الرياضيات

شعبة رياضي و تقني رياضي

الموافقات - القواسم - المضاعفات - التعداد

الأستاذ عبد الحميد بوقطوف
05 56 24 69 06

﴿ هذه التمارين مقترحة من دورات البكالوريا من 2008 إلى 2015 ﴾

● **التمرين 1:** ﴿ دورة جوان 2008 - شعبة رياضيات - الموضوع الأول ﴾

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $3x - 21y = 78$.

1) أ- بين أن (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.
ب- أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x, y) من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E)، فإن: $x \equiv 5[7]$.

2) أ- أدرس، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7.
ب- عين الثنائيات (x, y) من $\mathbb{N}^2$ التي هي حلول للمعادلة (E)، وتحقق: $5^x + 5^y \equiv 3[7]$.

● **التمرين 2:** ﴿ دورة جوان 2008 - شعبة تقني رياضي - الموضوع الأول ﴾

n عدد طبيعي أكبر من 5.

1) a و b عددان طبيعيان حيث: $a = n - 2$ و $b = 2n + 3$.

أ- ماهي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b؟
ب- بين أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n + 5$ مضاعفا للعدد 7.
جـ- عين قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a\,;b) = 7$.

2) نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث: $p = 2n^2 - 7n - 15$ و $q = n^2 - 7n + 10$.

أ- بين أن كل من العددين p و q يقبل القسمة على $n - 5$.
ب- عين تبعا لقيم n وبدلالة n، $PGCD(p\,;q)$.

● **التمرين 3:** ﴿ دورة جوان 2008 - شعبة تقني رياضي - الموضوع الثاني ﴾

نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y التالية: (I) ... $4x - 9y = 319$

1) - تأكد أن الثنائية $(82\,, 1)$ حل للمعادلة (I).
- حل المعادلة (I).

2) عين الثنائيات $(a\,, b)$ الصحيحة، حلول المعادلة: (II) ... $4a^2 - 9b^2 = 319$

3) استنتج الثنائيات $(x_0\,, y_0)$ حلول المعادلة (I) بحيث x_0 و y_0 مربعين تامين.

● **التمرين 4:** ﴿ دورة جوان 2009 - شعبة رياضيات - الموضوع الأول ﴾

x عدد طبيعي أكبر من 1 و y عدد طبيعي.

A عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس x بالشكل: $A = \overline{5566}$.

نجاح.. إلتزام.. تخطيط

1) أ- أنشر العبارة: $(5x^2+6)(x+1)$، ثم أوجد علاقة تربط بين x و y إذا علمت أن:

$$A=(5x^2+6)(2+2y)$$

ب- أحسب x و y إذا علمت أن x عدد أولي أصغر من 12، ثم أكتب تبعا لذلك العدد A في نظام التعداد العشري.

2) أ- عين الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584.

ب- عين الأعداد الطبيعية a و b حيث $a>b$ التي تحقق:

$$\begin{cases} a+b=32 \\ a^2+b^2=584 \end{cases}$$

● **التمرين 5:** « دورة جوان 2010 - شعبة رياضيات - الموضوع الأول »

1) نعتبر المعادلة: $(1)\ ...\ 7x+65y=2009$. حيث x و y عددان صحيحان.

أ- بين أنه إذا كانت الثنائية $(x\,,y)$ حلا للمعادلة (1) فإن y مضاعف للعدد 7.

ب- حل المعادلة (1).

2) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9.

3) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يقبل العدد: $2^{6n}+3n+2$ القسمة على 9.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=2^{6n}-1$.

أ- تحقق أن u_n يقبل القسمة على 9.

ب- حل المعادلة: $(2)\ ...\ (7u_1)x+(u_2)y=126567$ ذات المجهول $(x\,,y)$،

حيث x و y عددان صحيحان.

جـ- عين الثنائية $(x_0\,,y_0)$ حل المعادلة (2)، حيث x_0 و y_0 عددان طبيعيان مع: $y_0\geq 25$.

● **التمرين 6:** « دورة جوان 2010 - شعبة رياضيات - الموضوع الثاني »

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد: $3^{3n}-1$ يقبل القسمة على 13.

2) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، كل من العددين: $3^{3n+1}-3$ و $3^{3n+2}-9$ يقبل القسمة على 13.

3) عين، حسب قيم n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13، واستنتج باقي قسمة 2005^{2010} على 13.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي p: $A_p=3^p+3^{2p}+3^{3p}$.

أ- من أجل: $p=3n$، عين باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13.

ب- برهن أنه إذا كان: $p=3n+1$، فإن A_p يقبل القسمة على 13.

جـ- عين باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13 من أجل: $p=3n+2$.

5) يكتب العددان الطبيعيان a و b في نظام العد ذي الأساس 3 كما يلي:

$a=\overline{1001001000}$ و $b=\overline{1000100010000}$

أ- تحقق أن العددين a و b يكتبان على الشكل A_p في النظام العشري.

ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 13.

● **التمرين 7:** « دورة جوان 2010 - شعبة تقني رياضي - الموضوع الأول »

نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب في نظام العد ذي الأساس 7 كما يلي:

$n = \overline{11\alpha 00}$، حيث α عدد طبيعي.

1) **عين α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3.**

2) **عين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5.**
- استنتج قيمة α التي تجعل n قابلا للقسمة على 15.

3) **نأخذ: $\alpha = 4$.**
- أكتب العدد n في النظام العشري.

● **التمرين 8:** « دورة جوان 2010 - شعبة تقني رياضي - الموضوع الثاني »

1) **عين حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 10^n على 13.**

2) **تحقق أن: $(10^{2008})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 0[13]$.**

3) **عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0[13]$.**

● **التمرين 9:** « دورة جوان 2011 - شعبة رياضيات - الموضوع الثاني »

1) **نعتبر المعادلة: $13x - 7y = -1 \ldots (E)$ حيث x و y عددان صحيحان.**
- حل المعادلة (E).

2) **عين الأعداد الصحيحة النسبية a بحيث:**

$$\begin{cases} a \equiv -1[7] \\ a \equiv 0[13] \end{cases}$$

3) **أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على كل من 7 و 13.**

4) **ليكن العدد الطبيعي b المكتوب في نظام التعداد ذي الأساس 9، كما يلي: $\overline{\alpha 00\beta 086}$.**
حيث α و β عددان طبيعيان، مع: $\alpha \neq 0$.
- عين α و β حتى يكون b قابلا للقسمة على 91.

● **التمرين 10:** « دورة جوان 2011 - شعبة تقني رياضي - الموضوع الأول »

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1) **المعادلة: $21x + 14y = 40$ لا تقبل حلولا في مجموعة الأعداد الصحيحة.**

2) **في نظام التعداد ذي الأساس 7، يكون: $\overline{3421} + \overline{1562} = \overline{5413}$.**

3) **باقي القسمة الإقليدية للعدد: $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{2011}$ على 7 هو 6.**

4) **الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.**

أ- المستوي (ρ) الذي معادلته: $2x+y-z+1=0$ والمستقيم (d) الذي يشمل النقطة $A(2\,;1\,;-1)$ و $\vec{u}(1\,;-1\,;1)$ شعاع توجيهه لا يشتركان في أية نقطة.

ب- معادلة المستوي (Q) الذي يشمل مبدأ المعلم O ويوازي المستوي (ρ) هي:

$$x-y+z=0$$

● التمرين 11: « دورة جوان 2011 - شعبة تقني رياضي - الموضوع الثاني »

من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $A_n=2^n+3^n+4^n+5^n+6^n$.

1) تحقق أن: $-3[7]\equiv 4$ ثم بين أن: $A_3\equiv 6[7]$.

2) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2^n و 3^n على 7.

3) بين أنه إذا كان n فرديا فإن: A_n+1 يقبل القسمة على 7، واستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{2011} على 7.

4) ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{1432} على 7.

● التمرين 12: « دورة جوان 2012 - شعبة رياضيات - الموضوع الأول »

1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x\,;y)$ التالية: $2011x-1432y=31\ldots(1)$.

أ- أثبت أن العدد 2011 أولي.

ب- باستعمال خوارزمية إقليدس، عين حلا خاصا $(x_0\,;y_0)$ للمعادلة (1)، ثم حل المعادلة (1).

2) أ- عين، حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7، ثم جد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7.

ب- عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون:

$$2010^n+2011^n+1432^n\equiv 0[7]$$

3) N عدد طبيعي يكتب: $\overline{2\gamma\alpha\beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 9 حيث α، β و γ بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما و $(\beta\,;\gamma)$ حل للمعادلة (1).

- عين α، β و γ، ثم اكتب N في النظام العشري.

● التمرين 13: « دورة جوان 2012 - شعبة تقني رياضي - الموضوع الأول »

1) أدرس، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي قسمة 9^n على 11.

2) ما هو باقي قسمة العدد 2011^{2012} على 11؟

3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد:
$(4\times 9^{15n+1}+4\times 2011^{10n}+2011^{2012})$ يقبل القسمة على 11.

4) عين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد:
$(2011^{2012}+2n+2)$ مضاعفا للعدد 11.

● التمرين 14: « دورة جوان 2012 - شعبة تقني رياضي - الموضوع الثاني »

نسمي (S) الجملة التالية:

$$\begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases}$$

حيث x عدد صحيح $(x \in \mathbb{Z})$.

1) **بين أن العدد 153 حل للجملة (S).**

2) **إذا كان x_0 حلا لـ (S)، بين أن: $\big(x$ حل لـ $(S)\big)$ يكافئ $\left(\begin{cases} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{cases}\right)$.**

3) **حل الجملة (S).**

4) **يريد مكتبي وضع عدد من الكتب في علب، فإذا استعمل علبا تتسع لـ 15 كتابا بقي لديه 3 كتب، وإذا استعمل علبا تتسع لـ 7 كتب بقي لديه 6 كتب.**
- إذا علمت أن عدد الكتب التي بحوزته محصور بين 500 و 600 كتابا، ما عدد هذه الكتب؟

● التمرين 15: « دورة جوان 2013 - شعبة رياضيات - الموضوع الأول »

1) **n عدد طبيعي، نعتبر العددين الصحيحين α و β، حيث:**

$$\beta = n + 3 \text{ و } \alpha = 2n^3 - 14n + 2$$

أ- بين أن: $PGCD(\alpha\,;\beta) = PGCD(\beta\,;10)$. (يرمز $PGCD$ إلى القاسم المشترك الأكبر)
ب- ماهي القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha\,;\beta)$؟
جـ- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n، بحيث يكون: $PGCD(\alpha\,;\beta) = 5$.

2) **أ- أدرس، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11.**
ب- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية:

$$\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[10] \end{cases}$$

● التمرين 16: « دورة جوان 2013 - شعبة رياضيات - الموضوع الثاني »

1) **أ- عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق: $2n + 27 \equiv 0[n+1]$.**
ب- عين الثنائيات $(a\,;b)$ من الأعداد الطبيعية، حيث: $(b-a)(a+b) = 24$.
جـ- استنتج طريقة لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$.

2) **α و β عددان طبيعيان مكتوبان في النظام دي الأساس 5 على الشكل:**

$$\beta = \overline{3403} \text{ و } \alpha = \overline{10141}$$

أ- أكتب العددين α و β في النظام العشري.
ب- عين الثنائية $(a\,;b)$ من الأعداد الطبيعية حيث:

$$\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ \alpha a - \beta b = 9 \end{cases}$$

3) أ- عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 2013 و 1434، ثم استنتج القاسم المشترك للعددين 671 و 478.
ب- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x\,;y)$ التالية: $2013x - 1434y = 27$.

● التمرين 17: ﴿ دورة جوان 2013 - شعبة تقني رياضي - الموضوع الثاني ﴾

x و y عددان صحيحان و (E) المعادلة ذات المجهول $(x\,;y)$ التالية: $11x + 7y = 1$.

1) أ- عين الثنائية $(x_0\,;y_0)$، حل المعادلة (E) التي تحقق: $x_0 + y_0 = -1$.
ب- استنتج حلول المعادلة (E).

2) a و b عددان طبيعيان و S العدد الذي يحقق:

$$\begin{cases} S = 11a + 1 \\ S = 7b + 2 \end{cases}$$

أ- بين أن $(a\,;-b)$ حل للمعادلة (E).
ب- ماهو باقي القسمة الإقليدية للعدد S على 77؟

3) n عدد طبيعي باقي قسمته 11 على هو 1 وباقي قسمته على 7 هو 2.
- عين أكبر قيمة للعدد n حتى يكون $n < 2013$.

● التمرين 18: ﴿ دورة جوان 2014 - شعبة رياضيات - الموضوع الأول ﴾

1) نعتبر المعادلة (E): $2013x - 1962y = 54$ حيث x و y عددان صحيحان.

أ- أحسب $PGCD(2013\,;1962)$.
ب- استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولا.
جـ- بين أنه إذا كانت الثنائية $(x\,;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن: $x \equiv 0[6]$.
د- استنتج حلا خاصا $(x_0\,;y_0)$ حيث $74 < x_0 < 80$ ثم حل المعادلة (E).

2) نرمز بالرمز d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x\,;y)$ حل للمعادلة (E).

أ- ماهي القيم الممكنة للعدد d؟
ب- عين قيم العددين الطبيعيين a و b حيث:

$$PGCD(a\,;b) = 18 \text{ و } 671a - 654b = 18$$

● التمرين 19: ﴿ دورة جوان 2014 - شعبة تقني رياضي - الموضوع الثاني ﴾

n و p عددان طبيعيان.

1) أدرس، حسب قيم n، بواقي القسمة الإقليدية على 16 للعدد 5^n.

2) نضع: $C_n = 16n + 9$ و $D_p = 5^p$.

أ- بين أنه إذا كان $p = 4k + 2$ حيث k عدد طبيعي، فإنه يوجد عدد طبيعي n يحقق:

$$C_n = D_p$$

ب- عين n من أجل $p = 6$.

تخطيط.. إلتزام.. نجاح

التمرين 20: ﴿ دورة جوان 2015 - شعبة رياضيات - الموضوع الأول ﴾

1) أ- عين حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.
ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $[1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53}]$ على 7.

2) أ- بين أن 89 عدد أولي.
ب- عين كل القواسم الطبيعية للعدد 7832.
جـ- بين أن العددين 981 و 977 أوليان فيما بينهما.

3) x و y عددان طبيعيان غير معدومين قاسمهما المشترك الأكبر هو 2.
- عين x و y علما أن:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8[22] \end{cases}$$

4) a، b و c أعداد طبيعية غير معدومة حيث a أولي مع b و a أولي مع c.
أ- باستعمال مبرهنة بيزو، برهن أن a أولي مع $b \times c$.
ب- باستعمال الإستدلال بالتراجع، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:
$PGCD(a\,;b^n) = 1$ (يرمز $PGCD$ إلى القاسم المشترك الأكبر).
جـ- استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 1962^{1954} و 1954^{1962}.

التمرين 21: ﴿ دورة جوان 2015 - شعبة رياضيات - الموضوع الثاني ﴾

عين الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الإقتراحات الثلاثة، في الحالة التالية مع التعليل.

3) a، b، c و d أعداد طبيعية غير معدومة وأصغر من أو تساوي 9.
$\overline{abcd}$ عدد طبيعي مكتوب في النظام العشري.
من أجل كل الأعداد a، b، c و d، يكون العدد $\overline{abcd}$ يقبل القسمة على 11 إذا وفقط إذا كان:
أ- العدد $(a - b + c - d)$ يقبل القسمة على 11.
ب- العدد $(a + b + c + d)$ يقبل القسمة على 11.
جـ- العدد $\overline{cd}$ المكتوب في النظام العشري، يقبل القسمة على 11.

التمرين 22: ﴿ دورة جوان 2015 - شعبة تقني رياضي - الموضوع الأول ﴾

1) أ- عين، حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على 13.
ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $[42 \times 138^{2015} + 2014^{2037} - 3]$ على 13.

2) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$(5n + 1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n + 6)8^{2n}[13]$$

ب- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي حتى يكون:

$$(5n + 1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv 0[13]$$

حظ سعيد في بكالوريا 2016