على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول :(04.5 نقاط)

في الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس المباشر $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط $A(3;1;0)$, $B(1;2;0)$, $C(3;2;1)$ و $D(0;0;m)$ حيث m عدد حقيقي موجب

1) أ) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ ثم استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos A\hat{B}C$ و $\sin A\hat{B}C$.
ب) احسب مساحة المثلث ABC.
2) بين أن الشعاع $\vec{n}(1;2;-2)$ ناظمي للمستوي(ABC)ثم استنتج معادلة ديكارتية له.
3) بين أن $ABCD$ رباعي وجوه و أن حجمه : $v_{ABCD}=\frac{2m+5}{6}$.
4) لتكن (S_m) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء و التي تحقق : $x^2+y^2+z^2-2mz+m^2-9=0$.
بين أنه من أجل عدد حقيقي m فإن (S_m) سطح كرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .
5) عين قيمة m حتى يكون المستوي(ABC)مماسا لسطح الكرة (S_m).
6) أكتب معادلة المستوي (P) الموازي تماما للمستوي (ABC) و يمس (S_m).

التمرين الثاني :(04.5 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z المركب التالية : $(z^2+3)(z^2-6z+21)=0$
2) في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$, نعتبر النقط A , B , C و D لواحقها على الترتيب $z_A=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_B=\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $Z_C=3+2i\sqrt{3}$ و $Z_D=\overline{Z_C}$.
بين أن النقط A , B , C و D تنتمي إلى نفس الدائرة (C) التي مركزها Ω ذات اللاحقة $Z_\Omega=3$ يطلب تعيين نصف قطرها .
3) لتكن النقطة E نضيرة النقطة D بالنسبة للمبدأ O .
أ) بين أن : $\frac{Z_C-Z_B}{Z_E-Z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ثم استنتج طبيعة المثلث BEC .
ب) بين أنه يوجد دوران R مركزه النقطة B ويحول النقطة E إلى النقطة C يطلب تعيين زاويته .
4) نعتبر التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث :
$Z'+i\sqrt{3}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(Z+i\sqrt{3}\right)$.
أ) عين طبيعة S و عناصره المميزة.
ب) عين طبيعة (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق : $Z=3+2\sqrt{3}e^{i\theta}$
حيث θ عدد حقيقي .
ت) عين طبيعة المجموعة (E') صورة (E) بالتحويل S و عناصرها الهندسية.

التمرين الثالث :(04 نقاط)

يحتوي كيس على أربع كرات بيضاء تحمل الارقام 0، 1،1،2 واربع كرات حمراء تحمل الارقام 1،1،2،2 نسحب عشوائيا وفي ان واحد ثلاث كرات من الكيس

1) أحسب احتمال الحصول على :

أ ثلاث كرات من نفس اللون

ب ثلاث كرات تحمل نفس الرقم

ج ثلاث كرات أرقامها مختلفة مثنى مثنى .

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات المسحوبة التي تحمل الرقم 1.

أ) عين قانون احتمال المتغير العشوائي

ب)أحسب الامل الرياضياتي $E(X)$ و الانحراف المعياري $\sigma(X)$

التمرين ارابع :(04 نقاط)

الجزء الأول : g دالة عددية معرفة على المجال $D=]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+1-\ln(x)$.

1) أوجد نهايتي الدالة g على يمين 0 و عند $+\infty$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3) استنتج إشارة الدالة g .

الجزء الثاني : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $D=]0;+\infty[$ كالتالي : $f(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{\ln(x)}{x}$.

(C) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=2cm$.

1) أ- أوجد نهايتي الدالة fعند $+\infty$ و على يمين 0. فسر هندسيا النتيجة الثانية .

ب- بين أن المستقيم (Δ)ذا المعادلة : $y=x+\frac{1}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C) .

جـ - ادرس الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة إلى (Δ).

2) أ- تحقق أنه من أجل كل x ينتمي إلى D : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

ب – استنتج اتجاه تغير الدالة f على مجموعة تعريفها ، ثم شكل جدول تغيراتها .

جـ- اكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (T) الذي يمس المنحني (C) عند النقطة $A(1;\frac{3}{2})$.

3) أثبت أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا αفي المجال $\left]\frac{1}{2};1\right[$.

4) ارسم المنحني (C) و المستقيمين (Δ) و (T).

الجزء الثالث: نضع من أجل x ينتمي إلى D : $h(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

1) احسب $h'(x)$. ما ذا تستنتج ؟

2) أوجد بالسنتيمترات المربعة S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C)وبالمستقيمات التي معادلاتها:

$x=1\ ;\ x=e\ ;y=0$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(04 نقاط)

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على 10.

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $33^{16n+2}-2\times 109^{8n+1}-11\equiv 0[10]$

3) عين الأعداد الطبيعية n حيث: $7\times 3^{n+1}-1\equiv 0[10]$ و $10\prec n\leq 25$.

4) ليكن العدد A الذي يكتب على الشكل $\overline{xx02102}^{3}$ في نظام التعداد ذي الأساس 3 و يكتب في النظام ذي الأساس 9 بالشكل $\overline{y67y}^{9}$

أ) عين x و y.

ب) أحسب A في النظام العشري .

ث) أكتب A في النظام ذي الأساس 7.

التمرين الثاني :(04 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم و المتجانس المباشر $(O,\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و I التي لواحقها على الترتيب : $z_A=-2$ ، $z_B=-1+i$ و $z_I=i$.

من أجل كل عدد مركب z حيث $z\neq -2$ نضع : $z'=\dfrac{iz+i+1}{z+2}$. حيث M صورة العدد المركب z و M' صورة العدد المركب z'.

1- أ) تحقق أن $z'=\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}$.

ب)بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ فان النقطة M' تنتمي إلى دائرة (C) يطلب تعيين عناصرها المميزة .

ج) عين طبيعة (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي بحيث يكون z' تخيليا صرفا .

2- أ) تحقق أن : $z'-i=\dfrac{1-i}{z+2}$

ب)استنتج أن : $IM'\times AM=\sqrt{2}$ و أن $\left(\vec{u},\overrightarrow{IM'}\right)+\left(\vec{u},\overrightarrow{AM}\right)\equiv -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

ج) بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A و نصف القطر 1 فان النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها .

3- لتكن النقطة F ذات اللاحقة $z_F=-\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

أ)بين أن النقطة F تنتمي إلى (Γ) ثم بين أن $\left(\vec{u},\overrightarrow{AF}\right)\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

ب) باستعمال نتائج السؤال 2) أنشئ النقطة F' المرفقة بالنقطة F .

التمرين الثالث :(04 نقاط)

$(u_n)_{n\in N}$ المتتالية المعرفة بحدها الاول $u_0=\frac{1}{5}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\langle u_n\langle\frac{1}{2}$

2) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ب) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{5^n u_n}{2u_n-1}$

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 10 ويطلب حساب حدها الاول v_0

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم بين أن : $u_n=\frac{2^n}{2^{n+1}+3}$. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

أحسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+...+\frac{1}{u_n}$

التمرين الرابع :(08نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-(x^2+1)e^{-x+1}$.

نسمي (C_f) النحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$.

1- أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب)بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=1+(x-1)^2e^{-x+1}$

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

2- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

3-بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $1.8\prec\alpha\prec1.9$

4- أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

5- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x)=-(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .

6- أحسب $f(0)$ ، $f(3)$ ثم أرسم (Δ) ، (T) و (C_f).

7- ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x: $f(x)=x+m$.

II. نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx$.

1) أ) بين أن الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $G(x)=-(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x+1}$.

ب)أحسب I_1 .

2- أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

ب)أحسب I_2 .

3- أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما : $x=0$ و $x=1$.

الموضوع الاول

التمرين الأول: (04,5 نقاط)

1- (P) $\vec{AB}(2,-1,0)$ $\vec{BC}(2,0,1)$

3x $\vec{BA}\cdot\vec{BC}=4$

0,25 $\vec{BA}\cdot\vec{BC}=BA\cdot BC\cos\widehat{ABC}$

$\cos\widehat{ABC}=4/5$

2x $\cos^2 ABC+\sin^2 ABC=1$

0,25 ومنه $\sin ABC=3/5$

ب/ مساحة المثلث ABC

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin ABC$

0,5 $S_{ABC}=3/2$ (و.م)

ج/ $\vec{n}\cdot\vec{BC}=0$ و $\vec{n}\cdot\vec{AB}=0$ /2

3x $(ABC): x+2y-2z-5=0$

0,25 د/ تبيان أن الرباعي ABCD هرم /3

0,5 $D\notin(ABC)$

0,5 $V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\,d(D,(ABC))$

0,5 $V_{ABCD}=\frac{2m+5}{6}$ (ح.م)

4/ $(S_m):(x-0)^2+(y-0)^2+(z-m)^2=9$

2x 0,25 (S_m) سطح كرة مركزها O وطول نصف قطرها $R=3$

5/ (S_m) مماسا لـ (ABC)

$d(O,(ABC))=R$

0,5 $m=2$ أو $\frac{2m+5}{3}=3$

قيمة m هي 2

6/ معادلة لـ (P) الموازي لـ (ABC) والمماس لـ (S_m)

$(P): x+2y-2z+d=0$

(S_2) مماس (ABC) الذي مركزها $D(0,0,2)$

$\frac{|-4+d|}{3}=3$ يعني (P) مماسا لـ (S_2)

0,5 $(d=-5)$ أو $(d=13)$ أي $-4+d=9$

معادلة لـ (P) هي

$x+2y-2z+13=0$

التمرين الثاني (04,5 نقاط)

0,5 1- $S=\{\sqrt{3}i,-\sqrt{3}i,3+2i\sqrt{3},3-2i\sqrt{3}\}$

2/ تتميم A,B,C,D تنتمي إلى الدائرة (C) ذات المركز $\Omega(z_\Omega=3)$

0,5 $\Omega A=|z_A-z_\Omega|=|i\sqrt{3}-3|=2\sqrt{3}$

$\Omega B=\Omega C=\Omega D=2\sqrt{3}$.

$\Omega A=\Omega B=\Omega C=\Omega D=2\sqrt{3}$

(C) دائرة مركزها $\Omega(3)$ وطول نصف قطرها $R=2\sqrt{3}$

3/ (P) بين أن $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\pi/3}$

0,5 $z_E=-3+2i\sqrt{3}$ ومنه $z_D=3-2i\sqrt{3}$

$\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

طبيعة المثلث BEC

0,25 لدينا: $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ يعني $BC=BE$ و $(\vec{BE},\vec{BC})=-\frac{\pi}{3}$

المثلث BEC متقايس الأضلاع

ب/ $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\pi/3}$ يعني $z_C-z_B=e^{-i\pi/3}(z_E-z_B)$

0,5 يوجد دوران R مركزه B وزاويته $-\pi/3$ يحول النقطة E إلى C.

$X=x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{4}{56}$

ب/ الأمل الرياضي:

$$E(X)=\frac{84}{56}=1,5$$

التباين:

$$V(X)=\frac{15}{28}$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=0,73$$

التمرين الرابع (07 نقاط)

الجزء الأول

1- $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$; $\lim_{x\to 0} g(x)=+\infty$

2- من أجل كل x من $]0,+\infty[$;

$$g'(x)=\frac{2x^2-1}{x}$$

الدالة g متناقصة تماما على $]0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$ ومتزايدة تماما على $[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty[$

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$g(\frac{\sqrt{2}}{2})$	$+\infty$

$$g(\sqrt{2}/2)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln 2\approx 1,85$$

3- استنتاج إشارة $g(x)$

الدالة g موجبة تماما على $]0,+\infty[$

الجزء الثاني

1- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$ / P.I

حامل محور التراتيب هو مستقيم مقارب لـ (C)

ب/ $\lim_{x\to+\infty} f(x)-y=0$

ج/ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

التمرين الثالث (04 نقاط)

عدد الحالات الممكنة:

$$C_8^3=56$$

1- $P_1=\frac{C_4^3+C_4^3}{56}=$

2- $P_2=\frac{C_4^3+C_3^3}{56}=$

3- $P_3=\frac{C_1^1\times C_4^1\times C_3^1}{56}=$

ب/ قيم المتغير العشوائي X هي:

$\{0,1,2,3\}$

ج) قانون احتمال المتغير العشوائي X

التمرين الرابع (07 نقاط)

1- طبيعة (S) وعناصره:

(S) تشابه مباشر مركزه ω حيث $\omega=-i\sqrt{3}$ وزاويته $-\frac{\pi}{3}$ ونسبته 2.

ب/ $z-3=2\sqrt{3}e^{i\theta}$ تعني $z=3+2\sqrt{3}e^{i\theta}$

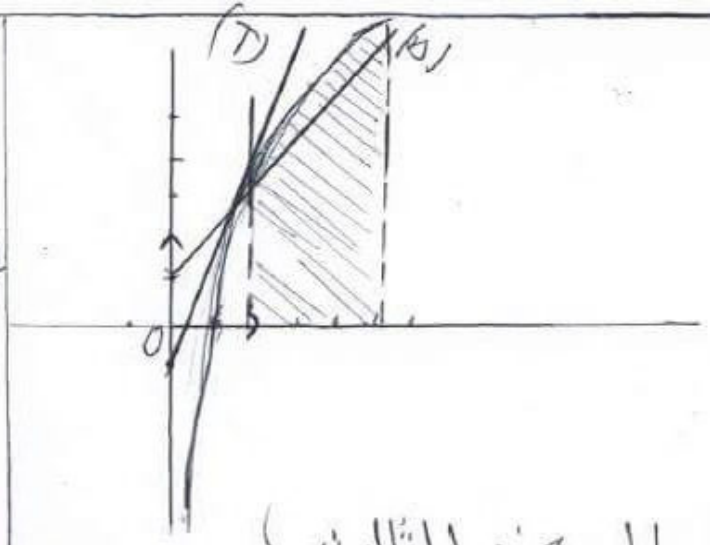
أي $|z-3|=2\sqrt{3}$ أي $AM=2\sqrt{3}$

مجموعة النقط (E) هي دائرة مركزها A وطول نصف قطرها $R=2\sqrt{3}$

ج/ طبيعة (E') صورة (E) بـ S وعناصرها.

صورة الدائرة (C) بالتشابه S هي دائرة (C') مركزها A' صورة A بـ S وطول نصف قطرها $R'=2R=2.2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

$$z_{A'}=6-3i\sqrt{3}$$



0,1

4/ الوضع النسبي لـ (C) و (Δ)

$f(x) - y = \frac{\ln(x)}{x}$

لما $0 < x < 1$ يكون (C) تحت (Δ)

0,5 لما $x > 1$ يكون (C) فوق (Δ)

لما $x = 1$ فإن $(C) \cap (\Delta) = \{(1, \frac{3}{2})\}$

2/ ب- لما $x \in]0, +\infty[$:

0,5 $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ج- f متزايدة تماما على $]0, +\infty[$

0,25

x	0	$+\infty$
f(x)	‖	$+\infty$
	$-\infty$	

0,25

د- معادلة المستقيم (T) مماسا لـ (C) عند A

0,5 $(T): y = 2x - \frac{1}{2}$

3/ $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من الحال $]\frac{1}{2}, 1[$

$f(1) = \frac{3}{2}$ و $f(\frac{1}{2}) = 1 - 2\ln 2 \simeq -0,39$

0,5 الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على $[\frac{1}{2}, 1]$ و $f(\frac{1}{2}) \times f(1) < 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة

يوجد عدد حقيقي وحيد α من $]\frac{1}{2}, 1[$ بحيث: $f(\alpha) = 0$

/4

- الجزء الثالث -

$h(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 : x > 0$

0,25 1- حساب $h'(x)$ ماذا تستنتج ؟

0,25 h دالة قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ومن أجل كل x من D:

$h'(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{x}\ln x$

$h'(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{\ln x}{x}$

$h'(x) = f(x)$, $x > 0$ الإستنتاج

h دالة أصلية لـ f على D.

2-

$S = \int_1^e f(x)\,dx \times 4\ cm^2$

0,5 $S = 4\,[h(x)]_1^e\ cm^2$

$S = (2e^2 + 2e - 2)\ cm^2$

$S \simeq 18,21\ cm^2$

- انتهى -

التمرين الأول (04 نقاط)

1- دراسة بواقي قسمة 3^n على 10 حسب قيم العدد الطبيعي n.

$3^0 \equiv 1[10]$ ، $3^1 \equiv 3[10]$

$3^2 \equiv 9[10]$ ، $3^3 \equiv 7[10]$

$3^4 \equiv 1[10]$

$3^{4k} \equiv 1[10]$ ، $3^{4k+1} \equiv 3[10]$

$3^{4k+2} \equiv 9[10]$ ، $3^{4k+3} \equiv 7[10]$

$(k \in \mathbb{N})$

2- $33 \equiv 3[10]$ ومنه $33^{16n+2} \equiv 3^{16n+2}[10]$

$109 \equiv 9[10]$ ومنه $109^{8n+1} \equiv 9^{8n+1}[10]$

$109^{8n+1} \equiv 9[10]$ و $33^{16n+2} \equiv 9[10]$

$2 \times 109^{8n+1} \equiv 8[10]$ و $11 \equiv 1[10]$ و

$33^{16n+2} - 2 \times 109^{8n+1} - 11 \equiv (9 - 8 - 1)[10]$

$33^{16n+2} - 2 \times 109^{8n+1} - 11 \equiv 0[10]$

3- إيجاد الأعداد الطبيعية n حيث $10 \leq n \leq 25$ و $7 \times 3^{n+1} - 1 \equiv 0[10]$

$n \equiv$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$7 \times 3^{n+1} - 1 \equiv$	0	2	8	6	$[10]$

قيم n من الشكل $n = 4k$ حيث $k \in \mathbb{N}$

$\frac{10}{4} \leq k \leq \frac{25}{4}$ ومنه $10 \leq n \leq 25$

أي $k \in \{3, 4, 5, 6\}$ وعليه قيم n هي:

$\{12, 16, 20, 24\}$

التمرين الثاني (04 نقاط)

1- تحقق أن: $z' = \frac{i(z+1-i)}{z+2}$

$z' = \frac{iz + i - i(z+1+\frac{1}{i})}{z+2}$

$z' = \frac{i(z+1-i)}{z+2}$

ب- النقطة M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ معناه $AM = BM$

$|z'| = \left|\frac{i(z+1-i)}{z+2}\right|$

$|z'| = \frac{|i||z+1-i|}{|z+2|}$

$|z'| = \frac{|z-(-1+i)|}{|z-(-2)|}$ ومنه

$OM' = \frac{BM}{AM} = 1$ أي

M' تنتمي إلى الدائرة (C) مركزها "O" ونصف قطرها $R = 1$

ج- تعيين z حتى يكون z' عدد حقيقي

y و x عددين حقيقيين

$0 < x < 3$ و $0 < y < 9$

$\begin{cases} A = 2 + 1\times3^2 + 2\times3^3 + x\times3^4 + x\times3^5 + x\times3^6 \\ A = y + 7\times9 + 6\times9^2 + y\times9^3 \end{cases}$

$\begin{cases} A = 65 + 972x \\ A = 549 + 730y \end{cases}$ أي

$972x - 730y = 484$

إذا كان $x = 1$ فإن $y \notin \mathbb{N}$

إذا كان $x = 2$ فإن $y = 2$

$(x; y) = (2; 2)$

ب- $A = \overline{2009}$

ج- $A = \overline{5600}^7$

ج- طبيعة (E)

$\arg(z') = \frac{\pi}{2} + k\pi$ تخيلي صرف معناه z'

و منه $\arg\left(\frac{i'(z+1-i)}{z+2}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\arg(i) + \arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right) = \pi/2 + k\pi$

$\arg\left[\frac{z-(-1+i)}{z-(-2)}\right] = k\pi$

و عليه $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = k\pi$

$(E) = (AB]_- \{A, B\}$

ب- نتحقق أن $z' - i = \frac{1-i'}{z+2}$

$z' - i = \frac{i(z+1-i)}{z+2} - i$

$z' - i = \frac{1-i'}{z+2}$

ب- الاستنتاج

$IM' = \frac{\sqrt{2}}{AM}$ و منه $|z'-i| = \left|\frac{1-i'}{z+2}\right|$ (*)

أي $IM' \times AM = \sqrt{2}$

(*) $\arg(z'-i) = \arg\left(\frac{1-i'}{z+2}\right)$

أي $(\vec{u}, \overrightarrow{IM'}) = -\frac{\pi}{4} - (\vec{u}, \overrightarrow{AM})$

$(\vec{u}, \overrightarrow{IM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) \equiv -\pi/4 \ [2\pi]$

ج-

M تنتمي الى دائرة (Γ) ذات المركز A و مقدارها نصف القطر 1

$AM = 1$

M' تنتمي الى مجموعة بطلب تعيينها:

$IM' = \sqrt{2}$ تعني $IM' \times AM = \sqrt{2}$

و عليه M' تنتمي الى دائرة مركزها I و $R = \sqrt{2}$

أ- بيان أن F تنتمي الى (Γ) و

نبين أن $(\vec{u}, \overrightarrow{AF}) = \frac{\pi}{3} \ [2\pi]$

تعني (Γ) تقطع F. $AF = 1$

$AF = |z_F - z_A| = 1$

و منه $F \in (\Gamma)$

$(\vec{u}, \overrightarrow{AF}) = \arg(z_F - z_A)$

$= \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \ [2\pi]$

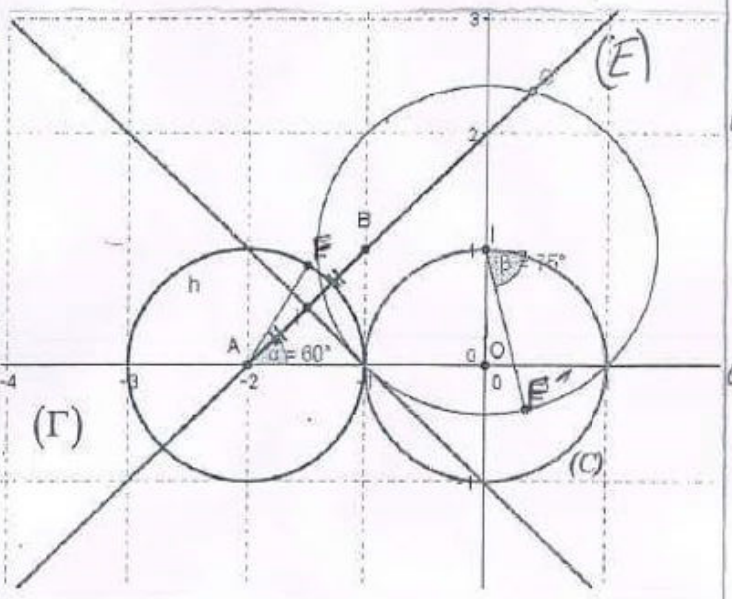
ب- انشاء النقطة F' حيث

$z_{F'} - i = \frac{1-i'}{z_F+2}$

لدينا من السؤال (2):

$(\vec{u}, \overrightarrow{IF'}) \equiv -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \ [2\pi]$ و $FF' = \sqrt{2}$

أي $(\vec{u}, \overrightarrow{IF'}) \equiv -\frac{7\pi}{12} \ [2\pi]$



التمرين 1 الثالث (4 نقط)

$P(n): 0 < U_n < 1/2$ $n \in \mathbb{N}$ - 1

$P(0)$: $0 < U_0 < 1/2$ محققة.

نفرض $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ونبين صحة $P(n+1)$

لدينا: $n \in \mathbb{N}$: $0 < U_n < 1/2$

نضرب في 2:

$0 < 2U_n < 1$

ومنه

$1 < 2U_n + 1 < 2$ 0,5

$\frac{1}{2} < \frac{1}{2U_n+1} < 1$

ومنه $0 < 1 - \frac{1}{2U_n+1} < \frac{1}{2}$

أي

$0 < U_{n+1} < 1$

$P(n+1)$ محققة وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n.

ب) $U_{n+1} - U_n = 1 - \frac{1}{2U_n+1} - U_n$ - P

$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n - 2U_n^2}{2U_n+1}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n(1-2U_n)}{2U_n+1}$ 0,5

اتجاه تغير (U_n):

لدينا مما سبق من أجل $n \in \mathbb{N}$:

$0 < U_n < \frac{1}{2}$ يعني $U_n > 0$ و $2U_n + 1 > 0$

أي $0 < 1 - 2U_n < 1$

وعليه $U_{n+1} - U_n > 0$ 0,5

(U_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب/ بما أن (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الأعلى بالعدد $1/2$ فهي متقاربة.

متتالية (U_n).

$\lim U_{n+1} = \lim U_n = \ell \quad / \ell \in \mathbb{R}$.

$\ell = 1 - \frac{1}{2\ell+1}$

$2\ell^2 - \ell = 0$

$\ell = 1/2$ أو $\ell = 0$

بما أن (U_n) متزايدة تماما فإن $\ell = \frac{1}{2}$ 0,5

/3

$V_{n+1} = 10 V_n$ - P

(V_n) متتالية هندسية أساسها

$V_0 = -\frac{1}{3}$ وحدها الأول 10 0,5

$V_n = V_0 \times q^n = \left(-\frac{1}{3}\right) 10^n$ - ب 0,25

لدينا: $V_n = \frac{5^n U_n}{2U_n - 1}$ أين

$U_n = \frac{V_n}{2V_n - 5^n} = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)10^n}{2\left(-\frac{1}{3}\right)10^n - 5^n}$

$U_n = \frac{10^n}{2 \times 10^n + 3 \cdot 5^n} = \frac{2^n}{2^{n+1} + 3}$ 0,5 أي

$\lim U_n = \lim \frac{2^n}{2^n\left[2 + \frac{3}{2^n}\right]} = \frac{1}{2}$ 0,25

حساب بدلالة n المجموع S_n:

$S_n = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \cdots + \frac{1}{U_n}$

$\frac{1}{U_n} = \frac{2^{n+1} + 3}{2^n} = 2 + \frac{3}{2^n}$

$S_n = \left(2 + \frac{3}{2^0}\right) + \left(2 + \frac{3}{2^1}\right) + \cdots + \left(2 + \frac{3}{2^n}\right)$ 0,5

$S_n = 2(n+1) + 3\left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$

$S_n = 2(n+1) + 3\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{1/2 - 1}\right]$

$S_n = 2(n+1) - 6\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right]$

التمرين الرابع (08 نقاط)

1) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (0,5)

بين أن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (0,5)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[x - \frac{x^2+1}{e^{-1} \times e^x} \right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[x - \frac{x^2}{e^{-1}e^x} - \frac{1}{e^{-1}e^x} \right]$$

$\to 0$ $\to 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (0,5)

2) أ- f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (0,5)

ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$f'(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$ (0,5)

ب- من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) > 0$ (0,5)

وعليه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

(0,5)

ج- $\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} -(x^2+1)e^{-x+1} = 0$ (0,5)

(Δ) مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $(+\infty)$

• الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

$f(x) - y = -(x^2+1)e^{-x+1} < 0$

(C_f) يقع تحت (Δ) من أجل $x \in \mathbb{R}$ (0,5)

3- $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من $]1,8; 1,9[$ (0,5)

$f(1,8) \simeq -0,11$ / $f(1,9) \simeq 0,03$ (0,5)

f مستمرة ورتيبة تماما على $[1,8; 1,9]$

و $f(1,8) \times f(1,9) < 0$ حسب مبرهنة

(0,5) القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا

وحيدا α من $]1,8; 1,9[$.

4- $(T): y = x - e$ (0,5)

5- f' دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$

$f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$

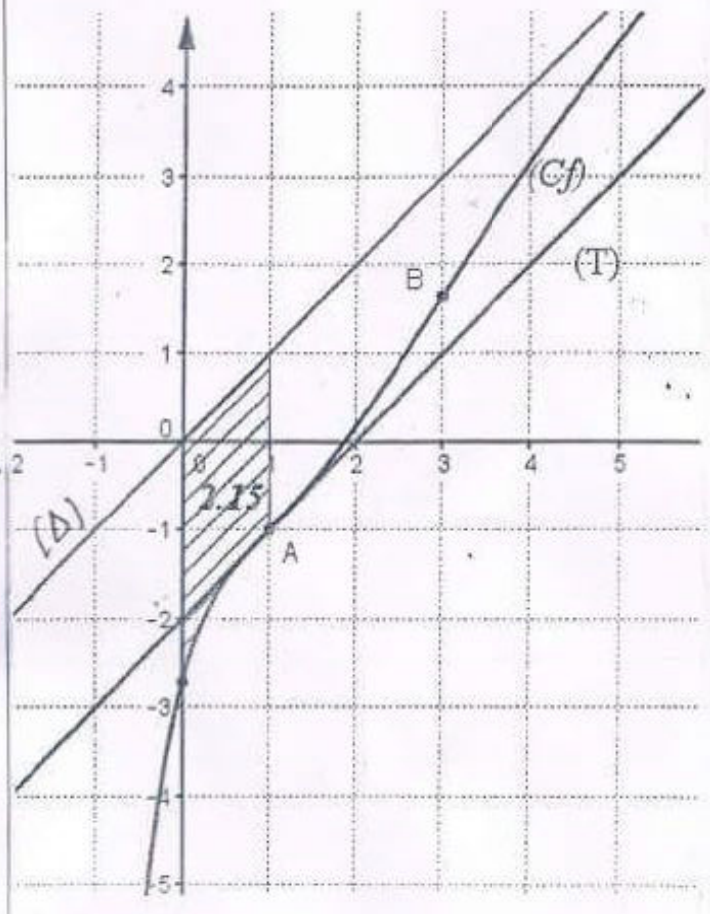
$f''(x) = 0$ تعني $(x=1)$ أو $(x=3)$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f''(x)$		−	0	+	0	−	

(0,5) $f''(x)$ تنعدم عند كل من $x=1$ و $x=3$ مغيرة إشارتها مما يثبت

$A(1,-1)$ و $B(3, 3-10e^{-2})$ نقطتي انعطاف لـ (C_f).

6- $f(0) = -e$ ، $f(3) = 3 - 10e^{-2}$



7- المناقشة البيانية:

$(E) \dots f(x) = x + m$

حلول المعادلة $f(x) = x + m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم معادلته $y = x + m$ 0,5 (T) الموازي لكل من (Δ) و

1. إذا كان $m \in]-\infty, -e[$ فإن (E) يقبل حلا وحيدا سالبا.
- إذا كان $m = -e$ فإن (E) يقبل حلا وحيدا معدوما.
- إذا كان $m \in]-e, +\infty[$ فإن (E) لا يقبل حلا.
- إذا كان $m \in [0, +\infty[$ فإن (E) يقبل حلا وحيدا موجبا.

II- الجزء

1) G الدالة G قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

0,5 $G'(x) = x e^{-x+1}$

وعليه G دالة أصلية للدالة $x \mapsto x e^{-x+1}$ على $\mathbb{R}$.

ب) $I_1 = \int_0^1 x e^{-x+1} dx$

0,25 $I_1 = [G(x)]_0^1$

$I_1 = -2 + e$

2) $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x+1} dx$

0,5 نضع $u(x) = x^{n+1}$ ومنه $u'(x) = (n+1)x^n$

$v(x) = -e^{-x+1}$ ومنه $v'(x) = e^{-x+1}$

$I_{n+1} = [-x^{n+1} e^{-x+1}]_0^1 + (n+1)\int_0^1 x^n e^{-x+1} dx$

$I_{n+1} = -1 + (n+1) I_n$

ب) حساب I_2

$I_2 = -1 + 2 I_1$

$I_2 = -1 + 2(e-2)$

0,25 $I_2 = 2e - 5$

3- $S = \int_0^1 [y - f(x)] dx$

$S = \int_0^1 (x^2 - 1) e^{-x+1} dx$

$S = \int_0^1 x^2 e^{-x+1} dx + \int_0^1 e^{-x+1} dx$

0,5 $S = I_2 + [-e^{-x+1}]_0^1$

$S = I_2 + (-1 + e)$

$S = 2e - 5 - 1 + e = (3e - 6) cm^2$

$S = (3e - 6) cm^2 = 2,15 cm^2$

1- الرسم

الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية الـــــوادي — **المؤسستان:** - **متقن ميلودي العروسي**
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي — - **ثانوية السعيد عبد الحـــي**
الشعبة: تقني رياضي — **(دورة: ماي2016)**

اختبار في مادة الرياضيات — **المـدة: 03ساعات ونصف**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضـــوع الأول

التمرين الأول :(04 نقاط)

I) ليكن k عددا صحيحا

1 اثبت أن العددين $A = 4k + 1$ و $B = 5k + 1$ أوليان فيما بينهما

2 نعتبر المعادلة : (E) ..... $5x - 4y = 1$ حيث x و y عددان صحيحان

أ عين حلا خاصا $(x_0\ ,\ y_0)$ للمعادلة (E) يحقق: $x_0 = y_0$ ، ثم حل المعادلة (E)

ب تحقق أن الثنائية $(A\ ,\ B)$ حل للمعادلة (E)

II) نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: المستويين (P) و (R) اللذين معادلتاهما على الترتيب $(P): 2x - y - z + 1 = 0$ ، $(R): x - 2y + 2z - 3 = 0$

1 بين أن المستويين (P) و (R) يتقطعان وفق مستقيم (d).

2 بين أن إحداثيات نقط المستقيم (R) تحقق المعادلة (E) .

ثم استنتج (γ) مجموعة نقط المستقيم (d) ، التي إحداثياتها أعداد صحيحة .

التمرين الثاني :(4,5 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{U}, \vec{V})$ ، L العدد المركب المعرف بـ : $L = \frac{\alpha+\beta i}{3+5i}$

حيث α و β عددان حقيقيان

1 عين α و β بحيث يكون: $|L| = 1$ و $\arg(L) = \frac{\pi}{4}$

2) نضع : $\alpha = -\sqrt{2}$ و $\beta = 4\sqrt{2}$

أ/ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون L^n عددا حقيقيا موجبا

ب/ بين أن: $L^{2016} = 1$ ثم احسب $\left(-\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i\right)^{2016} - (3 + 5i)^{2016}$

3) النقطتان A وB لاحقتاهما على الترتيب :

$Z_A = -\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$ ، $Z_B = 3 + 5i$

أ/ عين زاوية الدوران الذي مركزه O ويحول B إلى A

ب/ استنتج طبيعة المثلث OBA

جـ/ بين أن: $AB = \sqrt{34\left(2 - \sqrt{2}\right)}$

4) لتكن النقطة G منتصف $[AB]$ و M نقطة كيفية من المستوي المركب

أ بين أن : $MA^2 + MB^2 = 2MG^2 + 17\left(2 - \sqrt{2}\right)$

ب عين مجموعة النقط M من المستوي حيث : $MA^2 + MB^2 = 42 - 17\sqrt{2}$

التمرين الثالث:(4,5 نقاط)

(U_n)متتالية عددية معرفة كمايلي: $U_1 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)}U_n$

1 **أ/** احسب U_2 و U_3

ب/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_n > 0$

ج/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج أنها متتالية متقاربة و احسب نهايتها

2 نعتبر المتتالية العددية (V_n)المعرفة كمايلي :

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $V_n = n2^n U_n$

أ/ بين أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول V_1

ب/ أكتب كلا من V_n وU_n بدلالة n ، ثم اثبت صحة تقارب المتتالية (U_n)

3 **أ/** احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots\cdots\cdots + V_n$

ب/ احسب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = U_1 \times (2U_2) \times (3U_3) \times \cdots\cdots\cdots \times (nU_n)$

التمرين الرابع(07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = xe^x + e^x - 1$

1 بين أن: $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1$ وفسر النتيجة بيانيا ، ثم احسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

2 ادرس اتجاه تغير الدالة ثم شكل جدول تغيراتها

3 أحسب $g(0)$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = xe^x - x$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول هي $1cm$)

1. احسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$

2. أ بين انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$

ب استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

3. 1 بين ان المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = -x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

2 ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)

4. **أ/** بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف w يطلب تعيين احداثياها

ب/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له

ج/ احسب $f(1)$ و $f(2)$ ثم انشئ (Δ) و المماس (T)و المنحنى (C_f)

د/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $xe^x = m$

5. a/ بين أن : $x \longmapsto (x-1)e^x$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$

b/ احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما :

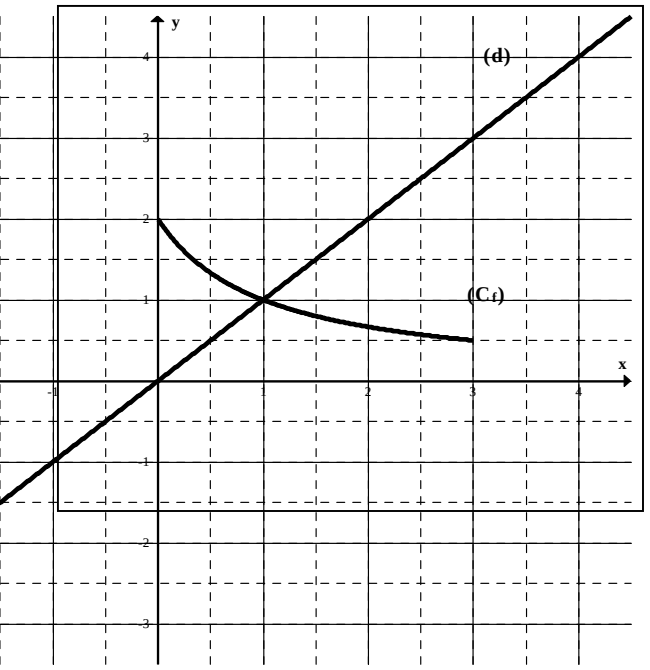
$x = -1$ و $x = 0$

الموضـــوع الثاني

التمرين الأول: (4,5 نقط)

في الشكل المقابل (C_f) هو التمثيل البياني للدالة المعرفة على المجال [0 , 3] بـ:

$f(x) = \frac{2}{x+1}$ و (d) المستقيم ذو المعادلة $y = x$



1- (U_n)متتالية عددية **معرفة** بحدها الأول : $U_0 = 3$

ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1} = f(U_n)$

أ/ مثل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2، U_3، U_4، U_5 **و** U_6 **على حامل محور الفواصل** دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل (وذلك في الوثيقة المرفقة)

ب/ ضع تخمينا حول رتابة المتتالية (U_n) وتقاربها

جـ/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_{2n}) و المتتالية (U_{2n+1})

2- برهن **بالتراجع** أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_n \leq 3$

(V_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2}$

أ- بين أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $\left(-\frac{1}{2}\right)$ وعين حدّها الأول

ب- أكتب V_n بدلالة n ، ثم استنتج U_n بدلالة n

جـ- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ وماذا تستنتج ؟

التمرين الثاني:(4,5 نقط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z الآتية : $(Z - 4 - 2i)(Z^2 - 2Z + 2) = 0$

2) في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{U}, \vec{V})$ نعتبر النقط A ،B وC التي لواحقها :

$Z_A = 1 + i$ ، $Z_B = 4 + 2i$ و $Z_C = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}i$ على الترتيب

1. بين أن : $\frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B} = \frac{1}{2}\, e^{i\frac{\pi}{2}}$

2. استنتج طبيعة المثلث BAC ثم احسب مساحته

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه B ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

أ/ عين الكتابة المركبة للتشابه S

ب/ عين Z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالتشابه S

جـ/ بين أن صورة المثلث BAC بالتشابه S هو المثلث BCD، ثم استنتج مساحة المثلث BCD

4) لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MD} = 0$

أ/ عين طبيعة المجموعة (E) وحدد عناصرها المميزة

ب/ تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المجموعة (E) ثم استنتج طبيعة المثلث ACD

التمرين الثالث :(04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط : A(−3 ,3 ,2)، B(−2 , 1 ,0) E(0 , 0 , 2) و F(0 ,3 , −1) و (p) المستوي الذي $2x + 2y - z + 2 = 0$ ، معادلة ديكارتية له

و (Q) المستوي المعرف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = 4\alpha - 2\beta + 1 \\ z = \alpha - 2\beta - 2 \end{cases}$ (Q) حيث α و β عددان حقيقيان

1 أ/ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)

ب/ أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q)

ج/ تحقق أن المستويين (p) و (Q) متعامدان ويتقاطعان وفق المستقيم (AB)

2 أ عين المركز C ونصف القطر r لسطح الكرة (S) الذي يمس كل من المستويين (p) و (Q) في النقطتين E و F على الترتيب

ب استنتج بعد النقطة C عن كل من المستويين (p) و (Q)

3 **a**/ تحقق أن المثلث ABC قائم في النقطة B ثم احسب مساحته

b/ بين أن $\overrightarrow{EF}$ عمودي على المستوي (ABC)

c/ احسب حجمي رباعيي الوجوه ABCE و ABCF

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي: $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2lnx$

1 احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة

2 ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها على المجال $]0,+\infty[$

3 احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي: $f(x) = x + \frac{1}{x} - 2 - (lnx)^2$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. أ/ اثبت ان : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(lnx)^2}{x} = 0$ (مساعدة : نضع $t = \sqrt{x}$)

ب/ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. 1 تحقق ان : $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

2 اعط تفسيرا بيانيا للنتائج

3. بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0,+\infty[$: $f'(x) = g(x) \times \frac{1}{x}$

4. استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

5. ارسم المنحنى (C_f)

6. أ/ اثبت أن: $x \longmapsto xlnx - x$ ، هي دالة أصلية للدالة : $x \longmapsto lnx$ على المجال $]0,+\infty[$

ب/ باستعمال المكاملة بالتجزئة تحقق أن : $\int_1^e (lnx)^2\,dx = e - 2$

ج/ احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما :

$x = 1$ و $x = e$

الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية الـــــوادي
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي
الشعبة: تقني رياضي

المؤسستان:- مدرسة سلى النجاح الخاصة
- ثانوية السعيد عبد الحـــــي
(دورة: ماي 2016)

الاجابة النموذجية لامتحان الباكلوريا التجريبية

الموضـــوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

I) 1) اثبت أن العددين $A = 4k + 1$ و $B = 5k + 1$ أوليان فيما بينهما :

A و B أوليان فيما بينهما يكافئ أن : $5A - 4B = 1$ أي :

$$5(4k + 1) - 4(5k + 1) = 20k + 5 - 20k + 4 = 1$$

2) أ/ عين حلا خاصا (x_0 , y_0) للمعادلة (E) يحقق: $x_0 = y_0$ ، ثم حل المعادلة (E)

أي $5x - 4y = 1$

إذن: $5(x - 1) - 4(y - 1) = 0$

ومنه حسب غوص : $y = 5k + 1$ وبالتعويض في المعادلة (E) نجد : $x = 4k + 1$

ب/ تحقق أن الثنائية (A , B) حل للمعادلة (E): $5(4k + 1) - 4(5k + 1) = 1$ محققة

II) 2) بين أن المستويين (P) و (R) يتقطعان وفق مستقيم (d):

لدينا: $\vec{n}_p \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ و $\vec{n}_R \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ إذن $\vec{n}_R$ ليست $\vec{n}_p$ ومنه المستويين (P) و (R) يتقطعان وفق مستقيم

3) بين أن إحداثيات نقط المستقيم (d) تحقق المعادلة (E) ، ثم استنتج (γ) مجموعة نقط المستقيم (d) ، التي إحداثياتها أعداد صحيحة

$$\begin{cases} 2x - y - z + 1 = 0 \\ x - 2y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$ أي $$\begin{cases} 4x - 2y - 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$ وبالجمع نجد:

$x - 4y - 1 = 0$ هي المعادلة (E)

بتعويض قيمة $x = 4k + 1$ و $y = 5k + 1$ في المعادلة الديكارتية للمستوي (P) أو (R) نجد : $z = 3k + 2$

ومنه المجموعة (γ) هي :

$$(d): \begin{cases} x = 4k + 1 \\ y = 5k + 1 \\ z = 3k + 2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \cdot$$

التمرين الثاني:(4.5 نقاط)

1 عين α و β بحيث يكون: $|L| = 1$ و $\arg(L) = \frac{\pi}{4}$:

لدينا : $L = \frac{\alpha+\beta i}{3+5i} = \frac{(\alpha+\beta i)\times(3-5i)}{(3+5i)\times(3-5i)} = \frac{(3\alpha+5\beta)}{34} + i\frac{(3\beta-5\alpha)}{34} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

إذن: $\begin{cases} \frac{(3\alpha+5\beta)}{34} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{(3\beta-5\alpha)}{34} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ أي : $\begin{cases} 3\alpha + 5\beta = 17\sqrt{2} \\ 3\beta - 5\alpha = 17\sqrt{2} \end{cases}$ وبحل جملة المعادلتين نجد : $\alpha = -\sqrt{2}$ و $\beta = 4\sqrt{2}$

2) أ/ عين قيم العدد الطبيعي حتى يكون L^n عددا حقيقيا موجبا:

لدينا: $L = e^{i\frac{\pi}{4}}$ إذن : $L^n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$ ومنه : يكون L^n عددا حقيقيا موجبا إذا كان: $\arg(L) = 2k\pi$

أي : $\frac{n\pi}{4} = 2k\pi$ وبالتالي : $k \in \mathbb{Z}$; $n = 8k$

ب/ بين أن: $L^{2016} = 1$ ، ثم احسب $(-\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^{2016} - (3 + 5i)^{2016}$:

$L^{2016} = e^{i\frac{2016\pi}{4}} = e^{i8(252)\pi} = 1$

لدينا: $L^{2016} = 1$ أي $\left(\frac{-\sqrt{2}+4\sqrt{2}i}{3+5i}\right)^{2016} = 1$ إذن: $\frac{(-\sqrt{2}+4\sqrt{2}i)^{2016}}{(3+5i)^{2016}} = 1$

ومنه نستلزم : $(-\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^{2016} = (3 + 5i)^{2016}$ أي : $(-\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^{2016} - (3 + 5i)^{2016} = 0$

أ/ عين زاوية الدوران الذي مركزه O ويحول B إلى A

$a = \frac{z_A}{z_B} = \frac{-\sqrt{2}+4\sqrt{2}i}{3+5i} = L = e^{i\frac{\pi}{4}}$ إذن: $(z_A - z_O) = a(z_B - z_O)$

ومنه الدوران الذي مركزه O ويحول B إلى A زاويته $\frac{\pi}{4}$

ب/ استنتج طبيعة المثلث OBA: المثلث OBA مثلث متقايس الساقين

جـ/ بين أن: $AB = \sqrt{34(2-\sqrt{2})}$:

$AB = \sqrt{(3+\sqrt{2})^2 + (5-4\sqrt{2})^2} = \sqrt{34(2-\sqrt{2})}$

4) أ بين أن : $MA^2 + MB^2 = 2MG^2 + 17(2-\sqrt{2})$:

$= 2\overrightarrow{MG}^2 + 2\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{2}\right)^2 = 2\overrightarrow{MG}^2 + \frac{\overrightarrow{AB}^2}{2} = 2MG^2 + \frac{(AB)^2}{2} = 2MG^2 + 17(2-\sqrt{2})$

ب عين مجموعة النقط M من المستوي حيث : $MA^2 + MB^2 = 42 - 17\sqrt{2}$

$MA^2 + MB^2 = 42 - 17\sqrt{2}$ أي : $2MG^2 + 17(2-\sqrt{2}) = 42 - 17\sqrt{2}$ ومنه : $2MG^2 = 8$

أي $MG = 2$ ومنه مجموعة النقط M هي دائرة مركزها G ونصف قطرها 2

التمرين الثالث (**4,5 نقط**) نعتبر المتتالية U_n المعرفة بـ:

$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{4} \\ U_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)} U_n \end{cases}$$

متتالية عددية معرفة كمايلي: $U_1 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $U_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)} U_n$

1 **أ/** احسب U_2 و U_3 : $U_2 = \frac{1}{4(1+1)} U_1 = \frac{1}{32}$ و $U_3 = \frac{2}{4(2+1)} U_2 = \frac{1}{384}$

ب/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_n > 0$

- من اجل $n = 1$: $U_1 > 0$ أي $\frac{1}{4} > 0$ القضية صحيحة
- نفرض أن $U_n > 0$ ونثبت صحة القضية $U_{n+1} > 0$
- لدينا : $U_n > 0$ و $n > 0$ فإن : $\frac{n}{4(n+1)} > 0$ إذن : $\frac{n}{4(n+1)} U_n$ أي $U_{n+1} > 0$

إذن من اجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_n > 0$

ج/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج أنها متتالية متقاربة و احسب نهايتها

$$U_{n+1} - U_n = \frac{n}{4(n+1)} U_n - U_n = \frac{-3n-4}{4(n+1)} U_n < 0$$

ومنه المتتالية (U_n) متناقصة ولكونها محدودة من الأسفل كذلك فهي متتالية متقاربة و نهايتها هي l حيث:

$$\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{x\to+\infty} f(l) = l$$

ومنه $f(l) = l$ تكافئ $\frac{n}{4(n+1)} l = l$ أي $\frac{-3n-4}{4(n+1)} l = 0$

و بما أن $\frac{-3n-4}{4(n+1)} \neq 0$ فإن $l = 0$ وبالتالي $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

2 **أ/** بين أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول V_1 حيث: $V_n = n2^n U_n$:

لدينا: $V_n = n2^n U_n$

اي :

$$V_{n+1} = (n+1)2^{n+1} U_{n+1}$$

$$= (n+1)2^n \times 2 \frac{n}{4(n+1)} U_n$$

$$= \frac{1}{2} n2^n U_n$$

ومنه : $V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n$ إذن (V_n) متتالية هندسية أساسها $\left(q = \frac{1}{2}\right)$ وحدها الاول: $V_1 = 1 \times 2 \times U_1 = \frac{1}{2}$

ب/ أكتب كلا من V_n و U_n بدلالة n ، ثم اثبت صحة تقارب المتتالية (U_n):

$V_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ و لدينا: $V_n = n2^n U_n$

نستلزم أن : $U_n = \frac{1}{n2^{2n}}$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n2^{2n}} = 0$ وبالتالي متتالية متقاربة نحو 0

3 **1/** احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots\cdots\cdots + V_n$

$$S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$$

2/ احسب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = U_1 \times (2U_2) \times (3U_3) \times \cdots\cdots\cdots\cdots \times (nU_n)$

لدينا : $V_n = n2^n U_n$ أي $U_n = \frac{1}{n2^n} V_n$ وبالتعويض في P_n نجد:

$$P_n = \left(\frac{1}{2}V_1\right) \times \left(2 \times \frac{1}{2\times 2^2} V_2\right) \times \left(3 \times \frac{1}{3\times 2^3} V_3\right) \times \cdots\cdots\cdots\cdots \times \left(n \times \frac{1}{n\times 2^n} V_n\right)$$

أي: $$P_n = \left(\frac{V_1}{2}\right) \times \left(\frac{V_2}{2^2}\right) \times \left(\frac{V_3}{2^3}\right) \times \cdots\cdots\cdots\cdots \times \left(\frac{V_n}{2^n}\right)$$

ومنه : $P_n = \frac{V_1 \times V_2 \times V_3 \times \cdots\cdots\cdots\cdots \times V_n}{2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \cdots\cdots\cdots\cdots \times 2^n}$ ولدينا: $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

إذن: $$P_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \cdots\cdots\cdots\cdots \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}{2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \cdots\cdots\cdots\cdots \times 2^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{n+1}{2}\right)n}}{2^{\left(\frac{n+1}{2}\right)n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)n}$$

التمرين الرابع (07نقط): **I** نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = xe^x + e^x - 1$

1 بين أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$ وفسر النتيجة بيانيا ، ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x + e^x - 1 = -1$ ومنه $y = -1$ معادلة لمستقيم مقارب افقي بجوار $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

2 ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها :

نحسب الدالة المشتقة وندرس إشارتها: $g'(x) = e^x(x+2)$

ومنه من اجل كل عدد حقيقي: $g'(x) = 0$

إذا كان : $(x+2) = 0$ أي $x = -2$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	-1 ↘	$g(-2)$	↗ $+\infty$

3 أحسب $g(0)$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$:

$g(0) = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = xe^x - x$

1 احسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

2 أ/ بين انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$

$$f'(x) = xe^x + e^x - 1 = g(x)$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(0)$	↗	$+\infty$

3 أ/ بين ان المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = -x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - (-x)) = \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ ومنه المستقيم (Δ) ذوالمعادلة $y = -x$

هو مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$

ب/ ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ):

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) + x$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في $(0,0)$		(C_f) فوق (Δ)

4 أ/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف w يطلب تعيين احداثييها:

$f'(x) = g(x)$ اذن : $f''(x) = g'(x)$

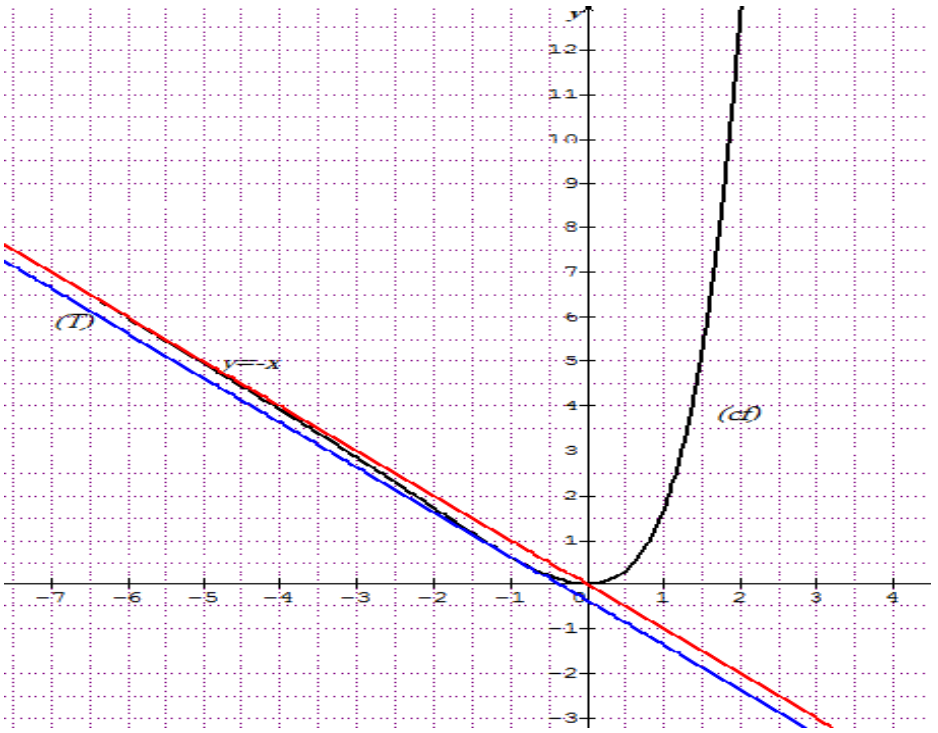
ومنه (C_f) يقبل نقطة انعطاف عند : $x = -2$ وهي: $w(-2\ ,-2e^{-2} + 2)$

ب/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له :

(C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يعني أن : $f'(x) = -1$ أي: $x = -1$

معادلة (T): $(T): y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$ إذن: $y_T = -x + 2 - e^{-1}$

ج/ احسب $f(1)$ و $f(2)$ ثم انشئ (Δ) و المماس (T)و المنحنى (C_f)



د/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $xe^x = m$

$xe^x = m$ فمن اجل كل عدد حقيقي $xe^x - x = m - x$ أي : $f(x) = -x + m$

m	$-\infty$	e^{-1}		0	$+\infty$
$f(x) = -x + m$	المعادلة لا تقبل حل	المعادلة تقبل حل مضاعف $x = -2$	المعادلة تقبل حلين سالبين	المعادلة تقبل حل معدوم	المعادلة تقبل حل موجب

5 a/ بين أن : $x \mapsto (x-1)e^x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$:

$$\left((x-1)e^x\right)' = xe^x$$

b/ احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما : $x = -1$ و $x = 0$

مساحة الحيز هي :

$$\int_{-1}^{0}[-x - f(x)]dx = \int_{-1}^{0}[-xe^x]dx = -\int_{-1}^{0}[xe^x]dx = -[(x-1)e^x]_{-1}^{0} = 1 - 2e^{-1}$$

ومنه مساحة الحيز هي 0.624 وحدة مساحة

الموضـــوع الثاني

التمرين الأول :(04 نقاط)

1 أ/ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB):

$(AB): \overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$ ومنه : $(t \in \mathcal{R})$.
$$(AB): \begin{cases} x = t - 3 \\ y = -2t + 3 \\ z = -2t + 2 \end{cases}$$

ب/ أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q):

لدينا : $\begin{cases} x = \alpha + \beta \ \ldots\ldots\ldots (1) \\ y = 4\alpha - 2\beta + 1 \ \ldots\ldots\ldots (2) \\ z = \alpha - 2\beta - 2 \ \ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$ من $((1) - (3))$ نجد $\beta = \frac{x-z-2}{3}$

ومن (1) نجد: $\alpha = x - \beta = \frac{2x+z+2}{3}$ وبالتعويض في (2) نجد: $(Q) \equiv 2x - y + 2z + 5 = 0$

ج/ تحقق أن المستويين (p) و (Q) متعامدان ويتقاطعان وفق المستقيم (AB):

$\vec{n}_p . \vec{n}_Q = 0$ اذن : $\vec{n}_p \perp \vec{n}_Q$ ومنه المستويين (p) و (Q) متعامدان

$(AB) \subset (p) \equiv 2(t - 3) + 2(-2t + 3) - (-2t + 2) + 2 = 0$ اي $0 = 0$

$(\Delta) \subset (Q) \equiv 2(t - 3) - (-2t + 3) + 2(-2t + 2) + 5 = 0$ اي $0 = 0$

2 أ عين المركز C ونصف القطر r لسطح الكرة (S) الذي يمس كل من المستويين (p) و (Q) في النقطتين E و F على الترتيب

المركز C هو نقطة تقاطع المستقيمين (CE) و (CF) ومنه : $\begin{cases} (CE): \overrightarrow{EM} = t\vec{n}_p \\ (CF): \overrightarrow{FM} = \lambda\vec{n}_Q \end{cases}$

إذن : $(t \in \mathcal{R})$.
$$(CE): \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = -t + 2 \end{cases}$$

و $(\lambda \in \mathcal{R})$.
$$(CF): \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda + 3 \\ z = 2\lambda - 1 \end{cases}$$

$(CE) \cap (CF)$ يعني أن :
$$\begin{cases} 2t = 2\lambda \\ 2t = -\lambda + 3 \\ -t + 2 = 2\lambda - 1 \end{cases}$$

ومنه $t = \lambda = 1$ أي : C(2 ,2 ,1) ونصف القطر $r = CE = \sqrt{(0-2)^2 + (0-2)^2 + (2-1)^2} = 3$

ب استنتج بعد النقطة C عن كل من المستويين (p) و (Q):

المسافة بين C والمستويين (p) و (Q) هي: $CE = CF = r = 3$

3 a/ تحقق أن المثلث ABC قائم في النقطة B ثم احسب مساحته

لدينا: $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{BC} = 0$ أي $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ ومنه المثلث ABC قائم في النقطة B

إذن: $S_{ABC} = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{3 \times 3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ $(\text{و.م})^2$

b/ بين أن $\overrightarrow{EF}$ عمودي على المستوي (ABC): $\begin{cases}\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$ أي: $\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ و $\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}=\mathbf{0}$

c/ احسب حجمي رباعيي الوجوه ABCE و ABCF:

$V_{ABCE}=\frac{1}{3}S_{ABC}\times EI$.

$V_{ABCF}=\frac{1}{3}S_{ABC}\times FI$ و حيث I منتصف [EF]

إذن : $V_{ABCE}=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{9}{2}\ (U.V)$

و $V_{ABCF}=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{9}{2}\ (U.V)$

ملاحظة: يمكن حساب حجمي رباعيي الوجوه ABCE و ABCF باعتبار ان : الارتفاع هو CE و CF والقاعدة هي المثلث ABE و ABF على الترتيب

التمرين الثاني: (4,5 نقط):

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z الآتية : $(Z-4-2i)(Z^2-2Z+2)=0$

أي: $\begin{cases}Z-4-2i=0\\ Z^2-2Z+2=0\end{cases}$ $\begin{cases}Z=4+2i\\ Z^2-2Z+2=0\end{cases}$

$Z^2-2Z+2=0$ نحسب المميز Δ نجد : $\Delta=-4=4i^2$ ومنه $Z_1=1+i$ و $Z_2=1-i$

ومنه مجموعة حلول المعادلة : $S=\{4+2i\ ,\ 1+i\ ,1-i\ \}$

2) أ/ بين أن : $\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$: $\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}=\frac{1}{2}i=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

ب/ استنتج طبيعة المثلث BAC ثم احسب مساحته

المثلث BAC قائم في B ومساحته : $S_{BAC}=\frac{AB\times BC}{2}=\frac{\sqrt{10}\times\sqrt{\frac{10}{4}}}{2}=\frac{10}{4}\ (\text{و.م})^2$

3) أ/ عين الكتابة المركبة للتشابه S :

لدينا: $\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}=\frac{1}{2}i$ أي : $(z_C-z_B)=\frac{1}{2}i(z_A-z_B)$ وبعد التبسيط نجد : $Z_C=\frac{1}{2}i\,Z_A+5$

إذن العبارة المركبة للتشابه S هي : $Z'=\frac{1}{2}i\,Z+5$

ب/ عين Z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالتشابه S

$$Z_D=\frac{1}{2}i\,Z_C+5=\frac{19}{4}+i\frac{9}{4}$$

جـ/ بين أن صورة المثلث BAC بالتشابه S هو المثلث BCD ثم استنتج مساحة المثلث BCD

S تشابه مركزه B ونسبته $\frac{1}{2}$ ويحول A إلى C ويحول C إلى D ومنه صورة المثلث BAC بالتشابه S هو المثلث BCD

$$S_{BCD}=\frac{CB\times BD}{2}=\frac{\frac{1}{2}AB\times\frac{1}{2}BC}{2}=\frac{\frac{1}{4}AB\times BC}{2}=\frac{S_{BAC}}{4}=\frac{10}{16}\ (\text{و.م})^2$$

4) أ/عين طبيعة المجموعة (E) وحدد عناصرها المميزة:

(E) هي دائرة قطرها AD أي : $(E): (x - x_A)(x - x_D) + (y - y_A)(y - y_D) = 0$

ومنه : $(E): x^2 + y^2 - \frac{23}{4}x - \frac{13}{4}y + 7 = 0$ وبالتالي هي دائرة مركزها $G\left(\frac{23}{8}; \frac{13}{4}\right)$ ونصف قطرها $\sqrt{7}$

ب/تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المجموعة (E) ثم استنتج طبيعة المثلث ACD

$C \in (E)$ ⇔ $\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{23}{4}\left(\frac{9}{2}\right) - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{2}\right) + 7 = 0$ اي $0 = 0$

ومنه المثلث ACD قائم في النقطة C

التمرين الثالث:(4,5 نقاط):

نعتبر المتتالية (u_n): $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) = \frac{2}{U_n + 1} \end{cases}$

1 أ/ تمثيل الحدود U_0 . U_1 ، U_2، U_3، U_4، U_5 **و** U_6على حامل محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل

ب/ ضع تخمينا حول رتابة المتتالية (U_n) وتقاربها

(U_n) متتالية غير رتيبة وهي متقاربة نحو العدد 1

جـ/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_{2n}) و المتتالية (U_{2n+1})

من التمثيل نستنتج **أن** المتتالية (U_{2n}) متتالية متناقصة والمتتالية (U_{2n+1}) متتالية متزايدة

2 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_n \leq 3$

من اجل $n = 0$: $0 \leq U_0 \leq 3$ أي $0 \leq 3 \leq 3$ القضية صحيحة

نفرض أن $0 \leq U_n \leq 3$ ونثبت صحة القضية $0 \leq U_{n+1} \leq 3$

لدينا : $0 \leq U_n \leq 3$ ، وبإضافة العدد 1 إلى الطرفين نجد: $1 \leq U_n + 1 \leq 4$ وبقلب طرفي المتباينة وضرب الطرفين في (2) نجد : $\frac{2}{4} \leq \frac{2}{U_n + 1} \leq 1$ أي $\frac{1}{2} \leq U_{n+1} \leq 1$ ومنه : $0 \leq U_{n+1} \leq 3$

إذن من اجل كل عدد طبيعي n **فإن** : $0 \leq U_n \leq 3$

3 أ- بين أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $\left(-\frac{1}{2}\right)$ يطلب تعيين حدّها الأول

لدينا $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2}$ ومنه $V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 1}{U_{n+1} + 2}$

أي $V_{n+1} = \frac{\frac{2}{U_n + 1} - 1}{\frac{2}{U_n + 1} + 2}$ إذن : $V_{n+1} = \frac{-U_n + 1}{2U_n + 4}$

وبأخذ $\left(\frac{-1}{2}\right)$ عامل مشترك نجد : $V_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{U_n - 1}{U_n + 2}\right)$ أي $V_{n+1} = -\frac{1}{2}V_n$

إذن (V_n)متتالية هندسية أساسها $\left(q = -\frac{1}{2}\right)$ وحدها الأول: $V_0 = \frac{U_0 - 1}{U_0 + 2} = \frac{2}{5}$

ب - أكتب V_n بدلالة n ، ثم استنتج U_n بدلالة n

$V_n = \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ومن العبارة $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2}$ نجد: $U_n = \frac{2V_n - 1}{V_n - 1}$

إذن :

$$U_n = \frac{\frac{4}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1}$$

ج- احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ وماذا تستنتج ؟:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{4}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

ومنه نستنتج أن : (U_n) متتالية متقاربة نحو العدد 1

التمرين الرابع :(07 نقاط):

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2lnx$

1 احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[x\left(1 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{lnx}{x}\right)\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \frac{x^2 - 1 - 2xlnx}{x} = -\infty$$

2 ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها على المجال $]0, +\infty[$:

$g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{(x-1)^2}{x^2}$ إذن $g'(x) = 0$ أي : $x = 1$

لدينا من اجل كل $x \epsilon]0, +\infty[$ فإن $g'(x) > 0$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $]0, +\infty[$

- جدول تغيرات الدالة g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	+	0	+	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↗		↗	$-\infty$

3 احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

$g(1) = 0$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	-	0	+	

II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x + \frac{1}{x} - 2 - (lnx)^2$

1 **أ/** اثبت ان : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(lnx)^2}{x} = 0$ ، (مساعدة : نضع $t = \sqrt{x}$)

نضع : $t = \sqrt{x}$ **اي** : $t^2 = x$ ومنه لما $x \to +\infty$ فإن : $t \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(lnx)^2}{x} = \lim_{t \to +\infty} \frac{(lnt^2)^2}{t^2} = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{2lnt}{t}\right)^2 = 0$$

ب/ استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[x\left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} - \frac{(lnx)^2}{x}\right)\right] = +\infty$

2 1 تحقق ان : $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ ، ثم احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{1}{x}} - 2 - \left(ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 = f(x)$$

نضع : $t = \frac{1}{x}$ ومنه لما $x \xrightarrow{>} 0$ فإن : $t \to +\infty$ اذن:

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$$

2 اعط تفسيرا بيانيا للنتائج : $x = 0$ معادلة لمستقيم مقارب عمودي

3 بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0, +\infty[$: $f'(x) = g(x) \times \frac{1}{x}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{lnx}{x} = g(x) \times \frac{1}{x}$$

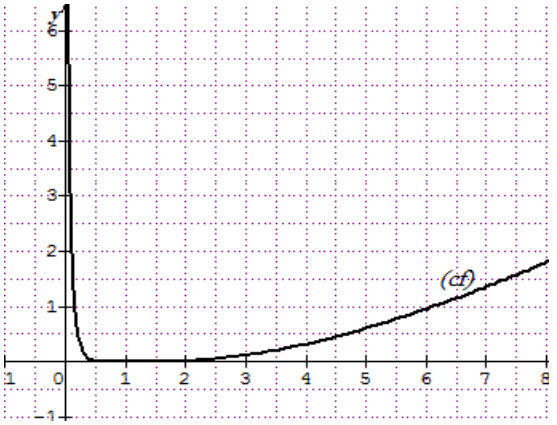
4 استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها:

ومنه من اجل كل $]0, +\infty[$ $x \epsilon$ فإن

اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖ +	0	-

5 ارسم المنحنى (C_f)



6 أ/ اثبت أن: $x \longmapsto xlnx - x$ ، هي دالة أصلية للدالة : $x \longmapsto lnx$ على المجال $]0, +\infty[$:

$$(xlnx - x)' = lnx + x \times \frac{1}{x} - 1 = lnx$$

ب/ باستعمال المكاملة بالتجزئة تحقق أن : $\int_1^e (lnx)^2\, dx = e - 2$:

نضع: $\begin{cases} u(x) = (lnx)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ نجد : $\begin{cases} u'(x) = 2\frac{lnx}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$ اذن:

$$\int_1^e (lnx)^2\, dx = [x(lnx)^2]_1^e - \int_1^e x2\frac{lnx}{x}\, dx = [x(lnx)^2]_1^e - 2\,[xlnx - x]_1^e = e - 2$$

ج/ احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = e$

مساحة الحيز هي : $\int_1^e f(x)\, dx = \int_1^e \left|x + \frac{1}{x} - 2 - (lnx)^2\right| dx = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x} - 2\right) dx - \int_1^e (lnx)^2 dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 + ln|x| - 2x\right]_1^e - (e - 2) = \frac{1}{2}e^2 - 3e + \frac{9}{2} = \frac{(e-3)^2}{2}$ و.م

امتحان تجريبي في الرياضيات شعبة الرياضيات وتقني رياضي الأستاذ ساعد

المدة : 4 ساعات ونصف التاريخ : 6ماي 2016

اختر أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

N عدد طبيعي غير معدوم يكتب $\overline{abcca}^{5}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5 ويكتب $\overline{bbab}^{8}$ في نظام التعداد ذي الأساس 8.

1) بين أن N يحقق : $309a+15c=226b$.

2) بين أن العدد 3 قاسم للعدد b.

3) فيما يلي نفرض أن : $b=3$.

أ) بين أن، $309(a-2)=60-15c$.

ب) استنتج أن العدد 5 قاسم للعدد $(a-2)$ ثم استنتج كلا من a و c .

ج) أكتب العدد N في نظام التعداد ذي الأساس 10.

التمرين الثاني :(04 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط B,A و I التي لواحقها على الترتيب ، $z_A=-2$ ، $z_B=-1+i$ و $z_I=i$.

من أجل كل عدد مركب z حيث $z\neq -2$ نضع : $z'=\dfrac{iz+i+1}{z+2}$

حيث M صورة العدد المركب z و M' صورة العدد z' .

1- أ) تحقق من أن : $z'=\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}$.

ب) بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ فان النقطة M' تنتمي إلى دائرة $(\mathscr{C})$ يطلب تعيين عناصرها .

ج) عين طبيعة (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي بحيث يكون z' تخيلا صرفا.

2- أ) تحقق من أن : $z'-i=\dfrac{1-i}{z+2}$.

ب) استنتج أن : $AM \times IM' = \sqrt{2}$ وان $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{IM'}\right) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

ج) بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1 فان النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها .

3- لتكن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

أ) بين أن النقطة E تنتمي إلى (Γ) ثم بين أن $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AE}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

ب) باستعمال نتائج السؤال 2) أنشئ النقطة E' المرفقة بالنقطة E .

التمرين الثالث (05 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $u_0 = \frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}$$

1- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$.

2- أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < \frac{1}{2}$

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ ثم بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة

ج) هل $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ؟ عين نهايتها .

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$

أ) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q = 6$.

ج) أحسب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أن $u_n = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \ln\left(e^x + 1\right)$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ وفسر النتيجة هندسيا ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x)=\dfrac{-e^{2x}}{(e^x+1)^2}$. ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}-\ln(1+e^{-x})-x$.

4) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

5) أرسم (Δ) و (C_g).

6) استنتج اشارة $g(x)$ عندما يتغير x في المجموعة $\mathbb{R}$.

II. f الدالة العددية المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{-x}\ln(e^x+1)$

1) برهن أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

3) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x $\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{1}{e^x+1}$ ثم أحسب :

$\int_{-\ln 3}^{0}\dfrac{1}{e^x+1}dx$.

4) أحسب $\int_{-\ln 3}^{0} f(x)\,dx$

سلطان
سلطان
سلطان
سلطان
سلطان
سلطان
سلطان

الموضوع الثاني

سلطان

التمرين الأول (04 نقاط)

r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي حيث $\theta \in [0;\pi]$.

نعتبر الأعداد المركبة : $z_0 = r(-\cos\theta + i\sin\theta)$ ، $z_1 = r^2(\sin\theta + i\cos\theta)$ و $z_2 = \sqrt{3}(1+i)$.

1) أكتب كلا من الأعداد z_1, z_0 و z_2 على الشكل المثلثي.

2) أ) عين العددين الحقيقيين r و θ بحيث يكون : $z_1 = \overline{z_0}$.

ب) عيّن عندئذ قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n$ حقيقيا.

3) نفرض $r = 1$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$.

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط B, A و C التي لواحقها : z_1, z_0 و z_2 على الترتيب.

أ) عين z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;2),(B;2),(C,-1)\}$.

ب) عيّن طبيعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث ،

$$\left\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = 3$$

التمرين الثاني :(04 نقاط)

☜ نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E): 5x - 6y = 3$

1. أ) أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3.

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

ج) استنتج حلول الجملة (S) : $\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$

2. a و b عددان طبيعيان حيث :

$a = \overline{1\alpha 0\alpha 00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b = \overline{\alpha\beta 0\alpha}$ في النظام ذو الأساس 5.

- عين α و β حتى تكون الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة (E) .

التمرين الثالث (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط $A(3;-2;2)$, $B(6;1;5)$ و $C(6;-2;-1)$ و المستوي $(P): x+y+z-3=0$

1) برهن أن المثلث ABC قائم .

2) برهن أن المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A .

3) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P') المستوي العمودي على (AC) و المار من النقطة A .

4) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع كلا من المستويين (P) و (P').

5) أ) نعتبر النقطة $D(0;4;-1)$. بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC).

ب) أحسب حجم رباعي الوجوه ABCD .

ج) بين أن قيس الزاوية BDC هو $\frac{\pi}{4}$ rad .

د) أحسب مساحة المثلث BDC ثم استنتج المسافة بين النقطة A و المستوي (BDC)

التمرين الرابع :(08 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=x-(x^2+1)e^{-x+1}$$

نسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وبيّن أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=1+(x-1)^2e^{-x+1}$

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

2- بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

3- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $1.8<\alpha<1.9$.

4- أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

5- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f''(x)=-(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .

6- أحسب $f(0), f(3)$ ثم أرسم (Δ)، (T) و (C_f).

7- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $(E): f(x)=x+m$

II. نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx$.

1- أ) بيّن أن الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x)=-(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x+1}$.

ب) أحسب I_1.

2- أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$ لكل عدد طبيعي غير معدوم n.

ب) أحسب I_2.

3- أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما : $x=0$ و $x=1$.

تمنياتي لكم جميعا بالتوفيق

والنجاح في البكالوريا

تصحيح الإمتحان التجريبي ماي 2016 شعبة : رياضيات
الموضوع الاول

التمرين الاول (04 نقاط)

لدينا : $N=\overline{abcca}^{5}$ و $N=\overline{bbab}^{8}$

1) تبيان أنّ N يحقق : $309a+15c=226b$

- لدينا : $N=a\times5^4+b\times5^3+c\times5^2+c\times5+a\times5^0=625a+125b+25c+5c+a$ أي $N=626a+125b+30c$
- ولدينا : $N=b\times8^3+b\times8^2+a\times8+b\times8^0=512b+64b+8a+b$ أي $N=577b+8a$
- **إذن :** $626a+125b+30c=577b+8a$

اي $618a+30c=452b$ ومنه $309a+15c=226b$ 01

2) تبيان أن العدد 3 قاسم للعدد b :

- لدينا : $3(103a+5c)=226b$

لدينا : $3/226b$ و $3\wedge226=1$ ومنه $3/b$ حسب مبرهنة غوص 0.25

3) نفرض $b=3$.

أ) تبيان أن : $309(a-2)=60-15c$

- لدينا : $3(103a+5c)=226b$ ومنه $309a+15c=678$
- ولدينا : $309a-618=60-15c$

ومنه $309(a-2)=60-15c$ 0.75

ب) استنتاج أن العدد 5 يقسم العدد $a-2$:

- لدينا : $309(a-2)=5(12-3c)$

$5/309(a-2)$ و $5\wedge309=1$ ومنه $5/(a-2)$ حسب مبرهنة غوص .

- **استنتاج قيمة a :**

بما أن $5/(a-2)$ فان : $a-2=5k(k\in\mathbb{N})$

ولدينا : $a<5$ أي أنّ : $a=2$ 0.75

- **استنتاج قيمة العدد c :**

لدينا : $309\times2+15c=678$ ومنه $15c=678-618$ أي $c=4$ 0.75

ج) كتابة العدد N في نظام التعداد 10 :

$N=577(3)+8(2)=1747$ 0.5

التمرين الثاني : (04 نقاط)

- لدينا : $z'=\dfrac{iz+i+1}{z+2}$ من أجل $z\neq-2$

1- أ) التحقق من أنّ : $z'=\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}$

لدينا : $\dfrac{iz+i+1}{z+2}=\dfrac{i\left(z+\frac{i}{i}+\frac{1}{i}\right)}{z+2}=\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}$ أي $z'=\dfrac{iz+i+1}{z+2}$

$z' = \dfrac{i(z+1-i)}{z+2}$ 0.25

ب) تبيان أنه إذا كانت M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ فان M' تنتمي الى دائرة $(\mathcal{C})$:

- لدينا : M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ معناه $AM = BM$
- ولدينا : $|z'| = \left|\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}\right| = \dfrac{|i| \times |z+1-i|}{|z+2|}$ أي $OM' = \dfrac{BM}{AM} = 1$

إذن $OM' = 1$ ومنه M' تنتمي إلى دائرة $(\mathcal{C})$ مركزها $O(0;0)$ ونصف قطرها $R = 1$ 0.5

ج) تعيين طبيعة المجموعة (E) بحيث يكون z' تخيليا صرفا :

- z' تخيلي صرف معناه $Arg(z') = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

- ومنه $Arg\left(\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ أي $Arg(i) + Arg\left(\dfrac{z+1-i}{z+2}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

معناه : $\dfrac{\pi}{2} + Arg\left(\dfrac{z+1-i}{z+2}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ومنه $Arg\left(\dfrac{z+1-i}{z+2}\right) = k\pi$

أي $\left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}\right) = k\pi$

- المجموعة (E) هي المستقيم (AB) ماعدا النقطتين A و B.

$(E) = (AB) - \{A,B\}$ 0.5

2- أ) التحقق من أنَ : $z' - i = \dfrac{1-i}{z+2}$

لدينا : $z' - i = \dfrac{iz+i+1}{z+2} - i = \dfrac{iz+i+1-iz-2i}{z+2} = \dfrac{1-i}{z+2}$ أي $z' - i = \dfrac{1-i}{z+2}$ 0.25

ب) استنتاج أنَ : $IM' \times AM = \sqrt{2}$:

- لدينا : $z' - i = \dfrac{1-i}{z+2}$ ومنه $|z'-i| = \left|\dfrac{1-i}{z+2}\right|$ أي $|z'-i| = \dfrac{|1-i|}{|z+2|}$

وبالتالي : $IM' = \dfrac{\sqrt{2}}{AM}$ ومنه $IM' \times AM = \sqrt{2}$ 0.25

- **استنتاج أنَ : $\left(\vec{u}, \overrightarrow{IM'}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right) = -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$**

لدينا : $z' - i = \dfrac{1-i}{z+2}$ ومنه $Arg(z'-i) = Arg\left(\dfrac{1-i}{z+2}\right)$

أي $Arg(z'-i) = Arg(1-i) - Arg(z+2)$ ومنه $Arg(z'-i) + Arg(z+2) = -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

اي $\left(\vec{u},\overrightarrow{IM'}\right)+\left(\vec{u},\overrightarrow{AM}\right)=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ 0.5

ج) تبيان أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1 فان النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها :

- لدينا : M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1 معناه $AM=1$
- ولدينا : $IM'\times AM=\sqrt{2}$

أي $IM'=\sqrt{2}$ ومنه M' تنتمي إلى دائرة مركزها I ونصف قطرها $R=\sqrt{2}$ 0.5

3- لدينا : $z_E=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

أ) تبيان أن النقطة E تنتمي إلى المجموعة (Γ) :

لدينا : $AE=|z_E-z_A|=\left|-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+2\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$

ومنه $E\in(\Gamma)$ 0.25

- **تبيان أن :** $\left(\vec{u},\overrightarrow{AE}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ **:**

لدينا : $z_{\overrightarrow{AE}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ وبالتالي : $\left(\vec{u},\overrightarrow{AE}\right)=arg\left(z_{\overrightarrow{AE}}\right)=Arg\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

أي $\left(\vec{u},\overrightarrow{AE}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ 0.5

أ) انشاء النقطة E' المرفقة بالنقطة E :

لدينا : $EE'=\sqrt{2}$ ولدينا : $\left(\vec{u},\overrightarrow{IE'}\right)+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ أي $\left(\vec{u},\overrightarrow{IE'}\right)=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

ومنه $\left(\vec{u},\overrightarrow{IE'}\right)=-\frac{7\pi}{12}[2\pi]$

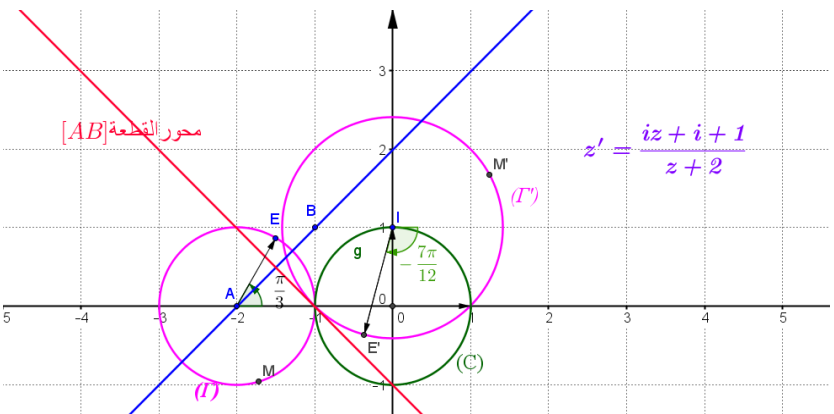
أ) انشاء النقطة E' المرفقة بالنقطة E :

لدينا : $IE'=\sqrt{2}$ ومنه E' تنتمي إلى الدائرة (Γ') ذات المركز $I(i)$ ونصف القطر $\sqrt{2}$

حيث : $\left(\vec{u},\overrightarrow{IE'}\right)+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ أي $\left(\vec{u},\overrightarrow{IE'}\right)=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ ومنه

$\left(\vec{u},\overrightarrow{IE'}\right)=-\frac{7\pi}{12}[2\pi]$

الرسم :



0.5 .....

التمرين الثالث : (05 نقاط)

- لدينا : $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$

1) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$

لدينا : $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}=\frac{2u_n+1-1}{2u_n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$

ومنه : $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$ 0.25

2) أ) البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<\frac{1}{2}$

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية.

1- من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=\frac{1}{5}$ و $0<\frac{1}{5}<\frac{1}{2}$ أي $0<u_0<\frac{1}{2}$

اذن $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$.

2- نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أنَ : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أنَ :

$0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$.

- لدينا : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ومنه $0<2u_n<1$ أي $1<2u_n+1<2$

وبالتالي $\frac{1}{2}<\frac{1}{2u_n+1}<1$ إذن $-1<-\frac{1}{2u_n+1}<-\frac{1}{2}$

وأخيرا : $0<1-\frac{1}{2u_n+1}<\frac{1}{2}$ أي $0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة .

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فان $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n 0.75

ب) التحقق انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$

- لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n}{2u_n+1}-u_n=\frac{2u_n-2u_n^2-u_n}{2u_n+1}=\frac{u_n-2u_n^2}{2u_n+1}=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ 0.25

- **تبيان أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة :**

ندرس اشارة الفرق : $u_{n+1}-u_n$

- لدينا : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$

ولدينا : $0<u_n<\dfrac{1}{2}$ ومنه $-1<-2u_n<0$ أي $0<1-2u_n<1$

وبالتالي : $0<u_n(1-2u_n)<\dfrac{1}{2}$

- ولدينا : $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2u_n+1}<1$ ومنه $0<\dfrac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}<\dfrac{1}{2}$

أي $u_{n+1}-u_n>0$ وبالتالي المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة.....0.5

ج) دراسة تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\dfrac{1}{2}$ فهي متقاربة وتتقارب من العدد $\dfrac{1}{2}$.....0.25

تعيين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\dfrac{1}{2}$.....0.25

3) لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\dfrac{3^n u_n}{2u_n-1}$

أ) اثبات أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية :

- لدينا : $v_{n+1}=\dfrac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}$

أي $v_{n+1}=\dfrac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}=\dfrac{3\times3^n\times\dfrac{2u_n}{2u_n+1}}{2\times\dfrac{2u_n}{2u_n+1}-1}=\dfrac{\dfrac{6\times3^n\times u_n}{2u_n+1}}{\dfrac{4u_n-2u_n-1}{2u_n+1}}$

$v_{n+1}=6\times\dfrac{3^n\times u_n}{2u_n+1}\times\dfrac{2u_n+1}{2u_n-1}=6\times\dfrac{3^n\times u_n}{2u_n-1}=6v_n$.....0.5

ومنه المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية

أساسها $q=6$ وحدها الأول $v_0=\dfrac{3^0\times u_0}{2u_0-1}=\dfrac{1\times\frac{1}{5}}{2\times\frac{1}{5}-1}=\dfrac{\frac{1}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\dfrac{1}{3}$.....0.25

ب) حساب عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

- لدينا : $v_n=v_0\times q^n=-\dfrac{1}{3}\times6^n$.....0.5

- **استنتاج أنّ :** $u_n=\dfrac{2^n}{3+2^{n+1}}$

- لدينا : $v_n=\dfrac{3^n u_n}{2u_n-1}$ ومنه $2u_nv_n-v_n=3^nu_n$ أي $2u_nv_n-3^nu_n=v_n$

- ومنه $\left(2v_n-3^n\right)u_n=v_n$ وبالتالي : $u_n=\dfrac{v_n}{2v_n-3^n}$

إذن : $u_n=\dfrac{-\frac{1}{3}\times 6^n}{2\left(-\frac{1}{3}\times 6^n\right)-3^n}=-\dfrac{6^n}{-2\times 6^n-3\times 3^n}$ ومنه

0.75 ..... $u_n=\dfrac{2^n}{2^{n+1}+3}=\dfrac{2^n}{3+2^{n+1}}$ أي $u_n==-\dfrac{6^n}{-2\times 6^n-3\times 3^n}=\dfrac{2^n\times 3^n}{2\times 3^n\times 2^n+3\times 3^n}$

- **حساب** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

0.5 ..... $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\dfrac{2^n}{2^{n+1}+3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n}{2^n\left(2+\frac{3}{2^n}\right)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\dfrac{1}{2}$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. لدينا : $g(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}-ln\left(e^x+1\right)$

1) حساب النهايات :

- **حساب** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$:

0.25 ..... $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}ln\left(e^x+1\right)=0\end{cases}$ لانَ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}-ln\left(e^x+1\right)\right)=0$

التفسير الهندسي : $y=0$ مستقيم مقارب أفقي للمنحني $\left(C_g\right)$ بجوار $-\infty$ 0.25

- **حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$:

0.25 ..... $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}ln\left(e^x+1\right)=+\infty\end{cases}$ لأنَ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}-ln\left(e^x+1\right)\right)=-\infty$

2) تبيان أنّ $g'(x)=\dfrac{-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}$ **:**

- لدينا : $g'(x)=\dfrac{e^x\left(e^x+1\right)-e^x\times e^x}{\left(e^x+1\right)^2}-\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{e^{2x}+e^x-e^{2x}-e^{2x}-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$

أي $g'(x)=\dfrac{-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}$ 0.5

- **استنتاج اتجاه تغير الدالة** g **:**

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$-e^{2x}$	$-$
$g'(x)$	$-$

إذن الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ 0.25

- **جدول تغيرات الدالة** g **:** 0.5

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	0 ↘ $-\infty$

تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x **:** $g(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}+ln\left(1+e^{-x}\right)-x$

لدينا : $g(x)=\dfrac{e^x}{e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)}-ln\left[e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)\right]$ ومنه : $g(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}-ln\left(e^x\right)-ln\left(1+e^{-x}\right)$

أي $g(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}+ln\left(1+e^{-x}\right)-x$ 0.5

4) أ) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]$ **:**

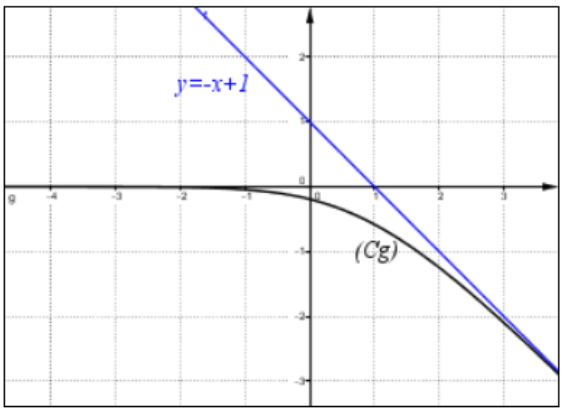
- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{1+e^{-x}}-ln\left(1+e^{-x}\right)-x+x-1\right]$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]=0$ لأنّ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+e^{-x}}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}ln\left(1+e^{-x}\right)=0\end{cases}$ 0.5

تفسير النتيجة بيانيا :

المستقيم ذي المعادلة $y=-x+1$ مقارب مائل للمنحنى $\left(C_g\right)$ عند $-\infty$ 0.25

5) الرسم :



0.75 .....

6) استنتاج اشارة $g(x)$: 0.25 .....

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$

II. لدينا : $f(x)=e^{-x}\ln(1+e^{x})$

1) البرهان أنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

- نضع $e^{x}=t$ وبالتالي عندما $x\to-\infty$ فانّ : $t\to 0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{-x}\ln(1+e^{x})=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(e^{x}+1)}{e^{x}}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{t}=1$$ إذن

أي $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ 0.25

- **حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\ln(1+e^{x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^{x}+1)}{e^{x}}=0$$ 0.25

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$:

- لدينا : $f'(x)=-e^{-x}\times\ln(e^{x}+1)+e^{-x}\times\frac{e^{x}}{e^{x}+1}=e^{-x}\left(\frac{e^{x}}{e^{x}+1}-\ln(e^{x}+1)\right)$

أي $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$ 0.5

- **استنتاج اتجاه تغير الدالة f :**

اشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

.....0.25

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$
$f'(x)$	$-$

- **جدول تغيرات الدالة f :**

0.5 .....

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	1 ↘	0

3) التحقق من أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

- من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{1}{e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)}=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ 0.25

- حساب $\int_{-\ln 3}^{0}\dfrac{1}{e^x+1}dx$:

$$\int_{-\ln 3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx=\int_{-\ln 3}^{0}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=\left[-\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_{-\ln 3}^{0}=-\ln 2+\ln\left(1+e^{\ln 3}\right)$$

$$\int_{-\ln 3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx=-\ln 2+\ln 4=-\ln 2+2\ln 2=\ln 2 \quad \text{أي}$$

$$\int_{-\ln 3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx=\ln 2 \quad \text{إذن} \quad \text{.....} \quad 0.5$$

4) حساب $\int_{-\ln 3}^{0}f(x)dx$ باستعمال المكاملة بالتجزئة :

$$\int_{-\ln 3}^{0}f(x)dx=\int_{-\ln 3}^{0}e^{-x}\ln\left(e^x+1\right)dx$$

نضع : $u'(x)=e^{-x}$ ومنه $u(x)=-e^{-x}$

و $v(x)=\ln\left(e^x+1\right)$ ومنه $v'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$

إذن :

$$\int_{-\ln 3}^{0}f(x)dx=\int_{-\ln 3}^{0}e^{-x}\ln\left(e^x+1\right)dx=\left[-e^{-x}\ln\left(e^x+1\right)\right]_{-\ln 3}^{0}-\int_{-\ln 3}^{0}-e^{-x}\times\frac{e^x}{e^x+1}dx \quad \text{أي}$$

$$\int_{-\ln 3}^{0}f(x)dx=-\ln 2+e^{\ln 3}\ln\left(e^{-\ln 3}+1\right)+\int_{-\ln 3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx$$

$$\int_{-\ln 3}^{0}f(x)dx=-\ln 2+3\ln\left(\frac{1}{3}+1\right)+\ln 2=3\ln\frac{4}{3}$$

$$\int_{-\ln 3}^{0}f(x)dx=3\ln\frac{4}{3} \quad \text{إذن} \quad \text{.....} \quad 0.5$$

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

- لدينا : $z_0 = r\left(-\cos\theta + i\sin\theta\right)$ ، $z_1 = r^2\left(\sin\theta + i\cos\theta\right)$ و $z_2 = \sqrt{3}(1+i)$

حيث $r \in \mathbb{R}^{*+}$ و $\theta \in [0;\pi]$

1) كتابة الأعداد z_1, z_0 و z_2 على الشكل المثلثي :

- لدينا : $z_0 = r\left(\cos(\pi-\theta) + i\sin(\pi-\theta)\right)$

$z_1 = r^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$ ..... 3×0.5

$z_2 = \sqrt{3}\times\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

2) أ) تعيين العددين الحقيقيين r و θ بحيث يكون : $z_1 = \overline{z_0}$

- لدينا : $\overline{z_0} = r\left(\cos(-\pi+\theta) + i\sin(-\pi+\theta)\right)$

- $z_1 = \overline{z_0}$ معناه $r^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right) = r\left(\cos(-\pi+\theta) + i\sin(-\pi+\theta)\right)$

ومنه : $\begin{cases} r^2 = r \\ \frac{\pi}{2} - \theta = -\pi + \theta + 2k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right) \end{cases}$ أي $\begin{cases} r^2 - r = 0 \\ -2\theta = -\frac{\pi}{2} - \pi + 2k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right) \end{cases}$

وبالتالي : $\begin{cases} r = 0 \vee r = 1 \\ -2\theta = -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right) \end{cases}$ إذن $\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{3\pi}{4} - k\pi \left(k \in \{0;1\}\right) \end{cases}$

من أجل $k = 0$ نجد : $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (مقبول لأنّ $\theta \in [0;\pi]$)

من أجل $k = 1$ نجد $\theta = \frac{3\pi}{4} - \pi$ (مرفوض)

$z_1 = \overline{z_0}$ معناه $\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$ 0.75

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n$ حقيقيا :

- لدينا : $\frac{z_0}{z_1}=\frac{1\left(\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}{1^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}$

0.25 ..... $\frac{z_0}{z_1}=\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$

اي $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n=\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}$

- إذن $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n$ حقيقي معناه $\sin\frac{n\pi}{2}=0$ أي $\frac{n\pi}{2}=k\pi$

وبالتالي : $n=2k\left(k\in\mathbb{N}\right)$ 0.25

3) لدينا : $r=1$ و $\theta=\frac{\pi}{3}$

- إذن : $z_0=-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_1=\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

أ) تعيين z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;2),(B;2),(C;-1)\}$

لدينا : $z_G=\frac{2z_A+2z_B-z_C}{2+2-1}=\frac{-1+i\sqrt{3}+\sqrt{3}+i-\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{3}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i$

$z_G=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i$ 0.5

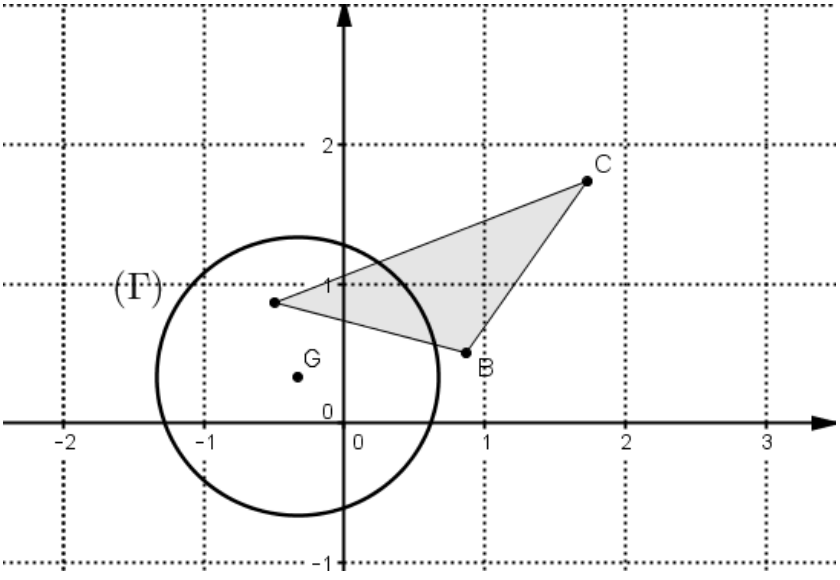
ب) تعيين طبيعة المجموعة (Γ):

- لدينا : $\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=3$ معناه $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=3$

ومنه $3MG=3$ أي $MG=1$

وبالتالي (Γ) هي دائرة مركزها النقطة G ونصف قطرها $R=1$

0.75 .....



التمرين الثاني :(04 نقاط)

لدينا : $(E): 5x-6y=3$

1) أ) اثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3 :

- لدينا : $5x-6y=3$ تكافئ $5x=3+6y$

أي $5x=3(1+2y)$

لدينا : $3/5x$ و $5\wedge 3=1$ فإن $3/x$ حسب مبرهنة غوص

أي أنّ x مضاعف للعدد 3 ..... 0.25

ب) تعيين حل خاص للمعادلة (E) :

نفرض $x=3$ وبالتالي : $y=\dfrac{5\times 3-3}{6}=\dfrac{12}{6}=2$

إذن الثنائية $(3;2)$ حل للمعادلة (E) 0.5

- **حل المعادلة (E) :**

- لدينا : $5x-6y=5\times 3-6\times 2$ يكافئ $5x-5\times 3=6y-6\times 2$

أي $(*): 5(x-3)=6(y-2)$

- لدينا : $6/5(x-3)$ و $5\wedge 6=1$ فإن $6/(x-3)$ حسب مبرهنة غوص .

أي $x-3=6k(k\in\mathbb{Z})$ وبالتالي $x=6k+3(k\in\mathbb{Z})$

- من أجل $x=6k+3$ نعوض في المعادلة $(*)$ نجد : $5(6k+3-3)=6(y-2)$

ومنه $y-2=5k(k\in\mathbb{Z})$ أي $y=5k+2(k\in\mathbb{Z})$

مجموعة حلول المعادلة : $S=\{(6k+3;5k+2),k\in\mathbb{Z}\}$ 0.5

ج) استنتاج حلول الجملة : $(S): \begin{cases} x\equiv -1[6] \\ x\equiv -4[5] \end{cases}$

- $\begin{cases} x\equiv -1[6] \\ x\equiv -4[5] \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x=6m-1 \\ x=5n-4 \end{cases}$

أي $6m-1=5n-4$ ومنه $5n-6m=3$

ومنه : $n=6k+3$ وبالتالي $x=5(6k+3)-4=30k+11(k\in\mathbb{Z})$

$x=30k+11(k\in\mathbb{Z})$ 0.75

2) - لدينا : $a=\overline{1\alpha 0\alpha 00}^{3}$ و $b=\overline{\alpha\beta 0\alpha}^{5}$

- **تعيين $(\alpha;\beta)$ بحيث تكون $(a;b)$ حل للمعادلة (E) :**

- لدينا : $a=1\times 3^5+\alpha\times 3^4+\alpha\times 3^2=243+81\alpha+9\alpha=243+90\alpha$

ولدينا : $b=\alpha\times 5^3+\beta\times 5^2+\alpha\times 5^0=125\alpha+25\beta+\alpha=126\alpha+25\beta$

مع $\alpha \leq 2$ و $\beta \leq 4$ 0.75

- **الثنائية $(a;b)$ حل للمعادلة (E) معناه $5a-6b=3$**

ومنه $5(243+90\alpha)-6(126\alpha+25\beta)=3$

اي $1215+450\alpha-756\alpha-150\beta=3$ ومنه $-306\alpha-150\beta=-1212$

بعد تقسيم الطرفين على العدد -3 نجد :

$102\alpha+50\beta=404$ وبالتالي الثنائية $(\alpha;\beta)=(2;4)$ 0.75

التمرين الثالث : (04 نقاط)

لدينا : $A(3;-2;2)$,$B(6;1;5)$ و $C(6;-2;-1)$ والمستوي $(P): x+y+z-3=0$

1) البرهان على أنَ المثلث ABC قائم :

- لدينا : $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$ ، $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ و $\overrightarrow{BC}(0;-3;-6)$
- ولدينا : $AB=\sqrt{(3)^2+(3)^2+(3)^2}=3\sqrt{3}$ و $AC=\sqrt{(3)^2+(0)^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$

و $BC=\sqrt{(0)^2+(-3)^2+(-6)^2}=3\sqrt{5}$

- إذن لدينا : $BC^2=45$ و $AB^2+AC^2=27+18=45$

ومنه $BC^2=AB^2+AC^2$ أي المثلث ABC قائم في النقطة A 0.5

2) البرهان على أنَ المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A :

- لدينا : $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)
- إذن $\frac{3}{1}=\frac{3}{1}=\frac{3}{1}=3$ ومنه $\overrightarrow{AB}=3\vec{n}$ أي $\overrightarrow{AB}\parallel\vec{n}$ وبالتالي $(AB)\perp(P)$
- نعوض بإحداثيات النقطة A في معادلة (P) نجد : $3-2+2-3=0$ أي $A\in(P)$

وبالتالي : **المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A** 0.5

3) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P') العمودي على المستقيم (AC) والمار من النقطة A :

لدينا : $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي (P') وبالتالي معادلة للمستوي (P') من الشكل :

$3x-3z+d=0$

- تعيين قيمة d نعوض بإحداثيات النقطة A نجد :

$3(3)-3(2)+d=0$ ومنه $d=-3$

وبالتالي معادلة للمستوي (P') : $3x-3z-3=0$ أي $x-z-1=0$ 0.5

4) كتابة تمثيل وسيطي لـ (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (P') :

- لدينا : $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x=z+1 \end{cases}$

وبالتالي $\begin{cases} z+1+y+z-3=0 \\ x=z+1 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} x=z+1 \\ y=-2z+2 \end{cases}$

نضع : $z=t$

وبالتالي تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) : $(\Delta):\begin{cases} x=t+1 \\ y=-2t+2 \\ z=t \end{cases};(t\in\mathbb{R})$ 0.5

5) أ) تبيان أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)

- **لدينا :** $D(0;4;-1)$ **وبالتالي** $\overrightarrow{AD}(-3;6;-3)$ إذن :

- $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=-3(3)+6(3)-3(3)=-18+18=0$ ومنه $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$

- $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=-3(3)+6(0)-3(-3)=-9+9=0$ ومنه $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AC}$

وبالتالي المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC) 0.5

ب) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$:

$$v_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\times AD$$

- لدينا : $S_{ABC}=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{3\sqrt{3}\times 3\sqrt{2}}{2}=\frac{9\sqrt{6}}{2}$

و $AD=\sqrt{(-3)^2+(6)^2+(-3)^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$

أي $v_{ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{6}}{2}\times 3\sqrt{6}=27uv$ ..... 0.5 $v_{ABCD}=27uv$

ج) تبيان أنّ قيس الزاوية BDC هو $\frac{\pi}{4}rad$:

- لدينا : $\overrightarrow{DB}(6;-3;6)$ و $\overrightarrow{DC}(6;-6;0)$

وبالتالي : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=6\times 6-3(-6)+6\times 0=36+18=54$

- ولدينا : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\left\|\overrightarrow{DB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{DC}\right\|\times cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)$

أي $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\sqrt{81}\times\sqrt{72}\times cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)$ $cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)=\frac{54}{9\times 6\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ومنه $BDC=45^\circ$ 0.5

د) حساب مساحة المثلث BDC :

$$S_{BDC}=\frac{1}{2}DB\times DC\times \sin BDC=\frac{1}{2}\times 9\times 6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=27us$$ -

- **استنتاج المسافة بين النقطة** A والمستوي (BDC):

لدينا : $v_{ABDC}=\frac{1}{3}\times S_{BDC}\times d\left(A,(BCD)\right)=\frac{1}{3}\times 27\times d\left(A,(BCD)\right)=27$

ومنه $d\left(A,(BDC)\right)=\frac{27}{\frac{1}{3}\times 27}=3$ ..... $d\left(A,(BDC)\right)=3$ 0.5

التمرين الرابع : (08 نقاط)

I. **لدينا :** $f(x)=x-(x^2+1)e^{-x+1}$

1) أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x-(x^2+1)e^{-x+1}\right]=-\infty$$ لأنّ :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}-(x^2+1)e^{-x+1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ 0.25

- **تبيان أنّ :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$:

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-(x^2+1)e^{-x+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x^2+1}{e\times e^x}\right)$

أي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x^2}{e^x}\times\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\times\frac{1}{e^x}\right)=+\infty$ لأن

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ 0.25

ب) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=1+(x-1)^2e^{-x+1}$:

- لدينا : $f'(x)=1-\left[2xe^{-x+1}+(x^2+1)\left(-e^{-x+1}\right)\right]=1-(2x-x^2-1)e^{-x+1}$

وبالتالي : $f'(x)=1+(x^2-2x+1)e^{-x+1}=1+(x-1)^2e^{-x+1}$

$f'(x)=1+(x-1)^2e^{-x+1}$ 0.5

ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$(x-1)^2e^{-x+1}$	$+$
$f'(x)$	$+$

الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ 0.25

- **جدول تغيرات الدالة f :**

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

..... 0.5

2) تبيان أنَ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$:

- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-(x^2+1)e^{-x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2e^{-x+1}+e^{-x+1}\right)=0$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$ 0.25

- **دراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ):**

لدينا : $f(x)-x=x-(x^2+1)e^{-x+1}-x=-(x^2+1)e^{-x+1}$

إذن $f(x)-x<0$

ومنه (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) من أجل كل عدد حقيقي x 0.5

3) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$:

- لدينا f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[1.8;1.9]$

ولدينا $f(1.8)=1.8-\left((1.8)^2+1\right)e^{-1.8+1}=-0.11$

$f(1.9)=1.9-\left((1.9)^2+1\right)e^{-1.9+1}=0.03$

وبالتالي $f(1.8)\times f(1.9)<0$

حسب مبرهنة ال قيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

حيث $1.8<\alpha<1.9$ 0.5

4) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1:

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$y=1\times(x-1)-1=x-2$ أي $(T):y=x-2$ 0.5

5) تبيان أنَ $f''(x)=-(x-1)(x-3)e^{-x+1}$:

- لدينا : $f''(x)=2(x-1)e^{-x+1}+(x-1)^2\times\left(-e^{-x+1}\right)=(x-1)e^{-x+1}(2-x+1)$

أي $f''(x)=-(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ 0.25

- **استنتاج أنَ (C_f) يقبل نقطتي انعطاف :**

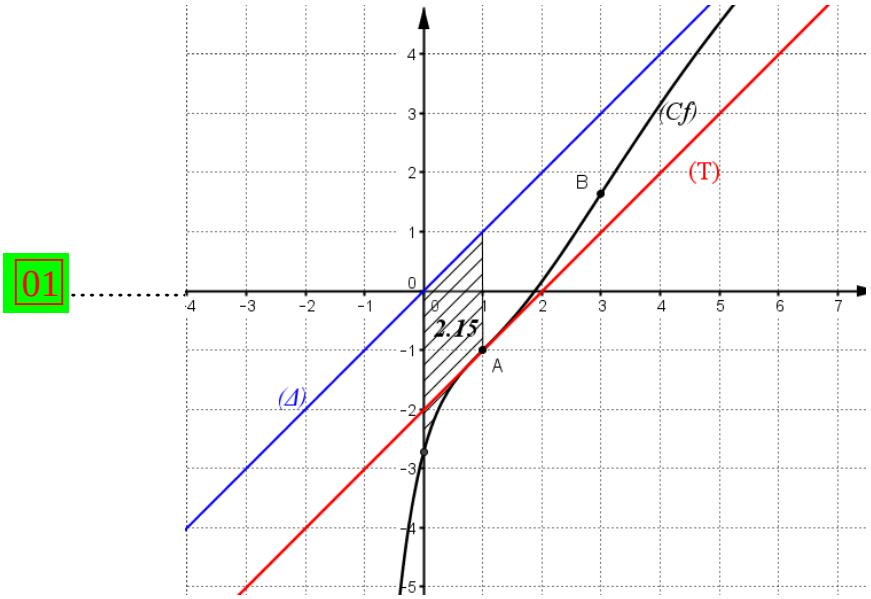
- جدول إشارة $f''(x)$:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- المشتقة الثانية $f''(x)$ تنعدم من أجل القيمتين $x=1$ و $x=3$ مغيرة إشارتها إذن النقطتين $A(1;f(1)), B(3;f(3))$ نقطتي انعطاف للمنحني (C_f) 0.75

6) حساب $f(3), f(0)$: $f(3)=3-9e^{-2}=1.65, f(0)=-e=-2.71$

الرسم :



01 .....

7) المناقشة البيانية لحلول المعادلة : $f(x)=x+m$

- هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x+m$ الموازي لكل من (T) و (Δ) .
- إذا كان $m\in]-\infty;-e[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا .
- إذا كان $m=-e$ المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما .
- إذا كان $m\in]-e;0[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا .
- إذا كان $m\in[0;+\infty[$ المعادلة ليس لها حلا 0.5

II. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx$

1- أ) تبيان أنّ الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x)=-(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة g حيث $g(x)=xe^{-x+1}$ على المجموعة $\mathbb{R}$:

- لدينا : $G'(x)=-\left[e^{-x+1}-(x+1)e^{-x+1}\right]=-\left(e^{-x+1}-xe^{-x+1}-e^{-x+1}\right)=xe^{-x+1}=g(x)$

ومنه G دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$ 0.5

ب) **حساب I_1 :**

لدينا : $I_1=\int_0^1 xe^{-x+1}dx=\left[-(x+1)e^{-x+1}\right]_0^1=-2e^0+e=e-2$ 0.25

2- أ) تبيان أنّ $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$

- لدينا : $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x+1}dx$

نضع : $u(x)=x^{n+1}$ ومنه $u'(x)=(n+1)x^n$

ونضع : $v'(x)=e^{-x+1}$ ومنه $v(x)=-e^{-x+1}$

وبالتالي : $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x+1}dx=\left[-x^{n+1}e^{-x+1}\right]_0^1-\int_0^1(n+1)x^n\left(-e^{-x+1}\right)dx$

ومنه : $I_{n+1}=-1+(n+1)\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx=-1+(n+1)I_n$ 0.5

ب) حساب I_2 :

$I_2=-1+(1+1)I_1=-1+2(e-2)=2e-5$ 0.25

3- حساب المساحة للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) **والمستقيم** (Δ) **والمستقيمين الذين معادلتيهما** $x=0, x=1$ **:**

$S=\int_0^1\left[y-f(x)\right]dx=\int_0^1 x-x+(x^2+1)e^{-x+1}dx=\int_0^1(x^2+1)e^{-x+1}dx$

أي $S=\int_0^1 x^2e^{-x+1}dx+\int_0 e^{-x+1}dx=I_2+\left[-e^{-x+1}\right]_0^1$

$S=(2e-5-1+e)us=(3e-6)cm^2$

$S=2.15cm^2$ 0.5

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية **دورة : ماي 2016**
الشعبة:رياضيات+تقني رياضي امتحان بكالوريا التعليم الثانوي(تجريبي)
الثانويات: لقرع محمد الضيف –كركوبية خليفة – مفدي زكريا –لبامة–البياضة الجديدة - سيدي عون

اختبار في مادة : الرياضيات **المدة :4 ساعات ونصف**

على المتر شح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول(04 نقاط)

A_0 و B_0 نقطتان من المستوي بحيث $A_0B_0=8$ (الوحدة هي السنتيمتر)

ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A_0 ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$

نعرف متتالية النقط (B_n) بـ : $B_{n+1}=S(B_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n

1) أنشئ النقط : B_1 , B_2 , B_3 و B_4

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n المثلثان : $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان

3) نعرف متتالية (u_n) بـ : $u_n=B_nB_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n

أ) أثبت أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

ب) أوجد عبارة u_n بدلالة n و u_0

جـ) نضع : $\Sigma_n=u_0+u_1+.....+u_n$, أوجد $\lim\limits_{n\to+\infty}\Sigma_n$

4) أ) حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $3x-4y=2$

ب) ليكن (Δ) المستقيم العمودي على المستقيم (A_0B_0) في النقطة A_0 ، جد قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون النقطة B_n تنتمي إلى المستقيم (Δ)

التمرين الثاني:(4,5نقاط)

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلتين التاليتين :

$z^2-2z+5=0$ ، $z^2-2(1+\sqrt{3})z+5+2\sqrt{3}=0$

2- في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد متجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D صور الأعداد المركبة : $z_A=1+2i$ ، $z_B=1+\sqrt{3}+i$ ، $z_C=1-2i$ ، $z_D=1+\sqrt{3}-i$.

أ) ماهي طبيعة المثلث ABC.

ب) أكتب معادلة الدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC جـ) أثبت أن النقطة D تنتمي للدائرة (γ).

3- نعتبر التحويل النقطي L المعرف بـ : $L(A)=B$ و $L(C)=D$.

- اكتب العبارة المركبة للتحويل L ، ثم حدد طبيعته و عناصره المميزة.

4- R دوران عبارته المركبة : $(z'-(1+2\sqrt{3}))=e^{i\frac{\pi}{4}}(z-(1+2\sqrt{3}))$

- حدد طبيعة التحويل $L\circ R$ ، و عناصره المميزة.

التمرين الثالث:(4نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

لتكن (S)مجموعة النقط $M(x,y,z)$من الفضاء والتي تحقق:

$x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-19=0$

1) تحقق أن (S)سطح كرة , يطلب تحديد مركزها ωونصف قطرها R

2) أ) تحقق أن النقطة $B(1,2,2)$تنتمي إلى (S)

ب) ليكن (P)المستوي المماس لسطح الكرة (S) في النقطة B ,حدد معادلة ديكارتية لـ (P)

3) ليكن (Q)المستوي ذو المعادلة : $2x-2y+z+4=0$, أحسب المسافة بين ω و (Q) ثم أستنتج أن (S) و (Q) يتقاطعان وفق دائرة(C) يطلب تحديد مركزها I ونصف قطرها r

التمرين الرابع: (07,5 نقاط)

I: نعتبر المعادلة التفاضلية: $(E)\ldots\ y'+y=e^{-x}$

1.بين أن الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$بـ $u(x)=xe^{-x}$ حل للمعادلة (E)

2.حل المعادلة التفاضلية $(E_0)\ \ldots\ y'+y=0$

3.بين أن الدالة v المعرفة و القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ تكون حلا للمعادلة(E_0) إذا وفقط إذا كانت $v+u$ حلا للمعادلة (E).

- استنتج جميع حلول المعادلة(E).

4.عين الدالة f_2 حل المعادلة(E) التي تأخذ القيمة 2 من أجل 0.

II: k عدد حقيقي معطى، نرمز بـ f_k للدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f_k(x)=(x+k)e^{-x}$

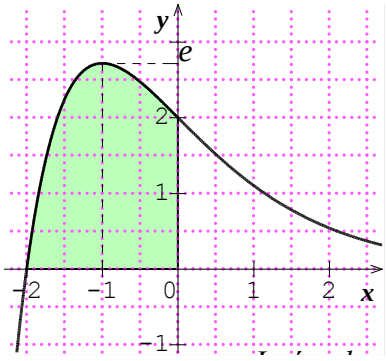
نرمز بـ $\mathcal{C}_k$ إلى تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. عين نهايات f_k عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2.احسب f'_k من أجل كل عدد حقيقي xثم شكل جدول تغيرات الدالة f_k

III:نعتبر متتالية التكاملات (I_n) المعرفة بـ $I_0=\int_{-2}^{0}e^{-x}\,dx$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ ،

$$I_n=\int_{-2}^{0}x^n e^{-x}\,dx$$



1.أ- احسب القيمة المضبوطة لـ I_0.

ب- باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $I_{n+1}=(-2)^{n+1}e^2+(n+1)I_n$

جـ- استنتج القيم المضبوطة لـ I_1 و I_2.

2. التمثيل البياني الموالي $\mathcal{C}_k$ هو لدالة f_k المعرفة في الجزء II.

أ- باستعمال المعلومات المتوفرة في الشكل ،عين قيمة k المرفقة بالمنحني $\mathcal{C}_k$.

ب- لتكن S مساحة الجزء المظلل(مقدرة بوحدة المساحات).

عبر عن S بدلالة I_0 و I_1 ثم استنتج القيمة المضبوطة للمساحة S.

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ ولتكن النقطة $A(-1,2,3)$ والمستقيم (D) الممثل وسيطيا بالجملة: $\begin{cases} x = 9+4t \\ y = 6+t \\ z = 2+2t \end{cases}$,$t \in \mathbb{R}$

1) أ) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) العمودي على المستقيم (D) ويشمل النقطة A

ب) تحقق أن النقطة $B(-3,3,-4)$ تنتمي للمستقيم (D)

ج) أحسب المسافة d_B بين النقطة B والمستوي (P)

د) أحسب المسافة d بين النقطة A و المستقيم (D) وذلك بدلالة d_B والمسافة AB , ثم أستنتج القيمة المضبوطة للمسافة d .

2) لتكن M نقطة كيفية من المستقيم (D) , ولتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(t) = AM^2$

حدد إتجاه تغير الدالة f ثم أستنتج قيمة d .

التمرين الثاني:(05نقاط)

(U_n) متتالية معرفة بـ: $U_0 = 0$ ، $U_1 = 1$ ،و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+2} = 5U_{n+1} - 4U_n$.

1- احسب U_2 و U_3.

2- برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أن :$U_{n+1} = 4U_n + 1$

- تحقق أن : U_n عدد طبيعي ، ثم استنتج أن : U_n و U_{n+1} أوليان فيما بينهما.

3- (V_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = U_n + \frac{1}{3}$.

أ) بين أن المتتالية (V_n) هندسية ، عين أساسها و حدها الأول.

ب) اكتب V_n ثم U_n بدلالة n.

4- أ) احسب $PGCD\left((4^6-1),(4^5-1)\right)$ ،

ب) عين من أجل كل عدد طبيعي n: $PGCD\left((4^{n+1}-1),(4^n-1)\right)$

5- أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 4^n على 7.

ب) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_{3n}$.

جـ) عين قيم العدد الطبيعي n حيث العدد $9S_n + 8n$ يقبل القسمة على 7.

التمرين الثالث:(04,5 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقطتين : A و B حيث :

$z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\sqrt{3}-i$

1- اكتب العددين z_A ، z_B على الشكل الأسي ، ثم أنشئ النقطتين A و B.

2- r دوران مركزه O ، و زاويته $\frac{\pi}{3}$

- عين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران r.
- اكتب $z_{A'}$ على الشكل الجبري ، ثم أنشئ النقطة A'.

3- h تحاك مركزه O ، و نسبته $\frac{-3}{2}$

- اكتب على الشكل المثلثي $z_{B'}$ لاحقة النقطة B' صورة B بالتحاكي h ، ثم أنشئ النقطة B'.

4- ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث $OA'B'$ ، و R نصف قطرها ، و z_ω لاحقة النقطة ω.

أ) باستعمال الخاصة : $z\bar{z}=|z|^2$ تحقق من صحة العبارات التالية : $z_\omega\overline{z_\omega}=R^2$

$\left(z_\omega+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(\overline{z_\omega}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)=R^2$ ، $\left(z_\omega-2i\right)\left(\overline{z_\omega}+2i\right)=R^2$

ب) استنتج أن : $z_\omega-\overline{z_\omega}=2i$ و $z_\omega+\overline{z_\omega}=\frac{-4\sqrt{3}}{3}$ ، ثم استنتج z_ω لاحقة النقطة ω و قيمة R.

التمرين الرابع:(06,5 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{\ln(x+1)+|x|}{x+1}$ وليكن (c_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول 2cm)

1) أحسب: $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجتين بيانيا

2) أ) . أحسب $f'(x)$ من أجل $x\in]-1,0[$ ثم أستنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1,0[$

. أحسب $f'(x)$ من أجل $x\in]0,+\infty[$ ثم أستنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0,+\infty[$

ب) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} \frac{f(x)}{x}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \frac{f(x)}{x}$ ، هل f قابلة للاشتقاق عند 0؟

ـ أكتب معادلتي المماسين لـ (c_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

3) شكل جدول تغيرات f

4) عين معادلة للمستقيم (Δ) مماس (c_f) في النقطة ذات الفاصلة : $x_0=\frac{1}{e}-1$

5) أحسب $f(e-1)$ ثم أنشئ (Δ) و (c_f)

6) أوجد دالة أصلية للدالة f على المجال $]0,+\infty[$ ، ثم أستنتج مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (c_f) ومحور الفواصل والمستقيمين ذا المعادلتين : $x=0$ و $x=e^2-1$

ثانوية الشهيد محمد سحنون وادي سلي بكالوريا تجريبي دورة ماي 2016

الشعبة :تقني رياضي اختبار في مادة الرياضيات المدة: 4ساعات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

mokhtar tahi

التمرين الأول (05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ- عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب $L=2+2i\sqrt{3}$.

ب-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $\left(z^2-2-2i\sqrt{3}\right)\left(z^2+1\right)=0$.

2) نعتبر النقط A، B، C و D من المستوي لواحقها على الترتيب: $z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\sqrt{3}-i$ ، $z_C=i$ و $z_D=1$

أ- أكتب العدد المركب $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الأسي ثم أستنتج طبيعة المثلث OAB .

ب- هل توجد قيم للعدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ تخيليا صرفا موجبا ؟ .

3) أ- عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه A ويحول النقطة B إلى النقطة C محددا عناصره المميزة.

ب- عين وأنشئ القطعة $[B'C']$ صورة القطعة المستقيمة $[BC]$ بالتشابه S مستنتجا مساحة المثلث $AB'C'$.

4) أ- عين (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث يكون: $\frac{z-z_C}{z-z_B}$ عددا حقيقيا سالبا تماما.

ب- عين (Δ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث يكون: $z=-3-2i-ke^{i\frac{\pi}{4}}$ مع $k\in\mathbb{R}$.

التمرين الثاني (04 نقاط)

1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) : $5x-7y=3$.

أ- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

ب-بين أنّه من أجل كل عدد صحيح k : $PGCD(9+7k;6+5k)=PGCD(k;3)$. ثم أستنتج حسب k قيم

القاسم المشترك الأكبر للعددين $(9+7k)$ و $(6+5k)$.

2) n عدد طبيعي مكتوب في نظام التعداد ذي الأساس 6 كما يلي: $n=\overline{1\alpha5\beta4}_6$.

عين كل الثنائيات $(\alpha;\beta)$ من الأعداد الطبيعية حيث:أ) n يكون قابلا القسمة على35 .

ب) n يكون قابلا القسمة على70 .

ج) أكتب n في النظام العشري .

التمرين03 (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.نعتبر النقط $A(1;3;4)$ ، $B(-1;4;4)$ و $C(3;1;2)$.

1) أ- بيّن أنّ النقط A ، B و C تعين مستويا .

ب- جد العدد الحقيقي α حتى يكون الشعاع $\vec{n}(1;\alpha;-1)$ ناظميا للمستوي (ABC) ثم معادلة ديكارتية له.

2) (P) مستوتمثيله الوسيطي: $\begin{cases}x=1+2m+t\\y=1+m\\z=5+m+t\end{cases}$ حيث: $m\in\mathbb{R}$ و $t\in\mathbb{R}$.

أ- أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) ثم بيّن أنّ (P) و (ABC) متعامدان .

ب- عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (ABC) .

3) لتكن النقطة $D(3;1;1)$ نقطة من الفضاء .

أ- عين d_1 المسافة بين النقطة D والمستوي (P) و d_2 المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC) .

ب- أستنتج d_3 المسافة بين النقطة D والمستقيم (Δ) .

4) نعتبر الدائرة (C) المعرفة كما يلي: $\begin{cases}z=0\\x^2+y^2-2x-4y+1=0\end{cases}$.

أكتب المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S) التي تحوي الدائرة (C) ومركزها Ω ينتمي إلى المستوي (P) .

التمرين الرابع (06 نقاط)

I - نعتبر الدّالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـــ: $g(x)=2x\sqrt{x}-3\ln x+6$

mokhtar tahi

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

ب- أدرس اتجاه تغير الدّالة g .

ج- شكل جدول تغيرات الدّالة g ثم أستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II – لتكن الدّالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـــ: $f(x)=3\frac{\ln x}{\sqrt{x}}+x-1$ و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

ب- بيّن أنّ f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ وأنّ: $f'(x)=\frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$ ثم أستنتج اتجاه تغير الدّالة f .

ج- شكل جدول تغيرات f .

2) أ- بيّن أنّ المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) يطلب تعيين معادلة له.

ب- جد معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها 1 ثم حدد وضعية (C) بالنسبة لـــ (T).

3) أحسب $f(5)$ و $f(9)$ ثم أرسم (D)، (T) و (C) .

4) بيّن أنّ الدّالة $x \mapsto 2\sqrt{x}(\ln x-2)$ هي دالة أصلية للدّالة $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ على المجال $]0;+\infty[$.

* أحسب المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) وبالمستقيمات: $y=x-1$ ، $x=1$ و $x=\lambda$ حيث $(0<\lambda<1)$. ثم أحسب $\lim\limits_{\lambda \xrightarrow{>} 0} A(\lambda)$.

mokhtar tahi

mokhtar tahi

أستاذ المادة: مختار تاحي

الطموح كنز لا يفنى : لا يسعى للنجاح من لا يملك طموحا ولذلك كان الطموح هو الكنز الذي لايفنى

.....فكن طموحا وانظر إلى المعالي .....

ثانوية الشهيد محمد سحنون وادي سلي بكالوريا تجريبي دورة ماي 2016

الشعبة : تقني رياضي اختبار في مادة الرياضيات المدة: 4ساعات

الموضوع الثاني

التمرين الأول (04 نقاط)

1) x، yعددان طبيعيان غير معدومين، برهن أنّه إذا كان x، yأوليين فيما بينهما فإنّ x و y^2أوليان فيما بينهما أيضا.

2) عين كل الثنائيات $(x;y)$ من IN^{*2}و بحيث يكون: $125x^2+93x=14y^2$.

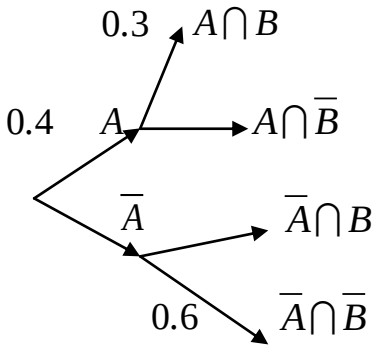
3) يملك فلاح قطعة أرض تتكون من مربع $ABCD$طول ضلعه α مترا ومثلث BHCقائم في Bوغير متساوي الساقين حيث: $BH=2m$. استبدل هذا الفلاح قطعته الأرضية بقطعة أخرى مربعة الشكل طول ضلعها β مترا وثمن المتر الواحد منها هو $1568DA$.

- جد α، β إذا علمت أنّ ثمن المتر المربع الواحد من المربع $ABCD$هو $3500DA$وثمن المتر المربع الواحد من المثلث هو 2604.

mokhtar tahi

التمرين الثاني (04.5 نقاط)

إليك التجربة العشوائية الممثلة بشجرة الاحتمالات كما يلي:



أجب بـــ صحيح أو خطأ على كل من المقترحات التالية مع التبرير

1) $p(\overline{A})=0.6$ 2) احتمال الحادثة $\overline{B}$ حيث A يساوي 0.7 أي: $p_A(\overline{B})=07$ 3) $p(B)=0.7$

4) $p(A\cup B)=0.64$. 5) $p_{\overline{A}}\left(\overline{A}\cap B\right)=0.5$.

II – الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.نعتبر النقط $A(-1;0;1)$، $B(1;1;0)$ و $C(0;-1;-4)$

و (Δ)مستقيم معرف بتمثيله الوسيطي: $\begin{cases}x=2t-1\\y=t+3\\z=-t+1\end{cases}$;$(t\in\mathbb{R})$ و (P) المستوي المعرف بتمثيله الوسيطي:

$\begin{cases}x=\alpha+\beta+3\\y=-\alpha+2\\z=\alpha+2\beta\end{cases}$;$\alpha\in\mathbb{R},\beta\in\mathbb{R}$.

mokhtar tahi

أ– النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (Δ) .

ب– للمستوي (P)معادلة ديكارتية من الشكل: $2x+y+z-8=0$.

ج– المستقيم (Δ) يعامد المستوي (P) .

د– النقطة B تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[AC]$.

التمرين الثالث (04.5 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$.نعتبر النقط A، B و C من المستوي لواحقها على الترتيب: $z_A=16$ ، $z_B=4+4i\sqrt{3}$ و $z_C=-2+2i\sqrt{3}$.

1) أ– أكتب العددان المركبان z_B و z_C على الشكل الأسي ثم علّم النقط A، B و C .

ب– بيّن أنّ المثلثين OAB و OBC قائمان .

2) نعتبر التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}z$.

أ– حدد طبيعة التحويل S مبينا عناصره المميزة.

ب– A_0 النقطة التي لاحقتها $z_0=16$ وليكن $A_{n+1}=S(A_n)$ حيث n عدد طبيعي .

- علّم النقط في المعلم السابق A_0 ، A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 و A_5 (لاحظ أنّ A_0 ، A_1 ، A_2 هي النقط A، B و C) .
- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n=\frac{1}{2^{n-4}}e^{i\frac{\pi n}{3}}$ حيث z_n لاحقة النقطة A_n .

- بيّن أنّ المتتالية (u_n) حيث: $u_n = \left\|\overrightarrow{OA_n}\right\|$ هي متتالية هندسية متقاربة يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
- أحسب بدلالة n المجموع: $s_n = \left\|\overrightarrow{OA_0}\right\| + \left\|\overrightarrow{OA_1}\right\| + \cdots\cdots + \left\|\overrightarrow{OA_n}\right\|$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$.
- ابتداء من أي رتبة تصبح المسافة $\dfrac{1}{\left\|\overrightarrow{OA_n}\right\|}$ أكبر من 2015 ؟
- بيّن أنّ النقط O ، A_n و A_m في استقامية إذا وفقط إذا كان $(m-n)$ مضاعف للعدد 3 .
- بيّن أنّ المثلث OA_nA_{n+1} قائم في النقطة A_{n+1} .

التمرين الرابع (07 نقاط)

لتكن الدّالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x) = x + ln4 + \dfrac{2}{e^x+1}$ و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

mokhtar tahi

1) أدرس تغيرات الدّالة f .

2) أحسب من أجل كل عدد حقيقي x : $f(-x)+f(x)$ ،ثم أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة .

3) أ- بيّن أنّ المعادلة $f(x)=3$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.1<\alpha<1.2$.

ب- من أجل أي قيمة للعدد الحقيقي m يكون العدد $(-\alpha)$ حلا للمعادلة $f(x)=m$ ؟

4) أ- بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ: $f(x) = x+2+ln4-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$.

ب- بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=x+ln4$ والمستقيم (Δ')ذو المعادلة: $y=x+2+ln4$ مستقيمان مقاربان للمنحنى (C) ثم أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى كل منهما.

5) أرسم (Δ)، (Δ') و (C) .

6) ليكن λ عددا حقيقيا موجبا تماما ، $A(\lambda)$ **مساحة** الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C)و المستقيم (Δ)و المستقيمين: $x=0$ ، $x=\lambda$.

أ- اعتمادا على السؤال (4 - أ) بيّن أنّ: $A(\lambda) = 2ln\left(\dfrac{2e^\lambda}{e^\lambda+1}\right)$.

ب- عين قيمة العدد λ بحيث يكون: $A(\lambda)=1$.

ثانوية : حاسي مفسوخ — السنة الدراسية : 2015/ 2016
الشعبة : تقني رياضي — المدة : 4 سا و 30 د

امتحان بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول : (05نقاط)

في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{u};\vec{v})$ ،

نعتبر النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب : $z_A = 1-i$ ، $z_B = -2-4i$ ، $z_C = 2-2i$

1. أكتب العدد $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على شكل أسي .
2. إستنتج طبيعة التحويل النقطي الذي مركزه A و يحول النقطة B إلى النقطة C
3. نعتبر التحويل النقطي S الذي يحول النقطة M ذات الاحقة z إلى النقطة M' ذات الاحقة z' حيث :

$$z' = \frac{1}{3}iz + \frac{2}{3} - \frac{4}{3}i$$

- عيّن صورة النقطة A بواسطة التحويل S ثم أعط طبيعته و عناصره المميزة.

4. نسمي z_1 لاحقة النقطة B_1 صورة النقطة B بالتحويل S و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم B_{n+1} لاحقتها z_{n+1} هي صورة B_n التي لاحقتها z_n بالتحويل S و نعتبر العدد المركب L_n حيث :

$$L_n = \frac{z_n - z_A}{z_B - z_A}$$

ومن أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نعرف المتتاليتان العدديتين (U_n) و (V_n) بالشكل :

$$U_n = |L_n| \quad \text{و} \quad V_n = \arg(L_n)$$

أ) أكتب الطول AB_{n+1} بدلالة AB_n ، ثم استنتج طبيعة المتتالية (U_n)

ب) عيّن طبيعة المتتالية (V_n) ، ثم اكتب كل من U_n و V_n بدلالة n

ت) إبتداء من أي رتبة n تكون النقطة B_n تنتمي إلى القرص الذي مركزه A ونصف قطره 10^{-2}

ث) عيّن الأعداد الطبيعية n حتى تكون النقط A ، B_1 و B_n على استقامة واحدة .

التمرين الثاني : (04نقاط)

n عددطبيعي حيث $n \geq 6$

نعتبرالعددين الطبيعيين A و B حيث $A = \overline{2310}^n$ و $B = \overline{252}^n$ في التعداد ذو الاساس n

نضع : $PGCD(A\,;B) = d_n$

1. بيّن أن $(2n+1)$ يقسم A و $(2n+1)$ يقسم B
2. ناقش حسب شفعية العدد n القيم الممكنة لـ : $PGCD(n^2+n\,;n+2)$
3. بيّن أن $d_n \in \{2(2n+1);(2n+1)\}$
4. نأخذ $n=6$ ، حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $Ax + By = -26$

التمرين الثالث : (05**نقاط**)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

لتكن النقط $A(6,0,0)$ ، $B(0,6,0)$ ، $C(0,0,6)$ و $D(-2,-2,-2)$.

1) أ) تحقق أنّ النّقط A ، B و C تعيّن مستويا.

ب) بيّن أنّ $x+y+z-6=0$ هي معادلة ديكارتيّة للمستوي (ABC).

ج) أثبت أنّ المستقيم (OD) يقطع المستوي (ABC) في النّقطة $H(2,2,2)$.

د) تحقق أنّ النقطة H متساوية البُعْد عن النقط A ، B و C.

2) ليكن (P) المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[CD]$.

أ) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) .

ب) أثبت أنّ المستقيم (OD) يقطع المستوي (P) في نقطة Ω يطلب تعيين إحداثيّاتها .

3) ليكن (S) سطح الكرة ذات المركز Ω و نصف القطر $3\sqrt{3}$.

أ) أكتب معادلة ديكارتيّة لسطح الكرة (S).

ب) تحقق أنّ سطح الكرة (S) يشمل النقط A ، B ، C و D

ج) إستنتج تقاطع سطح الكرة (S) مع المستوي (ABC) وأعط عناصره المميّزة.

التمرين الرابع : : (06**نقاط**)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}-\ln(1+e^x)$

1- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

2- أدرس إتجاه تغيرات الدالة g

3- إ ستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{\ln(1+e^x)}{e^x}$

وليكن (Γ)تمثيلها البياني في المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، (وحدة الطول هي $2cm$)

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ،ثم فسر النتائج هندسيا .

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{e^x}$ ، (حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f)

3) إستنتج تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

4) أرسم المنحني (Γ)

III) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=\ln(1+e^{-x})$

أ- تحقق أنه من اجل كل عدد حقيقي x : $h'(x)=\dfrac{-1}{1+e^x}$

ب- بإستعمال المكاملة بالتجزئة أوجد دالة اصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

ج- أحسب المساحة الحيز $A(\lambda)$ المحدد بالمنحني (Γ) ومحور الفواصل و المستقيمين ذو المعادلتين : $x=0$ و $x=\lambda$

(حيث λ عدد حقيقي موجب تماما)

د- أحسب : $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (05نقاط)

I) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول u_0 عدد طبيعي ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=10u_n+9$

- نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_n+1$.

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية .

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=10^n(u_0+1)-1$

II) 1.حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $61x-39y=38$. (لاحظ أنّ $(23,35)$ حل خاص للمعادلة)

2. أ- بيّن أنّ $u_{1982}\equiv u_0\ [33]$

ب- بيّن أنّ $u_{1982}\equiv(39u_0+38)\ [61]$ (لاحظ أنّ $10^{60}\equiv 1\ [61]$)

ج - استنتج أنّ $u_{1982}\equiv 0\ [61]$ يكافئ $u_0\equiv 35\ [61]$

3. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $33x'-61y'=35$: (لاحظ أن $(14,7)$ حل خاص لها)

4. علما أن $61\times 33=2013$ عين أصغر قيمة لـ u_0 التي من أجلها يكون u_{1982} قابلا للقسمة على 2013

III) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $10^{7n}\equiv 10^n\ [70]$

ب- برهن بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n، فإن : $10^{7^n}\equiv 10\ [70]$

ج- نضع : $u_0=462$ انشر العدد 2013 ، وفق الأساس 7 ،ثم عين باقي قسمة v_{2013} على 70

التمرين الثاني : (05نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

(P) و (Q) المستويين الذين معادلتيهما على الترتيب : $x+2y+z-1=0$ و $x-z+1=0$

1) بين أن (P) و (Q) مستويين متقاطعين . هل هما متعامدان ؟

2) أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (Q).

3) (π) المستوي ذي المعادلة : $x-y+z=0$.

- بين أن (π) عمودي على المستويين (P) و (Q).

4) أعط إحداثيات نقطة تقاطع المستويات الثلاثة (P)، (Q) و (π).

5) أ) تحقق أن النقطة $A(3,-3,4)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ).

ب) احسب بعد النقطة A عن المستوي (π) .

6) أعط معادلة لسطح الكرة (S) ذات المركز A و المماسة للمستوي (π) .

7) ماهي قيم العدد الحقيقي α التي من أجلها يقطع (S) المستويات ذات المعادلات : $x+y+z+\alpha=0$ وفق دائرة (نصف قطرها غير معدوم) ؟ أعط إذن قيمة نصف القطر بدلالة α.

التمرين الثالث : (04نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(4z^2-a^2)(2\bar{z}+ia\sqrt{3})=0$ ، حيث $a\in\mathbb{R}_+^*$

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب:

$$z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}ai \quad ، \quad z_B=-\frac{a}{2} \quad ، \quad z_C=\frac{a}{2}$$

أ) أكتب على الشكل الأسي العدد : $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_A}$.

ب) استنتج زاوية الدوران R الذي يحول A إلى B و يحول C إلى A .

ج) تحقق أن مركز الدوران R ينطبق على مركز ثقل المثلث ABC .

2. نسمي (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$.

أ. تحقق أن النقط A ، B و C تنتمي إلى المجموعة (Γ)

ب. عين طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة .

التمرين الرابع : (06نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{1+x^2}$

1. عين نهايات g عند أطراف مجموعة تعريفها .

2. بيّن أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x) = \frac{2(x^2-1)}{x(1+x^2)^2}$ ، (حيث g' هي الدالة المشتقة للدالة g)

3. أدرس حسب قيم x إشارة $g'(x)$ ثم شكل جدول تغيراتها.

4. بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0;+\infty[$ ، تحقق أن: $0,5 < \alpha < 0,6$.

5. إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) & ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، الوحدة $5cm$.

1. أ-احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} x\, f(x)$ (يمكن وضع $t = \frac{1}{x^2}$).

ب-استنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ، فسر النتيجة هندسيا .

جـ- بين أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x) = 0$.ماذا تستنتج؟

2. أ- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0 .

ب- بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = g(x)$ ، (حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f)

ت- حدد اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

ج- بين أن $f(\alpha) = 1 - \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha^2+1}$ ، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$

3. ارسم المنحني (C_f).

III) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال بـ $]0;+\infty[$: $h(x) = \frac{1}{2}x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$

أ) بين أن h دالة أصلية للدالة f على $]0;+\infty[$

ب) أحسب العدد I حيث : $I = \int_1^2 f(x)dx$

بالتوفيق

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — ثانوية : بوجادي بوقرة - عين الروى -

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي — دورة : ماي 2016

الشعبة : تقني رياضي — الأستاذ: بن عريب عبد الرؤوف

اختبار في مادة: الرياضيات — **المدة :04 ساعات ونصف**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

1. حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة: $(z-3+2i)(z^2+6z+10)=0$
2. نعتبر الأعداد المركبة: $Z_A=3-2i$ ، $Z_B=1$ ، $Z_C=-3+i$ ، $Z_D=-3-i$ و $Z_I=3$

أ) علم في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقط A ، B، C، D و I ثم عين نوع الرباعي $AICD$.

ب) أكتب العدد Z_A-Z_B على الشكل الأسي، ثم تحقق أن $(Z_A-Z_B)^{1436}$ حقيقي.

3. عين العدد المركب u الذي يحقق الجملة التالية: $\begin{cases}\arg(u-3+2i)-\arg(u-1)=\frac{\pi}{2}\\ |u-3+2i|\div|u-1|=1\end{cases}$
4. M نقطة من المستوي تختلف عن A و B لاحقتها Z ولتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z و التي يكون من أجلها: $L=\frac{Z_M-Z_B}{Z_M-Z_A}$ تخيليا صرفا.

أ) تحقق أن I تنتمي إلى (E).

ب) أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب L ، عين حينئذ (E) ثم أنشأها.

التمرين الثاني : (04.5 نقاط)

في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط : $A(1;-1;1)$ ، $B(-2;2;1)$ ، $C(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};1)$ و $H(2;1;\frac{5}{2})$. و المستقيم (Δ) المعرف بتمثيله الوسيطي: $\begin{cases}x=-t+1\\ y=-t\\ z=2t\end{cases}$ حيث $t\in\mathbb{R}$.

1. أكتب بدلالة الوسيط الحقيقي α تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB).
2. بيـن أن (AB) و (Δ) يتقاطعان في النقطة C وأنهما متعامدان.
3. (P) هو المستوي الذي يشمل المستقيمين (AB) و (Δ). تحقق أن المعادلة الديكارتية للمستوي (P) هـي: $x+y+z-1=0$.
4. أ- بيـن أن النقطة C هي المسقط العمودي للنقطة H على المستوي (P).

ب- لتكن D نقطة من (Δ) بحيث $AC=CD$. بين أن حجم رباعي الوجوه $HABD$ يساوي $\frac{3\sqrt{3}}{4}u.v$

5. أ/ بين أن النقطة C هي مرجح الجملة $\{(A;5),(B;1)\}$

ب/ عين طبيعة المجموعة (S) للنقط M من الفضاء بحيث $\left\|5\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=6\left\|\overrightarrow{MH}-\overrightarrow{MC}\right\|$

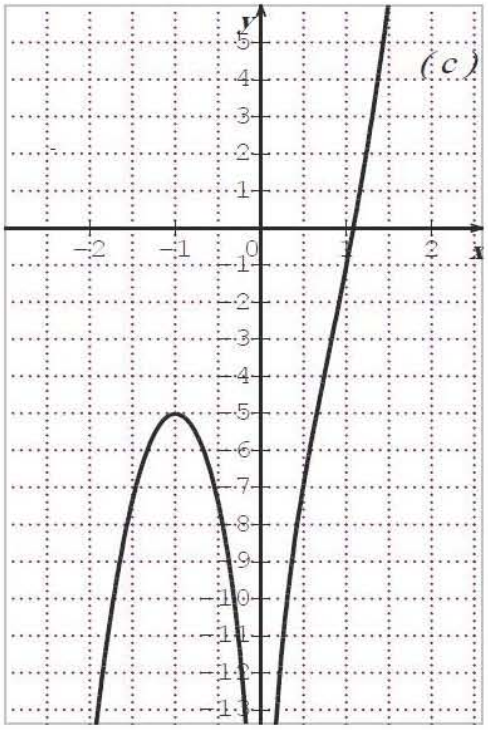
ج/ ما هو الوضع النسبي للمجموعة (S) و المستوي (P) ؟

التمرين الثالث : (04 نقاط)

1. نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$: $4x-9y=5$ ... ... (E)
   أ- بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل لـ (E) فإن $x\equiv 8[9]$ ، ثم استنتج حلول لـ (E)
   ب- α عدد طبيعي يكتب $\overline{43}$ في نظام التعداد الذي أساسه x و يكتب $\overline{98}$ في نظام التعداد الذي أساسه y حيث $x<35$ و $y\leq 15$. عيـن القيم الممكنة لـ x و y ثم أكتب α في النظام العشري.
2. أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 4^n على 9 .
   ب – عين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ حلول (E) حيث يكون $2017^x+13^y+7\equiv 0[9]$
3. نعتبـر العددان الطبيعيان a و b حيث $a=9n+8$ و $b=4n+3$ وليكـن d قاسمهما المشترك الأكبر.
   أ- ما هي القيم الممكنة لـ d ؟
   ب- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $d=5$

التمرين الرابع: (07.5 نقاط)

I. المنحنى المقابل هو التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $g(x)=2x^3-3+6\ln|x|$
   - بقراءة بيانية: شكل جدول تغيرات g .
   - بيـن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال: $]1.07;1.09[$
   - استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^*$



II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=2x-3\frac{\ln|x|}{x^2}$
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$
1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ ثم فسر النتيجة الأخيرة هندسيا.
2. أ- بين أنه من أجل $x\in\mathbb{R}^*$: $\hat{f}(x)=\frac{g(x)}{x^3}$
   ب- إستنتج إشارة $\hat{f}(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f(x)$.
   ج- بين أن: $f(\alpha)=3\alpha-\frac{3}{2\alpha^2}$، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.
3. بيـن أن المستقيم (D) ذو المعادلة: $y=2x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D).
4. أ- بين أنه يوجد مماس (Δ) لـ (C_f) يوازي المستقيم (D) و يمس (C_f) في نقطتين يطلب إعطاء معادلة لهذا المماس.
   ب- أنشئ (Δ) ، (D) و (C_f) (تعطى $f(-0.75)=0$)
5. ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيـط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $mx^2+3\ln|x|=0$.
6. لتكـن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x)=\frac{a+b\ln|x|}{x}$.
   أ- عيـن العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x\to\frac{\ln|x|}{x^2}$ على $\mathbb{R}^*$.
   ب- استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}^*$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

1. نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، كثير الحدود $P(Z)$ حيث:

$$P(Z) = Z^3 + (\sqrt{3} - i)Z^2 + (1 - i\sqrt{3})Z - i$$

- أحسب $P(i)$ ثم استنتج في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، حلول المعادلة $P(Z) = 0$.

2. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$، نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين $Z_A = i$ و $Z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ على الترتيب.

أ. علم النقطتين A و B . (يتمم الشكل في سياق التمرين)

ب. Z_C لاحقة النقطة C صورة B بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$. بيـن أن: $Z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

ج. أكتب Z_C و Z_B على الشكل الجبري.

3. أ- أكتب الأعداد $(1 - Z_A)$ و $(2Z_C)$ ثم $\left(\frac{2Z_C}{1-Z_A}\right)$ على الشكل الأسي.

ب-استنتج قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد: $\left(\frac{2Z_C}{1-Z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا.

4. أ- أحسب Z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة: $\{(A, 2); (B, -1); (C, 2)\}$.

ب- عين (E) مجموعة النقط M من المستوي التي لواحقها Z حيث:

$$\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}\right\|.$$

جـ- أحسب الطويلة و عمدة للعدد المركب $\frac{Z_C - Z_A}{Z_D}$. ثم عيـن طبيعة الرباعي $OADC$.

5. لتكن E صورة النقطة D بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2. بيـــن أن: $Z_E = \sqrt{3}$

- عين نسبة، زاوية و مركز التشابه S الذي يحول O إلى C و A إلى B.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. نعتبر النقط : $A(1; 0; -2)$ ، $B(3; 0; 1)$ ، و $C(1; 0; 1)$

1. أكتب معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها A وتشمل النقطة B.

2. لتكن (Δ) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء بيحيث: $\begin{cases} x + 2z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$

- بين أن (Δ) مستقيم من الفضاء شعاع توجيهه $\vec{u}(-2; -1; 1)$ ويشمل النقطة C.

3. أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة A و يعامد المستقيم (Δ).

4. أ- عين إحداثيات نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ).

ب- أحسب بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) ثم استنتج أن (Δ) يقطع سطح الكرة (S) في نقطتين.

5. t عدد حقيقي و G مرجح الجملة $\{(B; e^t); (C; 1)\}$

أ- بين أن: $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{1+e^t}\overrightarrow{BC}$.

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(t) = \frac{1}{1+e^t}$.

ت- استنتج أن مجموعة النقط G عندما يتغير t في $\mathbb{R}$ هي القطعة $[BC]$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_0 = -4$ و $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{5}{2}n + 2$

1. أ- أحسب U_1 و U_2 .

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ، $U_n \geq 0$.

ج- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ ، $U_n \geq \frac{5}{2}n - \frac{1}{2}$. ماهي نهاية المتتالية U_n ؟

2. نعتبر (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $V_n = U_n + \alpha n + \beta$ حيث α و β عددان حقيقيان.

أ- عين α و β حتى تكون المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب- أكتب كلا من V_n و U_n بدلالة n ثم أحسب $\lim U_n$.

ج- بوضع $\alpha = -5$ و $\beta = 6$. أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

3. أ- نضع $W_n = 8^n . V_n$ و $\acute{S_n} = W_0 + W_1 + \cdots + W_n$. بين أن: $\acute{S_n} = \frac{2}{3}(4^{n+1} - 1)$

ب- تحقق أنه من أجل $k \in \mathbb{N}$ ، $4^{2k} \equiv 1[5]$ ثم استنتج قيم العدد الطبيعي n حيث يكون $3\acute{S_n}$ قابلا للقسمة على 10.

التمرين الرابع: (07.5 نقاط)

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = \ln(e^{2x} - e^x + \frac{1}{2}) - 2x$

1) بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

أ/ $e^{2x} - e^x = (e^x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$ ب/ $g(x) = \ln(1 - e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x})$

2) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أحسب $g(-ln2)$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x ، إشارة $g(x)$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + \frac{1}{2})$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1. أ- أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ، ماذا تستنتج ؟

ب- استنتج أن (C_f) يقبل خط مقارب مائل (D) بجوار $+\infty$، ثم حدد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D).

2. أ) بين أن $\acute{f}(x) = (2e^x - 1).e^{x-f(x)}$ حيث $\acute{f}$ مشتق الدالة f

ب) أدرس إشارة $\acute{f}(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

جـ) عين معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0

3. أ/ عين α فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

ب/ أرسم (Δ)،(D) و (C_f)

4. نعتبـــر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = \ln(\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + 1)$ و (C_h) تمثيلها البياني.

- عين قيمة β التي تحقق $h(x) = f(x - ln2) + \beta$، استنتج كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C_f)

5. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $e^x(e^x - 1) - e^m + \frac{1}{2} = 0$

III. - نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من صندوق يحتوي على 3 كريات مرقمة بالعدد a و 4 كريات مرقمة بالعدد $a - 1$ مع $(a \in \mathbb{R})$. - أحسب احتمال الحصول على كريتين مرقمتين بنفس العدد.

- أكتب قانون احتمال المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة مجموع الرقمين المسجلين عل الكريتين.

- عين قيمة العدد الحقيقي a حتى يكون الأمل الرياضياتي معدوما.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

ثانوية عبد الحفيظ سنحضري - إقلي -

شعبة: 3 هندسة كهربائية | المدة : 4 سا و30 د | الموسم الدراسي : 2015 / 2016

** اختبار البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات **

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الاول : (4ن)

في الفضاء المنسوب إلى معلم و متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط :

$A(-1,0,3)$ ، $B(3,0,0)$ ، $C(7,1,-3)$

و ليكن (S)مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث : $x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$

1.أ- بين أن النقط A ، B ، C تعين مستويا .

ب . بين أن $\vec{n}(-1,0,3)$ شعاع ناظمي للمستوى (ABC) - عين شعاع ناظمي للمستوى (ABC)

جـ. استنتج معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

2. بين أن المجموعة (S)هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها Ω و نصف قطرها .

3. حدد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ)الذي يشمل النقطة Ω و يعامد (ABC) .

4.بين ان المستقيم (Δ) يقطع سطح كرة(S) في نقطتين يطلب تعيين احداثيات كل منهما .

التمرين الثاني : (4.5ن)

1°) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $z^2-2z+5=0$.

2°) نعتبر في المستوي المركب المنسوب على معلم متعامد ومتجانس $(0,\vec{i},\vec{j})$

النقط I ، B ، A التي لواحقها على الترتيب $z_1=1-2i$ ، $z_B=-3$ ، $z_A=2+\overline{z_1}$.

أ/ اكتب على الشكل الجبري العدد المركب : $z=\dfrac{z_I-z_A}{z_I-z_B}$.

ب/ اكتب العدد المركب Z على الشكل الأسي ، ثم استنتج طبيعة المثلث IAB .

جـ/ احسب z_C لاحقة النقطة Cصورة النقطة I بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 .

3°) أ / لتكن النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1);(C;1)\}$ احسب z_G لاحقة النقطة G .

ب/ عين طبيعة المجموعة (Γ_1)مجموعةالنقطM ذات اللاحقة Z من المستوي حيث :

$$2\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$$

جـ/ عين طبيعة المجموعة (Γ_2)مجموعةالنقطM ذات اللاحقة Z من المستوي حيث :

$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4\sqrt{5}$$

التمرين الثالث : (3.5ن)

1- أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 9^n على 11

2- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $(1431)^n + (1993)^{10n} + (2011)^{5n+1}$ يقبل القسمة على 11

3- عيّن العدد الطبيعي n بحيث :

$$\left.\begin{array}{l} (1431)^n + 5n + (2011)^{5n+1} \text{ يقبل القسمة على } 11 \\ \text{و } 90 < n < 100 \end{array}\right\}$$

التمرين الرابع (8ن)

المستوى منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

I- نعتبر الدالة g المعرفة على R بـــ : $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$

1.بين أنه من اجل كل x من R : $g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}$.

2.بين ان العدد $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2}{e}$ هو قيمة حدية صغرى للدالة g

3. استنتج حسب قيم x من R : $g(x) > 0$

II- نعتبر الدالة f المعرفة على R بـــ : $f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ و $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

1.أ- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ب- بين أن : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2- أ. بين أنه من اجل كل x من R: $f'(x) = g(x)$

ب. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3-أ. بين أن المستقيم(Δ) الذي معادلته $y = x + 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

ب. أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f)و المستقيم (Δ).

4-أ. اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التى فاصلتها 0 .

ب.بين ان المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها $-\frac{1}{2}$.

جـــ. انشئ (T) و(Δ)والمنحنى (C_f) .

5- أ. باستعمال المكاملة بالتجزئة ، اثبت أن : $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}\,dx = 1 - \frac{e}{2}$

ب.لتكن A المساحة (بالسنتيمتر المربع)للحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f)و المستقيم (T)و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ ، $x = \frac{1}{2}$

الموضوع الثاني

التمرين الاول : (4ن)

1. حلّ، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة : $(z+1-i\sqrt{3})(z^2-2z+4)=0$.

2. نعتبر، في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$، النقط A ، B ، C ، التي لواحقها على الترتيب: $z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-1+i\sqrt{3}$.

ا) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ ، و استنتج أنه يمكن اعتبار B صورة لـ C بتحويل نقطي S يطلب تعيينه مع عناصره المميّزة.

ب) عيّن z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A,-1);(B,1);(C,1)\}$.

جـ) استنتج من ا) و ب) طبيعة الرّباعي $ABDC$.

د) اكتب الأعداد المركبة z_A ، z_B ، z_C على الشكل الأسّي.

هـ) عيّن (Γ): مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $\arg\left((z-z_A)^2\right)=\arg(z_A.z_B.z_C)$.

التمرين الثاني (5ن)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر :

- النقطتين $A(-3;0;1)$ و $B(1;-1;0)$
- المستقيم (D) المعرف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x=t-3 \\ y=-t \\ z=-t+1 \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$
- المستوي (P) المعرف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x=2\alpha-3\beta \\ y=\alpha \\ z=-\alpha+\beta \end{cases}$; $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

1) بيّن أن : $x+y+3z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (P) .

2) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P') الذي يشمل النقطة B وعمودي على المستقيم (D) .

3) بيّن أن تقاطع (P) و (P') هو المستقيم (Δ) ذو التمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x=-t'+1 \\ y=-2t'-1 \\ z=t' \end{cases}$ $(t'\in\mathbb{R})$

4) ادرس الوضع النسبي للمستقيمين (D) و (Δ) .

5) (S) سطح كرة مركزها النقطة O ونصف قطرها 2 .

بيّن أن المستوي (P) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة ، يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

التمرين الثالث : (3.5ن)

I) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{3^{n+1}}{4^n}$.

1) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول .

2) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

II) المتتالية (u_n) معرفة بـ : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

1) برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le u_n \le 4$.

2) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

4) أ- برهن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 - u_{n+1} \le \frac{3}{4}(4 - u_n)$.

ب- بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le 4 - u_n \le 4\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الرابع : (7.5ن)

I) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(0,\vec{i},\vec{j})$

لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]-\infty,3[$ كمايلي : $g(x) = \frac{-x+1}{-x+3} + \ln(-x+3)$

1) احسب نهايات g عند اطراف مجال تعريفها .

2) أدرس تغيرات الدالة g .

3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1,7 ; 1,5[$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty,3[$ كمايلي: $f(x) = (x-1)\ln(-x+3)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم متعامد ومتجانس $(0,\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$) .

1°) أ / - احسب نهايات f عند اطراف مجال تعريفها .

ب /- أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2°) بين ان $f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)^2}{3-\alpha}$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

3°) حل في المجال $]-\infty;3[$ المعادلة : $f(x) = 0$ ثم استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $]-\infty,3[$

4°) احسب $f(-2)$ و $f(-3)$ ثم ارسم بدقة المنحنى (C_f) .

5°) F دالة عددية على المجال $]-\infty,3[$ كمايلي: $F(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}\right)\ln(-x+3)$

تحقق ان F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty,3[$