المرافق في البكالوريا

المحور الأول: الدوال العددية

السنة الثالثة من التعليم الثانوي

شعبة علوم تجريبية

- **بنك مواضيع شهادة البكالوريا من دورة 2008 إلى 2024**
- **أكثر من 115 تمرين مرتبة حسب الوحدات التعليمية**

SCAN ME

المؤلف: الأستاذة أمينة

تواصل معي عبر فيسبوك وسأساعدك على الفهم.

جميع الحقوق محفوظة © 2024

التمرين 01: (بكالوريا 2024 - الموضوع الأول - 7 نقاط)

I) يُمثّل الجدول المقابل تغيّرات g الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=xe^{-x+1}-2$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$g(1)$	↘	-2

- احسب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$

II) f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-2x+3-xe^{-x+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، (وحدة الطول $2\ cm$).

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-2x+3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ ثمّ ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)

2) أ) بيّن أنّه: من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=g(x)-e^{-x+1}$

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها

3) بيّن أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ)، يُطلب تعيين معادلة له.

4) أ) ارسم (Δ)، (T) و(C_f)

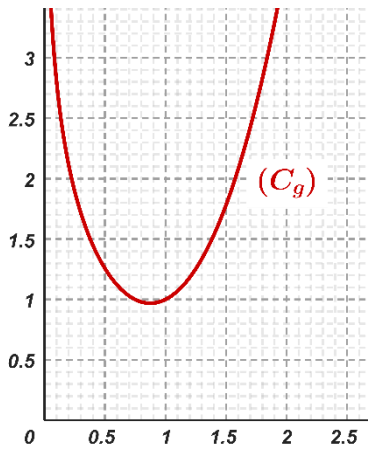
ب) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x)=-2x+m$ حلّين مختلفين.

5) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة، بيّن أنّ: $\int_0^1 xe^{-x+1}dx=e-2$

ب) استنتج بالسنتمتر المربّع $\mathcal{A}$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بـ (C_f) و(Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=0$ و $x=1$.

التمرين 02: (بكالوريا 2024 - الموضوع الثاني - 7 نقاط)

I) g الدّالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}-\ln x$، (C_g) تمثيلها البياني كما في الشّكل.



- بقراءة بيانية ، عيّن إشارة $g(x)$

II) f الدّالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=-x-\frac{\ln x}{x^2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، (وحدة الطول $2\ cm$).

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإنّ $f'(x)=\frac{-2g(x)}{x^3}$

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها

ج) أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,7<\alpha<0,71$

3) أ) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ)، يطلب تعيين معادلة له

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)

4) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه -1، يطلب تعيين معادلة له

5) أ) ارسم كلا من (Δ)، (T) و(C_f).

ب) m وسيط حقيقي، عيّن بيانيا قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة: $\frac{\ln x}{x^2}=m$ حلّين مختلفين.

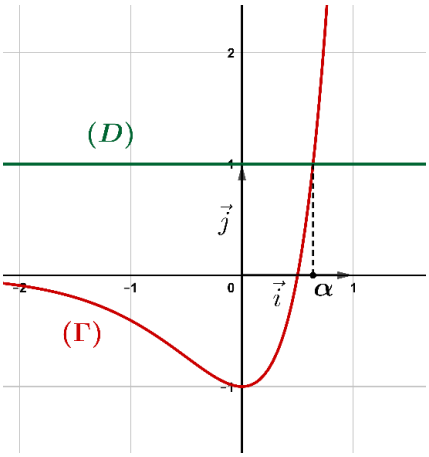
6) أ) أثبت أنّ الدالة $H:x\mapsto\frac{-1-\ln x}{x}$ هي دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto\frac{\ln x}{x^2}$ على $]0;+\infty[$

ب) $\mathcal{A}(\alpha)$ المساحة بالسنتمتر المربّع للحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y=-x$، $x=\alpha$، $x=1$

- بيّن أنّ: $\mathcal{A}(\alpha)=4\left(\alpha^2-\frac{1}{\alpha}+1\right)$.

التمرين 03: (بكالوريا 2023 - الموضوع الأول - 7 نقاط)

I) (Γ) التمثيل البياني للدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $x\mapsto(2x-1)e^{2x}$ و(D) المستقيم ذو المعادلة $y=1$، α هي فاصلة نقطة تقاطع (Γ) و(D) (لاحظ الشكل المقابل).



1) بقراءة بيانية، حدّد وضعية (Γ) بالنسبة إلى (D).

2) g الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(2x-1)e^{2x}-1$

- استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ ثمّ تحقّق أنّ: $0,6<\alpha<0,7$.

II) f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x-1)\left(e^{2x}-1\right)$، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $2\ cm$)

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x+1$ مقارب مائل لـ(C_f) عند $-\infty$.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

3) أ) بيّن أنّه: من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=g(x)$.

ب) استنتج أنّ f متناقصة تماما على $]-\infty;\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

ج) بيّن أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ)، يُطلب تعيين معادلة له.

4) أ) عيّن فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

ب) ارسم (Δ)، (T) و(C_f) (نأخذ $f(1,4)\simeq6,2$ و $f(\alpha)\simeq-0,9$).

ج) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة $f(x)=-x+m$.

5) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة، بيّن أنّ: $\int_0^{\frac{1}{2}}(x-1)e^{2x}dx=\frac{3-2e}{4}$.

استنتج، بالسنتيمتر المربّع، مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $x=0$، $x=\frac{1}{2}$ و $y=-x+1$.

التمرين 04: (بكالوريا 2023 - الموضوع الثاني - 7 نقاط)

f الدّالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\left((\ln x)^2-3\right)\ln x$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $f'(x)=\dfrac{3(-1+\ln x)(1+\ln x)}{x}$.

ب) حلّ في المجال $]0;+\infty[$ المتراجحة ذات المجهول x : $(-1+\ln x)(1+\ln x)>0$.

ج) استنتج أنّ الدّالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]0;e^{-1}]$ و $[e;+\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $[e^{-1};e]$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ) عيّن معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

ب) عيّن فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

ج) ارسم (T) و (C_f) على المجال $]0;e^2]$.

4) F الدّالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $F(x)=x\left((\ln x)^3-3(\ln x)^2+3\ln x-3\right)$

أ) تحقّق أنّ F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

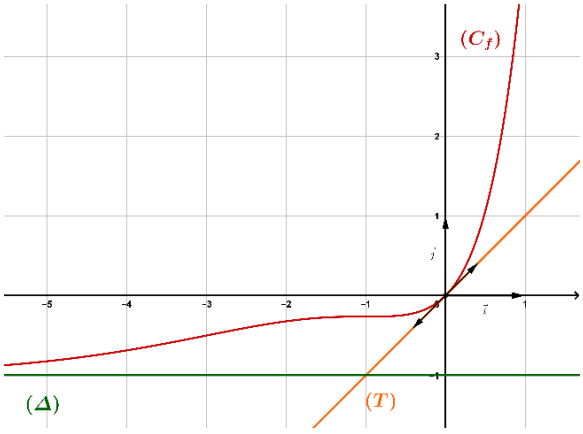
ب) احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=e$.

5) h الدّالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=\left((\ln x)^2-3\right)|\ln x|$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

- اشرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثمّ ارسمه على المجال $]0;e^2]$.

التمرين 05: (بكالوريا 2022 - الموضوع الأول - 4 نقاط)

f الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بتمثيلها البياني (C_f) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0 كما هو مبيّن في الشكل المقابل.



1) بقراءة بيانية: عيّن $f'(0)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وأعط معادلة للمماس (T).

2) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة: $f(x)=x+m$.

3) بيّن أنّ $a=1$ و $b=-1$ إذا علمت أنّ $f(x)=(x^2+a)e^x+b$.

4) g الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=(x^2+1)e^{|x|}-1$ و (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

- بيّن أنّ الدّالة g زوجية ثمّ اشرح كيفية إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) وأنشئ (C_g).

التمرين 06: (بكالوريا 2022 - الموضوع الأول - 7 نقاط)

I) g الدّالة العددية المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\dfrac{2x^2-2x-1}{x^2}+\ln x$

1) بيّن أنّ الدّالة g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,2<\alpha<1,3$.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدّالة العددية f المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}-2-\ln x\right)e^{-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ثمّ احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$.

ب) فسّر النتيجتين السابقتين بيانيا.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{e^x}$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f و شكّل جدول تغيّراتها.

3) أنشئ المنحنى (C_f). (نأخذ: $f(0,65)\simeq 0$ و $f(\alpha)\simeq -0,4$)

4) F الدّالة العددية المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $F(x)=e^{-x}(2+\ln x)$

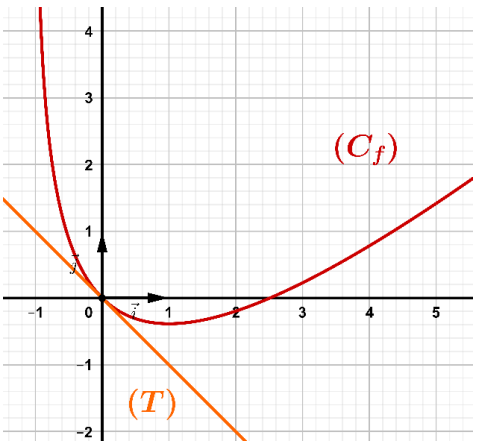
أ) تحقّق أنّ الدّالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

ب) نضع $S(\lambda)=\int_{\lambda}^{1/2} f(x)dx$ حيث λ عدد حقيقي يحقق: $0<\lambda<\dfrac{1}{2}$.

- احسب $S(\lambda)$ ثمّ فسّر النتيجة بيانيا (سؤال إضافي: عيّن النهاية $\lim\limits_{\lambda\to 0} S(\lambda)$).

التمرين 07: (بكالوريا 2022 - الموضوع الثاني - 4 نقاط)

f الدّالة العددية المعرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=ax-2\ln(x+1)$ حيث a عدد حقيقي. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0 كما هو مبيّن في الشكل المقابل.



1) بقراءة بيانية، عيّن $f'(0)$ وأعط معادلة للمماس (T).

2) بيّن أنّ $a=1$.

3) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد و إشارة حلول المعادلة: $f(x)+x-m=0$.

4) g الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ :

$g(x)=|x+1|-1-2\ln|x+1|$ و (C_g) تمثيلها البياني.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1، $g(-2-x)=g(x)$ ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$، $g(x)=f(x)$.

ج) أنشئ (C_g) في المعلم السابق.

التمرين 08: (بكالوريا 2022 - الموضوع الثاني - 7 نقاط)

f الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{1}{2}e^{-2x}-\frac{9}{2}e^{-x}-2x+4$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وبيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

2) أ) أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x}(e^x-2)(4e^x-1)$.

ب) بيّن أنّ f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-\ln 4]$ و $[\ln 2;+\infty[$ ومتزايدة تماما على $[-\ln 4\ ;\ \ln 2]$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-2x+4$ مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

4) أُكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

5) أنشئ (Δ) و (T) والمنحنى (C_f) على المجال $]-1,9;+\infty[$. (نأخذ $f(-1,9)\simeq 0$ و $f(-\ln 4)\simeq -3,2$)

6) h الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{9}{2}e^{-x}+2x-2$، (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) عيّن العددين الحقيقيين a و b حيث، من أجل كل عدد حقيقي x ، $h(x)=af(x)+b$.

ب) اشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) اعتمادا على (C_f) (لا يُطلب إنشاء (C_h)).

التمرين 09: (بكالوريا 2021 - الموضوع الأول - 7 نقاط)

I) الدّالة العددية g معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2x^3-2x^2+3x-2$

1) بيّن أنّ الدّالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يحقق: $0,7<\alpha<0,8$.

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) الدّالة العددية f معرّفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=2x-1+\ln\left(1+\frac{1-x}{x^2}\right)$ ، (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم: $f'(x)=\frac{g(x)}{x(x^2-x+1)}$.

ب) استنتج أنّ f متزايدة تماما على كل من $]-\infty;0[$ و $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]0;\alpha]$.

ج) شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

3) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=2x-1$ مقارب مائل لـ (C) ثمّ ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ).

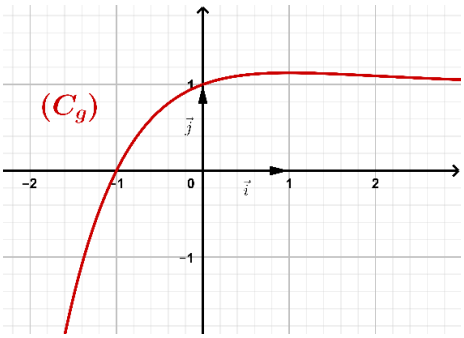
4) بيّن أنّ (C) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) في النقطة A ذات الفاصلة 2 ثمّ أُكتب معادلة له.

5) بيّن أنّ (C) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β تحقّق: $-0,5<\beta<-0,4$.

ج) ارسم (Δ)، (T) والمنحنى (C) (نأخذ: $f(\alpha)\approx 0,87$).

التمرين 10: (بكالوريا 2021 - الموضوع الثاني - 7 نقاط)

I) الدّالة العددية g معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+xe^{-x-1}$، (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الشكل لمقابل)



1) احسب $g(-1)$.

2) بقراءة بيانية، حدّد حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-(x+1)e^{-x-1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم: $f(x)=x\left[1-\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-x-1}\right]$ ثمّ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=g(x)$.

ب) استنتج أنّ الدّالة f متزايدة تماما على $[-1;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty;-1]$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$.

ج) بيّن أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يُطلب كتابة معادلة له.

4) أ) بيّن أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث: $0,3<\alpha<0,4$ و $-1,9<\beta<-1,8$.

ب) ارسم المستقيمين (Δ) و (T) ثمّ ارسم المنحنى (C_f) على المجال $[-2;+\infty[$.

5) الدّالة العددية h معرّفة على المجال $[-2;2]$ بـ: $h(x)=-|x|-(|x|-1)e^{|x|-1}$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) بيّن أنّ الدّالة h زوجية.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-2;0]$: $h(x)=f(x)$.

د) اشرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثمّ ارسمه.

التمرين 11: (بكالوريا 2020 - الموضوع الأول - 7 نقاط)

الدّالة العددية f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x^2}$

(C_f) التمثيل البياني لـ f في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (تؤخذ وحدة الطول $2\ cm$).

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ وفسّر النتيجة هندسيا ثمّ بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

ب) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ج) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

2) الدّالة العددية g معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^3-1+2\ln x$

أ) بيّن أنّ g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

ب) احسب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0;+\infty[$.

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4) بيّن أنّ التمثيل البياني (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ)، ويُطلب تعيين معادلة له.

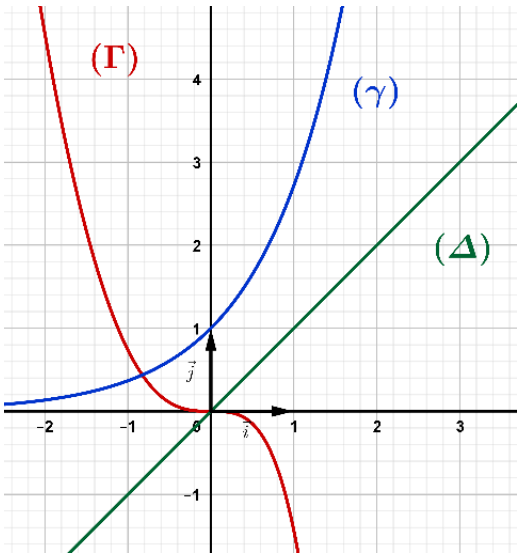
5) أنشئ (T)، (Δ) و (C_f).

6) الدّالة العددية h معرّفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=-|x|+1+\frac{\ln|x|}{x^2}$

أ) بيّن أنّ h دالة زوجية.

ب) اشرح كيف يتم إنشاء المنحنى (C_h) الممثّل للدالة h انطلاقا من (C_f). (لا يُطلب إنشاء (C_h)).

التمرين 12: (بكالوريا 2020 - الموضوع الثاني - 7 نقاط)



I) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

في الشكل المرفق، (Γ) المنحنى الممثّل للدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$g(x)=2x^2+2x-2xe^x$

(Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y=x$ و (γ) المنحنى الممثّل للدالة: $x\mapsto e^x$.

بقراءة بيانية:

1) برر أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x-x>0$.

2) حدّد تبعا لقيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$ علما أنّ $g(0)=0$.

II) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=-1+\frac{2e^x}{e^x-x}$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

1) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ واحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثمّ فسّر نتيجتي النهايتين بانيا.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $f'(x)=\frac{2e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ) أُكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة A ذات الفاصلة 0.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $f(x)-(2x+1)=\frac{g(x)}{e^x-x}$.

ج) استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و (T) على $\mathbb{R}$، ماذا تمثّل النقطة A بالنسبة إلى (C_f)؟

4) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty;1[$، ثمّ تحقّق أنّ: $-0,6<\alpha<-0,5$.

5) أنشئ المماس (T) و المستقيمين المقاربين ثمّ المنحنى (C_f).

التمرين 13: (بكالوريا 2019 - الموضوع الأول - 7 نقاط)

f الدّالة العددية المعرّفة على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\ln x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ وشكّل جدول تغيّراتها.

3) نسمي (Γ) المنحنى البياني للدالة اللوغاريتمية النيبيرية " ln " في المعلم السابق.

أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\ln x\right)$ ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المنحنى (Γ).

4) ارسم بعناية المنحنى (Γ) ثمّ المنحنى (C_f).

5) H الدّالة المعرّفة على المجال $]3;+\infty[$ بـ : $H(x)=\int_3^x \ln(t)\,dt$ حيث t متغير حقيقي موجب تماما.

أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عيّن عبارة $H(x)$ بدلالة x.

ب) احسب $\mathcal{A}$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل والمستقيمين ذوي المعادلتين : $x=3$ و $x=4$.

6) g الدّالة المعرّفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ بـ : $g(x)=f(-2x)$

- دون حساب عبارة $g(x)$ حدّد اتجاه تغيّر الدّالة g على مجموعة تعريفها.

التمرين 14: (بكالوريا 2019 - الموضوع الثاني - 7 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. تُؤخذ وحدة الطول $2\ cm$

(C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرّفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=e^x-ex$ و $f(x)=e^x-\dfrac{1}{2}ex^2$

1) أ) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x الحقيقية.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f.

3) احسب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ؛ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

4) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$.

5) ارسم على المجال $[0;2]$ المنحنيين (C_f) و (C_g) في نفس المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. (يُعطى $e^2-2e\approx 2$).

6) احسب بالسنتمتر المربّع، مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C_f) و (C_g).

7) h الدّالة المعرّفة على المجال $[-2;2]$ كما يلي: $h(x)=\dfrac{1}{2}ex^2-e^{|x|}$ وليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) بيّن أنّ h دالة زوجية.

ب) من أجل $x\in[0;2]$ احسب $h(x)+f(x)$ ثمّ استنتج كيفية رسم (Γ) انطلاقا من (C_f) ثمّ ارسمه.

التمرين 15: (بكالوريا 2018 - الموضوع الأول - 7 نقاط)

I) g الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2+(x-1)e^{-x}$

أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

ج) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,38<\alpha<-0,37$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) لتكن f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x+1)\right)$، ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) حيث: $(\Delta): y=2x+1$.

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $f'(x)=g(x)$، ثمّ استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f وشكّل جدول تغيّراتها.

3) أُكتب معادلة المماس (T) للمنحنى عند النقطة ذات الفاصلة 1.

4) أنشئ (Δ)، (T) والمنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha)=0,8$).

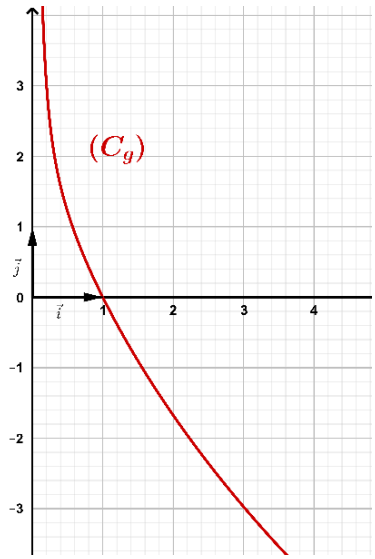
5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x: $x=(1-m)e^{x}$.

6) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عيّن الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x}$ والتي تنعدم من أجل $x=1$.

ب) احسب العدد A مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها: $x=1$، $x=3$ و $y=2x+1$.

التمرين 16: (بكالوريا 2018 - الموضوع الثاني - 7 نقاط)

I) g الدّالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1$ و (C_g) المنحنى البياني الممثّل لها كما هو مبيّن في الشكل المقابل:



- احسب $g(1)$ ثمّ استنتج بيانيا إشارة $g(x)$.

II) f الدّالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$f(x)=\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. ثمّ فسّر النتيجتين بيانيا.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f وشكّل جدول تغيّراتها.

3) بيّن أنّ $y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل، ثمّ ارسم المماس (T) والمنحنى (C_f).

4) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-me$ حلّين متمايزين.

III) n عدد طبيعي حيث $n>1$ ، I_n مساحة الحيّز من المستوي المحدّد بحامل محور الفواصل والمنحنى (C_f) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$.

1) بيّن أنّه من أجل كل طبيعي n حيث $n>1$: $I_n=\ln(1+n\ln n)$.

2) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (I_n).

التمرين 17: (بكالوريا 2017 - الدورة العادية - الموضوع الأول - 7 نقاط)

نعتبر الدّالة العددية f المعرّفة على D حيث $D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أنّ الدّالة f فردية ثمّ فسّر ذلك بيانيا.

2) احسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

- استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور التراتيب.

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من D، $f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}8<\alpha<1{,}9$.

5) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=\frac{2}{3}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثمّ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

6) أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f).

7) m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$.

التمرين 18: (بكالوريا 2017 - الدورة العادية - الموضوع الثاني - 7 نقاط)

I) نعتبر الدّالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2-x^2e^{1-x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ وأعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة، ثمّ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=x(x-2)e^{1-x}$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أُكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

II) نعتبر الدّالة العددية h المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=1-xe^{1-x}$

1) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x)\geq 0$، ثمّ ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T).

2) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0{,}7<\alpha<-0{,}6$.

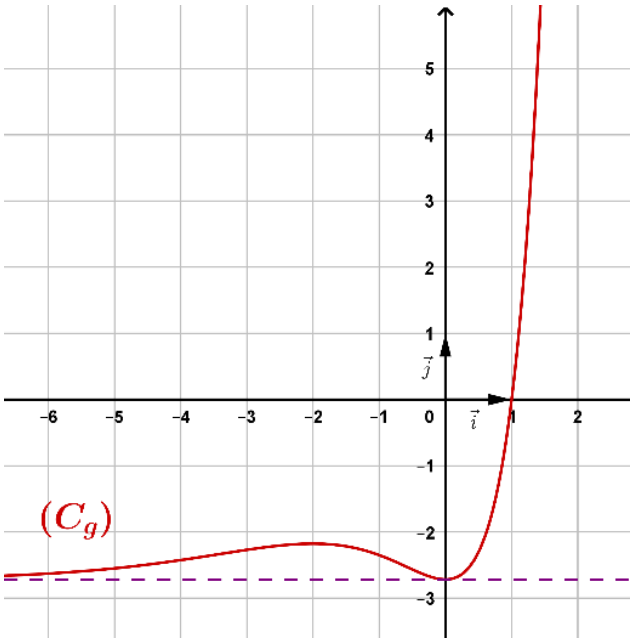
3) أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $]-1;+\infty[$.

4) F الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $F(x)=2x+(x^2+2x+2)e^{1-x}$.

- تحقّق أنّ F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$، ثمّ احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=1$.

التمرين 19: (بكالوريا 2017 - الدورة الاستثنائية - الموضوع الأول - 7 نقاط)

I) نعتبر الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^2e^x-e$ و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (كما هو في الشكل المقابل)



- احسب $g(1)$.
- بقراءة بيانية عيّن إشارة $g(x)$ ثمّ استنتج إشارة $g(-x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x.

II) نعتبر الدّالة f المعرّفة على المجموعة $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$f(x)=e^{-x}-2-\dfrac{e}{x}$، (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب النهايات الآتية: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}f(x)$، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2) بيّن أنّ المنحنى (γ) الذي معادلته: $y=e^{-x}-2$ والمنحنى (C_f) متقاربان بجوار $-\infty$ ثمّ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (γ).

3) بيّن أنّ: من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x لدينا: $f'(x)=\dfrac{-g(-x)}{x^2}$.

4) استنتج أنّ الدّالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-1;0[$ و $]0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1]$، ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

5) بيّن كيف يمكن إنشاء المنحنى (γ) انطلاقا من منحنى الدّالة: $x\mapsto e^x$ ثمّ ارسم بعناية كلا من المنحنيين (γ) و (C_f) في نفس المعلم السابق.

6) ليكن n عددا طبيعيا و $A(n)$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C_f) و(γ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=-e^n$ و $x=-e^{n+1}$.

- احسب العدد الحقيقي l حيث $l=A(0)+A(1)+\cdots+A(2016)$.

التمرين 20: (بكالوريا 2017 - الدورة الاستثنائية - الموضوع الثاني - 7 نقاط)

I) نعتبر f الدّالة العددية المعرّفة على $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب النهايتين: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-\frac{1}{2}}f(x)$، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثمّ فسّر النتيجتين بيانيا.

2) أ) بيّن أنّ: من أجل كل x من $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$، $f'(x)=\dfrac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) حلّ في المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ المعادلة $f(x)=0$ ، ثمّ استنتج إشارة $f(x)$.

4) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يُطلب تعيين احداثييها، ثمّ أنشئ (C_f).

II) لتكن الدّالة g المعرّفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي: $g(x)=2\left[-x+\ln(2x+1)\right]$

1) أ) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g.

ب) بيّن أنّ للمعادلة $g(x)=0$ حلّين أحدهما معدوم و الآخر α حيث: $1,2<\alpha<1,3$.

ج) استنتج إشارة $g(x)$.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1: $I_n=\int_n^{n+1} f(x)dx$.

- أثبت أنّ: من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $0<f(x)<\frac{1}{2x+1}$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} I_n$.

التمرين 21: (بكالوريا 2016 - الدورة العادية - الموضوع الأول - 6,5 نقاط)

I) g الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+1-\ln x$

1) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g.

2) احسب $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ثمّ بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II) f الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{\ln x}{x}+x-1$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

ب) شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

3) أُكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 1.

4) أ) بيّن أنّ (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) حيث: $y=x-1$ معادلة له.

ب) ادرس الوضع النسبي لـ (C) و (Δ).

5) ارسم المستقيمين (T) و (Δ) ثمّ المنحنى (C).

6) m عدد حقيقي. (Δ_m) المستقيم حيث: $y=mx-m$ معادلة له.

أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي m، النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m).

ب) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=mx-m$.

7) أ) جد دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

ب) احسب I_n مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C)، المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=n$ حيث n عدد طبيعي $(n>1)$.

ج) عيّن أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان $n > n_0$ فإنّ : $I_n > 2$.

التمرين 22: (بكالوريا 2016 - الدورة العادية - الموضوع الثاني - 7 نقاط)

I) g الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}$

1) أ) احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) أ) بيّن أنّ للمعادلة $g(x) = 0$ حلّين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $-1,52 < \alpha < -1,51$.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (وحدة الطول $1\,cm$).

1) أ) احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = -g(x)$ (حيث f' هي الدّالة المشتقة للدالة f).

ج) شكّل جدول تغيّرات الدّالة f على $\mathbb{R}$ ، (نأخذ $f(\alpha) \approx 0,38$).

د) عيّن دون حساب : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

2) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

ج) بيّن أنّ للمنحنى (C_f) نقطتي انعطاف يُطلب تعيين احداثييهما.

د) ارسم (Δ) و (C_f) على المجال $[-2; +\infty[$.

ه) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشاراة حلول المعادلة: $(m - x)e^x + (x^2 + 3x + 2) = 0$ على المجال $[-2; +\infty[$.

III) h و H الدالتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = x + f(x)$ و $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

1) عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c حتى تكون الدّالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

2) أ) احسب التكامل التالي : $A(\lambda) = \int_0^{\lambda} h(x)dx$ حيث λ عدد حقيقي موجب تماما وفسّر النتيجة هندسيا.

ب) احسب $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$.

التمرين 23: (بكالوريا 2016 - الدورة الاستثنائية - الموضوع الأول - 7 نقاط)

I) لتكن الدّالة العددية g المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x)=-1+(x+1)e+2\ln(x+1)$

(حيث العدد e هو أساس اللوغاريتم النيبيري)

1) ادرس تغيّرات الدّالة g، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) بيّن أنّ للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α حيث: $-0,34<\alpha<-0,33$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$.

II) لتكن الدّالة f المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{e}{x+1}+\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=-\infty$ واحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$، ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{(x+1)^3}$ (f' هي مشتقة الدّالة f).

ج) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f إلى المجال $]-1;+\infty[$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

د) ارسم المنحنى (C_f). (نقبل أنّ: $f(\alpha)\simeq 3,16$)

2) أ) بيّن أنّ الدّالة: $x\mapsto\dfrac{-1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1;+\infty[$.

ب) احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي:

$x=0$ و $x=1$.

3) نعتبر الدّالة العددية k المعرّفة على $]-1;1[$ بـ : $k(x)=f(-|x|)$ و (C_k) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) بيّن أنّ الدّالة k زوجية.

ب) بيّن كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) ثمّ ارسمه (دون دراسة تغيّرات الدّالة k).

ج) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $k(x)=m$.

التمرين 24: (بكالوريا 2016 - الدورة الاستثنائية - الموضوع الثاني - 6 نقاط)

I) لتكن g الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=2e^x-x^2-x$

1) أ) احسب $g'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$، ثمّ ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g' (g' هي مشتقة الدّالة g).

ب) بيّن أنّه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)>0$.

ج) احسب نهايتي الدّالة g عند كل من $-\infty$ و $+\infty$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1,38<\alpha<-1,37$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x.

II) لتكن f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب) بيّن أنّه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=\dfrac{xe^x g(x)}{\left(e^x-x\right)^2}$ (حيث f' هي مشتقة الدّالة f).

ج) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f على $\mathbb{R}$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) أ) بيّن أنّ $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

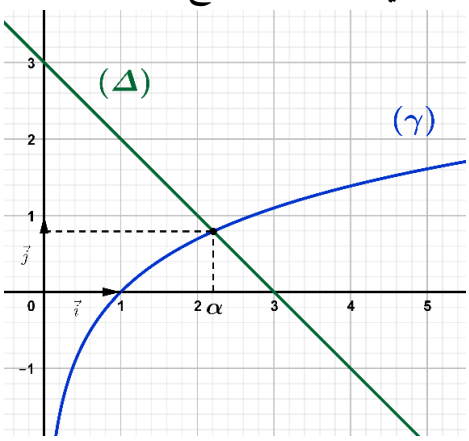
ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2\right]$، ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

ج) أنشئ المنحنى (C_f) (تعطى $f(\alpha)\simeq 0,29$).

التمرين 25: (بكالوريا 2015 - الموضوع الأول - 6,5 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I) (γ) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto \ln x$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=-x+3$؛ α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و(Δ).



1) بقراءة بيانية حدّد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على $]0;+\infty[$.

2) g الدّالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-3+\ln x$

- استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

3) تحقّق أنّ: $2,2<\alpha<2,3$.

II) f الدّالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\ln x-2)$ و(C_f) تمثيلها البياني.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$.

2) أثبت أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$؛ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

3) بيّن أنّ: $f(\alpha)=\dfrac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل؛ ثمّ أنشئ (C_f) على المجال $]0\,;\,e^2]$.

III) F الدّالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ والتي تحقّق: $F(1)=-3$.

1) بيّن أنّ منحنى الدّالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يُطلب تعيين فاصلتيهما.

2) بيّن أنّ $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$؛ ثمّ استنتج عبارة الدّالة F.

التمرين 26: (بكالوريا 2015 - الموضوع الثاني - 6 نقاط)

I) g الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-2x-e^{2x-2}$

1) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g على $\mathbb{R}$.

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$، ثمّ تحقّق أنّ: $0,36<\alpha<0,37$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$ و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$.

ب) استنتج أنّ الدّالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-\alpha]$ و متزايدة تماما على $[-\alpha;+\infty[$.

2) احسب نهاية f عند $+\infty$ و عند $-\infty$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة f .

3) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x-1]$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

4) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+1$.

5) أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ ، نأخذ $f(-\alpha)\approx 0,1$.

6) أ) تحقّق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$.

ب) استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

التمرين 27: (بكالوريا 2014 - الموضوع الأول - 6 نقاط)

نعتبر الدّالة العددية f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=1+\frac{2\ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، فسّر النتيجتين هندسيا.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) أ) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=1$.

ب) أُكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

ج) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α، حيث $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$.

3) أنشئ (T) و (C_f).

4) لتكن الدّالة h المعرّفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي: $h(x)=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}$ و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x)-h(-x)=0$. ماذا تستنتج؟

ب) أنشئ المنحنى (C_h) اعتمادا على المنحنى (C_f).

التمرين 28: (بكالوريا 2014 - الموضوع الثاني - 7 نقاط)

I) لتكن g الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=2x^3-4x^2+7x-4$

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g على $\mathbb{R}$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,7<\alpha<0,8$.

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدّالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$.

ب) استنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يُطلب تعيين معادلة له.

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ) .

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{x\times g(x)}{\left(2x^2-2x+1\right)^2}$ حيث f' هي مشتقة الدّالة f .

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة f . (نأخذ $f(\alpha)\approx -0,1$)

4) احسب $f(1)$ ثمّ حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.

5) أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

6) لتكن h الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=\dfrac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) تحقّق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x)=f(x)-2$.

ب) استنتج أنّ (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه، ثمّ أنشئ (C_h).

التمرين 29: (بكالوريا 2013 - الموضوع الأول - 6,5 نقاط)

I) f الدّالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)$ ، ثمّ استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C).

2) احسب $f'(x)$. بيّن أنّ الدّالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

x	$f(x)$
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	−0,005
0,23	−0,026
0,24	−0,048
0,25	−0,070

3) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α . باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصرا للعدد α .

4) ارسم المستقيمين المقاربين و المنحنى (C)، ثمّ ارسم المنحنى (C') الممثّل للدالة $|f|$.

5) عيّن بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

II) g الدّالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـ : $g(x)=f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

1) ادرس تغيّرات الدّالة g على $]-\infty;1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) أ) تحقّق أنّ $g\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)=0$ ، ثمّ بيّن أنّ: $g'\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$.

ب) استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدّالة g في النقطة ذات الفاصلة $\dfrac{\alpha+1}{2}$.

ج) تحقّق من أنّ : $y=\dfrac{2}{(\alpha-1)^3}x-\dfrac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T).

التمرين 30: (بكالوريا 2013 - الموضوع الثاني - 7 نقاط)

I) g الدّالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$.

1) ادس تغيّرات الدّالة g، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) استنتج أنّه، من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$، $g(x)>0$.

II) f الدّالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2\ cm$)

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$. فسّر النتيجة بيانيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه، من أجل كل x من $]-1;+\infty[$، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$، حيث f' هي مشتقة الدّالة f.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f على المجال $]-1;+\infty[$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

ج) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ تحقّق أنّ $0<\alpha<0,5$.

3) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

4) نقبل أنّ المستقيم (T) ذا المعادلة $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0.

أ) احسب x_0.

ب) ارسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثمّ المنحنى (C_f).

ج) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلّين متمايزين.

التمرين 31: (بكالوريا 2012 - الموضوع الأول - 7 نقاط)

لتكن f الدّالة المعرّفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي : $f(x)=x+5+6\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$، $f'(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x(x-1)}$.

- استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلة له : $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب) ادرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

4) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين α و β حيث $-3,5<\alpha<-3,4$ و $-1,1<\beta<-1$.

5) أنشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ).

6) أ) نعتبر النقطتين $A\left(-1;3+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

- بيّن أنّ $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB).

ب) بيّن أنّ المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يُطلب تعيين احداثيتيها.

7) لتكن g الدّالة المعرّفة على $]-\infty;0[$ كما يلي : $g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+6\ln(1-x)$.

- بيّن أنّ g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

التمرين 32: (بكالوريا 2012 - الموضوع الثاني - 7 نقاط)

I) لتكن g الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=1-xe^x$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-1;+\infty[$.

ب) تحقّق أنّ $0,5<\alpha<0,6$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدّالة f المعرّفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي : $f(x)=(x-1)e^x-x-1$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

2) لتكن f' مشتقة الدّالة f . بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإنّ : $f'(x)=-g(x)$.

- استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2]$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة f .

3) بيّن أنّ $f(\alpha)=-\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تُدوّر النتائج إلى 10^{-2}).

4) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

5) أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين x_1 و x_2 حيث $-1,6<x_1<-1,5$ و $1,5<x_2<1,6$.

ب) أنشئ (Δ) و (C_f).

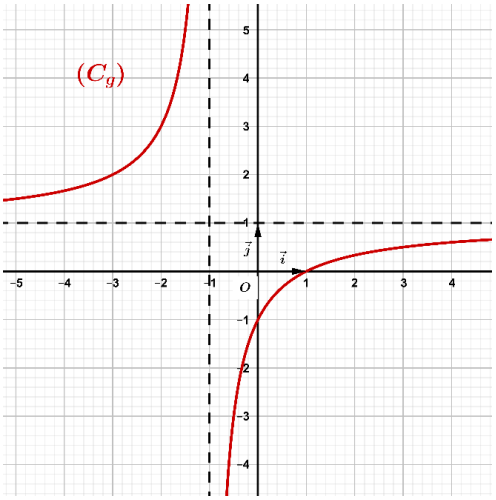
6) لتكن h الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=(ax+b)e^x$

أ) عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$.

ب) استنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

التمرين 33: (بكالوريا 2011 - الموضوع الأول - 7 نقاط)

I) نعتبر الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الشكل المقابل). بقراءة بيانية:



أ) شكّل جدول تغيّرات الدّالة g.

ب) حلّ بيانيا المتراجحة $g(x)>0$.

ج) عيّن بيانيا قيم x التي تكون من أجلها $0<g(x)<1$.

II) لتكن الدّالة f المعرّفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ:

$f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$، $g'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

ب) احسب $f'(x)$ وادرس إشاراتها ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

3) أ) باستعمال الجزء I) السؤال ج)، عيّن إشارة العبارة $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$.

ب) α عدد حقيقي. بيّن أنّ الدّالة $x\mapsto(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$.

ج) تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$، $g(x)=1-\dfrac{2}{x+1}$ ثمّ عيّن دالة أصلية للدالة f على $]1;+\infty[$.

التمرين 34: (بكالوريا 2011 - الموضوع الثاني - 7 نقاط)

نعتبر الدّالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^x-ex-1$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) احسب $f'(x)$ ثمّ ادرس إشاراتها.

ج) شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

2) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $(-\infty)$.

ب) أُكتب معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

ج) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1,75;1,76[$ حلا وحيدا α.

د) ارسم المستقيمين (Δ) و (T) ثمّ المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty;2]$.

3) أ) احسب بدلالة α، المساحة $A(\alpha)$ للحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=\alpha$.

ب) أثبت أنّ: $A(\alpha)=\left(\dfrac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$ (ua هي وحدة المساحات).

التمرين 35: (بكالوريا 2010 - الموضوع الأول - 10 نقاط)

I) لتكن f الدّالة العددية المعرّفة على المجال $I=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ: $f(x)=1+\ln(2x-1)$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}} f(x)$.

2) بيّن أنّ الدّالة f متزايدة تماما على المجال I ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) عيّن فاصلة النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y=x$.

4) أ) أثبت أنّه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل: $f(x)=\ln(x+a)+b$ حيث a، b عددان حقيقيان يُطلب تعيينهما.

ب) استنتج أنّه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدّالة اللوغاريتمية النيبيرية $\ln$ ثمّ ارسم (C) و(C_f).

II) نعتبر الدّالة العددية g المعرّفة على المجال I بـ: $g(x)=f(x)-x$

1) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}} g(x)$ ثمّ بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g على I ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ) احسب $g(1)$ ثمّ بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ حلا وحيدا α.

- تحقّق أنّ $2<\alpha<3$.

ب) ارسم (C_g) منحنى الدّالة g على المجال $\left]\frac{1}{2};5\right[$ في المعلم السابق.

4) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثمّ حدّد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d).

5) برهن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;\alpha[$ فإنّ: $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1;\alpha[$.

III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يأتي: $u_n=f\left(1+\frac{1}{2n}\right)$.

1) عيّن قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $u_n=1+2\ln 3-3\ln 2$.

2) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$.

التمرين 36: (بكالوريا 2010 - الموضوع الثاني - 7 نقاط)

نعتبر الدّالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=x-\frac{1}{e^x-1}$. نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ وفسر هندسيا النتيجة.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب: $y=x$ و $y=x+1$.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ').

4) أثبت أنّ النقطة $\omega\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

5) أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين α و β حيث : $\ln 2<\alpha<1$ و $-1,4<\beta<-1,3$.

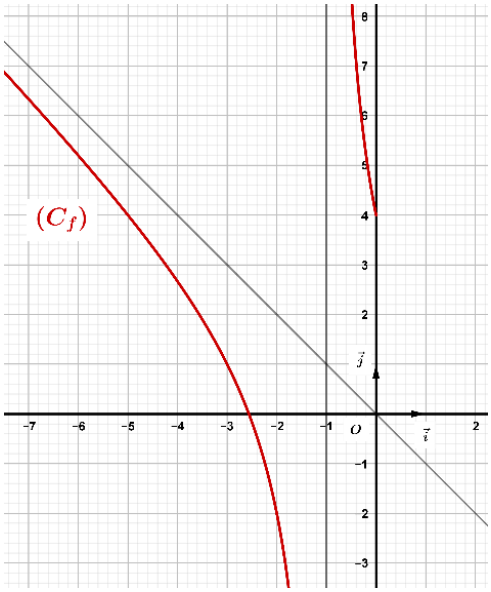
ب) هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ)؟

ج) أرسم (Δ)، (Δ') ثمّ المنحنى (C_f).

د) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(m-1)e^{-x}=m$.

التمرين 37: (بكالوريا 2009 - الموضوع الأول - 7,5 نقاط)

I) f دالة معرّفة على $I=]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ بـ : $f(x)=-x+\frac{4}{x+1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس كما هو مبيّن في الشكل.



1) أ) احسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I.

ب) بقراءة بيانية ودون دراسة اتجاه تغيّر f شكّل جدول تغيّراتها.

2) g دالة معرّفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي:

$g(x)=x+\frac{4}{x+1}$ و (C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

أ) احسب نهاية g عند $+\infty$.

ب) تحقّق من أنّ (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ يُطلب تعيين معادلة له.

ج) ادرس تغيّرات g.

II) k دالة معرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي : $k(x)=|x|+\frac{4}{x+1}$

1) أ) احسب $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}}\frac{k(h)-k(0)}{h}$ ، $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}}\frac{k(h)-k(0)}{h}$. ماذا تستنتج؟

ب) أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

2) أُكتب معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$.

3) أرسم (Δ_1)، (Δ_2) و (C_k).

4) احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_k) والمستقيمات التي معادلاتها : $y=0$ ، $x=\frac{1}{2}$ و $x=-\frac{1}{2}$.

التمرين 38: (بكالوريا 2009 - الموضوع الثاني - 7 نقاط)

الجزء الأول:

h دالة عددية معرّفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$

1) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}}h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$.

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $h'(x)=\frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$ واستنتج اتجاه تغيّر الدّالة h ثمّ أنجز جدول تغيّراتها.

3) احسب $h(0)$ و استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x.

الجزء الثاني:

لتكن f دالة معرّفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$. نسمي (C_f) المنحنى الممثّل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)$ ثمّ فسّر هذه النتيجة بيانيا.

ب) باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ ، برهن أنّ $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$.

ج) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

د) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ واستنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ه) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.

2) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

3) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين $3,3$ و $3,4$.

4) ارسم (C_f).

5) احسب مساحة الحيّز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y=x-1$ ، $x=0$ و $x=1$.

التمرين 39: (بكالوريا 2008 - الموضوع الأول - 7,5 نقاط)

I) نعتبر الدّالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرّفة على المجال $[-2;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$

حيث a و b عددان حقيقيان و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، وحدة الطول $1\,cm$.

- عيّن قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1;1)$ تنتمي إلى (C_f) ومعامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

II) نعتبر الدّالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرّفة على المجال $[-2;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$

و (C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ وفسّر النتيجة بيانيا. (نذكر أنّ $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^u=0$)

ب) ادرس تغيّرات الدّالة g، ثمّ أنشئ جدول تغيّراتها.

ج) بيّن أنّ المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف I يُطلب تعيين احداثييها.

د) أُكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I.

ه) ارسم (C_g).

و) H الدّالة العددية المعرّفة على المجال $[-2;+\infty[$ كما يأتي: $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان.

- عيّن α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$.

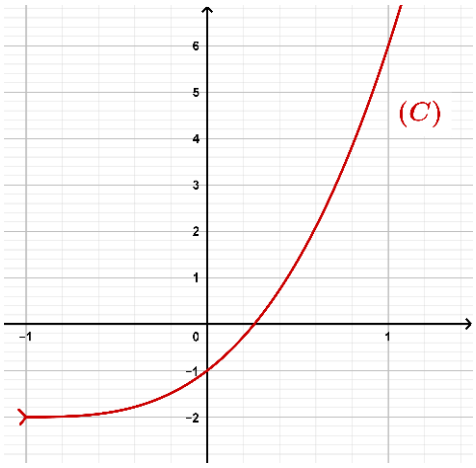
- استنتج الدّالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند القيمة 0.

III) لتكن k الدّالة المعرّفة على المجال $[-2;+\infty[$ كما يأتي : $k(x)=g(x^2)$

- باستعمال مشتقة دالة مركبة، عيّن اتجاه تغيّر الدّالة k ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

التمرين 40: (بكالوريا 2008 - الموضوع الثاني - 7 نقاط)

المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي: $g(x)=x^3+3x^2+3x-1$



1) أ) بقراءة بيانية شكّل جدول تغيّرات الدّالة g و حدّد $g(0)$ وإشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

ب) علل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يحقّق $g(\alpha)=0$.

ج) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

2) f هي الدّالة العددية المعرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$$

وليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f.

ب) عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وفسّر النتيجة بيانيا.

ج) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$ و فسّر النتيجتين بيانيا.

د) شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

3) نأخذ $\alpha\approx 0.26$

أ) عيّن مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2}.

ب) أرسم المنحنى (Γ).

4) أ) أُكتب $f(x)$ على الشكل: $f(x)=x+a+\frac{b}{(x+1)^2}$ ، حيث a و b عددان حقيقيان.

ب) عيّن F الدّالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ و التي تحقّق $F(1)=2$.

المرافق في البكالوريا

المحور الثاني: المتتاليات العددية

السنة الثالثة من التعليم الثانوي

شعبة علوم تجريبية

- بنك مواضيع شهادة البكالوريا من دورة 2008 إلى 2024
- أكثر من 115 تمرين مرتبة حسب الوحدات التعليمية

SCAN ME

المؤلف: الأستاذة أمينة

تواصل معي عبر فيسبوك وسأساعدك على الفهم.

جميع الحقوق محفوظة 2024 ©

التمرين 01: (بكالوريا 2024 - الموضوع الأول - 5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\dfrac{4-u_n}{2+u_n}$

1) احسب الحدود u_1، u_2 وu_3 ثمّ برهن بالتراجع أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $0\leq u_n\leq 2$

2) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+4}$

أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $-\dfrac{2}{3}$ ثمّ اكتب عبارة v_n بدلالة n

ب) بيّن أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=\dfrac{5}{1-v_n}-4$ ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

3) من أجل كل عدد طبيعي n، نضع:

$S_n=v_n+v_{n+1}+\cdots+v_{n+2024}$ و $T_n=\dfrac{1}{4+u_n}+\dfrac{1}{4+u_{n+1}}+\cdots+\dfrac{1}{4+u_{n+2024}}$

- احسب S_n بدلالة n ثمّ استنتج T_n بدلالة n.

التمرين 02: (بكالوريا 2024 - الموضوع الثاني - 5 نقاط)

1) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $[2;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x+1}{2x}$

- شكّل جدول تغيرات الدّالة f ثمّ استنتج أنّه من أجل كل x من $[2;+\infty[$ فإنّ $\dfrac{1}{2}<f(x)\leq\dfrac{3}{4}$

2) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n، $n\geq 2$ بـ: $u_n=\dfrac{n}{2^n}$

أ) بيّن أنّه: من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $n\geq 2$ فإنّ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leq\dfrac{3}{4}$

ب) أثبت أنّه: من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $n\geq 2$ فإنّ $u_n\leq\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2}$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

ج) نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $n\geq 2$: $S_n=\dfrac{u_2}{2}+\dfrac{u_3}{3}+\cdots+\dfrac{u_n}{n}$

- بيّن أنّ: $S_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$ ثمّ عيّن العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n=\dfrac{511}{1024}$.

التمرين 03: (بكالوريا 2023 - الموضوع الأول - 5 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرّفة بـ: $u_0=\dfrac{1}{2}$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}=-1+\dfrac{2}{2-u_n}$

1) أ) برهن بالتراجع أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $0<u_n\leq\dfrac{1}{2}$.

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

2) نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_n=\dfrac{1}{u_n}-1$

أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 ثمّ أُكتب عبارة v_n بدلالة n.

ب) استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n=\dfrac{1}{2^n+1}$ ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

3) نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \cdots + \frac{1}{u_n}$

- احسب S_n بدلالة n ثمّ بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $T_n = 2^{n+1} + n$.

التمرين 04: (بكالوريا 2023 - الموضوع الثاني - 5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 0$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + 1$

1) أ) برهن بالتراجع أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n < 5$.

ب) بيّن أنّ (u_n) متزايدة تماما.

2) نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_n = u_n - 5$

أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{4}{5}$ يطلب تعيين حدّها الأول v_0.

ب) أُكتب عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه: من جل كلّ عدد طبيعي n، $u_n = -5\left(\frac{4}{5}\right)^n + 5$.

ج) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

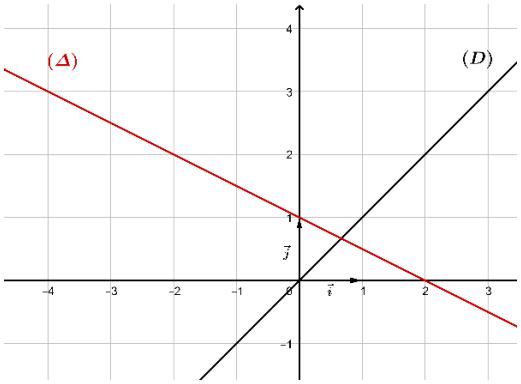
3) نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

- احسب S_n بدلالة n ثمّ بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $T_n = 5n - 20\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$.

التمرين 05: (بكالوريا 2022 - الموضوع الأول - 5 نقاط)

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، (D) و(Δ) المستقيمان المعرفان كما يلي: $\begin{cases}(\Delta): y = -\frac{1}{2}x + 1\\ (D): y = x\end{cases}$

المتتالية العددية (u_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = -4$ و $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 1$



1) أنقل الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثمّ مثّل على حامل محور الفواصل الحدود: u_0، u_1، u_2 وu_3 مبرزا خطوط التمثيل.

2) أ) هل المتتالية (u_n) رتيبة ؟ برّر إجابتك.

ب) ضع تخمينا حول تقارب المتتالية (u_n).

3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \left(u_n - \frac{2}{3}\right)^2$

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ثمّ احسب v_0.

ب) عبّر عن v_n بدلالة n ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ واستنتج أنّ (u_n) متقاربة.

- بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_0 \times v_1 \times \cdots \times v_{n-1} = \left(\frac{14}{3}\right)^{2n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2-n}$.

التمرين 06: (بكالوريا 2022 - الموضوع الثاني - 5 نقاط)

(u_n) المتتالية الهندسية المعرّفة على $\mathbb{N}$ وحدودها موجبة تماما حيث: $\begin{cases} u_0 \times u_2 = e^2 \\ \ln u_1 + \ln u_7 = -4 \end{cases}$

1) أ) عيّن u_1 والأساس q للمتتالية (u_n).

ب) تحقق أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n = e^{2-n}$.

2) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

3) نعتبر المتتالة العددية (v_n) المعرّفة بـ: $v_0 = e^3$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_{n+1} = v_n + u_n$

أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_n = \dfrac{e^{3-n} - e^4}{1-e}$.

ب) بيّن أنّ (v_n) متقاربة .

4) أ) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $\dfrac{1}{e}v_n = \dfrac{1}{1-e}\left(u_n - e^3\right)$.

ب) نعتبر المجموع S'_n حيث: $S'_n = \dfrac{1}{e}v_0 + \dfrac{1}{e}v_1 + \cdots + \dfrac{1}{e}v_n$

- تحقق أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $S'_n = \dfrac{1}{1-e}\left[S_n - (n+1)e^3\right]$.

التمرين 07: (بكالوريا 2021 - الموضوع الأول - 5 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = -4n + 3$

1) بيّن أنّ المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r و حدّها الأول u_0.

2) من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

أ) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $S_n = -2n^2 + n + 3$.

ب) عيّن قيمة العدد الطبيعي n حيث: $S_n = -30132$.

3) المتتالية العددية (v_n) حدودها موجبة تماما ومن أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n = \ln(v_n)$

أ) أُكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

ب) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها e^{-4}.

4) من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع: $S'_n = \ln\left[v_0\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\right] + \ln\left[v_1\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\right] + \cdots + \ln\left[v_n\left(1-\dfrac{1}{n+2}\right)\right]$

- احسب S'_n بدلالة n.

التمرين 08: (بكالوريا 2021 - الموضوع الثاني - 5 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرّفة بحدّها الأول u_0 حيث: $u_0 = 0$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \dfrac{3}{8}(u_n + 5)$

1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n < 3$.

2) بيّن أنّ (u_n) متزايدة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

3) المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 3(3 - u_n)$

أ) احسب v_0 ثمّ بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{3}{8}$.

ب) أُكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ثمّ استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n = 3-3\left(\frac{3}{8}\right)^n$.

ج) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n : $P_n = (3-u_0)\times(3-u_1)\times\cdots\times(3-u_n)$

- احسب P_n بدلالة n.

التمرين 09: (بكالوريا 2020 - الموضوع الأول - 5 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرّفة بـ : $u_0 = \alpha$ (α عدد حقيقي)، ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - 1$

1) نفرض أنّ $\alpha = -4$.

- برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n = -4$.

2) نفرض أنّ $\alpha \neq -4$.

نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n + 4$.

أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$.

ب) أُكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n و α ثمّ بيّن أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.

ج) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

- احسب S_n بدلالة n و α ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

التمرين 10: (بكالوريا 2020 - الموضوع الثاني - 5 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) المعرّفة بـ : $u_0 = 0$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$

1) احسب كلا من u_1 و u_2 ثمّ خمّن اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

2) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n - n + 1$

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 يطلب حساب حدّها الأول.

ب) أُكتب v_n بدلالة n ثمّ استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

ج) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

3) من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

أ) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $S_n = \frac{1}{2}\left(3^{n+1} + n^2 - n - 3\right)$.

- احسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

التمرين 11: (بكالوريا 2019 - الموضوع الأول - 4 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : $u_0 = 13$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$

1) أ) برهن بالتراجع أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n > 1$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) واستنتج أنّها متقاربة.

2) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln(u_n - 1)$.

- أثبت أنّ المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

3) أُكتب v_n بدلالة n ثمّ بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n=1+\frac{12}{5^n}$ و احسب عندئذ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

- بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $(u_0-1)\times(u_1-1)\times\cdots\times(u_n-1)=\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$.

التمرين 12: (بكالوريا 2019 - الموضوع الثاني - 4 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $]4;7[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x+2}+4$

1) أ) بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $]4;7[$.

ب) استنتج أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]4;7[$ فإنّ $f(x)\in]4;7[$.

2) برهن أنّه: من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]4;7[$ فإنّ $f(x)-x=\frac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}}$ ثمّ استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]4;7[$ فإنّ $f(x)-x>0$.

3) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=4$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$

أ) برهن بالتراجع أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $4\le u_n<7$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثمّ بيّن أنّها متقاربة.

4) أ) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $7-u_{n+1}<\frac{1}{4}(7-u_n)$.

ب) استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $0<7-u_n<3\left(\frac{1}{4}\right)^n$، ثمّ احسب نهاية المتتالية (u_n).

التمرين 13: (بكالوريا 2018 - الموضوع الأول - 4 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرّفة بحدّها الأول u_0 حيث $u_0=1$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_{n+1}=1-\frac{9}{u_n+5}$

1) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n>-2$.

ب) بيّن أنّ (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ واستنتج أنّها متقاربة.

2) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n: $v_n=\frac{1}{u_n+2}$.

- أثبت أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدّها الأول.

3) عبّر بدلالة n عن v_n و u_n، واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $S=u_0v_0+u_1v_1+\cdots+u_nv_n=\frac{1}{3}(1-n^2)$.

التمرين 14: (بكالوريا 2018 - الموضوع الثاني - 4 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرّفة كما يلي: $u_0=0$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_{n+1}=u_n+\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$

1) احسب كلا من u_1، u_2 و u_3.

2) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $\frac{2n+3}{2n+1}>1$ ثمّ استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

3) (v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـ: $v_n=2n+1$.

أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $e^{u_n}=v_n$.

ب) استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) أحسب المجموعين S_n و T حيث: $S_n=\ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right)+\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$ و $T=e^{u_{1439}}+e^{u_{1440}}+\cdots+e^{u_{2018}}$

التمرين 15: (بكالوريا 2017 - الدورة العادية - الموضوع الأول - 4 نقاط)

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي:

$u_0=\frac{1}{4}$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}=3-\frac{10}{u_n+4}$ و $v_n=\frac{u_n+2}{1-u_n}$

1) أ) برهن بالتراجع أنّ: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $0<u_n<1$.

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

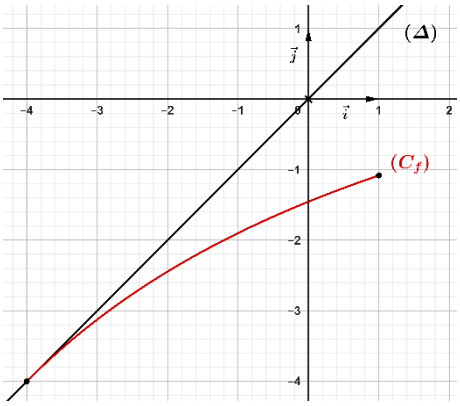
2) أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ ثمّ عبّر عن حدّها العام v_n بدلالة n.

ب) أثبت أنّ: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n=1-\frac{3}{v_n+1}$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 16: (بكالوريا 2017 - الدورة العادية - الموضوع الثاني - 4 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

f الدالة المعرّفة على المجال $[-4;1]$ كما يلي: $f(x)=\frac{3x-16}{x+11}$ وليكن (C_f) المنحنى الممثّل لها، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$



I) تحقق أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$ ثمّ بيّن أنّ: من أجل كلّ $x\in[-4;1]$ فإنّ $f(x)\in[-4;1]$

II) (u_n) متتالية معرّفة بحدّها الأوّل $u_0=0$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$

1) أنقل الشكل المقابل ثمّ مثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها ثمّ ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $-4\le u_n\le 0$ ثمّ بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرّفة كما يلي: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_n\times u_n=1-4v_n$

- أثبت أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{7}$ ثمّ احسب المجموع S حيث:

$S=v_0\times u_0+v_1\times u_1+\cdots+v_{2016}\times u_{2016}$

التمرين 17: (بكالوريا 2017 - الدورة الاستثنائية - الموضوع الأول - 4 نقاط)

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+1\end{cases}\quad\text{و}\quad\begin{cases}v_0=6\\ v_{n+1}=\frac{3}{4}v_n+1\end{cases}$$

1) احسب الحدّين u_1 و v_1.

2) أ) أكتب $u_{n+2}-u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1}-u_n$.

ب) باستعمال البرهان بالتراجع برهن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما والمتتالية (v_n) متناقصة تماما.

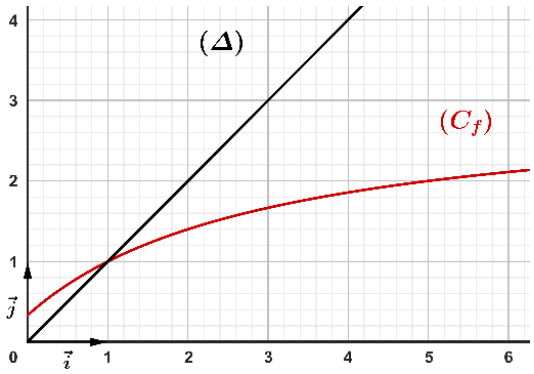
3) نعتبر المتتالية (w_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $w_n = u_n - v_n$

- برهن أنّ المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول w_0 ثمّ عبّر عن w_n بدلالة n.

4) بيّن أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

التمرين 18: (بكالوريا 2017 - الدورة الاستثنائية - الموضوع الثاني - 4 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ والمستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$.



α عدد حقيقي موجب، (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0=\alpha$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_{n+1}=f(u_n)$

I) عيّن قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

II) نضع في كلّ ما يلي $\alpha=5$

1) أ) أنقل الشكل المقابل ثمّ مثّل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حساب الحدود).

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـ: $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$

أ) برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ يطلب تعيين حدّها الأول.

ب) عبّر بدلالة n عن v_n و u_n ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n=v_n+v_{n+1}+\cdots+v_{n+2016}$، ثمّ استنتج بدلالة n المجموع S'_n حيث

$$S'_n=\frac{1}{u_n+1}+\frac{1}{u_{n+1}+1}+\cdots+\frac{1}{u_{n+2016}+1}$$

التمرين 19: (بكالوريا 2016 - الدورة العادية - الموضوع الأول - 5 نقاط)

I) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{2x+8}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

2) عيّن احداثيي نقطة تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) الذي $y=x$ معادلة له.

3) ارسم (C) و (Δ).

II) (u_n) المتتالية العددية معرّفة بـ: $u_0=0$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$

1) مثّل في الشكل السابق على محور الفواصل، الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (بدون حسابها) موضّحا خطوط الإنشاء.

2) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها.

3) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $0\le u_n<4$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

ج) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $4-u_{n+1}\leq\frac{1}{2}(4-u_n)$.

- استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $4-u_n\leq\frac{1}{2^n}(4-u_0)$.

د) استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين 20: (بكالوريا 2016 - الدورة العادية - الموضوع الثاني - 4 نقاط)

I f الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{5x}{x+2}$

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

2) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f(x)\geq 0$.

II (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0=1$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{5u_n}{u_n+2}$

1) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $1\leq u_n\leq 3$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)، ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

2) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=1-\frac{3}{u_n}$

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$، يطلب تعيين حدّها الأول v_0.

ب) أُكتب بدلالة n عبارة v_n ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n.

ج) احسب نهاية المتتالية (u_n).

د) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\cdots+\frac{1}{u_n}$.

التمرين 21: (بكالوريا 2016 - الدورة الاستثنائية - الموضوع الأول - 5 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $I=[0;4]$ كما يلي: $f(x)=\frac{13x}{9x+13}$

1) أ) بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال I.

ب) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال I، $f(x)$ ينتمي إلى I.

2) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0=4$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ من أجل كلّ عدد طبيعي n.

أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $0\leq u_n\leq 4$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

3) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n\neq 0$.

4) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=2+\frac{13}{u_n}$

أ) برهن أنّ المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول v_0.

ب) أُكتب v_n بدلالة n.

ج) استنتج أنّ: $u_n=\frac{52}{36n+13}$ وذلك من أجل كلّ عدد طبيعي n، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين 22: (بكالوريا 2016 - الدورة الاستثنائية - الموضوع الثاني - 4,5 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية بحدّها الأول $u_0=0$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{2u_n+2}{u_n+3}$

ولتكن المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـ : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$

1) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0.

2) أ) عبّر بدلالة n عن الحد العام v_n .

ب) استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

ج) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) أ) احسب بدلالة n المجموع: $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$.

ب) تحقق أنّ: $\dfrac{1}{u_n+2}=\dfrac{1}{3}(1-v_n)$ وذلك من أجل كلّ عدد طبيعي n.

ج) احسب بدلالة n المجموع: $S'_n=\dfrac{1}{u_0+2}+\dfrac{1}{u_1+2}+\cdots+\dfrac{1}{u_n+2}$.

التمرين 23: (بكالوريا 2015 - الموضوع الأول - 4,5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : $u_0=e^2-1$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1}=(1+u_n)e^{-2}-1$

1) احسب u_1 ، u_2 و u_3.

2) أثبت أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $1+u_n>0$.

3) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة. هل هي متقاربة ؟ علّل.

4) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n : $v_n=3(1+u_n)$

أ) أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب) أُكتب v_n و u_n بدلالة n، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

ج) بيّن أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$: $\ln v_0+\ln v_1+\ln v_2+\cdots+\ln v_n=(n+1)(-n+2+\ln 3)$.

التمرين 24: (بكالوريا 2015 - الموضوع الثاني - 5 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

I) f الدالة المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{4x+1}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني

1) عيّن اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

2) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) ذي المعادلة $y=x$.

3) مثّل (C_f) و (D) على المجال $[0;6]$.

II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases}u_0=2\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$ و $\begin{cases}v_0=5\\v_{n+1}=f(v_n)\end{cases}$

1) أ) أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 ؛ v_0 ، v_1 ، v_2 و v_3 دون حسابها.

ب) خمّن اتجاه تغيّر وتقارب كلّ من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

2) أ) أثبت أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$: $2\le u_n<\alpha$ و $\alpha<v_n\le 5$ حيث $\alpha=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر كلّ من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

3) أ) أثبت أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1}-u_{n+1}\leq\frac{1}{3}(v_n-u_n)$.

ب) بيّن أنّه من من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$: $0<v_n-u_n\leq\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

ج) استنتج أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ ؛ ثمّ حدد نهاية كلّ من (u_n) و (v_n).

التمرين 25: (بكالوريا 2014 - الموضوع الأول - 4 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: $u_0=1$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-\frac{4}{3}$

و (v_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_n=u_n+4$

1) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول.

2) أُكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n.

3) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.

4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_2+\cdots+u_n$.

5) لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $w_n=5\left(\frac{1}{v_n+5}-1\right)$

أ) بيّن أنّ المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-w_n)$.

التمرين 26: (بكالوريا 2014 - الموضوع الثاني - 4 نقاط)

I) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدّها العام: $u_n=e^{\frac{1}{2}-n}$

(e هو أساس اللوغاريتم النيبيري)

1) بيّن أنّ (u_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

2) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$، ماذا تستنتج؟

3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n$.

II) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_n=\ln(u_n)$ ($\ln$ يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري).

1) عبّر عن v_n بدلالة n، ثمّ استنتج نوع المتتالية (v_n).

2) أ) احسب بدلالة n العدد P_n حيث: $P_n=\ln(u_0\times u_1\times u_2\times\cdots\times u_n)$.

ب) عيّن مجموعة قيّم العدد الطبيعي n بحيث: $P_n+4n>0$.

التمرين 27: (بكالوريا 2013 - الموضوع الأول - 4 نقاط)

I) المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\frac{5^{n+1}}{6^n}$

1) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

2) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$.

II) المتتالية (u_n) معرّفة بـ: $u_0=1$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\sqrt{5u_n+6}$

1) برهن بالتراجع أنّه، من أجل كلّ عدد طبيعي n، $1\leq u_n\leq 6$.

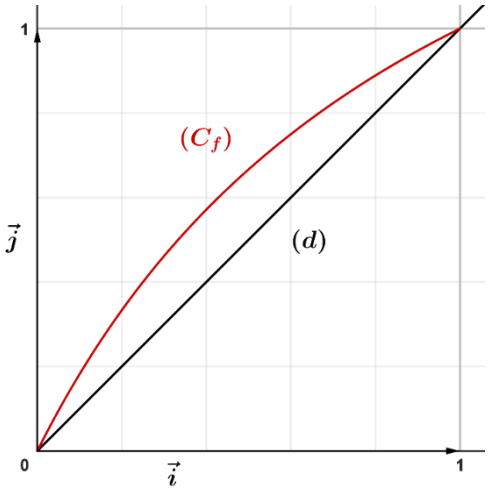
2) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

3) أ) برهن أنّه، من أجل كلّ عدد طبيعي n : $6-u_{n+1} \le \frac{5}{6}(6-u_n)$.

ب) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $0 \le 6-u_n \le v_n$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 28: (بكالوريا 2013 - الموضوع الثاني - 4 نقاط)

في الشكل المقابل، (C_f) هو التمثيل البياني للدّالة f المعرّفة على $[0;1]$ بالعلاقة: $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ والمستقيم (d) ذو المعادلة $y=x$



1) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0=\frac{1}{2}$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$

أ) أعد رسم هذا الشكل في ورقة الإجابة ، ثمّ مثّل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها، مبررا خطوط التمثيل.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) أ) أثبت أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.

ب) برهن بالتراجع أنّه، من أجل كلّ عدد طبيعي n : $0<u_n<1$.

ج) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n}$

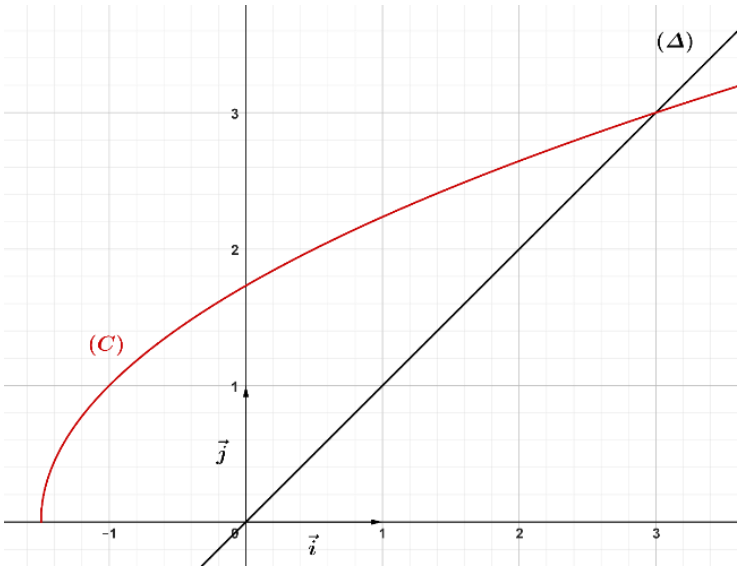
أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، يطلب حساب حدّها الأول v_0.

ب) احسب نهاية (u_n).

التمرين 29: (بكالوريا 2012 - الموضوع الأول - 5 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة بحدّها الأول $u_0=1$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3}$

1) لتكن h الدالة المعرّفة على المجال $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$ كما يلي: $h(x)=\sqrt{2x+3}$ ، (C) تمثيلها البياني و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ في المستوى المنسوب الى معلم متعامد و متجانس (انظر الشكل المقابل)



أ) أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثمّ مثّل على محور الفواصل الحدود التالية u_0، u_1، u_2 و u_3.

(دون حسابها وموضّحا خطوط الإنشاء)

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (u_n) وتقاربها.

2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $0<u_n<3$.

3) أ) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

ب) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 30: (بكالوريا 2012 - الموضوع الثاني - 4,5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدّها الأول $u_0=\frac{13}{4}$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_{n+1}=3+\sqrt{u_n-3}$

1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $3<u_n<4$.

2) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=\frac{-{u_n}^2+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$. استنتج أنّ (u_n) متزايدة تماما.

3) برّر لماذا (u_n) متقاربة.

4) (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\ln(u_n-3)$

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، ثمّ احسب حدّها الأول.

ب) أُكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

ج) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n: $P_n=(u_0-3)(u_1-3)(u_2-3)\times\cdots\times(u_n-3)$.

- أُكتب P_n بدلالة n، ثمّ بيّن أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n=\frac{1}{16}$.

التمرين 31: (بكالوريا 2011 - الموضوع الأول - 3 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=-1$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}=3u_n+1$.

(v_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـ: $v_n=u_n+\frac{1}{2}$.

في كلّ حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات، إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حدّدها مع التعليل.

1) المتتالية (v_n):

أ) حسابية ب) هندسية ج) لا حسابية ولا هندسية

2) نهاية المتتالية (u_n) هي:

أ) $+\infty$ ب) $-\frac{1}{2}$ ج) $-\infty$

3) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n، $S_n=-\frac{1}{2}\left[1+e^{\ln 3}+e^{2\ln 3}+e^{3\ln 3}+\cdots+e^{n\ln 3}\right]$

أ) $S_n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$ ب) $S_n=\frac{1-3^n}{4}$ ج) $S_n=\frac{1-3^{n+1}}{4}$

التمرين 32: (بكالوريا 2011 - الموضوع الثاني - 4 نقاط)

α عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1.

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=6$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\alpha u_n+1$.

(v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـ: $v_n=u_n+\frac{1}{\alpha-1}$.

1) أ) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها α.

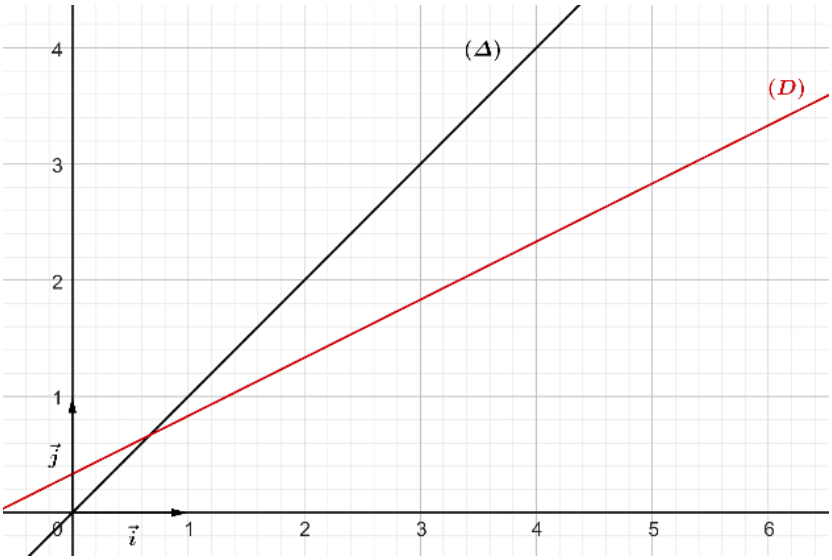
ب) أُكتب بدلالة n و α، عبارة v_n ثمّ استنتج بدلالة n و α عبارة u_n.

ج) عيّن قيّم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها المتتالية (u_n) متقاربة.

2) نضع $\alpha=\frac{3}{2}$. احسب بدلالة n، المجموعين S_n و T_n حيث: $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$ و $T_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

التمرين 33: (بكالوريا 2010 - الموضوع الثاني - 5 نقاط)

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مثّلنا المستقيمين (Δ) و (D) معادلتيهما على الترتيب: $y=x$ و $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$



1) لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=6$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}$

أ) أنقل الشكل ثمّ مثّل على محور الفواصل الحدود التالية: u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 دون حسابها مبيّنا خطوط الرسم.

ب) عيّن احداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D).

ج) أعط تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

2) أ) باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n>\frac{2}{3}$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n=u_n-\frac{2}{3}$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول.

ب) أُكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n واستنتج عبارة u_n بدلالة n.

ج) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$ واستنتج المجموع S'_n حيث: $S_n'=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

التمرين 34: (بكالوريا 2009 - الموضوع الأول - 3,5 نقاط)

(u_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_{n+2}=\frac{4}{3}u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n$ ، $u_1=2$ و $u_0=1$

المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=u_{n+1}-u_n$

1) احسب v_0 و v_1.

2) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

3) أ) احسب بدلالة n المجموع S_n: $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_{n-1}$.

ب) برهن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1$.

ج) بيّن أنّ (u_n) متقاربة.

التمرين 35: (بكالوريا 2009 - الموضوع الثاني - 5 نقاط)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدّها الأول u_1 وأساسها q حيث: $\begin{cases}u_1+2u_2+u_3=32\\u_1\times u_2\times u_3=216\end{cases}$

1) أ) احسب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول u_1.

ب) أُكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

ج) احسب S_n حيث: $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$ بدلالة n ثمّ عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n=728$.

2) (v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي:

$$v_1 = 2 \qquad \text{و} \qquad v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$$

أ) احسب v_2 و v_3 .

ب) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n غير معدوم: $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$. بيّن أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ج) أُكتب w_n بدلالة n ثمّ استنتج v_n بدلالة n .

التمرين 36: (بكالوريا 2008 - الموضوع الأول - 4 نقاط)

1) نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $I = [1;2]$ بالعبارة: $f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$

أ) بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على I .

ب) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I .

2) (u_n) هي المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي:

$$u_0 = \frac{3}{2} \qquad \text{و} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I .

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثمّ استنتج أنها متقاربة.

3) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$.

ب) عين النهاية: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين 37: (بكالوريا 2008 - الموضوع الثاني - 5 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرّفة كما يلي:

$u_0 = \frac{5}{2}$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$

1) أ) ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ والمنحني (d) الممثّل للدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$.

أ) باستعمال الرسم السابق، مثّل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود: u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 .

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n \leq 6$.

ب) تحقق أنّ (u_n) متزايدة.

ج) هل (u_n) متقاربة؟ برّر إجابتك.

3) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$

أ) أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب) أُكتب عبارة u_n بدلالة n ثمّ استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

المرافق في البكالوريا

المحور الثالث: الاحتمالات

السنة الثالثة من التعليم الثانوي

شعبة علوم تجريبية

- بنك مواضيع شهادة البكالوريا من دورة 2008 إلى 2024
- أكثر من 115 تمرين مرتبة حسب الوحدات التعليمية

SCAN ME

المؤلف: الأستاذة أمينة

تواصل معي عبر فيسبوك وسأساعدك على الفهم.

جميع الحقوق محفوظة 2024 ©

التمرين 01: (بكالوريا 2024 - الموضوع الأول - 4 نقاط)

يحتوي كيس على 11 كريّة متماثلة لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي: كريتان بيضاوان مرقمتان بـ:1، 3 وأربع كريّات حمراء مرقمة بـ: 0، 1، 1، 3 وخمس كريّات خضراء مرقمة بـ: 0، 1، 1، 3، 4

I) نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريّات من الكيس ونعتبر الحوادث الآتية:

A: " الحصول على 3 كريّات من نفس اللّون "، B: " الحصول على 3 كريّات جُداء أرقامها عدد فردي"، C: "الحصول على 3 كريّات جُداء أرقامها عدد زوجي".

1) أ) احسب $P(A)$ احتمال الحادثة A وبيّن أنّ: $P(B)=\frac{56}{165}$ ثم استنتج $P(C)$

ب) احسب الاحتمال الشرطي $P_A(B)$

2) X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريّات، عدد الكريّات التي تحمل رقما زوجيا.

أ) عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

ب) احسب احتمال الحادثة $(X>1)$

II) نسحب الآن من الكيس عشوائيا 3 كريّات على التوالي وبدون إرجاع.

- احسب احتمال الحادثة D: "الحصول على 3 كريّات جُداء أرقامها معدوم".

التمرين 02: (بكالوريا 2024 - الموضوع الثاني - 4 نقاط)

يحتوي كيس على 5 قطع كهربائية غير متمايزة ولا نفرق بينها باللمس، منها 3 قطع سليمة وقطعتان غير سليمتين. نرمز إلى القطعة السليمة بالرّمز S وإلى القطعة غير السليمة بالرّمز $\overline{S}$.

نسحب عشوائيا من الكيس 3 قطع على التوالي مع الإرجاع، ونعتبر الحوادث:

A: "القطعة الأولى المسحوبة سليمة" ، B: "سحب قطعة واحدة فقط سليمة"، C: "القطعة الثالثة المسحوبة سليمة"

1) شكّل شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه التجربة.

2) احسب $P(A)$، $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B ثمّ بيّن أنّ: $P(C)=\frac{3}{5}$.

3) احسب الاحتمال الشرطي $P_C(A)$، هل الحادثتان A و C مستقلتان؟

4) نُرفق بكل قطعة سليمة العدد 10 وبكل قطعة غير سليمة العدد -10، ونعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب من الكيس لثلاث قطع مجموع الأعداد المرفقة بها.

أ) برّر أنّ قيم المتغيّر العشوائي X هي: -30، -10، 10، 30.

ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ثمّ احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين 03: (بكالوريا 2023 - الموضوع الأول - 4 نقاط)

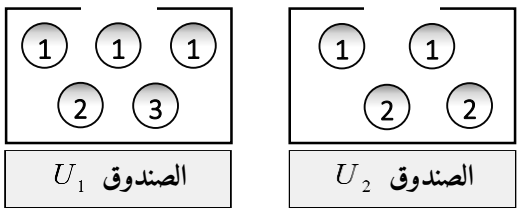
يحتوي صندوق U_1 على 5 كريات تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، 3 ويحتوي صندوق U_2 على 4 كريات تحمل الأرقام 1 ، 1، 2، 2 (كل الكريات متماثلة ولا نفرّق بينها عند اللّمس).

نختار عشوائيا أحد الصندوقين ونسحب منه عشوائيا كريتين في آن واحد.

1) نعتبر الحوادث: A "سحب كريتين تحملان رقمين فرديين" ، B "سحب كريتين تحملان رقمين زوجيين" و C " سحب كريتين إحداهما تحمل رقما فرديا والأخرى تحمل رقما زوجيا"

أ) انجز الشجرة التي تُنمذج هذه التجربة.

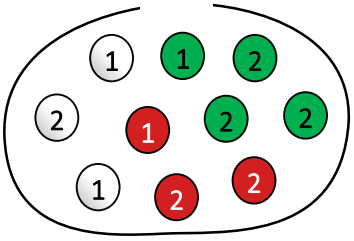
ب) بيّن أنّ $P(A)=\frac{23}{60}$ و $P(B)=\frac{1}{12}$ ثمّ احسب $P(C)$.



2) نفرغ محتوى الصندوقين U_1 و U_2 في صندوق جديد U_3 ثم نسحب، منه عشوائيا كريتين في آن واحد.
X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين جُداء الرقمين المسجلين عليهما.
أ) برّر أنّ مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X هي $\{1;2;3;4;6\}$.
- عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين 04: (بكالوريا 2023 - الموضوع الثاني - 4 نقاط)

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة و لا نفرّق بينها باللّمس، موزعة كما يلي: ثلاث كريات بيضاء مرقمة بـ: 1 ،1، 2 وثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 1 ، 2 ، 2 وأربع كريات خضراء مرقمة بـ : 1 ، 2 ، 2 ، 2.
نسحب عشوائيا و في آن واحد كريتين من الكيس و نعتبر الحوادث A ، B ، C الآتية:
A " الحصول على كريتين من نفس اللّوْن " ، B " الحصول على كرية خضراء على الأقل" و C "الحصول على كريتين تحملان رقمين زوجيين"



1) أ) بيّن أنّ احتمال الحدث A يساوي $\frac{4}{15}$ وأنّ احتمال الحدث B يساوي $\frac{2}{3}$.
ب) احسب الاحتمالين $P(C)$ و $P(A\cap C)$. هل الحدثان A و C مستقلان؟
ج) استنتج احتمال الحصول على على كريتين من نفس اللّوْن علما أنّهما تحملان رقمين زوجيين.
2) نعتبر المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما.
أ) برّر أنّ مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X هي $\{2;3;4\}$.
ب) عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين 05: (بكالوريا 2021 - الموضوع الأول - 4 نقاط)

يراد تشكيل بطريقة عشوائية لجنة تتكون من عضوين من بيّن ثلاثة رجال H_1، H_2 و H_3 وامرأتان F_1 و F_2.
نعتبر الحوادث A ، B و C حيث:
- A " عضوا اللّجنة من نفس الجنس "
- B " عضوا اللّجنة من جنسين مختلفين "
- C " H_1 عضو في اللّجنة ".

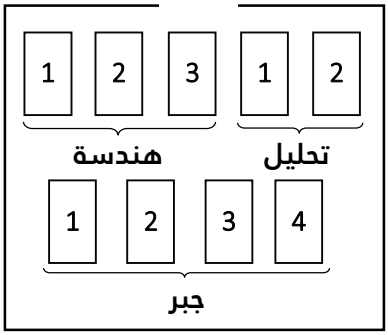
1) أ) احسب $p(A)$ ، $p(B)$ احتمال A و B على الترتيب.
ب) بيّن أنّ $p(C)$ احتمال الحدث C يساوي $\frac{2}{5}$.
2) المتغيّر العشوائي X يرفق بكل إمكانية اختيار لعضوين عدد الرجال في اللّجنة.
أ) برّر أنّ مجموعة قيم X هي $\{0;1;2\}$.
ب) عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X و احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين 06: (بكالوريا 2021 - الموضوع الثاني - 4 نقاط)

صندوق به 9 بطاقات متماثلة لا نفرّق بينها باللّمس ، مكتوب على كل منها سؤال واحد ، منها ثلاثة أسئلة في الهندسة مرقمة بـ: 1، 2 و 3 ، أربعة أسئلة في الجبر مرقمة بـ: 1 ، 2 ، 3 و 4 وسؤالين في التحليل مرقمين بـ: 1 و 2.

نسحب عشوائيا بطاقة واحدة من الصندوق و نعتبر الحوادث التالية:

- A " سحب سؤال في الهندسة "
- B " سحب سؤال في التحليل "
- C " سحب سؤال في الجبر يحمل رقما زوجيا "



1) احسب $p(A)$ ، $p(B)$ و $p(C)$ احتمال الحوادث A ، B و C على الترتيب.

2) احسب احتمال سحب سؤال رقمه مختلف عن 1.

3) المتغيّر العشوائي X يرفق بكلّ بطاقة مسحوبة رقم السؤال المسجل عليها.

أ) برّر أنّ مجموعة قيم X هي $\{1;2;3;4\}$.

ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب $E(X)$ أمله الرياضياتي.

ج) استنتج قيمة $E(2021X+1442)$.

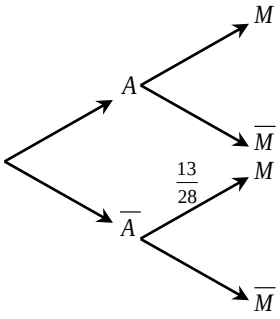
التمرين 07: (بكالوريا 2020 - الموضوع الأول - 4 نقاط)

يحتوي وعاء U على 4 كريات حمراء و6 سوداء، و يحتوي وعاء V على 5 كريات حمراء و3 سوداء و كل الكريات متماثلة ولا نفرّق بينها عند اللّمس. نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من أحد الوعاءين بالكيفية التالية:

نقوم بسحب بطاقة واحدة عشوائيا من كيس يحتوي على 6 بطاقات متماثلة ومرقمة من 1 إلى 6، إذا تحصلنا على أحد الرقمين 3 أو 5 نسحب الكريتين من U وفي باقي الحالات نسحب الكريتين من V.

نسمي A الحدث: " الحصول على أحد الرقمين 3 أو 5".

نسمي M الحدث: " الحصول على كريتين من نفس اللّون ".

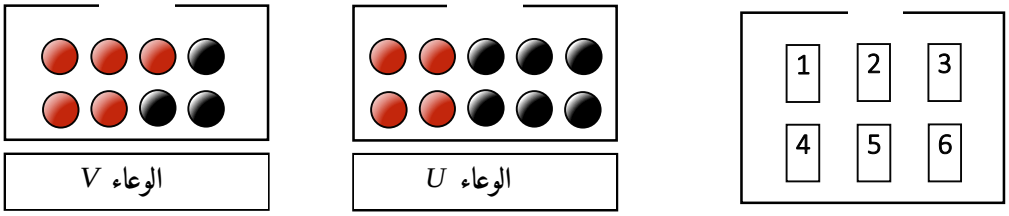


1) تحقق أنّ $P(\overline{A})$ احتمال السّحب من الوعاء V هو $\frac{2}{3}$.

2) علما أنّ الكريتين مسحوبتين من U ، بيّن أنّ احتمال أنّ تكونا من نفس اللّون هو $\frac{7}{15}$.

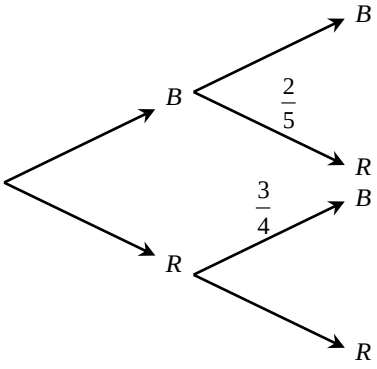
3) انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكملها واستنتج $P(M)$.

4) احسب $P_{\overline{M}}(A)$ احتمال السّحب من الوعاء U علما أنّ الكريتين المسحوبتين مختلفتا اللّون؟



التمرين 08: (بكالوريا 2020 - الموضوع الثاني - 4 نقاط)

كيس به ثلاث كريات بيضاء وكريتين حمراوين لا نميّز بينها عند اللّمس، نسحب عشوائيا كريتين على التوالي من الكيس بالكيفية التالية: إذا كانت الكرية المسحوبة بيضاء نعيدها إلى الكيس و إذا كانت حمراء لا نعيدها إلى الكيس.



1) أ) انقل الشجرة المقابلة ثم أكملها.

الحدث B يرمز إلى الحصول على كرية بيضاء والحدث R إلى الحصول على كرية حمراء.

ب) احسب احتمال أنّ تكون الكرية المسحوبة الثانية حمراء.

2) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب لكريتين عدد الكريات الحمراء المسحوبة.

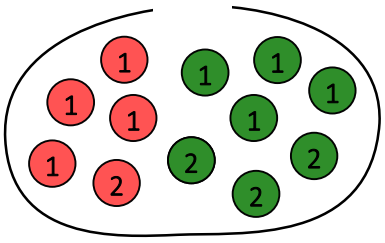
أ) عيّن مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X.

ب) بيّن أنّ: $P(X=1)=\frac{27}{50}$، ثم عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X.

ج) احسب $E(X)$ الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X.

التمرين 09: (بكالوريا 2019 - الموضوع الأول - 4 نقاط)

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 وكرية واحدة تحمل الرقم 2 وسبع كريات خضراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 و ثلاث كريات تحمل الرقم 2 (كل الكريات متماثلة لا نفرّق بينها عند اللّمس). نسحب عشوائيا كريتين من الكيس في آن واحد و نعتبر الحادثتين A و B حيث:



- A : " سحب كريتين من نفس اللّون "
- B : " سحب كريتين تحملان نفس الرقم ".

1) بيّن أنّ احتمال الحادثة A هو $P(A)=\frac{31}{66}$ واحسب احتمال الحادثة B.

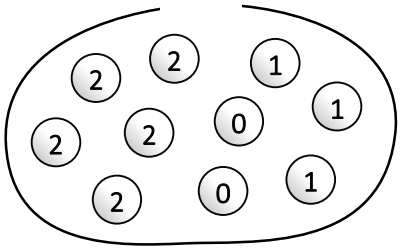
2) علما أنّ الكريتين المسحوبتين من نفس اللّون، ما احتمال أن تحملا نفس الرقم؟

3) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس.

- عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين 10: (بكالوريا 2019 - الموضوع الثاني - 4,5 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 كريات لا نفرّق بينها باللّمس منها كريتان تحملان الرقم 0 وثلاث تحمل الرقم 1 و الكريات الأخرى تحمل الرقم 2. نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الصندوق.



ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب، جداء الأرقام المسجلة على الكريات المسحوبة.

1) عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

2) بيّن أنّ احتمال الحصول على ثلاث كريات كل منها تحمل رقماً زوجياً هو $\frac{7}{24}$.

3) نسحب الآن من الصندوق كريتين على التوالي دون إرجاع.

- ما احتمال الحصول على كريتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علما أنّ جداءهما زوجي؟

التمرين 11: (بكالوريا 2018 - الموضوع الأول - 4 نقاط)

يحوي صندوق 10 كريات متماثلة لا نفرّق بينها باللّمس، منها أربع كريات بيضاء مرقمة بـ : 1، 2، 2، 3 وثلاث كريات حمراء مرقمة بـ : 2، 2، 3 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ : 2، 3، 3.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من هذا الصندوق. نعتبر الحادثتين:

- A : " الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني"
- B : " الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم ".

1) أ) احسب: $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B على الترتيب.

ب) بيّن أنّ: $P(A\cap B)=\frac{1}{20}$ ثم استنتج $P_A(B)$ و $P(A\cup B)$.

2) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا.

- عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

المرافق في البكالوريا

المحور الرابع: الاعداد المركبة

السنة الثالثة من التعليم الثانوي

شعبة علوم تجريبية

- بنك مواضيع شهادة البكالوريا من دورة 2008 إلى 2024
- أكثر من 115 تمرين مرتبة حسب الوحدات التعليمية

SCAN ME

المؤلف: الأستاذة أمينة

تواصل معي عبر فيسبوك وسأساعدك على الفهم.

جميع الحقوق محفوظة 2024 ©

التمرين 01: (بكالوريا 2024 - الموضوع الأول - 4 نقاط)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية:

$$\left(z-1+2\sqrt{3}\right)\left[z^2-2\left(1-\sqrt{3}\right)z+5-2\sqrt{3}\right]=0$$

II) في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب z_A ، z_B و z_C حيث: $z_A=1-\sqrt{3}+i$ ، $z_B=1-2\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_A}$

1) اكتب كلّا من $1-z_A$ ، z_C-1 و z_B على الشكل المثلثي.

2) جد لاحقة النقطة D مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$

3) بيّن أنّ الرباعي $ABCD$ معيّن.

التمرين 02: (بكالوريا 2024 - الموضوع الثاني - 4 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التبرير في كل حالة مما يلي:

1) z عدد مركب مرافقه $\overline{z}$، مرافق العدد المركب $z+i$ هو:

أ) $\overline{z}-i$ ب) $\overline{z}+i$ ج) $z-i$

2) العدد المركّب $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2024}$ يساوي:

أ) 1 ب) i ج) -1

3) z عدد مركب حيث $z=2\left(1+i\sqrt{3}\right)$

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، نضع: $S_n=\ln|z|+\ln|z|^2+\cdots+\ln|z|^n$ ، لدينا:

أ) $S_n=(n+1)^2\ln 2$ ب) $S_n=n(n+1)\ln 2$ ج) $S_n=2\left(\dfrac{1-(2\ln 2)^n}{1-2\ln 2}\right)\ln 2$

4) z عدد مركب حيث: $z=\sin\dfrac{\pi}{8}+i\cos\dfrac{\pi}{8}$ ، الشكل المثلثي للعدد المركّب z هو:

أ) $-\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}$ ب) $\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}$ ج) $\cos\dfrac{3\pi}{8}+i\sin\dfrac{3\pi}{8}$

التمرين 03: (بكالوريا 2023 - الموضوع الثاني - 4 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الآتية مع التبرير.

5) حلا المعادلة $8z^2-4z+1=0$ ذات المجهول z في $\mathbb{C}$ هما:

د) $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}i$ و $-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}i$ ه) $-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}i$ و $-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}i$ و) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}i$ و $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}i$

6) الشكل الجبري للعدد المركّب $\dfrac{1+\sqrt{3}+i}{1-i}$ هو:

د) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$ ه) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-i\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$ و) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\dfrac{-2+\sqrt{3}}{2}\right)$

7) الجذران التربيعيان للعدد المركّب $-8+6i$ هما:

د) $1+3i$ و $-1-3i$ ه) $1+3i$ و $1-3i$ و) $3+i$ و $-3-i$

8) الشكل المثلثي للعدد المركّب $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ هو:

د) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$ ه) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12}+i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$ و) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{12}+i\sin\dfrac{7\pi}{12}\right)$

التمرين 04: (بكالوريا 2019 - الموضوع الأول - 5 نقاط)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z-i)(z^2-4z+5)=0$.

II) نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A، B و C التي لاحقاتها i، $2-i$ و $2+i$ على الترتيب.

1) أُكتب العدد المركّب $\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}$ على الشكل الأسي، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC.

2) من أجل كل عدد مركب z يختلف عن $2+i$ نضع $f(z)=\frac{iz-1-2i}{2z-4-2i}$.

أ) عيّن المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق $|f(z)|=\frac{1}{2}$.

ب) بيّن أنّ العدد حقيقي $[f(i)]^{1440}$ موجب.

3) نعتبر الدوران r الذي مركزه النقطة C وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) عيّن لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران r و بيّن أنّ النقط D، C و A في استقامية.

ب) استنتج أنّ النقطة D هي صورة النقطة A بتحويل نقطي بسيط يطلب تحديد طبيعته وعناصره.

التمرين 05: (بكالوريا 2019 - الموضوع الثاني - 5 نقاط)

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها z_A، z_B و z_C على الترتيب حيث: $z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-2z_A$

1) أ) أُكتب العدد المركّب z_A على الشكل الأسّي.

ب) احسب العدد $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}+\left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$.

2) أ) T الانسحاب الذي يحول A إلى C، عيّن z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالانسحاب T.

ب) استنتج طبيعة الرباعي $ABDC$.

3) أُكتب العدد المركّب z_C-z_A على الشكل الأسّي.

4) جد قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركّب $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C-z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا.

5) لتكن M نقطة كيفية من المستوي لاحقتها z حيث M تختلف عن A وتختلف عن C.

عيّن (E) مجموعة النقط M التي يكون من أجلها $\frac{z_A-z}{z_C-z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

التمرين 06: (بكالوريا 2018 - الموضوع الثاني - 5 نقاط)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(\overline{z}-4+i)(z^2-4z+5)=0$ ($\overline{z}$ يرمز لمرافق العدد z)

II) في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب:

$z_A=2+i$، $z_B=4+i$ و $z_C=\overline{z_A}$

1) تحقّق أنّ: $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=i$ ثمّ عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا.

2) D نقطة من المستوي لاحقتها z_D حيث:

$$\begin{cases}|z_D-z_A|=|z_B-z_A| \\ \arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

- بيّن أنّ المثلث ABD متقايس الأضلاع واحسب z_D.

3) احسب z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABD ثمّ عيّن نسبة وزاوية التشابه المباشر الذي مركزه A ويحوّل G إلى D.

4) عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z (M تختلف عن C) بحيث $(k\in\mathbb{Z})$ $\arg\left(\frac{z_G-z}{z_C-z}\right)=\pi+2k\pi$.

التمرين 07: (بكالوريا 2017 - الدورة العادية - الموضوع الأول - 5 نقاط)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z+2)\left(z^2-4z+8\right)=0$

II) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها: $z_A=2-2i$، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-2$

1) أُكتب كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسّي.

2) عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة B مركز ثقل المثلث ACD.

3) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A و B) حيث: $\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\frac{\pi}{2}$

- تحقّق أنّ مبدأ المعلم O هو نقطة من (Γ) ثمّ عيّن طبيعة المجموعة (Γ) وأنشئها.

4) ليكن h التحاكي الذي مركزه النقطة C و نسبته 2، (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h

- عيّن طبيعة المجموعة (Γ') مع تحديد عناصرها المميزة.

التمرين 08: (بكالوريا 2017 - الدورة العادية - الموضوع الثاني - 5 نقاط)

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة مما يلي:

1) مجموعة حلول المعادلة $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2=1$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي: $S=\left\{-\frac{1}{2}+i\right\}$.

2) من أجل كل عدد مركب z، $(z+2)\times(\overline{z}+2)=|z+2|^2$.

3) من أجل كل عدد طبيعي n، $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}=1$.

4) S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة 1 و نسبته 3 و زاويته $\frac{\pi}{2}$. صورة الدائرة (C) ذات المركز $\omega(0;1)$ ونصف القطر 3 بالتشابه S هي الدائرة (C') ذات المركز $\omega'(-2;-3)$ ونصف القطر 9.

5) من أجل كل عدد حقيقي α: إذا كان $Z=(\sin\alpha+i\cos\alpha)\times(\cos\alpha-i\sin\alpha)$ فإنّ: $\arg(Z)=\frac{\pi}{2}-2\alpha+2k\pi$ حيث k عدد صحيح.

التمرين 09: (بكالوريا 2017 - الدورة الاستثنائية - الموضوع الأول - 5 نقاط)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z-2)\left(z^2+2z+4\right)=0$

II) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ حيث: $\|\vec{u}\|=2\ cm$

لتكن النقط A ، B و C التي لاحقاتها: $z_A=2$ ، $z_B=-1+i\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_B}$ ($\overline{z_B}$ هو مرافق z_B)

1) أ) أُكتب العدد z_B على الشكل الأسّي، ثمّ استنتج الشكل الأسّي للعدد المركّب z_C.

ب) عيّن مركز و نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC، ثمّ أنشئ النقط A، B و C.

2) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة O، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{2\pi}{3}$.

أ) أُكتب العبارة المركبة للتشابه S ثمّ عيّن لاحقة كل من A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C على الترتيب بالتشابه S ، ثمّ أنشئ في المعلم السابق النقط A' ، B' و C'.

ب) احسب بالسنتمتر المربع مساحة المثلث $A'B'C'$.

التمرين 10: (بكالوريا 2017 - الدورة الاستثنائية - الموضوع الثاني - 5 نقاط)

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها $z_A=-3-2i$ ، $z_B=1+i$ و $z_C=4-3i$

1) عيّن النسبة و زاوية للتشابه المباشر S ذي المركز A و الذي يحوّل النقطة B إلى النقطة C.

2) أُكتب على الشكل الأسّي العدد المركّب $\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC.

3) نرمز بـ G مركز ثقل المثلث ABC و بـ I إلى منتصف القطعة $[AC]$.

عيّن كلا من z_G و z_I لاحقتي النقطتين G و I، ثمّ بيّن أنّ النقط B ، G و I في استقامية.

4) نعتبر النقطة D نظيرة النقطة B بالنسبة إلى I، حدّد بدقة طبيعة الرباعي $ABCD$.

5) نعتبر (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقّق: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|=5\sqrt{2}$

أ) تحقّق أنّ النقطة C تنتمي إلى (Γ).

ب) عيّن طبيعة المجموعة (Γ) ثمّ أنشئها.

التمرين 11: (بكالوريا 2016 - الدورة العادية - الموضوع الأول - 4,5 نقاط)

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. من أجل كل نقطة M من المستوي لاحقتها العدد المركّب z حيث $(z\neq 1)$ نرفق النقطة M' لاحقتها العدد المركّب z' حيث: $z'=\dfrac{z-2}{z-1}$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z'=z$.

2) النقطتان A و B لاحقتاهما z_1 و z_2 على الترتيب حيث: $z_1=1-i$ و $z_2=\overline{z_1}$

أ) أُكتب $\dfrac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسّي.

ب) بيّن أنّ النقطة B هي صورة للنقطة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ O، يطلب تعيين زاوية له.

3) نضع $z'\neq z$. نعتبر النقطتين C و D لاحقتيهما 2 و 1 على الترتيب.

- عيّن (Γ) مجموعة النقط M حيث M' تنتمي إلى محور التراتيب ثمّ أنشئ (Γ).

4) h التحاكي الذي مركزه المبدأ O ونسبته 2

أ) عيّن طبيعة التحويل النقطي $S=h\circ R$ وعناصره المميزة.

ب) أُكتب العبارة المركبة للتحويل S.

ج) عيّن ثمّ أنشئ المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل النقطي S.

التمرين 12: (بكالوريا 2016 - الدورة العادية - الموضوع الثاني - 4,5 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة: $\left(z-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)\left(z^2+\sqrt{3}z+1\right)=0$

2) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب:

$z_A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ ، $z_B=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ و $z_C=\overline{z_B}$

أ) أُكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي.

ب) بيّن أنّه يوجد تشابه مباشر S مركزه B و يحوّل النقطة C إلى النقطة A يطلب تعيين عناصره المميزة.

3) أ) عيّن لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع، ثمّ حدّد بدقة طبيعته.

ب) عيّن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z و التي تحقّق: $|z-z_A|=|\bar{z}-z_B|$ حيث $\bar{z}$ هو مرافق z.

ج) عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقّق: $z=z_B+\sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما θ يتغير على $\mathbb{R}$ ثمّ تحقّق أنّ $A\in(\Gamma)$.

التمرين 13: (بكالوريا 2016 - الدورة الاستثنائية - الموضوع الأول - 5 نقاط)

1) نضع من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=z^3-24\sqrt{3}$

أ) تحقّق أنّ: $P\left(2\sqrt{3}\right)=0$.

ب) جد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=\left(z-2\sqrt{3}\right)\left(z^2+az+b\right)$.

ج) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z)=0$.

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. A، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب: $z_A=-\sqrt{3}+3i$ ، $z_B=-\sqrt{3}-3i$ و $z_C=2\sqrt{3}$.

أ) أُكتب على الشكل الجبري العدد المركّب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

ب) بيّن أنّه يوجد دوران r مركزه A و يحوّل النقطة B إلى النقطة C، يطلب تعيين زاويته.

ج) استنتج طبيعة المثلث ABC.

د) عيّن z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$، ثمّ حدّد بدقة طبيعة الرباعي $ABDC$.

3) عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة غير المعدومة z بحيث: $\arg\left(\dfrac{z}{\bar{z}}\right)=2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

التمرين 14: (بكالوريا 2016 - الدورة الاستثنائية - الموضوع الثاني - 4,5 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $2\bar{z}^{-3}+3\bar{z}^{-2}-3\bar{z}+5=0\ \cdots\cdots(E)$

يشير الرمز $\bar{z}$ إلى مرافق العدد المركّب z

1) أ) أثبت أنّ المعادلة (E) تكافئ المعادلة $\left(2\bar{z}+5\right)\left(\bar{z}^{-2}-\bar{z}+1\right)=0$.

ب) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

2) في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقها على الترتيب:

$z_A=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-1$ ، $z_D=-\dfrac{5}{2}$

أ) أُكتب كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسّي.

ب) أنشئ النقط A، B، C و D.

ج) أثبت أنّ: $z_B-z_C=z_B\left(z_A-z_C\right)$.

د) استنتج طبيعة المثلث ABC.

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C وزاويته $\dfrac{\pi}{3}$ ونسبته 2 ولتكن F صورة A بالتحويل S

- أنشئ النقطة F ثمّ حدّد طبيعة المثلث AFC.

4) عيّن طبيعة المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z+1=kz_B$. لما يتغير k في المجموعة $\mathbb{R}_+$.

التمرين 15: (بكالوريا 2015 - الموضوع الأول - 4,5 نقاط)

I) عيّن العددين المركبين α و β حيث: $\begin{cases}2\alpha-\beta=-3\\2\overline{\alpha}+\overline{\beta}=-3-2i\sqrt{3}\end{cases}$ مع $\overline{\alpha}$ مرافق α و $\overline{\beta}$ مرافق β

II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A، B و C النقط التي لاحقاتها على الترتيب:

$z_A=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_A=z_Ce^{i\frac{\pi}{3}}$

1) أ) أُكتب z_A و z_C على الشكل الأسّي ثمّ عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقياً سالباً.

ب) تحقّق أنّ العدد المركّب $2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}+\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}-\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$ حقيقي.

2) D النقطة ذات اللاحقة $z_D=1+i$

أ) حدّد النسبة و زاوية للتشابه S الذي مركزه O و يحوّل D إلى A.

ب) أُكتب $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري ثمّ استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

3) عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقّق: $z=k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ حيث k يمسح $\mathbb{R}^+$.

التمرين 16: (بكالوريا 2015 - الموضوع الثاني - 5 نقاط)

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب z_A، z_B و z_C

حيث: $z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B=-\overline{z_A}$ ، $z_C=-(z_A+z_B)$ ($\overline{z_A}$ هو مرافق z_A)

1) أ) أُكتب كلا من العددين المركّبين z_B و z_C على الشكل الأسّي.

ب) استنتج أنّ النقط A، B و C تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

ج) أنشئ الدائرة (γ) و النقط A، B و C.

2) أ) تحقّق أنّ: $\frac{z_B-z_C}{z_B-z_A}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

ب) استنتج أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع وأنّ النقطة O مركز ثقل هذا المثلث.

ج) عيّن وأنشئ (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $|z|=|z-\sqrt{3}-i|$.

3) أ) عيّن زاوية للدوران r الذي مركزه O و يحوّل C إلى A.

ب) أثبت أنّ صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

التمرين 17: (بكالوريا 2014 - الموضوع الأول - 5 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-6\sqrt{2}z+36=0$.

2) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، لتكن النقط A ، B ، C و D التي لاحقاتها على الترتيب:

$z_A=3\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=6\sqrt{2}$ و $z_D=\frac{z_C}{2}$.

أ) أُكتب z_A، z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسّي.

ب) احسب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$.

ج) بيّن أنّ النقط O، A، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D، يطلب تعيين نصف قطرها.

د) احسب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ ثمّ جد قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$. ماهي طبيعة الرباعي $OACB$ ؟

3) ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) أُكتب العبارة المركبة للدوران R.

ب) عيّن لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R ثمّ تحقّق أنّ النقط A ، C و C' في استقامية.

ج) عيّن لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R ثمّ حدّد صورة الرباعي $AOCB$ بالدوران R.

التمرين 18: (بكالوريا 2014 - الموضوع الثاني - 4 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z حيث: $(z-i)\left(z^2-2z+5\right)=0$

2) في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ (وحدة الطول $1\,cm$)، تعطى النقط A ، B و C لاحقاتها: $z_A=i$ ، $z_B=1+2i$ و $z_C=1-2i$ على الترتيب

أ) أنشئ النقط A ، B و C.

ب) جد z_H لاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC).

ج) احسب مساحة المثلث ABC.

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A ، نسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) عيّن الكتابة المركبة للتشابه S.

ب) بيّن أنّ مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2}\,cm^2$.

ج) M نقطة لاحقتها z ، عيّن مجموعة النقط M حيث: $|z|=|iz+1+2i|$.

التمرين 19: (بكالوريا 2013 - الموضوع الأول - 5 نقاط)

1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة، المعادلة (I) ذات المجهول z التالية: $z^2-(4\cos\alpha)z+4=0\cdots$ (I)

حيث α وسيط حقيقي.

2) من أجل $\alpha=\frac{\pi}{3}$، نرمز إلى حلي المعادلة (I) بـ z_1 و z_2. بيّن أنّ: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=1$.

3) نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A ، B و C التي لاحقاتها: $z_A=1+i\sqrt{3}$ ؛ $z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_C=4+i\sqrt{3}$ على الترتيب.

أ) أنشئ النقط A ، B و C.

ب) أُكتب على الشكل الجبري العدد المركّب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ ، ثمّ استنتج أنّ C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويطلب تعيين نسبته وزاويته.

ج) عيّن لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$، ثمّ أنشئ G.

د) احسب z_D لاحقة النقطة D ، بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع.

التمرين 20: (بكالوريا 2013 - الموضوع الثاني - 4,5 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية:

$$z^2+4z+13=0\cdots(E)$$

1) تحقّق أنّ العدد المركّب $-2-3i$ حل للمعادلة (E)، ثمّ جد الحل الآخر.

2) A و B نقطتان من المستوي المركّب لاحقتاهما $z_A=-2-3i$ و $z_B=i$ على الترتيب. S التشابه المباشر الذي مركزه A، نسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ و الذي يحوّل كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$

أ) بيّن أنّ: $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$.

ب) احسب z_C لاحقة النقطة C، علما أنّ C هي صورة B بالتشابه S.

3) لتكن النقطة D، حيث: $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=0$.

أ) بيّن أنّ D هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.

ب) احسب z_D لاحقة النقطة D.

ج) بيّن أنّ : $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=i$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ACD.

التمرين 21: (بكالوريا 2012 - الموضوع الأول - 4 نقاط)

1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة ذات المجهول z التالية: $z=\frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ (حيث $z\neq 2-3i$)

- حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة.

2) ينسب المستوي المركّب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب: z_A و z_B حيث $z_A=1+i\sqrt{5}$ و $z_B=1-i\sqrt{5}$.

- تحقّق أنّ A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

3) نرفق بكل النقطة M من المستوي لاحقتها z حيث $z\neq 2-3i$، النقطة M' لاحقتها z' حيث $z'=\frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$. النقط C، D، E لواحقها على الترتيب: $z_C=-2i$ ، $z_D=2-3i$ و $z_E=3i$ و(Δ) محور القطعة $[CD]$.

أ) عبّر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM.

ب) استنتج أنّه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإنّ النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها. تحقّق أنّ E تنتمي إلى (γ).

التمرين 22: (بكالوريا 2012 - الموضوع الثاني - 4,5 نقاط)

1) $P(z)$ كثير الحدود للمتغيّر المركّب z حيث : $P(z)=z^3-12z^2+48z-72$

أ) تحقّق أنّ 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

ب) جد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-6)(z^2+\alpha z+\beta)$.

ج) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z)=0$.

2) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B ، C نقط من المستوي المركّب لواحقها على الترتيب: $z_A=6$ ، $z_B=3+i\sqrt{3}$ و $z_C=3-i\sqrt{3}$

أ) اكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي.

ب) اكتب العدد المركّب $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$ على الشكل الجبري، ثمّ على الشكل الأسّي.

ج) استنتج طبيعة المثلث ABC.

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C، نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) جد الكتابة المركبة للتشابه S.

ب) عيّن $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S.

ج) بيّن أنّ النقط A ، B ، A' في استقامية.

التمرين 23: (بكالوريا 2011 - الموضوع الأول - 5 نقاط)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=-i$ ، $z_B=2+3i$ و $z_C=-4+i$

1) أ) اكتب على الشكل الجبري العدد المركّب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

ب) عيّن طويلة العدد المركّب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ وعمدة له، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC.

2) نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z'=iz-1-i$$

أ) عيّن طبيعة التحويل T محدّدا عناصره المميّزة.

ب) ماهي صورة النقطة B بالتحويل T.

3) لتكن D النقطة ذات اللاحقة $z_D=-6+2i$

أ) بيّن أنّ النقاط A ، C و D في استقامية.

ب) عيّن نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحوّل النقطة C إلى النقطة D.

ج) عيّن العناصر المميّزة للتشابه S الذي مركزه A ويحوّل B إلى D.

التمرين 24: (بكالوريا 2011 - الموضوع الثاني - 4 نقاط)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=3-2i$ ، $z_B=3+2i$ و $z_C=4i$

1) أ) علّم النقط A ، B و C.

ب) ما طبيعة الرباعي $OABC$؟ علّل إجابتك.

ج) عيّن لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$.

2) عيّن ثمّ أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقّق: $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$.

3) أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2-6z+13=0$، نسمي z_0 ، z_1 حلي هذه المعادلة.

ب) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركّب z.

- عيّن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقّق: $|z-z_0|=|z-z_1|$.

التمرين 25: (بكالوريا 2010 - الموضوع الأول - 5 نقاط)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما على الترتيب: $z_A=1+i$ و $z_B=3i$.

1) اكتب على الشكل الأسّي: z_A و z_B.

2) ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z'=2iz+6+3i$$

أ) عيّن العناصر المميزة للتشابه المباشر S.

ب) عيّن z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S.

ج) استنتج طبيعة المثلث ABC.

3) لتكن النقطة D مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}$.

أ) عيّن z_D لاحقة النقطة D.

ب) عيّن مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

4) لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B وعن D لاحقتها z ولتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

أ) تحقّق أنّ النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 6+3i$ تنتمي إلى (Δ).

ب) أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركّب $\frac{z_B - z}{z_D - z}$. عيّن حينئذ المجموعة (Δ).

التمرين 26: (بكالوريا 2010 - الموضوع الثاني - 4 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 6z + 18 = 0$ ، ثمّ اكتب الحلين على الشكل الأسّي.

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B ، C و D لاحقاتها على الترتيب: $z_A = 3+3i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -z_A$ و $z_D = -z_B$.

أ) بيّن أنّ النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O مبدأ المعلم.

ب) عيّن زاوية للدوران R الذي مركزه O و يحوّل النقطة A إلى النقطة B.

ج) بيّن أنّ النقط A ، O و C في استقامية وكذلك النقط B ، O و D.

د) استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

التمرين 27: (بكالوريا 2009 - الموضوع الأول - 5 نقاط)

$P(z)$ كثير حدود حيث: $P(Z) = (Z-1-i)(Z^2 - 2Z + 4)$ و Z عدد مركب.

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(Z) = 0$.

2) نضع: $Z_1 = 1+i$ ؛ $Z_2 = 1-\sqrt{3}i$

أ) اكتب Z_1 و Z_2 على الشكل الأسّي.

ب) اكتب $\frac{Z_1}{Z_2}$ على الشكل الجبري ثمّ الشكل الأسّي.

ج) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

3) أ) n عدد طبيعي. عيّن قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n$ حقيقيا.

ب) احسب قيمة العدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{456}$.

التمرين 28: (بكالوريا 2009 - الموضوع الثاني - 4 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 2z + 4 = 0$.

2) نسمي z_1 ؛ z_2 حلي هذه المعادلة.

أ) اكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسّي.

ب) A ، B ، C هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب:

$z_A = 1 - i\sqrt{3}$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = \frac{1}{2}\left(5 + i\sqrt{3}\right)$

(i يرمز إلى العدد المركّب الذي يحقق $i^2 = -1$)

- احسب الأطوال AB ، AC ، BC ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC .

ج) جد الطويلة وعمدة للعدد المركّب Z حيث: $Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.

د) احسب Z^3 و Z^6 ثمّ استنتج أنّ Z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k .

التمرين 29: (بكالوريا 2008 - الموضوع الأول - 4,5 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - (1+2i)z - 1 + i = 0$

نرمز للحلين بـ z_1 و z_2 حيث $|z_1| < |z_2|$

- بيّن أنّ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي.

2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن A ، B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب 1 ، z_1 ، z_2 .

ليكن Z العدد المركّب حيث : $Z = \frac{z_2 - 1}{z_1 - 1}$

أ) انطلاقا من التعريف $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ من الخاصية: $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2}$

برهن أنّ $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$ وأنّ $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ حيث θ ، θ_1 و θ_2 أعداد حقيقية.

ب) اكتب Z على الشكل الأسّي.

ج) اكتب Z على الشكل المثلثي واستنتج أنّ النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه A ، يطلب تعيين زاويته ونسبته.

التمرين 30: (بكالوريا 2008 - الموضوع الثاني - 5 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2 + iz - 2 - 6i = 0$$

2) نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب حيث:

$z_A = 2 + i$ و $z_B = -2 - 2i$

عيّن z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.

3) لتكن C النقطة ذات اللاحقة z_C حيث $z_C = \frac{4-i}{1+i}$.

- اكتب z_C على الشكل الجبري ثمّ أثبت أنّ النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ).

4) أ) برهن أنّ عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه $M_0(z_0)$ و نسبته k $(k>0)$ وزاويته θ والذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$.

ب) تطبيق: عيّن الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل S المعرف بـ : $z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z + \frac{1}{2}i\right)$.

المرافق في البكالوريا

المحور الخامس: أسئلة متعددة الخيارات

السنة الثالثة من التعليم الثانوي

شعبة علوم تجريبية

- بنك مواضيع شهادة البكالوريا من دورة 2008 إلى 2024
- أكثر من 115 تمرين مرتبة حسب الوحدات التعليمية

SCAN ME

المؤلف: الأستاذة أمينة

تواصل معي عبر فيسبوك وسأساعدك على الفهم.

جميع الحقوق محفوظة 2024 ©

التمرين 01: (بكالوريا 2023 - الموضوع الأول - 4 نقاط)

أجب بصحيح أو خاطئ مع التّبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1) حلّ المعادلة التفاضلية $y'=2y+6$ الذي يحقّق $y(\ln 2)=25$ هو الدالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=7e^{2x}-3$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\ln\left(e^x-1\right)\right]=+\infty$.

3) القيمة المتوسطة للدالة $x\mapsto x\left(x^2+1\right)^2$ على المجال $[0;2]$ هي 31.

4) (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\int_n^{n+1}e^{-x+3}dx$

من أجل كل عدد طبيعي n: $v_0+v_1+\cdots+v_n=e^3-e^{-n+2}$.

التمرين 02: (بكالوريا 2022 - الموضوع الأول - 4 نقاط)

أجب بصحيح أو خاطئ مع التّبرير في كل حالة من الحالات التالية:

1) الدالة العددية f المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2-x+\ln x}{x}$.

$y=x-1$ هي معادلة للمستقيم المقارب المائل لمنحنى الدالة f عند $+\infty$.

2) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي x: $\ln(2x-1)+\ln(2x+1)=\ln 3\ \cdots\ (E)$

للمعادلة (E) حلان متميزان في $\mathbb{R}$.

3) f و F الدالتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ و $F(x)=x+\ln\left(1+e^{-2x}\right)$

F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

4) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $u_n=\dfrac{n+1}{n}$.

قيمة المجموع: $\ln u_1+\ln u_2+\cdots+\ln u_{2022}$ هي $\ln 2022$.

التمرين 03: (بكالوريا 2022 - الموضوع الثاني - 4 نقاط)

عيّن الاقتراح الصّحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثّلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التّبرير:

1) قيمة العدد الحقيقي I حيث $I=\int_1^2(x-1)e^{x^2-2x}dx$ هي:

أ) $1-\dfrac{1}{e}$ ب) $\dfrac{e-1}{2e}$ ج) $\dfrac{e+1}{2e}$

2) (u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرفتان على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=3$، $u_{n+1}=\dfrac{1}{3}u_n+3$، $v_n=u_n+\alpha$ حيث α عدد حقيقي.

قيمة العدد الحقيقي α حتّى تكون المتتالية (v_n) هندسية هي:

أ) $-\dfrac{9}{2}$ ب) $\dfrac{9}{2}$ ج) $\dfrac{2}{9}$

3) f دالة عددية تُحقق، من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما: $\ln(x+1)\le f(x)\le e^x-1$. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ هي:

أ) $+\infty$ ب) -1 ج) 1

4) نعتبر المعادلة التفاضلية (E): $(E)\ \cdots\ y''=2-\dfrac{1}{x^2}$، عبارة الحل H للمعادلة (E) على $]0;+\infty[$ والذي يُحقق $H(1)=4$ و $H'(1)=2$ هي:

أ) $H(x)=x^2-x+4+\ln x$ ب) $H(x)=x^2-x+1+\ln x$ ج) $H(x)=x^2-x+4-\ln x$

التمرين 04: (بكالوريا 2021 - الموضوع الأول - 4 نقاط)

أجب بصح أو خطأ مع التّبرير في كل حالة من الحالات التالية:

1) الدالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+\dfrac{2}{e^x+1}$. من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)+f(-x)=2$.

2) (u_n) متتالية هندسية معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول 2 وأساسها $\dfrac{1}{3}$ ، نضع: $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

3) من أجل كل عدد طبيعي n عبارة S_n هي: $3-\dfrac{1}{3^{n+1}}$.

4) الدالة العددية g المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x+\ln\left(e^x+1\right)$. تمثيلها البياني (C) في المستوي المنسوب إلى معلم يقبل مستقيما مقاربا مائلا $y=2x$ معادلة له.

5) الدالة العددية h المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=e^{3x}+\dfrac{1}{3}$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y'-3y=1$.

التمرين 05: (بكالوريا 2021 - الموضوع الثاني - 4 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التعليل.

1) لتكن (u_n) متتالية حسابية معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول 1 و أساسها 2. نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$P_n=e^{u_0}\times e^{u_2}\times\cdots\times e^{u_n}$ ، عبارة P_n هي:

أ) $e^{n(n+1)}$ ب) $e^{(n+1)^2}$ ج) $e^{-n(n+1)}$

2) الدالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\ln\left(x^2+2x+3\right)$. من أجل كلّ عدد حقيقي x لدينا:

أ) $f(-2-x)=f(x)$ ب) $f(2-x)=f(x)$ ج) $f(-x)=f(x)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(x+1)-\ln(x+2)\right]$ تساوي:

أ) 1 ب) $+\infty$ ج) 0

4) (w_n) متتالية هندسية معرّفة على $\mathbb{N}$ حدودها موجبة تماما وأساسها عدد حقيقي q موجب تماما ويختلف عن 1 نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_n=\ln w_n$. (v_n) هي متتالية

أ) هندسية ب) حسابية ج) لا حسابية ولا هندسية

التمرين 06: (بكالوريا 2020 - الموضوع الأول - 4 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بيّن الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الآتية مع التّبرير.

1) قانون احتمال المتغيّر العشوائي X معرّف بالجدول المقابل:

x_i	-2	0	1	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغيّر العشوائي X هو:

أ) $-\dfrac{1}{20}$ ب) $-\dfrac{1}{10}$ ج) $-\dfrac{3}{20}$

2) المتتالية العددية (w_n) معرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ: $w_n=4\times5^n-2n+1$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n=w_0+w_1+w_2+\cdots+w_n$ ، المجموع S_n يساوي

أ) $5^{n+1}-(n+1)^2$ ب) $5^{n+1}-n^2$ ج) 5^n-n^2

3) نعتبر المتراجحة ذات المجهول الحقيقي x: $-2e^{2x}+5e^x-2\geq0$

مجموعة حلول هذه المتراجحة في مجموعة الأعداد الحقيقية هي:

أ) $[-\ln2;\ln2]$ ب) $[-1;-\ln2]$ ج) $[\ln2;+\infty[$

التمرين 07: (بكالوريا 2020 - الموضوع الثاني - 4 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الآتية مع التّبرير.

1) نعتبر الدّالة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بالشكل: $f(x)=-x+\ln x$.

على المجال $]0;+\infty[$، الدالة f :

أ) متزايدة تماما ب) متناقصة تماما ج) غير رتيبة

2) يتكون فريق عمل من 4 إناث و3 ذكور، يُراد تشكيل لجنة تضم 3 أعضاء. احتمال أن تكون اللجنة من الجنسين هو:

أ) $\frac{6}{7}$ ب) $\frac{4}{7}$ ج) $\frac{1}{7}$

3) لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها e وحدها الأول u_0، حيث: $u_0=e^{-\frac{1}{2}}$ (e أساس اللوغاريتم النيبيري)

من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n=\ln(u_0\times u_1\times\cdots\times u_n)$. S_n يساوي:

أ) $\frac{n^2-1}{2}$ ب) $\frac{n^2+1}{2}$ ج) $\frac{n^2}{2}$