحقة z حيث : $|z - z_C|^2 + |z - z_D|^2 = |z_D - z_C|^2$.
 - تحقق أن النقطة O تنتمي إلى المجموعة (C) ، ثم حدد طبيعة هذه الأخيرة .

التمرين الرابع (الدوال اللوغاريتمية) : * 06 نقاط *

- I) الدالة g معرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$.
 1) احسب نهاية الدالة g عند 0 وعند $+\infty$ ، ثم فسر بيانيا النهاية عند 0 .
 2) ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها .
 3) أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0; +\infty[$.
 ب- تحقق أن : $1,83 < \alpha < 1,84$.
 4) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.
 II) الدالة f معرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$ ، (C) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 1) احسب كلا من : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وفسر النتائج بيانيا .
 2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} \times g(x)$.
 ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

ج- بين أن : $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ ، ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 1 .

4) أنشئ المماس (T) ومثل المنحنى (C) .

5) نعتبر المستقيمات (d_m) المعرفة بالمعادلة $y = m^2x - 1$ حيث : m وسيط حقيقي .

أ- بين أن جميع المستقيمات (d_m) تمر بنقطة ثابتة يطلب تحديد إحداثياتها .

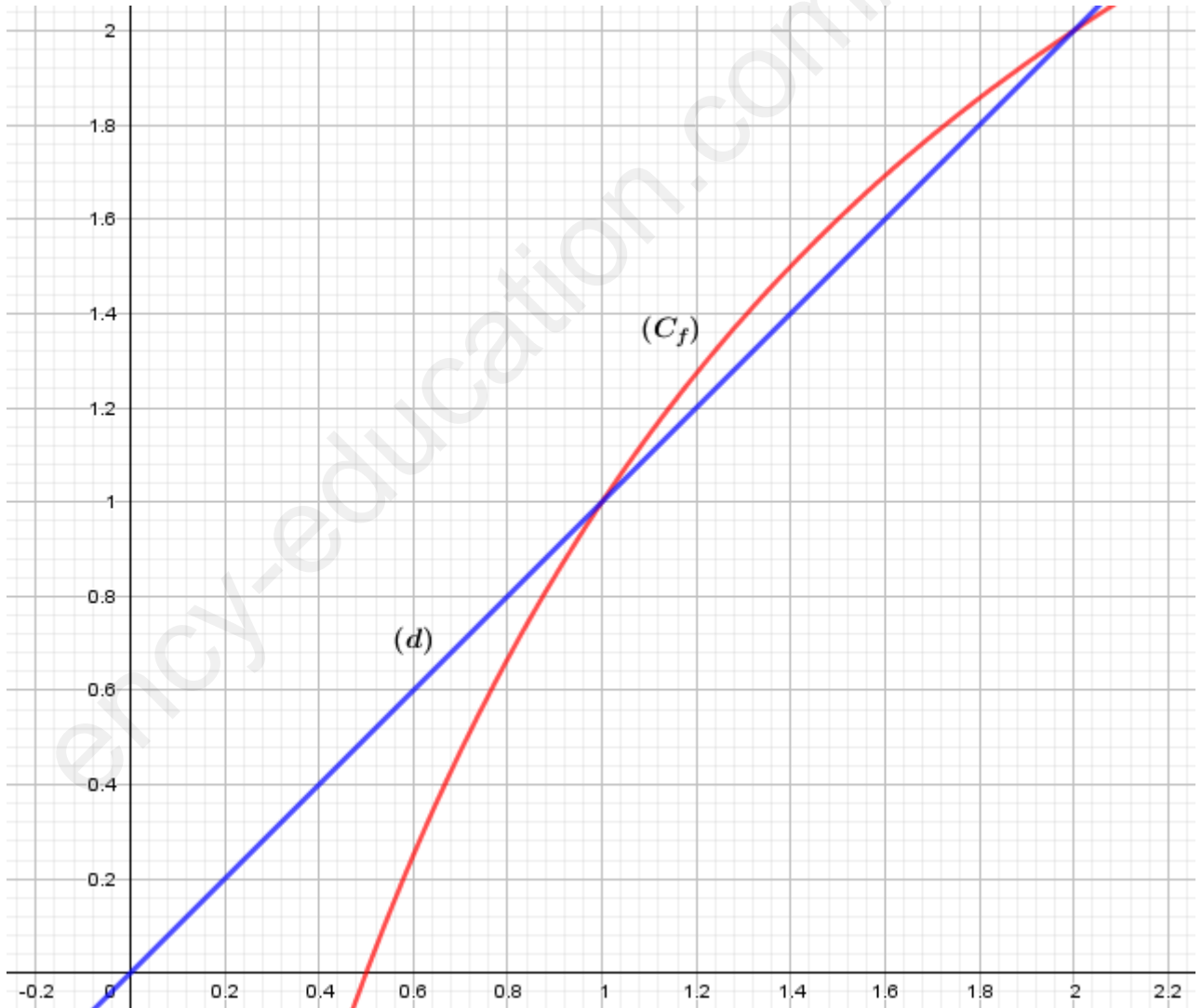
ب- ناقش بيانيا عدد حلول المعادلة : $f(x) = m^2x - 1$.

6) الدالة h معرفة على المجال $]-\infty; 0[$ كما يلي : $h(x) = \frac{2\ln|x|}{x^2 + |x|}$ و (C_h) تمثيلها البياني .

أ- بين أن المنحنى (C_h) هو صورة المنحنى (C) بواسطة تحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه .

ب- مثل (C_h) في نفس المعلم السابق .

(الوثيقة المرفقة بالتمارين الأول) :



إنتهى _____ ك . أ : بلقاسم عبدالرزاق

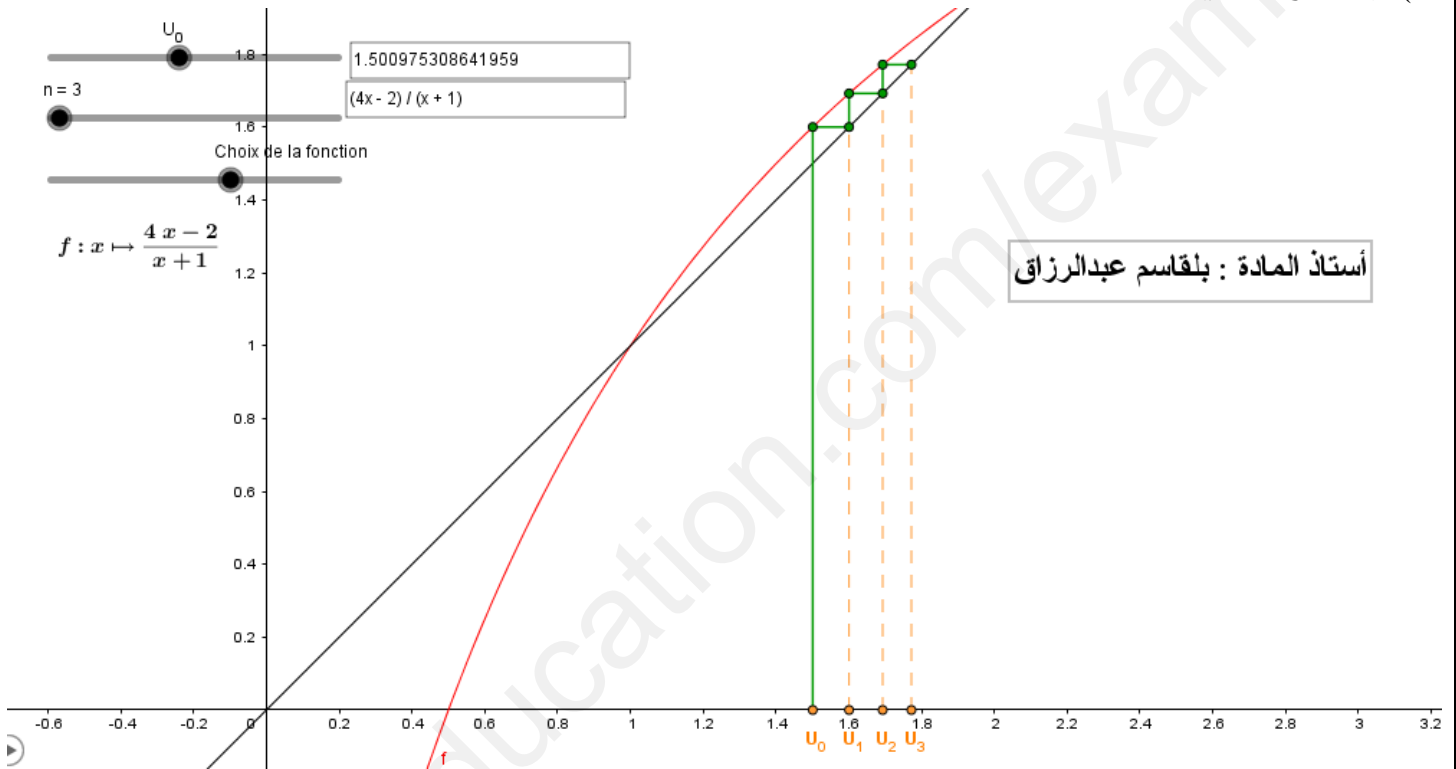
حل مقترح للتمرين الأول (المتتاليات العددية) :

1) نحل المعادلة $f(x) = x$ أي : $\frac{4x-2}{x+1} = x$ أي نجد : $x^2 - 3x + 2 = 0$ ، لدينا مجموع المعاملات يساوي 0 ومنه :
 $x_1 = 1$ و $x_2 = 2$ ، إذن : $(C_f) \cap (d) = \{(1;1), (2;2)\}$.

2) لدينا من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$ أي : $f'(x) > 0$ ، إذن الدالة f متزايدة تماما على $]-1; +\infty[$.

لدينا : $x \in [1, 2]$ أي : $1 < x < 2$ ، بما أن الدالة f متزايدة على $]-1; +\infty[$ فإن : $f(1) < f(x) < f(2)$ أي نجد :
 $1 < f(x) < 2$ وبالتالي : $f(x) \in [1, 2]$.

3) لدينا : $u_0 = \frac{3}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$
 أ) الإنشاء والتخمين :



أستاذ المادة : بلقاسم عبدالرزاق

- نلاحظ أن : $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ أي كتخمين نقول : المتتالية (u_n) متزايدة .

كما نلاحظ أن الحدود تتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (d) أي كتخمين نقول : المتتالية (u_n) متقاربة .

ب) نستعمل البرهان بالتراجع لنبين الخاصية : $1 < u_n < 2$ $P(n)$.

- نتحقق من صحة الخاصية من أجل $n=0$ أي لدينا : $u_0 = \frac{3}{2}$ و $1 < \frac{3}{2} < 2$ ومنه : $1 < u_0 < 2$ (محققة) .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل n كيفي أي : $1 < u_n < 2$ ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي : $1 < u_{n+1} < 2$.

لدينا فرضاً أن : $1 < u_n < 2$ وحسب الجواب (2) : بما أن : $u_n \in]1, 2[$ فإن : $f(u_n) \in]1, 2[$ أي : $1 < f(u_n) < 2$.

ومنه : $1 < u_{n+1} < 2$ ، إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $1 < u_n < 2$.

ج) أولاً نحسب $u_{n+1} - u_n$:

$$(-u_n^2 + 3u_n - 2) > 0 \text{ فإن } 1 < u_n < 2 \text{ نجد من أجل } 1 < u_n < 2 \text{ ، } u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - u_n = \frac{4u_n - 2 - u_n^2 - u_n}{u_n + 1} = \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{u_n + 1}$$

و $u_n + 1 > 0$ ومنه : يكون : $u_{n+1} - u_n > 0$ ، إذن : المتتالية (u_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$.

- بما أن : المتتالية (u_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$ و $u_0 = \frac{3}{2}$ فإنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $u_n \geq \frac{3}{2}$.

- بما أن : المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة .

4) أ) لنبين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون : $2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)$.

نحسب أولا $2 - u_{n+1}$: $2 - u_{n+1} = 2 - \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} = \frac{2u_n + 2 - 4u_n + 2}{u_n + 1} = \frac{-2u_n + 4}{u_n + 1}$

لدينا : $1 < u_n < 2$ ومنه : $0 < -2u_n + 4 < 2$ إذن يمكن كتابة : $2 - u_{n+1} = (-2u_n + 4) \times \frac{1}{u_n + 1}$

نعلم أن : $u_n \geq \frac{3}{2}$ أي : $u_n + 1 \geq \frac{5}{2}$ أي : $\frac{1}{u_n + 1} \leq \frac{2}{5}$ أي : $(-2u_n + 4) \times \frac{1}{u_n + 1} \leq \frac{2}{5}(-2u_n + 4)$ أي : $\frac{-2u_n + 4}{u_n + 1} \leq \frac{2}{5} \times 2(-u_n + 2)$

ومنه : $\frac{-2u_n + 4}{u_n + 1} \leq \frac{4}{5}(-u_n + 2)$ ، إذن : $2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)$ هو المطلوب .

ب) لنبرهن بالتراجع عن الخاصية : $2 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ $P(n)$.

- لنتحقق صحة الخاصية من أجل $n = 0$ أي : $2 - \frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}$ أي : $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ ومنه : $2 - u_0 \leq \frac{1}{2}$ (محقة) .

- نفرض صحة الخاصية من أجل n كيفي أي : $2 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ ونبرهن صحتها من أجل $n + 1$ أي : $2 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

لدينا من جهة أن : $2 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ أي : $\frac{4}{5}(2 - u_n) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n \times \frac{4}{5}$ ومنه : $\frac{4}{5}(2 - u_n) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

ومن جهة أخرى لدينا : $2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)$ ، إذن : من هذا وذاك نجد : $2 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

وأخيرا من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $2 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$.

ج) لدينا : $2 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ ونعلم أن : $2 - u_n > 0$ وبالتالي : $0 < 2 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$

لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ ومنه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - u_n) = 0$ وهذا يدل على أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

5) من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا : $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$

أ- لدينا : $v_{n+1} = \frac{2}{3} \times v_n$ أي : $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - 2}{\frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - 1} = \frac{\frac{2u_n - 4}{u_n + 1}}{\frac{3u_n - 3}{u_n + 1}} = \frac{2u_n - 4}{3u_n - 3} = \frac{2}{3} \left(\frac{u_n - 2}{u_n - 1} \right)$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 - 1} = -1$

ب- نجد : $v_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ولدينا : $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$ أي : $v_n \cdot u_n - v_n = u_n - 2$ أي : $v_n \cdot u_n - u_n = v_n - 2$ أي : $u_n(v_n - 1) = v_n - 2$

ومنه نجد : $u_n = \frac{v_n - 2}{v_n - 1}$ ، إذن : $u_n = \frac{-\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2}{-\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}$ ، أي : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ لأن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

$$\begin{aligned}
 (6) \text{ لدينا : } S_n &= \frac{1}{u_0-1} + \frac{1}{u_1-1} + \dots + \frac{1}{u_n-1} \\
 S_n &= -(v_0-1) - (v_1-1) + \dots - (v_n-1) : \text{ أي } \frac{1}{u_n-1} = -(v_n-1) : \text{ أي } u_n-1 = \frac{-1}{v_n-1} : \text{ أي } u_n = \frac{v_n-2}{v_n-1} \\
 S_n &= -[(v_0+v_1+\dots+v_n)+(-1-1-\dots-1)] : \text{ أي } S_n = -[(v_0-1)+(v_1-1)+\dots+(v_n-1)] \\
 \text{ومنه : } S_n &= -\left[\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} - 1(n+1) \right] : \text{ أي } S_n = 3-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + (n+1) \\
 \text{لدينا : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n} = 1 : \text{ ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = 1
 \end{aligned}$$

حل مقترح للتمرين الثاني (الإحتمالات) :

1) حساب إحتمال الأحداث :

$$\begin{aligned}
 \text{الحدث } A : (V,V,V) \text{ أو } (R,R,R) : \text{ أي } P(A) &= \frac{A_4^3 + A_4^3}{A_{10}^3} = \frac{2 \times 24}{720} = \frac{48}{720} : \text{ ومنه } P(A) = \frac{1}{15} \\
 \text{الحدث } B : (1,1,1) \text{ أو } (2,2,2) : \text{ أي } P(B) &= \frac{A_5^3 + A_3^3}{A_{10}^3} = \frac{60+6}{720} = \frac{66}{720} : \text{ ومنه } P(B) = \frac{11}{120} \\
 \text{الحدث } A \cap B : (V_1, V_1, V_1) : \text{ أي } P(A \cap B) &= \frac{A_3^3}{A_{10}^3} = \frac{6}{720} : \text{ ومنه } P(A \cap B) = \frac{1}{120}
 \end{aligned}$$

بما أن الحدثين A و B كيفيين فإن : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\text{أي نجد : } P(A \cup B) = \frac{1}{15} + \frac{11}{120} - \frac{1}{120} = \frac{18}{120} : \text{ ومنه } P(A \cup B) = \frac{3}{20}$$

الحدث C : هنا كأننا نجزء الكريات الموجودة في الكيس لكريات تحمل رقم معدوم وأخرى لا تحمل رقم معدوم .

$$\text{أي : } P(C) = \frac{A_8^3}{A_{10}^3} = \frac{336}{720} : \text{ ومنه } P(C) = \frac{7}{15}$$

2) أ- لدينا : X يعبر عن جداء الأرقام الظاهرة في السحب .

ومنه قيم المتغير العشوائي X هي : 0 ، 1 ، 2 ، 4 ، 8 .

قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X يكون كما يلي :

$$P(X=0) = 1 - P(C) = 1 - \frac{336}{720} = \frac{384}{720} \text{ أو } P(X=0) = \frac{3(A_2^1 \times A_8^2) + 3(A_2^2 \times A_8^1)}{720} = \frac{336+48}{720} = \frac{384}{720}$$

$$P(X=2) = \frac{3(A_5^2 \times A_3^1)}{720} = \frac{3 \times 60}{720} = \frac{180}{720} , P(X=1) = \frac{A_5^3}{720} = \frac{60}{720}$$

$$P(X=8) = \frac{A_3^3}{720} = \frac{6}{720} , P(X=4) = \frac{3(A_3^2 \times A_5^1)}{720} = \frac{3 \times 30}{720} = \frac{90}{720}$$

x_i	0	1	2	4	8
$P(X=x_i)$	$\frac{384}{720}$	$\frac{60}{720}$	$\frac{180}{720}$	$\frac{90}{720}$	$\frac{6}{720}$

ب- لدينا : $e^{X^2-X} > 1$ تكافئ : $X^2 - X > 0$ ومنه : $X(X-1) > 0$

بعد دراسة الإشارة نجد أنه يكون : $X(X-1) > 0$ لما : $X > 1$

إذن : $P(e^{x^2-x} > 1) = P(X=2) + P(X=4) + P(X=8)$ أي : $P(e^{x^2-x} > 1) = \frac{180}{720} + \frac{90}{720} + \frac{6}{720} = \frac{276}{720}$ ومنه نجد : $P(e^{x^2-x} > 1) = \frac{23}{60}$

حل مقترح للتمرين الثالث (الأعداد المركبة) :

1) حل المعادلة :

لدينا : $(z^2 + 4)(z^2 - 6z + 18) = 0$ تكافئ : $z^2 + 4 = 0$ أو $z^2 - 6z + 18 = 0$.

ومنه : $z^2 + 4 = 0$ أو $\Delta = -36 = (6i)^2$ أي : $z^2 = -4$ ومنه : $\begin{cases} z_1 = 2i \\ z_2 = -2i \end{cases}$ أو $\begin{cases} z_3 = 3-3i \\ z_4 = 3+3i \end{cases}$.

إذن : $S = \{-2i, 2i, 3-3i, 3+3i\}$.

2) أ- بما أن النقطتان A و B متناظرتان بالنسبة لحامل محور الفواصل وأيضا النقطتان C و D متناظرتان بالنسبة لحامل محور الفواصل (لديه ضلعان متوازيان وضلعان غير متوازيان) ، أيضا ولدينا أيضا : $AD = BC$ بالتالي : الرباعي ABCD شبه منحرف متقايس الضلعين .

- بالنسبة لمساحة شبه المنحرف نطبق القانون باستعمال الأعداد المركبة ونجد مساحته ببساطة .

ب- بما أن للقطعتين [AB] و [CD] نفس المحور والذي هو حامل محور الفواصل (xx') فهذا يدل على أن الدائرة التي تشمل النقط A ، B ، C و D مركزها سيكون ينتمي لحامل محور الفواصل ، إذن : $\omega(x, 0)$.

لكن نعلم أن : $\omega A = \omega D$ أي : $|z_A - z_\omega| = |z_D - z_\omega|$ أي : $|2i - x| = |3+3i - x|$ أي : $|-x+2i| = |3-x+3i|$.

ومنه : $\sqrt{(-x)^2 + 2^2} = \sqrt{(3-x)^2 + 3^2}$ أي : $\sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{x^2 - 6x + 18}$ أي : $x^2 + 4 = x^2 - 6x + 18$ أي : $6x = 14$ أي : $x = \frac{7}{3}$ ومنه : $\omega\left(\frac{7}{3}, 0\right)$.

إذن : النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز $\omega\left(\frac{7}{3}, 0\right)$.

3) أ- لدينا : $z_D = 3+3i$ أي : $|z_D| = 3\sqrt{2}$ و $\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ ومنه : $\arg(z_D) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

إذن : $z_D = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

لدينا : $\alpha \times z_D = 3\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ أي : $\alpha \times 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه : $\alpha = \frac{3e^{i\frac{\pi}{3}}}{3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$ أي : $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}$.

أي : $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ إذن : $|\alpha| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\arg(\alpha) = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$.

ب- لدينا : $\alpha = \frac{3\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)}{z_D} = \frac{3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{3+3i} = \frac{3+3\sqrt{3}i}{2(3+3i)}$.

أي : $\alpha = \frac{3+3\sqrt{3}i}{6+6i} = \frac{(3+3\sqrt{3}i)(6-6i)}{72} = \frac{18-18i+18\sqrt{3}i+18\sqrt{3}}{72} = \frac{(1+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)i}{4}$.

- بالمطابقة بين الشكل الأسّي والشكل الجبري للعدد α نجد :

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\frac{4}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{و} \quad \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\frac{4}{\sqrt{2}}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

ج- العدد α^n تخيلي صرف معناه : $\arg(\alpha^n) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ أي : $n \cdot \arg(\alpha) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ أي : $\frac{n\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi$: أي : $\frac{n}{12} = \frac{1}{2} + k$ بضرب الطرفين في 12 نجد : $n = 12k + 6$ مع $(k \in \mathbb{N})$.

د- لدينا : $e^{i120\pi} = 1$: $e^{i\frac{1440\pi}{12}} = e^{i120\pi} = 1$ ، $\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{1440} = \left(\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{1440} = \left(\sqrt{2}\alpha\right)^{1440}$ العدد $(\sqrt{2}\alpha)^{1440}$ حقيقي .

4) أ- لدينا : $\arg(z^2 + 4) = \arg(z + 2i) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أي : $\arg[(z - 2i)(z + 2i)] = \arg(z + 2i) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

لأن : $z^2 + 4 = z^2 - (2i)^2$ ، أي : $\arg(z - 2i) + \arg(z + 2i) = \arg(z + 2i) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ وبالتالي نجد :

$\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$ أي : $\arg(z - z_A) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أي : $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

إذن : المجموعة (Π) هي نصف المستقيم الذي مبدؤه النقطة A ويشكل زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع حامل محور الفواصل باستثناء النقطة A .

ب- لدينا : $(C) : |z - z_C|^2 + |z - z_D|^2 = |z_D - z_C|^2$

- النقطة $O \in (C)$ معناه : $|z_O - z_C|^2 + |z_O - z_D|^2 = |z_D - z_C|^2$ أي : $|z_C|^2 + |z_D|^2 = |z_D - z_C|^2$

ومنه : $|z_C|^2 + |z_D|^2 = |z_D - z_C|^2$ أي : $(\sqrt{18})^2 + (\sqrt{18})^2 = (\sqrt{36})^2$ أي : $36 = 36$ (محقة)

إذن : النقطة $O \in (C)$

لدينا : $(C) : |z - z_C|^2 + |z - z_D|^2 = |z_D - z_C|^2$ أي تصبح : $CM^2 + DM^2 = CD^2$ (C)

فكرة مهمة:

العلاقة : $CM^2 + DM^2 = CD^2$ تدل على أن النقطة M ممكن أن تنطبق على C أو على D .
أو تدل على أن المثلث MCD قائم في M وفي الحالتين النقطة M تكون في الدائرة ذات القطر $[CD]$.

إذن : المجموعة (C) هي الدائرة ذات القطر $[CD]$.

ملاحظة : يمكن استخدام الشكل الجبري $(z = x + iy)$ للوصول إلى المعادلة الديكارتية للدائرة (C) .

حل مقترح للتمرين الرابع (الدالة اللوغاريتمية) :

الجزء الأول : $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$

1) حساب النهايات :

(*) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+1}{2x+1} - \ln x \right) = +\infty$ ، لأن : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{2x+1} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0} -\ln x = +\infty$

(*) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{2x+1} - \ln x \right) = -\infty$ ، لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln x = -\infty$

(*) التفسير البياني للنهاية عند 0 : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب للمنحني (C_g) .

(2) الدالة g قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$ و عبارة دالتها المشتقة هي : $g'(x) = \frac{-1}{(2x+1)^2} - \frac{1}{x}$.

نلاحظ أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ تكون $g'(x) < 0$ إذن : الدالة g متناقصة تماما على $]0; +\infty[$.

(*) جدول التغيرات :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$

(3) أ (*) الدالة g مستمرة و رتيبة على المجال $]0; +\infty[$ صورة هذا الأخير هي المجال $]-\infty; +\infty[$ و بما أن :

$0 \in]-\infty; +\infty[$ فإن : المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0; +\infty[$.

ب) لدينا : $\begin{cases} g(1,83) = 0,002 \\ g(1,84) = -0,002 \end{cases}$ أي : $g(1,84) < 0 < g(1,83)$ و منه : $1,83 < \alpha < 1,84$.

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

(4) إشارة $g(x)$:

الجزء الثاني : $f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$.

(1) حساب النهايات :

(*) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 \ln x}{x^2 + x} \right) = -\infty$ لأن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x) = 0^+$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2 \ln x) = -\infty$.

(*) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln x}{x^2 + x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2 \ln x}{x(x+1)} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 \cdot \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x+1} \right) = 0$ لأن : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \end{cases}$.

(*) التفسير البياني :

- المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب للمنحني (C) .

- المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب للمنحني (C) بجوار $+\infty$.

(2) أ) الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$ و عبارة دالتها المشتقة هي : $f'(x) = 2 \cdot \frac{\frac{1}{x}(x^2 + x) + (2x+1) \cdot \ln x}{(x^2 + x)^2}$.

أي : $f'(x) = 2 \cdot \frac{(x+1) - (2x+1) \cdot \ln x}{(x^2 + x)^2}$ (نستخرج $(2x+1)$ عامل مشترك) تصبح :

هو المطلوب $f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2 + x)^2} \times g(x)$ و منه نجد : $f'(x) = 2(2x+1) \cdot \frac{\frac{x+1}{2x+1} - \ln x}{(x^2 + x)^2}$.

ب) نعلم أنه على المجال $]0; +\infty[$ يكون : $\frac{2(2x+1)}{(x^2 + x)^2} > 0$ إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

و بالتالي : لما $x \in]-\infty; \alpha]$ تكون : $g(x) \geq 0$ أي : $f'(x) \geq 0$ إذن : الدالة f متزايدة على $]-\infty; \alpha]$.

و لما $x \in]\alpha; +\infty[$ تكون : $g(x) < 0$ أي : $f'(x) < 0$ إذن : الدالة f متناقصة على $]\alpha; +\infty[$.

(ج) نعلم أن : $g(\alpha) = 0$ أي : $\frac{\alpha+1}{2\alpha+1} - \ln \alpha = 0$ و منه : $\ln \alpha = \frac{\alpha+1}{2\alpha+1}$.

(*) لنحسب $f(\alpha)$ نجد : $f(\alpha) = \frac{2 \ln \alpha}{\alpha^2 + \alpha} = \frac{2 \times \frac{\alpha+1}{2\alpha+1}}{\alpha^2 + \alpha} = 2 \times \frac{\alpha+1}{2\alpha+1} \times \frac{1}{\alpha^2 + \alpha} = 2 \times \frac{\alpha+1}{2\alpha+1} \times \frac{1}{\alpha(\alpha+1)}$

و منه نتحصل على : $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ هو المطلوب .

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

(*) جدول التغيرات :

(د) حصر $f(\alpha)$:

لدينا : $1,83 < \alpha < 1,84$ أي : $4,66 < 2\alpha+1 < 4,68$ أي : $\frac{1}{4,68} < \frac{1}{2\alpha+1} < \frac{1}{4,66}$ و منه نجد :

(1) $0,213 < \frac{1}{2\alpha+1} < 0,214 \dots$ و لدينا : $1,83 < \alpha < 1,84$ أي : $\frac{1}{1,84} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{1,83}$ و منه :

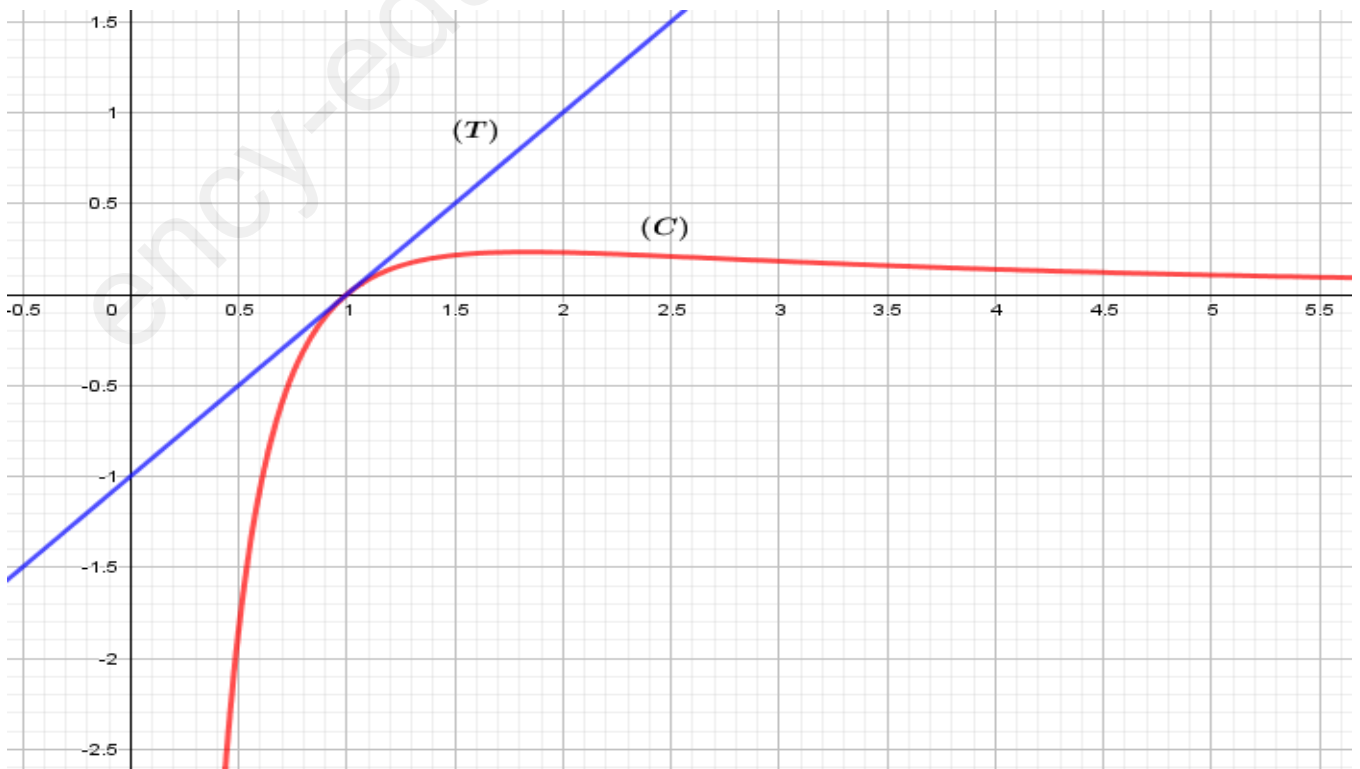
(2) $0,543 < \frac{1}{\alpha} < 0,546 \dots$ بضرب (1) في (2) نجد : $0,115 < \frac{1}{\alpha(2\alpha+1)} < 0,116$

أي : $0,230 < \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)} < 0,232$ إذن : $0,230 < f(\alpha) < 0,232$.

(3) كتابة معادلة المماس (T) :

لدينا : $(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$ أي : $(T): y = (x-1) + 0$ و منه : $(T): y = x-1$.

(4) الإنشاء :



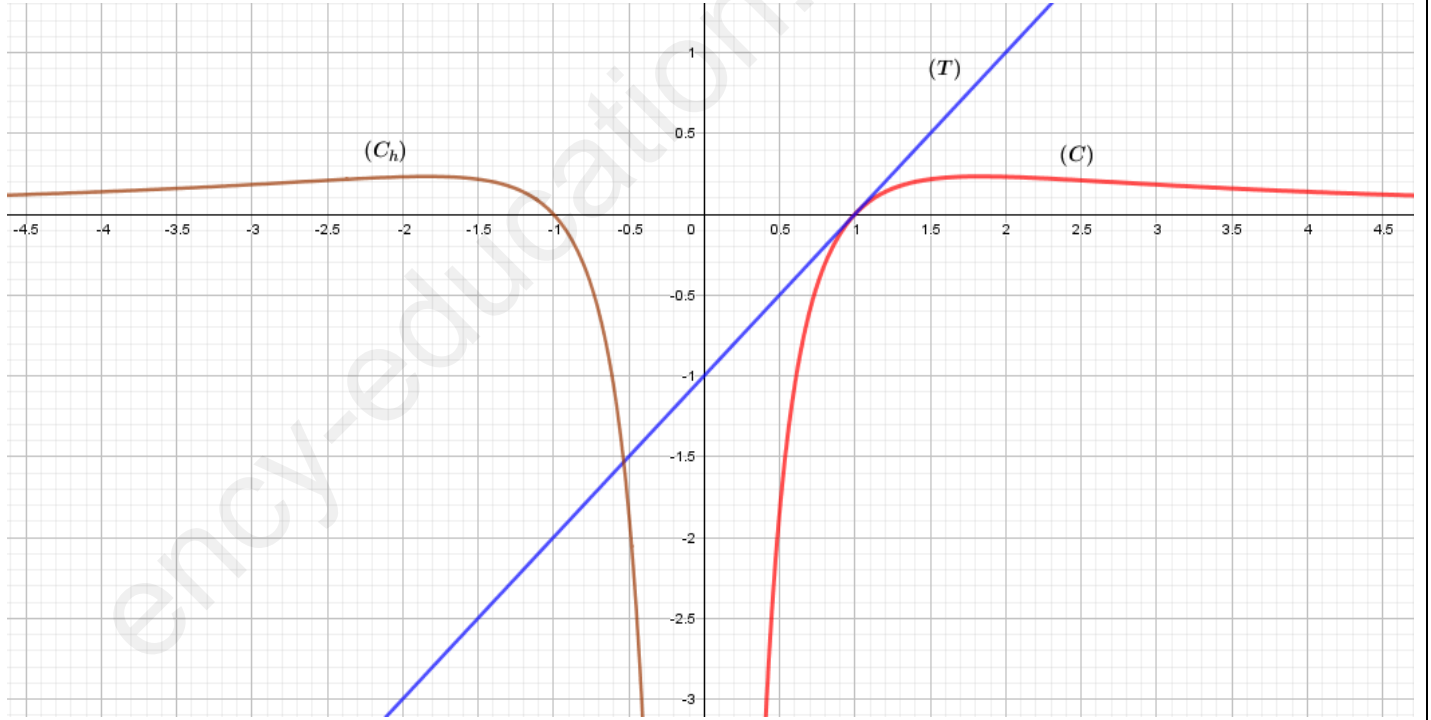
(5) أ) لدينا : $y = m^2x - 1$: (d_m) .

- إذا كان : $x = 0$ فإن : $y = -1$ و النقطة $A(0, -1)$ تنتمي إلى جميع المستقيمات (d_m) .
- ب) المناقشة البيانية لحلول المعادلة : $f(x) = m^2x - 1$. (ملاحظة : $m^2 \geq 0$) .
- (*) في حالة $m^2 = 0$ أي : $m = 0$ المعادلة تقبل حلا وحيدا .
- (*) في حالة $0 < m^2 < 1$ أي : $-1 < m < 1$ المعادلة تقبل حلين متمايزين .
- (*) في حالة $m^2 = 1$ أي : $m = 1$ أو $m = -1$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا هو 1 .
- (*) في حالة $m^2 > 1$ أي : $m > 1$ أو $m < -1$ فإن المعادلة لا تقبل حلا .

(6) أ) لدينا : $h(x) = \frac{2\ln|x|}{x^2 + |x|}$.

- بما أن : $x \in]-\infty, 0[$ فإن : $|x| = -x$ و منه : $h(x) = \frac{2\ln(-x)}{x^2 - x}$ أي : $h(x) = f(-x)$.
- إذن : (C_h) نظير (C) بالنسبة إلى حامل محور الترتيب .
- أي : (C_h) هو صورة (C) بواسطة التناظر بالنسبة إلى حامل محور الترتيب .

ب) الإنشاء :





الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية عبد الحق بن حمودة + بن سخرية الطيب
إمتحانات بكالوريا تجريبيةالشعبة : علوم تجريبية
دورة ماي 2021

المدة: 03 سا و 30 د

إختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = -3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 3n - 1$ / 1
أحسب u_1, u_2, u_3 .

(ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$: $u_n > 0$.

(ج) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 4$: $u_n > 3n - 4$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

/ 2 لتكن المتتالية العددية (v_n) من أجل كل عدد طبيعي : $v_n = u_n - 9n + 30$.

(أ) برهن أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0 .

(ب) أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

/ 3 (أ) أحسب بدلالة n الجداء : $P_n = e^{v_0} \times e^{v_1+1} \times e^{v_2+2} \times \dots \times e^{v_n+n}$.

(ب) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس منها سبع كريات بيضاء تحمل الأرقام 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4 و ثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام -1, 3, -4 نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الصندوق .

/ 1 أحسب احتمال الحادث التالية :

A : الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون .

B : الحصول على كرية حمراء على الأقل تحمل عددا سالبا .

C : الحصول على ثلاث كريات جداء أعدادها معدوم .

/ 2 نعيد الصندوق إلى وضعيته الأولى و نسحب منه كرتين على التوالي دون إرجاع .

(أ) أحسب احتمال الحدثين D و E حيث D : الحصول على كرتين مختلفتين في اللون ، E : الحصول على كرتين جداء رقميهما عدد سالب تماما .

(ب) نعتبر المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب العدد e^a حيث a يساوي أكبر العددين الذين تحملهما الكرتين المسحوبتين إذا كانا مختلفين و يساوي نفس العدد الظاهر على الكرتين المسحوبتين اللتين تحملان نفس العدد .

< عيّن قيم X عيّن قانون احتمال X ، ثم أحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

< أحسب $P(\ln X > 4)$.

التمرين الثالث: (04 نقطة)

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب $z_C = \bar{z}_A$ ، و $z_B = iz_A$ ، $z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

1 / أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الجبري و الأسّي .

2 / أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $\dots(E) \quad \frac{1+i-z}{-1+i-z} = 2e^{i\pi}$.
 ب) استنتج أنّ النقطة A هي صورة النقطة B بالتشابه S الذي مركزه Ω ذات اللاحقة z_Ω (z_Ω هو حل المعادلة (E)) يطلب تعيين نسبته و زاويته .

3 / عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا موجبا تماما .

4 / أ) عيّن (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $z = z_C - k \frac{z_A}{z_C}$ ، لما k يسمح $\mathbb{R}_+^*$.

ب) عيّن (Γ_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $\arg \left[\left(\frac{z_A - z}{z_B - z} \right)^2 \right] = \pi + 2\pi k$.

التمرين الرابع: (08 نقطة)

I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = -x + 1 + e^{-x}$.

1 / $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2 / أدرس اتجاه تغير g و شكل جدول تغيراتها .

3 / بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1.27 < \alpha < 1.28$ ، ثمّ استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة : $f(x) = (2-x)(e^x - 1)$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 / أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب) بيّن أنّ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = -2$ ، ثمّ استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب تعيين معادلة له .

ج) أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y = x - 2$.

2 / أ) أدرس اتجاه تغير f و شكل جدول تغيراتها .

ب) بيّن أنّ $f(\alpha) = \frac{(2-\alpha)^2}{\alpha-1}$.

ج) أنشئ (C_f) و (Δ) (نأخذ : $f(\alpha) = 1.9$) .

3 / ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x) = f(m)$.

4 / h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = 1 + (e^{|x|+1} - 1)(1 - |x|)$.

أ) بيّن أنّ h زوجية .

ب) تأكد أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$: $h(x) = f(x+1) + 1$.

ج) أنشئ (C_h) منحنى الدالة h إنطلاقا من (C_f) مع الشرح .



الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقطة)

- لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$.
- 1/ برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $0 < u_n < \frac{1}{2}$.
 - 2/ أثبت (u_n) متزايدة و أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
 - 2/ لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$.
 أ) أثبت أنّ (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
 ب) أكتب v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج u_n بدلالة n و أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ من جديد .
 - ج) أحسب بدلالة n كلا من S_n و P_n حيث : $S_n = \frac{u_0}{2u_0 - 1} + \frac{u_1}{2u_1 - 1} + \dots + \frac{u_n}{2u_n - 1}$.
 $P_n = e^{v_0} \times e^{v_1 + 1} \times e^{v_2 + 2} \times \dots \times e^{v_n + n}$.

التمرين الثاني: (04 نقطة)

- 1/ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $(iz + 2i - 2\sqrt{3})(z^2 - 4z + 16) = 0$.
- 2/ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب $z_A = -2 - 2i\sqrt{3}$ ، $z_B = 2 - 2i\sqrt{3}$ ، و $z_C = 2 + 2i\sqrt{3}$.
 أ) أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي .
 ب) عيّن الشكل الأسّي للعدد المركب Z حيث : $Z = \frac{z_B}{z_C^4}$ ، ثمّ استنتج شكله الجبري .
 ج) بيّن أنّ : $\left(\frac{z_A}{4}\right)^{2020} + \left(\frac{z_C}{4}\right)^{1442} = -1$.
- 3/ هل توجد قيم للعدد الطبيعي n حتى يكون : $\left(\frac{z_A}{4}\right)^n \times \left(\frac{z_B}{4}\right)^n \times \left(\frac{z_C}{4}\right)^n$ حقيقي سالب ؟ .
- 4/ أ) عيّن طولية و عمدة العدد المركب L حيث : $L = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC .
 ب) عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $\arg(z + 2 + 2i\sqrt{3}) + \arg(\bar{z} - 2 + 2i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$.

التمرين الثالث: (04 نقطة)

- يحتوي صندوق على 5 كريات حمراء تحمل الأعداد $2, 2, 2, 3, -2$ و أربع كريات خضراء تحمل الأعداد $3, 3, 3, -2$ و كرية زرقاء تحمل العدد -1 ، كل الكريات متماثلة و لا نفرق بينها عند المس ، نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد .
- 1/ أ) أحسب إحصائيات الحدثين A و B حيث : A : الحصول على كرتين من نفس اللون ، B : الحصول على كرتين تحملان عددين جداء هما عدد سالب .
 ب) أحسب الإحصائيات : $P(A \cap B)$ و $P(\overline{A \cup B})$.
 - 2/ نعتبر المتغير العشوائي X المعروف كما يلي :
 إذا كانت الكرتين المسحوبتين تحملان نفس العدد فإنّ X يأخذ العدد نفسه ، و إذا كانت الكرتين المسحوبتين تحملان عددين مختلفين فإنّ X يأخذ العدد الأكبر فيهما .
 أ) عيّن القيم الممكنة لـ X .

- (ب) عيّن قانون إحتمال X ، ثمّ أحسب أمله الرياضي $E(X)$.
 (ج) أحسب $P(C_5^x = 10)$.

التمرين الرابع: (08 نقطة)

- I لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln(x+1)$.
 1/ أدرس تغيرات الدالة g (حساب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف مطلوب) .
 2/ بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0.4 < \alpha < 0.5$.
 3/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$.
 II لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $g(x) = 1 + (x-1)\ln(x+1)$ ، ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 1/ أحسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و فسّر النتيجة هندسيا ، ثمّ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 2/ أ) أدرس إتجاه تغير f و شكّل جدول تغيراتها .
 ب) بيّن أنّ $f(\alpha) = 4 - \alpha - \frac{4}{\alpha+1}$ ، ثمّ استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$ هو حل المعادلة $g(x) = 0$.
 3/ بيّن أنّه يوجد مماسان (T_a) ، (T_b) للمنحنى (C_f) يشملان النقطة $A(1;0)$ ، يطلب تعيين معادلتيهما .
 4/ أنشئ (C_f) ، (T_a) و (T_b) .
 5/ m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد و إشارة حلول المعادلة $m + (x-1)\ln(x+1) = mx - 1$.
 6/ نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = f(x^2)$.
 < أدرس تغيرات الدالة h دون حساب $h'(x)$.

بالتوفيق في إمتحان شهادة البكالوريا إن شاء الله

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: 04 نقاط

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 4 - \frac{4}{u_n + 1}$.

في الوثيقة المرفقة (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[0; 3]$ بـ: $f(x) = 4 - \frac{4}{x+1}$ المستقيم (Δ) المستقيم $y = x$ ذا المعادلة.

1. باستعمال الوثيقة المرفقة مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.
2. أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 3$.
ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.
3. أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 3 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(3 - u_n)$.
ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 3 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (3 - u_0)$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثاني: 04 نقاط

يحتوي كيس على خمس كريات لا نفرق بينها باللمس منها ثلاث كريات بيضاء و كريتيتن خضراوين. نسحب عشوائيا كريتيتن على التوالي دون إرجاع ونعتبر الحادثتين A و B حيث A : سحب كريتيتن من نفس اللون و B : سحب كريتيتن بيضاء على الأقل.

1. أحسب $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B على الترتيب:
2. أحسب $P(A \cap B)$ ثم استنتج $P(A \cup B)$.
3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المتبقية في الكيس.
✓ عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثالث: 05 نقاط

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z - \sqrt{3})(z^2 - \sqrt{3}z + 1) = 0$.

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A, B, C و D التي لاحتقاتها

$$z_D = \sqrt{3} \text{ و } z_C = \overline{z_B}, z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, z_A = \sqrt{3} + i$$

1. بين أن النقطة A صورة النقطة B بالانسحاب الذي شعاعه $\overline{CD}$ ثم استنتج أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

2. أكتب كلا من z_A, z_B, z_C على الشكل الأسّي. ثم بين أن $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2021} \times (z_B)^{1441} \times (z_C)^{1962} = 1$

3. ليكن f التحويل النقطي الذي يحول النقطة $M(z)$ إلى النقطة $M'(z')$ حيث: $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z - i$

أ) عين طبيعة التحويل النقطي f محددا عناصره المميزة.

ب) بين أن النقطة B صورة النقطة D بالتحويل النقطي f ثم استنتج طبيعة كلا من المثلث BCD والرباعي $ABCD$.

4. عين طبيعة المجموعة (E) مجموعة النقط من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق

$$\text{Arg}(z - z_B) = \text{Arg}(\overline{z} - z_C) + 2k\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

التمرين الرابع: 07 نقاط

I. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $g(x) = x - 3 + 4\ln(x + 1)$.

1. أدرس تغيرات الدالة g .

2. أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1; +\infty[$ ثم تحقق أن $0,74 < \alpha < 0,76$.

ب) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II. f الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب: $f(x) = \ln(x + 1) - \frac{4\ln(x + 1)}{x + 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب) بين أنه من أجل $x \in]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x + 1)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

2. أ) بين أن $f(\alpha) = -\frac{(\alpha - 3)^2}{4(\alpha + 1)}$.

ب) عين دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

3. نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب: $h(x) = \ln(x + 1)$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)]$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب) أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_h) .

4. أ) عين احداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محورى الاحداثيات.

ب) أرسم (C_f) ثم أرسم (C') التمثيل البياني للدالة $|f|$ ، نأخذ $f(\alpha) = -0,72$.

انتهى الموضوع الأول

التمرين الأول: 04 نقاط

يحتوي كيس على أربع كريات حمراء مرقمة بـ: 1، 1، 2، 2 و ثلاث كريات سوداء مرقمة بـ: 1، 2، 3. نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الكيس.

1. أحسب احتمال كلا من الحوادث التالية:
 A ✓ : سحب ثلاث كريات من نفس اللون.
 B ✓ : سحب ثلاث كريات مجموع أرقامها عدد فردي.
 C ✓ : سحب ثلاث كريات جداء أرقامها عدد زوجي.
2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب جداء أرقام الكريات المسحوبة.
 ➤ عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين الثاني: 04 نقاط

$$(u_n) \text{ و } (v_n) \text{ المتالتان العدديتان المعرفتان على } \mathbb{N} \text{ بـ: } \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}eu_n + \frac{2}{3}e^{n+1} \end{cases} \text{ و } v_n = u_n - e^n$$

1. أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}e$ يطلب حساب حدها الأول.
 ب) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .
 ج) أحسب بدلالة n المجموع T_n حيث $T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.
2. نعتبر المتتالية العددية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي بـ: $w_n = \ln(u_n - v_n)$.
 أ) تحقق أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $w_n = n$.
 ب) بين أن (w_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
 ج) ليكن المجموع S_n حيث $S_n = w_0^2 + w_1^2 + \dots + w_n^2$.
 ✓ برهن بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

التمرين الثالث: 05 نقاط

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقاط A ، B و C التي لاحتقاتها $z_A = 2i$ ، $z_B = \sqrt{3} + i$ و $z_C = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

1. أ) أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل المثلثي ثم استنتج أن النقاط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.
- ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها z_B^n حقيقي سالب تماما.

2. أ) أكتب العدد المركب $\frac{z_C}{z_B}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل المثلثي.

ب) استنتج القيم المضبوطة لـ $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

3. f التحويل النقطي الذي يحول النقطة $M(z)$ إلى النقطة $M'(z')$ حيث: $z' = 2iz + 4 + 2i$.
✓ بين أن f تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة.

4. عين طبيعته المجموعة (S) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $|z - \sqrt{3} + i| = |iz + 2|$.

التمرين الرابع: 07 نقاط

I. 1. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $g(x) = e^{2x} - 4x - 1$.

1. أدرس تغيرات الدالة g .

2. أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث $0,62 < \alpha < 0,64$.

ب) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II. 1. الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \left(2x + \frac{3}{2}\right)e^{-2x} + x - 1$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى

المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب) بين أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = e^{-2x} g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

2. بين أن النقطة $\Omega\left(\frac{1}{4}; 2e^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\right)$ نقطة انعطاف لـ (C_f) .

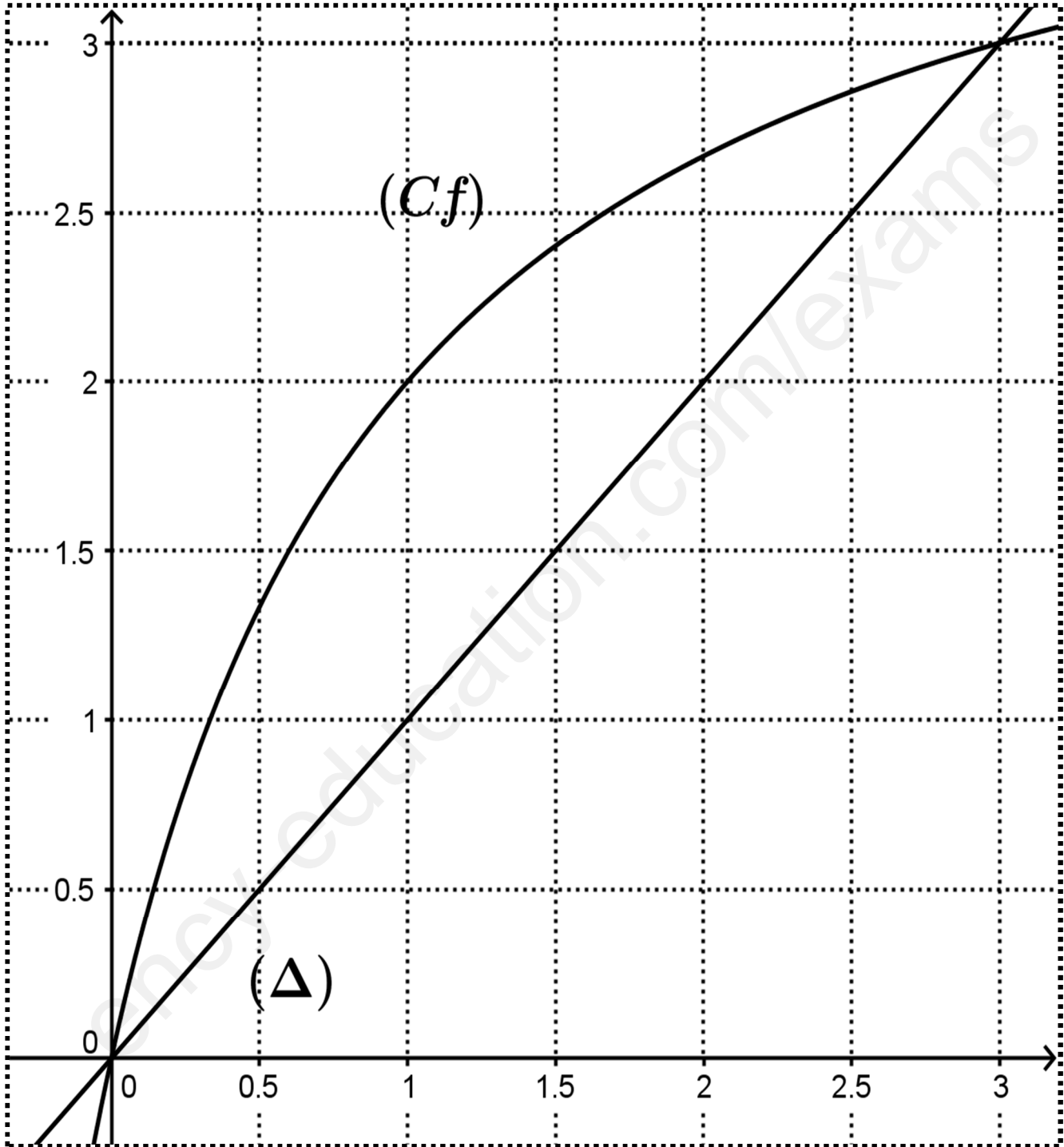
3. أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) .

ب) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) يطلب تعيين معادلتها.

4. أ) أرسم كلا من (Δ) ، (T) و (C_f) . نقبل أن $\begin{cases} (C_f) \cap (xx') = \{(-0,5; 0)\} \\ f(\alpha) = 0,4 \end{cases}$.

ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x) = x + m$ حلين مختلفين في الإشارة.

انتهى الموضوع الثاني



التفويض لثبوت صحة الاختيار الكالولي التجريبي في مادة الرياضيات

الشخصية : علوم تجريبية

الموضوع الأول

1) تمثيل الحدود $0, 1, 2, 3, \dots$ ولا على حامل محور الفواصل :

(0,8)

(0,85)

إطاء دهنين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها :

من البيانات نلاحظ أن $0 < u_1 < u_2 < u_3 < \dots$ وعلية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$ ولذا أبقينا أن (u_n) متقاربة نحو فاصلة نقطة تقارب (CP) مع حسنة فو

المعادلة $y = x^2$ ($x=3$)

(0,88)

2) البرهان بالترجيع أنه صدق $n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 3$

نمزيد $P(n)$ الخاصية $0 \leq u_n \leq 3$

لنبدأ $0 \leq u_1 \leq 3$ ولما أن $0 \leq 1 \leq 3$ فإن $P(0)$ صحيحة

نفرض أن $P(n)$ صحيحة صدق $n \in \mathbb{N}$ أي $0 \leq u_n \leq 3$ ونبرهن أن $P(n+1)$

صحيحة أي نبرهن أن $0 \leq u_{n+1} \leq 3$

لنبدأ $0 \leq u_n \leq 3$ ومنه $0 \leq u_{n+1} \leq 4$ ومنه $\frac{1}{4} \leq \frac{u_n}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{2}$

ومنه $-\frac{1}{2} \leq -\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq -\frac{1}{4}$ ومنه $1 \leq 4 - \frac{u_n}{u_{n+1}} \leq 3$

وإثباته $0 \leq u_{n+1} \leq 3$ وعلية $P(n+1)$ صحيحة

ومنه حسب مبدأ التفاضل بالترجيع نستنتج أنه صدق $n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 3$

(0,8)

3) ثبات أن (u_n) متزايدة خاصة

لنبدأ $u_{n+1} - u_n = 4 - \frac{u_n}{u_{n+1}} - u_n = \frac{4u_{n+1} - u_n^2 - u_{n+1}^2}{u_{n+1}}$

ومنه $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_{n+1} - u_n^2}{u_{n+1}} = \frac{u_n(3 - u_n)}{u_{n+1}}$

لنبدأ $0 \leq u_n \leq 3$ ومنه $u_{n+1} > 0$ و $u_n > 0$ و $3 - u_n > 0$ وعلية $u_{n+1} - u_n > 0$ وإثباته المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$

استنتاج أن (u_n) متقاربة

لها أن (u_n) متزايدة ومحدودة عند الأعلى فإنها متقاربة.

(3) إظهار أن $0 < u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{4}(u_n - 3)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

لدينا
$$u_{n+1} - 3 = \frac{4u_n}{u_{n+1}} - 3 = \frac{4u_n - 3u_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{u_n - 3}{u_{n+1}}$$

لدينا مسبقاً $0 < u_n \leq 3$ و $u_{n+1} > 0$ و $u_n - 3 \leq 0$ وعليه $u_{n+1} - 3 \geq 0$ $\text{---} \textcircled{A}$

(9, 28)

استنتاج أن (u_n) متقاربةلأن (u_n) متزايدة ومحدودة حيث $u_n \leq 3$ متقاربة

(9, 78)

(3) إثبات أنه حد أجل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq 3 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(3 - u_n)$

$$3 - u_{n+1} = 3 - \frac{4u_n}{u_{n+1}} = \frac{3u_{n+1} + 3 - 4u_n}{u_{n+1}} = \frac{3 - u_n}{u_{n+1}}$$

لدينا كما سبق $1 \leq u_n \leq 3$ ومنه $u_{n+1} > 0$ و $3 - u_n > 0$ وعليه

$$\textcircled{1} \quad 3 - u_{n+1} > 0$$

لدينا $u_n \geq 1$ ومنه $\frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{2}$ أي $u_{n+1} \geq 2$ ومنه

$$\textcircled{2} \quad 3 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(3 - u_n) \quad \text{وبالضرب في } \frac{3 - u_n}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{2}(3 - u_n)$$

منه $\textcircled{1}$ و $\textcircled{2}$ نستنتج أنه حد أجل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq 3 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(3 - u_n)$

(9, 8)

(u) استنتاج أنه حد أجل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq 3 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (3 - u_0)$

$$0 \leq 3 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(3 - u_n) \quad \text{لدينا كما سبق}$$

$$0 \leq 3 - u_1 \leq \frac{1}{2}(3 - u_0) \quad \text{ومنه}$$

$$0 \leq 3 - u_2 \leq \frac{1}{2}(3 - u_1) \quad \text{و}$$

$$\vdots$$

$$0 \leq 3 - u_n \leq \frac{1}{2}(3 - u_{n-1}) \quad \text{و}$$

بالتعويض بالترتيب $n, n-1, \dots, 2, 1$ نحصل على

$$0 \leq (3 - u_n)(3 - u_{n-1}) \dots (3 - u_1) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (3 - u_0)(3 - u_{n-1}) \dots (3 - u_1)$$

$$0 \leq 3 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (3 - u_0)$$

وبالتالي

(9, 8)

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 - u_n \leq 0 \quad \text{حيث} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (3 - u_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 - u_n = 0$$

حل المسألة الثانية √ √
 $\begin{matrix} B & B \\ & B \end{matrix}$

(1) حساب $P(A)$ و $P(B)$

(0.8)
$$P(A) = \frac{A_3^2 + A_2^2}{A_5^2} = \frac{6+2}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

(0.8)
$$P(B) = \frac{2A_3^1 \times A_2^1 + A_3^2}{20} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

(2) حساب $P(A \cap B)$ و $P(A \cup B)$

(0.8)
$$P(A \cap B) = \frac{A_3^2}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

(0.8)
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} + \frac{9}{10} - \frac{3}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

(3) تعريف قانون الاحتمال للحرف X احسوا X

x_i	1	2	3
p_i	$P(X=1) = \frac{A_3^2}{20}$ $= \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$	$P(X=2) = \frac{2A_3^1 A_2^1}{20}$ $= \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$	$P(X=3) = \frac{A_2^2}{20}$ $= \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

حساب التوقع $E(X)$ الاحتمال

(0.8)
$$E(X) = \sum_{i=1}^3 p_i x_i = \frac{3}{10} + \frac{6}{5} + \frac{3}{10}$$

$$= \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{9}{5}}$$

و

حل الممرتين، المثالين:

(I) حل في C المعادلة $(z - \sqrt{3}) (z^2 - \sqrt{3}z + 1) = 0$ (0.15)

لدينا $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$ تكافئ $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$ أو $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

لدينا $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$ ومنه $\Delta = 3 - 4 = -1$ $z = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}$ $z_1 = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$ $z_2 = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$

و $z_2 = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$

وسلحنا حلول المعادلة $z - \sqrt{3} = 0$ $z = \sqrt{3}$

(II) لدينا $z_A = \sqrt{3} + i$ $z_B = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$ $z_C = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$ $z_D = \sqrt{3}$

(1) نبيّن أن الزوايا A و B بالمتوازيين AB و CD متساوية: (0.18)

لدينا $z_{AB} = z_A - z_B = \sqrt{3} + i - \frac{\sqrt{3} + i}{2} = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$

و $z_{CD} = z_D - z_C = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3} + i}{2} = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$

لما أن $z_{BA} = z_{CD}$ فإن A و B بالمتوازيين AB و CD متساوية

استنتاج أن $ABCD$ متوازي أضلاع: (0.18)

لما أن $z_{BA} = z_{CD}$ فإن $ABCD$ متوازي أضلاع

(2) كتابة z_A و z_B و z_C على الشكل الأسّي:

لدينا $z_A = \sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = 2 e^{i \frac{\pi}{6}}$ (0.18)

$z_B = e^{i \frac{\pi}{6}}$ $z_C = \frac{\sqrt{3} - i}{2} = e^{-i \frac{\pi}{6}}$

نبيّن أن $\left(\frac{z_A}{2} \right)^{2021} \times (z_B)^{1441} \times (z_C)^{1962} = 1$ (0.15)

لدينا $\left(\frac{z_A}{2} \right)^{2021} \times (z_B)^{1441} \times (z_C)^{1962} = e^{i \left(\frac{2021\pi}{6} + 1441\pi - 1962\pi \right)}$

$= e^{i 250\pi} = \cos(0) + i \sin(0) = 1$

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) T = i$$

٤ | اقبس حبيبة الدحول^١ لظفان^٢ مع دهره عناصره^١ الحاضرة^٢؛

$$\left| \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right|_2 = 1 \quad \text{مع} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) \in \mathbb{C}^{\times} \quad \text{لدينا}$$

وحتی در آن زاویه حاد $\frac{\pi}{3} + k\pi$ $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$ θ_2 θ_1 و صفر

الفصل الثاني: ذات الحقة

$$Z_{D^2} = \frac{-2i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{-2i(1+\sqrt{3}i)}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = Z_C$$

وَبِالْقَالِ فِي دَوَانِ زَاوِيَةِ $\frac{\pi}{3}$ وَصَرْفُهُ لَدَوْنِ C .

(ج) بیان کن، الذمیلہ کی ذمہ داری بالحوالہ

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \varepsilon_D^{-2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \varepsilon_1^{-2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i - i^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \epsilon_B$$

0,78

استنتاج: جميع كلاً من $ABCD$ و BCD و AB و AC و AD و BC و BD و CD و $ABCD$

لما أن B هو D بالتحول $\frac{1}{3}$ فإن CB_2CD و $(CB;CB)_2 \frac{1}{3}$

وعليه نجد أن BCD متقاسم الترتيب

لدينا هنا نسبة $\frac{2}{2}$ اربعة $ABCD$ متوازي أضلاع ولها أن CB_2CD

[illegible]
$$\text{Arg}(z - z_B) = \text{Arg}(\bar{z} - \bar{z}_B) + 2k\pi$$

$$\text{Arg}(z - z_B) = \text{Arg}(\overline{z - z_B}) + 2k\pi$$

$$A_{2y}(z - z_B) = -A_{2y}(z - z_B) + 2k\pi$$

$$Arg(z - z_B)^2 = 2k\pi$$

و تكافئ $2Azy(z-z_B) = 2k\bar{n}$ أي $(\bar{n}; BM) = k\bar{n}$ وبالتالي المجموعة (E) هي مجموعة (BM) لـ z على Γ حامل $\mathcal{H}$ ، الفواصل هامة، لنؤخذ B .

5

حل امتحان الرابع :

(1,28)

(I) لدينا $g(x) = x - 3 + 4 \ln(x+1)$ حيث $g \in]-1, +\infty[$
(1) دراسة تغيرات الدالة g :

حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

حساب $g'(x)$:

الدالة قابلة للتشتت على المجال $] -1, +\infty[$ حيث :

$$g'(x) = 1 + \frac{4}{x+1} > 0$$

بما أن $g'(x) > 0$ فإن الدالة g متزايدة تمامًا على المجال $] -1, +\infty[$
فستكون جدول تغيرات الدالة :

x	-1	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$-\infty$		$+\infty$

(2) | بيان أن الحد $20 < g(x) < 20$ قابل حله وحيد α في المجال $] -1, +\infty[$:
لدينا الدالة g حركية وناشئة تمامًا على المجال $] -1, +\infty[$ و بما أن
 $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) < 20$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) < 20$ فإنه حسب مبدأ القيمة المتوسطة نستنتج أنه لا محالة
 $20 < g(x) < 20$ قابل حله وحيد α في المجال $] -1, +\infty[$.

(0,28)

التحقق أن $0,74 < \alpha < 0,76$
لما أن $g(0,74) < 20 < g(0,76)$ فبمبدأ القيمة المتوسطة نستنتج أن $0,74 < \alpha < 0,76$
حيث $g(0,74) = -0,04$ و $g(0,76) = 0,02$

(0,28)

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$		-	+

لدينا $f(x) = \ln(x+1) - \frac{4\ln(x+1)}{x+1}$ حيث $x \in]-1, +\infty[$

Q.8 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ بحساب

(1) | ببيان أن

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) \left(1 - \frac{4}{x+1}\right) = +\infty$

لدينا

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) - \frac{4\ln(x+1)}{x+1} = +\infty$

Q.8

$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

(2) | ببيان أنه من أجل $x \in]-1, +\infty[$

لدينا الدالة f قابلة للتفاضل على $] -1, +\infty[$ حيث

$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2} \times (x+1) - 4\ln(x+1)$

$= \frac{1}{x+1} - \frac{4 - 4\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1 - 4 + 4\ln(x+1)}{(x+1)^2}$

$f'(x) = \frac{x-3+4\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

ومن

Q.8

تشكيل جدول اختيار لدالة f :

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

Q.8 $f(\alpha) = \frac{-(\alpha-3)^2}{4(\alpha+1)}$
 $\ln(\alpha+1) = \frac{3-\alpha}{4}$

~~$f(\alpha) = \frac{1}{4}\alpha + 1 - \frac{1}{\alpha+1}$~~

(2) | ببيان أن

لدينا $f(\alpha) = \ln(\alpha+1) - \frac{4\ln(\alpha+1)}{\alpha+1}$

$\alpha+1$

$f(\alpha) = \frac{3-\alpha}{4} - \frac{3-\alpha}{\alpha+1} = (3-\alpha) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\alpha+1} \right)$
 $= (3-\alpha) \left(\frac{\alpha-3}{4(\alpha+1)} \right) = -\frac{(\alpha-3)^2}{4(\alpha+1)}$

ومن

$$f(d) = - \frac{(d-3)^2}{4(d+1)} \quad \text{وحد}$$

0,28

$$\lim_{x \rightarrow d} \frac{f(x) - f(d)}{x - d}$$

ج. أحيث دون حساب

$$f'(d) = \frac{f(d)}{(d+1)^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow d} \frac{f(x) - f(d)}{x - d} = f'(d) = 0 \quad \text{لذا}$$

0,28

التفسير لبيان بياننا
نقول أن (C) هي دالة متزايدة على المجال $[0, +\infty[$ ، فالدالة f هي دالة متزايدة.

$$(3) \quad \text{لدينا} \quad B(x) = \ln(x+1) \quad \text{مع} \quad D_B =]-1, +\infty[$$

0,28

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - B(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - B(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -4 \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \quad \text{لذا}$$

0,25

التفسير لبيان بياننا

نقول أن (C) و (Cn) دالتان متنازعتان عند $+\infty$.

0,8

(C) دالة متزايدة، لو هي دالة متزايدة (Cn) دالة متنازعة.

$$\ln(x+1) > 0 \quad \text{كاف} \quad -4 \frac{\ln(x+1)}{x+1} < 0 \quad \text{لذا} \quad f(x) - B(x) > 0 \quad \text{كاف} \quad -4 \frac{\ln(x+1)}{x+1} < 0$$

أي $x+1 \geq 1$ و $x \geq 0$ وعليه لو هي دالة متزايدة (Cn) دالة متنازعة (Cf) دالة متزايدة

الجدول التالي

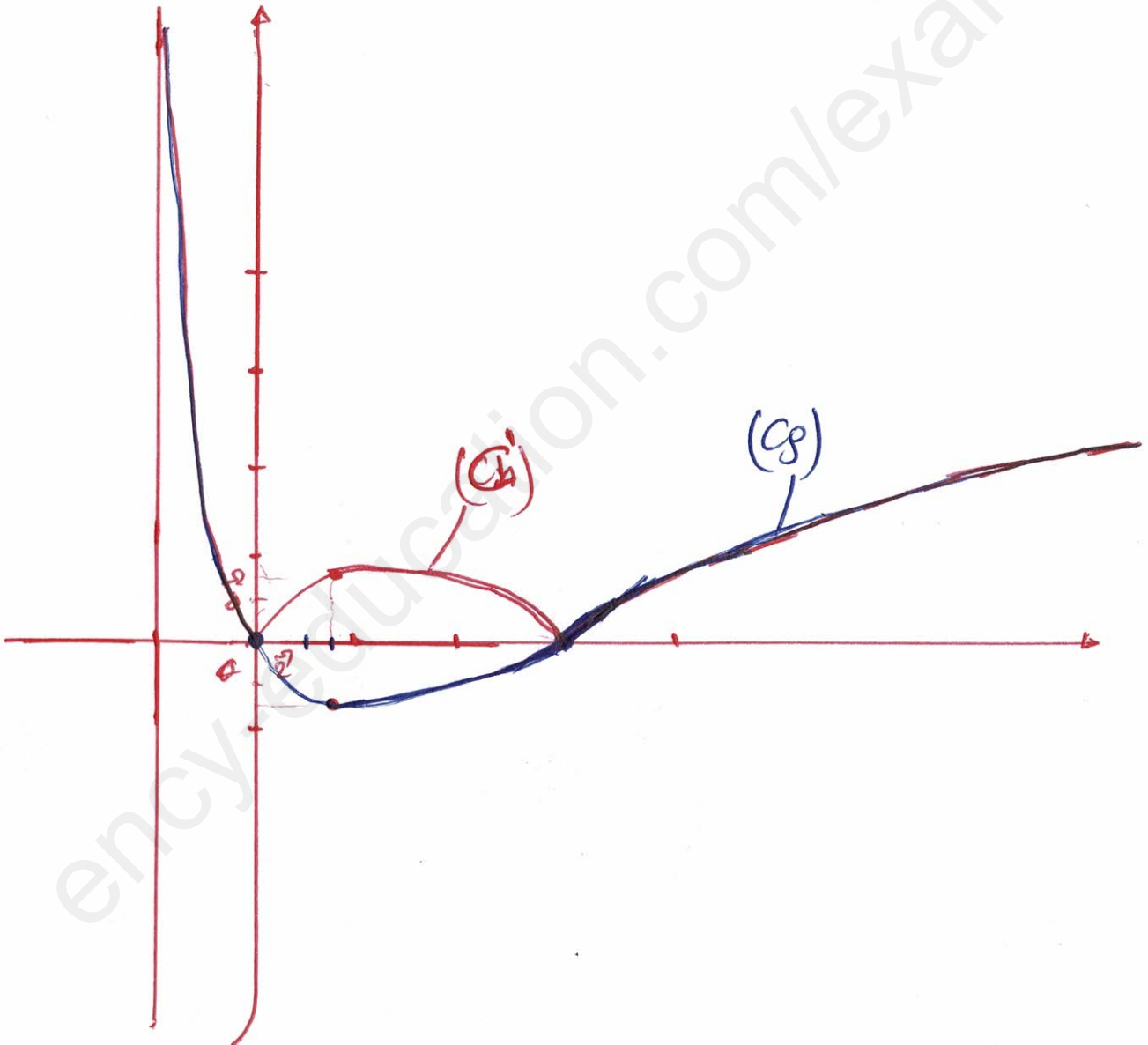
x	-1	0	$+\infty$
$f(x) - B(x)$		0	
الوضع المتغير			
	$(Cf) \text{ أعلى } (Cn)$	$(Cf) \text{ فوق } (Cn)$	$(Cf) \text{ أسفل } (Cn)$

٤) أحسب المشتقات $f'(x)$ و $g'(x)$ مع حاملتي $f(x)$ و $g(x)$ في $x=0$ و $x=3$
 لدينا $f(x) = \ln(x+1) \left(1 - \frac{4}{x+1}\right)$ و $g(x) = \ln(x+1)$
 و $f'(x) = \frac{x-3}{x+1}$ و $g'(x) = \frac{1}{x+1}$
 عند $x=0$ و $x=3$
 و $f(0) = -4$ و $f(3) = 0$ و $g(0) = 0$ و $g(3) = \ln(4)$

$$f(x) \cap g(x) = \{(0,0); (3,0)\}$$

$$f(x) \cap g(x) = \{(0,0)\}$$

٥) أ. رسم $f(x)$ و $g(x)$ و $f'(x)$ و $g'(x)$
 ب. بياني للدالة $f(x)$ و $g(x)$
 ج. $f(x) = \ln(x+1) \left(1 - \frac{4}{x+1}\right)$ و $g(x) = \ln(x+1)$



الموضوع: التفاضل

حل تمرين العمل

R_1 R_2 N_1
 R_1 R_2 N_2 N_3

(1) حساب احتمال تلامس الحوادث التالية

$$(0.8) P(A) = \frac{C_4^3 + C_3^3}{C_7^3} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

$$(0.8) P(B) = \frac{C_3^3 + C_3^2 \times C_3^1 + C_3^2 \times C_1^1}{35} = \frac{13}{35}$$

$$(0.8) P(C) = \frac{C_3^3 + C_3^1 \times C_3^1 \times C_1^1 + 2 \times C_3^2 \times C_3^1 + C_3^2 \times C_1^1}{35}$$

$$= \frac{31}{35}$$

(2)

أعرف قانون الاحتمال للتوزيع الاحتمالي

x_i	1	2	3	4	6	8	12
P_i	$\frac{1}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{3}{35}$

$$P(X=1) = \frac{C_3^3}{35} = \frac{1}{35}, \quad P(X=2) = \frac{C_3^2 \times C_3^1}{35} = \frac{9}{35}$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^2 \times C_1^1}{35} = \frac{3}{35}, \quad P(X=4) = \frac{C_3^2 \times C_3^1}{35} = \frac{9}{35}$$

$$P(X=6) = \frac{C_3^1 \times C_3^1 \times C_1^1}{35} = \frac{9}{35}, \quad P(X=8) = \frac{C_3^3}{35} = \frac{1}{35}$$

$$P(X=12) = \frac{C_3^2 \times C_1^1}{35} = \frac{3}{35}$$

$$(0.5) E(X) = \frac{1 + 18 + 9 + 36 + 54 + 8 + 36}{35} = \frac{162}{35}$$

حساب $E(X)$

(1)

حل تمرين الثاني:

$$V_n = U_n - e^n$$

لدينا $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3} e U_n + \frac{2}{3} e^{n+1} \end{cases}$

(أ) إبان أن (V_n) متناقص هندسي أساسها $\frac{1}{3}e$ وبالتالي حساب طرفي النهاية

لدينا
$$\begin{aligned} V_{n+1} = U_{n+1} - e^{n+1} &= \frac{1}{3} e U_n + \frac{2}{3} e^{n+1} - e^{n+1} \\ &= \frac{1}{3} e U_n - \frac{1}{3} e^{n+1} = \frac{1}{3} e U_n - \frac{1}{3} e \cdot e^n \end{aligned}$$

ومن ثم
$$V_{n+1} = \frac{1}{3} e (U_n - e^n) = \frac{1}{3} e V_n$$

وبالتالي (V_n) متناقص هندسي أساسها $\frac{1}{3}e$ ، وطرفي النهاية

$$V_0 = U_0 - e^0 = 2 - 1 = 1$$

(0,28)

(ب) كتابة V_n بدلالة n

لدينا من أجل $n \in \mathbb{N}$
$$V_n = V_0 \times \left(\frac{1}{3}e\right)^n = \left(\frac{1}{3}e\right)^n$$

(0,28)

استنتاج U_n بدلالة n

لدينا $V_n = U_n - e^n$ ومن ثم
$$U_n = V_n + e^n = \left(\frac{1}{3}e\right)^n + e^n$$

(ج) حساب بدلالة n مجموع T_n حيث $T_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$

(0,18)
$$T_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}e\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}e} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}e\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}e} = \frac{3}{2}e \left(1 - \left(\frac{1}{3}e\right)^{n+1}\right)$$

(د) لدينا $W_n = \ln(U_n - V_n)$

إف التحقق أنه متناقص $n \in \mathbb{N}$

(0,18)

$$W_n = n$$

$$W_n = \ln(U_n - V_n) = \ln e^n = n$$

(هـ) إبان أن (W_n) متناقص هندسي وبالتالي حساب طرفي النهاية

(0,18)

لدينا
$$W_{n+1} = W_n + 1$$

$$W_0 = 0$$

$$S_n = W_1^2 + W_2^2 + \dots + W_n^2$$

البرهان بالمثل أجع أنه متناقص $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(0,18)

نرمز د $P(n)$ للخاتمة
$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = 1$$

$$لدينا $W_1^2 = 1^2 = 1$ و $W_2^2 = 2^2 = 4$$$

ومنه $P(n)$ صحيحة $\forall n \in \mathbb{N}$ ونفرض أن $P(n+1)$ صحيحة
أي نثبت أن

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$S_{n+1} = S_n + W_{n+1}^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

لنفعل

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

ومنه

$$(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

ولدينا صحة آخرى؛
وعليه

ومنه $P(n+1)$ صحيحة $\forall n \in \mathbb{N}$ بالترتيب فبذلك $P(n)$ صحيحة $\forall n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

حل لمعرب القائل

لدينا $z_A = 2i$ و $z_B = \sqrt{3} + i$ و $z_C = \sqrt{2} + i$

١) كتابة كل من z_A و z_B و z_C على الشكل القطبي (المثلثي) لهذه النقطة

$$z_A = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right), \quad z_B = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$z_C = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

استنتاج أن لنقط A و B و C تقع على نفس الدائرة بطلب احس مركزها ونصف قطرها

$$OA = OB = OC = 2$$

$$|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$$

ومن هنا لنقط A و B و C تقع على الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 2 .

٢) احس قيمة z_B^n احس z_B^n الذي يكون من أجلها z_B^n حقيقيا سالبا.

$$z_B^n = \cos^n \frac{\pi}{6} + i \sin^n \frac{\pi}{6} = \pi + 2k\pi \quad \text{حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$n = 6 + 12k$$

$$n \frac{\pi}{6} = \pi + 2k\pi \quad \text{حيث } k \in \mathbb{Z}$$

٢) كتابة $\frac{z_C}{z_B}$ على الشكل الجبري والمثلثي لهذه النقطة

$$\frac{z_C}{z_B} = \frac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{3} + i} = \frac{(\sqrt{2} + i)(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}i + \sqrt{6}i + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i$$

$$\frac{z_C}{z_B} = \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}$$

$$\sin \frac{\pi}{12}$$

$$\cos \frac{\pi}{12}$$

٣) استنتاج القيمة العددية لـ $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$

بالمطابقة بين الشكل المثلثي والمثلثي الجبري لهذه النقطة

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

$$0.25 \times 2$$

$$z = 2 + 4i$$

$$f(M) = M^2$$

(3) لدينا

في بيان أن f تشابه حسابي مباشر $f(z) = z^2$ بين عناصر

المجموعة

لها أن $z \in \mathbb{C}^*$ $|z| \neq 1$ فإن f تشابه مباشر

نستنتج $|z| \neq 1$ و $k_2 |z| \neq 1$ و $k_2 \neq 1$ و $k_2 \neq 0$ و $k_2 \neq \infty$

النتيجة ذات الصلة

$$z = \frac{b}{1-a} = \frac{4+2i}{1-2i} = \frac{(4+2i)(1+2i)}{5} = \frac{4+8i+2i-4}{5}$$

$$z = 2i = z_A$$

(4) $|z - \sqrt{3} + i| = |z + 2i|$ $|z - \sqrt{3} + i| = |z + 2i|$ $|z - \sqrt{3} + i| = |z + 2i|$

$$|\bar{z} - (\sqrt{3} - i)| = |z + 2i|$$

$$|\bar{z} - \bar{z}_B| = |z - z_A|$$

$$|\bar{z} - \bar{z}_B| = |z - z_A|$$

$$|z - z_B| = |z - z_A|$$

$$MA = MB$$

وهذه المجموعة S هي محور AB المستقيمة $[AB]$

حل آخرين الرابع :

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$g(x) = e^{2x} - 4x - 1$$

(I) لدينا

(1) > استكشافات لالة g :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \left(e^{-2x} - 4x^{-2} - \frac{1}{e^x} \right) = +\infty$$

حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 2e^{2x} - 4$$

لدينا هنا أجل $x \in \mathbb{R}$:

استكشاف حساب في x لالة $g'(x)$:

لدينا $g'(x) = 2e^{2x} - 4$ يكافئ $2e^{2x} - 4 = 0$ أي $x = \ln 2$
 ومنه لالة $g'(x)$ تكون كالآتي :

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+

ومنه لالة g متناقصة على $]-\infty; \ln 2[$
 و متزايدة على $]\ln 2; +\infty[$
 نستعمل جدول آخرات لالة g :

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	q	$+\infty$
$g'(x)$	-	-	0	+	+
$g(x)$	$+\infty$		$1 - 2\ln 2$		$+\infty$

$$g(\ln 2) = e^{2\ln 2} - 4\ln 2 - 1 = 2 - \ln 4 - 1 = 1 - 2\ln 2$$

(2) بيان أن المعادل $g(x) = 0$ قابل حله في $]\ln 2; +\infty[$
 $0.62 < x < 0.64$
 لدينا $g(0) = 0$

(0.28)

لدينا، لـ g مستمرة و $\frac{1}{2}$ على مجال $[0, 1]$ (0.8)
 وبذلك نحصل على مجال $J_{0,62;0,64}$ و $g(0,62) \times g(0,64) < 0$
 إذن $\begin{cases} g(0,62) = -0,02 \\ g(0,64) = 0,03 \end{cases}$ ومنه حسب مبدأ القيمة المتوسطة يوجد $\xi \in]0,62; 0,64[$ (0.8)

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً $\xi \in]0,62; 0,64[$ (0.8)
 حيث $\xi \in]0,62; 0,64[$ (0.8)

ب) استنتاج $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ (0.8)

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-	+

$P_g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \left(2x + \frac{3}{2}\right)e^{-2x} + x - 1$ (II)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (1) حساب

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + \frac{3}{2}\right)e^{-2x} + x - 1 = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^{2x}} + \frac{3}{2e^{2x}} + x - 1 = +\infty$

ب) تبين أن f متصلة $\forall x \in \mathbb{R}$ (0.8)
 لدينا $f'(x) = 2e^{-2x} - 2e^{-2x}(2x + \frac{3}{2}) + 1$ (0.8)
 $= e^{-2x}(2 - 4x - 3 + e^{2x}) = e^{-2x}(e^{2x} - 4x - 1)$

ومن ذلك $f'(x) = e^{-2x} g(x)$ (0.8)

$f(0) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(7)

2) تبين أن النقطة $\left(\frac{1}{4}; 2e^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\right)$ نقطة انحناء لـ (9).

$$f(x) = e^{-2x} g(x)$$

لدينا

$$f'(x) = -2e^{-2x} g(x) + g'(x) e^{-2x}$$

ومن ثم:

$$= e^{-2x} (-2g(x) + g'(x))$$

$$= e^{-2x} (-2e^{2x} + 8x + 2 + 2e^{2x} - 4)$$

$$f''(x) = (8x - 2) e^{-2x}$$

ومن ثم

لدينا $f''(x) = 0$ تكافئ $x = \frac{1}{4}$ ومن ثم لدينا $f''(x) > 0$ $x > \frac{1}{4}$ و $f''(x) < 0$ $x < \frac{1}{4}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

لذا فإن النقطة $\left(\frac{1}{4}; 2e^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\right)$ هي نقطة انحناء لـ (9) أي نقطة انحناء لـ (9) $x = \frac{1}{4}$ ونغيرت طبعاً، فها فإن

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} - 1 = 2e^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}$$

3) 9) تبين أن المستقيم (A) هو مماس لـ (9) عند $x = 1$ $y = x - 1$ معاً، ب مائل لـ (9) عند $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + \frac{3}{2}\right) e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^{2x}} + \frac{3}{2e^{2x}} = 0$$

ومن ثم (A) مماس ب مائل لـ (9) عند $x = 1$

15)

$$e^{-2x} \neq 0 \quad \text{لأن} \quad 2x + \frac{3}{2} = 0 \quad \text{عند} \quad x = -\frac{3}{4}$$

د، استعمل الموضع النسبي لـ (9) و (A):

$$f(x) - (x-1) = 2x + \frac{3}{2} \quad \text{عند} \quad x = -\frac{3}{4}$$

وعلى الموضع النسبي لـ (9) و (A) $x = -\frac{3}{4}$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{4}$	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
الموضع النسبي	(9) فوق (A)	(9) و (A) متقاطعتان	(9) تحت (A)

د. ثبوت أن (C) هي نقطة على (T) موازية لـ (M) المطلوب تعيين معادلاته

لدينا $1 = f(x_2) = g(x_2) = 4x_2 - 120$ ومنه $x_2 = -\frac{1}{4}$ وعليه (C) هي نقطة على (T) موازية لـ (M) معادلاته هي:

$$y = x + \frac{1}{4} + f\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)e^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{4} = \sqrt{e} - \frac{5}{4}$$

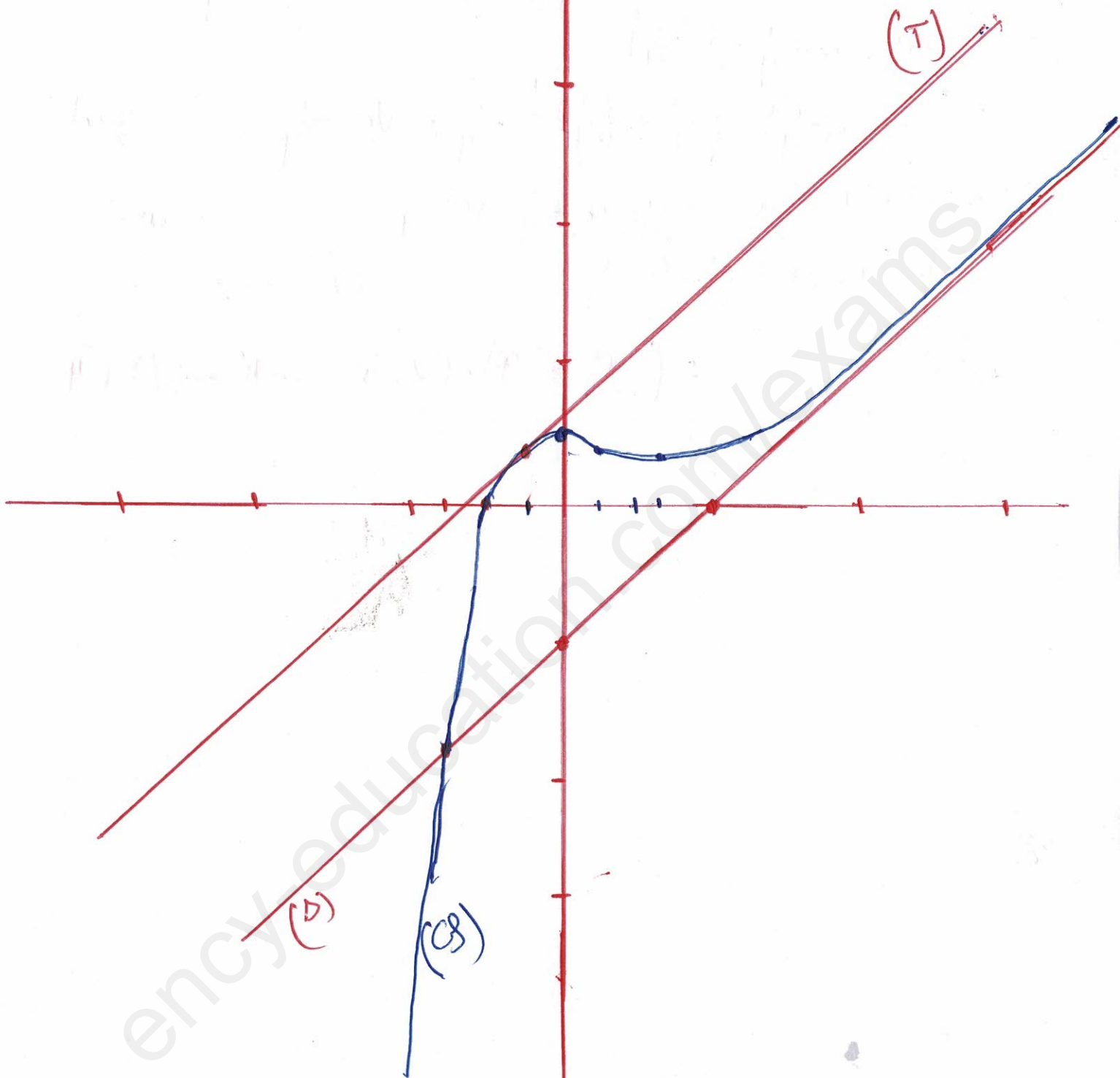
ومنه معادلات (T) هي $y = x + \frac{1}{4} + \sqrt{e} - \frac{5}{4}$

$$y = x + \sqrt{e} - 1$$

هـ

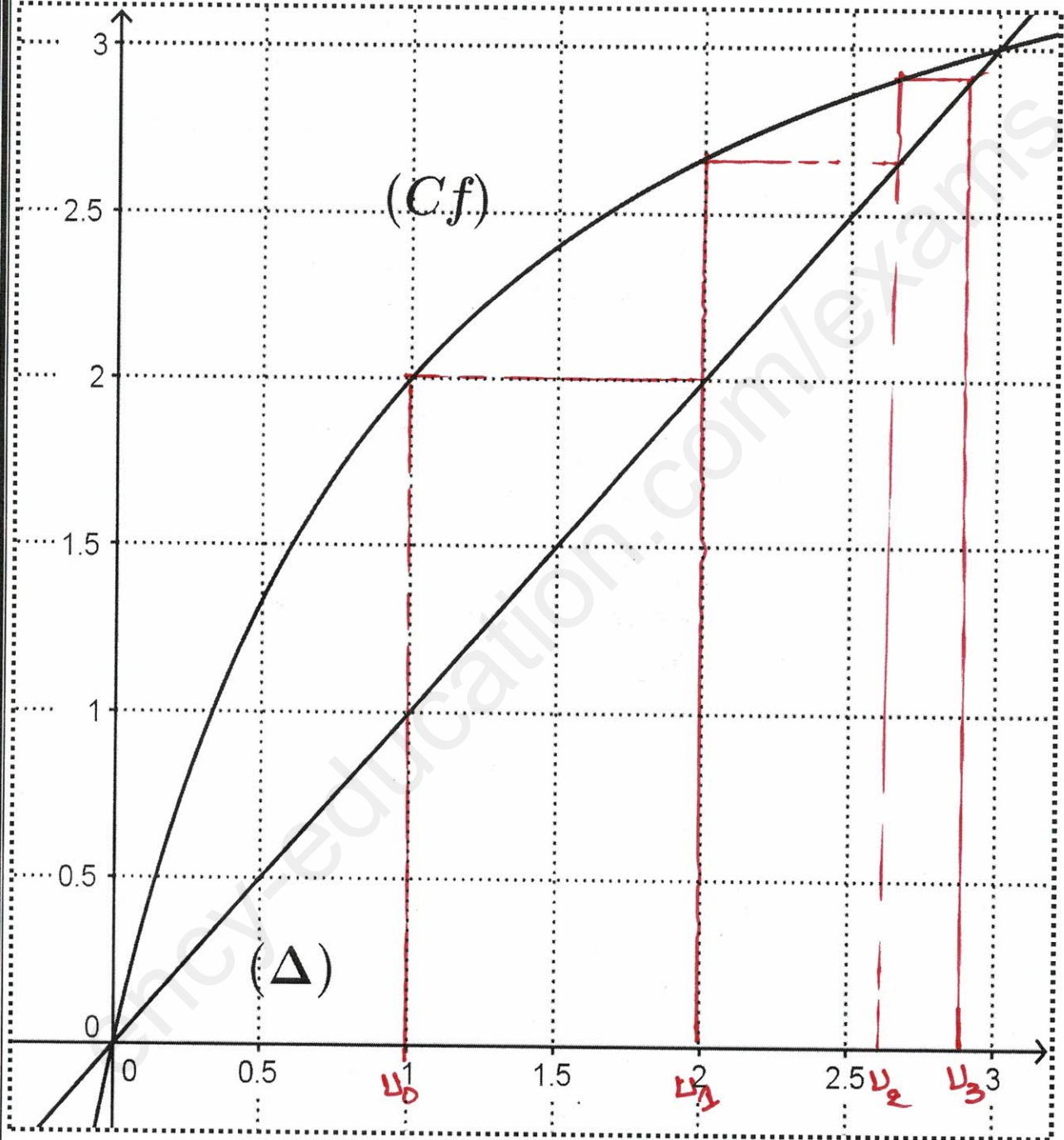
4) أوجد المساحة من (A) و (T) و (C) : 0.78

9



(د) احسن بينا قيمتين لوسط $\frac{1}{2}$ و $\frac{2}{2}$ m ، تقبل من اجلها المعادلة $f(x)$
 حلها حتمل عنها الى مثارة
 لبعضها من اجل $\frac{1}{2}$ ، $m \in [-1, 1]$ فان المعادلة تقبل حلين حتمل عنها الى مثارة.

0,28



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول (4,5 ن):

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = \frac{1}{4}$

$$u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n + 4} \quad \text{و} \quad v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$$

و من اجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$

(أ) برهن بالتراجع على أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$.

(ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

(2) أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$.

(ب) عبر عن v_n بدلالة n .

(ج) اوجد عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim u_n$.

(3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{3}{1-u_{2021}} + \frac{3}{1-u_{2022}} + \dots + \frac{3}{1-u_{2021+n}}$

التمرين الثاني (4 ن):

(1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول Z التالية: (I) $Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4 = 0$

(2) نرمز الى حلي المعادلة (I) بـ Z_1 و Z_2 بين أن: $\left(\frac{Z_1 \times Z_2}{4}\right)^{2021} = 1$

(3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، النقاط A, B, C ،

التي لواحقها على الترتيب : $z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 4\sqrt{3} + i$ ،

أنشئ النقاط A, B, C .

(ب) أكتب على الشكل الجبري ثم الأسّي العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(ج) عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1);(B;-1);(C;2)\}$ ثم أنشئ G .

(د) عين Z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABDC$ مربع .

التمرين الثالث: (4,5 ن)

يحتوي كيس على 9 كريات لا نفرق بينها عند اللمس منها ثلاثة حمراء تحمل الارقام 1,0,1- وأربعة بيضاء تحمل

الأرقام 1,0,1,1- وكرتين خضراء تحمل الأرقام 1, -0، نسحب على التوالي وبدون ارجاع ثلاث كرات من الكيس.
(1) أحسب احتمال الحوادث التالية:

A : سحب ثلاث كرات من نفس اللون.

B : سحب ثلاث كرات مجموع أرقامها معدوم.

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب العدد الأصغر من بين الأعداد المسحوبة.

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X

(ب) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

(ج) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

التمرين الرابع (07 ن)

1. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (-x^2 - x + 1)e^{-x} - 1$

(1) أدرس تغيرات الدالة g .

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل على $\square$ حلين أحدهما معدوم والاخر α حيث $-1; 5 < \alpha < -1; 6$

(3) حدد إشارة $g(x)$ على $\square$.

2. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أحسب نهاية الدالة f $+\infty$ و عند $-\infty$.

(2) تحقق أنه من أجل $x \in \square$: $f'(x) = g(x)$ واستنتج اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ هو مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ثم أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) .

(4) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين احداثيتهما.

(5) أنشئ على المجال $[-2; 5; +\infty[$ كل من (Δ) و (C_f) (تعطى $f(\alpha) = 0; 3$)

(6) نعتبر الدالة h المعرفة على $\square$ بـ : $h(x) = |x| + (x^2 - 3|x| + 2)e^{|x|}$ وليكن (C_h) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب

إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(أ) برهن أن h دالة زوجية.

(ب) اشرح كيفية انشاء المنحنى (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه في نفس المعلم السابق

صفحة 2 من 4

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الاول (05 ن):

نعتبر الدالة f المعرفة على $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ كمايلي : $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب

الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y = x$ كما هو موضح في الوثيقة المرفقة

- نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الاول $u_0 = 4$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$
- (1) باستعمال الوثيقة المرفقة مثل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 (دون حسابها موضحا خطوط الانشاء)
- (2) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها
- (3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 1$ ثم تحقق من صحة تخمينك.

$$(4) \quad (v_n) \text{ متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي } n : v_n = \ln\left(1 - \frac{1}{u_n}\right)$$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحددها الاول

ب) أكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

ت) أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

$$(5) \text{ أكتب بدلالة } n \text{ المجموع } S_n \text{ حيث : } S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n}$$

التمرين الثاني:(4ن):

توجد اجابة صحيحة واحدة من بين الأجوبة المقترحة في كل حالة من الحالات التالية, اختر الاجابة الصحيحة مبررا اختيارك .

- (1) يحتوي كيس على n كرة حمراء و 4 كرات بيضاء الكرات لا نفرق بينها عند اللمس نسحب من الكيس n كرة على التوالي مع اعادة الكرة المسحوبة الى الكيس بعد كل سحبة احتمال الحصول على كرة حمراء على الاقل هو:

$$\text{أ) } 1 - \left(\frac{4}{4+n}\right)^n \quad \text{ب) } \left(\frac{4}{4+n}\right)^n \quad \text{ج) } \left(\frac{n}{n+4}\right)^n$$

$$(2) \quad Z \text{ عدد مركب حيث : } Z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{العدد المركب } Z^{2021} \text{ يساوي:}$$

$$\text{أ) } \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{ب) } \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{ج) } \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

(3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، النقاط A, B, C ،

التي لواحقتها على الترتيب : $z_A = 3 - 2i$ ، $z_B = 3 + 2i$ ، $z_C = 4i$ طبيعة الرباعي $OABC$ هي:

ب) مستطيل ب) معين ج) متوازي أضلاع.

$$(4) \text{ حلول المتراجحة : } 0 \leq 2\ln(-x+1) - 2 \text{ في المجال }]-\infty; 1[\text{ هي:}$$

$$\text{أ) } [e-1; 1] \quad \text{ب) }]-\infty; e-1] \quad \text{ج) }]-\infty; 1]$$

التمرين الثالث (4ن):

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس منها أربعة بيضاء تحمل الأرقام 1,1,2,3 وثلاثة حمراء تحمل الأرقام 1,2,3 وثلاثة خضراء تحمل الأرقام 1,1,3. نسحب عشوائيا وفي أن واحد ثلاث كرات من الكيس.

(1) أحسب احتمال الحوادث التالية:

A : الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون B : الحصول على ثلاث كرات تحمل رقم فردي

C : الحصول على ثلاث كرات تحمل ألوان العلم الوطني.

(2) بين أن: $P(A \cap B) = \frac{1}{60}$ ثم احسب $P(A \cup B)$

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكريات التي تحمل الرقم الفردي .

أ) عين قيم المتغير العشوائي X

ب) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ج) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

التمرين الرابع (07 ن)

• نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ: $g(x) = (x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)$

(1) ادرس اتجاه تغيرات الدالة g على $]-1; +\infty[$.

(2) أحسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$

• نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي

المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

2. بين أنه من أجل كل x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

3. بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه 1 يطلب كتابة معادلته.

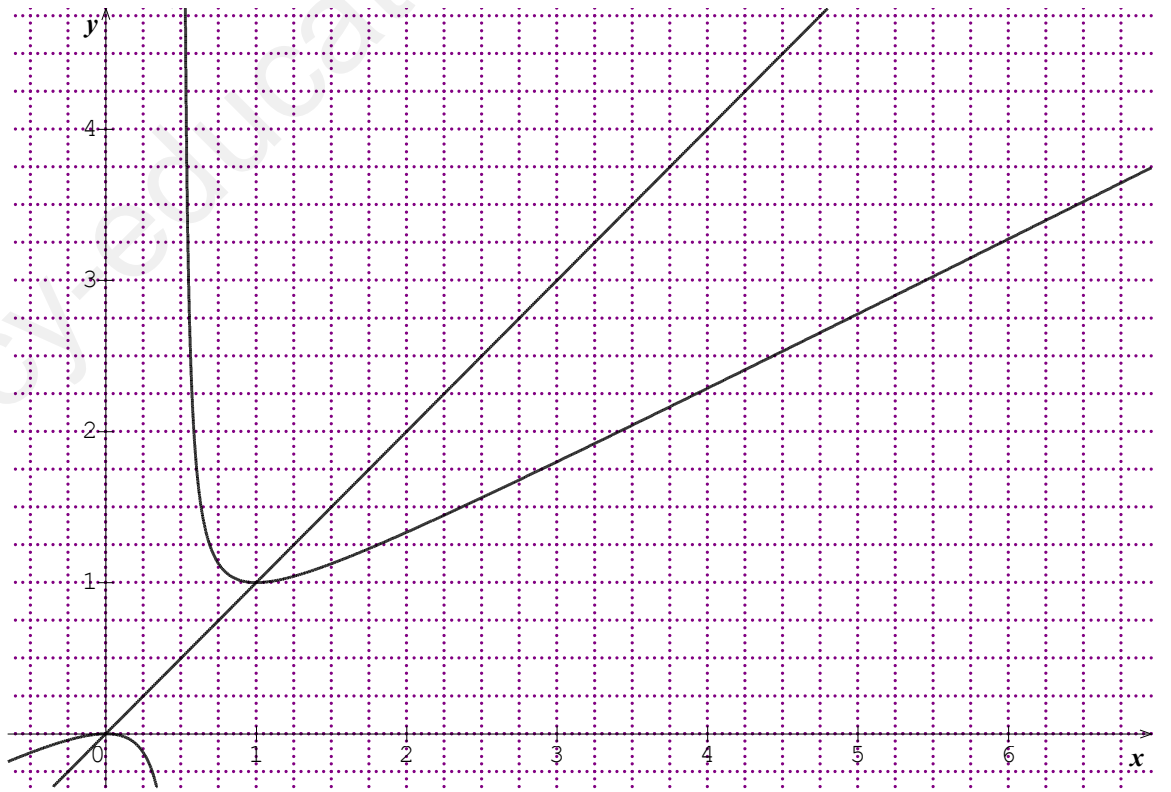
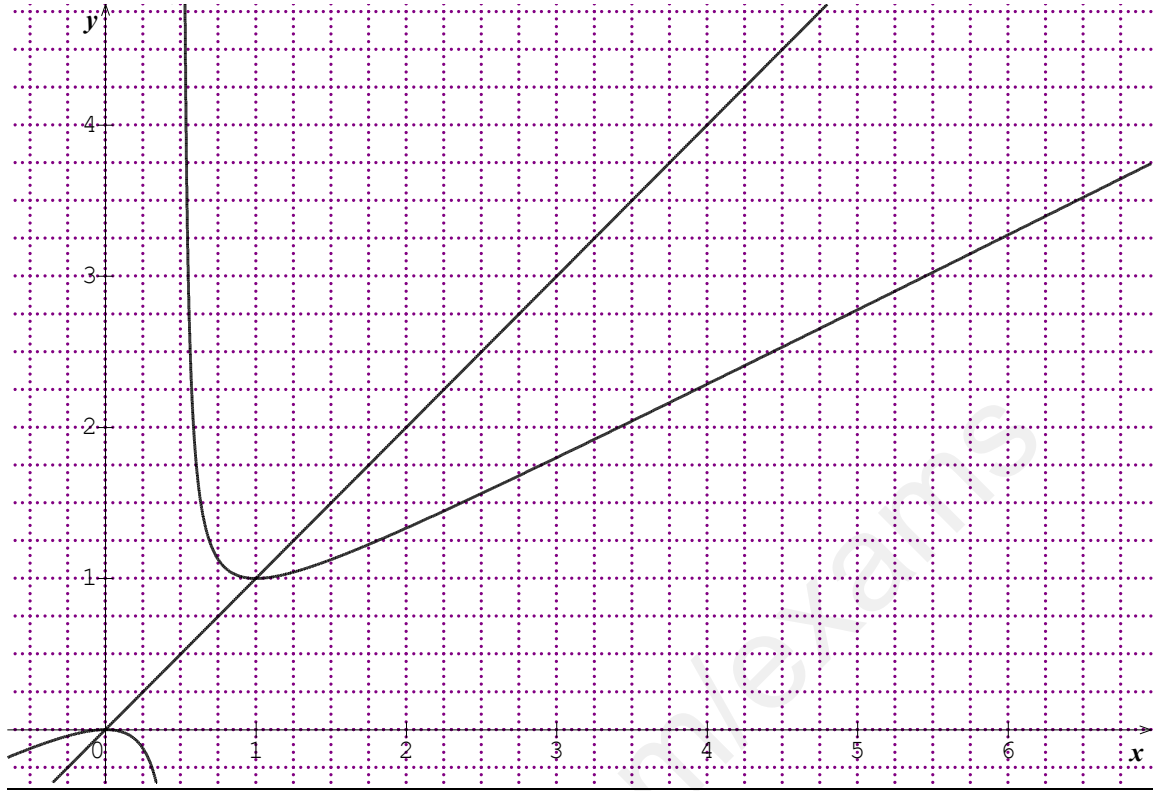
4. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$ ومادا تستنتج بيانيا؟

5. (Δ) مستقيم معادلته $y = x$ أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة الى (Δ) .

6. أرسم (Δ) و (T) و (C_f) .

7. m وسيط حقيقي ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $m(x+1) + \ln(x+1) = 0$

انتهى الموضوع الثاني





Yes
we can!

الدورة: 2021

عبد الرحمن



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

نانوية هارون الرئيس بشار الجريد

امتحان بكالوريا تجريبي

الشعبة: علوم تجريبية

المدة: 03 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتين:



الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية، مع التبرير:

(1) (v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول v_0 و أساسها q حيث:

$$v_0 + v_1 = 30 \quad \text{و} \quad v_0 \times v_2 = 576$$

(P) $v_{n+1} - v_n$ يساوي:

(ج) $3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

(ب) 3×4^n

(أ) 18×4^n

(B) المجموع $S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$ يساوي :

(ج) $\ln\left(\frac{1-n^2}{2}\right)$

(ب) $\ln(3 \times 4^n)$

(أ) $n \ln 4$

(2) f الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x - 3$.

(P) على المجال $]0; +\infty[$ الدالة f :

(ج) ليست رتيبة

(ب) متزايدة تماما

(أ) متناقصة تماما

(B) مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \leq 0$ هي:

(ج) $[-3; 1[$

(ب) $[e^{-3}; e]$

(أ) $[\ln 2; e]$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

$$\begin{cases} u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n \\ u_1 = 1 \quad \text{و} \quad u_0 = 0 \end{cases}$$

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي:

(1) نضع لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n$ و $w_n = 5^n u_n$.

بين أن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية أساسها $\frac{1}{5}$ ثم أكتب v_n بدلالة n .

بين أن المتتالية $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ حسابية أساسها 5.

(2) أكتب w_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

(3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم أن: $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$.

(4) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم أن: $0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$; ثم أحسب النهاية: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

الإستاذ ل. عبد الرحمن
الاستاذ ل. عبد الرحمن



التمرين الثالث: (05 نقاط)

يتكون مكتب للدراسات من 20 مهندسا ومهندسة يتوزعون حسب الجنس والتخصص كما هو مبين في الجدول أسفله .

التخصص	الذكور	الإناث
الإعلاميات	5	3
الهندسة المدنية	8	4

تم اختيار ثلاثة عناصر من هذا المكتب عشوائيا وفي آن واحد للمشاركة في إحدى الدورات التكوينية.

نعتبر الحادثتين A : " العناصر التي وقع عليها الاختيار كلها من الإناث " .

و B : " العناصر التي وقع عليها الاختيار كلها من نفس التخصص " .

(1) بين أن: $P(A) = \frac{7}{228}$ ثم احسب: $P(B)$ و $P(A \cap B)$.

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد تخصصات العناصر التي وقع عليها الاختيار.

(P) بين أن $p(X=1) = \frac{69}{285}$ ثم استنتج قانون احتمال المتغير العشوائي X .

(B) احسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (x+3)e^x - 1$

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها.

ج) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-0,8 < \alpha < -0,7$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (x+2)(e^x - 1)$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاريا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

ج) اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) الموازي للمستقيم (Δ) .

(4) ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $]-\infty; 1]$ (يعطى $f(\alpha) \approx -0,7$)

(5) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = |x|(e^{|x|-2} - 1) + 1$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) بين أن الدالة h زوجية .

ب) تأكد أنه من أجل كل x من المجال $[0; +\infty[$ فإن : $h(x) = f(x-2) + 1$.

ج) اشرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم ارسم (C_h) على المجال $[-3; 3]$.

بالنوفيق



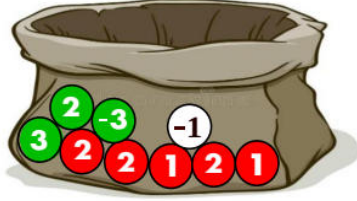
انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني



التمرين الأول: (04 نقاط)

كيس يحوي 9 كريات لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي:
خمس كريات حمراء مرقمة بـ: 1, 1, 2, 2, 2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: -3, 2, 3 وكريه بيضاء مرقمة بـ: -1
نسحب عشوائيا 4 كريات في آن واحد.



(1) احسب احتمال الحوادث التالية:

A : "الحصول على أربع كريات من نفس اللون".

B : "الحصول على كرية بيضاء على الأكثر".

C : "الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم".

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب أكبر الأرقام المحصل عليها.

(أ) عيّن قيم المتغير العشوائي X ثم عرّف قانون احتماله .

(ب) احسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

(ج) احسب احتمال الحادثة : " $X^2 - X > 0$ ".

التمرين الثاني: (05 نقاط)

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية: $(z+1-\sqrt{3})(z^2+2z+4)=0$.

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A, B, C و D التي لواحقها : $z_A = -1 + \sqrt{3}$ ، $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ ، $z_C = \bar{z}_B$ و $z_D = 4i$.

(1) (أ) اكتب z_D و z_B على الشكل الأسّي ثم استنتج الشكل الأسّي للعدد z_C .

(ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $(z_C - z_B)^n$ عددا حقيقيا.

(2) (أ) بيّن أنّ $z_B - z_A = i(z_C - z_A)$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC واحسب مساحته.

(ب) استنتج أنّ: B هي صورة C بدوران r يطلب تعيين عناصره المميزة.

(3) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب L حيث $L = \frac{z_C - z_A}{z_C}$.

(4) بيّن أنّ : $L = \frac{\sqrt{6}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$

(5) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي، ذات اللاحقة z حيث : $\arg(z+4) = \frac{\pi}{4}$.

- تحقّق أنّ النقطة D تنتمي إلى (Γ) ، ثم عيّن المجموعة (Γ) .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية بعدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3} \quad \text{ولتكن المتتالية } (v_n) \text{ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ بـ : } v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

(1) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0 .

(2) عبر بدلالة n عن عبارة الحد العام v_n .

(ب) استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

(ب) تحقق أن: $\frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_n)$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n .

(ج) استنتج بدلالة n المجموع: $S'_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x + 1 - x \ln x$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $3,5 < \alpha < 3,6$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$. (C_f) تمثيلها البياني

(1) بين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $x = 0$ و $y = 0$.

(2) أ- برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

ج- اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

د- احسب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ ، فسّر النتيجة هندسياً.

(3) بين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ ، ثم ارسم (C_f) .

(4) نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي الموجب تماماً x و m وسيط حقيقي:

$$x^2 + x - 2m(x+1) = \ln(x^2) \dots (E)$$

أ- تحقق أن المعادلة (E) يؤول حلها إلى حل المعادلة: $f(x) = \frac{1}{2}x - m$.

ب- عيّن بيانياً قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حلين متميزين.

(5) h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $h(x) = \frac{\ln|x|}{-|x|-1}$ و (C_h) منحناها البياني في المستوي.

أ- بين أن الدالة h زوجية.

ب- ارسم في نفس المعلم المنحنى (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f) .

بالنوفيق

انتهى الموضوع الثاني



الموضوع التجريبي 01

التمرين 01: (04 نقط)

I) نعرف على $\mathbb{N}^*$ المتتالية (u_n) حيث:

$$\begin{cases} u_1 = e^2 \\ u_{n+1} = e^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{u_n} \end{cases}$$

- احسب كلا من u_2 و u_3 .
- أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن: $u_n > \frac{1}{e}$
- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ثم استنتج تقارب المتتالية (u_n)

II) نضع لكل n من $\mathbb{N}^*$: $w_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln u_n$.

- أثبت أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.
- عبر عن w_n بدلالة n ثم استنتج أن: $u_n = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$ ثم احسب $\lim u_n$
- احسب بدلالة n الجداء: $\pi_n = u_1 \times u_2 \times u_3 \times \dots \times u_n$

التمرين 02: (04 نقط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(0, \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط A, B, C لواقعها على الترتيب:

$$z_A = 1 + 2i, \quad z_B = 1 + \sqrt{3} + i, \quad z_C = 1 - 2i$$

(1) أ) تحقق أن: $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = i\sqrt{3}$, استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب) عين لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC .

(2) أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 2(1 + 2 \cos \theta)z + 5 + 4 \cos \theta = 0$ مع $\theta \in \mathbb{R}$.

ب) بيّن أن صورتني حلي المعادلة (C) تنتمي إلى الدائرة (C) .

(3) نعتبر التحاكي h الذي مركزه B ونسبته 2. عين لاحقة النقطة D صورة ω بالتحاكي h ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

(4) عين و أنشئ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\arg(z^2) = \arg(-z) + 2k\pi$ (حيث k عدد صحيح).

التمرين 03: (05 نقط)

يحتوي كيس على $4n$ كرة من لونين مختلفين : $(2n+1)$ كرة صفراء و $(2n-1)$ كرة خضراء حيث $n \in \mathbb{N}^*$.
نسحب من الكيس كرتين في آن واحد .

(1) من أجل $n=10$ أحسب احتمال الحادث التالية :

A : " الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين " .

B : " الكرتان المسحوبتان لونهما أخضر " .

C : " الكرتان المسحوبتان لهما نفس اللون " .

(2) في هذا السؤال n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 . نسمي P_A احتمال الحادثة A .

- من أجل أي قيمة للعدد الطبيعي n يكون P_A أعظما ؟

(3) نفرض الآن أن الكيس يحتوي على 8 كرات منها 5 صفراء مرقمة كما يلي : $1, 1, 0, 0, 0$ و 3 كرات خضراء مرقمة كما يلي : $2, 1, 0$.

- أحسب احتمال الحادثتين : D : " الكرتان المسحوبتان من نفس اللون " .

E : " جداء العددين المسجلين على الكرتين المسحوبتين معدوم " .

(4) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل نتيجة سحب بمجموع الرقمين المسجلين على الكرتين المسحوبتين .

(أ) أوجد قيم المتغير العشوائي X .

(ب) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

(ج) أحسب $P(|X| \leq 2)$ ثم بين أن $P(5X^2 - 15 \geq 0) = P(X \geq 2)$.

التمرين 04: (07 نقط)

الجزء الأول : إذا علمت أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ برهن أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ وأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

لتكن الدالة g ذات المتغير حقيقي x معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (ax + b)e^x + c$.

(1) عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c علما أن (Γ) تمثل الدالة g يشمل النقطة $A(0;2)$ و يقبل مماسا أفقيا عند النقطة

ذات الفاصلة 0 كما يقبل مستقيما مقاربا أفقيا بجوار $-\infty$ معادلته $y=1$.

(2) يعطى : $c=1, b=1, a=-1$.

(أ) أدرس تغيرات الدالة g .

(ب) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α ينتمي إلى المجال $]1.27; 1.28[$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

الجزء الثاني : نعتبر الدالة f ذات المتغير حقيقي x معرفة كما يلي : $f(x) = e^x - \ln|x-1|$. (C_f) تمثلها البياني في المعلم

المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بين أن الدالة f معرفة على المجال $]1; +\infty[$.

(2) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$ فإن : $f'(x) = -\frac{g(x)}{x-1}$.

(3) بين أن : $f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha-1}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(4) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]1; +\infty[$ فإن : $f(x) = x \left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln(x-1)}{x-1} \times \frac{x-1}{x} \right)$ و أحسب نهايات الدالة f .

(5) شكل جدول تغيرات الدالة f .

(6) أنشئ بدقّة المنحنى (C_f) .

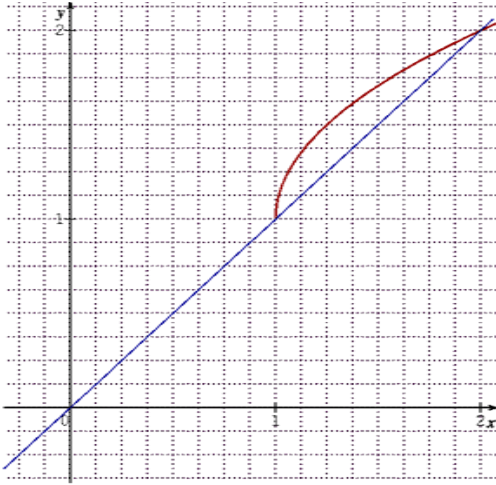
(7) ناقش بيانًا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $-\frac{e^x - m - 1}{\ln|x-1|} + 1 = 0$.

انتهى الموضوع.

الموضوع التجريبي 02

التمرين 01: (04 نقط)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بعدها الأول $u_0 = \frac{3}{2}$ و بالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f الدالة العددية



المعرفة على $[1; 2]$ بالعلاقة $f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$ و (C) تمثيلها البياني

في معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (الرسم المقابل)

(1) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فان: $1 < u_n < 2$.

(2) باستخدام (C) و (Δ) مثل على محور الفواصل الحدود

u_0, u_1, u_2, u_3 مع إظهار خطوط الإنشاء.

(3) اثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة.

(4) اثبت أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو عدد حقيقي يطلب تعيينه.

(5) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n - 1)$

(أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول.

(ب) عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

(ج) احسب $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ ثم تأكد من نتيجة السؤال (4)

التمرين 02: (05 نقط)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $(z-i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$ المعادلة:

(2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نسمي A, B و C نقط المستوي التي لاحتقاتها على الترتيب $z_1 = \sqrt{3} + i, z_2 = \sqrt{3} - i$ و $z_3 = i$.

(أ) اكتب العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسّي.

(ب) استنتج قياسا للزاوية $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA})$ وطبيعة المثلث OAB .

(ج) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا موجبا.

(د) هل توجد قيم للعدد الطبيعي n يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفا؟ برّر إجابتك.

(3) (أ) عيّن العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه A ويحول B إلى C ، محددًا نسبته وزاويته.

(ب) استنتج طبيعة المثلث ABC

(4) (أ) عيّن العناصر المميزة لـ (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق:

$$|z - z_1|^2 + |z - z_3|^2 = 5$$

(ب) عيّن (E') مجموعة النقط M من المستوي التي لاحتقتها z حيث: $|z - z_1| = |z - z_3|$

التمرين 03: (04 نقط)

(I) يشمل امتحان المسابقة الوطنية للطب 100 درس ، لم يحضر منها الطالب الجامعي سوى 60 درسا وضعت 100 قصاصة في إناء واحد ، بحيث كل قصاصة تحتوي على سؤال واحد من درس واحد فقط . يقوم الطالب بسحب عشوائيا قصاصتين معا

- (1) أحسب احتمال الحادث : A " لا يعرف الطالب أي موضوع من الموضوعين "
- (2) أحسب احتمال الحادث : B " يعرف الطالب الموضوعين معا "
- (3) أحسب احتمال الحادث : C " يعرف الطالب موضوعا واحدا من الموضوعين "
- (4) أحسب احتمال الحادث : D " يعرف الطالب على الأقل موضوعا من الموضوعين "

(II) نفرض الآن أن الطالب حضر n درسا ، مع n عدد طبيعي بحيث $n \leq 100$

- (1) أحسب الاحتمال P_n ، احتمال الحادث : A_n " يعرف الطالب على الأقل موضوعا من الموضوعين "
- (2) عين أصغر عدد طبيعي n الذي من أجله يكون $P_n \geq 0,80$

التمرين 04: (07 نقط)

الجزء الأول : نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{x+4}{x+2}$.

- (1) أحسب نهاية الدالة g عند $+\infty$ و عند 0 بقيم كبرى ، ثم فسر النتائج هندسيا .
- (2) أدرس إتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها .
- (3) بيّن أن المعادلة : $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال $[0,36; 0,38]$
- (4) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0; +\infty[$.

الجزء الثاني : نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - x$.

- (1) أحسب نهاية الدالة f عند 0 بقيم كبرى .
- (2) أ. نذكر أن : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ (يمكن وضع : $\frac{2}{x} = h$) .
ب. إستنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.
- جـ . بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = -x + 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.
- (3) أ. أدرس إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .
ب. بيّن أن : $f(\alpha) = 2 \cdot \frac{\alpha}{\alpha+2}$ ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.
- جـ . عيّن القيمة المضبوطة لفاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل .
- (4) أنشئ (Δ) و المنحنى (C_f) في المعلم المتعامد و المتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$.
- (5) F هي الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $F(x) = \left(\frac{x^2}{2} - 2\right) \ln(x+2) - \frac{x^2 \ln x}{2} + x - \frac{x^2}{2}$.
- برّر أن الدالة F أصلية للدالة f على $]0; +\infty[$.

انتهى الموضوع.

□ عيركم مبارك تقبل الله منا ومنكم الصيام والقيام

عزيزي الطالب يسرني أن أبشرك أنك ستكون بإذن الله من الناجحين لم يبق الكثير عليك

بمضاعفة المجهود لأجل أن تدخل الفرحة والسرور على والدك وأقاربك وأساتذتك وأحبائك

لا تنسونا من خالص الرعاء



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

ولاية تلمسان

امتحان بكالوريا تجريبي

شعبة: علوم تجريبية

دورة: جوان 2021

المدة: 3 ساعات

اختبار في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: 04 نقاط

(U_n) متتالية عددية معرفة: $U_0 = 1$, ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{4U_n + 3}{6}$

1- برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n \leq \frac{3}{2}$

2- بين أن المتتالية (U_n) متزايدة, ثم استنتج أن (U_n) متقاربة

3- نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$: $V_n = 2U_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي

أ- عين α حتى تكون المتتالية (V_n) هندسية.

ب- اكتب بدلالة n ثم عبر عن U_n بدلالة n ثم احسب نهاية المتتالية (U_n)

د- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = U_0 + \frac{U_1}{2} + \frac{U_2}{2^2} + \dots + \frac{U_n}{2^n}$ عبر عن S_n بدلالة n

التمرين الثاني: 04 نقاط

يحتوي كيس على $n+8$ كرية لا نفرق بينهما باللمس، 8 كرييات بيضاء و n كرية سوداء (n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 2)

1..نسحب على التوالي كرتين بدون ارجاع الكرية المسحوبة في كل مرة الى الكيس بحيث نربح دينارا من أجل كل كرية بيضاء مسحوبة و نخسر دينارين من أجل كل كرية سوداء مسحوبة .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب قيمة الربح الجبري .

أ- ماهي قيم المتغير العشوائي الممكنة.

ب- اكتب بدلالة n قانون احتماله.

ج- احسب أمله الرياضيائي.

د- هل توجد قيمة للعدد n تجعل الأمل الرياضيائي معدوما؟ أحسبها.

2. نفرض أننا سحبنا كرتين على التوالي من دون ارجاع، ليكن A_n حادث الحصول على كرتين من نفس اللون . B_n حادث الحصول على كرتين من لونين مختلفين.

أ- احسب $p(A_n)$ بدلالة n ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(A_n)$ ، فسر هذه النتيجة.

ب- احسب $p(B_n)$ بدلالة n ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(B_n)$ ، فسر هذه النتيجة.

التمرين الثالث: 05 نقاط

أ- احسب $P(-2)$ ثم جد العددين المركبين α و β بحيث من أجل كل z من $\mathbb{C}$: $P(z) = (z+2)(z^2 + \alpha z + \beta)$
 ب- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z) = 0$.

2. المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A, B, C نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب: $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -2$

أ- أكتب كلا من z_B, z_A و z_C على الشكل الأسّي

ب- أكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي

ج- استنتج طبيعة المثلث ABC ثم تحقق أن النقطة O هي مركز ثقل هذا المثلث.

3. عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $(z_A)^n = (z_B)^n$

4. عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط ذات اللاحقة z حيث: $|2 - z| = |1 + i\sqrt{3} - z|$

التمرين الرابع: 07 نقاط

الجزء الأول: لتكن الدالة φ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$.

1. أ- عين نهايتي الدالة φ عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة φ ثم شكل جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.

2. بين أن المعادلة $\varphi(x) = 0$ تقبل حلين α و β أحدهما معدوم و $\alpha \in [1; +\infty[$ يطلب تعيين حصر للعدد α سعتة 10^{-1} .

3. استنتج حسب قيم x إشارة $\varphi(x)$.

الجزء الثاني: f و g دالتين معرفتين على $\mathbb{R}$ بتمثيليهما البيانيين (C_f) و (C_g) على الترتيب كما يلي:

$$f(x) = (2x+1)e^{-x} \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

1.. بين أن المنحنيين (C_f) و (C_g) يمران بالنقطة $A(0;1)$ و لهما نفس معادلة المماس عند النقطة A

2. أ- بين ان من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) - g(x) = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$

ب- حسب قيم x عين إشارة $f(x) - g(x)$ على $\mathbb{R}$.

ج- استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) .

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: 04 نقاط

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة م الحالات التالية، مع التبرير:

1. النهاية التالية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right)$ تساوي: (ارشاد: ضع $t = \frac{1}{x}$)

أ- 1 ب- -1 ج- 0

2. لتكن (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 1 + \ln\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ، المتتالية (u_n) :

أ- متزايدة تماما ب- متناقصة تماما ج- غير رتيبة

3. الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$ ، تمثيلها البياني (C_f) يقبل نقطة انعطاف I احداثياتها هي:

أ- $I(0; 2)$ ب- $I(0; 3)$ ج- $I(-2; 2)$

4. الجدول التالي يعرف قانون احتمال تجربة عشوائية:

x_i	-2	-1	α	3
$p(X = x_i)$	0.12	0.50	β	0.30

قيمتا α و β حتى يكون الامل الرياضي للمتغير العشوائي X يساوي 0.32 هما:

أ- $\alpha = 1$ و $\beta = 0.08$ ب- $\alpha = 2$ و $\beta = 0.03$ ج- $\alpha = 2$ و $\beta = 0.08$

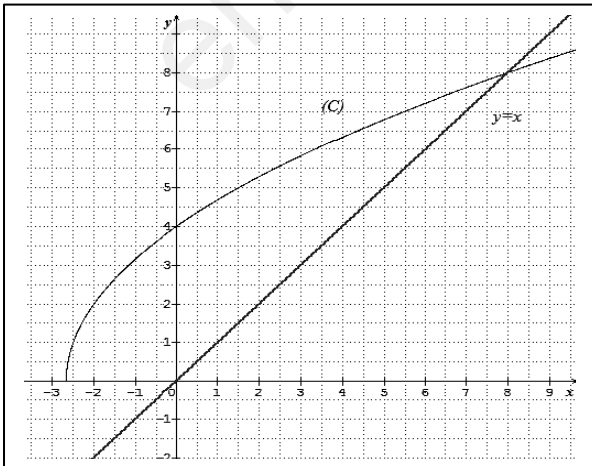
التمرين الثاني: 05 نقاط

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحده الأول: $u_0 = 0$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{6u_n + 16}$

1. الدالة المعرفة على $\left[-\frac{8}{3}; +\infty\right]$ بما يلي: $h(x) = \sqrt{6x + 16}$ و (C) تمثيلها المباني في المستوى المنسوب إلى

معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (انظر الشكل المقابل)

(أ) اعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل u_0, u_1, u_2, u_3 (دون حسابها موضحا خطوط الانشاء)



(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها

2. برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 8$

(أ) بين انه من اجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{(8 - u_n)(u_n + 2)}{\sqrt{6u_n + 16} + u_n}$

(ب) استنتج اتجاه تغير (u_n) .

3. (أ) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 < 8 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(8 - u_n)$

(ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 < 8 - u_n \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثالث: 04 نقاط

يحتوي كيس على 4 كرات بيضاء تحمل الأرقام 0، 1، 1، 2 و أربع كرات حمراء تحمل الأرقام 1، 1، 2، 2 .
نسحب عشوائيا في ان واحد 3 كرات من الكيس .

- 1- أحسب احتمال الحصول على :
أ- ثلاث كرات من نفس اللون .
ب- ثلاث كرات تحمل نفس الرقم .
ج- ثلاث كرات أرقامها مختلفة مثنى مثنى .
- 2- ليكن المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات المسحوبة التي تحمل الرقم 1
أ- عين قانون احتمال المتغير العشوائي
أحسب الامل الرياضي ج-أحسب التباين والانحراف المعياري.

التمرين الرابع: 07 نقاط

- (I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب: $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$
(1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
(2) استنتج أنه، من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.
- (II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب: $f(x) = x - \frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول 2cm)
(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$. فسّر النتيجة بيانياً.
ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
(2) أ) بيّن أنه، من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، حيث f' هي مشتقة الدالة f .
ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
ج) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم تحقق أن $0 < \alpha < 0,5$.
(3) أ) بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.
ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .
(4) نقبل أن المستقيم (T) ذا المعادلة : $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .
أ) احسب x_0 .
ب) ارسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثم المنحنى (C_f) .
ج) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين متمايزين.

انتهى الموضوع الثاني

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول: (5 نقاط)

يحتوي كيس على n كرة سوداء ($n \geq 2$) وثلاث كرات بيضاء، لا نفرق بينها عند اللمس .
(1) نسحب من الكيس عشوائيا كرتين في أن واحد .

(أ) أحسب احتمال الحوادث التالية A "الكرتين المسحوبتين من اللون الأبيض"
 B "سحب على الأقل كرة واحدة بيضاء"، C "الكرتين المسحوبتين مختلفتي اللون"

(ب) عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث $P(C) = \frac{15}{28}$

(2) نعتبر $n = 5$ ونسحب من الكيس كرتين على التوالي وبدون إرجاع . نفرض أنه عند سحب كرة بيضاء نحصل على (-10) نقطة وعند سحب كرة سوداء نحصل على $(+5)$ نقطة .
نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب كرتين مجموع النقاط المحصل عليها.
(أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X
(ب) عين الأمل الرياضي للمتغير X . ماذا تستنتج ؟

التمرين الثاني: (4 نقاط)

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $(\bar{Z} - 1 - i)(Z^2 - 2Z + 4) = 0$

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$..

نعتبر النقط A, B, C و E لواحقها على الترتيب :

$Z_A = 1 - i$ ، $Z_B = 1 + i\sqrt{3}$ ، $Z_C = \bar{Z}_B$ و $Z_E = 4 \times \frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}$

(1) (أ) أكتب كل من الأعداد Z_A, Z_B و Z_C على الشكل الأسّي .

(ب) بين أن العدد $\left(\frac{Z_B}{Z_C}\right)^{1962}$ عدد حقيقي .

(2) (أ) أكتب العدد المركب Z_E على الشكل الجبري و الشكل المثلثي

(ب) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$

(3) (أ) عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A,1); (B,2); (C,-1)\}$

(ب) عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z بحيث $\|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}\| = 4$

التمرين الثالث: (4 نقاط)

$$\begin{cases} \ln U_5 - \ln U_3 = 6 \\ \ln U_2 + \ln U_4 = 14 \end{cases} : (U_n) \text{ متتالية هندسية حدودها موجبة تماما بحيث}$$

(1) أ) بين أن أساس المتتالية (U_n) هو $q = e^3$ وحدها الأول $U_0 = e^{-2}$

ب) أكتب U_n بدلالة n .

(2) نضع : $P_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n$

أحسب بدلالة n الجداء P_n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$

(3) نضع $V_n = \ln U_{n+1} + \ln U_n$

أ) برهن أن (V_n) متتالية حسابية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول V_0 .

ب) أحسب بدلالة n المجموع $S_n = \ln U_0 + \ln U_1 + \dots + \ln U_n$

التمرين الرابع: (7 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $D =]-1, 1[\cup]1, +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{1}{x-1} + \ln(x+1)$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ، ثم فسر النتائج بيانياً .

(2) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(3) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجموعة D : $f'(x) = \frac{x(x-3)}{(x-1)^2(x+1)}$

ب) أستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(4) أكتب معادلة الماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2.

(5) الدالة المعرفة على المجال $]1, +\infty[$ بالعلاقة $g(x) = \frac{1}{x-1} + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

أ) تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1, +\infty[$: $\frac{x+1}{x} > 1$

ب) أستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]1, +\infty[$

(6) ليكن المنحنى (δ) المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto \ln x$

أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x]$ ثم فسر النتيجة بيانياً

ب) حدد وضعية (δ) و (C_f) على المجال $]1, +\infty[$

(7) أرسم (T) ، (δ) و (C_f) .

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقط)

في كل من الأسئلة التالية ، اختر إجابة صحيحة من بين الاقتراحات الثلاثة مع التعليل

(1) (U_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما بحيث $U_8 = 32$ و $U_9 \times U_{10} \times U_{11} = 8$

أساسها هو : أ) $q = \frac{1}{4}$ ب) $q = \frac{1}{2}$ ج) $q = 4$

(2) أعضاء الطاقم الصحي لمؤسسة استشفائية موزعين حسب الجدول المقابل
نختار عشوائيا عضو من الطاقم.

	أطباء	ممرضون
ذكور	12	24
إناث	8	16

احتمال أن يكون العضو المختار أنثى هو: أ) $\frac{2}{5}$ ب) $\frac{4}{30}$ ج) $\frac{1}{2}$

(3) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ ب : $f(x) = e^{ax} + \frac{b}{x+1}$ ، قيمتا العددين a و b بحيث يكون

المماس لمنحنائها في النقطة $A(0;2)$ موازيا لحامل محور الفواصل هما :

أ) $a=1$ و $b=2$ ب) $a=2$ و $b=1$ ج) $a=1$ و $b=1$

(4) العدد $\ln(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2021} + \ln(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2021}$ يساوي : أ) 0 ب) 2021 ج) $2021 \times \ln(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

التمرين الثاني: (4 نقاط)

يحتوي كيس على 9 قريصات متماثلة منها : ثلاثة حمراء تحمل الأرقام 1،0،1- و أربعة قريصات بيضاء تحمل الأرقام 1،1،0،1- وقريصتين خضراوين تحملان الرقمين 1-، 0 .
نسحب من الكيس عشوائيا ثلاث قريصات في أن واحد .

(1) أحسب احتمال الحوادث التالية : A " سحب ثلاث قريصات من نفس اللون "

B " سحب ثلاث قريصات مجموع أرقامها معدوم " ، C " سحب ثلاث قريصات جداء أرقامها سالب "

(2) أحسب احتمال الحادث $P(A \cap B)$ وأستنتج $P(\overline{A \cup B})$

(3) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب الرقم الأصغر من بين الأرقام المسحوبة .

أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

ب) عين الأمل الرياضي والتباين للمتغير X .

ج) أحسب $P(e^X - 1 > 0)$

التمرين الثالث: (5 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{3x-1}{2x}$

(1) أدرس اتجاه تغيرات الدالة f على المجال $]0, +\infty[$

(2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

(أ) برهن بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 1$

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

(ج) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

(3) (أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $0 < u_n - 1 \leq \frac{1}{2^n}$

(ج) عين نهاية المتتالية (u_n)

(4) نضع : (v_n) متتالية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية كما يلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$

(أ) بين أن المتتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول

(ب) أكتب بدلالة n كل من u_n و v_n .

(ج) أكتب بدلالة n المجموع : $s_n = \frac{v_0 - 1}{u_0} + \frac{v_1 - 1}{u_1} + \dots + \frac{v_n - 1}{u_n}$

التمرين الرابع: (7 نقاط)

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 1 - xe^{1-x}$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g

(2) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x + (x+1)e^{1-x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) (أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، وأحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب) بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$ ، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

(ج) استنتج أن للمنحنى (C_f) نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثيها .

(2) (أ) بين أن المستقيم (Δ) المعروف بالمعادلة $Y = X$ مقارب مائلا للمنحنى (C_f) .

(ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(3) (T) مستقيم معادلته $y = x + e$ ، بين أن المستقيم (T) مماس للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تحديدها .

(4) (أ) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-0.9 < \alpha < -0.8$

(ب) أحسب $f(-1.5)$ ثم أرسم (T)، (Δ) والمنحنى (C_f) .

(5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $(x+1)e^{1-x} = m$.

انتهى الموضوع الثاني

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (4ن)

يحتوي وعاء على 7 كريات لا نفرق بينها باللمس، منها ثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 وأربع كريات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 . نسحب عشوائيا من الوعاء ثلاث كريات في آن واحد.
1. احسب احتمال الحوادث التالية:

A : " مجموع الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة يساوي 7 "

B : " الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة تشكل حدود متعاقبة لمتتالية هندسية "

C : " الكريات المسحوبة من نفس اللون "

2. احسب كلا من: $P(A \cap C)$ و $P(A \cup C)$

3. X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الوعاء.

عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب $P(X^2 - 4X + 3 = 0)$

التمرين الثاني: (5ن)

(I) f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{12x-9}{4x}$

1. ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$

2. بين أن: من أجل كل $x \in \left[\frac{3}{2}; 3\right]$ فإن $f(x) \in \left[\frac{3}{2}; 3\right]$

(II) (u_n) المتتالية المعرفة بحددها الأول $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

1. أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{3}{2} < u_n \leq 3$

ب/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة

2. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{2}{2u_n - 3}$

أ/ أثبت أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تحديد أساسها و حددها الأول.

ب/ اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n . احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

ج/ احسب المجموع S حيث: $S = v_0 + v_2 + v_4 + \dots + v_{2020}$

التمرين الثالث: (4ن)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. A ، B ، C نقط من المستوي

$$z_C = 1 - \sqrt{3}i \quad , \quad z_B = 1 + \sqrt{3}i \quad , \quad z_A = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المقترحة في كل حالة مما يلي مع تبرير الاجابة :

الاجابة 3	الاجابة 2	الاجابة 1	
$1 + \sqrt{3}i$ و $1 - \sqrt{3}i$	$2 - \sqrt{3}i$ و $2 + \sqrt{3}i$	$-2 - \sqrt{3}i$ و $-2 + \sqrt{3}i$	حلول المعادلة $\frac{7}{z^2} - \frac{4}{z} + 1 = 0$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي:
$\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$	$\theta = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$	$\theta = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$	عمدة العدد z_A تكون على الشكل:
$e^{\frac{-7\pi}{12}i}$	$e^{\frac{\pi}{12}i}$	$e^{\frac{5\pi}{12}i}$	الشكل الأسّي لـ $\frac{z_A}{z_B}$ هو:
متساوي الساقين	متقايس الأضلاع	قائم	المثلث OAB
القطعة المستقيمة $[AB]$ ماعدا A	محور القطعة المستقيمة $[AB]$	الدائرة التي قطرها $[AB]$ ماعدا A	مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي بحيث $\left \frac{\bar{z} - 1 + \sqrt{3}i}{z - z_A} \right = 1$ هي :

التمرين الرابع: (7ن)

(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 1 - xe^{-x}$

1. ادرس اتجاه تغير الدالة g .
2. استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) > 0$

(II) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (x+1)e^{-x} + x + 1$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$ ، شكل جدول تغيرات الدالة f .
3. أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$
ب/ ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ)
4. اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.
5. بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف
6. ارسم كلا من (Δ) ، (T) و (C_f) على المجال $[-2; +\infty[$.
7. اوجد قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $x + 1 - me^x = 0$ حلان مختلفان في الإشارة .

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4ن)

صندوق يحتوي على 2 كرات حمراء و 2 كرات خضراء و 3 كرات سوداء ، بحيث كل الكرات غير متمايزة عند اللمس . نسحب عشوائيا من الصندوق ثلاث كرات على التوالي دون ارجاع.

(1) أحسب احتمال الحوادث:

A " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون "

B " الحصول على كرة سوداء واحدة فقط "

C " الحصول على كرة سوداء على الأقل "

(2) ليكن α عدد حقيقي ولتكن اللعبة التالية:

تمنح لكل كرة حمراء أو خضراء العلامة α ولكل كرة سوداء العلامة (-1) وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع النقاط المحصل عليها.

أ/ عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضي $E(X)$.
ب/ اوجد قيمة العدد α حتى تكون اللعبة مربحة .

التمرين الثاني: (4ن)

المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقاط A, B, C, D ذات اللاحقات

$$z_A = \sqrt{3} - i ; z_B = \sqrt{3} + i ; z_C = 2i ; z_D = -\sqrt{3} - i \text{ على الترتيب .}$$

(1) أ/ اكتب العددين z_A و z_B على الشكل الأسّي .

ب/ اوجد قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$ حقيقيا سالبا .

(2) أ/ بين أن النقاط A, B, C تنتمي إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

ب/ علم النقاط A, B, C

(3) تحقق أن $z_D - z_C = -\sqrt{3}i (z_B - z_C)$ ثم استنتج نوع المثلث BCD .

(4) لتكن M نقطة من المستوي لاحققتها Z ، عين وأنشئ (C) مجموعة النقاط M بحيث :

$$\arg(z_D - z) - \arg(z_B - z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

التمرين الثالث: (5 ن)

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 5} \quad u_0 = \frac{3}{2} \quad \text{و من أجل كل عدد طبيعي } n$$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$

2. أ/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$

ب/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$3. (v_n) \text{ المتتالية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ كما يلي : } v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3}$$

أ/ بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب/ اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

$$ج/ احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{6}{2u_1 + 3} + \frac{6}{2u_2 + 3} + \dots + \frac{6}{2u_n + 3}$$$

التمرين الرابع: (7 ن)

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = 2x - 1 - x \ln x$

(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(ب) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $6,3 < \alpha < 6,4$.

(2) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[1; +\infty[$ ب : $f(x) = \frac{\ln x - x}{x - 1}$. (C_f) تمثيلها البياني

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

(2) أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x-1)^2}$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = -1$.

(4) بين أن $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - 1$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$

(5) ارسم المستقيمين المقاربين و المنحنى (C_f)

(6) اوجد بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $|f(x)| = m$ حلين متميزين.

التمرين الأول :

صندوق به 9 كرات لا نفرق بينها عند اللمس، منها أربع كرات حمراء تحمل الأرقام 1، 1، 1، 2 . وثلاث كرات بيضاء تحمل الأرقام 2، 2، 3 وكرتان خضراوان تحملان الرقمين 1، 3 . نسحب عشوائيا ثلاث كرات على التوالي دون إرجاع. نسمي الحادثتين: A: الكرة الأولى تحمل الرقم 1 B: الكرات الثلاث من نفس اللون.

$$1. \text{ بين أن } P(A) = \frac{4}{9} \text{ وأن } P(B) = \frac{5}{84}$$

$$2. \text{ احسب } P(A \cap B) \text{ ثم استنتج } P(A \cup B)$$

لاعب يدفع 5 دينار ثم يسحب عشوائيا ثلاث كرات من الصندوق السابق دفعة واحدة، إذا كانت الكرات تحمل نفس الرقم يحصل على 10 دينار . وإذا كانت كرتان فقط تحملان نفس الرقم يحصل على 5 دينار وإذا كانت الكرات تحمل أرقاما مختلفة مثلي مثلي لا يحصل على شيء (يخسر مافعه). نسمي X : المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب قيمة الربح الصافي

$$3. \text{ بين أن } P(X=0) = \frac{55}{84}$$

$$4. \text{ عين قيم المتغير العشوائي } X$$

$$5. \text{ اكتب قانون احتمال المتغير العشوائي } X$$

$$6. \text{ احسب } E(X)$$

$$7. \text{ يعيد شخص هذه اللعبة 2000 مرة بصفة مستقلة. ما هو مجموع الربح المتوقع؟}$$

التمرين الثاني:

(D_1) و (D_2) مستقيمان معرفان بمعادلتيهما $y = \ln(2)x + \ln\left(\frac{2}{e}\right)$ و $y = x$ في المستوي المنسوب إلى معلم

متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

$$1. \text{ احسب فاصلة نقطة تقاطع } (D_1) \text{ و } (D_2) \text{ ثم مثل } (D_1) \text{ و } (D_2) \text{ في المعلم } (O; \vec{i}, \vec{j})$$

$$2. \text{ المتتالية } (u_n) \text{ معرفة بحددها الأول } u_0 \text{ حيث } u_0 = 2 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \ln(2)u_n + \ln\left(\frac{2}{e}\right)$$

$$3. \text{ مثل على محور الفواصل الحدود } u_0, u_1, u_2, u_3 \text{ (دون حسابها موضحا خطوط الإنشاء)}$$

$$4. \text{ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} < u_n < -1 \text{ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية } (u_n)$$

$$5. \text{ المتتالية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ } v_n = 3u_n + \alpha \text{ حيث } \alpha \text{ عدد حقيقي.}$$

$$6. \text{ عين قيمة } \alpha \text{ بحيث تكون المتتالية } (v_n) \text{ هندسية.}$$

$$\text{نضع } \alpha = 3$$

$$7. \text{ أكتب } v_n \text{ بدلالة } n \text{ ثم عبر عن } u_n \text{ بدلالة } n.$$

7. احسب نهاية المتتالية (v_n) ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n)

$$w_n = u_0 + \frac{u_1}{\ln 2} + \frac{u_2}{(\ln 2)^2} + \dots + \frac{u_n}{(\ln 2)^n}, \quad n \text{ عدد طبيعي}$$

8. هل المتتالية (w_n) متقاربة؟

التمرين الثالث:

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = e^{2x} - e^x - x$ ، (C_f) منحنيا البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) أحسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.
- 2) بين أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y = -x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.
- 3) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) مع المستقيم (D).
- 4) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
- 5) حدد إشارة الدالة f على $\mathbb{R}$.
- 6) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (D) يطلب كتابة معادلة له.
- 7) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب حساب إحداثياتها.
- 8) ارسم (C_f) والمماس (T) والمستقيم (D).
- 9) ناقش بياناتا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x : $e^x = 1 + me^{-x}$.
- 10) اعتمادا على دراستك لاتجاه تغير الدالة f أ) استنتج -دون حساب- نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.
ب) شكل جدول تغيرات الدالة g
- 11) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $F(x) = e^x \left(\frac{1}{2} e^x - 1 \right) - \frac{1}{2} (x^2 - 1)$
أ) بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$
ب) استنتج اتجاه تغير الدالة F على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

التمرين الرابع:

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. النقط A, B, C لوحقها على الترتيب: z_A, z_B, z_C و $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$ ، $z_B = -i\sqrt{3}$ ، $z_A = -3 + 2i\sqrt{3}$.

1. بين أن $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ثم عيّن طبيعة المثلث ABC
2. احسب لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC
3. احسب لاحقة النقطة D صورة النقطة G بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$
4. بين أن $\left(\frac{z_A - z_D}{z_B - z_D} \right)^{2021} = -1$
5. استنتج أن النقطة A نظيرة النقطة B بالنسبة إلى D .

$$-\ln(2) + \ln\left(\frac{2}{e}\right) < \ln(2)u_{n+1} + \ln\left(\frac{2}{e}\right) < \ln(2)u_n + \ln\left(\frac{2}{e}\right) \text{ يستقر}$$

$$-1 < u_{n+2} < u_{n+1}$$

استنتاج اتجاه التغير: المتتالية (u_n) متناقصة تماما

4. تعيين قيمة α بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية.

$$v_{n+1} = 3\left(\ln(2)u_n + \ln\left(\frac{2}{e}\right)\right) + \alpha \text{ يكافئ } v_{n+1} = 3u_{n+1} + \alpha$$

$$v_{n+1} = 3\ln(2)u_n + 3\ln(2) - 3 + \alpha \text{ يكافئ}$$

$$v_{n+1} = \ln(2)\left(3u_n + 3 - \frac{3-\alpha}{\ln(2)}\right) \text{ يكافئ}$$

$$\alpha = 3 \text{ لكي أن يكون: } 3 - \frac{3-\alpha}{\ln(2)} = \alpha$$

$$v_n = 9(\ln 2)^n \text{ عبارة الحد العام:}$$

$$u_n = \frac{1}{3}v_n - 1 = \frac{1}{3}(9(\ln 2)^n) - 1 = 3(\ln 2)^n - 1$$

نهاية المتتالية (v_n) و نهاية المتتالية (u_n)

المتتالية (v_n) هندسية أساسها موجب أصغر من 1 فنهايتها 0

$$\lim u_n = \lim\left(\frac{1}{3}v_n - 1\right) = -1$$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n ,

$$w_n = u_0 + \frac{u_1}{\ln 2} + \frac{u_2}{(\ln 2)^2} + \dots + \frac{u_n}{(\ln 2)^n}$$

5. تقارب المتتالية (w_n)

$$w_n = u_0 + \frac{u_1}{\ln 2} + \frac{u_2}{(\ln 2)^2} + \dots + \frac{u_n}{(\ln 2)^n}$$

$$w_n = \frac{1}{3}v_0 - 1 + \frac{\frac{1}{3}v_1 - 1}{\ln 2} + \frac{\frac{1}{3}v_2 - 1}{(\ln 2)^2} + \dots + \frac{\frac{1}{3}v_n - 1}{(\ln 2)^n}$$

$$w_n = \frac{1}{3}(v_0 + v_1 + \dots + v_n) - 1 - \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{(\ln 2)^2} + \dots - \frac{1}{(\ln 2)^n}$$

المتتالية (w_n) مجموع متتاليتين مقاربتين فهي مقاربة

التصنيف الثالث:

1. حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - e^x - x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(e^x - 1) - x = +\infty$$

2. إثبات أن المستقيم (D) مقارب مائل للمنحنى (Cf) عند $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - e^x = 0$$

3. الوضع النسبي للمنحنى (Cf) مع المستقيم (D).

ندرس إشارة الفرق $e^{2x} - e^x - x$ حيث $e^{2x} - e^x = e^x(e^x - 1)$

4. $x \in]-\infty, 0[$ المنحنى (Cf) يقطع المستقيم (D) تحت المستقيم (D).

المنحنى (Cf) يقطع المستقيم (D) في النقطة التي فاصلتها 0

المنحنى (Cf) يقطع المستقيم (D) في النقطة التي فاصلتها 0

التصنيف الأول:

$$R1; R1; R1; R2; B2; B2; B3; V1; V3$$

$$P(B) = \frac{5}{84} \text{ وأن } P(A) = \frac{4}{9}$$

$$P(B) = \frac{A_2^2 + A_4^2}{A_2^2} = \frac{5}{84} \text{ و } P(A) = \frac{A_2^2 \times A_4^2}{A_2^2} = \frac{4}{9}$$

2. حساب $P(A \cap B)$ ثم استنتاج $P(A \cup B)$:

$$P(A \cap B) = \frac{A_2^2}{A_2^2} = \frac{6}{504} = \frac{1}{84}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{31}{63}$$

$$P(X=0) = \frac{55}{84} \text{ إثبات أن}$$

$$P(X=0) = \frac{C_4^2 C_2^1 + C_3^2 C_1^1 + C_2^2 C_0^1}{C_6^2} = \frac{55}{84}$$

4. قيم المتغير العشوائي $X: \{-5, 0, 5\}$

5. قانون احتمال المتغير العشوائي X

x_i	-5	0	5
$P(X=x_i)$	$\frac{24}{84}$	$\frac{55}{84}$	$\frac{5}{84}$

$$E(X) = \sum p_i x_i = \frac{-95}{84} \text{ حساب } E(X)$$

7. مجموع الربح المتوقع بعد إعادة هذه اللعبة 2000 مرة

$$2000 E(X) = -2262$$

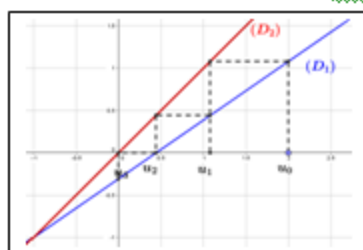
من المتوقع خسارة ما يقارب 2262 ديناراً

التصنيف الثاني:

1. فاصلة نقطة تقاطع (D_1) و (D_2) : يحل المعادلة

$$x = 2 \text{ نجد: } 3x - 4 = x$$

2. تمثيل (D_1) و (D_2) والحدود



3. إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $-1 < u_{n+1} < u_n$

بالترتيب:

$$u_1 = \ln(8) - 1 \text{ و } u_0 = 2$$

لدينا $-1 < u_1 < u_0$ فالخاصية محققة من أجل 0

ب- نبرهن صحة الاستنتاج: $-1 < u_{n+1} < u_n$ يستقر

$$-1 < u_{n+2} < u_{n+1} \text{ يستقر}$$

$$-1 < u_{n+1} < u_n \text{ يستقر}$$

الأستاذة فيري سميرة

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	0	$+\infty$	$-\infty$

12. إثبات أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

$$F'(x) = e^{2x} - e^x - x = f(x)$$

التجاه تغير الدالة F

f موجبة تماما إذن الدالة F متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

التصريح الرابع:

$$1. \text{ إثبات أن } \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-3 + 2i\sqrt{3} + i\sqrt{3}}{3 + 2i\sqrt{3} + i\sqrt{3}} = \frac{-3 + 3i\sqrt{3}}{3 + 3i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-1 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{(-1 + i\sqrt{3})^2}{(1 + i\sqrt{3})(-1 + i\sqrt{3})} = \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{-4}$$

$$= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{\frac{\pi}{3}} \text{ طبيعة المثلث ABC}$$

$$\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ و } \left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = \left|e^{\frac{\pi}{3}}\right| = 1 \text{ معناه}$$

أي $AB = BC$ و $(\overline{BC}, \overline{BA}) = \frac{\pi}{3}$ فالمثلث ABC متساوي الساقين

2. لاحظا النقطة G مركز ثقل المثلث ABC

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = i\sqrt{3}$$

$$3. \text{ لاحظا النقطة } D: \frac{z_D - z_B}{z_G - z_D} = e^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_D = z_G e^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(i\sqrt{3}) = \frac{-3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$4. \text{ إثبات أن: } \left(\frac{z_A - z_D}{z_B - z_D}\right)^{2021} = -1$$

$$\left(\frac{z_A - z_D}{z_B - z_D}\right)^{2021} = \left(\frac{-3 + 2i\sqrt{3} - \left(\frac{-3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{-i\sqrt{3} - \left(\frac{-3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\right)^{2021}$$

$$= \left(\frac{-3 + 3i\sqrt{3}}{3 - 3i\sqrt{3}}\right)^{2021} = (-1)^{2021} = -1$$

$$\overline{DB} = -\overline{DA} \text{ يعني } \frac{z_A - z_D}{z_B - z_D} = -1 \text{ استنتاج}$$

فإن النقطة A نظيرة للنقطة B بالنسبة إلى D

4. اتجاه تغير الدالة f : f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودلتنا المشتقة:

$$f'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1 = 2\left(e^x + \frac{1}{2}\right)(e^x - 1)$$

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty, 0]$

و متزايدة تماما على المجال $[0, +\infty[$

5. إشارة الدالة f على $\mathbb{R}$: f موجبة تماما

المماس (T): (T) يوازي المستقيم (D) يعني $f'(x) = -1$

$$x = -\ln(2) \text{ يكافئ } 2e^{2x} - e^x - 1 = -1$$

$$6. \text{ معادلة المماس: } y = -x - \frac{1}{4}$$

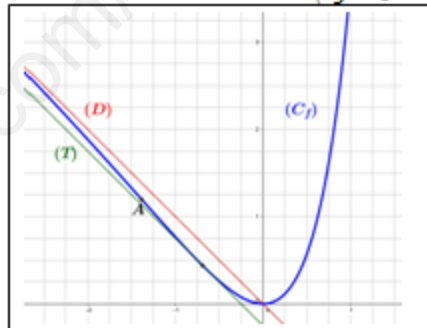
7. نقطة التطاف المنحني (C): f تقبل الاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 4e^{2x} - e^x = e^x(4e^x - 1)$$

الدالة f' تتعدم عند $-\ln 4$ وتغير إشارتها فالمنحني (C)

يقبل نقطة التطاف إحداثياتها: $A(-\ln 4, e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{4}} + \ln 4)$

8. الرسم



9. المناقشة ثنائية:

$$e^{2x} = e^x + m \text{ تكافئ: } e^x = 1 + me^{-x}$$

$$e^{2x} - e^x - x = -x + m \text{ تكافئ:}$$

$$m \in]-\infty, -\frac{1}{4}]$$

$$m \in]-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}]$$

$$m \in [0, +\infty[$$

10. نهايات الدالة g :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

جدول تغيرات الدالة g :

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية : مولود قاسم - مــــــزلوق
من فكر الأستاذ: عبد السلام صلاح الدين
الشعبة: علوم تجريبية ، تقني رياضي

مديرية التربية لولاية سطيف
أرواح بـ كالوريا تجريبية جزائرية
السنة الدراسية : G_{101}

المدة : 3 سا و 30 د + 1 سالت ر

اختبار في مادة الرياضيات

اختر أحد الموضوعين الآتيين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

□ $n \in$ و $2 \leq n \leq 2019$ في ثانوية مولود قاسم - مزلق - عين ارنات - يدرس 2021 تلميذ من بينهم n إناث والباقي ذكور ، يحوي قسم تقني رياضي (MT) على 101 تلميذ نريد تشكيل لجنة للثانوية تتكون من تلميذين

(1) ما احتمال الحادثتين التاليتين: A "اللجنة تحوي على الأكثر ذكر"
 B "إذا حضر تلميذ من (MT) في اللجنة لا يحضر آخر من نفس الشعبة "

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل لجنة عدد الذكور فيها
(أ) اكتب قانون احتمال X

(ب) اكتب $E(X)$ بدلالة n وما هي قيمة n التي تجعل $E(X)$ أعظمي

(3) ما هي أصغر قيمة للعدد n حتى يكون $P(A) \geq 0.918$

التمرين الثانى : (04 نقاط) (خاص بالعلمى)

u و v متتالیتان معرفتانی علی □ ب: $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \frac{42}{43}u_n + 47$ ، $v_n = \ln(a - u_n)$ حیث $a \in \square$ و $u_n \leq a$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = 47 \left(\frac{42}{43} \right)^n$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية u

(2) عين a حتى تكون v متتالية حسابية أساسها $\ln \frac{42}{43}$

(3) في كل ما يأتي نضع $a = 2021$, اكتب v_n و u_n بدلالة n

(4) اكتب بدلالة n العبارتين $s_n = \frac{1}{43}(e^{v_0} + e^{v_1} + \dots + e^{v_{n-1}})$; $s'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$ **ثم احسب** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s'_n}{n}$

التمرين الثاني : (04 نقاط) (خاص بالتقني رياضي)

المستوي منسوب الى معلم م وم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، نقطة من المستوي حيث $(x ; y) \in \mathbb{R}^2$ نعتبر المستقيم

$(u; v) \in \mathbb{Z}^2$ حيث (D) نقطة من $P(u; v)$ لتكن $(D'): 2021x - y = 10098$ والمستقيم $(D): 120x + 11y = 667$

(1) عيّن احداثيتي Q نقطة تقاطع (D) مع (D') ثم عين مجموعة النقط P .

(2) عيّن مجموعة النقط P التي تنتمي الى القرص الذي مركزه O و نصف قطره 128

(3) $n \in \mathbb{N}$ ، ادرس بواقى قسمة 5^n على 9 ثم عين باقى قسمة العدد $1442^{2021} + 2021^{1442}$ على 9

(4) n عدد طبيعي يكتب بالشكل $\overline{1ab8}^{11}$ و بالشكل $\overline{268a}^9$ ، جد a و b ثم اكتب n في النظام العشري

التمرين الثالث : (05 نقاط)

- نعتبر النقط A, B, C, D, E حيث : $Z_A = i$; $Z_B = -7$; $Z_C = -2 - 5i$; $Z_D = 5 - 4i$; $Z_E = 1 + 2i$
- (1) قارن بين $Z_A + Z_C$ و $Z_B + Z_D$ ، أكتب $\frac{Z_D - Z_B}{Z_C - Z_A}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$
- (2) (E_1) مجموعة النقط $M(Z)$ حيث : $\bar{Z} + i - re^{-i\frac{\pi}{4}} = 0$ مع $r \in \mathbb{R}_+$ ، تحقق أن $E \in (E_1)$ ثم عيّن (E_1)
- (3) لتكن G_α مرجح الجملة $\{(A; -6\alpha - 1), (B; 3\alpha), (C; 2\alpha), (D; \alpha)\}$ حيث : $\alpha \in \mathbb{R}_+$
- أ) عيّن لاحقة G_α بدلالة α ثم بيّن أن $G_\alpha \in (E_1)$
- ب) عيّن (E_α) مجموعة النقط $M(Z)$ حيث : $\|(-6\alpha - 1)\vec{MA} + 3\alpha\vec{MB} + 2\alpha\vec{MC} + \alpha\vec{MD}\| = \sqrt{2}$
- ج) من أجل $\alpha = 101$ عيّن لاحقة G_{101} ثم عيّن $(E_1) \cap (E_{101})$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

- f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = x^4 e^{-x-1}$
- (1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة الأخيرة بيانيا
- (2) احسب $f'(x)$ ثم شكّل جدول تغيرات f
- (3) احسب $f''(x)$ ثم عيّن إحداثيات نقط انعطاف المنحنى (C_f)
- (4) بيّن أن (C_f) مماسين (T_1) و (T_2) يشملان المبدأ ثم اكتب معادلتين لهما (حيث (T_2) معامل توجيهه موجب تماما)
- (5) انشئ (T_2) ثم (C_f)
- (6) ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = m$
- (7) دالة معرفة بـ : $g = 0.2 f^{-2021} - 1.2$ ، اكتب g' بدلالة f و f' ثم أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_g) عند $x = -1$

مهما كان مستواك من التحضيرى إلى فلسفة الدكتوراه ستجد في

أروع بكالوريا تجريبية جزائرية

مالا عين رأت ولا أذن سمعت ولا يد نقلت ولا خطر على قلب بشر

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

- f دالة مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[-3; +\infty[$ معرفة بـ : $f(x) = \frac{2068x}{x+47}$
- u و v متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 47$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ ، $v_n = 1 - \frac{2021}{u_n}$
- (1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n $47 \leq u_n < 2021$ وادرس اتجاه تغير u ثم استنتج أنها متقاربة
- (2) بين أن v متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{44}$ ثم اكتب v_n و u_n بدلالة n و احسب $\lim u_n$
- (3) اكتب بدلالة n العبارة : $S_n = 2021 \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} + \dots + \frac{1}{u_{n+2020}} \right)$ و احسب $\lim S_n$

التمرين الثاني : (04 نقاط) (خاص بالعلمي)

- كيس به 3 كريات بيضاء مرقمة بـ 1، 1، 2 و 4 حمراء مرقمة بـ 2، 2، 2، 1 نسحب عشوائيا في آن واحد كريتين
- (1) ما احتمال الحادثتين : A "الكريتان المسحوبتان تحملان رقم فردي" ، B "الكريتان المسحوبتان ذات لونين مختلفين"
- (2) احسب $p(A \cap B)$ و استنتج $p(A \cup B)$.
- (3) جد قانون احتمال X حيث X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة
- (4) $x \in \mathbb{N}^*$ ، في لعبة يقوم لاعب بسحب كريتين في آن واحد، فإذا تحصل على كريتين بيضاوين يخسر $7x^2$ دينار، وإذا تحصل على كريتين مختلفتين في اللون يربح $7070x$ دينار، وإذا تحصل على كريتين حمراوين يخسر 14274326.5 دينار
- (أ) عين قيم x حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب
- (ب) ماهي قيمة x التي من أجلها يكون متوسط الربح أعظميا ، احسب قيمته عندئذ

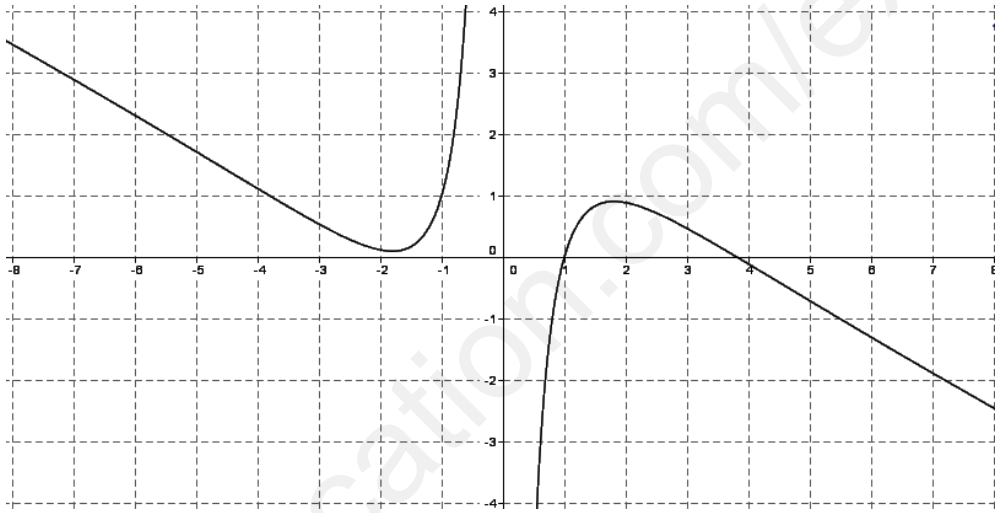
التمرين الثاني : (04 نقاط) (خاص بالتقني رياضي)

- (1) لتكن المعادلة $(E) : 2021x - 1442y = 11 \dots$ حيث x, y عددان صحيحان
- بالاستعانة بخوارزمية إقليدس عين $\text{PGCD}(2021; 1442)$ ، جد حلا خاصا لـ (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)
- (2) $n \in \mathbb{N}$ يكتب بالشكل $1abc^{11}$ حيث تشكل الأعداد $a, b, c+1$ بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية حسابية
- و (a, b) حل لـ (E) ، جد الأعداد الطبيعية a, b, c ثم اكتب n في النظام العشري
- (3) $n \in \mathbb{N}$ ، ادرس بواقي قسمة 2^n على 3 ثم عين قيم n حيث $2[3] \equiv 1442n + 2021^n$ و $1437 < n < 1443$

التمرين الثالث : (05 نقاط)

- (1) حل في $\square$ المعادلة $z^2 + 4 = 0$ ثم استنتج حلول المعادلة $z^4 + 4 = 0$
- (2) نعتبر النقط: F, E, D, C, B, A حيث: $z_A = 2i$; $z_B = 1+i$; $z_C = \overline{z_B}$; $z_D = \overline{z_A}$; $z_E = 1$; $z_F = -z_B$;
 - اكتب على الشكل الآسي العددين z_A , z_B ثم اكتب على الشكل الجبري العدد $(8^{-0.5} z_A z_B)^{2020}$
- (3) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $(z_A)^n = ai$ مع $a \in \square_+^*$ و $2017 < n < 2025$
- (4) احسب $\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_D - z_A}\right)$, $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_D}\right|$ و قارن بين $z_A + z_C$ و $z_B + z_D$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$
- (5) أ) عيّن (E_1) مجموعة النقط $M(Z)$ حيث $\bar{z} - 1 - 2020\sqrt{2}e^{-i\theta} = 0$ مع $\theta \in \square$
 ب) عيّن (E_2) مجموعة النقط $M(Z)$ حيث $\left|\frac{z+2i}{z-1-i}\right| = 1$ ثم عيّن $(E_1) \cap (E_2)$

التمرين الرابع : (07 نقاط)



- f دالة معرفة على $\square^*$ كما يلي $f(x) = 2(\ln|x|)^2 - \frac{1}{4}(x-1)^2$ يعطى (C_f) في الشكل أعلاه ويعطى
- $a \square -0.57$; $b \square 1.81$; $c \square 3.81$; $d \square 6.13$ حيث $f(a) = f(d) = f'(c) = f'(1) = f''(b) = 0$ $f(c) \square 1.60$
- (I) بيّن أن $f(-x) = f(x) - x$ ثم استنتج العبارتين : $f'(-x) = 1 - f'(x)$; $f''(-x) = f''(x)$
- (II) بقراءة بيانية واستغلال المعطيات والسؤال السابق : (لا يطلب حساب $f'(x)$ و $f''(x)$)
- (1) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم شكّل جدولي تغيرات f و اشارة $f''(x)$ مستنتجا فواصل نقط انعطاف (C_f)
- (2) $\alpha \in \square^*$ ، بين أن (C_f) يقبل مماسين معامل توجيههما 1 عند نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما ثم اكتب بدلالة α ، $f(\alpha)$ ،
 معادلة للمماس $(T_{-\alpha})$ لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$ واستنتج معادلتى (T_{-1}) ، (T_{-c})
- (3) شكّل جدول إشارة $f(x)$ على $\square^*$ ثم استنتج جدول إشارة $f(-x)$ على $\square^*$ والوضع النسبي لـ (C_f) مع (T_{-1})
- (4) انشئ (T_{-1}) ، (T_{-c}) ثم (C_f)
- (5) ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = x + m$
- (6) g دالة معرفة بـ $g = f^{-2020}$ ، اكتب g' بدلالة f و f' ثم اكتب معادلة للمماس (T) للمنحني (C_g) عند $x = -1$

انتهى الموضوع الثاني