سلاسل العبقري في الرياضيات -السلسلة الأولى (التمارين)- المحور: المتتاليات العددية

الشعبة: آداب وفلسفة، لغات أجنبية التحضير الجيد لبكالوريا: **2020**

التمرين الأول: (*05 نقاط*) بكالوريا 2008 الموضوع 01 -آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

(u_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 3n + 1$.

1/احسب u_0، u_1، u_2.

2/بيّن أنّ (u_n) حسابية يُطلب تعيين أساسها. عيّن اتجاه تغيّر (u_n).

3/تحقّق أنّ العدد 2008 حدّ من حدود المتتالية (u_n). ما رتبته؟

4/احسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{669}$.

التمرين الثاني: (*06 نقاط*) بكالوريا 2008 الموضوع 02 -آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

(u_n) متتالية عددية معرّفة بحدّها الأول $u_1 = 7$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$$u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

1)أحسب u_2، u_3، u_4.

2)من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، نُعرف المتتالية (v_n) كما يأتي: $v_n = u_n + 1$.

أ-أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_1.

ب-اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثمّ استنتج u_n بدلالة n.

ج-نضع: $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$، احسب S_n بدلالة n.

د-عيّن n علماً أنّ $S_n = 1016$.

التمرين الثالث: (*06 نقاط*) بكالوريا 2009 الموضوع 01 -آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

(u_n) متتالية حسابية معرّفة على $\mathbb{N}^*$ بحدّها الأول $u_1 = 2$ وبالعلاقة $u_2 - 2u_5 = 19$.

1)أ-أحسب الأساس r للمتتالية (u_n).

ب-أحسب الحد العاشر.

2)أكتب عبارة u_n بدلالة n.

3)بيّن أنّ العدد (2008-) هو حداً من حدود (u_n). محدّدا رتبته.

4)أحسب المجموع: $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{671}$.

التمرين الرابع: (*07 نقاط*) بكالوريا 2009 الموضوع 02 -آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

(u_n) متتالية هندسية معرّفة على $\mathbb{N}$ وأساسها **موجب**.

1-عيّن أساس هذه المتتالية وحدّها الأول u_0 **إذا علمت** أنّ: $u_3 = 144$ و $u_5 = 576$.

2-تحقّق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 18 \times 2^n$.

3-أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$، ثمّ استنتج قيمة العدد الطبيعي n حيث:

$$S_n = 1134.$$

التمرين الخامس: (*05 نقاط*) بكالوريا 2010 الموضوع 01 -آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

I) (u_n) متتالية حسابية معرّفة على $\mathbb{N}$ بالحدين: $u_{10} = 31$ و $u_{15} = 46$.

1-عيّن أساسها وحدّها الأول u_0.

2-أُكتب u_n بدلالة n.

3-بيّن أنّ 6028 حدّ من حدود المتتالية (u_n).

4-أحسب المجموع S: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2009}$.

II) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 2 \times 8^n$.
1-بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0.
2-أُحسب بدلالة n المجموع S': $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

التمرين السادس: (07 نقاط) بكالوريا 2010 الموضوع 02 -آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

(u_n) متتالية هندسية معرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$، أساسها q وحدّها الأوّل u_0 حيث:
$u_1 = 6$ و $u_4 = 48$.
1.أ-أُحسب الأساس والحدّ الأوّل للمتتالية (u_n).
ب-استنتج أنّ عبارة الحدّ العام للمتتالية (u_n) هي: $u_n = 3 \times 2^n$.
2.أ-علماً أنّ $2^8 = 256$؛ بيّن أنّ العدد 768 هو حدّ من حدود المتتالية (u_n).
ب-أُحسب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_7$.
3.(v_n) متتالية عددية معرّفة بـ: $v_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1} = 2v_n - 1$.
أ-أُحسب: v_1، v_2، v_3.
ب-برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = 3 \times 2^n + 1$.
جـ-أُحسب المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_7$.

التمرين السابع: (06 نقاط) بكالوريا 2011 الموضوع 01 -آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

أ) (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 وحدّها الأول u_0 بحيث: $u_0 + u_3 = 28$.
1.احسب u_0، ثمّ اكتب الحد العام u_n بدلالة n.
2.احسب المجموع: $S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$.
ب) (v_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام: $v_n = 1 - 5n$.
1.بيّن أنّ (v_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين أساسها ثمّ استنتج اتجاه تغيّرها.
2.احسب المجموع: $S_2 = v_0 + v_1 + \cdots + v_9$.
ج) نعتبر المتتالية (k_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام: $k_n = 1 + 3^n - 5n$.
-تحقّق أنّ: $k_n = u_n + v_n$ ثمّ احسب المجموع: $S = k_0 + k_1 + \cdots + k_9$.

التمرين الثامن: (06 نقاط) بكالوريا 2011 الموضوع 02 -آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

(u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{N}$ بحدّيهما العام: $u_n = -2n$ و $v_n = 3^{-2n}$.
عيّن في كلّ حالة من الحالات الخمس في الجدول أدناه الاقتراح الصحيح من بين الاقتراحات الثلاث مع التعليل.

		اقتراح 1	اقتراح 2	اقتراح 3
1	(u_n) هي متتالية	هندسية	حسابية	لا حسابية ولا هندسية
2	الحد الخامس والأربعون للمتتالية (u_n) يساوي	-90	-92	-88
3	المجموع $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ يساوي	$n^2 + 1$	$-n^2 - n$	$-n^2 - 1$
4	(v_n) متتالية هندسية أساسها	$\frac{1}{9}$	9	-9
5	المتتالية (v_n)	متزايدة	متناقصة	ليست رتيبة

التمرين التاسع: (06 نقاط) بكالوريا 2012 الموضوع 01 -آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

a، b، c ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية حسابية متزايدة أساسها r حيث: $a + b + c = 9$.
1.أ) احسب b ثم اكتب a و c بدلالة r.
ب) علماً أنّ: $a \times c = -16$.

-عيّن الأساس r ثم استنتج a و c.

2.(u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = -2$ وأساسها 5.

أ) عبّر عن الحدّ العام u_n بدلالة n.

ب) احسب u_{15} ثم استنتج المجموع: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{15}$.

3.(v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $8v_n - u_n = 0$

-احسب المجموع: $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{15}$.

التمرين العاشر: (*06 نقاط*) **بكالوريا 2012 الموضوع 02 -آداب وفلسفة، لغات أجنبية.**

(u_n) متتالية حسابية متزايدة، أساسها r، حدّها الأول u_1 و $u_3 = 7$.

1.أ) احسب بدلالة r الجدائين: $T_1 = u_1 \times u_5$ و $T_2 = u_2 \times u_4$.

ب) عيّن الأساس r بحيث: $T_2 - T_1 = 27$.

2.نضع $r = 3$.

أ) اكتب عبارة الحدّ العام u_n بدلالة n.

ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

بيّن أنّ: $S_n = \frac{3n^2-n}{2}$.

ج) جِد العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 145$.

3.أ) اكتب الحدّ u_{n+5} بدلالة n.

ب) تحقّق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$.

ج) استنتج الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعيا.

التمرين الحادي عشر: (*06 نقاط*) **بكالوريا 2013 الموضوع 01 -آداب وفلسفة، لغات أجنبية.**

(v_n) متتالية هندسية حدّها الأول $v_0 = 2$ وأساسها 3.

1-أ) عبّر عن v_n بدلالة n.

ب) احسب بدلالة n الفرق $v_{n+1} - v_n$، ثمّ استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (v_n).

2-نضع، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.

أ) احسب بدلالة n المجموع S_n.

ب) عيّن قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 80$.

ج) أثبت بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2.

التمرين الثاني عشر: (*06 نقاط*) **بكالوريا 2013 الموضوع 02 -آداب وفلسفة، لغات أجنبية.**

(u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_0 وأساسها 5 بحيث: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$.

1- احسب u_0.

2- بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 5n + 1$.

3- عيّن العدد الطبيعي n بحيث: $u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$.

4- أُحسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2013}$.

5- المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $v_n = 2u_n + 1$.

أ) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (v_n).

ب) أحسب المجموع: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{2013}$.

التمرين الثالث عشر: (06 نقاط) بكالوريا 2014 الموضوع 01 -آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

عيّن الاقتراح الصّحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة، في كلّ حالة من الحالات الأربعة الآتية، مع التّعليل:

1)(u_n) متتالية حسابية أساسها 3 وحدّها $u_2 = 1$.

الحد العام للمتتالية (u_n) هو: أ) $u_n = 1 + 3n$ ب) $u_n = 7 + 3n$ جـ) $u_n = -5 + 3n$.

2)n عدد طبيعي. المجموع $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ يساوي:

أ) $\frac{n^2+n}{2}$ ب) $\frac{n(n-1)}{2}$ جـ) $\frac{n^2+1}{2}$.

3)x عدد حقيقي. تكون الأعداد $x - 2$، x، $x + 1$ بهذا الترتيب حدودا متعاقبة لمتتالية هندسية إذا كان:

أ) $x = 3$ ب) $x = 5$ جـ) $x = -2$.

4)(v_n) متتالية هندسية معرّفة على $\mathbb{N}$، حدّها العام $v_n = 2 \times 3^{n+1}$. أساس المتتالية (v_n) هو:

أ) 2 ب) 3 جـ) 6.

التمرين الرابع عشر: (06 نقاط) بكالوريا 2014 الموضوع 02 -آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

(v_n) المتتالية العددية المعرّفة بما يلي: $v_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n؛ $v_{n+1} = 5v_n + 4$.

1)احسب: v_1، v_2 و v_3.

2)نضع من أجل كل عدد طبيعي n؛ $u_n = v_n + 1$

أ- بيّن أنّ (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$ وحدّها الأول $u_0 = 2$.

ب- اكتب u_n بدلالة n واستنتج v_n بدلالة n.

جـ- حلّل العدد 1250 إلى جداء عوامل أوليّة واستنتج أنّه حد من حدود المتتالية (u_n).

3)أ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.

ب- احسب بدلالة n المجموع S_n' حيث: $S_n' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.

التمرين الخامس عشر: (07 نقاط) بكالوريا 2015 الموضوع 01 -آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

(u_n) المتتالية الهندسية التي حدّها الأوّل u_0 وأساسها q حيث: $u_0 = 2$ و $q = 3$.

1)احسب u_1 و u_2.

2)اكتب u_n بدلالة n؛ ثمّ استنتج u_5.

3)عيّن اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

4)أ) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$.

ب) استنتج قيمة المجموع: $2 + 6 + 18 + \cdots + 486$.

5)أ) عيّن باقي القسمة الإقليدية على 5 لكل عدد من الأعداد 3، 3^2، 3^3 و 3^4.

ب) استنتج أنّه لكل k من $\mathbb{N}$؛ $3^{4k} \equiv 1[5]$.

6)عيّن الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $3^n - 1$ قابلا للقسمة على 5.

التمرين السادس عشر: (06 نقاط) بكالوريا 2015 الموضوع 02 -آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

(u_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل u_1 وأساسها r حيث: $u_2 = \frac{1}{2}$ و $u_1 - u_3 = 5$.

1)أ) بيّن أنّ: $u_1 + u_3 = 1$.

ب) عيّن الحدّ الأوّل u_1؛ ثمّ استنتج أنّ $r = -\frac{5}{2}$.

2)اكتب u_n بدلالة n.

3)أ) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

ب) عيّن قيمة العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $S_n = -\frac{657}{2}$.

4) n عدد طبيعي غير معدوم، نضع: $T_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + nu_n$.

أ) تحقّق أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$: $(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$.

ب) باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنّه لكل n من $\mathbb{N}^*$: $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$.

التمرين السابع عشر: (07 نقاط) بكالوريا 2016 الموضوع 01 -آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

لتكن (u_n) متتالية عددية معرّفة من أجلّ عدد طبيعي n بـ: $u_n = 3n - 2$.

1) احسب u_0، u_1، u_2 و u_3.

2) بيّن أنّ المتتالية (u_n) حسابية وعيّن أساسها.

3) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

4) بيّن أنّ العدد 1954 حدّ من حدود المتتالية (u_n) وعيّن رتبته.

5) أ) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

ب) عيّن العدد n بحيث يكون: $S_n = 328$.

التمرين الثامن عشر: (06 نقاط) بكالوريا 2016 الموضوع 02 -آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) التي أساسها 3 وحدّها الأول u_0 وتُحقّق: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$.

1) احسب الحد الأوّل u_0.

2) اكتب الحد العام u_n بدلالة n.

3) عيّن العدد الطبيعي n بحيث: $u_n = 145$.

4) احسب المجموع S بحيث: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{49}$.

5) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $v_n = 2u_n + 3$.

احسب المجموع S' بحيث: $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{49}$.

التمرين التاسع عشر: (06 نقاط) بكالوريا 2017_1 الموضوع 01 -آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

(u_n) المتتالية هندسية حدودها موجبة تماما، معرّفة على $\mathbb{N}$ حيث $u_1 = 20$ و $u_3 = 320$.

1) بيّن أنّ أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدّها الأول هو 5.

2) اكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثمّ استنتج قيمة حدّها السابع.

3) أ) احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S حيث $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

ب) استنتج قيمة المجموع S' حيث $S' = u_0 + u_1 + \cdots + u_6$.

التمرين العشرون: (06 نقاط) بكالوريا 2017_1 الموضوع 02 -آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

(u_n) متتالية حسابية معرّفة على المجموعة $\mathbb{N}$ بحدّها الأوّل $u_0 = -5$ و $u_3 + u_7 = 50$.

1) عيّن الأساس r للمتتالية (u_n).

2) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 6n - 5$.

3) اثبت أنّ العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n)، ما هي رتبته؟

4) احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S حيث $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

التمرين الحادي وعشرون: (06 نقاط) بكالوريا 2017_2 الموضوع 01 -آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 وأساسها r.

1)احسب الحد u_4 علما أنّ: $u_3 + u_5 = 20$.
2)احسب الحد u_5 علما أنّ: $2u_4 - u_5 = 7$.
3)استنتج قيمة r واحسب u_0.
4)تحقّق أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 3n - 2$.
5)احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
6)جِد العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 33$.

التمرين الثاني وعشرون: (06 نقاط) بكالوريا 2017_2 الموضوع 02 -آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

في كل حالة من الحالات الأربع الآتية أُقتُرحت ثلاث إجابات، واحدة فقط منها صحيحة، يُطلب تحديدها مع التعليل.

1)الحد السّادس لمتتالية حسابية أساسها 3- وحدّها الأول 1 هو:

أ) 17- **ب)** 14- **جـ)** 11- .

2)مجموع 100 حدٍ الأولى لمتتالية هندسية حدّها الأول هو 1 وأساسها 3 هو:

أ) $\frac{3^{101}-1}{2}$ **ب)** $\frac{1-3^{100}}{2}$ **جـ)** $\frac{3^{100}-1}{2}$.

3)نضع من أجل كل عدد حقيقي x: $a = 2x + 2$، $b = 6x - 3$، $c = 4x$.

الأعداد الحقيقية a، b، c بهذا الترتيب تُشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون:

أ) $x = \frac{4}{3}$ **ب)** $x = 0$ **جـ)** $x = \frac{3}{4}$.

4)المتتالية العددية (u_n) المعرّفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ هي متتالية:

أ) حسابية أساسها 1 **ب)** هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ **جـ)** لا حسابية ولا هندسية.

التمرين الثالث وعشرون: (06 نقاط) بكالوريا 2018 الموضوع 01 -آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية، مع التبرير:

1)(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = n^2 - 1$

المتتالية (u_n): **أ)** متزايدة تماما **ب)** متناقصة تماما **ج)** ليست رتيبة.

2)(v_n) متتالية هندسية حدّها الأوّل $v_1 = 3$ وأساسها $q = 2$

عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي:

أ) $v_n = 3 \times 2^n$ **ب)** $v_n = 3 \times 2^{n-1}$ **ج)** $v_n = 2 \times 3^n$.

المجموع $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ يُساوي:

أ) $3(2^n - 1)$ **ب)** $(2^n - 1)$ **ج)** $2(3^n - 1)$.

3)صندوق به 10 كريات لانفرق بينها عند اللمس مرقمة من 11 إلى 20، نسحب عشوائيا كرية واحدة.

احتمال الحصول على كرية تحمل عددا مضاعفا لـ 3 هو:

أ) $\frac{1}{3}$ **ب)** $\frac{3}{10}$ **ج)** $\frac{7}{10}$.

احتمال الحصول على كرية تحمل عددا فرديا ومضاعفا لـ 3 هو:

أ) $\frac{9}{10}$ **ب)** $\frac{3}{10}$ **ج)** $\frac{1}{10}$.

التمرين الرابع وعشرون: (06 نقاط) بكالوريا 2018 الموضوع 02 -آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدّها الأول u_0 وأساسها q حيث:

$u_0 \times u_2 = 576$ و $u_0 + u_1 = 30$.

1)بيّن أنّ $u_1 = 24$، ثمّ استنتج قيمة u_0.

2)بيّن أنّ $q = 4$، ثمّ اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3)أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n$، ثمّ استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

4)احسب 4^4، ثم تحقّق أنّ العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n) وعيّن رتبته.

5)احسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

التمرين الخامس وعشرون: (06 نقاط) بكالوريا 2019 الموضوع 01 -آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = \frac{2}{5}n - 1$.

1)بيّن أنّ المتتالية (u_n) حسابية أساسها $\frac{2}{5}$ يُطلب حساب حدّها الأول u_1.

2)عيّن رتبة الحد الذي قيمته 575.

3)احسب قيمة المجموع S حيث: $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{1440}$.

4)(v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $v_n = 4^{5u_n+6}$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_1.

ب) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

التمرين السادس وعشرون: (06 نقاط) بكالوريا 2019 الموضوع 02 -آداب وفلسفة، لغات أجنبية.

(u_n) المتتالية الحسابية التي حدّها الأول u_0 وأساسها r.

1)علماً أنّ: $u_0 + u_1 + u_2 = 6$، عيّن u_1.

2)علماً أنّ: $2u_0 - 3u_1 = -10$، عيّن الحد الأول u_0، ثم استنتج قيمة r أساس المتتالية (u_n).

3)اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

4)أ) عيّن قيمة n حتى يكون $u_n = 2018$.

ب) أُحسب الحد الخامس عشر للمتتالية (u_n).

5)أُحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

6)عيّن العدد الطبيعي n حتى يكون: $S_n = 96$.

انتهى بالتوفيق في البكالوريا أستاذ المادة: ب- م يتبع حلول تمارين السلسلة الأولى.

حل التمرين الأول:

(u_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 3n + 1$.

1/حساب u_0، u_1، u_2:

$u_0 = 3(0) + 1 = 0 + 1 = 1$؛

$u_1 = 3(1) + 1 = 3 + 1 = 4$؛

$u_2 = 3(2) + 1 = 6 + 1 = 7$.

2/تبيان أنّ (u_n) حسابية يُطلب تعيين أساسها:

نُبين أن الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت

لدينا: $u_n = 3n + 1$

ومنه: $u_{n+1} = 3(n+1) + 1$

$= 3n + 3 + 1 = 3n + 4$

وعليه الفرق يكون كالتالي:

$u_{n+1} - u_n = (3n + 4) - (3n + 1)$

$= 3n + 4 - 3n - 1 = 3$

إذن: (u_n) **حسابية أساسها 3.**

تعيين اتجاه تغيّر (u_n):

بمأنّ: (u_n) **حسابية أساسها موجب تماما** $(3 > 0)$،

فإنّها: **متزايدة تماما** على $\mathbb{N}$.

3/التحقّق أنّ العدد 2008 حدّ من حدود المتتالية (u_n):

نضع: $\boxed{u_n = 2008}$ نجد: $3n + 1 = 2008$

ومنه: $3n = 2008 - 1$

أي: $n = \frac{2007}{3} = 669 \in \mathbb{N}$ $(u_{669} = 2008)$

إذن: 2008 حد من حدود المتتالية (u_n).

رتبته: $669 + 1 = 670$ لأنّ الحد الأوّل هو u_0.

4/حساب المجموع،

$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{669}$**:**

$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{669}$

$= (669 - 0 + 1)\left(\frac{u_0 + u_{669}}{2}\right)$

$= 670\left(\frac{1+2008}{2}\right)$

$= 670\left(\frac{2009}{2}\right)$

$= 670(1004{,}5) = 673015$

حل التمرين الثاني:

لدينا: (u_n) متتالية معرّفة بـ: $\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$.

1)حساب u_2، u_3 و u_4:

$u_2 = 2u_1 + 1 = 2(7) + 1 = 15$.

$u_3 = 2u_2 + 1 = 2(15) + 1 = 31$.

$u_4 = 2u_3 + 1 = 2(31) + 1 = 63$.

2)(v_n) متتالية معرّفة كما يأتي: $v_n = u_n + 1$.

أ-اثبات أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_1:

ط01) نُبين أنّ الحاصل $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ عدد ثابت.

لدينا: $v_n = u_n + 1$

ومنه: $v_{n+1} = u_{n+1} + 1$

$= (2u_n + 1) + 1$

$= 2u_n + 2 = 2(u_n + 1)$

وعليه: $\boxed{\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2(u_n+1)}{u_n+1} = 2}$.

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدّها الأول $v_1 = u_1 + 1 = 7 + 1 = 8$.

ب-كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n:

بمأنّ: (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 وحدّها الأول $v_1 = 8$، فإنّ: $v_n = v_1 \times q^{n-1}$

بالتعويض نجد: $\boxed{v_n = 8 \times 2^{n-1}}$.

استنتاج u_n بدلالة n:

لدينا: $v_n = u_n + 1$

ومنه: $\boxed{u_n = v_n - 1 = 8 \times 2^{n-1} - 1}$.

ج-$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$، حساب S_n بدلالة n:

$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

$= v_1\left(\frac{1-q^{n-1+1}}{1-q}\right)$

$= 8\left(\frac{1-2^n}{1-2}\right) = \frac{8}{-1}(1 - 2^n)$

إذن: $\boxed{S_n = 8(2^n - 1)}$.

د-تعيين n علماً أنّ $S_n = 1016$:

$S_n = 1016$ معناه: $8(2^n - 1) = 1016$

ومنه: $2^n - 1 = \frac{1016}{8}$

أي: $2^n - 1 = 127$

وعليه: $2^n = 128 = 2^7$

(لأنّ $128 = 2^7$)

إذن: $\boxed{n = 7}$ $(S_7 = 1016)$.

حل التمرين الثالث:

(u_n) متتالية **حسابية** معرّفة على $\mathbb{N}^*$ **بحدّها الأول** $u_1 = 2$ **وبالعلاقة** $u_2 - 2u_5 = 19$.

1)أ-حساب الأساس r للمتتالية (u_n):

نكتب كل من u_2 وu_5 بدلالة الحد الأول u_1 المُعطى

حسب العلاقة $\boxed{u_n = u_1 + (n-1)r}$

نجد: $\begin{cases} u_2 = u_1 + (2-1)r = 2 + r \\ u_5 = u_1 + (5-1)r = 2 + 4r \end{cases}$

العلاقة $u_2 - 2u_5 = 19$

تُصبح: $(2+r) - 2(2+4r) = 19$

ومنه: $2 + r - 4 - 8r = 19$

وعليه: $-7r = 21$ إذن: $\boxed{r = \frac{21}{-7} = -3}$.

ب-حساب الحد العاشر:

بمأنّ الحد الأوّل هو u_1،

إذن الحد **العاشر** هو
$$u_{10} = u_1 + (10-1)r = u_1 + 9r = 2 + 9(-3) = 2 - 27 = -25$$

2)كتابة عبارة u_n بدلالة n:

لدينا: $\boxed{u_n = u_1 + (n-1)r}$

ومنه: $u_n = 2 + (n-1)(-3)$

إذن: $\boxed{u_n = -3n + 5}$.

3)تبيان أنّ العدد (2008-) هو حداً من حدود (u_n)

نضع: $\boxed{u_n = -2008}$

نجد: $-3n + 5 = -2008$

ومنه: $-3n = -2008 - 5$

أي: $n = \frac{-2013}{-3} = 671 \in \mathbb{N}$

$(u_{671} = -2008)$

إذن: (2008-) حد من حدود المتتالية (u_n).

رتبته: 671 لأنّ الحد الأوّل هو u_1.

4)حساب المجموع، $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{671}$:

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{671}$$
$$= (671 - 1 + 1)\left(\frac{u_1 + u_{671}}{2}\right)$$
$$= 671\left(\frac{2 + (-2008)}{2}\right)$$
$$= 671\left(\frac{-2006}{2}\right)$$
$$= 671(-1003) = -673013$$

حل التمرين الرابع:

لديـنـا: (u_n) متتالية **هندسية** معرفة على $\mathbb{N}$ **وأساسها موجب** $(q > 0)$

1-تعيين أساس المتتالية (u_n) وحدّها الأول u_0 علماً أنّ، $u_3 = 144$ و$u_5 = 576$:

لدينا: $u_n = u_p \times q^{n-p}$

ومنه: $u_5 = u_3 \times q^{5-3}$

وعليه: $576 = 144 \times q^2$ ومنه: $q^2 = \frac{576}{144} = 4$

أي: $q = \sqrt{4} = 2 > 0$ **(مقبول)**

أو $q = -\sqrt{4} = -2$ **(مرفوض)** إذن: $\boxed{q = 2}$.

تعيين الحد الأول u_0:

لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$ ومنه: $u_3 = u_0 \times q^3$

إذن: $\boxed{u_0 = \frac{u_3}{q^3} = \frac{144}{2^3} = \frac{144}{8} = 18}$

أو: $u_5 = u_0 \times q^5$

نجد: $\boxed{u_0 = \frac{u_5}{q^5} = \frac{576}{2^5} = \frac{576}{32} = 18}$

2-التحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 18 \times 2^n$:

لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$ ومنه: $\boxed{u_n = 18 \times 2^n}$.

3-حساب بدلالة n المجموع، $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$:

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$
$$= u_0\left(\frac{1 - q^{n-0+1}}{1-q}\right)$$
$$= 18\left(\frac{1 - 2^{n+1}}{1-2}\right)$$
$$= \frac{18}{-1}(1 - 2^{n+1})$$
$$= -18(1 - 2^{n+1}) = 18(2^{n+1} - 1)$$

استنتاج قيمة العدد الطبيعي n حيث، $S_n = 1134$

$S_n = 1134$ معناه: $18(2^{n+1} - 1) = 1134$

ومنه: $2^{n+1} - 1 = \frac{1134}{18}$

أي: $2^{n+1} - 1 = 63$

ومنه: $2^{n+1} = 64 = 2^6$

وعليه: $n + 1 = 6$

إذن: $\boxed{n = 5}$ ($S_5 = 1134$).

حل التمرين الخامس:

$I)$ (u_n) متتالية **حسابية** معرّفة على $\mathbb{N}$ بالحدين: $u_{10} = 31$ وَ $u_{15} = 46$.

1-تعيين أساس المتتالية (u_n):

لدينا: $\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$

ومنه: $u_{15} = u_{10} + (15-10)r$

وعليه: $46 = 31 + 5r$

وبالتالي: $5r = 46 - 31$ إذن: $\boxed{r = \frac{15}{5} = 3}$.

الطريقة 02:

$r = \frac{u_n-u_p}{n-p} = \frac{u_{15}-u_{10}}{15-10} = \frac{46-31}{5} = \frac{15}{5} = 3$.

تعيين الحدّ الأول u_0:

لدينا: $\boxed{u_n = u_0 + nr}$ ومنه: $u_{10} = u_0 + 10r$

وعليه: $u_0 = u_{10} - 10r$

$= 31 - 10(3) = 31 - 30 = 1$

أو $\boxed{u_n = u_0 + nr}$ ومنه: $u_{15} = u_0 + 15r$

وعليه: $u_0 = u_{15} - 15r$

$= 46 - 15(3) = 46 - 45 = 1$

2-كتابة u_n بدلالة n: (عبارة الحد العام)

لدينا: $u_n = u_0 + nr$، إذن: $\boxed{u_n = 1 + 3n}$.

3-تبيان أنّ 6028 حدّ من حدود المتتالية (u_n):

نضع: $u_n = 6028$ نجد: $6028 = 1 + 3n$

ومنه: $6027 = 3n$

وبالتالي: $n = \frac{6027}{3} = 2009 \in \mathbb{N}$

$(u_{2009} = 6028)$

إذن: العدد 6028 حد من حدود المتتالية (u_n).

4-حساب المجموع S،

$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2009}$:

$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2009}$

$= (2009 - 0 + 1)\left(\frac{u_0 + u_{2009}}{2}\right)$

$= (2010)\left(\frac{1+6028}{2}\right)$

$= (2010)\left(\frac{6029}{2}\right)$

$= (2010)(3014,5) = 6059145$

II) (v_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 2 \times 8^n$.

1-تبيان أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0:

نُبين أنّ حاصل القسمة $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ عدد ثابت:

لدينا: $v_n = 2 \times 8^n$ ومنه: $v_{n+1} = 2 \times 8^{n+1}$

وبالتالي: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2\times 8^{n+1}}{2\times 8^n} = \frac{8^{n+1}}{8^n} = \frac{8^n \times 8^1}{8^n} = 8$

إذن: (v_n) هندسية، أساسها $\boxed{q = 8}$ وحدّها الأوّل $v_0 = 2 \times 8^0 = 2 \times 1 = 2$.

2-حساب بدلالة n المجموع S'،

$S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$:

$S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

$= v_0\left(\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}\right)$

$= 2\left(\frac{1-8^{n+1}}{1-8}\right)$

$= \frac{2}{-7}(1 - 8^{n+1}) = \frac{2}{7}(8^{n+1} - 1)$

حل التمرين السادس:

(u_n) متتالية **هندسية** معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$، أساسها q وحدّها الأول u_0 حيث: $u_1 = 6$ و $u_4 = 48$.

1.أ-حساب الأساس والحدّ الأوّل للمتتالية (u_n):

نعلم أنّ $u_n = u_p \times q^{n-p}$

ومنه: $u_4 = u_1 \times q^{4-1}$

ويكون: $48 = 6 \times q^3$ وعليه: $q^3 = \frac{48}{6} = 8$

(بما أنّ $8 = 2^3$ فإنّ $q^3 = 2^3$) إذن: $\boxed{q = 2}$.

حساب الحد الأوّل u_0:

لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$ ومنه: $u_1 = u_0 \times q^1$

ويكون: $\boxed{u_0 = \frac{u_1}{q^1} = \frac{6}{2} = 3}$.

أو: $u_n = u_0 \times q^n$ ومنه: $u_4 = u_0 \times q^4$

ويكون: $\boxed{u_0 = \frac{u_4}{q^4} = \frac{48}{16} = 3}$.

ب-استنتاج أنّ عبارة الحدّ العام لـ (u_n) هي:

$u_n = 3 \times 2^n$:

لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$، إذن: $\boxed{u_n = 3 \times 2^n}$.

2.أ-علماً أنّ $2^8 = 256$؛ تبيّان أنّ العدد 768 هو حد من حدود المتتالية (u_n):

نضع: $u_n = 768$ نجد: $3 \times 2^n = 768$

ومنه: $2^n = \frac{768}{3} = 256$

وعليه: $2^n = 2^8$ (لأنّ $2^8 = 256$)

وبالتالي: $\boxed{n = 8 \in \mathbb{N}}$ ($u_8 = 768$)

إذن: 768 حدّ من حدود المتتالية (u_n).

ب-حساب المجموع S حيث:

$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_7$:

$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_7$

$= u_0\left(\frac{1-q^{7-0+1}}{1-q}\right)$

$= 3\left(\frac{1-2^8}{1-2}\right)$

$= \frac{3}{-1}(1 - 256) = -3(-255) = 765$

3.(v_n) متتالية معرفة بـ: $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = 2v_n - 1 \end{cases}$

أ-حساب v_1، v_2 و v_3:

- $v_1 = 2v_0 - 1 = 2(4) - 1 = 7$.
- $v_2 = 2v_1 - 1 = 2(7) - 1 = 13$.
- $v_3 = 2v_2 - 1 = 2(13) - 1 = 25$.

ب-البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = 3 \times 2^n + 1$:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$.

المرحلة 01: (من أجل $n = 0$)

لدينا: $v_0 = 3 \times 2^0 + 1 = 3(1) + 1 = 4$

إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

- **نفرض** صحة الخاصية $P(n)$ أي:

$\boxed{v_n = 3 \times 2^n + 1}$ (فرضية التراجع)

- **ونبرهن** صحة الخاصية $P(n+1)$ أي:

$\boxed{v_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + 1}$

البرهان: $v_{n+1} = 2v_n - 1$

$= 2(3 \times 2^n + 1) - 1$

$= 2^1 \times 3 \times 2^n + 2 - 1$

$= 3 \times 2^{n+1} + 1$

إذن: $P(n+1)$ صحيحة.

الخلاصة: حسب **مبدأ الاستدلال بالتراجع** من أجل كل عدد طبيعي n، $\boxed{v_n = 3 \times 2^n + 1}$.

جـ-حساب المجموع S' حيث، $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_7$:

نلاحظ أنّ $\boxed{v_n = 3 \times 2^n + 1 = u_n + 1}$

ومنه: $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_7$

$= (u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \cdots + (u_7 + 1)$

$= (u_0 + u_1 + \cdots + u_7) + 8$

$= S + 8 = 765 + 8 = 773$

حل التمرين السابع:

أ)(u_n) متتالية **هندسية** أساسها 3 وحدّها الأول u_0

بحيث: $u_0 + u_3 = 28$.

1.حساب u_0:

لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$ ومنه: $u_3 = u_0 \times q^3$

$= u_0 \times 3^3 = 27u_0$

العلاقة $u_0 + u_3 = 28$ تُصبح $u_0 + 27u_0 = 28$

ومنه: $28u_0 = 28$

إذن: $\boxed{u_0 = 1}$.

كتابة الحد العام u_n بدلالة n:

لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$، إذن: $\boxed{u_n = 3^n}$.

2.حساب المجموع، $S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$

$S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$

$= u_0 \left(\frac{1-q^{9-0+1}}{1-q}\right)$

$= 1\left(\frac{1-3^{10}}{1-3}\right)$

$= 1\left(\frac{1-3^{10}}{-2}\right)$

$= \frac{1}{-2}(1 - 3^{10})$

$= \frac{1}{2}(3^{10} - 1) = \frac{1}{2}(59048) = 29524$

ب)(v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام:

$v_n = 1 - 5n$.

1.تبيّان أنّ (v_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين أساسها:

نُبين أنّ الفرق $v_{n+1} - v_n$ عدد ثابت

لدينا: $v_n = 1 - 5n$

ومنه: $v_{n+1} = 1 - 5(n+1)$

$= 1 - 5n - 5 = -4 - 5n$

وعليه: $v_{n+1} - v_n = (-4 - 5n) - (1 - 5n)$

$= -4 - 5n - 1 + 5n = -5$

أي: $\boxed{v_{n+1} = v_n - 5}$

إذن: (v_n) متتالية **حسابية** أساسها $\boxed{r = -5}$.

استنتاج اتجاه تغيّرها:

بمأنّ (v_n) **حسابية** أساسها 5- **سالب تماما**

فإنّها **متناقصة تماما** على $\mathbb{N}$.

2.حساب المجموع، $S_2 = v_0 + v_1 + \cdots + v_9$

$S_2 = v_0 + v_1 + \cdots + v_9$

$= (9 - 0 + 1)\left(\frac{v_0 + v_9}{2}\right)$

$= 10\left(\frac{1-44}{2}\right)$

$= \frac{10}{2}(1 - 44) = 5(-43) = -215$

(ملاحظة $v_9 = 1 - 5(9) = 1 - 45 = -44$)

ج) نعتبر المتتالية (k_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام:

$k_n = 1 + 3^n - 5n$.

-التحقّق أنّ $k_n = u_n + v_n$:

لدينا: $\begin{cases} u_n = 3^n \\ v_n = 1 - 5n \end{cases}$

ومنه: $k_n = 1 + 3^n - 5n$

$= 3^n + (1 - 5n)$

$= u_n + v_n$

حساب المجموع $S = k_0 + k_1 + \cdots + k_9$:

لدينا: $k_n = u_n + v_n$

$$\begin{aligned} S &= k_0 + k_1 + \cdots + k_9 \\ &= (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \cdots + (u_9 + v_9) \\ &= (u_0 + u_1 + \cdots + u_9) + (v_0 + v_1 + \cdots + v_9) \\ &= S_1 + S_2 \\ &= 29524 - 215 = 29309 \end{aligned}$$

حل التمرين الثامن:

لديـــنا: (u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{N}$ بحدّيهما العام: $u_n = -2n$ وَ $v_n = 3^{-2n}$.

(نلاحظ أنّ $v_n = 3^{u_n}$)

تعيين في كلّ حالة من الحالات الخمس الاقتراح الصحيح من بين الاقتراحات الثلاث مع التعليل:

1) لدينا: $u_n = -2n$

ومنه: $u_{n+1} = -2(n+1) = -2n - 2$

وعليه: $u_{n+1} - u_n = (-2n - 2) - (-2n)$

$= -2n - 2 + 2n = -2$

إذن: (u_n) هي متتالية **حسابية**.

2) بمــأنّ (u_n) معرّفة على $\mathbb{N}$، فحدّها **الأول** هو u_0،

وبالتالي: حدها الخامس والأربعون

هو: $\boxed{u_{44} = -2(44) = -88}$.

3) حسب السؤال **1)** لدينا: (u_n) متتالية **حسابية**،

إذن: $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n - 0 + 1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$

$$\begin{aligned} &= (n+1)\left(\frac{0 + (-2n)}{2}\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{-2n}{2}\right) \\ &= (n+1)(-n) \\ &= -n^2 - n \end{aligned}$$

4) (v_n) متتالية **هندسية** أساسها: $\boxed{q = \frac{v_{n+1}}{v_n}}$،

لدينا: $v_n = 3^{-2n}$ ومنه:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 3^{-2(n+1)} \\ &= 3^{-2n-2} \\ &= 3^{-2n+(-2)} = 3^{-2n} \times 3^{-2} \end{aligned}$$

بالتعويض نجد:

$q = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3^{-2n} \times 3^{-2}}{3^{-2n}} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

5) المتتالية (v_n) **متزايدة تماما**

لأنّ: $v_{n+1} - v_n = (3^{-2n} \times 3^{-2}) - (3^{-2n})$

$$\begin{aligned} &= 3^{-2n}(3^{-2} - 1) \\ &= 3^{-2n}\left(\frac{1}{9} - 1\right) = \frac{-8}{9} \times 3^{-2n} < 0 \end{aligned}$$

حل التمرين التاسع:

لدينا: a، b، c **ثلاثة حدود متتابعة** لمتتالية **حسابية متزايدة** أساسها r حيث: $a + b + c = 9$.

1.أ) حساب b:

حسب خاصية **الوسط الحسابي** لدينا: $a + c = 2b$.

$a + b + c = 9$ تُصبح $2b + b = 9$

ومنه: $3b = 9$ إذن: $\boxed{b = 3}$.

كتابة a و c بدلالة r:

توضيح $a \xrightarrow{+r} b \xrightarrow{+r} c$

لدينا: $\begin{cases} b = a + r \\ c = b + r \end{cases}$ وبالتالي: $\begin{cases} a = b - r \\ c = b + r \end{cases}$

إذن: $\boxed{\begin{cases} a = 3 - r \\ c = 3 + r \end{cases}}$.

ب) علماً أنّ: $a \times c = -16$ **-تعيّين الأساس r:**

لدينا مما سبق: $a = 3 - r$ وَ $c = 3 + r$.

$a \times c = -16$ تُكافئ: $(3 - r) \times (3 + r) = -16$

ومنه: $3^2 - r^2 = -16$

وعليه: $-r^2 = -25$

ويكون: $r^2 = 25$

وبالتالي: $r = \sqrt{25} = 5$

أو $r = -\sqrt{25} = -5$ **(مرفوض)**

إذن: $\boxed{r = 5}$ (لأنّ المتتالية **حسابية متزايدة**)

استنتاج a و c:

لدينا: $\begin{cases} a = 3 - r \\ c = 3 + r \end{cases}$ و $r = 5$ إذن: $\boxed{\begin{cases} a = -2 \\ c = 8 \end{cases}}$.

2. (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = -2$ وأساسها 5.

نلاحظ أنّ $\begin{cases} u_0 = -2 = a \\ 5 = r \end{cases}$ إذن: $\begin{cases} u_1 = b = 3 \\ u_2 = c = 8 \end{cases}$

أ) التعبّير عن الحدّ العام u_n بدلالة n:

لدينا: $u_n = u_0 + nr$، إذن: $\boxed{u_n = -2 + 5n}$.

ب) حساب u_{15}:

$u_{15} = -2 + 5(15) = -2 + 75 = 73$.

استنتاج المجموع، $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{15}$:

$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + \cdots + u_{15} \\ &= (15 - 0 + 1)\left(\frac{u_0 + u_{15}}{2}\right) \\ &= 16\left(\frac{-2 + 73}{2}\right) \\ &= 16(35{,}5) = 568 \end{aligned}$$

3. (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة:

$$8v_n - u_n = 0$$

حساب المجموع، $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{15}$:

لدينا: $8v_n - u_n = 0$ ومنه: $v_n = \frac{1}{8}u_n$

وبالتالي: $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{15}$
$$= \frac{1}{8}u_0 + \frac{1}{8}u_1 + \cdots + \frac{1}{8}u_{15}$$
$$= \frac{1}{8}(u_0 + u_1 + \cdots + u_{15})$$
$$= \frac{1}{8}S = \frac{1}{8}(568) = 71$$

حل التمرين العاشر:

(u_n) متتالية حسابية متزايدة، أساسها r، حدّها الأول u_1 و $u_3 = 7$.

1.أ) حساب بدلالة r الجدائين $T_1 = u_1 \times u_5$ و $T_2 = u_2 \times u_4$:

لدينا: $u_n = u_p + (n-p)r$

ومنه: $u_n = u_3 + (n-3)r$

وعليه: $\begin{cases} u_1 = u_3 + (1-3)r = 7 - 2r \\ u_2 = u_3 + (2-3)r = 7 - r \\ u_4 = u_3 + (4-3)r = 7 + r \\ u_5 = u_3 + (5-3)r = 7 + 2r \end{cases}$

وبالتالي: $T_1 = u_1 \times u_5$
$$= (7-2r)(7+2r)$$
$$= 7^2 - (2r)^2 = \mathbf{49 - 4r^2}$$

وَ $T_2 = u_2 \times u_4$
$$= (7-r)(7+r)$$
$$= 7^2 - (r)^2 = \mathbf{49 - r^2}$$

ب) تعيّين الأساس r بحيث، $T_2 - T_1 = 27$:

لدينا: $T_2 - T_1 = 27$

تُكافئ: $(49 - r^2) - (49 - 4r^2) = 27$

ومنه: $49 - r^2 - 49 + 4r^2 = 27$

وعليه: $r^2 = \frac{27}{3}$ أي: $r^2 = 9$

وبالتالي: $r = \sqrt{9} = 3$ أو $r = -\sqrt{9} = -3$

وبمأنّ (u_n) حسابية متزايدة (أساسها موجب)

فإنّ: $\boxed{r = 3}$.

2.بوضع $r = 3$.

أ) كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n:

لدينا: (u_n) متتالية حسابية، أساسها $r = 3$، حدّها الأول

$u_1 = 7 - 2(3) = 1$

فإنّ: $u_n = u_1 + (n-1)r$،

بالتعويض نجد: $u_n = 1 + (n-1)(3)$

إذن: $\boxed{u_n = 3n - 2}$.

ب) $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ (n عدد طبيعي غير معدوم)

تبيّان أنّ، $S_n = \frac{3n^2 - n}{2}$:

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$
$$= (n - 1 + 1)\left(\frac{u_1 + u_n}{2}\right)$$
$$= n\left(\frac{1 + (3n-2)}{2}\right)$$
$$= n\left(\frac{3n-1}{2}\right) = \frac{n(3n-1)}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}$$

ج) ايجاد العدد الطبيعي n بحيث، $S_n = 145$:

$S_n = 145$ معناه: $\frac{3n^2 - n}{2} = 145$

ومنه: $3n^2 - n - 290 = 0$ ---(*)

نحل المعادلة (*): نحسب المميز Δ:

$\Delta = (-1)^2 - 4(3)(-290) = 1 + 3480 = 3481 > 0$

للمعادلة (*) حلين متمايزين هما:

$n' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{3481}}{2(3)} = \frac{1+59}{6} = \frac{60}{6} = 10 \in \mathbb{N}$

و $n'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{3481}}{2(3)} = \frac{1-59}{6} = \frac{-29}{3} \notin \mathbb{N}$

إذن: $\boxed{n = 10}$.($S_{10} = 145$)

3.أ) كتابة الحدّ u_{n+5} بدلالة n:

لدينا: $u_n = 3n - 2$

ومنه: $u_{n+5} = 3(n+5) - 2$
$$= 3n + 15 - 2 = 3n + 13$$

إذن: $\boxed{u_{n+5} = 3n + 13}$.

ب) التحقّق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$:

$$\frac{u_{n+1}}{n} = \frac{3n+13}{n} = \frac{3n}{n} + \frac{13}{n} = 3 + \frac{13}{n}$$

ج) استنتاج الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعيا:

$\frac{u_{n+1}}{n} \in \mathbb{N}$ معناه: $3 + \frac{13}{n} \in \mathbb{N}$

ومنه: $\frac{13}{n} \in \mathbb{N}$

وعليه: $n \in D_{13}$ أي: $n \in \{1; 13\}$

(قيم n هي قواسم العدد 13)

إذن: $\boxed{n = 1}$ أو $\boxed{n = 13}$.

حل التمرين الحادي عشر:

(v_n) متتالية هندسية حدّها الأول $v_0 = 2$ وأساسها 3.

1-أ) التعبيّر عن v_n بدلالة n:

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$، إذن: $\boxed{v_n = 2 \times 3^n}$.

ب) حساب بدلالة n الفرق $v_{n+1}-v_n$:

لدينا: $v_n = 2\times 3^n$

ومنه: $v_{n+1} = 2\times 3^{n+1} = 2\times 3^n \times 3^1$

وعليه: $v_{n+1}-v_n = (6\times 3^n)-(2\times 3^n)$
$= 4\times 3^n$

إذن: $\boxed{v_{n+1}-v_n = 4\times 3^n}$.

استنتاج اتجاه تغيّر المتتالية (v_n):

بما أنّ: $v_{n+1}-v_n = 4\times 3^n > 0$

فإنّ: (v_n) **متزايدة تماماً** على $\mathbb{N}$.

-2 $S_n = v_0+v_1+\cdots+v_{n-1}$، n عدد طبيعي غير معدوم.

أ) حساب بدلالة n المجموع S_n:

$$S_n = v_0+v_1+\cdots+v_{n-1}$$
$$= v_0\left(\frac{1-q^{(n-1)-0+1}}{1-q}\right)$$
$$= 2\left(\frac{1-3^n}{1-3}\right)$$
$$= \frac{2}{-2}(1-3^n)$$
$$= -(1-3^n) = 3^n-1$$

ب) تعيّين قيمة العدد الطبيعي n بحيث، $S_n = 80$:

$S_n = 80$ معناه: $3^n-1 = 80$

ومنه: $3^n = 81$ (لدينا: $81 = 3^4$)

أي: $3^n = 3^4$

إذن: $\boxed{n=4}$ ($S_4 = 80$)

ج) اثبات بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، العدد 3^n-1 يقبل القسمة على 2:

نسمي هذه الخاصية بـ$P(n)$.

المرحلة 01: من أجل $n=0$

لدينا: $3^0-1 = 1-1 = 0$

و0 يقبل القسمة على 2، إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

- **نفرض** صحة الخاصية $P(n)$ أي: 3^n-1 يقبل القسمة على 2 ($3^n-1 = 2k$) **(فرضية التراجع)**
- **ونبرهن** صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $3^{n+1}-1$ يقبل القسمة على 2 ($3^{n+1}-1 = 2k'$).

البرهان: $3^{n+1}-1 = 3^n\times 3^1-1$
$= (2k+1)\times 3-1$
$= 6k+3-1$
$= 6k+2$
$= 2(3k+1)$
$= 2k'$ ($k' = 3k+1$)

بالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: **حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع** من أجل كل عدد طبيعي n، العدد 3^n-1 يقبل القسمة على 2.

حل التمرين الثاني عشر:

(u_n) متتالية **حسابية** حدّها الأول u_0 وأساسها 5 بحيث:
$u_0+u_1+u_2+u_3 = 34$.

-1حساب u_0:

نكتب الحدود u_1، u_2 وu_3 بدلالة الحد الأول u_0

لدينا: $u_n = u_0+nr$

ومنه: $\begin{cases} u_1 = u_0+r = u_0+5 \\ u_2 = u_0+2r = u_0+10 \\ u_3 = u_0+3r = u_0+15 \end{cases}$

العلاقة: $u_0+u_1+u_2+u_3 = 34$

تُصبح: $u_0+(u_0+5)+(u_0+10)+(u_0+15) = 34$

ومنه: $4u_0 = 34-30$ ويكون: $4u_0 = 4$

إذن: $\boxed{u_0 = 1}$.

-2تبيّان أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 5n+1$:

لدينا: $u_n = u_0+nr$، إذن: $\boxed{u_n = 1+5n}$.

-3تعيّين العدد الطبيعي n بحيث، $u_{n+1}+u_n-8n = 4033$:

لدينا: $u_n = 5n+1$

ومنه: $u_{n+1} = 5(n+1)+1 = 5n+6$

لدينا: $u_{n+1}+u_n-8n = 4033$

معناه: $(5n+6)+(5n+1)-8n = 4033$

ومنه: $7+2n = 4033$

وعليه: $2n = 4026$ إذن: $\boxed{n = 2013}$.

-4حساب المجموع، $S = u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{2013}$:

لدينا: $u_{2013} = 5(2013)+1 = 10066$

$$S = u_0+u_1+\cdots+u_{2013}$$
$$= (2013-0+1)\left(\frac{u_0+u_{2013}}{2}\right)$$
$$= \frac{2014}{2}(1+10066)$$
$$= 1007(10067) = 10137469$$

-5المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة:

$$v_n = 2u_n+1$$

أ) دراسة اتجاه تغيّر المتتالية(v_n):

ندرس إشارة الفرق $v_{n+1}-v_n$

لدينا: $v_n = 2u_n+1$

ولدينا: $u_{n+1} = u_n+5$ لأنّ (u_n) حسابية أساسها 5.

نجد: $v_{n+1} = 2u_{n+1}+1$

$v_{n+1} = 2(u_n+5)+1 = 2u_n+11$

ومنه: $v_{n+1}-v_n = (2u_n+11)-(2u_n+1)$
$= 10 > 0$

إذن: (v_n) **متزايدة تماما**.

ب) حساب المجموع:

$S' = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{2013}$:

لدينا: $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{2013}$
$= (2u_0+1) + (2u_1+1) + \cdots + (2u_{2013}+1)$
$= 2(u_0+u_1+\cdots+u_{2013}) + 1(2013-0+1)$
$= 2S + 2014 = 20276951$

حل التمرين الثالث عشر:

تعيّين الاقتراح الصّحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة، في كلّ حالة، مع التّعليل:

1) (u_n) متتالية **حسابية** أساسها 3 وحدّها $u_2 = 1$.

الحد العام للمتتالية (u_n) هو:

الطريقة 01:

$u_n = u_2 + (n-2)r$
$= 1 + (n-2)(3)$
$= 1 + 3n - 6 = -5 + 3n$

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح جـ) $u_n = -5 + 3n$.

الطريقة 02:

- في حالة: $u_n = 1 + 3n$
  نجد: $u_2 = 1 + 3(2) = 7 \neq 1$.
- في حالة: $u_n = 7 + 3n$
  نجد: $u_2 = 7 + 3(2) = 13 \neq 1$.
- في حالة: $u_n = -5 + 3n$
  نجد: $u_2 = -5 + 3(2) = 1$.

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح جـ) $u_n = -5 + 3n$.

2) n عدد طبيعي. **المجموع $1+2+3+\cdots+n$ هو عبارة عن مجموع n حد من متتالية حسابية حدّها الأول يساوي 1 وأساسها 1** لتكن هذه المتتالية (u_n)

نضع $u_1 = 1$ نجد: $u_n = n$

ومنه:

$1+2+3+\cdots+n = u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$
$= (n-1+1)\left(\frac{u_1+u_n}{2}\right)$
$= n\left(\frac{1+n}{2}\right)$
$= \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح أ) $\frac{n^2+n}{2}$.

3) x عدد حقيقي.

الأعداد $x-2$، x، $x+1$ بهذا الترتيب **حدودا متعاقبة** لمتتالية **هندسية** معناه: $(x-2)\times(x+1) = x^2$

ومنه: $x^2 + x - 2x - 2 = x^2$

وعليه: $-x - 2 = 0$

وبالتالي: $\boxed{x = -2}$

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح جـ) $x = -2$.

4) (v_n) متتالية **هندسية** معرّفة على $\mathbb{N}$، حدّها العام $v_n = 2\times 3^{n+1}$. أساس المتتالية (v_n) هو:

الطريقة 01:

$q = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2\times 3^{(n+1)+1}}{2\times 3^{n+1}}$
$= \frac{2\times 3^{n+1}\times 3^1}{2\times 3^{n+1}} = 3$

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح ب) 3.

الطريقة 02: لدينا: $v_n = 2\times 3^{n+1}$

ومنه: $v_{n+1} = 2\times 3^{(n+1)+1}$
$= 2\times 3^{(n+1)}\times 3^1 = v_n\times 3$

أي: $\boxed{v_{n+1} = 3v_n}$

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح ب) 3.

حل التمرين الرابع عشر:

(v_n) المتتالية العددية المعرّفة بما يلي:

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 5v_n + 4 \end{cases}.$$

1) حساب v_1، v_2 و v_3:

- $v_1 = 5v_0 + 4 = 5(1) + 4 = 5 + 4 = 9$.
- $v_2 = 5v_1 + 4 = 5(9) + 4 = 45 + 4 = 49$.
- $v_3 = 5v_2 + 4 = 5(49) + 4 = 245 + 4 = 249$.

2) لدينا: $u_n = v_n + 1$.

أ- تبيّان أنّ (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$ وحدّها الأول $u_0 = 2$:

ط01) نُبين أنّ الحاصل $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ عدد ثابت.

لدينا: $u_n = v_n + 1$

ومنه: $u_{n+1} = v_{n+1} + 1$
$= (5v_n + 4) + 1$
$= 5v_n + 5 = 5(v_n + 1)$

وعليه: $\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5(v_n+1)}{v_n+1} = 5}$.

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$ وحدّها الأول $u_0 = v_0 + 1 = 1 + 1 = 2$.

ب- كتابة u_n بدلالة n:

(u_n) **هندسية** أساسها 5 وحدّها الأول $u_0 = 2$،

عبارة الحد العام هي: $u_n = u_0 \times q^n$

بالتعويض نجد: $\boxed{u_n = 2 \times 5^n}$.

استنتاج v_n بدلالة n:

لدينا: $u_n = v_n + 1$ و $u_n = 2 \times 5^n$

إذن: $\boxed{v_n = u_n - 1 = 2 \times 5^n - 1}$.

جـ-تحلّيل العدد 1250 إلى جداء عوامل أوليّة:

1250	2
625	5
125	5
25	5
5	5
1	

إذن: $\boxed{1250 = 2 \times 5^4}$.

استنتاج أنّ 1250 حد من حدود المتتالية (u_n):

نضع: $u_n = 1250$ نجد: $2 \times 5^n = 2 \times 5^4$

أي: $\boxed{n = 4 \in \mathbb{N}}$

$(\ u_4 = 1250\ )$

إذن: 1250 حد من حدود المتتالية (u_n).

3)أ-حساب بدلالة n المجموع S_n،

$$\boldsymbol{S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$$
$$= u_0 \left(\frac{1-q^{(n-1)-0+1}}{1-q}\right)$$
$$= 2\left(\frac{1-5^n}{1-5}\right) = \frac{2}{-4}(1-5^n)$$

إذن: $\boxed{S_n = \frac{1}{2}(5^n - 1)}$.

ب-حساب بدلالة n المجموع $S_n{}'$،

$$\boldsymbol{S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}}$$

لدينا: $u_n = v_n + 1$ ومنه: $v_n = u_n - 1$

وعليه: $S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$

$$= (u_0 - 1) + (u_1 - 1) + \cdots + (u_{n-1} - 1)$$
$$= (u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}) - 1[(n-1) - 0 + 1]$$
$$= S_n - n$$
$$= \frac{1}{2}(5^n - 1) - n$$

إذن: $\boxed{S'_n = \frac{1}{2}(5^n - 1) - n}$

حل التمرين الخامس عشر:

(u_n) متتالية **هندسية** حدّها الأوّل u_0 وأساسها q

حيث: $u_0 = 2$ و $q = 3$.

1)حساب u_1 و u_2:

بمأنّ (u_n) متتالية **هندسية** فإنّ $\boxed{u_{n+1} = u_n \times q}$

وبالتالي: $u_1 = u_0 \times q = 2 \times 3 = 6$

وَ $u_2 = u_1 \times q = 6 \times 3 = 18$.

2)كتابة u_n بدلالة n:

لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$ ومنه: $\boxed{u_n = 2 \times 3^n}$.

استنتاج u_5: $u_5 = 2 \times 3^5 = 2 \times 243 = 486$.

3)تعيين اتجاه تغيّر المتتالية (u_n):

ندرس إشارة الفرق $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$

لدينا: $u_n = 2 \times 3^n$

ومنه: $u_{n+1} = 2 \times 3^{n+1} = 2 \times 3^n \times 3^1$

وعليه: $u_{n+1} - u_n = (6 \times 3^n) - (2 \times 3^n)$
$$= 4 \times 3^n > 0$$

إذن: (u_n) متزايدة تماما.

4)أ) حسب بدلالة n المجموع S_n حيث،

$$\boldsymbol{S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}}:$$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$
$$= u_0 \left(\frac{1-q^{(n-1)-0+1}}{1-q}\right)$$
$$= 2\left(\frac{1-3^n}{1-3}\right)$$
$$= \frac{2}{-2}(1-3^n) = -(1-3^n) = 3^n - 1$$

ب) استنتج قيمة المجموع:

$$\boldsymbol{2 + 6 + 18 + \cdots + 486}:$$

$$2 + 6 + 18 + \cdots + 486 = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_5$$
$$= 3^6 - 1 = 728$$

حل التمرين السادس عشر:

(u_n) متتالية **حسابية** حدّها **الأوّل** u_1 وأساسها r حيث:

$u_2 = \frac{1}{2}$ و $u_1 - u_3 = 5$.

1)أ) تبيان أنّ، $u_1 + u_3 = 1$:

حسب خاصية الوسط الحسابي،

$$u_1 + u_3 = 2u_2 = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

ب) تعيين الحدّ الأوّل u_1؛ ثمّ استنتاج أنّ $r = -\frac{5}{2}$:

لدينا: $\begin{cases} u_1 - u_3 = 5 \\ u_1 + u_3 = 1 \end{cases}$، بالجمع طرفاً لطرف نجد:

$$(u_1 - u_3) + (u_1 + u_3) = 5 + 1$$

ومنه: $2u_1 = 6$ وعليه: $\boxed{u_1 = \frac{6}{2} = 3}$

استنتاج أنّ $r = -\frac{5}{2}$:

$$r = u_2 - u_1 = \frac{1}{2} - 3 = \frac{1-6}{2} = -\frac{5}{2}.$$

2)كتابة u_n بدلالة n:

لدينا: $u_n = u_p + (n-p)r$

ومنه: $u_n = u_1 + (n-1)r$

بالتعويض نجد: $u_n = 3 + (n-1)\left(-\frac{5}{2}\right)$

وبالتالي: $u_n = -\frac{5}{2}n + 3 + \frac{5}{2}$

إذن: $\boxed{u_n = -\frac{5}{2}n + \frac{11}{2}}$.

3)أ) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث، $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$:

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$
$$= (n-1+1)\left(\frac{u_1+u_n}{2}\right)$$
$$= (n)\left(\frac{3+\left(-\frac{5}{2}n+\frac{11}{2}\right)}{2}\right)$$
$$= \frac{n}{2}\left(3 - \frac{5}{2}n + \frac{11}{2}\right)$$
$$= \frac{n}{2}\left(-\frac{5}{2}n + \frac{17}{2}\right) = \frac{-5n^2+17n}{4}$$

ب) عيّن قيمة العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $S_n = -\frac{657}{2}$:

$S_n = -\frac{657}{2}$ معناه: $\frac{-5n^2+17n}{4} = -\frac{657}{2}$

ومنه: $2(-5n^2+17n) = 4(-657)$

وعليه: $(*)\ -10n^2 + 34n + 2628 = 0$

نحل المعادلة $(*)$:

نحسب المميز Δ: $\Delta = (34)^2 - 4(-10)(2628)$
$= 1156 + 105120 = 106276 > \mathbf{0}$

للمعادلة $(*)$ حلين متمايزين هما:

$n' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-34+\sqrt{106276}}{2(-10)} = \frac{-34+326}{-20} = \frac{29}{-2} = \frac{-146}{10} \notin \mathbb{N}$

و $n'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-34-\sqrt{10627}}{2(-10)} = \frac{-34-326}{-20} = \frac{-360}{-20} = 18 \in \mathbb{N}$

إذن: $\boxed{n = 18}$ ($S_{18} = -\frac{657}{2}$).

4) n عدد طبيعي غير معدوم، $T_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + nu_n$.

أ) التحقق أنّه لكل n من $\mathbb{N}^*$، $(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$:

لدينا: $(n+2)(9-5n) = 9n - 5n^2 + 18 - 10n$
$= -5n^2 - n + 18$

ب) باستعمال الاستدلال بالتراجع، إثبات أنّه لكل n من $\mathbb{N}^*$، $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$:

نسمي هذه الخاصية بـ$P(n)$.

المرحلة 01: من أجل $n = 1$،

الطرف الأول: $T_1 = 1u_1 = u_1 = 3$

الطرف الثاني: $\frac{1}{6}(\mathbf{1})((\mathbf{1})+1)(14-5(\mathbf{1})) = \frac{2(9)}{6} = 3$

إذن: $P(1)$ **صحيحة**.

المرحلة 02:

- **نفرض** صحة الخاصية $P(n)$ أي:
$$T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$$
(فرضية التراجع)
- **ونبرهن** صحة الخاصية $P(n+1)$ أي:
$$T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(9-5n)$$

البرهان:

$$T_{n+1} = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + (n+1)u_{n+1}$$
$$= \underbrace{u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + nu_n}_{T_n} + (n+1)u_{n+1}$$
$$= T_n + (n+1)u_{n+1}$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n) + (n+1)u_{n+1}$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n) + (n+1)\left(-\frac{5}{2}n+3\right)$$
$$= \frac{1}{6}(n+1)[n(14-5n) + (-15n+18]$$
$$= \frac{1}{6}(n+1)(-5n^2 - n + 18)$$

حسب السؤال أ) نجد:
$$T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(9-5n)$$

إذن: $P(n+1)$ صحيحة.

الخلاصة: **حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع** لكل n من $\mathbb{N}^*$، $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$.

حل التمرين السابع عشر:

(u_n) متتالية عددية معرّفة من أجلّ عدد طبيعي n بـ: $u_n = 3n - 2$.

1)حساب u_0، u_1، u_2 وu_3:

- $u_0 = 3(0) - 2 = 0 - 2 = -2$
- $u_1 = 3(1) - 2 = 3 - 2 = 1$
- $u_2 = 3(2) - 2 = 6 - 2 = 4$
- $u_3 = 3(3) - 2 = 9 - 2 = 7$

2)تبيان أنّ المتتالية (u_n) حسابية وتعيين أساسها:

نُبين أنّ الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت:

لـديـنا: $u_n = 3n - 2$

ومنه: $u_{n+1} = 3(n+1) - 2$
$= 3n + 3 - 2 = 3n + 1$

وعليه: $u_{n+1} - u_n = (3n+1) - (3n-2)$
$= 3n + 1 - 3n + 2 = 3$

إذن: (u_n) **حسابية، أساسها** $r = 3$.

3)دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n):

بمـا أنّ (u_n) **حسابية** أساسها **موجب تماماً** $(r = 3 > 0)$ فـإنّها **متزايدة تماما**.

4)تبيان أنّ العدد 1954 حدّ من حدود المتتالية (u_n) وتعيين رتبته:

نضع: $u_n = 1954$ نجد: $3n - 2 = 1954$

ومنه: $3n = 1956$

وعليه: $n = \frac{1956}{3} = 652 \in \mathbb{N}$ $(u_{652} = 1954)$

إذن: 1954 حدّ من حدود المتتالية (u_n)،

رتبته: 653 (لأنّ الحد الأوّل هو u_0)

5)أ) حساب بدلالة n المجموع،

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n:$$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$
$$= (n - 0 + 1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$$
$$= (n+1)\left(\frac{-2+(3n-2)}{2}\right)$$
$$= (n+1)\left(\frac{3n-4}{2}\right)$$
$$= \frac{(n+1)(3n-4)}{2} = \frac{3n^2-n-4}{2}$$

ب) تعيين العدد n بحيث يكون، $S_n = 328$:

$S_n = 328$ معناه: $\frac{3n^2-n-4}{2} = 328$

ومنه: $3n^2 - n - 4 = 2(328)$

وعليه: $3n^2 - n - 660 = 0$ $(*)$

نحل المعادلة $(*)$:

نحسب المميز Δ: $\Delta = (-1)^2 - 4(3)(-660)$

$= 1 + 7920 = 7921 > \mathbf{0}$

للمعادلة $(*)$ حلين متمايزين هما:

$$n' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{7921}}{2(3)} = \frac{1+89}{6} = \frac{90}{6} = 15 \in \mathbb{N}$$

و $$n'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{7921}}{2(3)} = \frac{1-89}{6} = \frac{-88}{6} = \frac{-44}{3} \notin \mathbb{N}$$

إذن: $\boxed{n = 15}$ $(S_{15} = 328)$.

حل التمرين الثامن عشر:

(u_n) متتالية **حسابية**، **أساسها** 3 وحدّها **الأول** $\boldsymbol{u_0}$

وتُحقّق: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$.

1)حساب الحد الأوّل u_0:

نكتب u_1؛ u_2 وu_3 بدلالة u_0

لـدينا: $u_n = u_0 + nr$

ومنه: $\begin{cases} u_1 = u_0 + (1)r = u_0 + 3 \\ u_2 = u_0 + (2)r = u_0 + 6 \\ u_3 = u_0 + (3)r = u_0 + 9 \end{cases}$

العلاقة $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$،

تُصبح: $u_0 + (u_0 + 3) + (u_0 + 6) + (u_0 + 9) = 10$

ومنـه: $4u_0 + 18 = 10$

وعليه: $4u_0 = -8$ إذن: $\boxed{u_0 = \frac{-8}{4} = -2}$.

2)كتابة الحد العام u_n بدلالة n:

لدينا: $u_n = u_0 + nr$ ومنه: $\boxed{u_n = -2 + 3n}$.

3)تعيين العدد الطبيعي n بحيث، $u_n = 145$:

$u_n = 145$ تُكـافئ $-2 + 3n = 145$

ومنه: $3n = 147$

وعليه: $\boxed{n = \frac{147}{3} = 49}$ $(u_{49} = 145)$

4)حساب المجموع S بحيث،

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{49}:$$

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{49}$$
$$= (49 - 0 + 1)\left(\frac{u_0+u_{49}}{2}\right)$$
$$= (50)\left(\frac{-2+145}{2}\right)$$
$$= (50)\left(\frac{143}{2}\right) = (50)(71{,}5) = 3575$$

5) (v_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة:

$v_n = 2u_n + 3$.

حساب المجموع S' بحيث،

$$S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{49}:$$

لـدينا: $v_n = 2u_n + 3$

$$S' = (2u_0 + 3) + (2u_1 + 3) + \cdots + (2u_{49} + 3)$$
$$= 2(u_0 + u_1 + \cdots + u_{49}) + 3(94 - 0 + 1)$$
$$= 2S + 3(50)$$
$$= 2(3575) + 150 = 7300$$

حل التمرين التاسع عشر:

(u_n) متتالية **هندسية حدودها موجبة تماما**، معرّفة على $\mathbb{N}$ حيث $u_1 = 20$ و$u_3 = 320$.

1)تبيان أنّ أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدّها الأول هو 5:

لدينا: $u_n = u_p \times q^{n-p}$

ومنه: $u_3 = u_1 \times q^{3-1}$

وعليه: $320 = 20 \times q^2$

ويكون: $q^2 = \frac{320}{20} = 16$

وبالتالي: $\boxed{q = \sqrt{16} = 4}$

أو $\boxed{q = -\sqrt{16} = -4}$ **(مرفوض)**

إذن: $\boxed{q = 4}$ لأنّها حدود (u_n) **موجبة تماما.**

2)كتابة عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n:

بمـأنّ (u_n) **هندسية** معرفة على $\mathbb{N}$ فـإنّ حدّها الأوّل هو: $u_0 = \frac{u_1}{q} = \frac{20}{4} = 5$.

وبالتالي: $u_n = u_0 \times q^n$ إذن: $\boxed{u_n = 5 \times 4^n}$.

استنتاج قيمة حدّها السابع:

الحد السابع هو: $u_6 = 5 \times 4^6 = 5(4096) = 20480$

3)أ) حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S حيث، $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$:

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$
$$= u_0\left(\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}\right)$$
$$= 5\left(\frac{1-4^{n+1}}{1-4}\right)$$
$$= \frac{5}{-3}(1-4^{n+1}) = \frac{5}{3}(4^{n+1}-1)$$

ب) استنتاج قيمة المجموع S' حيث، $S' = u_0 + u_1 + \cdots + u_6$:

حسب السؤال السابق أ) نجد

$$S' = u_0 + u_1 + \cdots + u_6$$
$$= \frac{5}{3}(4^{6+1}-1)$$
$$= \frac{5}{3}(4^7-1)$$
$$= \frac{5}{3}(16384-1)$$
$$= \frac{5}{3}(16383) = 27305$$

حل التمرين العشرون:

(u_n) متتالية **حسابية** معرّفة على المجموعة $\mathbb{N}$ بحدّها **الأوّل $u_0 = -5$** و $u_3 + u_7 = 50$.

1)تعيين الأساس r للمتتالية (u_n):

نكتب u_3 و u_7 بدلالة u_0

لدينا: $u_n = u_0 + nr$

ومنه: $\begin{cases} u_3 = u_0 + (3)r = -5 + 3r \\ u_7 = u_0 + (7)r = -5 + 7r \end{cases}$

بالتعويض في العلاقة $u_3 + u_7 = 50$

نجد: $(-5+3r) + (-5+7r) = 50$

ومنه: $10r - 10 = 50$

وعليه: $10r = 60$ إذن: $\boxed{r = \frac{60}{10} = 6}$.

2)تبيان أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 6n - 5$:

لدينا: $u_n = u_0 + nr$ ومنه: $\boxed{u_n = -5 + 6n}$.

3)اثبات أنّ العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n)، مع تعيين رتبته:

نضع: $u_n = 2017$ نجد: $-5 + 6n = 2017$

ومنه: $6n = 2022$

وبالتالي: $\boxed{n = \frac{2022}{6} = 337 \in \mathbb{N}}$ $(u_{337} = 2017)$

إذن: العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n)،

رتبته: 338 لأنّ الحد الأوّل هو u_0.

4)حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S حيث $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$:

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$
$$= (n-0+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$$
$$= (n+1)\left(\frac{-5+(-5+6n)}{2}\right)$$
$$= (n+1)\left(\frac{-10+6}{2}\right)$$
$$= (n+1)(-5+3n)$$

حل التمرين الحادي وعشرون:

(u_n) متتالية **حسابية** معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها **الأول u_0** و**أساسها** r.

1)حساب الحد u_4 علما أنّ، $u_3 + u_5 = 20$:

حسب **خاصية الوسط الحسابي**

لدينا: $\boxed{u_3 + u_5 = 2u_4}$

العلاقة $u_3 + u_5 = 20$ تُصبح: $2u_4 = 20$

إذن: $\boxed{u_4 = \frac{20}{2} = 10}$.

2)حساب الحد u_5 علما أنّ، $2u_4 - u_5 = 7$:

$2u_4 - u_5 = 7$ تُكافئ $2(10) - u_5 = 7$

ومنه: $-u_5 = 7 - 20$

وعليه: $-u_5 = -13$

إذن: $\boxed{u_5 = 13}$.

3)استنتاج قيمة r وحساب u_0:

بمـأنّ (u_n) متتالية **حسابية**،

ولدينا: $u_4 = 10$؛ $u_5 = 13$

إذن: $\boxed{r = u_5 - u_4 = 13 - 10 = 3}$.

حساب u_0:

لدينا: $u_n = u_0 + nr$ ومنه: $u_4 = u_0 + 4r$

وعليه: $10 = u_0 + 4(3)$

إذن: $\boxed{u_0 = 10 - 12 = -2}$.

4)التحقّق أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 3n - 2$:

لدينا: $u_n = u_0 + nr$ ومنه: $\boxed{u_n = -2 + 3n}$.

5)حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n، $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$
$$= (n - 0 + 1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$
$$= (n + 1)\left(\frac{-2 + (3n - 2)}{2}\right)$$
$$= (n + 1)\left(\frac{3n - 4}{2}\right)$$
$$= \frac{(n+1)(3n-4)}{2} = \frac{3n^2 - n - 4}{2}$$

6)إيجاد العدد الطبيعي n حيث، $S_n = 33$:

$S_n = 33$ معناه: $\frac{3n^2 - n - 4}{2} = 33$

ومنه: $3n^2 - n - 4 = 2(33)$

وعليه: $3n^2 - n - 70 = 0 \quad (*)$

نحل المعادلة $(*)$:

نحسب المميز Δ: $\Delta = (-1)^2 - 4(3)(-70)$
$$= 1 + 840 = 841 > \mathbf{0}$$

للمعادلة $(*)$ حلين متمايزين هما:

$$n' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{841}}{2(3)} = \frac{1 + 29}{6} = \frac{30}{6} = 5 \in \mathbb{N}$$

و $n'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{841}}{2(3)} = \frac{1 - 29}{6} = \frac{-28}{6} = \frac{-14}{3} \notin \mathbb{N}$

إذن: $\boxed{n = 5}$ ($S_5 = 33$).

حل التمرين الثاني وعشرون:

تعيين الاقتراح الصحيح مع التعليل:

1)الحد السّادس لمتتالية حسابية أساسها 3- وحدّها الأول 1 هو: **ب)** 14- .

التبرير:

- **الطريقة 01:** إذا كان $\boxed{u_0 = 1}$ هو **الحد الأوّل** للمتتالية **الحسابية** التي أساسها $\boxed{r = -3}$

فإنّ حدّها **السادس** هو u_5 وبالتالي:

$\boxed{u_5 = u_0 + 5r = 1 + 5(-3) = -14}$.

- **الطريقة 02:** إذا كان $\boxed{u_1 = 1}$ هو **الحد الأوّل** للمتتالية **الحسابية** التي أساسها $\boxed{r = -3}$

فإنّ حدّها **السادس** هو u_6 وبالتالي:

$\boxed{u_6 = u_1 + (6 - 1)r = 1 + 5(-3) = -14}$

2)مجموع 100 حدٍ الأولى لمتتالية هندسية حدّها الأول هو 1 وأساسها 3 هو: **جـ)** $\frac{3^{100} - 1}{2}$.

لأنّ: المجموع $=$ الحد الأول $\left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}\right)$

$$= 1\left(\frac{1 - 3^{100}}{1 - 3}\right) = \left(\frac{1 - 3^{100}}{-2}\right) = \frac{3^{100} - 1}{2}$$

3)لدينا: $a = 2x + 2$، $b = 6x - 3$، $c = 4x$.

الأعداد الحقيقية a، b، c بهذا الترتيب تُشكل حدودا متتابعة لمتتالية **حسابية** عندما يكون: **أ)** $x = \frac{4}{3}$

التبرير:

بمأنّ الأعداد الحقيقية a، b، c بهذا الترتيب تُشكل حدودا متتابعة لمتتالية **حسابية**

فإنّ **حسب خاصية الوسط الحسابي** $\boxed{a + c = 2b}$

ومنه: $(2x + 2) + (4x) = 2(6x - 3)$

وعليه: $6x + 2 = 12x - 6$

وبالتالي: $-6x = -8$ إذن: $\boxed{x = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3}}$.

4)المتتالية العددية (u_n) المعرّفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ هي متتالية:

جـ) لا حسابية ولا هندسية.

لأنّ: **العلاقة** $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$،

ليست من الشكل $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$

وليست من الشكل $\boxed{u_{n+1} = qu_n}$.

حل التمرين الثالث وعشرون:

تعيين الاقتراح الصحيح، مع التبرير:

1)(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ:
$$u_n = n^2 - 1$$

المتتالية (u_n): **أ)** متزايدة تماما، **لمعرفة اتجاه تغيّر متتالية ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$**

لدينا: $u_n = n^2 - 1$

ومنه: $u_{n+1} = (n + 1)^2 - 1$
$$= n^2 + 1^2 + 2(n)(1) - 1$$
$$= n^2 + 2n$$

وعليه: $u_{n+1} - u_n = (n^2 + 2n) - (n^2 - 1)$
$$= 2n + 1 > 0$$

إذن: المتتالية (u_n) **متزايدة تماما.**

2)(v_n) متتالية هندسية حدّها الأوّل $v_1 = 3$ وأساسها $q = 2$،

عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي:

ب) $v_n = 3 \times 2^{n-1}$،

لأنّ: $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 3 \times 2^{n-1}$.

المجموع $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ يُساوي:

أ) $3(2^n-1)$،

لأنّ: $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

$$= v_1\left(\frac{1-q^{n-1+1}}{1-q}\right)$$

$$= 3\left(\frac{1-2^n}{1-2}\right) = 3\left(\frac{1-2^n}{-1}\right) = 3(2^n-1)$$

حل التمرين الرابع وعشرون:

(u_n) متتالية **هندسية حدودها موجبة تماما**، حدّها الأول u_0 وأساسها q حيث:

$u_0 \times u_2 = 576$ و $u_0 + u_1 = 30$.

1)تبيان أنّ $u_1 = 24$:

حسب **خاصية الوسط الهندسي**

لدينا، $u_0 \times u_2 = {u_1}^2$ ومنه: $u_0 \times u_2 = 576$

تُصبح: ${u_1}^2 = 576$

وعليه: $\boxed{u_1 = \sqrt{576} = 24}$

أو $\boxed{u_1 = -\sqrt{576} = -24}$ **(مرفوض)**

إذن: $\boxed{u_1 = 24}$ لأنّ حدود (u_n) **موجبة تماما.**

استنتاج قيمة u_0:

لدينا: $u_0 + u_1 = 30$

ومنه: $u_0 = 30 - u_1 = 30 - 24 = 6$.

2)تبيان أنّ $q = 4$: لدينا: $q = \frac{u_1}{u_0} = \frac{24}{6} = 4$.

كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n:

لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$ ومنه: $\boxed{u_n = 6 \times 4^n}$.

3)اثبات أنّه من أجل كل عدد طبيعي n،

$u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n$:

لدينا: $u_n = 6 \times 4^n$

ومنه: $u_{n+1} = 6 \times 4^{n+1} = 6 \times 4^n \times 4^1$

وعليه: $u_{n+1} - u_n = (24 \times 4^n) - (6 \times 4^n)$

$$= 18 \times 4^n$$

استنتاج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n):

بمـأنّ $u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n > 0$

فإنّ (u_n) **متزايدة تماما.**

4)حساب 4^4: $4^4 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$

التحقّق أنّ العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n) وتعيين رتبته:

نضع: $u_n = 1536$ نجد: $6 \times 4^n = 1536$

ومنه: $4^n = \frac{1536}{6}$

أي: $4^n = 256$

وعليه: $4^n = 4^4$ (لأنّ $4^4 = 256$)

إذن: $\boxed{n = 4}$ ($u_4 = 1536$)

رتبته: 5 لأنّ الحد الأوّل هو u_0.

5)حساب بدلالة n المجموع،

$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$:

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

$$= u_1\left(\frac{1-q^{n-1+1}}{1-q}\right)$$

$$= 24\left(\frac{1-4^n}{1-4}\right)$$

$$= \frac{24}{-3}(1-4^n)$$

$$= -8(1-4^n) = 8(4^n+1)$$

حل التمرين الخامس وعشرون:

(u_n) متتالية عددية معرّفة **على** $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = \frac{2}{5}n - 1$

1)تبيان أنّ المتتالية (u_n) حسابية أساسها $\frac{2}{5}$ يُطلب حساب حدّها الأول u_1:

نُبين أنّ الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت $\frac{2}{5}$

لدينا: $u_n = \frac{2}{5}n - 1$

ومنه: $u_{n+1} = \frac{2}{5}(n+1) - 1$

$$= \frac{2}{5}n + \frac{2}{5} - 1$$

$$= \frac{2}{5}n + \frac{2-5}{5} = \frac{2}{5}n - \frac{3}{5}$$

وعليه: $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{2}{5}n - \frac{3}{5}\right) - \left(\frac{2}{5}n - 1\right)$

$$= \frac{2}{5}n - \frac{3}{5} - \frac{2}{5}n + 1$$

$$= -\frac{3}{5} + 1 = \frac{-3+5}{5} = \frac{2}{5}$$

إذن: المتتالية (u_n) **حسابية** أساسها $\frac{2}{5}$، وحدّها الأول $u_1 = \frac{2}{5}(1) - 1 = \frac{2}{5} - 1 = \frac{2-5}{5} = \frac{-3}{5}$.

2)تعيين رتبة الحد الذي قيمته 575:

نضع: $u_n = 575$ نجد: $\frac{2}{5}n - 1 = 575$

ومنه: $\frac{2}{5}n = 576$

وعليه: $2n = 5(576)$

أي: $2n = 2880$

وبالتالي: $n = \frac{2880}{2} = 1440 \in \mathbb{N}$ ($u_{1440} = 575$)

إذن: رتبة الحد الذي قيمته 575 هي 1440 لأنّ الحد الاوّل هو u_1.

3)حساب قيمة المجموع S حيث،

$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{1440}$:

1)علماً أنّ: $u_0+u_1+u_2=6$، تعيين u_1:

حسب **خاصية الوسط الحسابي** لدينا: $\boxed{u_0+u_2=2u_1}$،

العلاقة $u_0+u_1+u_2=6$

تُصبح: $u_1+2u_1=6$ ومنه: $3u_1=6$

إذن: $\boxed{u_1=\frac{6}{3}=2}$.

2)علماً أنّ: $2u_0-3u_1=-10$، تعيين الحد الأول u_0، ثم استنتاج قيمة r أساس المتتالية (u_n):

$2u_0-3u_1=-10$ تُكافئ $2u_0-3(2)=-10$

ومنه: $2u_0=-10+6$

أي: $2u_0=-4$

إذن: $\boxed{u_0=\frac{-4}{2}=-2}$.

استنتاج قيمة r أساس المتتالية (u_n):

بمــأنّ (u_n) **حسابية**؛ ولدينا: $u_1=2$، $u_0=-2$

فــإنّ $\boxed{r=u_1-u_0=2-(-2)=4}$.

3)كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n:

لدينا: $u_n=u_0+nr$ ومنه: $\boxed{u_n=-2+4n}$.

4)أ) تعيين قيمة n حتى يكون $u_n=2018$:

نضع: $u_n=2018$ نجد: $-2+4n=2018$

ومنه: $4n=2020$

وبالتالي: $\boxed{n=\frac{2020}{4}=505\in\mathbb{N}}$ $(u_{505}=2018)$

ب) حساب الحد الخامس عشر للمتتالية (u_n):

بمــأنّ **الحد الأوّل** هو u_0 فــإنّ **الحد الخامس عشر** هو:

$\boxed{u_{14}=-2+4(14)=54}$.

5)حساب بدلالة n المجموع S_n حيث، $S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n$:

$$S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n$$
$$=(n-0+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$$
$$=(n+1)\left(\frac{-2+(-2+4n)}{2}\right)$$
$$=(n+1)\left(\frac{-4+4n}{2}\right)=(n+1)(2n-2)$$

6)تعيين العدد الطبيعي n حتى يكون، $S_n=96$:

$S_n=96$ معناه: $(n+1)(2n-2)=96$

ومنه: $2n^2-2n+2n-2=96$

وعليه: $2n^2=98$ أي: $n^2=49$

وبالتالي: $n=\sqrt{49}=7$

أو $n=-\sqrt{49}=-7$ (مرفوض)

إذن: $\boxed{n=7}$ ($S_7=96$).

$$S=u_1+u_2+\cdots+u_{1440}$$
$$=(1440-1+1)\left(\frac{u_1+u_{1440}}{2}\right)$$
$$=(1440)\left(\frac{\frac{-3}{5}+575}{2}\right)$$
$$=\frac{1440}{2}\left(\frac{-3}{5}+575\right)$$
$$=720\left(\frac{-3+5(575)}{5}\right)$$
$$=720\left(\frac{-3+2875}{5}\right)$$
$$=720\left(\frac{2872}{5}\right)$$
$$=720(574{,}4)=413568$$

4) (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي:
$v_n=4^{5u_n+6}$.

أ) تبيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_1:

نُبين أنّ حاصل القسمة $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ عدد ثابت

لدينا: $v_n=4^{5u_n+6}$ ومنه: $v_{n+1}=4^{5u_{n+1}+6}$

وبمــأنّ (u_n) **حسابية** فــإنّ $u_{n+1}=u_n+r$

أي: $\boxed{u_{n+1}=u_n+\frac{2}{5}}$.

وعليه: $v_{n+1}=4^{5u_{n+1}+6}$
$$=4^{5\left(u_n+\frac{2}{5}\right)+6}$$
$$=4^{5u_n+2+6}$$
$$=4^{(5u_n+6)+2}=4^{5u_n+6}\times4^2$$

وبالتالي: $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{4^{5u_n+6}\times4^2}{4^{5u_n+6}}=4^2=16$

إذن: (v_n) متتالية **هندسية** أساسها $\boxed{q=16}$، وحدّها الأول $v_1=4^{5u_1+6}=4^{5\left(\frac{-3}{5}\right)+6}=4^{-3+6}=4^3=64$

لأنّها معرّفة على $\mathbb{N}^*$.

ب) حساب بدلالة n المجموع، $S_n=v_1+v_2+\cdots+v_n$:

$$S_n=v_1+v_2+\cdots+v_n$$
$$=v_1\left(\frac{1-q^{n-1+1}}{1-q}\right)$$
$$=64\left(\frac{1-16^n}{1-16}\right)$$
$$=\frac{64}{-15}(1-16^n)=\frac{64}{15}(16^n-1)$$

حل التمرين السادس وعشرون:

(u_n) المتتالية **الحسابية** التي حدّها الأول u_0 وأساسها r.

انتهى بالتوفيق في البكالوريا أستاذ المادة: ب- م يتبع السلسلة الثانية.

سلاسل العبقري في الرياضيات —السلسلة الثانية (التمارين)— المحور: المتاليات العددية

الشعبة: آداب وفلسفة، لغات أجنبية التحضير الجيد لبكالوريا: **2020**

بكالوريات من النظام القديم

التمرين 01:()—بكالوريا 1995.

(u_n)متتالية حسابية معرّفة على $\mathbb{N}$ حيث:

$u_2 = 7$ وَ$u_4 = 12$.

1)عيّن أساس هذه المتتالية وحدّها الأول.

2)عيّن العدد الطبيعي n علماً أنّ:$u_n = 22$.

3)أحسب المجموع

$S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_6$.

التمرين 02:()— بكالوريا 1996.

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) التي حدّها الأول $u_1 = 4$ وأساسها 2.

1)أحسبu_2 وَ u_3.

2)اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3)عيّن قيمة الحد u_{1996}.

4)هل 1416 حد من حدود هذه المتتالية؟

التمرين 03:()— بكالوريا 1997.

(u_n) متتالية حسابية أساسها 3 حيث:

$${u_3}^2 + {u_5}^2 + {u_7}^2 = 579$$

علماً أنّ حدود هذه المتتالية موجبة.

1)احسبu_5ثمu_1، u_3 وَ u_7.

2)اكتب u_n بدلالة n ثم عيّن العدد الطبيعي k بحيث: $u_k = 1996$.

التمرين 04:()— بكالوريا 1998.

(u_n) متتالية حسابية معرّفة على $\mathbb{N}$ حيث:

$u_1 = 4$ وَ $u_3 = 24$.

1)عيّن أساس هذه المتتالية.

2)احسب الحد u_{20} ثم اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3)احسب المجموع $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$.

التمرين 05:()— بكالوريا 1999.

1)(u_n) متتالية حسابية حدّها الأول $u_0 = 1$ وأساسها

2. أ-اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

ب-احسب المجموع:$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

2)(v_n) متتالية هندسية حيث$v_5 = 32$ وَ $v_8 = 256$

أ-عيّن أساس المتتالية وحدّها الأول v_0 ثم اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

ب-احسب المجموع:$S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

3)نعتبر (w_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$w_n = 2^n + 2n + 1$.

احسب المجموع:$S'' = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$.

التمرين 06:()— بكالوريا 2000.

(v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ ومجموع حدودها الثلاثة الأولى v_0، v_1، v_2 يساوي 19.

1)احسب الحدودv_0، v_1، v_2.

2)اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

3)احسب بدلالة n المجموع:

$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$،

ثم استنتج المجموع S_6 (يُعطى الكسر مُختزل).

التمرين 07:()— بكالوريا 2001.

(u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_1 وَ

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = \frac{3}{2} \\ u_1 + 4u_2 - u_3 = 7 \end{cases}.$$

1)عيّن الحدود u_1، u_2، u_3 وَأساسها.
2)اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.
3)احسب المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
4)عيّن قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = -10$.

التمرين 08:()— بكالوريا 2002.

(u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_1.
1)احسب حدّها الثاني u_2 علماً أنّ: $u_1 + u_3 = 12$.
2)احسب حدّها الرابع u_4 علماً أنّ:
$u_3 + u_4 + u_5 = 30$.
3)عيّن أساس هذه المتتالية وحدها الأول u_1.
4)اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n ثم عيّن قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $u_n = 32$.
5)احسب المجموع: $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{15}$.

التمرين 09:()— بكالوريا 2003.

(u_n) متتالية حسابية معرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية غير المعدومة $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = \frac{2}{5}n + \frac{5}{4}$.
1)بيّن أنّ (u_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين حدّها الأول u_1 وأساسها r، استنتج اتجاه تغيّرها.
2)احسب المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
3)عيّن العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 10$.

التمرين 10:()— بكالوريا 2004.

(u_n) متتالية حسابية معرّفة على بحدّها الأول $u_0 = 2$ وبالعلاقة: $u_2 + u_5 = 25$.
1)عيّن أساس المتتالية (u_n).
2)اكتب الحد العام u_n بدلالة n.
3)احسب قيمة الحد الذي رتبته 11.
4)احسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$.

التمرين 11:()— بكالوريا 2005.

(u_n) متتالية حسابية حيث:
$u_0 + u_3 = 18$ وَ $u_2 + u_5 = 34$.
1)احسب الحد الأول u_0 والأساس r لهذه المتتالية.
2)اكتب الحد العام u_n بدلالة n.
3)احسب المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
4)أوجد قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 78$.

التمرين 12:()— بكالوريا 2006.

(v_n) المتتالية الهندسية ذات الحدود الموجبة التي حدّها الأول $v_0 = \frac{1}{2}$ وحدّها الخامس $v_4 = 8$.
1)عيّن أساس هذه المتتالية ثمّ اكتب v_n بدلالة n.
2)اثبت أنّ العدد 2048 حد في المتتالية (v_n).
3)احسب بدلالة n المجموع:
$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.
4)احسب المجموع:
$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2048$.

انتهى بالتوفيق في البكالوريا — أستاذ المادة: ب- م/يتبع الملخص الأوّل حول المتتاليات العددية.

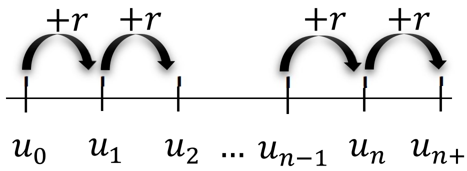
ملخصات العبقري في الرياضيات — الملخص الأوّل— المحور: المتتاليات العددية
الشعبة: آداب وفلسفة، لغات أجنبية — التحضير الجيد لبكالوريا: 2020

انتهى بالتوفيق في البكالوريا — أستاذ المادة: ب- م — يتبع...

ملخصات العبقري في الرياضيات — الملخص الأوّل — المحور: المتتاليات العددية

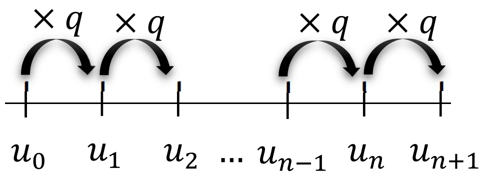
المتتالية (u_n)

حسابية



$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$ حيث r عدد حقيقي
r يسمى **أساس** المتتالية **الحسابية** (u_n).

هندسية



$\boxed{u_{n+1} = qu_n}$ حيث q عدد حقيقي
q يسمى **أساس** المتتالية **الهندسية** (u_n).

كيف نُبين أنّ

حسابية:

الطريقة 01:
نُبين أنّ **الفرق** $u_{n+1} - u_n$ **عدد ثابت** (الأساس)

الطريقة 02:
نكتب u_{n+1} بدلالة u_n **نجد:**
$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$.

هندسية:

الطريقة 01:
نُبين أنّ **الحاصل** $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ **عدد ثابت** (الأساس)

الطريقة 02:
نكتب u_{n+1} بدلالة u_n **نجد:**
$\boxed{u_{n+1} = qu_n}$.

عبارة الحد العام للمتتالية (u_n)

كتابة u_n بدلالة n

هذه العلاقات يُمكن استعمالها وذلك بتعويض u_n بأي حد مُعطى

حسابية:

إذا أُعطي u_0:
$\boxed{u_n = u_0 + nr}$.

إذا أُعطي u_1:
$\boxed{u_n = u_1 + (n-1)r}$.

من أجل عددين طبيعيين n و p:
$\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$.
علاقة تربط بين حدين مختلفين في متتالية حسابية.

هندسية:

إذا أُعطي u_0:
$\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$.

إذا أُعطي u_1:
$\boxed{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$.

من أجل عددين طبيعيين n و p:
$\boxed{u_n = u_p \times q^{n-p}}$.
علاقة تربط بين حدين مختلفين في متتالية هندسية.

مجموع حدود متتابعة من متتالية

حسابية — بصفة عامة:

المجموع $=$ (عدد الحدود) $\left(\frac{\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}}{2}\right)$

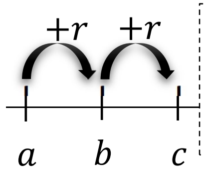
هندسية — بصفة عامة:

المجموع $=$ الحد الأول $\left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}\right)$

عدد الحدود $=$ دليل الحد الأخير $-$ دليل الحد الأوّل $+ 1$

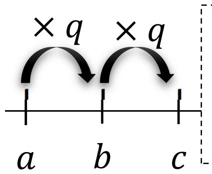
خاصية الوسط

الوسط الحسابي:
تكون a، b و c **ثلاث حدود متتابعة** من متتالية **حسابية** إذا وفقط إذا كان
$\boxed{a + c = 2b}$



$$\begin{cases} a = b - r \\ c = b + r \end{cases}$$

الوسط الهندسي:
تكون a، b و c **ثلاث حدود متتابعة** من متتالية **هندسية** إذا وفقط إذا كان
$\boxed{a \times c = b^2}$



$$\begin{cases} a = \dfrac{b}{q} \\ c = qb \end{cases}$$