ثانوية : هواري بومدين حاسي خليفة	السنة الدراسية :2019/2018
الشعبة : 3 تقني رياضي	المدة : 1سا و30 د

فرض الفصل الثاني في مادة: **الرياضيات**

التمرين الأول :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب $u_1 = e^2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$u_{n+1} = e^{\frac{-1}{2}}\sqrt{u_n}$$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n > \frac{1}{e}$

2) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم ، $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

ب- إستنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

ج-هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟؟؟ إذا كانت متقاربة فما هي نهايتها

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $v_n = \frac{1}{2} + \ln\sqrt{u_n}$

أ- برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، وعين حدها الأول

ب- أكتب v_n بدلالة n ، ثم إستنتج u_n بدلالة n

4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n = \frac{1}{1+\ln u_1} + \frac{1}{1+\ln u_2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{1+\ln u_n}$$

التمرين الثاني :

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي : $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln|x|$

1) أدرس تغيرات الدالة g

2) إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^*$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ ب : $f(x) = 2x - 2 + \frac{\ln|x|}{x}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$. حيث ($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$)

1) أحسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 2x - 2$ مقارب مائل ل (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$

ب- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

4) أحسب $f(-x) + f(x)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟؟؟؟

5) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما 1 والأخر $-0,4 < \alpha < -0,3$

6) أرسم (Δ) والمنحنى (C_f) .

إنتـــــهى **بالتوفيق في شهادة البكالوريا**

1am.ency-education.com

ثانويـــة : بنـي مزليـــــن — السنة الدراسية : 2018 - 2019

الفرض الأول للثلاثي الثاني في مـادة الرياضيـــات

المستـــــوى : 3 تقني رياضياتي — المـــــــدة : ساعتين

التمريـن الأول: 08 نقاط.

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ: $f(x)=1+\sqrt{x-1}$ و ليكن $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ المعطى في الوثيقة المرفقة

(U_n) متتالية معرفة بحدها الأول: $U_0=\frac{5}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1}=f(U_n)$

1)

أ) باستعمال الوثيقة المرافقة مثل على محور الفواصل الحدود: $U_0;U_1;U_2;U_3$

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها

2)

أ) باستعمال البرهان بالتراجع أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1<U_n<2$

ب) أثبت أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

ت) استنتج تقاربها ثم أثبت أن: $lim_{n\to+\infty}U_n=2$

3) نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $V_n=\ln(U_n-1)$

أ) برهن أن (V_n) متتالية هندسية أساسها: $\frac{1}{2}$

ب) أكتب عبارة الحد العام V_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام U_n بدلالة n

ت) أحسب بدلالة n كلا من S_n و T_n حيث: $S_n=V_0+V_1+\cdots+V_n$

$$T_n=(U_0-1)\times(U_1-1)\times\ldots\times(U_n-1)$$

التمريـن الثاني: 04 نقاط.

لتكن (U_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام: $U_n=2(3)^n$ حيث n عدد طبيعي و (V_n) متتالية معرفة بحدها الأول:

$V_0=4$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $V_{n+1}=5V_n+U_n$

1) نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $W_n=\frac{V_n}{U_n}+\frac{1}{2}$

3as.ency-education.com

- أثبت أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول

2) أكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n = 5^{n+1} - 3^n$

3) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 3^n و 5^n على 8

4) عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد v_n على 8

التمرين الثالث: 08 نقاط.

I. من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$

1) تحقق أن: $4 \equiv -3[7]$ ثم بين أن: $A_3 \equiv 6[7]$

2) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n و 3^n على 7

3) بين أنه إذا كان n فرديا فإن $A_n + 1$ يقبل القسمة على 7

- استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{2011} على 7

4) ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{1432} على 7

II. نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب في النظام ذي الأساس 7 كما يلي: $\overline{11\alpha34}$

1) عين قيمة α حتى يكتب n في النظام ذي الاساس 9 كما يلي $\overline{3835}$

2) نضع: $\alpha = 6$:

- أكتب n في النظام ذي الأساس 5
- هل يوجد نظام تعداد a يكتب فيه n كما يلي: $\overline{0203}^a$ ؟

3as.ency-education.com

ثانويةالشهيد مرواني الجيلالي **يوم : 05 فيفري 2019**

المستوي : 3 تر **فرض محروس الاول للفصل الثاني** **المدة : ساعة**

التمرين الاول :

1. نعتبر المعادلة : (E) ..... $21x-17y=8$ حيث x و y عددين طبيعيين

- عين الثنائية $(x_0;y_0)$ حل خاص للمعادلة (E)
- حل في N^2 المعادلة (E)

2. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية 9^n على 13

- بين أنه اذا كان $(\alpha;\beta)$ حل للمعادلة (E) فان : $3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv 0[13]$
- بين أنه إذا كان $(x;y)$ حل للمعادلة (E) و $x\equiv 0[4]$ فان : $y\equiv 0[4]$
- عين $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي يكون من أجلها : $p\gcd(x;y)=4$

التمرين الثاني :

α عدد حقيقي موجب تماما و يختلف عن 1

(u_n) متتالية عددية المعرفة علي N بـ: $u_0=6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\alpha u_n+1$

$I)$ نعرف المتتالية (v_n) كمايلي :من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n+\frac{1}{\alpha-1}$

- بين أن المتتالية (v_n) هندسية اساسها α
- عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n و α .
- عين قيم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها المتتالية (u_n) متقاربة

$II)$ نضع $\alpha=\frac{3}{2}$

- احسب بدلالة n المجموعين : $S_n=v_0+v_1+.....+v_n$ و $T_n=u_0+u_1+.....+u_n$

ency-education.com/exams

الفرض الأول للثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

المستـــوى: 3 ت ر — **المـدة:** $\overline{111100}^{2}$ دقيقة

التمرين الأول :

I. أ. ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد 6^{10} على 11 ؟ علل .

ب. ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد 6^{4} على 5 ؟ علل .

جـ. استنتج أن $6^{40}\equiv 1[11]$ و أن $6^{40}\equiv 1[5]$.

د. بين أن $6^{40}-1$ يقبل القسمة على 55 .

II. x و y عددان صحيحان .

أ. بين أن المعادلة التالية ليس لها حلول : $(E)\cdots 65x-40y=1$.

ب. بين أن المعادلة التالية تقبل على الأقل حلا : $(E')\cdots 17x-40y=1$.

ج. عين باستعمال خوارزمية إقليدس حلا خاصا للمعادلة (E') .

د. حل المعادلة (E') و استنتج وجود عدد طبيعي وحيد x_0 أصغر من 40 حيث : $17x_0\equiv 1[40]$.

III. من أجل كل عدد طبيعي a ، بين أنه إذا كان : $a^{17}\equiv b[55]$ و $a^{40}\equiv 1[55]$ فإن : $b^{33}\equiv 1[55]$.

التمرين الثاني :

1. حل في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x',y') : $9x'-14y'=13$ علما أن $(3,1)$ حلا لها .

2. نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x,y) : $45x-28y=130$.

➢ بين أنه إذا كان (x,y) حلا لهذه المعادلة فإن x مضاعف للعدد 2 و y مضاعف للعدد 5 ، ثم حل هذه المعادلة .

3. N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\alpha\alpha 3}$ في نظام تعداد أساسه 9 و $\overline{5\beta\beta 6}$ في نظام تعداد أساسه 7 .

➢ عين α و β ، ثم اكتب N في النظام العشري .

بالتوفيـق

3as.ency-education.com

مديرية التربية لولاية تيزي وزو — السنة الدراسية:2019/2018

ثانوية بوجيمع — القسم 3 ت ر

فرض محروس رقم 1 للفصل الثاني

التمرين الأول:

1. لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ب : $u_0=\frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1}=1+\sqrt{u_n-1}$

أ. برهن بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي n فان : $1<u_n<2$

ب .أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة واستنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة نحو نهاية يطلب تعيينها.

2. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ب: $v_n=\ln(u_n-1)$

أ. اثبت ان المتتالية (v_n) هندسية اساسها q و حدها الاول v_0 .

ب. اكتب v_n بدلالة n و استنتج عبارة u_n بدلالة n . ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ من جديد

ج. أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=v_0+v_1+.....+v_n$

د. استنتج حساب الجداء P_n حيث: $P_n=(u_0-1)(u_1-1).....(u_n-1)$

التمرين الثاني:

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $(E).....5x-6y=3$

1) أ) بين أن إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : x مضاعف ل 3.

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

جـ) استنتج حلول الجملة (S) : $\begin{cases}x\equiv -1[6]\\x\equiv -4[5]\end{cases}$.

2) a و b عددان طبيعيان حيث : $a=\overline{1\alpha0\alpha00}$ في النظام ذي الأساس 3 و $b=\overline{\alpha\beta0\alpha}$ في النظام ذي الأساس 5.

- عين α و β حتى تكون الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة (E).

انتهى — بالتوفيق للجميع

ency-education.com/exams

3as.ency-education.com

الحل : 1) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب : $u_0=\frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1}=1+\sqrt{u_n-1}$

أ. برهان بالتراجع أن : من اجل كل عدد طبيعي n : $1<u_n<2$ نسمي $P(n)$ الخاصية : من اجل كل عدد طبيعي n : $1<u_n<2$

*) نتأكد من صحة $P(0)$: لدينا: $u_0=\frac{3}{2}$ منه: $1<u_0<2$ أي: $P(0)$ صحيحة

) نفرض صحة $P(n)$ أي أن: $1<u_n<2$ *) نبرهن صحة $P(n+1)$ أي أن: $1<u_{n+1}<2$

لدينا: $1<u_n<2$ منه : $1-1<u_n-1<2-1$ أي: $0<u_n-1<1$ منه: $\sqrt{0}<\sqrt{u_n-1}<\sqrt{1}$ اذن: $0+1<\sqrt{u_n-1}+1<1+1$

منه : $1<u_{n+1}<2$ أي: $P(n+1)$ صحيحة إذن: من اجل كل عدد طبيعي n : $1<u_n<2$

ب .إثبات أن المتتالية (u_n) متزايدة

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\sqrt{u_n-1}+1-u_n=\sqrt{u_n-1}-(u_n-1)=\frac{\left(\sqrt{u_n-1}\right)^2-(1-u_n)^2}{\sqrt{u_n-1}+(u_n-1)}=\frac{-u_n^2+3u_n-2}{\sqrt{u_n-1}+(u_n-1)}$

لدينا: $\sqrt{u_n-1}>0$ و $u_n-1>0$ منه: $\sqrt{u_n-1}+u_n-1>0$ منه : اشارة $u_{n+1}-u_n$ هي نفس اشارة $-u_n^2+3u_n-2$

- دراسة اشارة $-x^2+3x-2$ *) حساب المميز: $\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times(-1)(-2)=1$

$\Delta>0$ منه لكثير الحدود جذران هما: $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3-1}{-2}=2$ و $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3+1}{-2}=1$

جدول اشارة $-x^2+3x-2$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$-x^2+3x-2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

بما أن: $1<u_n<2$

فإن: $u_{n+1}-u_n>0$ منه : المتتالية (u_n) متزايدة

*) استنتاج ان المتتالية (u_n) متقاربة نحو نهاية يطلب تعيينها.

بما أن: المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 2 فإنها متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n=\ln(u_n-1)$

أ) اثبات ان المتتالية (v_n) هندسية اساسها q و حدها الاول v_0 .

لدينا: $v_{n+1}=\ln(u_{n+1}-1)=\ln\left(\sqrt{u_n-1}+1-1\right)=\ln\left(\sqrt{u_n-1}\right)=\frac{1}{2}\ln(u_n-1)=\frac{1}{2}v_n$

منه: (v_n) متتالية هندسية اساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدها الأول: $v_0=\ln(u_0-1)=\ln\left(\frac{3}{2}-1\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2$

ب)كتابة v_n بدلالة n : لدينا: (v_n) متتالية هندسية حدها الأول v_0 منه: $v_n=v_0q^n=-\ln 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

**) استنتاج عبارة u_n بدلالة n : لدينا : $v_n=\ln(u_n-1)$ منه: $e^{v_n}=u_n-1$ اذن: $u_n=e^{v_n}+1=e^{-\ln 2\left(\frac{1}{2}\right)^n}+1$

***)حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ من جديد : لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e^{-\ln 2\left(\frac{1}{2}\right)^n}+1\right)=1+1=2$

لأن: $q=\frac{1}{2}<1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e^{-\ln 2\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right)=e^0=1$

ج. حساب المجموع S_n حيث: $S_n=v_0+v_1+.....+v_n$

$$S_n=v_0+v_1+....v_n=v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=-\ln 2\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=-2\ln 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

3as.ency-education.com

د. استنتاج حساب الجداء P_n حيث: $P_n=(u_0-1)(u_1-1).....(u_n-1)$

لدينا: $P_n=(u_0-1)(u_1-1).....(u_n-1)=\left(e^{v_0}+1-1\right)\left(e^{v_1}+1-1\right).....\left(e^{v_n}+1-1\right)$

منه: $P_n=\left(e^{v_0}\right)\left(e^{v_1}\right).....\left(e^{v_n}\right)=e^{v_0+v_1+....+v_n}=e^{S_n}$

التمرين الثاني: نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $5x-6y=3.....(E)$

1) أ) بيان أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : x مضاعف ل 3.

لدينا: $5x-6y=3$ تكافئ $5x=6y+3$ تكافئ $5x=3(2y+1)$

لدينا: 3 يقسم $5x$ و 3 و5 أوليان فيما بينهما منه: 3 يقسم x (حسب مبرهنة قوص) و بالتالي : x مضاعف 3

ب) استنتاج حلا خاصا للمعادلة (E) : بفرض $x=3$ نجد : $y=\frac{5\times3-3}{6}=2$ اذن: $(3;2)$ حلا خاصا للمعادلة (E)

حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E). لدينا: $\begin{cases}5x-6y=3\\5\times3-6\times2=3\end{cases}$ بالطرح طرف لطرف نجد : $5(x-3)=6(y-2)$ (*)

و لدينا: 6 يقسم $5(x-3)$ و 6 و5 أوليان فيما بينهما منه حسب قوص 6 يقسم $x-3$ اذن: $x-3=6k;k\in\mathbb{Z}$ ومنه: $x=6k+3$

بالتعويض في (*) نجد : $5\times6k=6(y-2)$ اذن : $y=5k+2$ و بالتالي: $S=\{(6k+3;5k+2);k\in\mathbb{Z}\}$

جـ) استنتاج حلول الجملة (S) : $\begin{cases}x\equiv-1[6]\\x\equiv-4[5]\end{cases}$.

$\begin{cases}x\equiv-1[6]\\x\equiv-4[5]\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}x=6m-1\\x=5n-4\end{cases}$ أي: $\begin{cases}x\equiv-1[6]\\x\equiv-4[5]\end{cases}$ اذن: $6m-1=5n-4$ و بالتالي: $5n-6m=3$ ومنه: $n=6k+3$

ينتج: $n=6k+3$ ومنه: $x=5(6k+3)-4=30k+11;k\in\mathbb{Z}$

2) a و b عددان طبيعيان حيث : $a=\overline{1\alpha0\alpha00}$ في النظام ذي الأساس 3 و $b=\overline{\alpha\beta0\alpha}$ في النظام ذي الأساس 5.

ـ تعيين α و β حتى تكون الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة (E).

لدينا: $a=\overline{1\alpha0\alpha00}^{3}=1\times3^5+\alpha\times3^4+\alpha\times3^2=243+81\alpha+9\alpha=90\alpha+243$

و لدينا: $b=\overline{\alpha\beta0\alpha}^{5}=\alpha\times5^3+\beta\times5^2+\alpha\times5^0=125\alpha+25\beta+\alpha=126\alpha+25\beta$ مع: $\alpha\le2$ و $\beta\le4$

بما أن : الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة (E) منه : $5a-6b=3$ و بالتالي: $5(90\alpha+243)-6(126\alpha+25\beta)=3$ ينتج:

$1215+450\alpha-756\alpha-150\beta=3$ اذن: $-306\alpha-150\beta=-1212$ بالتقسيم على -3 نجد : $102\alpha+50\beta=404$

و بالتالي: $(\alpha;\beta)=(2;4)$ حل للمعادلة.

3as.ency-education.com

فرض الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

تمرين 1 (10 ن)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}$.

1) أ- أحسب u_1 ، u_2 و u_3 ، ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \succ 1$.

ب – بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

جـ - استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم أحسب نهايتها .

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n^2 - 1$.

أ- بين انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2v_{n+1} = v_n$.

ب- استنتج أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0.

جـ - أكتب بدلالة n ، كلا من v_n و u_n ، ثم أحسب من جديد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) أحسب بدلالة n كلا من S_n و T_n حيث :

$$S_n = u_0^2 + u_1^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n^2$$
$$T_n = v_0 + 2v_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2^n v_n$$

تمرين 2 (10 ن) :

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلتين $(E): 2019x - 1440y = 282$ و $(E'): 673x - 480y = 94$.

1) بين أن العدد 673 أولي .

2) بين أن للمعادلتين (E) و (E') نفس الحلول في مجموعة الحلول $\mathbb{Z}^2$.

3) عين الثنائية $(x_0; y_0)$ من $\mathbb{Z}^2$ الحل الخاص للمعادلة (E') حيث : $x_0 - y_0 = 1$ ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E').

4) علما أن الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (E') ، عين القيم الممكنة لـ $PGCD(x; y)$.

5) عين الثنائيات $(x; y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (E') ، بحيث $PGCD(x; y) = 47$.

6) n عدد طبيعي باقي قسمته على 480 هو 152 وباقي قسمته على 673 هو 58 .

- عين قيم n ، ثم استنتج أصغر قيمة ممكنة له .

بالتوفيق .

ency-education.com
3as.ency-education.com

الاجابة النموذجية :

تمرين 1 :

1) لنا : $u_0=3$ ، $u_{n+1}=\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}$

أ- حساب الحدود :

$u_1=\sqrt{\frac{1+u_0^2}{2}}=\sqrt{\frac{1+3^2}{2}}=\sqrt{5}$ و $u_2=\sqrt{\frac{1+u_1^2}{2}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}^2}{2}}=\sqrt{3}$ و $u_3=\sqrt{\frac{1+u_2^2}{2}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}^2}{2}}=\sqrt{2}$

☜ البرهان بالتراجع :

من اجل $n=0$: $u_0=3\succ 1$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من اجل n ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$

لنا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\succ 1$ تكافئ : $u_n^2\succ 1$ تكافئ : $\frac{1+u_n^2}{2}\succ\frac{2}{2}$ تكافئ : $\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}\succ 1$ تكافئ : $u_{n+1}\succ 1$.

بما ان الخاصية صحيحة من اجل $n+1$ فهي صحيحة من أجل n وذلك حسب البرهان بالتراجع .

ب- بيان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\square$:

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}-u_n=\frac{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}-u_n\right)\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}+u_n\right)}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}+u_n\right)}=\frac{\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}^2-u_n^2}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}+u_n\right)}=\frac{\frac{1+u_n^2}{2}-u_n^2}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}+u_n\right)}=$$

$$\frac{\frac{1+u_n^2-2u_n^2}{2}}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}+u_n\right)}=\frac{\frac{1-u_n^2}{2}}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}+u_n\right)}=\frac{1-u_n^2}{2\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}+u_n\right)}$$

لنا $u_n\succ 1$ تكافئ : $u_n^2\succ 1$ تكافئ : $-u_n^2\prec -1$ تكافئ : $1-u_n^2\prec 0$

ولنا : $2\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}+u_n\right)$ ومنه : $u_{n+1}-u_n\prec 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\square$.

جـ- استنتاج ان (u_n) متقاربة : المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي متقاربة .

☜ حساب النهاية :

بما أن المتتالية (u_n) متقاربة فان : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$

ومنه : $l=\sqrt{\frac{1+l^2}{2}}$ تكافئ : $\frac{1+l^2}{2}=l^2$ مع $l\geq 0$ تكافئ : $1+l^2=2l^2$ تكافئ : $l^2=1$

تكافئ : $l=1$ (مقبول) أو $l=-1$ (مرفوض). ومنه : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\square$ بـ: $v_n=u_n^2-1$.

أ- بيان انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2v_{n+1}=v_n$.

☜ من اجل $n=0$: لدينا : $v_0=u_0^2-1=3^2-1=8$ ولنا : $v_1=u_1^2-1=\sqrt{5}^2-1=4$ ومنه : $2v_1=v_0$.

☜ نفرض أن الخاصية صحيحة من اجل n ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي نبرهن أنه : $2v_{n+2}=v_{n+1}$)

لنا من أجل كل عدد طبيعي n : $2v_{n+1}=2\left(u_{n+1}^2-1\right)=2\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}^2-1\right)=2\left(\frac{1+u_n^2-2}{2}\right)=u_n^2-1=v_{n+1}$

3as.ency-education.com

بما ان الخاصية صحيحة من اجل $n+1$ فهي صحيحة من أجل n وذلك حسب البرهان بالتراجع .

ب- استنتاج أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 :

لنا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $2v_{n+1}=v_n$ تكافئ : $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$.

حساب v_0 : $v_0=u_0^2-1=3^2-1=8$

جـ-كتابة v_n بدلالة n : $v_n=v_0\times q^n=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

و كتابة u_n بدلالة n : لدينا $v_n=u_n^2-1$ تكافئ : $u_n^2=v_n+1$ تكافئ : $u_n=\sqrt{v_n+1}=\sqrt{8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}$.

☜ حساب النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}=\sqrt{0+1}=1$

3) حساب المجموع :

$$\begin{aligned}S_n&=u_0^2+u_1^2+.....+u_n^2\\&=v_0+1+v_1+1+.....+v_n+1\\&=v_0+v_1+...+v_n+1+1+...+1\\&=8\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{1}{2}}+1\times(n-0+1)\\&=8\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}=16\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)+n+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_n&=v_0+2v_1+.....+2^nv_n\\&=2^0v_0+2v_1+.....+2^nv_n\\&=2^0\times8+2\times8\times\frac{1}{2}+.....+2^n\times8\times\frac{1}{2^n}\\&=8+8+....+8\\&=8\times(n-0+1)\\&=8n+8\end{aligned}$$

تمرين 2 :

1) بين أن العدد 673 أولي : $\sqrt{673}\approx25,94$.

العدد 673 يقبل القسمة على	2	3	5	7	11	13	17	19	23
	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا

ومنه العدد 673 أولي.

2) بيان أن للمعادلتين $(E):2019x-1140y=282$ و $(E'):673x-480y=94$ نفس الحلول في مجموعة الحلول ^{2}:

$$\begin{aligned}2019&=1440\times1+579\\1440&=579\times2+282\\579&=282\times2+15\\282&=15\times18+12\\15&=12\times1+3\\12&=3\times4+0\end{aligned}$$

$$PGCD(2019;1440)=3 \Longleftarrow$$

لنا : 3 يقسم العدد 2019 وبالتالي يقسم $2019x$ و 3 يقسم العدد 1440 وبالتالي يقسم $1440y$ ومنه 3 يقسم $2019x-1440y$ وبالتالي 3 يقسم 282 لذلك عند قسمة أطراف المعادلة على 3 تصبح المعادلة (E) مكافئة للمعادلة (E').

ency-education.com/exams

3) تعين الثنائية $(x_0;y_0)$ من $\mathbb{Z}^2$ الحل الخاص للمعادلة (E') حيث : $x_0-y_0=1$.

لنا $x_0-y_0=1$ تكافئ : $y_0=x_0-1$

بالتعويض نجد : $673x_0-480(x_0-1)=94$ تكافئ : $673x_0-480x_0+480=94$ تكافئ : $193x_0=-386$ ومنه

$x_0=-2$ أي : $y_0=-3$

☜ تعيين حلول المعادلة (E'):

$673(x+2)=480(y+3)$ نكافئ : $673(x+2)-480(y+3)=0$ تكافئ : $\begin{cases}673x-480y=94\\673(-2)-480(-3)=94\end{cases}$

لنا 673 يقسم $480(y+3)$ ولكن 673 اولي مع 480 أي حسب مبرهنة غوص 673 يقسم $y+3$ ومنه $y+3=673k$ مع $k\in\mathbb{Z}$ ومنه : $y=673k-3$ مع $k\in\mathbb{Z}$. و بالتعويض: $673x-480(673k-3)=94$ ومنه : $x=480k-2$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

ومنه حلول المعادلة (E') في $\mathbb{Z}^2$ هي من الشكل : $(480k-2;673k-3)$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

- تعين القيم الممكنة لـ $PGCD(x;y)$ ، علما أن الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E') : نضع $PGCD(x;y)=d$

لنا : d يقسم العدد 673 وبالتالي يقسم $673x$ و d يقسم العدد 480 وبالتالي يقسم $480y$ ومنه d يقسم $673x-480y$

وبالتالي d يقسم 94 لذلك d من قواسم العدد 94 ولنا $94=2\times47$ ومنه القيم الممكنة له : $d\in\{1;2;47;94\}$

☜ تعين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (E') ، بحيث $PGCD(x;y)=47$:

$\begin{cases}10k\equiv2[47]\\15k\equiv3[47]\end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases}480k\equiv2[47]\\673k\equiv3[47]\end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases}480k-2\equiv0[47]\\673k-3\equiv0[47]\end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases}x\equiv0[47]\\y\equiv0[47]\end{cases}$

تكافئ : $25k\equiv5[47]$ (5 اولي مع 47) تكافئ : $5k\equiv1[47]$ تكافئ : $5k\equiv1+47\times2[47]$ تكافئ : $5k\equiv95[47]$ تكافئ :

$k\equiv19[47]$ ومنه $k=47q+19$ مع $q\in\mathbb{Z}$ ومنه : $\begin{cases}x=480(47q+19)-2\\y=673(47q+19)-3\end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases}x=22560q+9118\\y=31631q+12784\end{cases}$

ومنه الثنائيات $(x;y)$ التي نبحث عنها من الشكل : $(22560q+9118;31631q+12784)$ مع $q\in\mathbb{Z}$

4) <u>طريقة 1 :</u> لنا : $\begin{cases}n=480q'+152\\n=673q''+58\end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases}n-152=480q'\\n-52=673q''\end{cases}$ بالفرق نجد : $94=673q''-480q'$

معناه : $\begin{cases}q''=x=480k-2\\q'=y=673k-3\end{cases}$ بالتعويض نجد : $n=323040k-1288$ مع $k\in\mathbb{Z}^*$

<u>طريقة 2 :</u> لنا : $\begin{cases}n\equiv152[480]\\n\equiv58[673]\end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases}673n\equiv102296[323040]\\480n\equiv27840[323040]\end{cases}$ تكافئ : $193n\equiv74840[323040]$ تكافئ :

$193n\equiv176144-323040[323040]$ تكافئ : $n\equiv1288[323040]$ تكافئ : $n=323040k-1288$ مع $k\in\mathbb{Z}^*$

☜ تعيين اصغر قيمة له كي يكون n عدد طبيعيا :

$n\geq0$ تكافئ : $323040k-1288\geq0$ تكافئ : $k\geq\frac{1288}{323040}\approx0.003$ أي بأخذ $k=1$ نجد : $n=321752$

3as.ency-education.com