

بكالوريات 2009 محلولة

(إعداد الأستاذ بواب نور الدين)

التمرين 1 : (5 نقاط) علوم تجريبية 2009

$P(z) = (z - 1 - i)(z^2 - 2z + 4)$ كثير حدود حيث :

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 0$.

2) نضع : $z_1 = 1 + i$ و $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

أ- اكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسّي .

ب- اكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسّي .

ج- استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos \frac{7\pi}{12}$ و $\sin \frac{7\pi}{12}$.

3) أ- n عدد طبيعي . عيّن قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقياً .

ب- احسب قيمة العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$.

الحل :

1) حل المعادلة $P(z) = 0$:

$P(z) = 0$ يكافئ $(z - 1 - i)(z^2 - 2z + 4) = 0$

ومنه : $z - 1 - i = 0$ أو $z^2 - 2z + 4 = 0$

• من المساواة : $z - 1 - i = 0$ نحصل على : $z = 1 + i$

• حل المعادلة $z^2 - 2z + 4 = 0$:

مميز هذه المعادلة هو : $\Delta = -12 = 12i^2 = (2i\sqrt{3})^2$.

بما أن المميز هو عدد حقيقي سالب فإن هذه المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين هما

$z' = 1 + i\sqrt{3}$ و $z'' = 1 - i\sqrt{3}$

إذن : المعادلة $P(z) = 0$ تقبل ثلاثة حلول هي :

$z_0 = 1 + i$ ، $z_1 = 1 + i$ و $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

2) أ- كتابة z_1 على الشكل الأسّي :

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

• كتابة z_2 على الشكل الأسّي :

$$z_2 = 1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) = 2 e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

ب- كتابة $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{1-i\sqrt{3}} \times \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + \frac{1+\sqrt{3}}{4} i$$

• كتابة $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسّي :

$$(e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}}{2 e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

ج- استنتاج القيمة المضبوطة لكل من $\cos \frac{7\pi}{12}$ و $\sin \frac{7\pi}{12}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + \frac{1+\sqrt{3}}{4} i \quad \text{ولدينا} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + \frac{1+\sqrt{3}}{4} i \quad \text{ومنه} :$$

$$\begin{cases} \cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases} \quad \text{إذن :} \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \end{cases} \quad \text{وبالمطابقة نجد :}$$

3 أ- تعيين قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2} \right)^n$ حقيقيا :

$$\frac{7n\pi}{12} = k\pi \quad \text{أي} \quad \arg \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^n = k\pi \quad \text{معناه} \quad \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^n \text{ حقيقي}$$

$$n = 12 \times \frac{k}{7} \quad \text{ومنه} \quad 7n = 12k \quad \text{وبالتالي} \quad n = 12 \times \frac{k}{7}$$

وبوضع $k' = \frac{k}{7}$ نجد : $n = 12k'$ (يكون العدد k' عددا طبيعيا إذا وفقط إذا كان العدد k مضاعفا للعدد 7) .

إذن : $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقي يكافئ $n = 12k'$ حيث $k' \in \mathbb{N}$.

ب- حساب قيمة العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$: لدينا : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456} e^{i\frac{7 \times 456\pi}{12}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456} e^{266\pi i}$$

ومنه :

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456} = \left(\frac{1}{2}\right)^{228}$$

التمرين 2 : (4 نقاط) علوم تجريبية 2009

1 أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2z + 4 = 0$.
نسمي z_1 و z_2 حلي هذه المعادلة .

ب- اكتب كلا من z_1 و z_2 على الشكل الأسّي .

2 في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ،
نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب :

$$z_C = \frac{1}{2}(5 + i\sqrt{3}) \text{ و } z_B = 1 + i\sqrt{3} \text{ ، } z_A = 1 - i\sqrt{3}$$

أ- احسب الأطوال AB ، AC و BC ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب- جد الطويلة وعمدة للعدد المركب Z حيث : $Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.

ج- احسب z^3 و z^6 ثم استنتج أن z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k

الحل :

1 أ- حل المعادلة $z^2 - 2z + 4 = 0$:

• مميز هذه المعادلة هو : $\Delta = -12 = 12i^2 = (2i\sqrt{3})^2$.

• بما أن المميز هو عدد حقيقي سالب فإن هذه المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين

$$\text{هما : } z_2 = 1 + i\sqrt{3} \text{ و } z_1 = 1 - i\sqrt{3}$$

ب- كتابة z_1 على الشكل الأسّي :

$$z_1 = 1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) = 2 e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

• كتابة z_2 على الشكل الأسّي : $z_2 = \overline{z_1} = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}$

2 أ- حساب الأطوال AB ، AC و BC :

$$AC = |z_C - z_A| = \left| \frac{3}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2} \right| = 3 , \quad AB = |z_B - z_A| = |2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |z_C - z_B| = \left| \frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{3}$$

• استنتاج طبيعة المثلث ABC :

نلاحظ أن : $AC^2 + AB^2 = AB^2$ وحسب مبرهنة فيثاغورث نستنتج أن المثلث ABC قائم في C .

ب- تعيين الطويلة وعمدة للعدد المركب Z :

$$Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{-4i\sqrt{3}} \times \frac{4i\sqrt{3}}{4i\sqrt{3}} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i$$

$$\text{ومنه : } |Z| = \left| \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i \right| = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \arg(Z) = \arg\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$Z = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{وبالتالي :}$$

ج- حساب Z^3 و Z^6 :

$$Z^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 e^{6i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{64} e^{2i\pi} = \frac{1}{64} \quad \text{و} \quad Z^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 e^{3i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{8} e^{i\pi} = -\frac{1}{8}$$

• استنتاج أن Z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k :

$$Z^{3k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3k} e^{i\frac{\pi}{3} \times 3k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3k} e^{i\pi k} = (-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{3k} = \left(-\frac{1}{8}\right)^k$$

إن : من أجل كل عدد طبيعي k ، Z^{3k} عدد حقيقي .

التمرين 3 : (4 نقاط) رياضي 2009

نرفق بكل عدد مركب z يختلف عن 1 العدد المركب $f(z)$ حيث $f(z) = \frac{z-i}{z-1}$

1 حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$(45 + 45i) f(z) = 23 + 45i - 2z$$

2 لتكن M صورة العدد المركب z في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

أ- عيّن مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عددا حقيقيا سالبا تماما .

ب- احسب العدد المركب z_0 بحيث يكون $|f(z_0)| = 1$ و $\arg(f(z_0)) = \frac{3\pi}{2}$

3 في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : 1 ، i و z_0 .

أ- ما نوع المثلث ABC ؟

ب- عيّن النقط D نظيرة النقط C بالنسبة إلى المستقيم (AB) واستنتج طبيعة الرباعي $ACBD$.

الحل :

1 حل المعادلة $(45 + 45i) f(z) = 23 + 45i - 2z$:

لدينا : $(45 + 45i) f(z) = 23 + 45i - 2z$

$$(45 + 45i) \times \frac{z-i}{z-1} = 23 + 45i - 2z \quad \text{ومنه :}$$

$$(45 + 45i)(z-i) = (23 + 45i - 2z)(z-1) \quad \text{ومنه :}$$

وبعد النشر والتبسيط والترتيب نحصل على المعادلة : $2z^2 + 20z + 68 = 0$

وبالقسمة على 2 نجد : $z^2 + 10z + 34 = 0 \quad \dots (E)$

مميز المعادلة (E) هو : $\Delta = -36 = 36i^2 = (6i)^2$.

بما أن المميز هو عدد حقيقي سالب فإن هذه المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين هما

$$z' = -5 - 3i \quad \text{و} \quad z'' = -5 + 3i$$

إذن : المعادلة المعطاة تقبل حلين هما : $z' = -5 - 3i$ و $z'' = -5 + 3i$.

2 أ- تعيين مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عددا حقيقيا سالبا تماما :

• طريقة أولى :

تذكير : التفسير الهندسي لـ $\left| \frac{z - z_A}{z - z_B} \right|$ و $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right)$:

إذا كانت A ، B و M صور الأعداد المركبة z_A ، z_B و z على الترتيب

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{z - z_A}{z - z_B} \right| = \frac{AM}{BM} \\ \arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM})[2\pi] \end{array} \right. \quad \text{حيث } z \neq z_B :$$

لتكن النقطتان A و B صورتا العددين المركبين $z_A = 1$ و $z_B = i$ على الترتيب

$$f(z) = \frac{z - i}{z - 1} = \frac{z - z_B}{z - z_A} \quad \text{لدينا :}$$

$(f(z) \text{ حقيقي سالب تماما }) \text{ يكافئ } (\arg(f(z)) \equiv \pi [2\pi] \text{ و } z \neq z_B \text{ و } z \neq z_A)$

ومنه : $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = \pi + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ و $M \neq A$ و $M \neq B$.

أي : $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \pi + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ و $M \neq A$ و $M \neq B$.

إذن : مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عددا حقيقيا سالبا هي القطعة المستقيمة

$[AB]$ ما عدا النقطتين A و B (أي : القطعة المفتوحة $]AB[$) .

• **طريقة ثانية :**

كتابة $f(z)$ على الشكل الجبري : نضع $z = x + iy$ حيث $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z - i}{z - 1} = \frac{x + iy - i}{x + iy - 1} = \frac{x + i(y - 1)}{(x - 1) + iy} \times \frac{(x - 1) - iy}{(x - 1) - iy} \\ &= \frac{x^2 + y^2 - x - y + i(1 - x - y)}{(x - 1)^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - x - y}{(x - 1)^2 + y^2} + \frac{(1 - x - y)}{(x - 1)^2 + y^2} i$$

$$f(z) = \frac{x^2 + y^2 - x - y}{(x - 1)^2 + y^2} + \frac{(1 - x - y)}{(x - 1)^2 + y^2} i \quad \text{إذن :}$$

تذكير : $(f(z) \text{ حقيقي سالب تماما }) \text{ يكافئ } (\operatorname{Im}(f(z)) = 0 \text{ و } \operatorname{Re}(f(z)) < 0)$

$$\begin{cases} -x-y+1=0 \\ x^2+y^2-x-y < 0 \\ (x-1)^2+y^2 \neq 0 \end{cases} \text{ وبالتالي : } \begin{cases} \frac{(1-x-y)}{(x-1)^2+y^2} = 0 \\ \frac{x^2+y^2-x-y}{(x-1)^2+y^2} < 0 \end{cases} \text{ ومنه :}$$

$$\begin{cases} -x-y+1=0 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ (x; y) \neq (1; 0) \end{cases} \text{ وأخيرا :}$$

- مجموعة النقط M من المستوي حيث $-x-y+1=0$ هي المستقيم (AB) .

- مجموعة النقط M من المستوي حيث $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ هي

القرص الدائري (C) الذي مركزه النقطة $\Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ونصف قطره $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- تقاطع (AB) و (C) هي القطعة المفتوحة $]AB[$.

إذن : مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عددا حقيقيا سالبا هي القطعة المستقيمة

$[AB]$ ما عدا النقطتين A و B (أي : القطعة المفتوحة $]AB[$) .

ب- حساب z_0 بحيث يكون $|f(z_0)|=1$ و $\arg(f(z_0))=\frac{3\pi}{2}$:

بما أن : $|f(z_0)|=1$ و $\arg(f(z_0))=\frac{3\pi}{2}$ فإن : $f(z_0)=e^{i\frac{3\pi}{2}}=-i$

$$\text{وبحل المعادلة : } \frac{z_0-i}{z_0-1} = -i \text{ نجد : } \boxed{z_0=1+i}$$

3 أ- طبيعة المثلث ABC :

$$AC = |z_C - z_A| = |z_0 - 1| = |i| = 1, \quad AB = |z_B - z_A| = |i - 1| = \sqrt{2}$$

$$\text{و } BC = |z_C - z_B| = |z_0 - i| = |1| = 1$$

نلاحظ أن : $AC^2 + BC^2 = AB^2$ و $AC = BC$ ، نستنتج أن المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين .

• **طريقة ثانية :** يمكن الوصول إلى نفس النتيجة بملاحظة أن :

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \text{ و } CA = CB$$

• طريقة ثالثة : المثلث ABC متساوي الساقين و قائما في C لأن :

$$\begin{cases} CB = CA \\ (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} |i| = 1 \\ \arg(i) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \text{ و } \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = i$$

$$\left(\arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}) \text{ و } \left|\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right| = \frac{CA}{CB} \right)$$

ب- تعيين النقطة D نظيرة النقطة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) :
معادلة (AB) هي : $-x - y + 1 = 0$ وبالتالي : $\overrightarrow{AB}(1; -1)$ شعاع توجيه له .
تكون النقطة D نظيرة للنقطة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) إذا وفقط إذا كان :
 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ و منتصف القطعة $[CD]$ تنتمي إلى المستقيم (AB) .

$$\begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = 0 \end{cases} \text{ وبحل الجملة : } \begin{cases} 1(x_D - 1) - 1(y_D - 1) = 0 \\ -\frac{x_C + x_D}{2} - \frac{y_C + y_D}{2} + 1 = 0 \end{cases} \text{ نحصل على :}$$

إذن : $D(0; 0)$ أي أن نظيرة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) هي النقطة O .

• استنتاج طبيعة الرباعي $ACBD$:

بما أن النقطتين C و D متناظرتين بالنسبة إلى المستقيم (AB) فإن $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$
أي أن قطري الرباعي $ACBD$ متعامدان ، وزيادة على ذلك فهما متقايسان لأن :
 $AB = CD = \sqrt{2}$. نستنتج أن الرباعي $ACBD$ هو مربع .

التمرين 4 : (4 نقاط) تقني رياضي 2009

1 أ- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 2z + 2 = 0$ حيث z هو المجهول .

ب- استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول z :

$$(\overline{z} + 3)^2 - 2(\overline{z} + 3) + 2 = 0 \text{ حيث } \overline{z} \text{ مرافق } z .$$

2 في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ،

نعتبر النقط A ، B و M التي لواحقتها $1-i$ ، $1+i$ و z على الترتيب .

أ- عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $z = 1 - i + k e^{i\frac{5\pi}{4}}$

ب- عيّن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $|z - 1 + i| = |z - 1 - i|$

الحل :

1 أ- حل المعادلة $z^2 - 2z + 2 = 0$:

• حساب المميز : $\Delta = -4 = 4i^2 = (2i)^2$.

• بما أن المميز عدد حقيقي سالب فإن المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين هما :

$$z_1 = 1 + i \text{ و } z_2 = 1 - i$$

ب- استنتاج حلول المعادلة (E) :

$$(E) \dots (\bar{z} + 3)^2 - 2(\bar{z} + 3) + 2 = 0$$

بوضع $z = \bar{z} + 3$ تصبح المعادلة (E) كما يلي : $z^2 - 2z + 2 = 0$

وحسب السؤال السابق نستنتج أن : $\bar{z} + 3 = 1 + i$ أو $\bar{z} + 3 = 1 - i$

ومنه : $\bar{z} = -2 + i$ أو $\bar{z} = -2 - i$

إذن : (E) تقبل حلين مركبين مترافقين هما : $z' = -2 - i$ و $z'' = -2 + i$

2 أ- تعيين المجموعة (Γ) :

لدينا : $z = 1 - i + ke^{\frac{i5\pi}{4}}$ ومنه : $z - (1 - i) = ke^{\frac{i5\pi}{4}}$ الشعاع $\overrightarrow{AM}$ هو صورة للعدد المركب $z - (1 - i)$ ، وبفرض $\overrightarrow{u}$ صورة للعدد

المركب $e^{\frac{i5\pi}{4}}$. نستنتج أن : $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u}$

إذن : (Γ) هي نصف المستقيم الذي مبدؤه النقطة A وشعاع توجيهه $\overrightarrow{u}$ يحقق :

$$(\vec{i}; \vec{u}) = \frac{5\pi}{4}$$

ب- تعيين المجموعة (E) :

لدينا : $|z - 1 + i| = |z - 1 - i|$ ومنه : $|z - (1 - i)| = |z - (1 + i)|$

وبالتالي : $AM = BM$

إذن : (E) هي محور القطعة المستقيمة [AB] .

التمرين 5 : (4 نقاط) تقني رياضي 2009

1 حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 18 = 0$... (1)

2 ليكن العدد المركب z_1 حيث : $z_1 = 3 - 3i$.

أ- اكتب z_1 على الشكل الأسّي .

ب- احسب طويلة العدد z_3 وعمدة له حيث : $z_1 \times z_3 = 6 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$

- استنتج قيمتي $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$

3 في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط :

A ، B و C التي لواحقها $3 + 3i$ ، $3 - 3i$ و $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$ على الترتيب .

أ- عيّن العدد الحقيقي α حتى تقبل الجملة المثقلة $\{(A;1), (B;-1), (C;\alpha)\}$ مرجحا نرّمز له بالرمز G_α .

ب- عيّن مجموعة النقط G_α لما يتغيّر α في $\mathbb{R}^*$.

الحل :

1 حل المعادلة (1) :

• حساب المميز : $\Delta = -36 = 36i^2 = (6i)^2$.

• بما أن المميز عدد حقيقي سالب فإن المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين هما :

$$z_1 = 3 - 3i \text{ و } z_2 = 3 + 3i$$

2 أ- كتابة z_1 على الشكل الأسّي :

$$z_1 = 3 - 3i = 3\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 3\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

ب- حساب الطويلة وعمدة للعدد z_3 :

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} \text{ و } e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \text{ : تذكر}$$

$$z_1 \times z_3 = 6 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) = 6 e^{i\frac{\pi}{12}} \text{ لدينا}$$

$$z_3 = \frac{6 e^{i\frac{\pi}{12}}}{z_1} = \frac{6 e^{i\frac{\pi}{12}}}{3\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ومنه}$$

$$z_3 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i \text{ إذن}$$

• استنتاج قيمتي $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$:

من المساواة : $z_1 \times z_3 = 6 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$ نستنتج أن :

$$\begin{aligned} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) &= \frac{1}{6} z_1 \times z_3 = \frac{1}{6} \times (3 - 3i) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i \right) \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i \end{aligned}$$

ومنه : $\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} i$

إذن : $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ و $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

3 أ- تعيين العدد الحقيقي α :

تذكير : لتكن A ، B و C ثلاث نقط من المستوي و α ، β و γ ثلاثة أعداد حقيقية . إذا كان $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ فإنه توجد نقطة وحيدة G تحقق :

$$\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \gamma \vec{GC} = \vec{0}$$

تسمى النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\}$.

تقبل الجملة المثقلة $\{(A; 1), (B; -1), (C; \alpha)\}$ مرجحا إذا وفقط إذا كان :

مجموع المعاملات غير معدوم أي : $1 - 1 + \alpha \neq 0$ أي : $\alpha \neq 0$

إذن : $\alpha \in \mathbb{R}^*$ (أي : α عدد حقيقي غير معدوم) .

ب- تعيين مجموعة النقط G_α لما يتغير α في $\mathbb{R}^*$:

تذكير بإحداثيات مرجح ثلاث نقط :

النقطة G_α معرفة بالعلاقة : $\vec{OG}_\alpha = \frac{\alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB} + \gamma \vec{OC}}{\alpha + \beta + \gamma}$

وبالتالي : $x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}$ و $y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$

إذن : $G_\alpha \left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\alpha\sqrt{6} + 12}{2\alpha} \right)$ وبوضع : $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $y = \frac{\alpha\sqrt{6} + 12}{2\alpha}$

نستنتج أنه ، عندما يتغير α في $\mathbb{R}^*$ ، فإن النقطة G_α تمشح المستقيم الذي معادلته

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

تمرين 6 : (Bac Nouvelle Calédonie Mars 2009 S)

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر

النقط A ، B ، C و D التي لواحقها : $z_A = 1$ ، $z_B = 3 + 4i$ ،

$z_C = 2\sqrt{3} + i(-2 - \sqrt{3})$ و $z_D = -2\sqrt{3} + i(-2 + \sqrt{3})$.

(1) أ- بيّن أن D هي صورة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

ب- استنتج أن النقطتين B و D تقعان على دائرة (Γ) مركزها A ويطلب تعيين نصف قطرها .

(2) لتكن F صورة A بالتحاكي الذي مركزه B ونسبته $\frac{3}{2}$.

أ- بين أن اللاحقة z_F للنقطة F هي $-2i$.

ب- بين أن النقطة F هي منتصف القطعة $[CD]$.

ج- أثبت أن : $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}$ واستنتج الشكل الأسّي للعدد $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F}$.

- استنتج من الأسئلة السابقة أن المستقيم (AF) هو محور القطعة المستقيمة $[CD]$

(3) اعتمادا على النقط A ، B و F ، أنشئ النقطتين C و D .

الحل :

(1) أ- تبيان أن D هي صورة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{2\pi}{3}$:

تذكير : العبارة المركبة للدوران الذي مركزه $M_0(z_0)$ وزاويته θ والذي يرفق بكل

نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $z' - z_0 = e^{i\theta}(z - z_0)$

وعليه فإن الكتابة المركبة لهذا الدوران هي : $z' - z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - z_A)$

إذا كانت B' صورة B بهذا الدوران فإن : $z_{B'} - z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_B - z_A)$

ومنه : $z_{B'} = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_B - z_A) + z_A = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(3 + 4i - 1) + 1$
 $= -2\sqrt{3} + i(-2 + \sqrt{3})$

إذن : $z_{B'} = z_D$ أي أن D هي صورة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{2\pi}{3}$

ب- استنتج أن النقطتين B و D تقعان على دائرة (Γ) مركزها A :

بما أن D هي صورة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ فإن $AB = AD$

ولدينا : $AB = |z_B - z_A| = |3 + 4i - 1| = |2 + 4i| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$

نستنتج أن النقطتين B و D تقعان على الدائرة (Γ) التي مركزها النقطة A

ونصف قطرها $2\sqrt{5}$.

(2) أ- تبيان أن اللاحقة z_F للنقطة F هي $-2i$:

تذكير : العبارة المركبة للتحاكي الذي مركزه $M_0(z_0)$ ونسبته k والذي يرفق بكل

نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $z' - z_0 = k(z - z_0)$

وعليه فإن الكتابة المركبة لهذا التحاكي هي : $z' - z_B = \frac{3}{2}(z - z_B)$

ومنه : $z_F = \frac{3}{2}(z_A - z_B) + z_B = \frac{3}{2}(1 - 3 - 4i) + 3 + 4i = -2i$

إذن : اللاحقة z_F للنقطة F هي $-2i$.

ب- تبيان أن النقطة F هي منتصف القطعة $[CD]$:

لاحقة منتصف القطعة $[CD]$ هو $\frac{z_C + z_D}{2}$

ولدينا : $\frac{z_C + z_D}{2} = \frac{2\sqrt{3} + i(-2 - \sqrt{3}) - 2\sqrt{3} + i(-2 + \sqrt{3})}{2} = -2i$

إذن : النقطة F هي منتصف القطعة $[CD]$.

ج- إثبات أن $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}$:

$\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \frac{2\sqrt{3} + i(-2 - \sqrt{3}) + 2i}{1 + 2i} = \frac{2\sqrt{3} - i\sqrt{3}}{1 + 2i} \times \frac{1 - 2i}{1 - 2i} = -i\sqrt{3}$

● استنتاج الشكل الأسّي للعدد $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F}$:

لدينا : $|-i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$ و $\arg(-i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{2}$. إذن : $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{2}}$

● استنتاج أن المستقيم (AF) هو محور القطعة المستقيمة $[CD]$:

نعلم أن $\arg\left(\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F}\right) = (\overrightarrow{FA}; \overrightarrow{FC}) = -\frac{\pi}{2}$ وبالتالي فإن المستقيمين

(CF) و (AF) متعامدان .

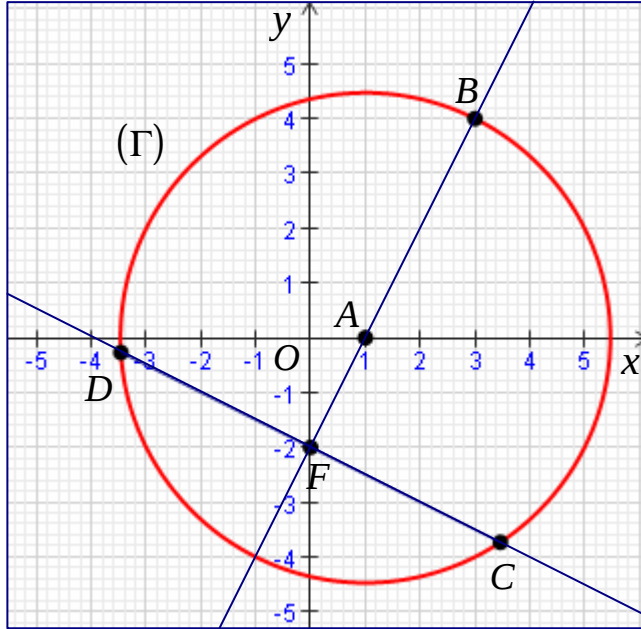
وبما أن النقطة F هي منتصف القطعة $[CD]$ والنقط F ، C و D في استقامية

فإن المستقيمين (CD) و (AF) متعامدان .

نستنتج أن المستقيم (AF) هو محور القطعة المستقيمة $[CD]$.

(3) إنشاء النقطتين C و D :

نرسم الدائرة (Γ) التي مركزها النقطة A وتمرّ بالنقطة B .
النقطتان D و C تقعان على الدائرة (Γ) التي مركزها A لأن النقطة A تنتمي إلى محور القطعة المستقيمة $[CD]$ وبالتالي $AC = AD$.
نُعلم النقطة F ذات اللاحقة $-2i$.
نرسم المستقيم (Δ) العمودي على المستقيم (AF) والذي يمرّ بالنقطة F ، وبما أن (AF) هو محور القطعة $[CD]$ نستنتج أن النقطتين C و D تقعان على (Δ) .
النقطتان D و C هما نقطتا تقاطع الدائرة (Γ) والمستقيم (Δ) .
(C هي النقطة ذات الفاصلة الموجبة و D هي النقطة ذات الفاصلة السالبة)



تمرين 7 : (Bac Liban Juin 2009 S)

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط

A ، B و C التي لواحقتها : $z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -3$.

الجزء الأول :

(1) اكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسّي .

(2) علم النقط A ، B و C .

(3) بيّن أن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

الجزء الثاني :

ليكن f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = \frac{1}{3}iz^2$.

نسمي O' ، A' ، B' و C' صور النقط O ، A ، B و C على الترتيب بالتحويل f .

- (1) أ- عيّن الشكل الأسّي لكل من لواحق النقط A' ، B' و C' .
ب- علم النقط A' ، B' و C' .
ج- عيّن استقامية النقط O ، A و B' وكذلك النقط O ، B و A' .
- (2) لتكن G مركز المسافات المتساوية للنقط O ، A ، B و C . نسمي G' صورة النقطة G بالتحويل f .

- أ- عيّن لاحقتي النقطتين G و G' .
- ب- هل النقطة G' هي مركز المسافات المتساوية للنقط O' ، A' ، B' و C' ؟
- (3) بيّن أنه إذا انتمت M إلى المستقيم (AB) فإن M' تنتمي إلى القطع المكافئ الذي معادلته $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$ (لا يطلب رسم هذا القطع المكافئ) .

الحل :

الجزء الأول :

- (1) كتابة z_A على الشكل الأسّي :

$$|z_A| = \left| -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3} \quad \text{ومنه} \quad z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_A = \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \sqrt{3} e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

• كتابة z_B على الشكل الأسّي :

$$\text{لدينا : } z_B = \overline{z_A} \quad \text{ومنه} \quad |z_B| = |z_A| \quad \text{و} \quad \arg(z_B) = -\arg(z_A) [2\pi]$$

$$\text{وبالتالي : } |z_B| = \sqrt{3} \quad \text{و} \quad \arg(z_B) = -\frac{5\pi}{6} [2\pi]$$

$$z_B = \sqrt{3} e^{-i\frac{5\pi}{6}} \quad \text{إذن :}$$

- (2) تعليم النقط A ، B و C : انظر الشكل .
- (3) تبيان أن المثلث ABC متقايس الأضلاع :

$$AB = |z_B - z_A| = |-i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$$

$$AC = |z_C - z_A| = \left| -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{3}$$

$$BC = |z_C - z_B| = \left| -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{3}$$

ومنه : $AB = AC = BC$
إذن : المثلث ABC متقايس الأضلاع .

الجزء الثاني :

(1) أ - تعيين الشكل الأسّي لكل من لواحق النقط A' ، B' و C' :
 لدينا : $z' = \frac{1}{3}iz^2$ ومنه :

$$\begin{aligned} z_{A'} &= \frac{1}{3}iz_A^2 = \frac{1}{3}i\left(\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = ie^{i\frac{5\pi}{3}} \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{13\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{B'} &= \frac{1}{3}iz_B^2 = \frac{1}{3}i\left(\sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = ie^{-i\frac{5\pi}{3}} \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{-i\frac{5\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{3}\right)} = e^{-i\frac{7\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{3}} \end{aligned}$$

$$z_{C'} = \frac{1}{3}iz_C^2 = \frac{1}{3}i(-3)^2 = 3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ب - تعليم النقط A' ، B' و C' : انظر الشكل .

ج - تعيين استقامية النقط O ، A و B' :

$$\text{لدينا : } z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}} \text{ ومنه : } \overrightarrow{OA} = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\text{ولدينا : } z_{B'} = e^{i\frac{5\pi}{3}} \text{ ومنه : } \overrightarrow{OB'} = e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

ومنه : $\overrightarrow{OA} = \sqrt{3}\overrightarrow{OB'}$ وبالتالي فإن الشعاعين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB'}$ مرتبطين خطيا .

إذن : النقط O ، A و B' في استقامية .

• تعيين استقامية النقط O ، B و A' :

لدينا : $z_B = \sqrt{3} e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ ومنه : $\overrightarrow{OB} = \sqrt{3} e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

ولدينا : $z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{6}}$ ومنه : $z_{A'O} = -e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{-i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

ومنه : $\overrightarrow{OB} = \sqrt{3} \overrightarrow{A'O}$ وبالتالي فإن الشعاعين $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{A'O}$ مرتبطين خطيا .

إذن : النقط O ، B و A' في استقامة .

(2) أ- تعيين لاحقة النقطة G :

تذكير : إذا كانت G مرجح الجملة المثقلة $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma), (D; \lambda)\}$ مع $\alpha + \beta + \gamma + \lambda \neq 0$ فإن لاحقة النقطة G هي :

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C + \lambda z_D}{\alpha + \beta + \gamma + \lambda}$$

$$z_G = \frac{z_O + z_A + z_B + z_C}{1+1+1+1} = \dots = -\frac{3}{2} \quad \text{ومنه :}$$

• تعيين لاحقة النقطة G' :

$$z_{G'} = \frac{1}{3} i z_G^2 = \frac{1}{3} i \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} i \quad \text{ومنه : } z' = \frac{1}{3} i z^2$$

ب- هل النقطة G' هي مركز المسافات المتساوية للنقط O' ، A' ، B' و C' ؟
لتكن I هي مركز المسافات المتساوية للنقط O' ، A' ، B' و C'

$$z_I = \frac{z_{O'} + z_{A'} + z_{B'} + z_{C'}}{1+1+1+1} = \dots = i \quad \text{ومنه :}$$

وبما أن $i \neq \frac{3}{4} i$ أي أن النقطة I تختلف عن النقطة G' نستنتج أن G' ليست هي

مركز المسافات المتساوية للنقط O' ، A' ، B' و C' .

(3) تبيان أنه إذا انتمت M إلى المستقيم (AB) فإن M' تنتمي إلى القطع المكافئ

$$\text{الذي معادلته } y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4} :$$

M تنتمي إلى المستقيم (AB) . (AB) مستقيم عمودي يقطع محور الفواصل في

النقطة ذات الفاصلة $-\frac{3}{2}$ ، وبالتالي فإن فاصلة M وترتيبها متغير .

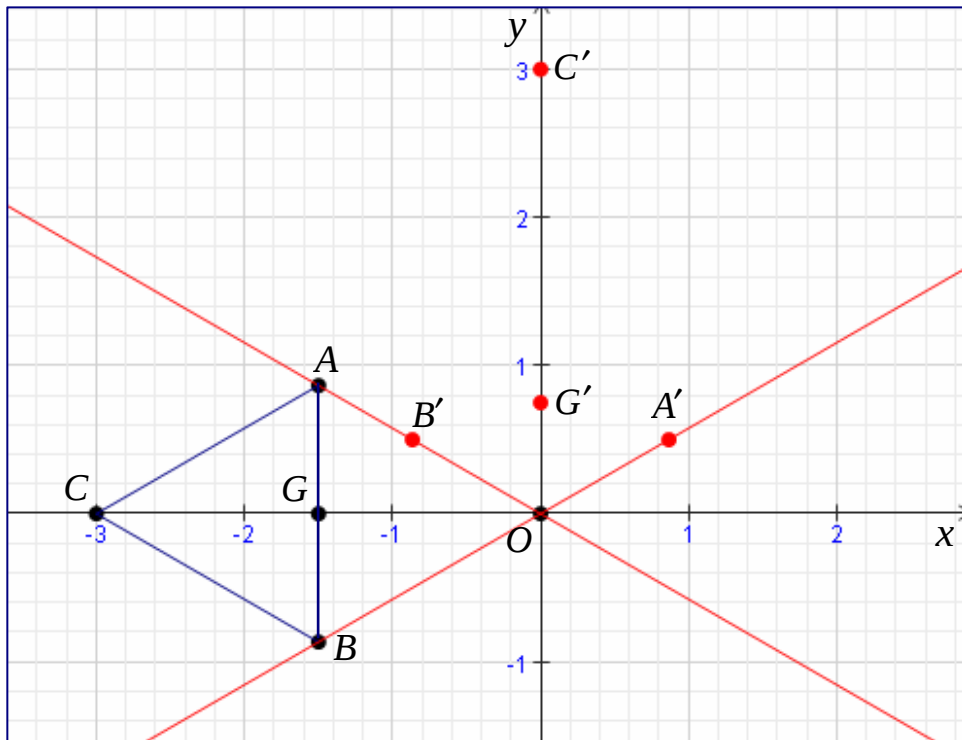
إذن : لاحقة النقطة M هو العدد المركب $z_M = -\frac{3}{2} + ix$ حيث x عدد حقيقي .

من المساواة : $z' = \frac{1}{3}iz^2$ نحصل على :

$$z_{M'} = \frac{1}{3}iz_M^2 = \frac{1}{3}i\left(-\frac{3}{2} + ix\right)^2 = \dots = x + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}x^2\right)i$$

ومنه : $x_{M'} = x$ و $y_{M'} = \frac{3}{4} - \frac{1}{3}x^2$

إذن : إذا انتمت M إلى المستقيم (AB) فإن M' تنتمي إلى القطع المكافئ الذي معادلته $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$.



تمرين 8 : (Bac Polynésie juin 2009 STI)

(1) ليكن p كثير الحدود المعروف من أجل كل عدد مركب z كما يلي :

$$p(z) = z^3 - 7z^2 + 20z - 24$$

أ- تحقق أن $p(3) = 0$.

ب- عين العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z :

$$p(z) = (z - 3)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

ج- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z) = 0$.

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقتها $a = 3$ ، $b = 2 + 2i$ و $c = 2 - 2i$ على الترتيب .

أ- علم النقط A ، B و C .

ب- عيّن الطويلة وعمدة لكل من العددين المركبين b و c .

ج- أثبت أن المثلث OBC قائم ومتساوي الساقين .

(3) نعتبر المجموعة (E) للنقط M ذات اللاحقة z بحيث : $|z - 3| = \sqrt{5}$

أ- بيّن أن النقطتين B و C تنتميان إلى المجموعة (E) .

ب- عيّن الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة (E) وأنشئها في نفس المعلم السابق .

بكالوريات 2008 محلولة

تمرين 9 (بكالوريا 2008 . الشعبة : رياضيات)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما $\sqrt{3} - i$ و $\sqrt{3} + 3i$ على الترتيب .

1) اكتب العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه O ويحول A إلى B ثم عيّن زاويته ونسبته .

2) نعرف متتالية النقط من المستوي المركب كما يلي : $A_0 = A$ ، ومن أجل كل

عدد طبيعي n ، $A_{n+1} = S(A_n)$ ، نرسم إلى لاحقة A_n بالرمز z_n .

أ- أنشئ في المستوي المركب النقط A_0 ، A_1 و A_2 .

ب- برهن أن : $z_n = 2(\sqrt{3})^n e^{i(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6})}$

ج- عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية n التي تنتمي من أجلها النقطة A_n إلى (OA_1)

3) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي :

أ- بيّن أن $u_n = A_n A_{n+1}$ و $u_0 = A_0 A_1$ من أجل كل عدد طبيعي n .

ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج- احسب ، بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

الحل :

1) كتابة العبارة المركبة للتشابه S :

عبارة التشابه المباشر S من الشكل $z' = az + b$.

لدينا : $\begin{cases} S(O) = O \\ S(A) = B \end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} z_O = az_O + b \\ z_B = az_A + b \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a = i\sqrt{3} \\ b = 0 \end{cases}$

إذن : العبارة المركبة للتشابه S هي : $z' = \sqrt{3} iz$

• عناصر التشابه المباشر S : مركزه O ، نسبته $k = \sqrt{3}$ وزاويته $\theta \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

ملاحظة : يمكن الحصول على نفس النتيجة السابقة باستعمال التعريف التالي :

العبارة المركبة للتشابه المباشر الذي مركزه $M_0(z_0)$ ، نسبته k ($k > 0$) وزاويته

θ والذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $z' - z_0 = k e^{i\theta} (z - z_0)$

وبالتالي نحصل على : $z' = i\sqrt{3} z = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}} z$

2) أ- إنشاء النقط A_0, A_1, A_2 : انظر الشكل

من العلاقة $A_{n+1} = S(A_n)$ نستنتج أن :

$A_1 = S(A_0)$ ومنه : $z_1 = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}} z_0 = \sqrt{3} + 3i$. إذن : $A_1(\sqrt{3}; 3)$

$A_2 = S(A_1)$ ومنه : $z_2 = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}} z_1 = -3\sqrt{3} + 3i$. إذن : $A_2(-3\sqrt{3}; 3)$

ب- البرهان أن : $z_n = 2(\sqrt{3})^n e^{i(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6})}$

من العلاقة $A_{n+1} = S(A_n)$ نستنتج أن :

$$z_1 = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}} z_0$$

$$z_2 = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}} z_1 = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}} \times \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}} z_0 = (\sqrt{3})^2 e^{i\frac{2\pi}{2}} z_0$$

$$z_3 = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}} z_2 = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}} \times (\sqrt{3})^2 e^{i\frac{2\pi}{2}} z_0 = (\sqrt{3})^3 e^{i\frac{3\pi}{2}} z_0$$

.....

ومنه التعميم التالي : $z_n = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}} z_{n-1} = (\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{2}} z_0$

ومن الخاصية : $e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ وعلما أن : $z_0 = \sqrt{3} - i = 2 e^{-i\frac{\pi}{6}}$

نستنتج أن : $z_n = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}} z_{n-1} = (\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{2}} z_0 = (\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{2}} \times 2 e^{-i\frac{\pi}{6}}$

إذن : $z_n = (\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{2}} \times 2 e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2(\sqrt{3})^n e^{i(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6})}$

طريقة 2 : يمكن استعمال طريقة أخرى وذلك باستخدام النتيجة التالية :

من تعريف مركب التشابهات نستنتج أنه إذا كان S تشابها مباشرا مركزه النقطة O نسبته k وزاويته θ فإن مركب n مرة التشابه S هو تشابه مباشر له نفس المركز O ، نسبته k^n وزاويته $n\theta$.

طريقة 3 : يمكن استعمال البرهان بالترجع للبرهان أن $z_n = 2(\sqrt{3})^n e^{i(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6})}$

ج- تعيين مجموعة الأعداد الطبيعية n :

لاحقة A_1 هي $z_1 = \sqrt{3} + 3i$ وبالتالي فإن معادلة المستقيم (OA_1) هي $y = \sqrt{3}x$

$$[\arg(z_n) = \frac{\pi}{3} + k\pi] \text{ يكافئ } [A_n \in (OA_1)]$$

$$\text{ومنه : } \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ نستنتج أن : } n = 2k + 1 \text{ مع } k \in \mathbb{N}$$

إذن : تنتمي النقطة A_n إلى المستقيم (OA_1) إذا كان n عددا طبيعيا فرديا
3 أ- إثبات أن (u_n) متتالية هندسية :

تذكير : (u_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث :

$$u_{n+1} = q \times u_n , n \text{ من أجل كل عدد طبيعي}$$

$$\text{لدينا : } u_n = A_n A_{n+1} \text{ ومنه : } u_{n+1} = A_{n+1} A_{n+2}$$

حسب الخاصية المميزة للتشابه المباشر S فإن صورة الثنائية النقطية (A_n, A_{n+1})

$$\text{هي ثنائية نقطية } (A_{n+1}, A_{n+2}) \text{ بحيث : } A_{n+1} A_{n+2} = \sqrt{3} A_n A_{n+1}$$

$$\text{وبالتالي : } u_{n+1} = \sqrt{3} u_n$$

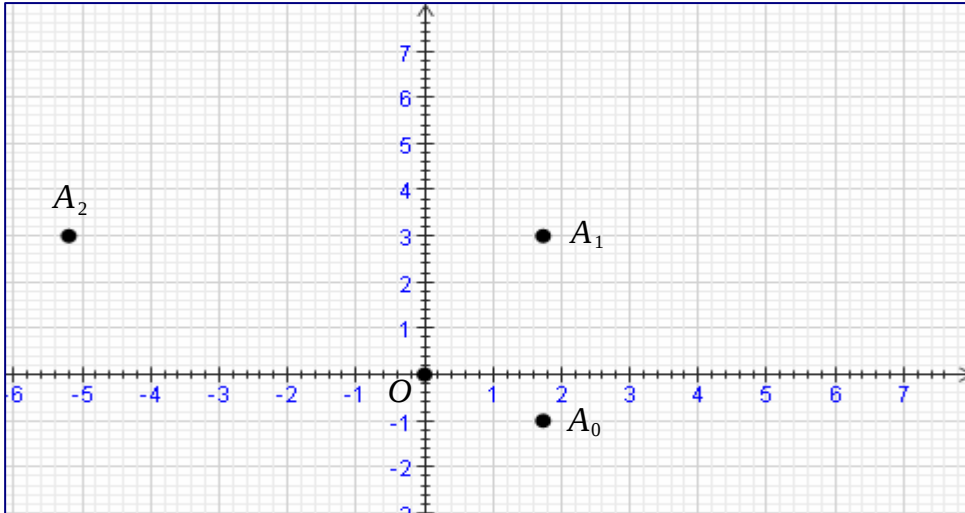
$$\text{إذن : } (u_n) \text{ متتالية هندسية حدّها الأول } u_0 = A_0 A_1 = 4 \text{ وأساسها } q = \sqrt{3}$$

$$\text{ب- استنتاج عبارة } u_n \text{ بدلالة } n : u_n = u_0 \times q^n = 4(\sqrt{3})^n$$

$$\text{ج- حساب المجموع } S_n :$$

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = -2(1 + \sqrt{3})[1 - (\sqrt{3})^{n+1}]$$

$$\text{حساب } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n : \text{ نعلم أن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{3})^{n+1} = +\infty \text{ وبالتالي : } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$$



تمرين 10 (بكالوريا 2008 . الشعبة : تقني رياضي)

r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي كفي .
 1 حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$z^2 - 2i\left(r \cos \frac{\theta}{2}\right)z - r^2 = 0$$

- اكتب الحلين على الشكل الأسّي .

2 في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ،
 نعتبر النقطتين A و B صورتا الحلين .
 - عيّن θ حتى يكون المثلث OAB متقايس الأضلاع .

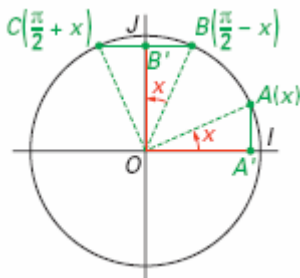
الحل :

1 حل المعادلة :

$$\Delta = 4r^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = \left(2r \sin \frac{\theta}{2}\right)^2$$

حلا المعادلة هما : $z_1 = r \sin \frac{\theta}{2} + ir \cos \frac{\theta}{2}$ و $z_2 = -r \sin \frac{\theta}{2} + ir \cos \frac{\theta}{2}$

• الشكل الأسّي لكل من z_1 و z_2 :



$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \end{cases} \quad \text{تذكير :}$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \end{cases}$$

- الشكل الأسّي لـ z_1 : $z_1 = r \sin \frac{\theta}{2} + ir \cos \frac{\theta}{2} = r\left(\sin \frac{\theta}{2} + i \cos \frac{\theta}{2}\right)$

$$= r\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)\right) = r e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}$$

- الشكل الأسّي لـ z_2 : $z_2 = -r \sin \frac{\theta}{2} + ir \cos \frac{\theta}{2} = r\left(-\sin \frac{\theta}{2} + i \cos \frac{\theta}{2}\right)$

$$= r\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)\right) = r e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)}$$

2 تعيين θ حتى يكون المثلث OAB متقايس الأضلاع :

تذكير : يكون المثلث OAB متقايس الأضلاع إذا وفقط إذا كان :

$$\begin{cases} \arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = -\frac{\pi}{3} [2\pi] \\ \text{أو} \\ \arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = -\frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \quad \text{و} \quad \left| \frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} \right| = 1$$

لدينا : $\left| \frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} \right| = \left| \frac{z_B}{z_A} \right| = \frac{r}{r} = 1$

ولدينا : $\arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = \arg(z_B) - \arg(z_A) = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \theta [2\pi]$

إذن : المثلث OAB متقايس الأضلاع من أجل $\theta \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ أو $\theta \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$.

تمرين 11 (بكالوريا المغرب 2008 . الشعبة : علوم تجريبية)

1 حل ، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $z^2 - 6z + 34 = 0$.

2 في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ،
نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب :

$$c = 7 + 3i \quad b = 3 - 5i \quad a = 3 + 5i$$

ليكن z لاحقة النقطة M من المستوي و z' لاحقة النقطة M' صورة M
بالانسحاب T الذي شعاعه $\vec{u}$ ذو اللاحقة $4 - 2i$.

أ- بيّن أن : $z' = z + 4 - 2i$ ثم تحقق من أن النقطة C هي صورة النقطة A
بالانسحاب T .

ب- بيّن أن : $\frac{b - c}{a - c} = 2i$.

ج- استنتج أن المثلث ABC قائم الزاوية وأن $BC = 2AC$

الحل :

1 حلا $z^2 - 6z + 34 = 0$ هما : $z_1 = 3 - 5i$ و $z_2 = 3 + 5i$

2 أ- من تعريف الانسحاب : $\vec{MM'} = \vec{u}$ وبالنسبة إلى تساوي اللاحقتين نجد :

$$z' - z = 4 - 2i \quad \text{ومنه} \quad z' = z + 4 - 2i$$

ب- $\frac{b - c}{a - c} = \frac{(3 - 5i) - (7 + 3i)}{(3 + 5i) - (7 + 3i)} = \frac{-4 - 8i}{-4 + 2i} \times \frac{-4 - 2i}{-4 - 2i} = \frac{40i}{20} = 2i$

النقطة C هي صورة للنقطة A بالانسحاب T معناه : $z_C = z_A + 4 - 2i$

ج- استنتج أن المثلث ABC قائم الزاوية وأن $BC = 2AC$

من المساواة $\frac{b-c}{a-c} = 2i$ نستنتج أن : $\arg(2i) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $(\vec{AC} ; \vec{BC})$

من المساواة $\frac{b-c}{a-c} = 2i$ نستنتج أن : $\left| \frac{b-c}{a-c} \right| = |2i|$ أي : $\frac{BC}{AC} = 2$

إذن : المثلث ABC قائم في النقطة C و $BC = 2AC$.

تمرين 12 (Bac Amérique du Nord juin 2008)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 4 cm)

نعتبر النقطة A ذات اللاحقة $z_A = 2 + i$ والدائرة (Γ) التي مركزها A ونصف قطرها $\sqrt{2}$.

1 ارسم شكلا على أن يتم إكماله خلال مراحل الإجابة .

2 أ- عيّن لواحق نقط تقاطع (Γ) و المحور $(O; \vec{u})$.

ب- لتكن B و C النقطتين اللتين لاحقتاهما $z_B = 1$ و $z_C = 3$.

- عيّن z_D لاحقة النقطة D ، نظيرة النقطة B قطريا على الدائرة (Γ) .

3 لتكن M النقطة ذات اللاحقة $\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$.

أ- احسب العدد المركب $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$.

ب- فسّر هندسيا عمدة للعدد المركب $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$. استنتج أن النقطة M تنتمي إلى

الدائرة (Γ) .

4 نرمز بـ (Γ') للدائرة ذات القطر $[AB]$. المستقيم (BM) يقطع ثانية الدائرة

(Γ') في نقطة N .

أ- أثبت أن المستقيمين (DM) و (AN) متوازيان .

ب- عيّن لاحقة النقطة N .

5 نسمي M' صورة النقطة M بالدوران الذي مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

أ- عيّن لاحقة النقطة M' .

ب- أثبت أن النقطة M' تنتمي إلى الدائرة (Γ') .

الحل :

1 الرسم : انظر الشكل

2 أ- تعيين لواحق نقط تقاطع (Γ) و المحور $(O; \vec{u})$:

معادلة الدائرة (Γ) : $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$ ، معادلة $(O; \vec{u})$ هي : $y=0$
وبحل الجملة $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$ نحصل على $x=1$ أو $x=3$
 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

إذن : محور الفواصل يقطع الدائرة (Γ) في نقطتين لاحقتاهما 1 و 3 .

طريقة أخرى :

لتكن M نقطة من المحور $(O; \vec{u})$. لاحقة M هي $z=x$ حيث $x \in \mathbb{R}$.

تكون M نقطة من (Γ) إذا كان : $AM = \sqrt{2}$ ومنه : $|z - z_A| = \sqrt{2}$

وبالتالي : $\sqrt{(x-2)^2 + (-1)^2} = 2$. إذن : $x=1$ أو $x=3$

ب- تعيين z_D لاحقة النقطة D :

النقطة D هي نظيرة النقطة B قطريا على الدائرة (Γ) ، وبالتالي فإن النقطة A هي منتصف القطعة $[BD]$.

لدينا : $z_A = \frac{z_B + z_D}{2}$ ومنه : $z_D = 2z_A - z_B = 3 + 2i$

3 أ- حساب $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$: $\frac{3 + 2i - \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i}{1 - \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i} = \dots = 2i$

ب- التفسير الهندسي لعمدة $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$: $\arg \frac{z_D - z_M}{z_B - z_M} = (\vec{MB}; \vec{MD})$

الاستنتاج : لدينا $\arg(2i) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ وبالتالي فإن المثلث

MBD قائم في M . نستنتج أن النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي قطرها $[BD]$
وبما أن D هي نظيرة B قطريا على الدائرة (Γ) فإن النقطة M تنتمي إلى (Γ)

4 أ- إثبات أن المستقيمين (DM) و (AN) متوازيان :

لدينا N نقطة من (Γ') وبالتالي فإن المثلث ABN قائم في N ، نستنتج أن المستقيمين (AN) و (BN) متعامدان .

بما أن N نقطة من المستقيم (BN) فإن المستقيمين (AN) و (BM) متعامدان بالإضافة إلى ذلك المستقيمان (BM) و (DM) متعامدان لأن المثلث MBD قائم

في M . المستقيم (BM) عمودي على كل من المستقيمين (DM) و (AN)

إذن : المستقيمان (AN) و (DM) متوازيان .

في المثلث $BDM : A$ هي منتصف القطعة $[BD]$ ، N نقطة من القطعة $[BM]$ ،
 (DM) و (AN) متوازيان . نستنتج أن النقطة N منتصف القطعة $[BM]$.

5 أ- تعيين لاحقة النقطة M' :

وبالتالي : $z_{M'} - z_B = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_M - z_B)$. إذن : $z_{M'} = \frac{11}{5} + \frac{2}{5}i$

لدينا : $AB = |z_B - z_A| = \sqrt{2}$. نستنتج أن نصف قطر الدائرة (Γ') هو $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$IM' = |z_M' - z_I| = \left| \frac{7}{10} - \frac{1}{10}i \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} : IM' \text{ انحسب}$$

تمرين 13 (Bac Pondichéry Avril 2008)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر
النقط A, B, C, D التي لواحقها على الترتيب :

$$z_D = -1 + i\sqrt{3} \text{ و } z_C = \sqrt{3} + i, z_B = 1 - i\sqrt{3}, z_A = -\sqrt{3} - i$$

1 أ- عيّن الطويلة وعمدة لكل من الأعداد المركبة z_A, z_B, z_C, z_D .

ب- أنشئ ، باستعمال المسطرة والمدور ، النقط : A, B, C, D .

ج- عيّن منتصف القطعة $[AC]$ ، ومنتصف القطعة $[BD]$.

د- احسب $\frac{z_B}{z_A}$. استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

2 نعتبر التحويل النقطي g المعرف بالكتابة المركبة : $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}z + 2$

أ- عيّن الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل g .

ب- أنشئ ، باستعمال المسطرة والمدور ، النقط E, F, J صور النقط A, C, O على الترتيب بالتشابه g .

ج- ما ذا تستنتج بالنسبة للنقط E, F, J ؟

الحل :

1 أ- تعيين الطويلة وعمدة لكل من z_A, z_B, z_C, z_D :

$$z_A = -\sqrt{3} - i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}} \cdot$$

$$z_B = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \cdot$$

$$z_C = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot$$

$$z_D = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot$$

ب- إنشاء النقط A, B, C, D : انظر الشكل

لدينا : $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 2$ وبالتالي فإن النقط A, B, C, D

تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها النقطة O ونصف قطرها 2 .

ترتيب النقطة A هو -1 وبالتالي فإن A تنتمي إلى المستقيم الذي معادلته $y = -1$
 فاصلة النقطة B هو 1 وبالتالي فإن B تنتمي إلى المستقيم الذي معادلته $x = 1$
 ترتيب النقطة C هو 1 وبالتالي فإن C تنتمي إلى المستقيم الذي معادلته $y = 1$
 فاصلة النقطة D هو -1 وبالتالي فإن D تنتمي إلى المستقيم الذي معادلته $x = -1$
 لإنشاء النقط A ، B ، C و D ، نرسم الدائرة (c) باستعمال المدور ونرسم
 المستقيمات الأربعة باستعمال المسطرة .
 مثلا : A (ذات الفاصلة السالبة) هي نقطة تقاطع الدائرة (c) مع المستقيم الذي
 معادلته $y = -1$.

جـ- تعيين منتصف القطعة $[AC]$:

لاحقة منتصف $[AC]$ هي $\frac{Z_A + Z_C}{2} = 0$ أي أن منتصف $[AC]$ هي النقطة O

• تعيين منتصف القطعة $[BD]$:

لاحقة منتصف $[BD]$ هي $\frac{Z_B + Z_D}{2} = 0$ أي أن منتصف $[BD]$ هي النقطة O

$$\frac{Z_B}{Z_A} = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{5\pi}{6}}} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \times e^{+i\frac{5\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i : \frac{Z_B}{Z_A} \text{ حساب دـ}$$

• استنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$:

من السؤال 1 الفرع ب نستنتج أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع (القطران
 لهما نفس المنتصف)

$$\left\{ \begin{array}{l} OB = OA \\ (\vec{OA}; \vec{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{array} \right. \text{ وبالتالي : } \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{Z_B}{Z_A} \right| = |i| \\ \arg\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right) = \arg(i) \end{array} \right. \text{ ولدينا :}$$

إذن : قطرا الرباعي $ABCD$ متعامدان ومتناصفان ، نستنتج أن $ABCD$ مربع .

2 أ- تعيين العناصر المميزة للتحويل g : عبارة g من الشكل $z' = az + b$

لدينا : $|a| = |e^{-i\frac{\pi}{3}}| = 1$ ومنه : التحويل g هو دوران .

• تعيين الزاوية θ : $\theta = \arg\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) = -\frac{\pi}{3}$

• تعيين المركز Ω : لاحقة النقطة Ω هي العدد المركب $\omega = \frac{b}{1-a} = 1 - i\sqrt{3}$

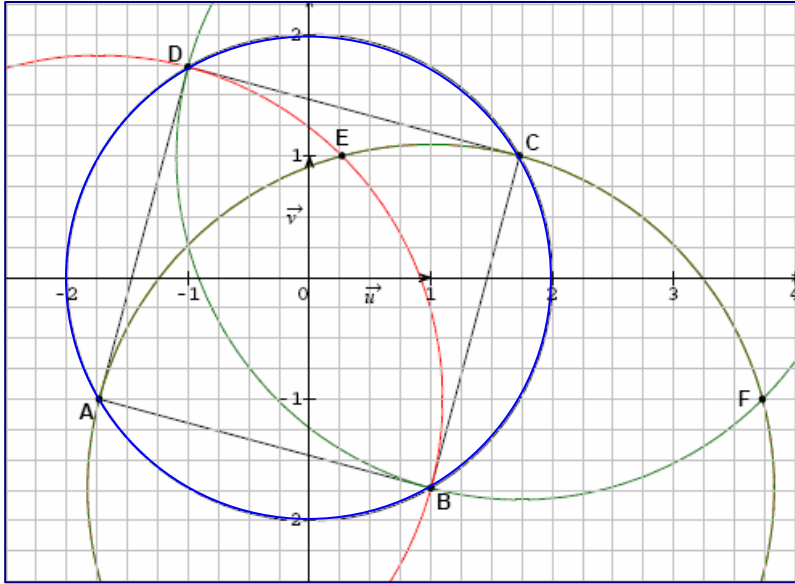
ب- إنشاء E ، F و J : انظر الشكل
لدينا : $E = r(A)$ ومنه : $BA = BE$. نستنتج أن النقطة E تنتمي إلى الدائرة (C_1) التي مركزها B وتمرّ بالنقطة A .

ولدينا : $(\vec{BA}; \vec{BE}) = -\frac{\pi}{3}$ و $BA = BE$ وبالتالي فإن المثلث BAE متقايس الأضلاع ومنه : $AE = AB$. نستنتج أن النقطة E تنتمي إلى الدائرة (C_2) التي مركزها A وتمرّ بالنقطة B .

لإنشاء النقطة E ، نقوم برسم الدائرتين (C_1) و (C_2) وذلك باستعمال المدور . هاتان الدائرتان تتقاطعان في نقطتين ، النقطة E هي النقطة التي تحقق :

$$(\vec{BA}; \vec{BE}) = -\frac{\pi}{3}$$

• بطريقة مماثلة نقوم بإنشاء النقطتين J و F .
ج- الاستنتاج : النقط E ، F و J على استقامة واحدة .



تمرين 14 (Bac Polynésie juin 2008)

- 1 حل ، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $z^2 - 6z + 13 = 0$.
- 2 المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها $a = 3 - 2i$ ، $b = 3 + 2i$ و $c = 4i$.
أ- علم النقط A ، B و C .
ب- أثبت أن الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع .
ج- عيّن لاحقة النقطة Ω ، مركز متوازي الأضلاع $OABC$.
- 3 عيّن وأنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث :
$$\| \vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} \| = 12$$
- 4 لتكن M نقطة من المستقيم (AB) . يرمز β إلى الجزء التخيلي للاحقة M .
نسمي N صورة النقطة M بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$.
أ- بين أن لاحقة النقطة N هي $\frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i$.
ب- كيف نختار β بحيث تنتمي النقطة N إلى المستقيم (BC) .

الحل :

- 1 حل المعادلة $z^2 - 6z + 13 = 0$:
لدينا : $[z^2 - 6z + 13 = 0]$ تكافئ $[(z^2 - 6z + 9) + 4 = 0]$
ومنه : $(z - 3)^2 = -4 = 4i^2 = (2i)^2$ نستنتج أن $z - 3 = 2i$ أو $z - 3 = -2i$
إذن : حلا المعادلة المعطاة هما : $z = 3 + 2i$ و $z = 3 - 2i$
- 2 أ- تعليم النقط A ، B و C : انظر الشكل
ب- إثبات أن الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع :
يكون الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع إذا وفقط إذا كان $\vec{OC} = \vec{AB}$
لدينا : $Z_{\vec{OC}} = Z_C = 4i$ و $Z_{\vec{AB}} = Z_B - Z_A = (3 + 2i) - (3 - 2i) = 4i$
ومنه : $Z_{\vec{OC}} = Z_{\vec{AB}}$ وبالتالي : $\vec{OC} = \vec{AB}$
إذن : الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع
- ج- تعيين لاحقة النقطة Ω : $Z_{\Omega} = \frac{Z_O + Z_B}{2} = \frac{1}{2}Z_B = \frac{3}{2} + i$
- 3 تعيين المجموعة (E) :
لدينا : $\vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 4M\vec{\Omega}$ وبالتالي :
 $4\Omega M = 12$: ومنه $\| \vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} \| = 12$ يكافئ $M \in (E)$
إذن : (E) هي الدائرة التي مركزها النقطة Ω ونصف قطرها 3 .

4 أ- إثبات أن لاحقة النقطة N هي $\frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i$:

معادلة (AB) هي $x = 3$ وبالتالي فإن لاحقة النقطة M هي $z_M = 3 + i\beta$
الدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$ معرف بالعبرة المركبة :

$$z'_N - z_\Omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_M - z_\Omega) \text{ ومنه } z'_N - z_\Omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_M - z_\Omega)$$

وبالتالي فإن لاحقة النقطة N هي $\frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i$.

ب- تعيين β :

معادلة (BC) هي $2x + 3y - 12 = 0$

$$[N \in (BC)] \text{ يكافئ } [2x_N + 3y_N - 12 = 0] \text{ ومنه : } \beta = \frac{1}{4}$$

