تمارين الدوال اللوغاريتمية في البكالوريا

الشعبة : تسيير و إقتصاد

التمرين [1] **[باك 2010][م1] (4 ن)**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\left(\ln(x)\right)^2+2\ln(x)-3$

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس . ($\ln$ هو رمز اللوغاريتم النبيري)

1) أ- حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة : $f(x)=0$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

ب- حلل إلى $f(x)$ جداء عاملين .

جـ- حل في المجال $]0;+\infty[$ المتراجحة : $2\ln(x)+2\geq 0$.

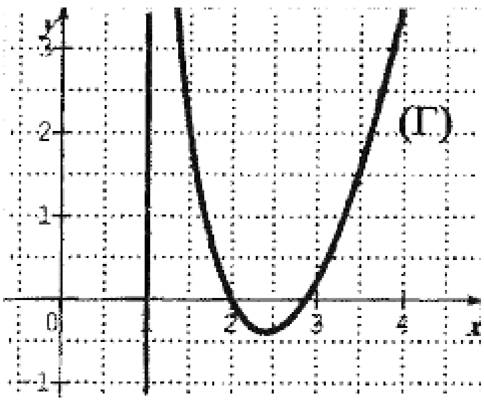
2) أحسب $f'(x)$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f .

3) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

التمرين [2] **[باك 2010][م2] (9 ن)**

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2-2x-4\ln(x-1)$ ($\ln$ هو رمز اللوغاريتم النبيري)

و (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس كما هو في الشكل التالي :



1) بقراءة بيانية ، عين عدد حلول المعادلة $g(x)=0$.

2) أحسب $g(2)$.

3) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا α حيث : $2,87<\alpha<2,88$

4) استنتج حسب قيم x ، إشارة $g(x)$ في المجال $]1;+\infty[$.

II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=x-3+4\frac{\ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}$$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أوجد نهاية الدالة f عند $+\infty$. (لاحظ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$)

ب- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

جـ- بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-3$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

د- أوجد فاصلة نقطة تقاطع (Δ) مع (C_f) .

هـ- أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

2) أ- بين أنه من أجل كل عدد x من المجال $]1;+\infty[$ لدينا : $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^2}$ ، (f' هي الدالة المشتقة للدالة f)

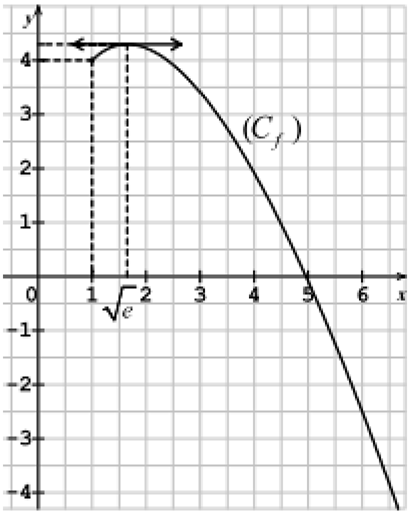
ب- استنتج إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

3) أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) . (نأخذ $f(\alpha)=3,9$)

4) أ- عين مشتقة الدالة : $x\mapsto\left[\ln(x-1)\right]^2$ ، ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

ب- أحسب : $\int_2^5 f(x)dx$ ، فسر النتيجة هندسيا .

التمرين [3] — [باك 2012][م1] (6 ن)



التمثيل البياني (C_f) المقابل هو للدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بالعبارة:
$f(x)=ax+b+cx\ln x$ حيث c,b,a أعداد حقيقية.

1) خمّن بقراءة بيانية إتجاه تغير f و نهاية f عند $+\infty$.

2) أـ أحسب بدلالة a و c عبارة $f'(x)$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f على $[1;+\infty[$.

بـ ـ باستعمال معطيات في الشكل، و علما أن $f(5)=16-10\ln 5$.
بيَن أن: $f(x)=3x+1-2x\ln x$

جـ ـ تحقق من صحة تخمينك في السؤال 1 ، ثم شكل جدول تغيَرات الدالة f .

3) بيَن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $]-\infty;1[$ ، ثم تحقق أن $4{,}95<\alpha<4{,}96$.

4) نعرف العدد الحقيقي S كما يلي: $S=\int_1^{\alpha} f(x)dx$ (حيث α هو حل المعادلة $f(x)=0$)

أـ بيَن أن الدالة $g: x\mapsto 2x^2+x-x^2\ln x$ دالة أصلية للدالة f على المجال $[1;+\infty[$.

بـ ـ أعط تفسيرا هندسيا للعدد S ، ثم أحسبه بدلالة α .

جـ ـ بيَن أن: $S=\frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)-3$ ، ثم استنتج حصرا للعدد α .

التمرين [4] — [باك 2013][م2] (7 ن)

I) الدالة العددية g معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\frac{-x^2+x+2}{x^2}$.

1) عيَن، تبعا لقيم x ، إشارة $g(x)$.

2) أـ تحقق أنه، من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $g(x)=-1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$

بـ ـ إستنتج الدوال الأصلية للدالة g على $]0;+\infty[$.

II) الدالة العددية f معرفة على المجال $]0;8]$ كما يلي: $f(x)=3-x-\frac{2}{x}+\ln x$.
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أـ تحقق أن f هي الدالة الأصلية للدالة g على المجال $]0;8]$ و التي تنعدم عند 1 .

بـ ـ إستنتج اتجاه تغيَر الدالة f على المجال $]0;8]$.

جـ ـ أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ، ثمَ فسر النتيجة هندسيا.

د ـ شكَل جدول تغيرات الدالة f .

2) بيَن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين، أحدهما α ، حيث: $3{,}8<\alpha<3{,}9$.

3) مثل بيانيا (C_f) .

III) الدالة العددية h معرفة على $\left]-\frac{2}{3};2\right]$ كما يلي: $h(x)=f(3x+2)$.

1) بيَن أنه إذا كان $-\frac{2}{3}<x\leq 0$ فإن $0<3x+2\leq 2$ و إذا كان $0\leq x\leq 2$ فإن $2\leq 3x+2\leq 8$.

2) أحسب $h'(x)$. (عبارة $h(x)$ غير مطلوبة)

3) شكَل جدول تغيَرات h .

التمرين [5] [باك 2014][م1] (7 ن)

I) الدالة العددية g معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=1-x^2-\ln x$.

1) أدرس اتجاه تغيّر الدالة g .

2) أحسب $g(1)$ ثم استنتج تبعا لقيم x إشارة $g(x)$.

II) الدالة العددية f معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (يعطى $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$)

ب- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ثم فسّر النتيجتين هندسيا .

2) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن : $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغيّر الدالة f .

ب- شكّل جدول تغيّرات الدالة f.

3) أ- بيّن أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) .

4) عيّن فاصلة النقطة A من (C_f) التي يكون فيها المماس (T) موازيا للمستقيم (D) ثم أكتب معادلة للمماس (T) .

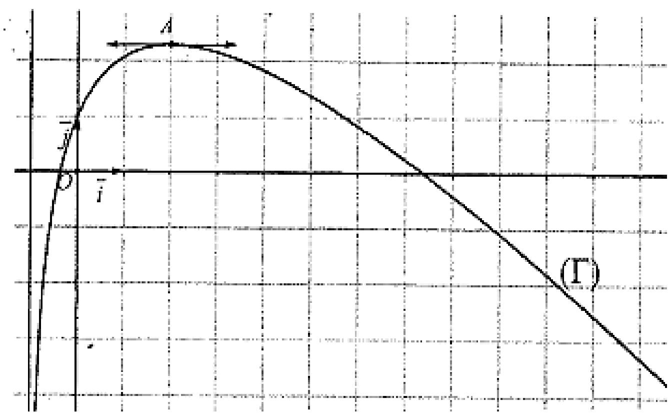
5) أرسم (D)، (T) و (C_f).

6) أحسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1;3]$.

التمرين [6] [باك 2015][م2] (9 ن)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I) f دالة معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=ax+b+3\ln(x+1)$ حيث a و b عددان حقيقيان .



(Γ) التمثيل البياني للدالة f ، المعطى في الشكل المقابل، يقبل في النقطة $A(2;-1+3\ln 3)$ مماسا موازيا لحامل محور الفواصل .

1) بقراءة بيانية :

أ- ضع تخمينا حول $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- شكّل جدول تغيرات الدالة f .

2) باستعمال المعطيات المتوفرة، جد قيمة كل من a و b.

II) نعتبرفي هذا الجزء : $f(x)=-x+1+3\ln(x+1)$.

1) أحسب نهاية الدالة f عند -1 بقيم أكبر .

2) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$. (يعطى : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=0$)

3) أ- عيّن النقطة B من المنحنى (Γ) التي يكون فيها المماس (T) للمنحنى (Γ) موازيا للمستقيم الذي معادلته $y=x$ ، ثم أكتب معادلة للمماس (T) .

ب- استنتج بيانيا، قيم العدد الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x)=x+m$ حلين موجبين تماما .

4) g الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x)=(x+1)\ln(x+1)-x$

أ- أحسب $g'(x)$ ، ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.

ب- لتكن α و β فاصلتي نقطتي تقاطع المنحنى (Γ) مع حامل محور الفواصل ،
بيّن أن : $\alpha\in]7,37;7,38[$ و $\beta\in]-0,37;-0,36[$.

جـ- أحسب S مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (Γ) و محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما : $x=0$ و $x=\alpha$.

د- تحقق أن: $S=\left(\frac{1}{2}\alpha^2-2\alpha-1\right)ua$ ، ثم عيّن حصرا لـ S . (ua وحدة مساحة)

III) تنتج إحدى الورشات في اليوم الواحد 7 آلاف قطعة على الأكثر .

تنمذج الكلفة الهامشية C_m (الوحدة 1000 دينار)لإنتاج قطعة إضافية على المجال $[0;7]$ بالدالة f المعرفة في الجزء **(II** ، أي من أجل $x\in[0;7]$ لدينا $C_m(x)=f(x)$.

نرمز بـ $C_T(x)$ إلى الكلفة الإجمالية لإنتاج x قطعة.

1) عيّن عبارة الكلفة الإجمالية $C_T(x)$ علما أن الكلفة الإجمالية لإنتاج الألف قطعة الأولى هي $\frac{5}{2}$.

2) قدِّر الكلفة الإجمالية لإنتاج 7 آلاف قطعة.

التمرين [7] [باك 2016][م1] (7,5 ن)

I) g دالة عددية معرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=ax+b+\ln x$ حيث a و b عددان حقيقيان.

1) عيّن a و b بحيث: $g(1)=2$ و $g'(2)=\frac{3}{2}$.

2) نضع: $g(x)=x+1+\ln x$

أ- أحسب $\lim\limits_{x\to 0^{>}} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب- أدرس اتجاه تغيّر الدالة g ثم شكل جدول تغيّراتها.

جـ- بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا حقيقيا وحيدا α حيث: $0,2<\alpha<0,3$.

د- حدّد تبعا لقيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$..

1) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

2) أحسب $\lim\limits_{x\to 0^{>}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.(يعطى: $\lim\limits_{x\to 0^{>}} x\ln x=0$)

3) تحقق أن: $f(\alpha)=-\alpha$ ثم شكل جدول تغيّرات الدالة f .

4) أحسب $f(1)$ و $f(5)$ ثم أرسم (C_f) على المجال $[0;5]$.

التمرين [8] [باك 2016][م2] (7 ن)

I) نعتبر الدالة g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=-4+2x(1+\ln x)$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to 0^{>}} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.(يعطى: $\lim\limits_{x\to 0^{>}} x\ln x=0$)

2) أدرس اتجاه تغيّر الدالة g على $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,4<\alpha<1,5$.

4) حدّد إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=(2x-4)\ln x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to 0^{>}} f(x)$. فسّر النتيجة هندسيا.

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$.

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيّراتها.

3) عيّن نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

4) أ- أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

ب- أنشئ (T) و (C_f) . (تعطى : $f(\alpha)\approx 0,41$)

5) نعتبر الدالة F المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $F(x)=(x^2-4x)\ln x-\frac{1}{2}x^2+4x$.

أ- بيّن أن F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

ب- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=0$ ، $x=1$ و $x=2$.

التمرين [9] [باك 2017][1م] (8 ن)

I) نعتبر الدالة g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=x^2+3\ln x-3$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g .

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,40<\alpha<1,41$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II) نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x+1-\frac{3\ln x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا .

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما ، $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

3) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها .

4) أ- بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

5) أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) . (تعطى : $f(\alpha)\approx 1,68$)

6) أ- بيّن أن الدالة h حيث $h(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$ أصلية للدالة $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

ب- أحسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $x=1$ ، $x=e$ و $y=x+1$.

التمرين [10] [باك 2018][1م] (8 ن)

لتكن f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-2;8[$ بـ : $f(x)=\ln(x+2)+\ln(-x+8)-\ln 16$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. نأخذ الوحدة البيانية : $2cm$.

1) أحسب نهايتي الدالة f عند طرفي مجموعة التعريف $]-2;8[$ و فسّر النتيجتين بيانيا .

2) تحقق أنه من أجل كل x من $]-2;8[$: $f'(x)=\frac{-2x+6}{(x+2)(-x+8)}$. (f' هي الدالة المشتقة للدالة f)

3) أدرس إشارة $f'(x)$ على المجال $]-2;8[$ و شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

4) عيّن نقط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات .

5) بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]-2;8[$: $(6-x)$ ينتمي إلى $]-2;8[$ و $f(6-x)=f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا .

6) أرسم المنحنى (C_f) .

7) لتكن الدالة العددية F المعرّفة على المجال $]-2;8[$ بـ : $F(x)=(x+2)\ln(x+2)+(x-8)\ln(-x+8)-2x-x\ln 16$

بيّن أن F دالة أصلية لـ f على المجال $]-2;8[$.

8) أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=0$ ، $x=0$ و $x=4$.